# UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

## FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA

DIVISION DE ESTUDIOS SUPERIORES

MAESTRIA EN CIENCIAS DE LA ADMINISTRACION

"UN MODELO DE PROGRAMACION POR METAS PARA DISTRIBUCION DE RECURSOS ACADEMICOS"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRIA EN CIENCIAS DE LA ADMINISTRACION

PRESENTA:



ING. EVELIO P. GONZALEZ FLORES

MONTERREY, N.L. OCTUBRE DE 1982

# UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

## FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA

DIVISION DE ESTUDIOS SUPERIORES

MAESTRIA EN CIENCIAS DE LA ADMINISTRACION

"UN MODELO DE PROGRAMACION POR METAS PARA
DISTRIBUCION DE RECURSOS ACADEMICOS"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRIA EN CIENCIAS DE LA ADMINISTRACION

PRESENTA:

ING. EVELIO P. GONZALEZ FLORES

MONTERREY, N.L. OCTUBRE DE 1982

# I N D I C E

INTRODUCCION

El propósito de ésta tesis es el de demostrar la aplicación potencial de programación por metas a problemas de decisión complejos en la administración de instituciones de educación superior (universidades).

Programación por metas aparece como una técnica apropiada, útil y flexible de análisis de decisión para problemas de decisión con múltiples objetivos en conflicto. Diferente de otros análisis numéricos tradicionales, programación por metas admite una solución ordinal a sistemas de objetivos múltiples complejos.

Se trató la técnica desde sus antecedentes, fundamentos, análisis matemático, formulación del modelo, soluciones por el método gráfico y por el método simplex y una aplicación a distribución de recursos académicos. El modelo presentado es una simple ilustración en el cual, cada restricción requiere sin duda un análisis profundo que bien podría ser un tema de investigación en si misma. Mas aún, las interacciones departamentales, condiciones de frontera, preferencias propias de los administradores y la estructura de decisión burocrática son areas importantes que requieren que se continúen investigando. Se espera que este estudio proporcione una guía para desarrollar modelos más completos, más cercanos a la realidad que quizás encerrarán a una universidad entera o a un sistema universitario.

# CAPITULO I

# INTRODUCCION A PROGRAMACION POR METAS

## ANTECEDENTES DE PROGRAMACION POR METAS

Los orígenes de las técnicas de programación matemática se remontan en- la historia de las matemáticas a las teorías de ecuaciones y desigualdades lineales y no lineales. Sin embargo George B. Dantzig es reconocido como el padre de la Programación Lineal. Dantzig trabajó primeramente en la búsqueda de técnicas para resolver problemas logísticos de planeación militar, cuando él fué empleado por la Fuerza Aérea de Los Estados Unidos en Washington, D.C., allá por 1940. Su investigación fué fomentada por otros estudiosos que trabajaron en el mismo tema: J. Von - Newman, L. Hurwicz y T.C. Koopmans. El nombre original dado a la técnica fué "Programación de Actividades interdependientes en una estructura lineal", y que después fué acortado a "Programación Lineal".

De 1948 en delante, muchos estudiosos continuaron tratando de refinar - la técnica de Dantzig y explorando la aplicación potencial de programación lineal. Sin embargo el equipo de C. Charnes y W. W. Cooper, tiene adjudicado el haber introducido y aplicado la técnica a problemas industriales. Ellos tienen publicados excelentes artículos así como libros- de texto sobre programación lineal. En su contínua investigación sobre- programación lineal, A. Charnes y W.W. Cooper desarrollaron el concepto de "PROGRAMACION POR METAS". El concepto de programación por metas surgió primero como un resultado de problemas de programación lineal sin -

solución. Charnes y Cooper explican:

Bastante relacionado con el análisis de contradicciones en problemas -- sin solución está el resultado que llamaremos "Alcanzar una Meta". La- Gerencia algunas veces pone tales metas, aún cuando ellas sean inalcanzables dentro de los límites de recursos disponibles, por una variedad- de razones. Por ejemplo, tales metas pueden ser establecidas para proporcionar incentivos o para juzgar méritos o ellas pueden ser usadas como una defensa para asegurar que consideraciones a largo plazo no sean- borradas o destruídas por objetivos alcanzables de inmediato, etc. - - Cualquier restricción incorporada en la función será llamada una "meta". Ya sea que las metas sean alcanzables o no, se debe establecer un objetivo en el cual la optimización da resultados, los cuales vienen a ser- "lo más aproximado" a lo que indican las metas.

