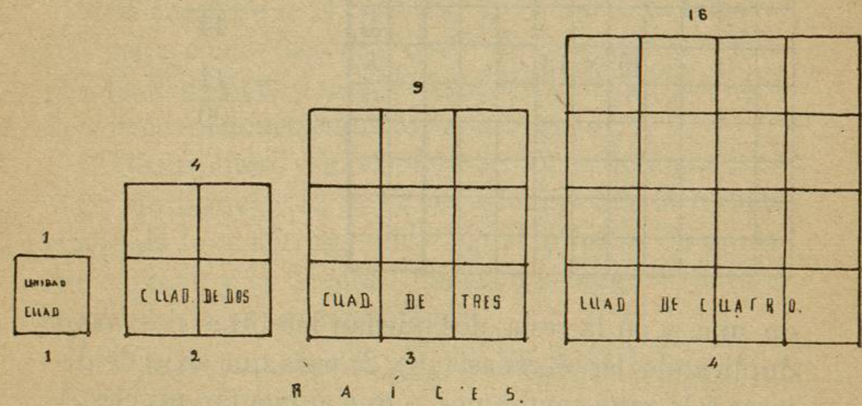
$$A : B :: X : C = X = \frac{AC}{B}$$

Problemas de esta naturaleza, fijan definitivamente la proporcionalidad de las distancias, y por lo mismo, la proporcionalidad de los números y valores de cualquiera especie; pero antes de que el alumno entre al estudio de las proporciones, debe exclusivante manejar el método de *reducción á la unidad*, como verdadero disciplinador de la inteligencia.

c/.—PROC. GEOMÉTRICO SUPERFICIAL.—(Cuadrado y raíz cuadrada). Generalmente se observa que los profesores, al iniciar á sus discípulos en el estudio de las potencias y raíces, hacen aprender de memoria que el cuadrado de 2 es 4, el de 3 es 9, el de 4 es 16, y así en adelante. Se dice más: que esto es la 2ª potencia; que es tomar la cantidad dos veces como factor; y como idénticas afirmaciones encuentra el alumno en su texto, no se atreve á preguntar en qué consiste la primera potencia y cómo el número se toma dos veces como factor, cuando le consta que se multiplica una vez por sí mismo. Los principios dogmáticos se repiten en la 3ª potencia y en sus raíces correspondientes. Una serie interminable de reglas *á priori* es lo que constituye este cálculo superior, en la escuela primaria. El alumno llega á hacer sus operaciones mecánicamente y tan defectuosa resulta la instrucción, que cuando fatalmente este mismo alumno llega á su cálculo algebraico, no puede razonar con los símbolos de los que tendrá que servirse para hacer sus operaciones. Urge, por lo mismo, establecer los principios de una enseñanza sólida.

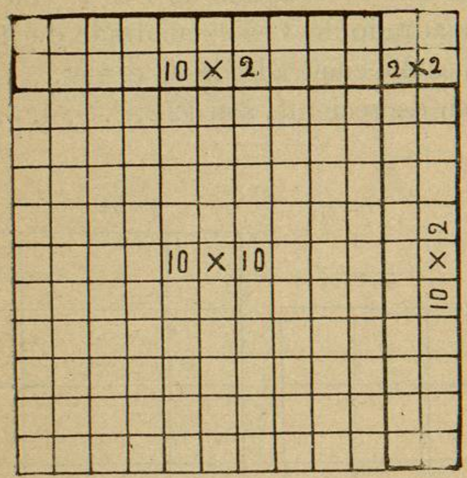
Los elementos geométricos sirven para las primeras demostraciones, *pensando siempre con la unidad cuadrada.*

Tomando como término de comparación el centímetro cuadrado, que gráficamente puede pintarse en el pizarrón, observamos que el cuadrado de 1 es 1; cuadrado de dos es 4; cuadrado de 3 es 9; cuadrado de 4 es 16; cuadrado de 5 es 25; cuadrado de 12 es 144...... cuyas raíces, en orden decreciente, son 12...... 5, 4, 3, 2, 1.



Se observa, además, que á partir de las decenas, el cuadrado de un número cualquiera puede obtenerse, bien tomando un número dos veces como factor, ó formado el cuadrado de las decenas, más dos veces las decenas por las unidades, más el cuadrado de las unidades, como lo demuestra la figura.

