

## **ENSEÑANZA** **de los Quebrados Comunes** **en el 4<sup>o</sup> año Escolar.**

Nos proponemos escribir unos breves apuntes sobre la enseñanza de los quebrados comunes en el 4<sup>o</sup> año escolar, y conviene ante todo decir algo acerca de su importancia y de porqué subsiste en nuestros programas la referida enseñanza.

Hoy que se ha adoptado definitivamente el sistema decimal de pesas y medidas, y que en la práctica la mayor parte de los problemas se resuelven por decimales, parece casi un anacronismo que los quebrados comunes figuren en la asignatura de aritmética de nuestras escuelas.

Sin embargo, es necesario fijar nuestra atención en que las decimales vienen siendo una aplicación de los quebrados al mismo tiempo que de la numeración, y es fuerza estudiar primero éstos, si se quiere que los niños entiendan bien aquellas.

Por otra parte, es muy común que en las operaciones comerciales figuren en los precios de las mercancías los centavos y fracciones comunes de centavo, y mal podrían servirse los niños de los conocimientos aritméticos adqui-

ridos en la escuela, si no tuvieran idea de estas fracciones y del modo de operar con ellas.

No podemos olvidarnos de lo que D. Carlos A. Carrillo decía sobre este punto, á saber: que los medios, tercios, cuartos, etc., están mucho más al alcance de la inteligencia infantil y se han fijado primero en ellos, que en las décimas y centésimas que, podríamos decir, son una aplicación más artificiosa que natural.

Agreguemos á esto que la enseñanza de los quebrados comunes tiene una influencia muy notable en el desarrollo de las facultades intelectuales del niño, que se presta de una manera admirable para hacer intuitiva la enseñanza de la aritmética, que afirma los conocimientos que el niño tiene sobre la numeración y operaciones de enterados, dando variedad á los ejercicios, y que robustece su poder de abstracción; y tendremos completamente justificada la subsistencia de esta parte de la aritmética en el programa de la escuela elemental.

La enseñanza de los quebrados tiene una gran influencia educativa y se presta muy bien para el empleo de la intuición, porque los niños observan de una manera experimental el valor relativo de las diferentes partes que se hacen del entero: medios, cuartos, octavos, etc., comparándolas con ellas á la vista y apreciando el valor por el tamaño; porque todas las propiedades de los quebrados y todas las operaciones que con ellos se pueden hacer, les son demostradas haciendo uso de la forma socrática, de manera que les parece haberlas descubierto casi sin el auxilio del maestro, y se acostumbran de esa manera á razo-

nar metódicamente, sin pagarse de las palabras, sino de la comparación matemática.

Adquieren muy fácilmente la idea de la proporcionalidad inversa en las cantidades, porque intuitivamente aprenden que mientras aumente el número de partes disminuye el tamaño y por tanto el valor de ellas. Se afirman los conocimientos que tienen los niños sobre numeración y sobre el cálculo, porque al encontrar, por ejemplo, los cuartos, octavos, veinte avos, etc., que tiene un medio, no hacen más que aplicar lo que saben acerca del valor relativo del 4, el 8 y el 20 comparados con el 2.

Cuando encuentren que los tercios y cuartos para ser sumados necesitan reducirse á doceavos, encuentran sin quererlo el menor múltiplo de esos números; cuando reducen quebrados de una especie á otra se ejercitan en la multiplicación y en la división, equivaliendo estos ejercicios mentales á los que se hacen con los enteros; pero introduciendo la novedad y la variedad que tanta influencia tienen en la enseñanza.

Se robustece el poder de abstracción del niño porque además de tener en cuenta la especie á que la cantidad pertenece, aquí debe fijarse en la clase de partes de que se trata para poder ejecutar las operaciones que hay que hacer.

Por último, la enseñanza de los quebrados es indispensable porque, aún haciendo uso de las decimales, indicándose siempre las operaciones que deben ejecutarse en un problema, en forma de quebrado, precisa este estudio para saber el por qué de lo que se hace.