Proporcionaremos el siguiente ejemplo para iniciarnos en Programación - por Metas.

$$\text{Maximizar} \qquad Z = \$\, 1X_1 + \$\, \frac{1}{2} X_2$$

S.r.

$$\begin{aligned} 3X_1 + 2X_2 &\leq 12 \\ (1\text{-}1) \qquad 5X_1 \phantom{+ 2X_2} &\leq 10 \\ X_1 + X_2 &\geq 8 \\ -X_1 + X_2 &\geq 4 \\ X_1 , X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

La figura 1.1 representa el problema de decisión indicando restricciones en la gráfica. Las dos áreas sombreadas indican regiones de traslape -

que pueden ser consideradas como areas de solución factible en el sentido de que ellas satisfacen algunos subconjuntos de restricciones. Sin-embargo como las dos areas sombreadas no se intersectan, no existe área de solución factible. Entonces este problema no puede ser resuelto por el procedimiento usual de programación lineal.

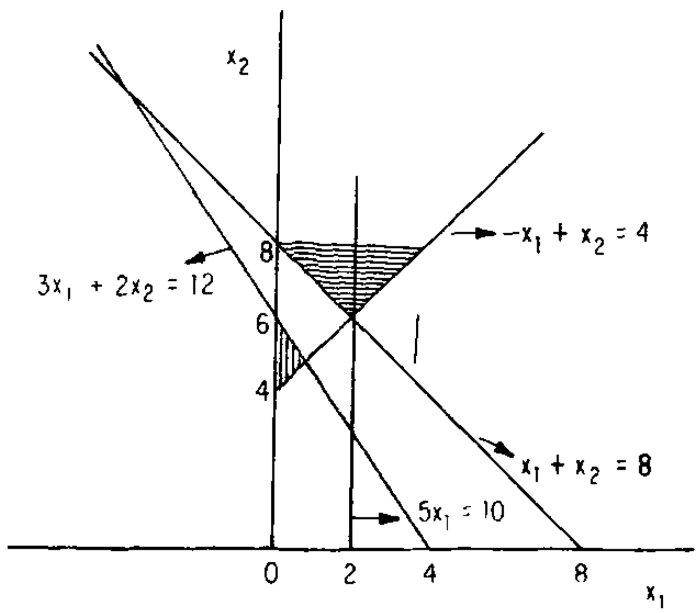


Fig. 1.1

Suponiendo que las dos primeras restricciones en (1.1) representan recursos disponibles por ejemplo, capacidades de máquina, y las restricciones tercera y cuarta representan metas de la gerencia. Entonces, la función objetivo puede ser cambiada de maximización de utilidades a obtención de metas. Como se estableció antes, las metas no siempre se alcanzan. "El objetivo de la gerencia puede ser una aproximación general de alcanzar las metas tanto como sea posible". Entonces la función objetivo puede ser cambiada a:

$$\text{Min.} \qquad Z = /X_1 + X_2 - 8/+/-X_1 + X_2 - 4/.$$

Esta es la idea básica de Programación por Metas.

Y. Ijiri estudió las técnicas detalladas de programación por metas basadas en los conceptos generales desarrollados por Charnes y Cooper. El estudio de Ijiri presenta la definición de "Factores de prioridad preferenciales" para tratar metas múltiples de acuerdo con su importancia y asignando pesos a las metas de acuerdo con su nivel de prioridad.