RAIZ.—144 es un número que está formado de decenas cuadradas, dos veces decenas por unidades, más el cuadrado de las unidades. Procediendo á la extracción de las decenas cuadradas, desde luego se comprende que valiendo éstas 100 unidades, no pueden encontrarse ni en las unidades ni en las decenas del número enunciado, sino hasta las centenas, *razón por la cual en la práctica separamos las unidades y las decenas.* Ahora: la raíz cuadrada de 100 unidades es una decena, que escribimos á la derecha del número enunciado y formando el cuadrado se resta del mismo número (144—100). De las tres partidas hemos destruí-



$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{144} & 12 \\
-100 & 2 \\
\hline
44 & \\
-\ 44 & \\
\hline
00 &
\end{array}
$$

do una, y en la resta nos quedan las otras dos; pero duplicando las decenas (10×2) para que sirva de divisor á la resta tendremos ó que aumentar un cero á este duplo, ó *separar una cifra á la izquierda de la resta* (*4. 4*). Dividiendo resulta el cociente 2 que son las unidades, y ejecutando entonces la operación de las dos partidas nos da el número 44 que restado de la operación obtendremos cero.

(Aquí explicará cuidadosamente el maestro, por qué en la práctica se va separando una cifra de cada resta al dividir por el duplo de la raíz.)

Con la propiedad fundamental del sistema de numeración, cuya base es 10, en sus múltiplos y submúltiplos, y *con la ayuda eficaz del procedimiento gráfico*, se pueden deducir el cuadrado y la raíz de una serie de casos.

d/. Proc. geométrico con volúmenes.—(cubo y raíz cúbica.)—Así como en el cuadrado y su raíz, la unidad cuadrada es el punto de partida para todo razonamien-

to, en el cubo y la raíz cúbica la *unidad cúbica* será el origen de toda explicación.

Se recomienda el centímetro cúbico, bastando 1,728 centímetros cúbicos.

El cubo de 1 es la unidad cúbica.

El cubo de 2 es 8; el cubo 3 es 27; el cubo de 4 es 64............ el cubo de 12 es 1,728.

Si se enseña que el cubo de un número es tomarlo tres veces como factor, á partir de un número compuesto de decenas y unidades, podemos hacer una serie de consideraciones empírico-prácticas.

1º Multiplicar, v. g. $12 \times 12 \times 12 = 1{,}728 = (12)^3$

2º Multiplicar 12×12 es calcular con la unidad cuadrada (que corresponde á igual número de unidades cúbicas) y la tercera dimensión geométrica dará el resultado de la tercera potencia.

3º Elevar una decena al cubo es tomarla tres veces como factor.

4º Tres veces decenas cuadradas multiplicadas por las unidades.

5º Tres veces decenas multiplicadas por las unidades cuadradas.

6º Cubo de las unidades.

Explicando las relaciones de estas cuatro últimas partidas queda preparado *todo el material* para la extracción de la raíz.

Al hacer la extracción de la raíz se explicará por qué se separan de tres en tres cifras las cantidades de derecha á izquierda; por qué después de extraída la primera raíz se baja el período siguiente al lado de la resta y se separan dos cifras, etc.

No se pase del número 1,728 hasta que la abstracción no se haga á satisfacción del profesor, que las cantidades superiores se harán por puro razonamiento y siempre aplicadas *en la forma de problemas*, como ejercicios intelectuales puramente. (*)

4. CÁLCULO MENTAL.—Habiendo esbozado la forma que debe seguirse en la enseñanza de la Aritmética, precisa no olvidar que después de las demostraciones gráficas deben hacerse una serie de ejercicios abstractos, procurando aumentar la fuerza hasta donde el maestro lo juzgue conveniente, según la potencia intelectual de aquellos alumnos que son una median'a en las resoluciones, para nivelar mejor el desarrollo de las inteligencias. Pero si esto es importante, no lo es menos la insistencia en el cálculo de productos y divisiones mentalmente; pues en general, LOS MAESTROS EMPLEAN ESTOS EJERCICIOS EN LOS PRIMEROS AÑOS DE LA ENSEÑANZA, ABANDONÁNDOLOS CUANDO SON MÁS NECESARIOS. La mayor parte de los educandos entran á la vida práctica después de su instrucción primaria elemental ó superior, y es necesario prepararlos para que en sus pequeñas operaciones y contratos, tengan las menores probabilidades de equivocación. Con frecuencia se presentan casos en los que los individuos tienen que multiplicar cifras comprendidas entre 10 y 20, entre 20 y 100, entre 100 y 1,000, y es bastante doloroso observar que los actores sacan sus lápices para hacer sus cálculos. Esto se evita, en gran parte, ejercitando el cálculo mental, que debe comenzar con ejercicios preparatorios, adicionando *decenas* y *unidades* simultáneamente, sin la ayuda del lápiz. Cuando los alumnos estén listos en estas adiciones y sustracciones hasta millares, el profesor puede comenzar con el cálculo de productos.