Todo ésto que indicamos aquí de una manera general, podrá irse viendo punto por punto en lo que diremos después, acerca de la manera de enseñar los quebrados, y nos permitiremos entónces, para mayor claridad, volver á llamar la atención sobre ello.

La enseñanza de los quebrados comunes puede dividirse en dos partes: la primera comprende la idea de las diferentes fracciones que pueden hacerse de un entero y cálculo mental con ellas, y la segunda, la escritura de los quebrados y el cálculo escrito.

Para el desarrollo de las lecciones correspondientes á la primera parte, puede seguirse el orden siguiente:

1<sup>o</sup> División del objeto en partes iguales.

Para esto deben preferirse aquellos objetos que representan propiamente la unidad, como una fruta, un metro, un pizzarrín entero, una barra de gis, y en general los que tienen un tamaño más ó menos determinado; pues hacerlo con rayas puede, en el principio, dar origen á confusión de parte de los niños, toda vez que observarían que á veces la mitad ó la tercera parte de una raya, pueden ser mayores que una raya entera.

El objeto se dividirá en las partes que sea necesario según sea la unidad fraccionaria de que se quiere dar idea á los niños. El orden que en la práctica parece más apropiado en este asunto, es dar la idea de medios, cuartos, octavos, tercios, sextos, novenos, quintos, décimos, séptimos, onceavos, doceavos, etc., deteniéndose mucho más en los primeros, y tocando con menor detenimiento lo que se refiere á los onceavos, doceavos, etc.

2° Preguntar á los niños el número de partes que se han hecho y pedirles el nombre de cada uno de ellas si pueden darlo, y si no, lo dirá el maestro haciendo que ellos lo repitan.

3° Dividir en el mismo número de partes otros objetos, preguntando otra vez cuántas se han hecho y como se llaman.

4° Recapitulación acerca de lo dicho sobre cada uno de los objetos que se han fraccionado, para llegar á la conclusión respecto del valor del entero, en partes de las que se han hecho; v. g.: se preguntará cuántas mitades salieron de una manzana, de un gis, de un metro, de un pliego de papel, del agua de un vaso, etc., hasta llegar á la conclusión de que todo entero tiene dos mitades. Lo mismo se haría cuando se tratara de cuatro ú otras partes.

5° Idea de la fracción con respecto á una cantidad mayor que la unidad.

Con objeto de hacer que los niños tengan la idea de lo que es, no sólo la mitad de un entero; sino la mitad en general, se puede hacer que dividan en dos partes iguales una pila de 10 pizarras, 20 libros, 8 centavos, un grupo de 12 niños, etc., y digan cual es la mitad de 10, 20, 8, 12, etc.

6° Idea de la fracción con respecto á otra fracción.

Este punto que no tiene aplicación cuando se trata de las mitades, la tiene de mucha importancia al tratar de las demás partes. Al hablarse de los cuartos por ejemplo; se presenta á los niños la mitad de una manzana y al lado de ella un cuarto, de la misma fruta; y pregun-

tando luego cuantos cuartos salen de la mitad, puede llevarlos á la conclusión de que "un cuarto es la mitad de la mitad.

Quando ya se ha llegado á los octavos, doceavos, etc., este punto tiene muchísima importancia, porque á la vez que se afirma la idea que los niños tienen de las fracciones, se van iniciando en la reducción á un mismo denominador y en la simplificación de los quebrados de una manera que podríamos llamar experimental.

7° Reducción de enteros y mixtos á quebrados.

Es conveniente en esto que al principio tengan los niños á la vista los objetos, á fin de que casi materialmente hagan la reducción de las manzanas, pliegos de papel ó lo que sea á mitades, cuartos, etc.

8° Reducción de quebrados á enteros.

El maestro pone á la vista de los niños muchos cuarterones de papel, por ejemplo, y pregunta cuántos pliegos son; hace lo mismo con otros objetos y por último propone cuestiones sin los objetos á la vista.

