CAPITULO V.

ARITMÉTICA.

PLAN.
- Principio.—Ir de lo concreto á lo abstracto.
- Facultades.—Raciocinio.
- Formas.—Expositiva é interrogativa.
- Procedimientos: a—gráfico. b—geométrico.

Resumen.—1. Objeto.—2 Método de reducción á la unidad.—3. Los procedimientos a—gráfico—b geométrico lineal—c geométrico superficial—d—geométrico de volúmenes.—4. Cálculo mental.

1. Objeto.—Todos los autores convienen en que la Aritmética sirve para el desarrollo y madurez del juicio y del raciocinio. Y todos los maestros convendrán conmigo en que, siendo esta materia de capital importancia en la escuela primaria, es la que más abandonada está. Con frecuencia observo que los profesores enseñan Aritmética por reglas, en lugar de aplicar la Aritmética pensando, y llega á tal grado *el arte de falsear el objeto de la enseñanza*, que he encontrado en los planteles importantísimos de instrucción primaria, que el maestro transmite esta especie de conocimientos usando compendios de Aritmética demostrada!

El objeto de tan importante asignatura, ha sido tratado magistralmente por el maestro Rébsamen en uno de sus primeros trabajos pedagógicos. Oigamos al maestro:

"La enseñanza del cálculo en la escuela, dice, persigue *un fin doble.*

I.—Un fin *material ó práctico.* Los alumnos deben adquirir la capacidad de resolver todos aquellos problemas que la vida común les propone á cada paso, v. g., calcular el precio de mercancías, ganancia ó pérdida, interés y capital, etc.

II.—Un fin *formal.* Esta enseñanza sirve de *medio* para formar *la inteligencia de los niños,* para enseñarles á *pensar, discurrir, raciocinar.*

Pestalozzi y sus discípulos han acentuado tal vez demasiado este *fin formal,* mientras en la época actual, muchos maestros y padres de familia parecen haber olvidado el *fin formal,* y sólo se fijan en el *material.*

En mi humilde concepto, *debe* atenderse á ambos fines y *puede* atenderse á ellos *á la vez.*

La sociedad tiene derecho de exigir que el niño confiado á la escuela durante cinco ó seis años, salga provisto de cierta suma de conocimientos indispensables para la vida práctica.

¡Pero! ¿qué, eso es acaso el único objeto de la escuela? Seguramente que no. El niño tiene facultades intelectuales, morales y físicas, y todas necesitan estímulo, cultura y dirección para su desenvolvimiento armónico. Todos los ramos de enseñanza pueden servir para este objeto, y el de que me ocupo, el cálculo, muy particularmente es, cuando se enseña bien, la *mejor* gimnástica mental; y esto, *sin descuidar en lo más mínimo* su fin práctico.

Vamos á hacer algunas indagaciones á cerca de este punto.

Todo cálculo en el sentido propio de la palabra, es un acto del *entendimiento,* pues se trata siempre de números como *representaciones,* (percepciones ó ideas) de una cantidad de cosas homogéneas.

Para ayudar á la memoria y para representar las operaciones de una manera más cómoda y más segura, nos servimos de signos exteriores convencionales, *las cifras,* y así se ha formado *el cálculo* (siempre pensando) *con cifras.* Este segundo modo de calcular difiere del cálculo mental, únicamente en que se usan las cifras. Para el cálculo mental no se necesitan en el entendimiento *signos* de ningún género, sólo se piensa en el número. El que calcula con cifras, también piensa en el número, pero lo *fija* por medio de las cifras, y hace sus operaciones con ellas, según determinadas leyes numéricas. Si en esto procede *sin conciencia*, sin poder darse cuenta de sus pasos, según reglas que aprendió de memoria, su cálculo es *mecánico;* es lo que se llama *cálculo por reglas. Repito:* En último análisis no hay más *que una sóla especie* de cálculo: El CÁLCULO PENSANDO que tiene *dos formas: cálculo mental* y *cálculo con cifras.* Un *aborto* de este este último es el CÁLCULO MECÁNICO Ó POR REGLAS.

