a/. Procedimiento gráfico.—Haciendo los ejercicios de razonamiento de la pluralidad á la unidad y viceversa, con toda la serie de términos del supuesto (2º grado) ó alternando á la vez los términos del supuesto y la pregunta, sucede con frecuencia que hay alumnos en la clase que no alcanzan á hacer estas ligeras abstracciones, en tales casos se impone el procedimiento gráfico. v. g:

supuesto: 8 hombres ganan en 9 días, trabajando 6 horas ..... \$ 54
pregunta: 5 „ „ 15 „ „ 9 „ ...... cuánto?

Dispondremos el razonamiento:

1 h	ds.	horas	
.).......	|||||||||	//////	\$
8 ——	9 ——	6 ——	54

Si 8 hombres ganan \$54, un hombre (señalando un punto) ganará...... la octava parte de \$54 ó sean \$54 divididos entre los 8 hombres; pero esto es un hombre trabajando 9 días, trabajando 1 día, (apártese una rayita vertical) ganará 9 veces menos pesos; pero como este hombre trabaja 6 horas, si solamente trabajara 1 hora ganaría seis veces menos pesos.

$$\frac{\overset{\$}{54}}{8\times\underset{\$}{9}\times\underset{\$}{6}}$$

Es decir: tenemos aquí lo que gana un hombre, trabajando *un día* á razón de una hora diaria; pero si este hombre trabajara 9 horas diarias ganaría 9 veces más pesos, y si en lugar de trabajar *un día*, trabajase 15 días, ganaría 15 veces más pesos; y si en lugar de ser un solo hombre, fueran 5 hombres que es la última condición del problema, los 5 hombres, ganarían 5 veces más pesos.

$$\frac{\$54\times\overset{\$}{9}\times\overset{\$}{15}\times\overset{\$}{5}\overset{\$}{}}{8\times\underset{\$}{9}\times\underset{\$}{6}}=84'37\tfrac{1}{2}$$

Con una serie de reglas de tres simple, omitiendo

los términos que por lo pronto se hacen innecesarios tendríamos

	h	días	horas	
	....	⁝⁝ ⁝	//////	\$
I——	8 ——	9 ——	6 ——	54
	.....	⁝⁝⁝⁝⁝⁝.	⁝⁝ ⁝	
	5 ——	15 ——	9 ——	?

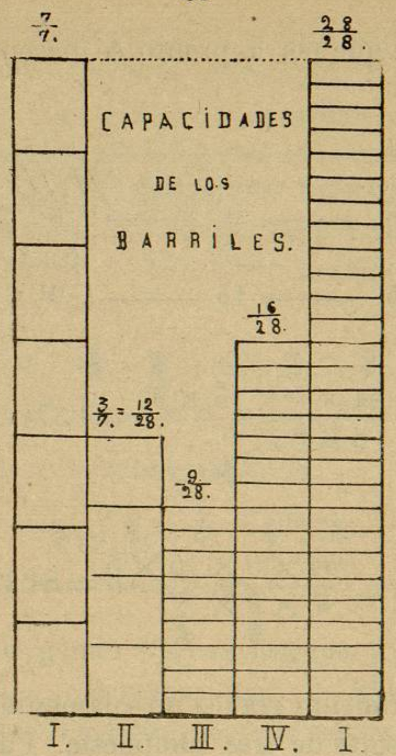
$$\frac{\overset{\$}{54}\times\overset{\$}{5}\times\overset{\$}{15}\times\overset{\$}{9}\overset{\$}{}}{8\times\underset{\$}{9}\times\underset{\$}{6}}=84'37\tfrac{1}{2}\text{ cs.}$$

$$\text{II}\_\_\_\_ \quad \frac{\overset{\$}{54}\times\overset{\$}{9}\times\overset{\$}{15}\times\overset{\$}{5}\overset{\$}{}}{6\times\underset{\$}{9}\times\underset{\$}{8}}=84'37\tfrac{1}{2}\text{ cs.}$$

El procedimiento gráfico no solamente es importante para las reglas de tres compuesta. Puede aplicarse á una serie de casos, que al parecer ofrecen dificultades para la abstracción de los niños. Veamos el siguiente ejercicio de razonamiento numérico.