9° Cálculo mental con los quebrados.

El maestro debe procurar que en estos problemas se trate de las fracciones cuya idea tiene el niño con más claridad, y procurará graduar los ejercicios, de manera que al principio se trate de quebrados de la misma especie, luego de especies diferentes, pero que sean reductibles fácilmente de una á la otra, y por último, de especies que sólo puedan reducirse á una tercera.

Por vía de ejemplo indicaremos algunos problemas de los que pueden proponerse á los niños, para ejercitarles en el cálculo con quebrados.

Sumar.—Un retazo de tela tiene  $4\frac{7}{8}$  metros y otro  $5\frac{1}{2}$  ¿cuánto tienen juntos?

Una sala tiene  $10\frac{3}{4}$  metros de largo y otra  $8\frac{1}{2}$  ¿cuánto tienen entre las dos?

La distancia recorrida por un viajero en un día fué de  $9\frac{5}{8}$  kilómetros y al siguiente de  $7\frac{1}{4}$  ¿qué distancia anduvo en los dos días?

Restar.—A una vasija que tiene 14 litros de agua, se le han sacado  $8\frac{2}{3}$  litros ¿cuánto le queda?

A un pedazo de tela que mide  $13\frac{3}{4}$  metros, se le han cortado  $6\frac{1}{2}$  ¿cuánto sobra?

Multiplicar.—Un metro de listón vale 80 centavos ¿cuanto vale  $\frac{1}{4}$  de metro?

Un kilogramo de café cuesta 40 centavos ¿cuánto se pagará por  $\frac{5}{8}$  de kilogramo?

Dividir.—La tercera parte de la distancia entre dos pueblos es 20 kilómetros ¿cuál es toda la distancia?

Dos quintas partes de metro de una cinta cuestan 12 centavos ¿cuánto cuesta el metro?

Réstanos sólo agregar que el maestro debe proceder muy lentamente en cada uno de estos puntos, y no pasar al siguiente ni introducir ninguna dificultad, hasta que los niños estén seguros de lo anterior. Y no hay que ilusionarse por lo fácil del principio y pasar muy rápidamente por los primeros puntos; pues se llega muy pronto á lo difícil, sin la conveniente preparación. y todo es embrollo, obscuridad y fastidio por no haber tenido paciencia.

En la mayor parte de los casos, los cuatro primeros pun-

tos podrán verse en una lección; pero del quinto en adelante es necesario no apresurarse y hacer sobre cada uno de ellos muchos ejercicios, hasta estar completamente seguros de que los niños han entendido bien. En muchas ocasiones es conveniente pedir á los niños que expliquen cómo han encontrado el resultado de la cuestión, para que por sí mismos vayan formando las reglas; pero siempre después de que se hayan obtenido de ellos contestaciones exactas y prontas.

Por último; debe huirse en los problemas que se pongan de dar cantidades muy grandes, en que la operación sea para los niños difícil de ejecutar mentalmente; pues aquí se trata de hacerlos adquirir ideas claras y ejercitarlos en discurrir, y para ello basta que encuentren la manera de razonar dejando lo demás para el cálculo escrito.

### **Escritura de los quebrados.**

Así como la idea de cada una de las diversas partes que pueden hacerse de un entero, sirve de base para el cálculo mental con quebrados, asimismo la escritura de ellos debe ser el punto de partida para pasar el cálculo escrito.

Repetiremos aquí lo que muy someramente dijimos sobre este asunto al tratar de la enseñanza de la regla de tres con enteros para al tercer año.

Para enseñar de una manera al mismo tiempo interesante y racional á los niños la escritura de los quebrados, nos parece que deben hacerse los siguientes ejercicios:

1° "El maestro da el número de partes en que se ha dividido el entero y pregunta á los alumnos el nombre de ellas;" v.g. el maestro dice: hemos hecho de una manzana dos, tres, cinco, diez, etc. partes ¿qué nombre tendrán? Los alumnos indudablemente contestarán (puesto que ya antes han adquirido los conocimientos necesarios para hacerlo así) que se llaman medios en el primer caso, tercios en el segundo, etc.