## FUNDAMENTOS DE PROGRAMACION POR METAS

Programación por metas es una modificación y extensión de programación lineal. La aproximación de programación por metas admite una solución simultánea de un sistema de objetivos complejos en lugar de un objetivo simple. En otras palabras programación por metas es una técnica que es capaz de manejar problemas de decisión que tratan con una meta simple con múltiples submetas, así como problemas con metas múltiples con múltiples submetas. Además, la función objetivo del modelo de programación por metas puede estar compuesto de unidades no homogéneas de medida, tales como libras y dólares, en lugarde un solo tipo de unidad.

A menudo las metas múltiples de la gerencia están en conflicto o son realizadas solamente con el sacrificio de otras metas. Además esas metas no se pueden medir. Entonces la solución del problema requiere de establecer una jerarquización de importancia entre esas metas incompati

bles, así que las metas de menor orden son consideradas únicamente después de que las metas de mayor orden son satisfechas o haya sido alcanzado el punto más allá del cual ninguna mejora adicional sea deseada. - Si la gerencia puede proporcionar una clasificación ordinal de metas en términos de sus contribuciones o importancia para la organización y todas las restricciones de las metas son lineales, el problema puede ser solucionado por medio de programación por metas.
¿Cómo puede una función objetivo ser determinada y expresada en forma - algebráica cuando existen metas múltiples, no medibles y en conflicto?.

Una respuesta simple puede ser sugerida, una función objetivo compuesta de metas múltiples. Esto es esencialmente lo que programación por metas encierra. En programación por metas en lugar de tratar de maximizar o minimizar la función objetivo directamente como en programación - lineal, lo que se va a minimizar son desviaciones entre las metas y como pueden ser realizadas dentro del conjunto dado de restricciones.

En el procedimiento solución en programación lineal, los valores de las variables de decisión dictadas por el criterio de la función objetivo - tienden a manejar los valores de las variables de holgura. Diferente - de programación lineal, la función objetivo de programación por metas - no contiene variables de decisión. En su lugar, ella contiene primeramente las VARIABLES DE DESVIACION que representan cada tipo de meta o - submeta. La variable de desviación es representada en dos dimensiones- en la función objetivo, una desviación positiva ($d^+$) y una desviación - negativa ($d^-$) de cada submeta y/o restricción. Entonces la función objetivo pasa a ser la minimización de esas desviaciones, basada en la importancia relativa o prioridad asignada a ellas. La función objetivo, en efecto, tiende a causar que las variables de desviación manejen a las variables de decisión.

Es por supuesto, posible incluír las variables de decisión en la función objetivo si es que resulta más simple o deseado en el problema de decisión.

En un modelo muy simple de programación por metas, el modelo es casi igual al de programación lineal. La principal diferencia surge cuando más de una meta, posiblemente conflictiva y competitiva, entra dentro del sistema.

La solución de programación lineal establece una relación cuantitativa exacta entre las variables con numeros cardinales, la solución es únicamente tan buena como sea la información. La característica que distingue a la programación por metas es que admite una solución ordinal. Dicho de otra manera, la gerencia puede no ser capaz de especificar el costo o utilidad de una meta o submeta, pero a menudo pueden ser establecidos límites altos o bajos para cada submeta. El gerente es usualmente cuestionado para determinar la prioridad de la realización deseada de cada meta o submeta y clasificarlas en secuencia ordinal para el análisis de decisión. Económicamente hablando, el gerente trabaja con el problema de asignación de recursos escasos. Obviamente, no es siempre posible lograr cualquier meta en la extensión deseada por la gerencia. Entonces con o sin programación por metas el gerente atribuye una cierta prioridad al logro o realización de cierta meta. El valor real de programación por metas es, por lo tanto, la solución de problemas que involucran múltiples metas conflictivas de acuerdo a una estructura de prioridades del gerente.

Resumiendo conceptos:

- El tomador de decisiones (gerente) define su estructura de preferencias.
- Esta definición se hace a través de la jerarquización (ordinal) de los criterios o metas.
- El tomador de decisiones (gerente) no está dispuesto a sacrificar un objetivo o criterio (meta) de mayor prioridad para beneficiar otro, de menor prioridad.
- La optimización de criterios es secuencial.
- El tomador de decisiones (gerente) tiene una función de utilidad lineal de los criterios.

## ANALISIS MATEMATICO DE PROGRAMACION POR METAS

Programación por metas es un modelo matemático lineal en el cuál la consecusión óptima de las metas es realizada dentro del medio ambiente de decisión dado. El medio ambiente de decisión determina las componentes básicas del modelo llamadas; variables de decisión, restricciones y función objetivo.

Variables de decisión son aquellas variables reales en el modelo cuyos valores son arbitrariamente asignados y cambiados en la búsqueda para - un conjunto óptimo de valores. Las variables de decisión están relacio nadas entre ellas mismas y entre otras variables, cuyos valores son especificados de acuerdo con el medio ambiente o la situación tecnológica.

Restricciones representan un conjunto de relaciones entre variables de decisión.

Una función objetivo es una expresión matemática que involucra algunas variables en el modelo cuyos valores pueden ser computados cuando los - valores de todas las otras variables son determinados.

Vamos a considerar ahora la propiedad matemática de programación por me tas a través de un ejemplo simple. Primero se discutirá de programa-- ción por metas involucrando una meta simple con múltiples submetas y -- después un análisis de metas múltiples.

I) Meta Simple con Múltiples Submetas

Vamos a considerar un caso donde una meta puede ser lograda por la realización colectiva de un conjunto de submetas, $X_1$, $X_2$,......, $X_n$.

$$(1\text{-}2)\ f(X_1, X_2, \ldots, X_n) = a_1X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n = b$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son numeros reales. Si dejamos que $\underline{X}$ sea un - vector columna con componentes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ y dejamos que $\underline{a}$ sea - un vector fila compuesta de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ entonces la ecuación - -

(1-2) puede ser expresada como:

$$(1\text{-}3) \qquad ax = b$$

Si la formulación de programación por metas es usada, la ecuación (1-3) puede ser rearreglada como:

$$(1\text{-}4) \qquad \begin{array}{ll} \text{Min} & Z = d^- + d^+ \\ \text{S.r.} & ax + d^- - d^+ = b \\ & X,\ d^-,\ d^+ \geq 0 \end{array}$$

Donde $d^+$ y $d^-$ representan variables de desviación de la meta. En la ecuación (1-4) se supone que la variable X es limitada a ser no negativa ($X \geq 0$). Si existe una solución para (1-4), la función objetivo siempre conduce a los valores de $d^+$ y $d^-$ a cero. Cuando $d^+$ y $d^-$ son minimizados a cero, la meta "b" será conseguida a un cierto valor de X. Debe notarse que $d^+$ y $d^-$ son complementarias entre sí. Si $d^+$ toma un valor diferente de cero, $d^-$ será cero y viceversa. Como al menos una de las dos variables será cero, siempre $(d^-)\ (d^+) = 0$.

Vamos a ilustrar I) Meta simple con Múltiples Submetas, con el siguiente ejemplo:

Un fabricante de muebles produce dos clases de estos, escritorios y mesas. El márgen total que queda de la venta de un escritorio es \$ 80, y por la venta de una mesa es \$ 40. La meta del gerente de la planta es ganar una utilidad total de \$ 640 en la siguiente semana.

Podemos interpretar la meta de utilidades en términos de submetas, las-cuales son volumenes de ventas de escritorio y mesas.

Entonces un modelo de programación por metas puede ser formulado como - sigue:

$$\text{Min.} \quad Z = d^- + d^+$$

$$\text{S.r.} \quad \$80X_1 + \$40X_2 + d - d^+ = \$640$$

$$X_1, X_2, d^-, d^+ \geq 0$$

donde $X_1$ es el número de escritorios vendidos $X_2$ es el número de mesas-vendidas. Si la meta de utilidad de \$ 640 no es completamente lograda, entonces obviamente la disminución en la meta de utilidades será expresada por $d^-$, la cual representa la desviación negativa de la meta. Por otro lado, si la solución muestra una utilidad sobre \$ 640, entonces $d^+$ mostrará algún valor. Si la meta de utilidades de \$ 640 es exactamente lograda, ambas $d^-$ y $d^+$ serán cero. En este ejemplo, existe un número - infinito de combinaciones de $X_1$ y $X_2$ que lograrían la meta. La solución será cualquier combinación lineal de $X_1$ y $X_2$ entre los siguientes-dos puntos ($X_1 = 8$, $X_2 = 0$) y ($X_1 = 0$, $X_2 = 16$).