El *cálculo pensando*, sea mental ó con cifras, obliga al discípulo á formar con su propio trabajo una serie de conclusiones, y á seguir tal ó cual procedimiento. *dándose cuenta del motivo por qué* lo emplea para resolver el problema. El *método del cálculo pensando* reprueba toda clase de generalidades y definiciones *á priori*, toda clase de reglas y fórmulas *aprendidas de memoria.* (*)

(*) Al poner en contraposición el *cálculo pensando*, y el *cálculo mecánico por reglas;* no digo que el que calcula pensando no pueda llegar á formarse reglas. Al contrario, esta es la cosa más natural del mundo y estas reglas que *él mismo* se haya formado le serán de gran utilidad. Esto no es *cálculo mecánico* sino *mecanismo en el cálculo*, es decir, destreza y seguridad basada en la comprensión y el ejercicio constante. Este mecanismo, lejos de reprobarlo, debemos fomentarlo. Cuando el alumno ha expuesto y resuelto de una manera intuitiva y razonada multitud de problemas, nada más natural que por *abstracción* encuentre ciertas leyes, descubra ciertos procedimientos mecánicos que le faciliten la más pronta resolución de sus problemas. Este mecanismo, que ha nacido de la comprensión y del ejercicio, no solamente tiene su razón de ser, sino que es necesario; y se recomienda que los maestros mismos, al terminar alguna especie de cálculos homogéneos, ayuden á sus alumnos á encontrar estos procedimientos abreviados, estas pequeñas ventajas. Así, estas reglas, que hoy forman la piedra fundamental de todo cálculo serán

El *método mecánico* acumula por medio de la *memoria* regla sobre regla, *sin la base é intervención continua* de la percepción y del entendimiento. Este método consiste en una imitación ciega, en un cálculo *sin penetración* y *conciencia*, en una serie de operaciones *con sujeción á las reglas no comprendidas ó á fórmulas aprendidas mecánicamente*, y que por consiguiente *pronto se olvidan.* **El cálculo mecánico es la muerte de la cultura intelectual.**

Es menester hablar aun más del *cálculo pensando.* Su naturaleza íntima, no consiste, como muchos podían suponer, en encontrar lo más pronto posible el resultado de un problema, sino en formarse idea exacta de las relaciones entre los datos del problema. En esto y *sólo en esto* consiste su valor *eminentemente formal.* Este es el punto principal en toda clase de cálculo, él debe preceder á toda operación, y ésta no es más que el resultado lógico de aquél. Un alumno que recibe la enseñanza en el cálculo por este *método pensando*, no se preocupa al principio de la operación que requiere el caso, sino que se pone á considerar razonadamente las relaciones existentes. Alumnos y aun adultos, que han recibido su enseñanza por el vicioso *método mecánico*, preguntan desde luego inquietos y asustados si se necesitará *dividir ó multiplicar, restar ó sumar.*

En un colegio preparatorio, se propuso últimamente el problema siguiente: *Una vara equivale á 838*mm. *¿Cuál es la equivalencia de 50 varas?* Ví que el alumno escribió las cifras respectivas en el pizarrón, vaciló y

en lo futuro la clave, la piedra con que se cierre el arco, el último toque que se dé al edificio. Y con esta pequeña diferencia, que hoy *el maestro da la regla al discípulo para que la aprenda de memoria*, y en lo futuro *el alumno mismo la encontrará* con los esfuerzos de su propia inteligencia, después de haber resuelto multitud de problemas.

no pudo proseguir. Oí al maestro preguntarle titubeando: ¿Es una operación de multiplicación ó de división? Alternaron palabras cortadas y pausas largas entre maestro y discípulo. Convinieron ambos en que era una operación de división, y finalmente...... *no se pudo resolver el problema* ¿Y por qué? Porque ambos, maestro y discípulo, no conocían más que el vicioso método mecánico, porque habían olvidado la regla con la presencia perturbadora de una persona extraña, porque no habían aprendido á hacer uso de esta preciosa facultad del alma que llamamos *juicio*. Pude convencerme después que el maestro de quien hablo, es una persona muy apreciable y de basta instrucción. Todo el mal consiste en que él ha aprendido, cuando alumno, por el vicioso método mecánico, y que sigue hoy, como maestro, enseñando por este mismo método. Si llegan á sus manos estas líneas, tengo la convicción de que me concederá la razón, y que será desde luego partidario del *cálculo pensando*.

El *cálculo pensando* REPRUEBA, entre otras cosas, las siguientes: Aprender *mecánicamente de memoria* las tablas de adición, substracción, multiplicación y división. Aprender *mecánicamente* los sistemas de medidas, pesos, etc., sin tener á la vista los objetos, resolver los cálculos de *interés*, *capacidad*, etc., por medio de estas *formulas:*

$$I=\frac{C\times t\times i}{100} \qquad C=\frac{I\times 100}{t\times i} \text{ etc}$$

Resolver la llamada regla de *tres* por medio de las *proporciones*.

Las proporciones contienen muy *pocos elementos formales* y la experiencia ha demostrado mil veces que, aun estos pocos, no saben aprovechar los jóvenes alumnos, de modo que resuelven sus problemas de una manera *puramente mecánica*. Esto no quiere decir que desconozca el valor de las proporciones, su grande importancia para la *Geometría* y el *Algebra* está fuera de duda, solamente pretendo que nada tiene que ver *en la escuela primaria* y que en el *cálculo*, deben sustituirse por el único método natural, *el de conclusiones*. (*)

Este método, que es el de la Lógica, satisface todas las exigencias de los que, con razón, ecentúan el *fin formal de la Aritmética*. Este método no necesita ropaje de erudición, es *fácil* de *aprender* y *fácil* de *enseñar*. Y es, al mismo tiempo, eminentemente *práctico:*

1.—Basta completamente para las necesidades de la vida común.

2.—Un alumno hábil resuelve los problemas con la misma rapidez que el más diestro proporcionista.

3.—Este método permite graduar *sistemáticamente* la enseñanza.

4.—Nunca se olvida.

Para los aficionados á las matemáticas diré, además, que este cálculo por conclusiones, es la mejor preparación para las ecuaciones algebraicas.

En este método de conclusiones, creo, pues, haber encontrado lo que buscaba. El *medio de utilizar la enseñanza del cálculo como gimnástica mental, sin descuidar su fin práctico......*"

2. Método de reducción á la unidad.—El método

(*) Al insigne pedagogo suizo *Pestalozzi*, cabe el mérito de haber aplicado, el primero, este método al cálculo mental, bajo el nombre de *cálculo por raciocinios*. En 1832, el profesor Stern lo introdujo en Alemania con el nombre de *Zweisatz* (dos proposiciones ó condiciones), y en 1835 Hentschel en Weissenfels ha inventado la *reducción á la unidad*. Esta última forma tiene la ventaja de *aplicarse universalmente*, mientras que otras formas de cálculo por conclusiones, sólo pueden aplicarse en casos determinados.

de reducción á la unidad reune todos los elementos formales que buscamos. (*)

La mejor exposición que del método pudiéramos hacer está en la marcha trazada por el Maestro Rébsamen, colaborando en "La Reforma de la Escuela Elemental" cuando conoció personalmente al profesor Dn. Carlos A. Carrillo.

Dice el Maestro:

"Mi distinguido amigo el Sr. Carrillo, ha demostrado......... que el método de reducción á la unidad muy bien puede aplicarse á la regla de tres compuesta, y que los problemas se resuelven con suma facilidad.

Conforme con el *principio*, voy á buscar una *forma* más sencilla todavía.

Distingo 4 grados:

PRIMER GRADO.

Para proceder *gradualmente*, empiezo con la forma del Sr. Carrillo. Presento á mis discípulos durante dos meses, poco más ó menos, problemas, primero *directos*, después *inversos;* primero con *números enteros*, escogiéndolos de manera que faciliten las operaciones de división, después con *quebrados y mixtos.* Harán separadamente cada operación de división ó multiplicación, y para saber cuál es la que requiere el caso, tendrán que formar *juicios y conclusiones*, tendrán que *pensar*.

SEGUNDO GRADO.

Es muy molesto hacer consecutivamente 6 operaciones diferentes de división y multiplicación, me con-

(*) Lo introdujo en el país aplicándolo á la escuela primaria el Sr. E. Laubscher, y después comprendió su utilidad el notable pedagogo mexicano Don Carlos A. Carrillo.—Nota del Autor.

tento, pues, con *indicar* estas operaciones por medio de los signos respectivos, y dejo la *ejecución* hasta el fin.

Para mayor claridad de la forma, adopto como signo de división la línea horizontal (—) empleada para escribir los quebrados (*), y no los dos puntos (:).

Como mis discípulos ya conocen los quebrados, saben que para aumentar v. g. 5 veces el valor de la fracción, tienen que multiplicar el numerador por 5 (para esto, escríbase el 5 con el signo × *sobre* la línea), y para disminuirlo, hacer la misma operación con el denominador (escríbase el 5 son el signo × *debajo* de la línea). El trabajo mental de los niños se reduce, pues, en cada una de las seis cuestiones del Sr. Carrillo, á esta sencilla y clara pregunta. que, á pesar de su sencillez, pone en actividad toda la fuerza intelectual del niño: *¿Tengo que aumentar ó disminuir?* (Es *más* ó es *menos?*)

He aquí la forma de nuestro ejemplo para el 2º grado:

Supuesto: 8 hombres ganan en 9 días, trabajando 6 horas...... \$ 54.

Pregunta: 5 hombres ganan en 15 días, trabajando 9 horas ¿cuánto?

8 h. en 9 días trab. 6 horas.............................\$ 54

1 „ „ 9 „ „ 6 „ (8 veces menos)..........$ $\frac{54}{8}$

1 „ „ 1 „ „ 6 „ (9 veces menos).......$ $\frac{54}{8 \times 9}$

1 „ „ 1 „ „ 1 „ (6 veces menos)....$ $\frac{54}{8 \times 9 \times 6}$

(*) Para abreviar, denominaremos en lo sucesivo esta línea, *línea de quebrados.*

1 h. en 1 días trab. 9 horas (9 veces más)....$\$\frac{54\times9}{8\times9\times6}$

1 ,, ,, 15 ,, ,, 9 ,, (15 veces más).,.$\$\frac{54\times9\times15}{8\times9\times6}$

5 ,, ,, 15 ,, ,, 9 ,, (5 veces más).$\$\frac{54\times9\times15\times5}{8\times9\times6}$

Se ejecutarán las operaciones indicadas en el numerador y denominador, $\$\ \frac{36450}{432}$, y efectuando la división, resulta $ 84.37½ igual al resultado del Sr. Carrillo, multiplicando $ 16.87½ por 5. (*)

Y como mis discípulos conocen ya la simplificación de los quebrados, la aplicarán desde luego á mi fracción final:

$$\$\ \frac{54\times9\times15\times5}{8\times9\times6}=\$\ \frac{675}{8}=\$\ 84.37\tfrac{1}{2}$$

(Simplificación: 9 igual á 9, se tachan ambos; 54 entre 6=9, se tacha el 54 y se escribe encima el 9, se tacha el 6; 9×15×5=675, en el denominador me queda solamente el 8).

TERCER GRADO.

Es muy molesto hacer seis veces la línea del quebrado, y repetir constantemente los mismos números; bastará una sola línea de quebrados.

Sea el problema:

Para hacer 240 piezas de tela en 27 días, trabajando 12 horas diarias, se necesitan 10 tejedores, ¿cuántos tejedores se necesitan para tejer 350 piezas en 21 días, trabajando solamente 9 horas?

(*) En la página 34 de la entrega anterior, se deslizó una ligera equivocación, pues no se trata de saber el sueldo de 9 hombres, sino de 5, y resulta en efecto $ 84.37½.

240	piez. en	27	días	trab.	12	hor.	requieren.....	
1	,,	27	,,	,,	12	,,	(240 vs. ms.)	
1	,,	1	,,	,,	12	,,	(27 veces más)	
1	,,	1	,,	,,	1	,,	(12 ,, ,,)	
1	,,	1	,,	,,	9	,,	(9 veces ms.)	
1	,,	21	,,	,,	9	,,	(21 ,, ,,)	
350	,,	21	,,	,,	9	,,	(350 ,, más)	

$$\frac{\overset{3}{\cancel{27}}\ \ \overset{50}{\cancel{350}}}{} \quad \frac{10\times27\times12\times350}{240\times9\times21} \quad \frac{}{\underset{2}{\cancel{24}}\ \ \underset{7}{\cancel{21}}} \quad =\frac{50}{2}=25\text{tejed}$$

(Simplificación: 10 cabe en 240=24 veces, se tachan el 10 y el cero del 240; 9 cabe en 27=3 veces, se tachan el 9 y el 27, encima de éste se escribe el 3; 3 en 21=7 veces; 7 en 350=50 veces; 12 en 24=2 veces.)

CUARTO GRADO.

Acostumbrados ya mis discípulos á deducir las conclusiones sin equivocarse, y á resolver todos los problemas del caso con exactitud y rapidez, no necesitan escribir toda la serie de raciocinios, les basta trazar la línea de quebrados. Hago resolver multitud de problemas variados en el pizarrón. Todos los niños del grupo respectivo forman un semicírculo, uno toma el gis y anuncia de viva voz las conclusiones intermedias, pero solamente escribe los números.

Sea el problema siguiente:

12 trabajadores ganan en 10 días $330, ¿cuánto ganan 40 trabajadores en 8 días?

LO QUE ESCRIBE MI DISCIPULO ENRIQUE
EN EL PIZARRON.

12 trabajadores ganan en 10 días $ 330.
40 ,, ,, ,, 8 ,, ?

$$\frac{\overset{110}{330}\times 8\times \overset{4}{40}}{12\times 10}=\$\ 880.$$

LA EXPLICACION RAZONADA QUE DA DE VIVA VOZ.

Si 12 trabajadores ganan en 10 días \$ 330, 1 trabajador ganará en el mismo tiempo 12 veces menos, ó sean:

$$\$\frac{330}{12}$$

Si 1 trabajador trabaja un solo día, ganará 10 veces menos ó sean:

$$\$\frac{330}{12\times 10}$$

Pero si un trabajador trabaja durante 8 días, ganará 8 veces más, ó sean:

$$\$\frac{330\times 8}{12\times 10}$$

y 40 trabajadores que trabajan durante el mismo tiempo ganarán 40 veces más, ó sean:

$$\$\frac{330\times 8\times 40}{12\times 10}$$

Procedo á la simplificación: 10 cabe en 40=4 veces; 4 cabe en 12=3 veces; 3 cabe en 330=110 veces; etc.

* * *

Según los adelantos de los niños, y si la forma análoga ha servido ya para la regla de tres simple (*), es-

(*) Al ejemplo del Sr. Carrillo, pág. 1 del Tomo II, daría la siguiente forma.

45 varas valen........................

1 vara vale (45 veces menos)...

9 varas valen (9 veces más)......

$$\frac{\overset{45}{225}\times 9}{\underset{5}{45}}=\$45.$$

tos 4 grados pueden reducirse á 3 y aun á 2; el maestro inteligente encontrará facilmente lo que mejor convenga á sus discípulos.

La experiencia me ha demostrado la excelencia del *cálculo por conclusiones* al que pertenece este caso especial que hemos llamado *reducción á la unidad.*

Conozco niños de 11 y 12 años de edad que resuelven con notable facilidad aun los problemas más complicados, y esto, bien se entiende siempre discurriendo paso á paso, y no siguiendo mecánicamente las incomprensibles fórmulas de la antigua rutina.

Pero tal vez no he logrado persuadir á todos mis lectores y me propongo presentar en un segundo artículo la misma cuestión bajo otro punto de vista.

3. Los PROCEDIMIENTOS.—"La experiencia enseña, dice Pestalozzi, que los principios del cálculo parecen difíciles, únicamente porque no se utilizan los medios psicológicos en la extensión en que se debería hacerlo." Y estos *medios* á los que se refiere el gran pedagogo suizo son los *procedimientos* más adecuados que el profesor escoge para realizar en la práctica el principio *ir de lo concreto á lo abstracto* conforme lo ordena la Psicología.

Aplícanse algunas variedades del procedimiento *tabular* para *concretar las ideas* en el momento de *exponer* y *justificar* el razonamiento.

Los principales son:

a/. gráfico.

b/. geométrico lineal.

c/. geométrico superficial (para el cuadrado y raíz cuadrada).

d/. geométrico de volúmenes (cubo y raíz cúbica).

Cada uno de estos procedimientos deben usarse con moderación, mientras no están *suficientemente disciplinadas las inteligencias* de los educandos.