2° "El maestro dice el nombre de las partes y pide á los alumnos que ellos digan en cuantas debe haberse dividido el entero;" v.g., para que las partes se llamen cuartos, quintos, veinticuatro avos ¿cuántas partes habremos hecho del entero?

Los alumnos seguramente contestarán que en el primer caso es necesario haber hecho cuatro partes del entero, en el segundo cinco, etc.

3° "El maestro dicta á los niños cantidades con enteros para que las escriban como están habituados á hacerlo" v.g. 3 metros, 15 pesos, 12 sillas.

Bien puede darse el caso que el alumno que vaya á escribir al pizarrón, solamente escriba los números 3, 15 y 12; pero el maestro llamará la atención sobre que allí dice tres y no tres metros etc. con lo que no faltarán niños que indiquen la conveniencia de que se agregue á continuación del tres el nombre de las cosas que el número representa ó cuando menos alguna letra inicial que nos recuerde que objetos son en cada caso.

4° "El maestro dicta algunos números quebrados para que los niños los escriban siguiendo las mismas re-

glas que para los enteros;" v.g. cuatro quintos de metro, seis octavos de peso, ocho cientoveintitresavos de kilogramo: los niños se verán obligados á escribir estos números con cifras las partes y con letras el nombre de ellas y la especie; luego el maestro pregunta cuantas partes deben hacerse del entero para que se llamen quintos; los niños contestarán que cinco, y él puede entónces preguntar qué número puede servir para acordarnos que se llaman así. Hará las mismas observaciones respecto de los octavos y los cientoveintitres avos para que los niños se fijen en que escribiendo 8 y 123, podemos recordar el nombre de tales partes y luego llamará la atención sobre el ahorro de tiempo y trabajo al escribir con números en vez de letras y la mayor facilidad también para leer. Puede luego indicar que se escribe el número que expresa el nombre de las partes debajo del otro y separado con una raya horizontal.

5° "Ejercicios de escritura de quebrados aplicando lo descubierto en el número anterior."

6° "Nombre de los términos del quebrado."

En los mismos que los niños hayan escrito en el ejercicio anterior, el maestro preguntará: 1° cuantas partes se han escrito y 2° como se llaman esas partes; v.g. si se tiene escrito  $\frac{12}{26}$  el maestro llamará la atención sobre que hemos escrito 12 partes, y que esas partes se llaman veintiseisavos, preguntando luego que número expresa el de partes que tenemos y cual el nombre de esas partes, hasta que los niños puedan descubrir que "siempre el número de arriba expresa el (número) de partes y el de abajo cómo se llaman ó denominan esas partes, dando luego los

nombres de numerador y denominador á los términos del quebrado y haciendo los ejercicios correspondientes para fijar estas palabras y su significado en la mente de los niños."

### **Suma de Quebrados.**

Ejercitados convenientemente los alumnos en la escritura de los quebrados, y principalmente en el cálculo mental con ellos, que deberá continuarse paralelamente con el escrito, puede pasarse á este último, procurando siempre tomar como punto de partida algo de lo ya conocido por los niños.

Así pues, para enseñar á los niños la suma de los quebrados, por escrito, convendrá sujetarse al orden siguiente:

1° "Proponer un problema mental con quebrados de la misma especie." Como en este caso no se trata más que de tomar, como si dijéramos, base para razonar, puede proponerse á los niños un problema muy sencillo que todos sin excepción resolverán, v. g. Un retazo de tela tiene  $\frac{3}{8}$  de metro y otro  $\frac{4}{8}$  ¿cuánto tienen entre los dos?

Los niños contestarán sin ninguna vacilación que  $\frac{7}{8}$ .

2° "Escritura del mismo problema." El maestro preguntará á los niños que operación fué la que ejecutaron y con que clase de números, para que se fijen en que han "sumado quebrados"; y hará que uno de los niños escriba la operación hecha en esta forma:  $\frac{3}{8} + \frac{4}{8} = \frac{7}{8}$ .

3° "Manera como se encontró la solución." El maestro llamará la atención de los niños acerca de la opera-

ción que mentalmente hicieron para encontrar la solución, hasta que ellos observen que sumaron el tres y el cuatro; preguntará luego qué representan éstos dos números en los quebrados, para que los niños se fijen en que son los numeradores, y los invitará á formular la regla de que "para sumar quebrados se suman los numeradores."

4° "Proponer" (para resolver por escrito desde el principio) "un problema con quebrados de diferentes especies; pero que sean fácilmente reductibles á una de ellas"

El maestro propone un problema con la condición ya dicha, v. g., á una vasija le caben  $\frac{3}{4}$  de litro de agua y á otra  $\frac{5}{8}$  de litro ¿cuánto les cabe á las dos?

Se invita á los niños á que lo resuelvan, aplicando la regla anterior de "sumar los numeradores", y muchos lo harán de pronto así; pero al decir la solución vacilarán, pues no hallarán que decir, si 8 cuartos ú octavos, y hasta puede darse el caso que algunos traten de sumar los denominadores y pretendan que lo obtenido son 8 doceavos. Con problemas con enteros les hará ver el maestro que no se pueden sumar nueces con pesos etc., que haciéndolo, la suma no puede ser ni toda nueces, ni toda pesos, puesto que es imposible que unas se conviertan en otras al juntarse. Así pueden los niños inferir que al juntar los 3 cuartos con los 5 octavos, no es posible que, por ese sólo hecho, se conviertan los primeros en octavos, ni los segundos en cuartos, ni unos y otros en doceavos; y que por tanto, "no se pueden sumar los quebrados propuestos."

Llamando luego la atención sobre las fracciones del primer problema, se preguntará porqué en aquel caso la ope-

ración resultó tan fácil; los niños dirán que porqué se trataba de puros octavos, y luego se les sugerirá la idea de que si en el 2º problema se logra que todos sean octavos también resultará muy fácil. Se hace que ellos mismos encuentren cuantos octavos hay en los  $\frac{3}{4}$  cuartos, que sustituyan este quebrado y ejecuten la suma, llegando de esa manera á la regla de que, "para sumar quebrados, se hace que tengan el mismo denominador y luego se suman los numeradores.

5º "Proponer un problema en que los quebrados no sean reductibles sino á una especie diferente de la de cada uno de ellos."

El maestro pondrá á los niños un problema como el siguiente: un tejedor ha hecho en un día  $\frac{3}{4}$  de pieza de una tela y al siguiente día  $\frac{2}{3}$  ¿cuánto ha hecho en los dos días?

Los niños verán que se necesita sumar esos dos quebrados, pero que antes es preciso hacer que sean de la misma especie, y el maestro les llamará la atención sobre que ni los tercios se pueden reducir á cuartos ni éstos á tercios, y que, por lo tanto, hay que buscar una especie de quebrados á que se puedan reducir unos y otros.

Hará que los niños investiguen guiados por él á que puedan reducirse los cuartos; para ello traza en el pizarrón una raya dividida en cuartos — | — | — | — y luego en la parte inferior, hace dos partes de cada cuarto, y preguntando á los niños, hace que observen que las nuevas partes son octavos.

Luego en la misma raya hace tres partes de cada cuarto,

son doceavos, luego cuatro etc., apuntando en el pizarrón los números 8, 12, 16, 20 para que los niños recuerden que los cuartos pueden reducirse á octavos, doceavos, dieciseisavos, etc.

Del mismo modo y apuntando la lista de números correspondientes, hace que se fijen en que los tercios se pueden reducir á sextos, novenos, doceavos, quinceavos, etc., para que vean que el número 12 es el único que se encuentra en ambas listas.

Con esto puede ya hacerse la reducción, procurando que los niños mismos, encuentren que  $\frac{1}{4}$  tiene  $\frac{3}{12}$  y los  $\frac{3}{4}$  tienen  $\frac{9}{12}$  que  $\frac{1}{3}$  tiene  $\frac{4}{12}$  y los  $\frac{2}{3}$  equivalen á  $\frac{8}{12}$  efectuando después la suma según la regla ya aprendida.

6º "Proponer problemas en que entren tres diferentes especies de fracciones."

Si suponemos que en el problema propuesto haya que sumar  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{3}$  y  $\frac{3}{5}$ , se formarán las listas correspondientes á cada quebrado: los medios pueden reducirse á 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32 avos etc., los tercios 6, 9, 12, 15 avos etc., los quintos 10, 15, 20, 25, 30, 35, avos etc.

Los niños verán luego que la especie á que pueden reducirse los tres quebrados, son los treintavos, se hará la reducción y luego la suma.

Esto parece muy largo y muy entretenido; pero téngase en cuenta que lo proponemos solamente para el principio y como el único medio de hacer que los niños realicen, cuando se les enseña, la mayor cantidad posible de trabajo, reservándose el maestro la dirección nada más, que en esta materia es en rigor todo lo que le corresponde.

Así se familiarizan los niños con el valor relativo de las diversas partes del entero, y hasta pueden comprobar ellos mismos si aciertan ó no haciendo con una raya lo que han visto que ejecuta el maestro.

Por otra parte, calculando de esta manera, los niños pueden resolver fácilmente los ejercicios abstractos que sobre sumas de quebrados se les pongan, y el maestro podrá pronto prescindir de esta manera de ejecutar las sumas, pues que los niños estarán muy presto en aptitud de encontrar mentalmente la especie á que conviene hacer la reducción; pero en todo caso ésto no puede ser al principio.

Además es conveniente hacer la reducción en los primeros problemas, como indicamos al principio, porque á parte de ser el modo más sencillo, con ser largo se presta para que cuando los niños aprendan la reducción á un mismo denominador conforme á la regla que el texto trae, comprendan y aprecien mejor sus ventajas.

Resta solo advertir que del 2º ejercicio en adelante conviene hacer varios problemas, antes de pasar el número siguiente para que los niños vayan sobre seguro.

Análogamente puede enseñarse á los niños la resta de quebrados, procurando lo mismo que en la suma, graduar las dificultades y que "los niños vayan infiriendo por partes la regla que se les quiere dar á conocer.



### **Resta de quebrados.**

Dijimos ya que la resta de los quebrados puede enseñarse de un modo análogo á la suma, y por lo tanto, sólo indicaremos aquí el orden que debe seguirse:

- 1º "Proponer un problema mental con quebrados de la misma especie."
- 2º Escritura del mismo problema.
- 3º Manera como se encontró la solución para inferir la regla en parte, como se hizo al tratar de la suma."
- 4º "Proponer (para resolver por escrito) un problema con quebrados de diferentes especies; pero que sean fácilmente reductibles á una de ellas" para completar la inferencia de la regla.
- 5º "Proponer un problema en que los quebrados no sean reductibles, sino á una especie diferente de la de cada uno de ellos."

Como este plan y los correspondientes ejercicios son en todo análogos á los que se hicieron en la suma, conviene en cada una de las dificultades que los niños encuentren, llamarles la atención sobre la manera cómo procedieron antes, para que por analogía descubran lo que debe hacerse, sirviéndose de ellas no sólo para recordar y afirmar lo aprendido anteriormente; sino para poner en práctica el principio de "ir de lo conocido á lo desconocido."

Exactamente el mismo orden que en la suma de fracciones, puede seguirse tratándose de la misma operación con los números mixtos: