A continuación el maestro borrará del arreglo primero de los datos, el $\frac{3}{5}$: el problema quedará así:

1 metro vale 75 cantavos.
4 ,, ,, ? ,,

y llamará la atención de los niños sobre que en esa forma, fácilmente lo pueden resolver.

Después escribirá el $\frac{3}{5}$ y borrará el 4, el problema quedará así:

1 metro vale 75 centavos.
$\frac{3}{5}$,, ,, ? ,,

y llamará su atención sobre que también en esa forma lo pueden resolver fácilmente.

Recapitulando los niños dirán que si fuearn puros metros ó puros quintos lo resolverían; les hará que vean que no pueden ser puros metros porque de $\frac{3}{5}$ no sale un metro y les preguntará si no se puede hacer "todo quintos." Contestarán que sí, harán la reducción y el problema quedará así:

1 metro vale 75 centavos.
$\frac{23}{5}$,, ,, ? ,,

Buscarán lo de un quinto, luego lo de $\frac{23}{5}$, el problema quedará resuelto; se llamará después su atención sobre que antes de razonar redujeron los enteros á quebrabrados y se hará que lo repitan.

6° Problemas en que haya mixtos en el multiplicando y multiplicador.

Un hombre gana $2\frac{3}{5}$ pesos al dia ¿cuánto gana en $12\frac{2}{3}$ días?

Se arregla:

En 1 día gana $2\frac{3}{5}$ pesos.
,, $12\frac{2}{3}$,, ? ,,

Por analogía descubren que hay que reducir á quintos arriba, como que hay que reducir á tercios abajo.

7° Resolución de problemas tomando los datos de diferentes casos de la vida práctica.

División de quebrados.

1° Problemas mentales: Se dictará á los niños un problema de fácil solución; ejemplo, valiendo $\frac{1}{4}$ de metro de tela 8 centavos ¿cuánto vale el metro?

Valiendo $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}$ de metro de cinta 5 centavos, ¿á cómo sale el metro?

Semejante á los anteriores se pondrán otros problemas en que "partiendo del valor de cualquier unidad fraccionaria se vaya al del entero,

2° Resolver mentalmente problemas como este: $\frac{2}{3}$ de metro de linón nos han costado 30 centavos ¿á cómo sale el metro?

Valiendo $\frac{4}{5}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{6}{7}$ de metro de una tela 60 centavos ¿á cómo sale el metro en cada caso?

Después de cada solución se llamará la atención de los niños sobre la manera como la hallaron á fin de que obserben que buscaron primero el valor de $\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}$ etc. y después el del metro entero.

En el primer problema tal vez no habrá ningún niño capaz de explicar como procedió; pero después de varios casos no faltará alguno que encuentre la explicación, que se hará repetir por los demás y se exigirá en todos los demás problemas.

3° Recapitulación sobre la manera cómo procedieron en cada uno de los casos del punto anterior, á fin de que los niños repitan que buscaron el valor de $\frac{1}{3}$ y luego el del entero, el de $\frac{1}{5}$ y luego el del entero, etc.

4° Problemas escritos: Se dictará uno de los anteriores para resolverlo por escrito, por ejemplo: $\frac{2}{3}$ de metro de linón cuestan 30 centavos ¿á cómo sale el metro?

Arreglo de datos:

$\frac{2}{3}$ de metro valen 30 centavos.
1 ,, ,, ? ,,

Se pregunta cómo hicieron antes para hallar el valor del metro (buscando el de $\frac{1}{3}$ y luego el de todo) y que razonen los niños de modo semejante al que se indicó en el número 4 de la multiplicación.

Del mismo modo se resolverán otros problemas en que partiendo del valor $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}. \frac{6}{7},$ etc., se vaya al del entero, llamando, al fin de cada problema, la atención de los niños sobre el orden que siguieron al razonar, á saber: 1° lo correspondiente á $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}. \frac{1}{7},$ y luego lo correspondiente al entero.

Conviene además que al lado de uno de estos problemas,

hagan uno de sus semejantes de multiplicar para que vean que sólo se ha invertido el orden:

Multiplicación.	División:
1 metro vale 60 centavos.	$\frac{3}{4}$ metro vale 45 centavos.
$\frac{1}{4}$,, ,, $\frac{60}{4}$,,	$\frac{1}{4}$,, ,, $\frac{45}{3}$,,
$\frac{3}{4}$,, ,, $\frac{60 \times 3}{4}$	1 ,, ,, $\frac{45 \times 4}{3}$.
Se parte de 1 y se va á $\frac{3}{4}$	Se parte de — $\frac{3}{4}$ y se va 1

En los dos se pasa antes por el valor de $\frac{1}{4}$.

5° Problemas en que haya mixtos en la cantidad superior de la especie del 1, (divisor): ¿A cómo vale el litro de leche, costando $4\frac{3}{5}$ litros 69 centavos?

Arreglo:—

$4\frac{3}{5}$ litro vlaen 69 centavos.
1 ,, ,, ? ,,

Se hacen las mismas reflexiones y preguntas que se indicaron en los problemas de multiplicar mixtos, para que los niños vean que si fueran los de arriba puros litros, se podría hallar fácilmente el valor de 1 y si fueran puros quintos, también, (buscando lo de $\frac{1}{5}$ y luego lo del litro) para que descubran que se debe hacer la reducción. Una vez hecha, se pasa á razonar como se indicó anteriormente y si los niños yerran al hacer las comparaciones, se procede como se dijo ya al tratar del cuarto punto (observación) de la multiplicación.

6° Problemas en que haya mixtos en las dos cantidades superiores (dividendo y divisor.)

Costando $2\frac{3}{4}$ metros de un género $\$ 12\frac{4}{5}$ á cómo vale el metro?

Arreglo: $2\frac{3}{4}$ m. valen $\$12\frac{4}{5}$
1 ,, ?

Reducción: $\frac{11}{4}$ m. valen $\$\frac{64}{5}$
1 ,, ,, ?

Razonamiento: si $\frac{11}{4}$,, ,, $\$ \frac{64}{5}$
$\frac{1}{4}$,, ,, $\frac{64}{5 \times 11}$
1 ó $\frac{4}{4}$,, $\frac{64 \times 4}{5 \times 11}$

7° Resolución de problemas, tomando los datos de diferentes casos de la vida práctica.

Regla de tres con quebrados.

1° Problema: Un individuo ha comprado $4\frac{3}{4}$ de paño en 30 pesos; después se la ofrece comprar $2\frac{1}{3}$ de paño de la misma clase ¿cuánto debe pagar?

2° Arreglo de los datos:

$4\frac{3}{4}$ metro valen 30 pesos.
$2\frac{1}{3}$,, ,, ? ,,

3° Reducción:

$\frac{19}{4}$ metro valen 30 pesos.
$\frac{7}{3}$,, ,, ? ,,

4° Razonamiento: Cómo los niños están, para cuando llegan á la regla de tres, bastante ejercitados en el razonamiento, por conclusiones, fácilmente descubren que del valor de $\frac{19}{4}$ pueden pasar al de $\frac{1}{4}$ y de éste al de varios cuartos; pero no al de tercios.

Con ésto, ellos descubren que si fueran cuartos los de abajo, el razonamiento sería fácil, pues se buscaría la de "uno" y luego lo de "siete."

También ven que si los de arriba fueran tercios no encontrarían dificultad en el razonamiento. El maestro puede hacer que formulen el razonamiento que harían en cada suposición, poniendo primero puros cuartos y luego puros tercios:

$\frac{19}{4}$ m. valen $\$ 30$ $\frac{19}{3}$ m. valen $\$30$
$\frac{7}{4}$,, ,, ? $\frac{7}{3}$,, ,, ?

5° Después de haber llamado la atención de los niños sobre lo fácil que resulta razonar siendo puros cuartos ó puros tercios, y de haberlos hecho formular los razonamientos, se vuelve al 1er. problema para que se fijen en que los de arriba son cuartos y los de abajo tercios, y que propongan lo que debe hacerse para poder razonar.

En vista de que los tercios no son reductibles á cuartos ni éstos á tercios, es casi segnro que los niños acordándose de lo que han hecho en la suma, dirán que se deben reducir á doceavos.

El problema quedará así:

$\frac{57}{12}$ m. valen $\$ 30$
$\frac{28}{12}$,, ,, ?

y se razonaría buscando el valor de un doceavo ($\frac{30}{57}$) y luego el de 28 que sería $\frac{30 \times 28}{57}$

6° Repetición del problema y aplicación del procedimiento á otros semejantes.

7° Una vez que los niños estén ya diestros en resolver los problemas de regla de tres, por el procedimiento anterior de reducir los antecedentes á un mismo denominador, puede dárseles á conocer la otra manera de proceder.

I. Problema: Un individuo trabajó $2\frac{3}{5}$ días, y saca de raya 273 centavos; después trabajó $4\frac{2}{3}$ días, ¿cuánto se le debe pagar?

II. Arreglo; en $2\frac{3}{5}$ d. gana 273 cents.
,, $4\frac{2}{3}$,, ?

III. Reducción de los enteros:

en $\frac{13}{5}$ d. gana 273 cents.
,, $\frac{14}{3}$,, ,, ?

IV. Los niños propondrán en seguida reducir á quinceavos, y el maestro les dirá que en esta vez desea que hallen la solución del problema sin necesidad de hacer TAL REDUCCION. Los niños dirán probablemente que no es posible para ellos.

V. El maestro dictará este problema: ¿Cuánto gana al día un individuo que en $2\frac{3}{5}$ días gana 273 centavos?

Los niños lo arreglarán y razonarán perfectamente por ser esta un problema de los ya conocidos:

en $2\frac{3}{5}$ días gana 273 centavos,
,, 1 ,, ,, ?

Reduciendo en $\frac{13}{5}$ gana 273
en 1 día ?

Razonando: en $\frac{13}{5}$ gana 273
,, $\frac{1}{5}$,, $\frac{273}{13}$
en 1 día $\frac{273 \times 5}{13} = \frac{1365}{13}$

VI. El maestro dictará:

¿Cuántó gana en $4\frac{2}{3}$ días un individuo que gana al día $\frac{1365}{13}$ de centavo?

Como también éste es un problema de los ya conocidos para los niños, no vacilarán en arreglarlo así:

en 1 día gana $\frac{1365}{3}$ cents.
en $4\frac{2}{3}$?

Rednciendo en 1 día gana $\frac{1365}{13}$ cents.
en $\frac{14}{3}$,, ?

Razonando: si en 1 día gana $\frac{1365}{13}$
en $\frac{1}{3}$ de día gana $\frac{1365}{13 \times 3}$
y en $\frac{14}{3}$,, ,, $\frac{1365 \times 14}{13 \times 3}$

Llamando luego la atención de los niños, sobre que al principio de estos problemas se sabía lo que ganaba en

$2\frac{3}{5}$ días y al último se supo lo que ganaba en 4⅔ días, ven que el problema se pudo resolver sin necesidad de reducir á quinceavos, BUSCANDO PRIMERO LO CORRESPONDIENTE A UN DIA: es decir haciendo de él, dos problemas como los que ya conocían

Esto no viene siendo más que lo mismo que se indicó al tratar de la regla de tres con enteros: El niño ve que se necesita tomar el 1 como punto de comparación, por que la unidad se puede comparar fácilmente con cualquiera clase de quebrados (cuartos, quintos, tercios, etc.) y éstos no todos son fácilmente comparables entre sí.

8° Problemas aplicando el nuevo procedimiento.

Propiedades de las decimales.

1°— 4'5 varas es igual á 4½ varas.
4'50 ,, ,, ,, ,, 4½ ,,
4'500 ,, ,, ,, ,, 4½ ,,

Se hace que los niños lean la primera cantidad de décimas [4 varas, 5 décimas] y preguntando las décimas que tiene la vara, los niños ven que es igual á 4 varas y media. Se hace lo mismo con las otras para que vean que sigue siendo igual á 4 varas y media.

2° Se dictan otras cantidades decimales, v. g, 4'3 varas y preguntando á los niños las centésimas que tiene la décima, descubren que se puede escribir la misma cantidad en esta forma: 4'30 varas, [4 varas, treinta centésimas.] Del mismo modo descubren que 4'3 equivale á 4'300, etc.

Las decimales no cambian de valor cuando se les agregan ceros.

3° 8'4 varas, reducido á décimas=84 décimas de vara, corriendo la coma á la derecha=84 varas, la vara es 10 veces mayor que la décima, la cantidad se hizo diez veces mayor; 4'25 de vara, reducido á centésimas=425 centésimas de vara.