Tengo 4 barriles de diferente capacidad: con el contenido del primero lleno el segundo y me quedan $^4/_7$; con el del segundo lleno el tercero y me sobra $\frac{1}{4}$; con el del tercero no lleno sino $^9/_{15}$ del cuarto; y por último, si llenase el tercero y el cuarto con el contenido del primero, quedarían todavía 15 litros. ¿Cuál es la capacidad de los cuatro barriles?

Primera proposición.—Con el contenido del primer barril se llena el segundo y sobran $\frac{4}{7}$. Luego el primer barril se debe considerar dividido en $\frac{7}{7}$; es decir, gráficamente se representarán las capacidades:



Segunda proposición.—Con el contenido del segundo lleno el tercero y sobra un cuarto; luego el 2º se debe considerar dividido en $\frac{4}{4}=\frac{3}{7}$ del primero; pero el 3º es igual á los $\frac{3}{4}$ del segundo, luego es igual á los $\frac{3}{4}$ de los $\frac{3}{7}$ del primero; pero los $\frac{3}{4}$ de los $\frac{3}{7}$ del primero son $\frac{3\times3}{7\times4}=\frac{9}{28}$ (*) del primero. Por consiguiente, al

(*) Los $\frac{3}{4}$ de los $\frac{3}{7}$ se deducirá así: La cuarta parte de $\frac{3}{7}$ del primero será una cantidad cuatro veces menor que $\frac{3}{7}$ ó sean $\frac{3}{7\times4}=\frac{3}{28}$, y los $\frac{3}{4}$, serán una cantidad tres veces mayor que $\frac{3}{28}$ ó sean: $\frac{3\times3}{28}=\frac{9}{28}$.

primero no solamente lo debemos considerar dividido en $\frac{7}{7}$, sino también en $\frac{28}{28}$; $\frac{7}{7}=\frac{28}{28}$.

Tercera proposición.—Con el contenido del 3º lleno $\frac{9}{16}$ del 4º; luego el cuarto estando dividido en 16 partes iguales, le faltarían 7 de esas partes que se expresan gráficamente y considerando estas diversas capacidades resulta para el 4º $\frac{16}{28}$ del primero.

Cuarta proposición. Si con el contenido del primer barril $\frac{28}{28}$ se llenan el 3º $\frac{9}{28}$ y el 4º $\frac{16}{28}$, sobran 15 litros; luego los $\frac{9}{28}+\frac{16}{28}$ ó $\frac{25}{28}+15$ litros $=\frac{28}{28}$ ó sea la capacidad del primer barril.

Conclusión.—Si á $\frac{25}{28}$ suma de las capacidades del 3º y el 4º le faltan $\frac{3}{28}$ para equivaler al primer barril, estos $\frac{3}{28}$ equivaldrán á 15 litros y por consiguiente $\frac{1}{28}=$ 5 litros y los $\frac{28}{28}=140$ litros.

Por último, haciendo el reparto proporcional se tiene:

primer barril............................	140 litros.
segundo barril ($\frac{3}{7}$ del primero).....	60 „
tercer barril ($\frac{9}{28}$ del primero)........	45 „
cuarto barril ($\frac{16}{28}$ del primero).......	80 „

Prueba.—Con el contenido del primero si se llenan el 3º y el cuarto deben sobrar 15 litros; luego:

$$140 - 15 = 45 + 80$$
$$125 = 45 + 80 = 125$$

Las condiciones del problema están satisfechas.

Acontece con la enseñanza de los quebrados, que el maestro enseña la *suma, resta, multiplicación y división*, sucesivamente según los cánones de las matemáticas demostradas, por lo que el plan es cansado y fastidioso para los niños, quienes desean un cálculo intuitivo. (*)

He aquí una aplicación. Los textos de Aritmética dan las reglas para sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones. El maestro de la escuela primaria, para lucirse en el momento del examen, ó delante del inspector de la escuela:

M.—Díme, Manuel, ¿qué se hace para sumar quebrados?

El alumno contesta como un atarantado.

M.—Se multiplica el numerador de cada quebrado por todos los demás denominadores, menos por el suyo, y se pone por denominador el producto de todos los denominadores.

(*) La multiplicación fraccionaria debe reducirse á un solo caso, multiplicar quebrados por enteros; pues la *llamada* multiplicación de fracciones por fracciones es más racional denominarla *tomar fracciones de fracciones* y así constituir un solo *grupo de problemas para el caso.*

En la división de quebrados también debe contarse *un solo caso*: dividir *un quebrado por un entero* v. g.: $\frac{5}{6} \div 9$ que es tomar $\frac{1}{9}$ de de $\frac{5}{6} = \frac{5}{6 \times 9}$. En los casos dividir un entero por un quebrado y dividir quebrados entre quebrados, es buscar la relación de los números dados con un entero, por lo cual deben suprimirse tantas reglas para tan poca cosa y de tan exigua utilidad.

M.—Veamos un ejemplo.........

El maestro dicta un problema que el alumno ya sabe de antemano que es de sumar. Ejecuta sus operaciones y, si se equivoca, hay en la clase 20 ó 30 maquinitas que estarán listas para indicar el error; pero este error nunca es señalado por el juicio y razonamiento propios. Se pasa el tiempo, y sinodales ó visitador se quedan *satisfechos de haber oído y sancionado una herejía.*

Y aquí cabe bien el aforismo de Rousseau, diciendo:

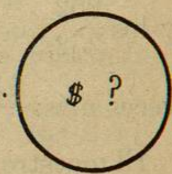
"Cuando se trata de examinar al niño, le hacen que deslíe su género; le enseña, quedan satisfechos, vuelve á liar su fardo, y se marcha."

No procede así mi Eudemón. Por la serie de ejercicios que ha hecho, por el número metódico de cuestiones que ha resuelto, sabe que un quebrado es parte de una *unidad*, ó parte de una cantidad tomada como unidad, y cuando se le dicta, v. g.:

(1er. ejemplo) Los $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{7}$ y $\frac{5}{9}$ de una cantidad de dinero hacen $ 340 y se pregunta cuál es esta cantidad, no repite de memoria que es suma, ni resta, ni multiplicación, ni división, porque sabe razonar con sus datos.

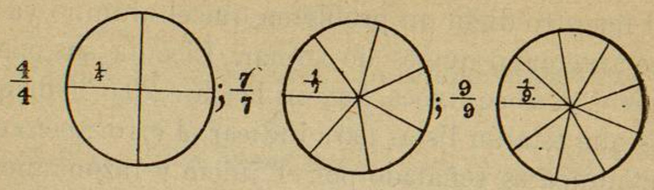
Mas supongamos que mi Eudemón comenzara sus primeros ejercicios. Como sabe que cualquiera cantidad puede representarse por *signos arbitrarios*, rayas, cuadrados, círculos, etc., se le vería inclinado en su mesita de escribir.

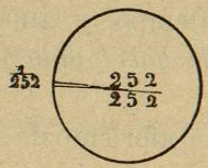
La cantidad desconocida en $ debe ser igual á...........



Esta cantidad puede dividirse en cuartos, en séptimos ó en novenos y *así hasta el infinito*, sin que la cantidad se altere.

La cantidad dividida en:





De la cantidad desconocida dividida en $\frac{252}{252}$ puedo tomar $\frac{3}{4}, \frac{2}{7}$ y $\frac{5}{9}$, que son:

$$\frac{3}{4}=\frac{189}{252},$$
$$\frac{2}{7}=\frac{72}{252},$$
$$\frac{5}{9}=\frac{140}{252},$$

ó lo que es lo mismo $\frac{189+72+140}{252}=\frac{401}{252}$; pero si esta cantidad según los datos del problema es igual á \$340, se deduce que un doscientos cincuenta y dos avos será la cuatrocientas una ava parte de 340 pesos $\frac{\$340}{401}$ y los $\frac{252}{252}$, que son la cantidad desconocida, serán 252 veces más: $\frac{\$340\times 252}{401}=\$213'66$ y una fracción.

El maestro procurará, si usa este procedimiento gráfico, que todos sus alumnos trabajen á la vez.

El alumno ha hecho conscientemente tres cosas:

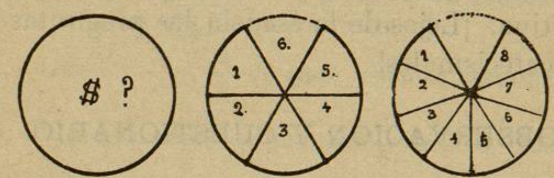
1º Formar un denominador común.

2º Sumar quebrados con quebrados.

3º Dividir un entero por un quebrado.

Sabe las relaciones numéricas y es dueño de su juicio.