## II. Restricciones Submeta

En la ecuación (1-5) del ejemplo anterior, una solución pedía que podría realizarse la meta exactamente esto es que ax = b, o si la meta fuera - inalcanzable, se aproximará tanto como fuera posible. La única restricción impuesta en la submeta fué simplemente $X \geq 0$. Sin embargo, muy a-menudo el medio ambiente actual de la organización impone restricciones adicionales en la submeta tales como:

(1-6) $$BX \leq h$$

donde B es una matriz mxm y h es un vector columna de m componentes Entonces el modelo (1-4) puede ahora ser expresado así:

$$\text{(1-7)} \quad \text{Min} \quad Z = d^- + d^+$$

$$\begin{aligned} \text{S.r.} \quad & ax + d^- - d^+ = b \\ & BX \leq h \\ & X,\ d^-,\ d^+ \geq 0 \end{aligned}$$

Vamos a ilustrar II) Restricciones Submeta con el siguiente ejemplo: Considerando el caso del ejemplo anterior. Ahora supongamos que además de las restricciones consideradas en el ejemplo, las siguientes dos restricciones son impuestas. El departamento de mercadotecnia reporta que el máximo número de escritorios que puede ser vendido en una semana es seis. Y el máximo número de mesas que puede ser vendido es ocho.

Ahora el nuevo modelo de programación por metas puede ser presentado de la siguiente manera:

$$\text{Min.} \quad Z = d^- + d^+$$

$$\begin{aligned} \text{S.r.} \quad & \$80X_1 + \$40X_2 + d^- - d^+ = \$640 \\ & X_1 \leq 6 \\ & X_2 \leq 8 \\ & X_1,\ X_2,\ d^-,\ d^+ \geq 0 \end{aligned}$$

La solución a (1-8) es $X_1 = 6$ y $X_2 = 4$. Con ésta solución las variables de desviación $d^+$ y $d^-$ serán ambas cero. La meta de utilidades del gerente de la planta puede ser realizada bajo las nuevas restricciones impuestas en las submetas.

## III. Análisis de Metas Múltiples

El modelo ilustrado en los dos ejemplos precedentes puede ser extendido a manejar casos de metas múltiples. Se supone que esas metas múltiples son incompatibles y no medibles. Suponiendo que hay $\underline{m}$ metas cuyos niveles son expresados por un vector columna $\underline{b}$ de $\underline{m}$ componentes y que esas metas múltiples pueden ser realizadas por combinaciones lineales de $\underline{n}$ variables submeta representadas por un vector columna $\underline{X}$ de $\underline{n}$ componentes. Si la relación entre metas y submetas es expresada por A, la cual es una matriz mxn, entonces el modelo puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} AX &= b \\ X &\geq 0 \end{aligned} \qquad (1\text{-}9)$$

Suponiendo que una solución existe para (1-9), el modelo puede ser transformado a:

$$\begin{aligned} &\text{Min.} \quad Z = \sum_{i=1}^{m} (d_i^- + d_i^+) \\ &\text{S.r.} \\ &\qquad AX + Id^- - Id^+ = b \\ &\qquad X,\ d^-,\ d^+ \geq 0 \end{aligned} \qquad (1\text{-}10)$$

Donde $d^+$ y $d^-$ son vectores columna de $\underline{m}$ componentes representando desviaciones de las metas, e I es la matriz identidad.

Vamos a ilustrar III) Análisis de Metas Múltiples continuando con el ejemplo del fabricante de muebles. Ahora el gerente desea alcanzar una utilidad semanal lo más cercana posible a $640. El también desea alcanzar un volúmen de ventas para escritorios y mesas cercano a seis y cuatro respectivamente.