Si se pide el producto de 17 × 19 (números comprendidos entre 10 y 20) la generalidad procede. (*)

(*) Omitimos la explicación gráfica, por la misma naturaleza del procedimiento (geométrico por volúmenes), pues resultaría inadecuado por más intuitivo que se quisiera hacer.

17 ..... (1)
× 19
———
153
17
———
323

Otros, desde luego, consideran el multiplicando hecho 10 veces mayor y multiplican las unidades adicionando al producto anterior. (2)

Pero la operación puede simplificarse mentalmente, haciendo el producto de unidades, más el producto de unidades por decenas, más el producto de decenas por unidades y el producto de decenas (3) y más tarde, cuando los alumnos comprendan la razón del producto, pueden omitirse las decenas en esta serie de números comprendidos entre 10 y 20. Entonces se forma el producto de unidades, se escriben las unidades, y las decenas restantes se agregan á la suma de las unidades simples, aumentando 1 á la última cifra de la izquierda. (4)

17×9 ..... (2)
153
———
323

17 ..... (3)
× 19
———
323

17 ..... (4)
× 19
———
323

En los números comprendidos entre 20 y 100, multiplíquense unidades por unidades; unidades del multiplicador por decenas del multiplicando, más decenas del multiplicador por unidades del multiplicando, y decena por decenas, v. g.

24
× 32
———
768

En los números comprendidos entre 100 y 1,000, pueden ocurrir dos casos importantes.

1º Cuando el multiplicando y el multiplicador tienen 3 cifras.

2º Cuando alguno de los factores tiene dos cifras. En el 1er. caso, sea multiplicar 587×723.

1º Producto de unidades.

2º Unidades por decenas y decenas por unidades, más las decenas del producto anterior.

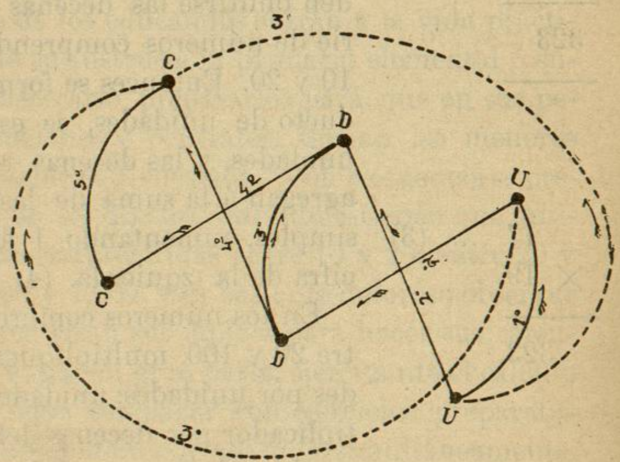
3º Unidades por centenas; centenas por unidades, decenas por decenas más las centenas del producto anterior.

4º Decenas por centenas; centenas por decenas, y

5º Producto de centenas.

Para mayor claridad, compárese el siguiente diagrama con la operación enunciada.

$$\begin{array}{r} 587 \\ \times\ 723 \\ \hline 424401 \end{array}$$



En los casos de regla de tres compuesta, los maestros, por lo general, no aprovechan los ejercicios *puramente mentales*, y hasta los confunden con los ejercicios del cálculo con cifras. En ese género de problemas hay que multiplicar ó dividir. Pues bien: ¿No es un criterio racional, jóvenes maestros, que después de resolver un problema de esta especie, siguiendo el precepto de lo concreto (proc. gráfico) á lo *abstracto*,

apliquemos el cálculo mental como último ejercicio en cada problema? Responded, amigos míos, á vuestra conciencia; que ella es el mejor juez.

En los primeros ejercicios, deben escogerse problemas cuyos términos den cocientes exactos y á medida que progrese el cálculo mental, es decir, la potencia retentiva, aumentarán las dificultades. Si al principio, las conclusiones son expresadas en números enteros, después serán relativas á *numerador y denominador*, reducidos á su forma más simple.

Cuando los productos sean de cuatro á seis cifras y los divisores de dos á tres, debe entrar en la ayuda el lápiz *solamente para retener las cifras últimas;* pero nunca para ejecutar toda la operación.

En una clase de Aritmética en la que se ejercite la regla de tres compuesta, por lo mismo, deben distinguirse tres partes:

1ª Enunciación del problema (datos en el pizarrón).

2ª Resolución concreta. (Exposición é interrogación).

3ª Cálculo mental (con los mismos datos, sin usar del gis ni del lápiz para todas las resoluciones).

El cálculo mental viene á coronar la obra del profesor. El responde al objeto de la enseñanza, y al desarrollo del juicio y del raciocinio numéricos (fin formal) sin descuidar el fin instructivo, desterrando el *cálculo por reglas* que tantos perjuicios ha causado en la enseñanza nacional.