(2º ejemplo.) Supongamos, ahora, que es un maestro quien cambia la cuestión ante sus discípulos, diciendo: Los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{4}{8}$ de los $\frac{5}{6}$ de una cantidad de dinero hacen \$200 y deseamos saber cuál es esta cantidad. Si los alumnos de pronto no saben resolver el asunto, el maestro dispone su demostración intuitiva del modo siguiente:



Supuesto que vamos á tomar los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{4}{8}$ de los $\frac{5}{6}$ de esta cantidad, para proceder con orden, primero necesitamos conocer los $\frac{5}{6}$. Si de los $\frac{5}{6}$ tomamos $\frac{1}{8}$, la cantidad que resulta es ocho veces menor que $\frac{5}{6}$ ó $\frac{5}{6\times 8}=\frac{5}{48}$ y los $\frac{4}{8}$ cuatro veces mayor ó $\frac{5\times 4}{40}=\frac{20}{48}$.

Si estos $\frac{4}{8}$ de los $\frac{5}{6}$ de la cantidad, les tomamos $\frac{2}{3}$, fácil es concebir la operación gráfica y el resultado numérico. Un tercio será la tercera parte de $\frac{20}{48}$ y dos tercios, dos veces más, $=\frac{20\times 2}{48\times 3}=\frac{40}{144}$.

La cantidad desconocida, por lo visto, se la debe considerar dividida en 144 partes iguales. Y si los $\frac{40}{144}$ hacen \$200, un ciento cuarenta y cuatro avos será cuarenta veces menor que \$200 ó $\frac{\$200}{40} = \$5$, y los ciento cuarenta y cuatro avos, ciento cuarenta y cuatro veces \$5, igual $5 \times 144 = \$720$.

Contando con la habilidad del maestro, ningún caso dejará de tratarse, y cuando ya se tenga el material suficiente, entonces los niños, dirigidos por el profesor, COMENZARÁN Á DEDUCIR LAS REGLAS. Es necesario abatir la rutina. ¡Lejos de la escuela las preguntas y respuestas catecismales!

OBSERVACIÓN Y CUESTIONARIO.

Antes que el alumno ejecute estas operaciones, por una serie de ejercicios preparatorios, es necesario que aprenda la relación que hay entre *numerador y denominador*, por medios intuitivos. Un pliego de papel entre dos niños, una manzana entre tres, una naranja entre cuatro, etc., que dan las relaciones:

$1 \div 2 = \frac{1}{2}$; $1 \div 3 = \frac{1}{3}$; $1 \div 4 = \frac{1}{4}$. De otro modo: que la relación entre numerador y denominador es igual á la de dividendo y divisor.

La demostración gráfica manifiesta, además, cuántas partes se toman de la unidad, y en cuántas partes se considera dividida.

1 ...... partes que se toman de la unidad ó numerador.
2 ...... partes en las que se divide la unidad ó denominador.

Más se puede hacer: calculando las relaciones de 1 á 10; de 1 á 100; de 1 á 1,000 y sus múltiplos, encontramos $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{100}$; $\frac{1}{1000}$...... y ejecutando las divisiones indicadas, resultan las decimales como un caso particular de las fracciones con todas las leyes á que obedecen.

CUESTIONES PARA EL PROCEDIMIENTO GRÁFICO.

1ª SERIE.

1.—5 pesos y $\frac{3}{4}$ de peso, ¿cuántos cuartos de peso hacen?

2.—15 piezas de género y $\frac{5}{12}$, ¿cuántos doceavos de pieza forman?

3.—Si tres surtidores llenan una fuente: el primero en 5 horas, el segundo en 7 y el tercero en 10, ¿qué parte llenan los tres juntos en una hora?

4.—Los $\frac{3}{5}$ y $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{9}$ de peso, ¿cuántos pesos hacen?

5.—Si á ocho pesos les quitamos $\frac{4}{8}$ de peso, ¿cuántos pesos quedan?

6.—Si á $\frac{8}{9}$ de un pliego de papel le quitamos $\frac{3}{4}$, ¿qué cantidad resulta?

2ª SERIE.

1.—Si á 36 piezas de género le tomamos los $\frac{4}{9}$, ¿qué cantidad de piezas restan?

2.—Si á los $\frac{3}{4}$ de peso les tomamos $\frac{2}{5}$, ¿qué fracción queda?

3.—Si tomamos $\frac{7}{8}$ de $\frac{4}{12}$ de $\frac{5}{6}$ de una resma de papel, ¿qué fracción de resma resta?

4.—Hacer 8 veces menor los $\frac{3}{9}$ de una cuartilla de papel.

5.—Si 60 pesos nos importan los $\frac{3}{4}$ de una pieza de casimir, ¿cuánto nos importará la pieza?

6.—$\frac{5}{8}$ de peso valen los $\frac{3}{7}$ de una caja de dulces, cuánto vale la caja?

3ª SERIE.

1.—Si los $\frac{5}{9}$ y $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{3}$ de una cantidad de dinero hacen hacen \$ 300, ¿cuál es la cantidad?

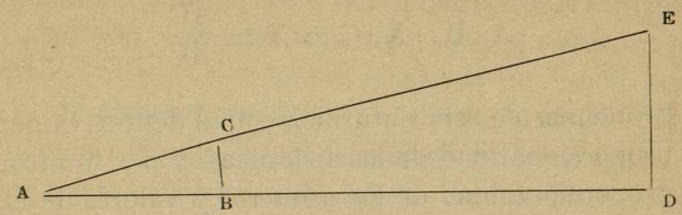
2.—Una persona tiene una cantidad de dinero y se sabe que dió á otra los $\frac{5}{9}$; ésta á su vez dió á otra persona $\frac{3}{5}$ y la última depositó $\frac{3}{4}$ en un banco. El banco le dió constancia de \$ 60. ¿Cuánto le quedó? ¿Cuánto les quedó á la segunda y á la tercera separadamente?

b/. Proc. geométrico lineal.—Proporcionalidad.—Guiado el alumno siempre por el principio "de lo concreto á lo abstracto," la rutina queda substituída por el razonamiento.

Las reglas de tres simple y compuesta, las reglas de compañía, aligación y descuento, que obligan á los alumnos á aprenderse un conjunto de reglas en la mayor parte de las escuelas mexicanas, se pueden simplificar, abatiendo la tortura de los espíritus, con la educación formal en el cálculo.

En la mayor parte de las cuestiones, el método de reducción á la unidad es el punto de apoyo para educar el razonamiento. A la vez, los alumnos han aprendido las relaciones de numerador á denominador, y sin ninguna dificultad entienden, v. g. que $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$; que $\frac{8}{9}=\frac{24}{27}$ ó bien que 3 : 4 : : 6 : 8; que 8 : 9 : : 24 : 27. Y de estas sencillas cantidades podemos pasar al estudio de las propiedades de las proporciones.

Mas para que el principio de lo concreto á lo abstracto se arraigue profundamente, sembrando la *fe en el número*, háganse ejercicios semejantes al siguiente:



Desde el punto A y sobre la línea AD, trácese un ángulo de 10°, fijando respectivamente los puntos B y D á 40 y 100 milímetros, por ejemplo. Desde los puntos B y D levántense dos perpendiculares. Los alumnos miden las perpendiculares y encuentran que la primera es de 7 milímetros y la segunda de 17 y ½ Además, el maestro hace notar que $40 \div 7 = 100 \div 17\frac{1}{2}$ y que $\frac{40}{7}=\frac{100}{17\frac{1}{2}}$ ó bien que 40 : 7 : : 100 : 17½.

Repitiendo el ejercicio con distintos ángulos y diversas magnitudes, se llega á la conclusión abstracta de que toda recta es con una relativa, como una tercera es á una desconocida. Cuando los educandos hayan calculado sobre magnitudes concretas, ya no hay ningún peligro de considerar las cantidades desconocidas con los símbolos X, Y ó Z.

Sobre el terreno, los alumnos se prestan admirablemente. Material: dos reglas de dimensiones conocidas; un alumno observador y otro observado, cuya altura se determina anticipadamente. A la altura del ojo del observador una de las reglas que vise los pies del otro individuo, colocado á cualquiera distancia. Al extremo libre de la regla, la otra más pequeña colocada perpendicularmente, hasta visar la parte superior de la cabeza del alumno observado. Entonces se puede decir: la magnitud de la regla horizontal (A) es á la magnitud utilizada en la pequeña regla perpendicular (B), como la distancia desconocida (X) es á la altura del alumno observado (C), ó bien: