Así se familiarizan los niños con el valor relativo de las diversas partes del entero, y hasta pueden comprobar ellos mismos si aciertan ó no haçiendo con una raya lo que han visto que ejecuta el maestro.

Por otra parte, calculando de esta manera, los niños pueden resolver fácilmente los ejercicios abstractos que sobre sumas de quebrados se les pongan, y el maestro podrá pronto prescindir de esta manera de ejecutar las sumas, pues que los niños estarán muy presto en aptitud de encontrar mentalmente la especie á que conviene hacer la reducción; pero en todo caso ésto no puede ser al principio.

Además es conveniente hacer la reducción en los primeros problemas, como indicamos al principio, porque á parte de ser el modo más sencillo, con ser largo se presta para que cuando los niños aprendan la reducción á un mismo denominador conforme á la regla que el texto trae, comprendan y aprecien mejor sus ventajas.

Resta solo advertir que del 2° ejercicio en adelante conviene hacer varios problemas, antes de pasar el número siguiente para que los niños vayan sobre seguro.

Análogamente puede enseñarse á los niños la resta de quebrados, procurando lo mismo que en la suma, graduar las dificultades y que "los niños vayan infiriendo por partes la regla que se les quiere dar á conocer.

Resta de quebrados.

Dijimos ya que la resta de los quebrados puede enseñarse de un modo análogo á la suma, y por lo tanto, sólo indicaremos aquí el órden que debe seguirse:

1° "Proponer un problema mental con quebrados de la misma especie."

2° Escritura del mismo problema.

3° Manera como se encontró la solución para inferir la regla en parte, como se hizo al tratar de la suma."

4° "Proponer (para resolver por escrito) un problema con quebrados de diferentes especies; pero que sean fácilmente reductibles á una de ellas" para completar la inferencia de la regla.

5° "Proponer un problema en que los quebrados no sean reductibles, sino á una especie diferente de la de cada uno de ellos."

Como este plan y los correspondientes ejercicios son en todo análogos á los que se hicieron en la suma, conviene en cada una de las dificultades que los niños encuentren, llamarles la atención sobre la manera cómo procedieron antes, para que por analogía descubran lo que debe hacerse, sirviéndose de ellas no sólo para recordar y afirmar lo aprendido anteriormente; sino para poner en práctica el principio de "ir de lo conocido á lo desconocido."

Exactamente el mismo orden que en la suma de fracciones, puede seguirse tratándose de la misma operación con los números mixtos:

1 ° "Problema mental, explicando los niños la manera cómo encontraron la solución."

2 ° "El mismo problema por escrito, aplicando la regla y enunciándola después.

Supongamos que se propone á los niños para resolver mentalmente un problema como este: ¿cuánto miden juntos dos retazos de tela, de las cuales uno tiene $4\frac{3}{5}$ metros y el otro $5\frac{4}{5}$?

Como los niños están convenientemente ejercitados en el cálculo mental con quebrados, fácilmente hallarán la solución de que los retazos miden 10 metros y $\frac{2}{5}$; y el maestro los invitará á que expresen la manera como encontrarón la solución, haciendo que se fijen en que sumaron el 4 y el 5 (los enteros) y luego los $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{5}$ (los quebrados) para reunir después las dos sumas.

3 ° "Problemas en que los quebrados de los mixtos sean de diferente especie."

4 ° "Problemas en que entren tres ó más sumandos."

Puede procederse de la misma manera en la resta de números mixtos, teniendo sin embargo cuidado de graduar los problemas del modo siguiente:

1 ° "Que el quebrado del minuendo sea mayor."

2 ° "Que sea menor el quebrado del minuendo."

Para que los niños descubran como se hace para poder efectuar la operación en este caso, se les llama la atención sobre el artificio de que nos valemos en los enteros, de pedir una unidad de la especie superior inmediata; y conviene que hagan un problema de enteros con esta condición, para preguntar luego cual es la especie mayor, inmediata al quebrado, en el problema de mixtos, y hacer que descompongan en quebrado una unidad.

3 ° "Que no haya quebrado en el minuendo."

Aquí se les puede hacer notar, que en el caso anterior fué necesario descomponer una unidad del minuendo porque el quebrado era menor que su correspondiente del sustraendo, y que no habiendo quebrado, con mucha mayor razón deberá hacerse la descomposición referida.

Reducción á un mismo denominador.

Principios en que se funda.

(A)

1 ° Se dicta un quebrado por ejemplo $\frac{3}{5}$ y se dice á los niños que multipliquen el numerador de ese quebrado por 4 en esta forma $\frac{3}{5}\times 4=\frac{12}{5}$

2 ° Se llama la atención de los niños sobre el resultado de la operación anterior, preguntando si el quebrado que resultó es mayor ó menor que el que se dictó. Los niños dirán que es mayor y entónces se hará que se fijen en el "número de veces" que lo es.

3 ° Se dictan otros quebrados por ejemplo: $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{6}$ y que multipliquen los numeradores por 6 en el primero, y por 3 en el segundo, llamando la atención de los niños al fin de cada operación, sobre el cambio de valor que sufrió el quebrado, como en el número 2. °

Después de hechas las tres operaciones anteriores (que se dejan escritas en el pizarrón), se hace que los niños se fijen en que tanto en la primera como en las otras dos, se multiplicó el numerador del quebrado y este se hizo mayor.

5° Se preguntará en seguida por cuanto se multiplicó el numerador en el primer quebrado y cuántas veces mayor se hizo, las mismas reflexiones se les hacen respecto de las otras dos operaciones, para llevar á los niños á estas dos conclusiones:

I. Cuando se multiplica el numerador de un quebrado, éste se hace mayor, (se infiere después del segundo punto y se repite en este lugar.)

II. Si se multiplica por 4, se hace 4 veces mayor, si por 6, seis veces, etc., según el número por que se multiplique.

6° Dar á los niños un quebrado cualquiera para que lo hagan cierto número de veces mayor, ejemplo: $\frac{4}{5}$ hecho 12 veces mayor$=\frac{48}{5}$

Después de varios ejercicios como el anterior los niños pueden llegar á estas otras formas de la primera y segunda conclusiones: Para hacer cierto número de veces mayor un quebrado se multiplica el numerador.

Si se quiere hacer 12 veces mayor, se multiplica por 12, etc.

8° Problemas en que se aplique lo anterior: 1 litro de trigo pesa 1 kilo y $\frac{1}{5}$ ¿cuánto pesan 8 litros? $=\frac{6\times 8}{5}=\frac{48}{5}=9\frac{3}{5}$ kilos.

(***B.***)

1° Se dicta un quebrado, por ejemplo: ⅔ y se dice á los niños que multipliquen el denominador por 4 en esta forma $\frac{2}{3\times 4}=\frac{2}{12}$.

2° Se llama la atención de los niños sobre el resultado de la operación anterior, preguntado si el quebrado que resultó es mayor ó menor que el que se dictó, para lo cual basta hacerlos que se fijen en el valor de los doceavos y en el de los tercios. Los niños dirán que es menor, y fijándose en los doceavos que salen de un tercio, se hará que observen "cuantas veces" menor que el ⅔ es el $\frac{2}{12}$.

3° Se dictan otros quebrados, v. g., ¾ y ½ y que los niños multipliquen los denominadores, en el primero por 5 y en el otro por 8, llamando su atención al fin de cada operación sobre si el quebrado que resulta es mayor ó menor y cuántas veces lo es, comparado con el que se dictó. Para ello no hay más que comparar los veinteavos y cuartos y los dieciseisavos y medios; los niños encontrarán fácilmente la relación.

4° Dejando escritas las tres operaciones anteriores, se hace que los niños se fijen en que en los tres casos se multiplicó el denominador del quebrado y éste se hizo menor.

5° Preguntando en seguida por cuánto se multiplicó en cada caso y cuántas veces menor se hizo el quebrado, los niños llegan á estas conclusiones.

I. Siempre que se multiplica el denominador de un quebrado éste se hace menor.

II. Si se multiplica por 4 se hace 4 veces menor, si por 8, 8 veces etc., según el número por que se multiplique.

6° Dar á los niños un quebrado cualquiera para que lo hagan cierto número de veces menor, por ejemplo $\frac{3}{8}$ hecho 5 veces menor, $\frac{3}{8}\times5\ \frac{3}{40}$

Después de varios ejercicios como el anterior los niños pueden llegar á estas otras dos formas de las conclusiones anteriores: Para hacer cierto número de veces menor un quebrado se multiplica el denominador.

Si se quiere hacer 5 veces menor se multiplica por 5 etc.

7° Problemas en que se aplique lo anterior: 4 metros de manta importan $\frac{3}{5}$ de peso ¿cuánto vale 1 metro? $\frac{3}{5\times4}=\frac{3}{20}$ de peso.

(C.)

1° Se dicta un quebrado, v.g. $\frac{5}{7}$ y se hace que los niños multipliquen por 3 el numerador y luego el denominador en esta forma $\frac{5\times3}{7\times3}=\frac{15}{21}$

2° Se llama la atención de los niños sobre el resultado de la operación anterior, para que observen que, por haber multiplicado el numerador por 3, el quebrado debe haberse hecho 3 veces mayor, y por haber multiplicado el denominador por 3 debe haberse hecho 3 veces menor y que si una cosa se triplica primero y se parte luego por 3 queda como al principio: el quebrado no cambia de valor.

Se dictan luego otros quebrados, se multiplican sus dos términos por un mismo número y se hacen las mismas reflexiones para que vean que en los nuevos casos "los quebrados no han cambiado de valor."

4° Recapitulando sobre lo hecho, ven los niños que en el primer quebrado se multiplican el numerador y denominador por un mismo número y el quebrado no cambia de valor; que en los otros casos sucedió lo mismo y llegan á esta conclusión: Cuando se multiplican los dos terminos de un quebrado por un mismo número, el quebrado no cambia de valor.

Para que los niños infieran, qué le pasa á un quebrado cuando se divide el numerador, qué cuando se divide el denominador y qué cuando se dividen los términos por un mismo número, se procederá de modo análogo á como se procedió en los incisos A. B. y C. respectivamente.

Reducción á un mismo denominador.

1° Se dictan como para sumar tres quebrados, ejemplo: $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}$. Los niños probablemente no encontrarán que pueden reducirse á sesenta avos, y el maestro propondrá que den otra forma al primer quebrado, multiplicando sus dos términos por 4 y por 5 así:

$$\begin{array}{l} \underline{2} \times 4 = 8 \times 5 = \underline{40} \\ 3 \times 4 = 12 \times 5 = 60 \end{array}$$

Se dará otra forma al segundo quebrado así:

$$\begin{array}{l} \underline{3} \times 3 = 9 \times 5 = \underline{45} \\ 4 \times 3 = 12 \times 5 = 60 \end{array}$$

Al tercero así:

$$\begin{array}{l} \underline{4} \times 3 = 12 \times 4 = \underline{48} \\ 5 \times 3 = 15 \times 4 = 60 \end{array}$$

2° Se llamará la atención de los niños sobre que ninguno de los quebrados cambió de valor, porque en todos "se multiplican las dos términos por los mismos números", pero en cambio quedarón los tres con el mismo denominador.

3° Luego se hará que se fijen en los números por los que se multiplicaron los dos términos del primer quebrado, (4 y 5) para que vean que son precisamente los denominadores de los otros; que en el otro pasa lo mismo y en el otro también. De ahí infieren que: "Para reducir los quebrados á un mismo denominador se muttiplican los dos términos de cada quebrado por los denominadores de los otros."

Se llama la atención además sobre la economía de tiempo que se realiza, procediendo de este modo y no formando listas de denominadores como estaban acostumbrados á hacerlo.

Multiplicación de quebrados.

1° Problemas mentales: Se dictará á los niños un problema de fácil solución, v.g.; valiendo 60 centavos el metro de listón ¿cuánto vale $\frac{1}{4}$ de metro? $\frac{1}{2}$? $\frac{1}{5}$? $\frac{1}{8}$? $\frac{1}{12}$? etc. Semejantes al anterior se propondrán otros hasta que los niños no encuentren dificultad para encontrar el valor de cualquiera unidad fraccionaria.

2° Resolver mentalmente problemas como éste: á 24 centavos el kilo de papas ¿cuánto valen $\frac{3}{4}$ de kilo? $\frac{2}{3}$? $\frac{5}{8}$? $\frac{5}{6}$? $\frac{7}{12}$?

Después de cada solución se llamará la atención de los niños sobre cómo hicieron para hallarla, á fin de que se fijen en que buscaron el valor de $\frac{1}{4}$, luego el de $\frac{3}{4}$, el de $\frac{1}{3}$, luego el de $\frac{2}{3}$, el de $\frac{1}{8}$, luego el de $\frac{5}{8}$. etc.

Si en los primeros casos el niño da la solución y no puede explicar la manera como la halló, el maestro esperará que alguno en las otras explique el procedimiento, pero una vez conseguido esto con un alumno, como no puede menos de suceder para los tres ó cuatro casos que se propongan, una vez conseguido, repito, se llamará la atención de los otros niños sobre la explicación dada, se pedirá que alguien la vuelva á decir, y se exigirá en todos los demás problemas mentales de esta clase que se propongan después.

3° Conviene que el maestro pregunte después por vía de recapitulación, cómo hicieron para hallar el valor de $\frac{3}{4}$ de kilo, el de $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{7}{12}$ etc., para que los niños repitan, que se buscó primero lo de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$, etc.

4° Problemas escritos: Se dictará uno de los problemas anteriores para resolverlo por escrito, por ejemplo: valiendo 24 centavos el kilo de papas ¿cuánto valen $\frac{5}{8}$ de kilo?

Conforme á lo que ya tienen aprendido los niños, arreglarán los datos en esta forma:

1 kilo vale 24 cents.
$\frac{5}{8}$,, ?

El maestro preguntará luego como hicieron antes para hallar el valor de $\frac{5}{8}$, los niños contestarán que buscando el de $\frac{1}{8}$ y los hará que formulen el siguiente razonamiento:--si un kilo vale 24 centavos un octavo valdrá una cantidad 8 veces menor $\frac{24}{8}$ Preguntará que hicieron después, ellos dirán que buscaron el valor de los $\frac{5}{8}$ y continuarán razonando en esta forma: si $\frac{1}{8}$ vale $\frac{24}{8}$ de centavo, los $\frac{5}{8}$ valdrán una cantidad de dinero 5 veces mayor $\frac{24\times5}{8} = \frac{120}{8} = 15$ centavos, que coincide como es natural con lo que hallaron mentalmente.

Se resolverán del mismo modo otros problemas en los cuales se busque el valor de $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{8}{9}$ $\frac{7}{12}$ etc., llamando la atención al fin de cada problema sobre el orden seguido, á saber: 1° lo correspondiente á $\frac{1}{4}$ y luego lo correspondiente á $\frac{3}{4}$, á $\frac{1}{6}$ y $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{8}$ y $\frac{8}{9}$, $\frac{1}{12}$ y $\frac{7}{12}$

Observación: Puede suceder que en el 2° razonamiento, cuando sabiendo que el valor de $\frac{1}{4}$ se busca el de $\frac{3}{4}$, los niños por ver el 4 [denominador] digan que $\frac{3}{4}$ valen una cantidad 4 veces mayor que la correspondiente á $\frac{1}{4}$. En ese caso el maestro les hace recordar que el 4 indica el nombre de las partes nada más, y que si "una" parte cualquiera vale cierta cantidad "tres" partes ¿cuánto valdrán? los niños contestarán que una cantidad triple, saldrán de su error y se acostumbrarán á hacer la comparación de las cantidades fijándose en los "numeradores" que son los que deben tomarse como punto de comparación, pues los denominadores no indican más que el nombre de las partes, y son innecesarios para los razonamientos, siempre que se trate de quebrados que tengan el mismo.

5° Problemas en que el multiplicador sea mixto: A 75 centavos el metro de dril ¿cuánto valen $4\frac{3}{5}$ metro.

Se propondrá á los niños que arreglen los datos y quedarán dispuestos en esta forma.

1 metro vale 75 centavos.
$4\frac{3}{5}$,, ,, ? ,,

Luego se les invitará á que razonen el problema. Puede suceder que algunos propongan hallar el valor de los 4 metros primero y el de los $\frac{3}{5}$ después: en este caso resultan dos problemas semejantes á otros que los niños han hecho ya; el primero, de enteros.

1 metro vale 75 centavos.
4 ,, ,, ? ,,

y el segundo de quebrados

1 metro vale 75 centavos.
$\frac{3}{5}$,, ,, ? ,,

Pero con el fin de que conozcan el otro procedimiento, se les propondrá que busquen de una vez los dos valores juntos. Entónces sucederá que al razonar los niños se confundirán, pues unos tratarán de hallar el valor de todo y dirán que ello vale una cantidad 4 veces mayor que 75, y otros buscarán el valor de $\frac{1}{5}$; pero después razonarán sobre el de $\frac{3}{5}$

Se llamará su atención sobre que ni en uno ni en otro caso se llega al valor de todo; sino al de 4 metros ó al de $\frac{3}{5}$ y que no es eso en lo que se busca.

A continuación el maestro borrará del arreglo primero de los datos, el $\frac{3}{5}$: el problema quedará así:

1 metro vale 75 cantavos.
4 ,, ,, ? ,,

y llamará la atención de los niños sobre que en esa forma, fácilmente lo pueden resolver.

Después escribirá el $\frac{3}{5}$ y borrará el 4, el problema quedará así:

1 metro vale 75 centavos.
$\frac{3}{5}$,, ,, ? ,,

y llamará su atención sobre que también en esa forma lo pueden resolver fácilmente.

Recapitulando los niños dirán que si fuearn puros metros ó puros quintos lo resolverían; les hará que vean que no pueden ser puros metros porque de $\frac{3}{5}$ no sale un metro y les preguntará si no se puede hacer "todo quintos." Contestarán que sí, harán la reducción y el problema quedará así:

1 metro vale 75 centavos.
$\frac{23}{5}$,, ,, ? ,,

Buscarán lo de un quinto, luego lo de $\frac{23}{5}$, el problema quedará resuelto; se llamará después su atención sobre que antes de razonar redujeron los enteros á quebrabrados y se hará que lo repitan.

6° Problemas en que haya mixtos en el multiplicando y multiplicador.

Un hombre gana $2\frac{3}{5}$ pesos al dia ¿cuánto gana en $12\frac{2}{3}$ días?

Se arregla:

En 1 día gana $2\frac{3}{5}$ pesos.
,, $12\frac{2}{3}$,, ? ,,

Por analogía descubren que hay que reducir á quintos arriba, como que hay que reducir á tercios abajo.

7° Resolución de problemas tomando los datos de diferentes casos de la vida práctica.

División de quebrados.

1° Problemas mentales: Se dictará á los niños un problema de fácil solución; ejemplo, valiendo $\frac{1}{4}$ de metro de tela 8 centavos ¿cuánto vale el metro?

Valiendo $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}$ de metro de cinta 5 centavos, ¿á cómo sale el metro?

Semejante á los anteriores se pondrán otros problemas en que "partiendo del valor de cualquier unidad fraccionaria se vaya al del entero,

2° Resolver mentalmente problemas como este: $\frac{2}{3}$ de metro de linón nos han costado 30 centavos ¿á cómo sale el metro?

Valiendo $\frac{4}{5}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{6}{7}$ de metro de una tela 60 centavos ¿á cómo sale el metro en cada caso?

Después de cada solución se llamará la atención de los niños sobre la manera como la hallaron á fin de que ob-