CAPITULO VIII.

Método octavo.—Partes alícuotas.

139.—Las propiedades de los divisores, submúltiplos ó partes alícuotas de un número, tienen infinitas aplicaciones en la aritmética; porque facilitan muchos cálculos, y entre otros los de interés simple en la mayor parte de los casos.

El método de las partes alícuotas es el más sencillo; pero es también el que necesita más práctica. Su brevedad consiste en que, pudiendo el operador hacer á su arbitrio la descomposición de los múltiplos y submúltiplos, elige siempre los que más se le facilitan. La resolución de un problema de interés por dos ó más personas que emplearan cualquiera de los otros métodos, se haría operando todas del mismo modo, ejecutando las mismas operaciones; mientras que por el de partes alícuotas cada uno podría obrar libremente, eligiendo la descomposición que percibiera con más claridad, y en consecuencia, operando con mayor exactitud y rapidez.

Además, las teorías de este método son muy sencillas, y por lo mismo fáciles de comprender; pero para lograrlo, creemos indispensable establecer cierto orden progresivo en su desarrollo y tratar separadamente cada uno de los procedimientos que pueden seguirse, á fin de distinguir los unos de los otros y aplicarlos en la práctica, apropiando el que mejor convenga para la resolución de un problema.

140.—La falta del orden ó de método de enseñanza propiamente hablando, es, á nuestro juicio, la única causa de la dificultad que aparentemente tienen las partes alícuotas; pero que produce el desaliento del que estudia, impidiendo así que se generalicen tanto como debieran estarlo hasta entre las clases inferiores del comercio, para utilizar en una gran diversidad de operaciones aritméticas, todas las ventajas de la simplificación que encierran.

Vamos, pues, á hacer tantas divisiones cuantos procedimientos juzgamos necesarios para la aplicación, y estamos seguros de que aquellos de nuestros lectores que nos sigan con cuidado en este estudio, llegarán á perfeccionarse á tal grado, que se sorprenderán de sus propios adelantos y de la rapidez con que resuelvan cualquiera clase de problemas. Conocidos los principales medios de simplificación, fácil será después combinarlos y hacer aplicaciones mixtas para reducir todavía más las operaciones.

No sería posible dar á conocer todas las descomposiciones á que se prestan los factores de un problema; porque además de que éstos varían á lo infinito, cada cual hace aquéllas según las concibe; pero vamos á presentar los principales procedimientos.

Ya hemos dicho que el mejor método siempre será aquel que más esté bajo el dominio de la inteligencia; pero no hay duda también que si se adquiere el hábito de practicar determinado sistema, habrá dificultad de variarlo por otro aun cuando el nuevo sea más sencillo que el primero, porque no es fácil abandonar los primeros hábitos que se nos inculcan: conviene, por lo mismo, adoptar desde el principio del estudio el método que, siendo breve y correcto, se preste más á nuestras concepciones.

141.—Las partes alícuotas pueden formarse de cada uno de los tres datos que componen un problema de interés simple, capital, tiempo y tasa, y también combinarse entre sí ó con el auxilio de simplificaciones, constituyendo entónces procedimientos que podemos llamar mixtos.

Hemos visto el papel tan importante que en el cálculo de intereses representan el año civil y el año comercial, puesto que marcan en días el tiempo de imposición. El primero, por la división natural, tiene 365 días, mientras que al segundo sólo se le consideran, por efecto de convención comercial, 360. Este número es múltiplo de otros muchos, pues como ya hemos dicho, en la serie de tipos de interés comprendidos del 1 al 12, sólo deja de tener 7ª y 11ª parte; en consecuencia, se presta al mayor número de divisiones respecto á la tasa, y en cifras más altas, tiene también muchos submúltiplos, como ve-

remos luego, en tanto que 365 sólo tiene 5ª, y por lo mismo, las partes alícuotas no pueden aplicarse fácilmente, sino á las operaciones que se sujetan al año comercial.

PRIMER PROCEDIMIENTO.

Partes alícuotas del tiempo, tomando por base los intereses de un año.

142.—Problema.—*¿Qué intereses producirá el capital de* \$4,836 *en* 157 *días, al* 7 *por ciento anual?*

Comenzaremos por tomar el importe de un año, que será:

$$R = \frac{4{,}836 \times 7}{100} = \$\,338.52.$$

Hallado este producto, lo reservamos, pasando en seguida á hacer la descomposición del número de días en partes alícuotas ó submúltiplos de 360 (días del año comercial), que en el presente caso puede ser ésta:

$120 + 30 + 6 + 1 = 157.$ **(Primera descomposición.)**

Busquemos ahora la proporción de esas partes alícuotas con el producto hallado, que, como sabemos, corresponde á un año ó 360 días, y es de			\$ 338.52
Luego por	120	días, primera cantidad de la descomposición, corresponderá $\frac{1}{3}$ supuesto que 120 es $\frac{1}{3}$ de 360, y dará	\$ 112.84
La 2ª cantidad es	30	equivalente á $\frac{1}{4}$ del producto anterior	28.21
La 3ª cantidad es	6	que representa $\frac{1}{5}$ del precedente	5.64
La 4ª y última cantidad es	1	ó $\frac{1}{6}$ del que antecede	0.94
Total	157	días. Suma	\$ 147.63

que es el interés buscado de \$4,836, al 7 por ciento anual, en 157 días.

Hemos trazado una raya debajo del producto de un año, para no confundirlo ni comprenderlo con las demás cantidades del cálculo; porque es un número que podemos llamar **Provisional** ó **Auxiliar**, y sirve de base á la operación, pero no forma parte de ella sino como antecedente. En este método es muy general el uso de esos números, y recomendamos se distingan bien de todos los demás, para no incluirlos en los resultados que se buscan. Ocasión tendremos más adelante de buscar **Números provisionales** para auxilio del cálculo.

Volvamos á nuestro problema y supongamos que la subdivisión de los días hubiera sido esta:

$90 + 45 + 9 + 9 + 3 + 1 = 157.$ **(Segunda descomposición.)**

Tenemos para un año	$	338.52
Para 90 días, será $\frac{1}{4}$ de ese producto	$	84.63
Para 45 días, $\frac{1}{2}$ del anterior ó $\frac{1}{8}$ de la base		42.31
Para 9 días, $\frac{1}{10}$ del primer producto parcial ó $\frac{1}{5}$ del precedente		8.46
Para 9 días más, la misma cantidad		8.46
Para 3 días, $\frac{1}{3}$ del anterior		2.82
Para 1 día, $\frac{1}{3}$ del último		0.94
Total: 157 días. Igual al anterior, con diferencia de un centésimo de menos	$	147.62

Vemos que las partes alícuotas pueden relacionarse no sólo al **Número provisional**, sino á los productos parciales. Así, la 2ª cantidad se obtiene tomando la mitad del producto de 90, supuesto que 45 es la mitad de ese número ó la 8ª parte de la anualidad, porque $45 \times 8 = 360$, luego 45 es 8ª de 360. La 3ª cantidad se obtiene de la 2ª tomando $\frac{1}{5}$, porque $9 \times 5 = 45$, ó bien de la 1ª tomando $\frac{1}{10}$, pues $9 \times 10 = 90$.

Continuemos examinando el mismo ejemplo con una nueva división, y supongamos la siguiente:

$72 + 72 + 12 + 1 = 157.$ **(Tercera descomposición.)**

La anualidad es de	$	338.52

72 días representan $\frac{1}{5}$ de la base	$	67.70
72 días más, otro tanto		67.70
12 días, $\frac{1}{6}$ del anterior producto		11.28
1 día, $\frac{1}{12}$ del precedente		0.94
157 días, cuyo importe es igual al anterior	$	147.62

El cálculo que antecede no presenta la facilidad que el primero, porque la última cifra 1 es la $\frac{1}{12}$ parte de la anterior, y debe procurarse que la proporción de las partes alícuotas no pase de números dígitos para operar con más velocidad. Además, fíjese la atención en que la base anual no tiene $\frac{1}{5}$ supuesto que no acaba ni en 0 ni en 5; luego debemos presumir que en caso de tomar la $\frac{1}{5}$ parte de esa suma, despreciaríamos residuos que, en su conjunto, pueden llegar á la unidad; y por lo mismo evítense en lo posible las partes proporcionales elevadas con relación á la cifra descompuesta, cuando obliguen á despreciar aproximaciones y puedan tomarse otras exactas.

En la segunda descomposición vimos que también se encontró un centavo de menos, lo cual acontece cuando se subdividen más cantidades que las estrictamente necesarias; porque queda uno expuesto á perder varios residuos. Debe, pues, cuidarse de hacer la descomposición más simple, es decir, la que contenga el menor número posible de partes alícuotas, lo cual reduce á la vez las operaciones. Hubiera sido muy fácil de corregir esa diferencia, si al hacer la descomposición notamos que el producto de 90 tiene por unidades una cifra impar, y por consecuencia, carece de mitad exacta, mientras que su 3ª sí lo es, porque la suma de sus cifras es múltiplo de 3: debemos entonces seguir la descomposición así:

$90 + 30 + 30 + 6 + 1 = 157.$ **(Cuarta descomposición.)**

Anualidad	$	338.52
90 días, $\frac{1}{4}$ de la base	$	84.63
30 días, $\frac{1}{3}$ del producto anterior		28.21
30 días más, otro tanto		28.21
6 días, $\frac{1}{5}$ del precedente		5.64
1 día, $\frac{1}{6}$ del último		0.94
157 días. Igual á la primera descomposición	$	147.63

En caso de que las discrepancias sean forzosas, lo mejor será aproximar las décimas cada vez que durante dos reducciones se observe que el sobrante es igual ó mayor que 5.

Respecto de las descomposiciones, aconsejamos que se vayan haciendo, excepto en casos especiales, á medida que se opere, para tener la facilidad de elegir cantidades proporcionales más convenientes, y no anticiparlas como lo hemos verificado nosotros, sólo para hacer resaltar el principio general de que la suma de las partes proporcionales debe ser igual al número que se descompone en submúltiplos de la base.

143.—Cuando el problema está expresado en meses, la operación es sencillísima, porque obtenida la anualidad, se toma la parte proporcional que representa el número de meses dado. Sin embargo de esto, es conveniente estar práctico en las partes alícuotas que corresponden á uno ó varios meses, según la tasa; porque de aplicar la parte proporcional de ésta al período de tiempo, nacen nuevas simplificaciones. Así por ejemplo, el 3 por ciento anual representa el $\frac{1}{4}$ por ciento mensual; el 4 por ciento, $\frac{1}{3}$; el 6 por ciento, $\frac{1}{2}$; el 9 por ciento, $\frac{3}{4}$ mensuales, etc., etc., y en todos aquellos problemas en que el tiempo esté considerado en meses ó por un número de días equivalente, puede emplearse la simplificación.

Problema.—*El capital de $3,840 en 4 meses ó 120 días, al 9 por ciento anual, ¿qué intereses producirá?*

Sabiendo que de 9 por ciento anual resulta un tipo mensual de $\frac{3}{4}$, en cuatro meses tendremos un 3 por ciento; porque $4 \times \frac{3}{4} = 3$; luego la operación se reduce á tomar ese tanto por ciento sobre el capital, ó sea:

$$R = \frac{3{,}840 \times 3}{100} = \$\,115.20;$$

procedimiento que es muy breve, pues no requiere escribir más cifras que el resultado.

Creemos útil, por lo mismo, dar una tabla de reducciones mensuales cuyas fracciones comunes facilitan el cálculo. Véase la número 16.

144.—A veces se simplifica el cálculo, elevando el período de tiempo.

Problema.—*¿Cuál será el producto de $5,643 en 105 días, al 9 por ciento?*

La anualidad importará	$ 507.87
Elevando el período de tiempo á 120 días, $\frac{1}{3}$ del año, tendremos	169.29
La diferencia por exceso es de $120 - 105 = 15$, que representa $\frac{1}{8}$ del producto anterior y que debemos deducir	21.16
Intereses buscados	$ 148.13

145.—Puede acontecer que el tiempo enunciado sea mayor que un año.