Corriendo la coma dos lugares=425 varas, la vara es cien veces mayor que la centésima, la cantidad se hizo cien veces mayor.

Ejemplos con milésimas, etc,

Las decimales aumentan de valor corriendo la coma á la derecha. Si se corre un lugar la cantidad se hace diez veces mayor, si dos, cien veces, etc.

4° 235'3 varas, reducido á décimas=2353 décimas de vara.

Corriendo la coma un lugar á la izquierda es igual á 23'53=2,353 centésimas. La centésima es diez veces menor que la décima, la cantidad se hizo diez veces menor.

Corriéndola dos lugares es igual á 2'353=2,353 milésimos de vara. La milésima es cien veces menor que la décima, la cantidad se hizo cien veces menor.

Las decimales disminuyen de valor cuando se corre la coma á la izquierda. Si se corre un lugar la cantidad se hace diez veces menor, si dos, cien veces menor, etc.

Cálculo con decimales.

SUMA.

1° Se dicta un problema v. g. Un sastre tiene tres piezas de paño; una tiene 28'75 metros, otra 37'4 metros y la otra 48'984 metros. ¿Cuánto tienen entre los tres?

Con un problema semejante de enteros se hace que los niños descubran que el anterior es de sumar.

Se pregunta luego en que forma se colocan las cantidades para sumar [unas debajo de otras] y qué colocación se da á cada cifra en particular, para que los niños recuerden que han de quedar las unidades debajo de las unidades, etc., y llamando su atención sobre cual es la cifra de las unidades en cada una de las cantidades decimales, se les invita á que las coloquen para sumar, de manera que se correspondan las unidades de todas ellas.

Las cantidades quedarán así:

$$\begin{array}{r} 28'75 \\ +37'4 \\ +48'984 \end{array}$$

2° Resolución: Se invita á los niños á que empiecen á ejecutar la operación y si vacilan por que ven que el 4 de la última cantidad y el 5 de la superior quedan adelantados hacía la derecha, se les llama la atención sobre las cifras de las décimas y centésimas para que observen que quedan en línea, y aún se les puede hacer que cubran con ceros los lugares desocupados y ejecuten la operación.

Después se les hace que se fijen en que podían no haber

escrito los ceros y sumar las cifras de cada columna, donde hubiere, sin alterar por eso la suma.

Al hacer la operación se procurará que den el nombre de las unidades que van sumando (milésimas, centésimas ó décimas) y digan lo que se escribe y lo que se deja pendiente para la columna que sigue y cuando lleguen á los enteros que escriban la coma para separarlos de las decimales.

3° Se llamará la atención de los niños sobre la manera de sumar las decimales y la de sumar enteros para que enuncien la regla más ó menos en esta forma.

Las decimales se suman como los enteros, teniendo cuidado de poner la coma en el lugar de las unidades.

RESTA.

1° Problema con igual número de decimales en el minuendo y el sustraendo.

Por analogía con la suma, los niños colocan una debajo de otra las cantidades, y ejecutan la operación dando los nombres de las unidades que cada cifra representa, y colocando la coma en su lugar.

2° Analogía que este presenta con la resta de enteros.

3° Problemas en que haya más decimales en el sustraendo que en el minuendo; ejemplo:

$$\begin{array}{r} 286'325 \\ -32'4 \end{array}$$

Los niños ven que debajo de las milésimas y centésimas, no hay nada que quitar y ejecutan con facilidad la resta.

4° Problemas en que haya más decimales en el minuendo que en el sustraendo. Ejemplo:

35'4
—12'286

Se llama la atención de los niños sobre que arriba no hay milésimas, ni centésimas de donde quitar, que es como si dijéramos cero centésimas, cero milésimas; y como las decimales no cambian de valor al agregar ceros, se pueden poner dos al lado de las cinco décimas, quedando la operación así:

35'400
—12'286
=23'114

procediendo luego como en los enteros y colocando la coma en su lugar.

5° Analogía que en todos los casos presentan las decimales con los enteros.

Multiplicación.

1° Problema: Valiendo el metro de casimir $5.75 cents. ¿cuánto valen 7'4 metros?

2° Arreglo: 1 m. vale 575 cents.
7'4 ,, ?

3° Razonamiento: Los niños no encontrarán por sí la manera de razonar; pero el maestro dictará para que lo arreglen en otra parte del pizarrón un problema de quebrados v. g. Valiendo 575 centavos el metro de casimir, ¿cuánto valen 6¾ metro?

Pide á los niños que arreglen este problema en frente del otro. Quedará así:

1 m. vale 575	1 m. vale 475
3¾ ,, ?	7'4 ,, ?

Preguntará después: ¿qué hacen primero en el de quebrados? [reducir á cuartos] ¿qué harán en el otro? [reducir á decimas, son 74] qué hacen después de reducir á cuartos en el de quebrados?[buscar el valor de ¼] en el otro? (buscar el valor de una décima) ¿qué hacen por fin en el de quebrados? [buscar el valor de $\frac{15}{4}$] en el otro? [buscar el valor de 74 décimas]

Con esto ya podrán razonar el problema de decimales así:

1 m: vale 575

1 décima $\frac{575}{10}$

74 décimas $\frac{575 \times 74}{10}$

DIVIDIR.

1° Problema: En 7'15 horas ha arrojado una fuente 2,850 litros de agua ¿cuánto arroja por hora?

Arreglo; en 7'15 horas arroja 2,850 litros
en 1 ,, ?

Razonamiento: Es muy probable que los niños digan desde luego, que hay que reducir las horas á centésimas y luego buscar lo de una centésima para hallar en seguida lo de una hora, por analogía con los problemas hechos antes; pero si no sucediere así, se propone un problema de quebrados semejante, y que los niños lo arreglen frente al de decimales, v. g., en 4⅔ horas ha arrojado una fuente 1440 litros de agua ¿cuánto arroja por hora? Quedarán ambos así:

en 4⅔ h. arroja 1450 lit. en 7'15 h. arroja 2850 lit.
en 1 ,, ? en 1 ,, ?

2° Procediendo luego por comparación como se hizo al tratar de los problemas de multiplicar decimales, verán los niños; que así como en el de quebrados se reduce á tercios, se busca lo de un tercio y luego lo de una hora que tiene tres tercios; en el de decimales, se reduce á centésimas, se busca lo de una centésima y luego lo de la hora que tiene 100 centésimas.

Con ello podrán los niños razonar en esta forma:

en 715 centésimas de hora arroja 2850 litros
en 1 ,, ,, ,, $\frac{2850}{715}$,,
en 1 hora ó cien centésimas $\frac{2,850 \times 100}{715}$

3° Repetición del problema y resolución de otros semejantes

Regla de tres con decimales.

1° Problema: ¿Cuánto recorre en 2'35 horas un viajero que en 5'4 horas ha andado 27 kilómetros?

Arreglo; en 5'4 horas anda 27 kilómetros
en 2'35 ?

Razonamiento: Los niños propondrán hacer la reducción á puras decimales en ambas partes; el maestro llamará su atención sobre que no obstante eso, arriba tenemos décimas y abajo centésimas y necesitamos igual especie arriba y abajo para razonar: Ellos propondrán entónces hacer todo centésimas y el problema quedará así:

en 540 centésimas de hora anda 27 kilómetros
en 235 ,, ,, ,, ,, ?

y razonarán buscando lo de una centésima,

$\frac{27}{540}$ y luego lo de 235 $\frac{27 \times 235}{540}$

Si sucediere que al indicar las operaciones los niños pusieren la coma, se les hará notar que no han dicho 5'40 centésimas, al buscar el camino recorrido en una centésima de hora, sino una cantidad 540 veces menor que 27 y por tanto no deben dividir por 5'40 sino 540. Lo mismo se hará en el siguiente razonamiento, si pusieren coma en el 235.

Aquí también se les puede hacer ver la analogía que esto presente con los quebrados; pues en aquellos nos fijamos en los numeradores al razonar y consideramos los denominadores como palabra (nombre de las partes) y aqui nos fijamos también en el número de partes y la coma solo sirve para saber como se llaman (denominador.)

Es decir, hay que llamar la atención de los niños sobre la relación que es un número entero, á parte de la cantidad que es decimal, para que vean que del mismo modo que "si 235 varas valen cierta cantidad UNA vale otra cantidad 235 veces menor" si 2'35 DOSCIENTAS TREINTA Y CINCO centésimas valen cierta cantidad, UNA vale otra cantidad 235 (no 2'35) veces menor.