Problema.—*¿A cuánto ascienden los intereses de $3,600 en 542 días, al 8 por ciento?*

$360 + 180 + 2 = 542.$ **(Primera descomposición.)**

Por 360 días corresponden	$ 288.00
Por 180 días $\frac{1}{2}$	144.00
Por 2 días, $\frac{1}{90}$ de lo anterior	1.60
542 días. Producto de intereses	$ 433.60

En este caso, al producto de la anualidad hemos adicionado el de los 182 días que faltan para completar la cifra total de 542 que fija el problema.

La descomposición que hicimos parece á primera vista difícil, por tener que tomar la $\frac{1}{90}$ parte, y pudimos formarla de este otro modo:

$120 + 40 + 20 + 2 = 182.$ **(Segunda descomposición.)**

Pero es mucho más simplificada la primera, y respecto á las partes alícuotas tan elevadas como la 90ª parte, no presentan la más leve dificultad. En el caso que nos ocupa, 2 días son iguales á $\frac{2}{180} = \frac{1}{90}$, y suprimiendo el cero, quedará sólo por tomar la $\frac{1}{9}$ parte. En efecto, la supresión del cero equivale á dividir por 10, lo cual se hace mentalmente, y de la nueva cantidad que resulta se toma la novena parte, como lo hemos verificado respecto del producto parcial de 144 que dividido por 10 queda en 14.4, y la $\frac{1}{9}$ es 1.60.

146.—Para dividir por un número compuesto de dos cifras cuyas unidades sean cero, se segrega un guarismo á la derecha de la cantidad que represente el dividendo y se toma la parte que acusen las decenas del divisor.

Por los casos presentados hasta aquí, se habrán formado idea nuestros lectores de las muchas descomposiciones que pueden hacerse de un número para reducirlo á partes alícuotas de otro, quedando al arbitrio del operador, como dijimos al principio, combinarlas como más se le faciliten. Todo se reduce á tomar la $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ parte, etc., de una suma, lo cual es rudimentario.

Por último, haremos notar que intencionalmente hemos tomado factores difíciles como tasa al 7 por ciento, que es un número primo, y 157 días, que no tiene ninguna parte alícuota exacta; pero nuestro objeto ha sido presentar más de relieve las dificultades, para que todos los problemas que se presenten en la práctica puedan resolverse muy fácilmente.

SEGUNDO PROCEDIMIENTO.

Partes alícuotas del tiempo, tomando por base el 1 *por ciento del capital.*

147.—Cuando tratamos del método de los divisores fijos, hicimos mérito de sus tres importantes propiedades (§ 117), y hemos llegado al punto de dar á la 3ª de ellas la aplicación que especialmente tiene en el método de las partes alícuotas.

Como se recordará, esa propiedad nos enseña que todo divisor fijo dividido por 100, representa el número de días que necesita un capital cualquiera para producir el 1 por ciento á la tasa de interés á que corresponde el mismo divisor.

Vimos entonces comprobada esa propiedad por medio de un ejemplo; pero conviene entrar en un análisis que la demuestre.

Sabemos que todo divisor fijo proviene de multiplicar 360, número de días del año comercial, por 100, y el producto dividirlo por la tasa, lo cual equivale á tomar $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, etc., de esa suma. Ahora bien; si hacemos abstracción de la multiplicación por 100, el resultado corresponderá á una unidad de la tasa exactamente, porque cuando ésta es el 1 por ciento, el denominador de la fórmula general no varía; si fuere el 2 por ciento, se reduce á 180; con el 3 por ciento á 120, con el 4 por ciento á 90, con el 5 por ciento á 72, etc., etc. Esas cantidades representan el tiempo que necesita un capital para producir esa unidad por ciento; porque si en 360 días se causa el 3 por ciento, en 120 que es la $\frac{1}{3}$ parte de 360, se causará el 1; al 4 por ciento en 90 días, la $\frac{1}{4}$ de 360, se producirá igualmente el 1, y en 72 días al 5 por ciento se obtendrá el repetido 1 por ciento; porque 72 es la 5ª parte de 360. De aquí se deduce que si de los divisores fijos se segregan dos cifras, como lo hemos supuesto, ó lo que es lo mismo, se dividen por 100, el capital que forma parte del numerador de la fórmula, debe también ser dividido por 100, y entonces su interés será equivalente sólo al 1 por ciento. En efecto, pasemos del simple análisis á la descomposición de la fórmula para demostrar la propiedad que nos ocupa:

$$R = \frac{C \times T \times I}{36{,}000} = \frac{C \times T}{D}$$

y si dividimos ambos términos por 100, quedará así:

$$R = \frac{C}{100} \times \frac{T}{\frac{D}{100}}$$

Desde luego la primera parte del segundo miembro representa un capital dividido por 100, ó lo que es lo mismo, según sabemos ya, el interés de ese captal al 1 por ciento. Pero la segunda parte de esa expresión debe modificar á la primera, supuesto que la multiplica por su numerador **T** y la divide por el denominador $\frac{D}{100}$; luego para que no se altere en lo más mínimo el primer miembro que representa el 1 por ciento del capital, será necesario que el factor que multiplica sea igual al que divide, ó $T = \frac{D}{100}$, es decir, que el cociente que resulte de dividir por 100 el divisor fijo, sea igual al numerador **T** que representa al tiempo en días; luego es evidente que la centésima del divisor fijo es el número de días que necesita un capital para producir el 1 por ciento, pues de no ser así, la primera expresión de la fórmula se alteraría.

Es tan importante en la práctica el uso de esta propiedad, que creemos conveniente afirmar los fundamentos en que descansa, y al efecto vamos á presentar dos demostraciones más, formulando bajo dos fases diferentes el mismo problema:

1ª—*¿Qué tiempo necesita un capital para producir el 1 por ciento á determinada tasa de interés anual?*

La fórmula general es:

$$R = \frac{C \times T \times I}{36{,}000}$$

ó bien empleando el divisor fijo:

$$R = \frac{C \times T}{D}$$

de donde resulta la siguiente igualdad:

$$R \times D = C \times T$$

y como el supuesto del problema es que el capital deba producir el 1 por ciento, el valor de **R** ó réditos estará representado así:

$$R = \frac{C}{100}$$

y sustituyendo esta expresión en la igualdad precedente, resultará:

$$\frac{C}{100} \times D = C \times T$$

ó sea

$$C \times D = C \times T \times 100,$$

y sacando el valor de **T**, obtendremos:

$$T = \frac{C \times D}{C \times 100}$$

ó suprimiendo términos iguales:

$$T = \frac{D}{100}$$

Lo cual nos demuestra que **el tiempo que necesita un capital para producir el 1 por ciento, es igual al cociente que resulta del divisor fijo entre 100, ó sea á la centésima parte del divisor fijo.**

2ª—*¿Qué intereses producirá un capital durante el tiempo expresado por la centésima parte del divisor fijo?*

Fórmula general, ya aplicado el divisor fijo:

$$R = \frac{C \times T}{D}$$

de donde

$$R \times D = C \times T$$

pero también el supuesto nos dice que el tiempo debe ser la centésima del divisor, ó sea:

$$T = \frac{D}{100}$$

como hemos visto comprobado anteriormente, y sustituyendo ese valor tendremos:

$$R \times D = C \times \frac{D}{100}$$

ó lo que es igual

$$R \times D \times 100 = C \times D$$

y por consiguiente:

$$R = \frac{C \times D}{D \times 100}$$

ó suprimiendo factores comunes:

$$R = \frac{C}{100}$$

cuyo resultado nos demuestra que **la centésima parte de un capital representa el importe de los réditos durante el tiempo expresado por la centésima parte del divisor fijo.**

Pasemos á la verificación numérica.

Supongamos un capital de $ 3,000 al 3, 4, 5 y 6 por ciento en 120, 90, 72 y 60 días respectivamente á cada una de esas tasas, y tendremos:

$$R = \frac{3{,}000 \times 120}{12{,}000},\quad R = \frac{3{,}000 \times 90}{9{,}000},\quad R = \frac{3{,}000 \times 72}{7{,}200},\quad R = \frac{3{,}000 \times 60}{6{,}000},$$

y si en cada una de esas igualdades dividimos por 100 el capital en el numerador y el divisor fijo denominador, nos resultarán dos factores idénticos, á saber:

$$R = \frac{3,000}{100} \times \frac{120}{120} = 30 \times \frac{120}{120} = 30$$

$$R = \frac{3,000}{100} \times \frac{90}{90} = 30 \times \frac{90}{90} = 30$$

$$R = \frac{3,000}{100} \times \frac{72}{72} = 30 \times \frac{72}{72} = 30$$

$$R = \frac{3,000}{100} \times \frac{60}{60} = 30 \times \frac{60}{60} = 30$$

Pero á primera vista se observa que simplificando aquellas expresiones, los factores del tiempo quedan reducidos á la unidad y los denominadores (Divisores fijos) á 100, de suerte que todas se reducen á

$$R = \frac{3.000 \times 1}{100} = \frac{C}{100}$$

y por consiguiente, quedando el capital dividido por 100, equivale á tomar el 1 por ciento de interés, como hemos tratado de demostrar.

Damos á continuación un cuadro demostrativo que indica el número de días y la tasa de interés que necesita un capital para producir el 1 por ciento:

El 1 por ciento anual en 360 días equivale á la centésima parte del capital.. $R = \frac{C \times 360 \times 1}{36,000} = \frac{C}{100}$

El $1\frac{1}{2}$ por ciento anual en 240 días...... $R = \frac{C \times 240 \times 1\frac{1}{2}}{36,000} = \frac{C}{100}$

El 2 por ciento anual en 180 días....... $R = \frac{C \times 180 \times 2}{36,000} = \frac{C}{100}$

El $2\frac{1}{2}$ por ciento anual en 144 días...... $R = \frac{C \times 144 \times 2\frac{1}{2}}{36,000} = \frac{C}{100}$

El 3 por ciento anual en 120 días....... $R = \frac{C \times 120 \times 3}{36,000} = \frac{C}{100}$

El 4 por ciento anual en 90 días......... $R = \frac{C \times 90 \times 4}{36,000} = \frac{C}{100}$

El $4\frac{1}{2}$ por ciento anual en 80 días........ $R = \frac{C \times 80 \times 4\frac{1}{2}}{36,000} = \frac{C}{100}$

El 5 por ciento anual en 72 días......... $R = \frac{C \times 72 \times 5}{36,000} = \frac{C}{100}$

El 6 por ciento anual en 60 días......... $R = \frac{C \times 60 \times 6}{36,000} = \frac{C}{100}$

El $7\frac{1}{2}$ por ciento anual en 48 días........ $R = \frac{C \times 48 \times 7\frac{1}{2}}{36,000} = \frac{C}{100}$

El 8 por ciento anual en 45 días......... $R = \frac{C \times 45 \times 8}{36,000} = \frac{C}{100}$

El 9 por ciento anual en 40 días......... $R = \frac{C \times 40 \times 9}{36,000} = \frac{C}{100}$

El 10 por ciento anual en 36 días........ $R = \frac{C \times 36 \times 10}{36,000} = \frac{C}{100}$

El 12 por ciento anual en 30 días........ $R = \frac{C \times 30 \times 12}{36,000} = \frac{C}{100}$

148.—La aplicación de la propiedad que acabamos de examinar es sin contradicción el sistema más simplificado que pueda emplearse.

Entremos á la práctica comenzando por fijar un número mayor de días que los que necesita un capital para producir el 1 por ciento.

Problema.—*¿A cuánto ascienden los intereses de $ 5,860 en 234 días, al 8 por ciento anual?*

En 45 días, porque 4,500 es el divisor fijo del 8 por ciento, que dividido por 100 queda en 45, se producirá el 1 por ciento del capital................................	$	58.60
En 180 días, 4 veces más que el anterior.........................		234.40
En 9 días $\frac{1}{5}$ del primero..		11.72
234 días, importando los intereses............................	$	304.72

Se pudo hacer provisional el producto de $ 58.60, y entonces tomar 225 días, ó sea 5 veces ese producto que da $ 293, igual á la suma de las dos primeras cantidades.

149.—Supongamos menor número de días que no alcancen á producir el 1 por ciento.