El problema de decisión del gerente puede ser formulado así:

$$
\text{(1-11)} \qquad
\begin{array}{ll}
\text{Min.} & Z = d_1^- + d_2^- + d_3^- + d^+ \\
\text{S.r.} & \$80X_1 + \$40X_2 + d_1^- - d_1^+ = \$\,640 \\
 & X_1 + d_2^- = 6 \\
 & X_2 + d_3^- = 4 \\
 & X_1,\ X_2,\ d_1^-,\ d_2^-,\ d_3^-,\ d_1^+ \geq 0
\end{array}
$$

La solución a este problema puede ser encontrada por simple examinación: $X_1 = 6$, $X_2 = 4$, y todas las metas serán completamente realizadas. Por lo tanto $d_1^- = d_2^- = d_3^- = d_1^+ = 0$.

IV. Clasificación y Ponderación de Metas Múltiples

En el ejemplo anterior III) Tuvimos un caso en el cual todas las metas se lograron simultáneamente dentro de las restricciones dadas. Sin embargo en el medio ambiente de decisión real es muy raro este caso. Muy a menudo, la mayoría de las metas son competitivas en términos de recursos escasos. En la presencia de metas múltiples incompatibles el gerente necesita ejercitar su juicio acerca de la importancia de las metas individuales. Establecido de una manera más simple, la meta más importante debe ser alcanzada en toda la extensión de los deseos del gerente antes de que la meta siguiente sea considerada.

Con el fin de realizar la solución ordinal, esto es realizar las metas de acuerdo a su importancia, las desviaciones positivas y/o negativas acerca de la meta deben ser clasificadas de acuerdo a los "factores de prioridad preferenciales". De esta manera las metas de bajo orden son consideradas solamente después de que las metas de alto orden son realizadas como se deseaba. Si hay metas en K rangos, los factores de prioridad preferenciales $Pj(j = 1, 2, \ldots, k)$ deben ser asignados a las variables de desviación positivas y/o negativas. Los factores de prioridad preferenciales tienen la relación de $Pj >>> Pj + 1$.

Un paso más a considerar en la formulación de el modelo es la ponderación de las variables de desviación al mismo nivel de prioridad. Por ejemplo, si la meta de ventas involucra dos productos diferentes, habrá dos variables de desviación con el mismo factor de prioridad. El criterio a ser usado en la determinación de los pesos diferenciales de las variables de desviación es la minimización del costo de oportunidad o pesadumbre. Esto implica que el coeficiente de pesadumbre, el cual siempre es positivo debe ser asignado a la variable de desviación individual con factor Pj idéntico. El coeficiente de pesadumbre simplemente representa la cantidad relativa de desviación insatisfecha de la meta. Por lo tanto, las variables de desviación en el mismo nivel de prioridad deben ser proporcionadas con respecto a medida, no obstante las desviaciones que están en diferentes niveles de meta no necesitan ser proporcionadas con respecto a medida.

La función objetivo de un problema de programación por metas consta de variables de desviación con factores de prioridad preferenciales Pj's para clasificación ordinal y ∂'s para ponderación al mismo nivel de prioridad. Dejemos que C sea un vector fila con 2 m componentes cuyos elementos son productos de Pj y ∂ tal que:

$$C = (\partial_1\ Pj1,\ \partial_2\ Pj2, \ldots \partial_{2m}\ Pj2m) \tag{1-12}$$

donde Pji (i = 1, 2, . . ., 2m ; j = 1, 2, . . . , k) son factores de prioridad preferenciales siendo $P_1$ el factor preferencial de mas alto orden (el mayor) y ∂i's (i = 1, 2, . . . 2m) son numeros reales. Dejemos que d sea un vector columna de 2m componentes cuyos elementos son $d^-$'s y $d^+$'s, tal que:

$$d = (d_1^-,\ d_2^-, \ldots d_m^-\ ;\ d_1^+,\ d_2^+, \ldots, d_m^+) \tag{1-13}$$

Entonces, un problema de programación por metas que involucre metas en conflicto puede ser formulado como:

$$\begin{array}{ll} \text{Min.} & cd \\ \text{S.r.} & AX + Rd = b \\ & X,\ d \geq 0 \end{array}$$

donde A y R son matrices mxn y mx2m respectivamente

Vamos a ilustrar IV) Clasificación y Ponderación de Metas Múltiples continuando con el ejemplo tratado en los casos anteriores, del fabricante de muebles. Ahora con las siguientes restricciones : La producción tanto de escritorios como de mesas requieren una hora de capacidad en la planta. La planta tiene una capacidad de producción máxima de 10 horas a la semana. Debido a la capacidad de ventas limitada, el máximo número de escritorios y mesas que pueden ser vendidos son seis y ocho por semana, respectivamente. El márgen de utilidad de la venta de un escritorio es de \$80 y \$40 para una mesa. El gerente de la planta ha puesto las siguientes metas, arregladas en orden de importancia.

1. Primero, él quiere evitar cualquier baja utilización de la capacidad de producción.
2. Segundo, él quiere vender tantos escritorios y mesas como sea posible. Como el márgen de utilidad por la venta de un escritorio es el doble de la utilidad de una mesa, el está mas interesado en realizar la meta de ventas para escritorios que para mesas en una proporción de 2-a 1.
3. Tercero, él quiere minimizar el tiempo extra de la planta lo más que se pueda.

En este ejemplo, el gerente de la planta hace una decisión que realizará sus metas lo mas que se pueda con el mínimo sacrificio. Como se permite tiempo extra, la producción de escritorios y mesas puede tomar más que la capacidad de producción de 10 horas. Por lo tanto la capacidad de operación puede ser expresada como:

$$(1\text{-}15) \qquad X_1 + X_2 + d_1^- - d_1^+ = 10$$

donde $X_1$ es el número de escritorios a producir, $X_2$ es el número de mesas, $d_1^+$ es el tiempo extra y $d_1^-$ es el tiempo de ocio cuando la producción de ambos tipos de productos no consuma la capacidad.

De acuerdo con las restricciones de la capacidad de ventas se puede escribir lo siguiente:

$$(1\text{-}16) \qquad \begin{aligned} X_1 + d_2^- &= 6 \\ X_2 + d_3^- &= 8 \end{aligned}$$

donde $d_2^-$ es la baja realización de la meta de ventas para escritorio y $d_3^-$ representa la baja realización de la meta de ventas para mesas. Debe notarse que $d_2^+$ y $d_3^+$ no están presentes en las ecuaciones (1-16) dado que las metas de ventas son dadas como el máximo volúmen de ventas posible.

Además de las variables y restricciones presentadas, los siguientes factores de prioridad preferenciales van a ser definidos:

$P_1$ : La más alta prioridad es asignada por la gerencia a la baja utilización de la capacidad de producción ($d_1^-$).

$P_2$ : El segundo factor de prioridad es asignado a la baja utilización de la capacidad de ventas ($d_2^-$ y $d_3^-$). Sin embargo, la gerencia puso doble importancia a $d_2^-$ que a $d_3^-$ de acuerdo con los respectivos márgenes de utilidad para escritorios y mesas.

$P_3$ : El más bajo factor de prioridad es asignado al tiempo extra en la capacidad de producción ($d_1^+$).

Ahora el modelo puede ser formulado. El objetivo es la minimización de las desviaciones para las metas. Las variables de desviación asociadas con el factor de prioridad más alto deben ser minimizadas al máximo. --

Cuando no sea posible o deseable mejorar más la meta más alta, entonces las desviaciones asociadas con el siguiente factor de prioridad más alto serán minimizadas. El modelo puede ser expresado como:

$$\text{Min.} \quad Z = P_1 d_1^- + 2\,P_2 d_2^- + P_2 d_3^- + P_3 d_1^+$$

$$\begin{aligned} \text{S.r.} \quad & X_1 + X_2 + d_1^- - d_1^+ = 10 \\ & X_1 + d_2^- = 6 \\ & X_2 + d_3^- = 8 \\ & X_1,\ X_2,\ d_1^-,\ d_2^-,\ d_3^-,\ d_1^+ \geq 0 \end{aligned}$$

La solución óptima puede ser obtenida a través del método simplex de - programación lineal. De la simple investigación de èl modelo se puede- derivar la siguiente solución óptima: $X_1 = 6$, $X_2 = 8$, $d_1^- = d_2^- = d_3^- = 0$, $d_1^+ = 4$. Las primeras dos metas se lograron, pero la tercera no se realizó completamente porque el tiempo extra no se pudo minimizar a cero.

## LIMITACIONES DE PROGRAMACION POR METAS

Algunas limitaciones son inherentes a todas las herramientas cuantitativas y algunas son atribuibles a características particulares de técnicas individuales. Aquí se limitará la discusión a las limitaciones de- programación por metas que son atribuídas a las suposiciones fundamentales de la técnica de programación matemática lineal.

A) Proporcionalidad

Debe ser señalado claramente que programación por metas es una extensión de programación lineal. Esto implica que la función objetivo, restricciones y las relaciones entre metas deben ser lineales. Esto significa que la medida de realización de una meta y utilización de recursos debe ser proporcional al nivel de cada actividad manejada individualmente. Problemas de decisión que involucren algunas relaciones no lineales debidas a la falta de proporcionalidad son extremadamente difíciles de resolver por programación por metas.

B) Aditividad

La condición de que la realización de una meta y la utilización de un recurso sean proporcionales al nivel de cada actividad manejada individualmente no asegura linealidad. Una no linealidad puede ocurrir si existe unión de acciones entre varias actividades de la realización de una meta o de la utilización total de un recurso. Para asegurar linealidad, por lo tanto, las actividades deben ser aditivas en la función objetivo y restricciones.

C) Divisibilidad

Otra limitación de programación por metas es que las fracciones en las variables de decisión deben ser aceptadas en la solución. Por ejemplo si la unidad usada para las variables de decisión en un problema de mezcla de productos es número de cajas y una caja contiene 100 piezas de un producto, un valor de solución fraccional es perfectamente satisfactorio. Hay casos, sin embargo donde las variables de decisión deben ser enteros para tener un significado físico.

D) Determinística

En los problemas de programación por metas normales, todos los coeficientes del modelo (aij, bi, y Pj), deben ser constantes. En otras palabras el problema requiere una solución en un medio ambiente de decisión estático. Sin embargo, en la realidad el medio ambiente de decisión es usualmente dinámico en lugar de estático. Por lo tanto, los coeficientes del modelo ni son conocidos ni constantes. Esta limitación es una de las más severas ya que los modelos de programación por metas son usualmente formulados para hacer decisiones futuras. Los coeficientes del modelo son basados en pronósticos de condiciones futuras. Información y métodos de pronósticos son generalmente inadecuados para la determinación precisa de los coeficientes. También es posible que los coeficientes del modelo, sean variables al azar que tengan una distribución de probabilidad única para el valor que ellos tomen cuando la solución sea implementada.

## AREAS DE APLICACION DE PROGRAMACION POR METAS

Programación por metas puede ser aplicada a las siguientes tres áreas de decisión administrativa.

1) Problemas de Distribución

Uno de los problemas de decisión básicos es la distribución óptima de recursos escasos. Que es de lo que va a tratar el capítulo cuatro de esta tesis (Un modelo de programación por metas para distribución de recursos-académicos). Suponiendo que hay n diferentes recursos de entrada que - están limitados a ciertas cantidades y hay m diferentes tipos de salida que resultan de varias combinaciones de los recursos. El problema de - decisión es analizar la combinación óptima de recursos de entrada para- lograr cierto conjunto de metas de salida de tal manera que la realización de metas pueda ser maximizada para la organización.

2) Problemas de Planeación e Itinerario

Muchos problemas de decisión involucran algún grado de planeación y/o - intinerario. Con el fin de realizar ciertas metas en el futuro, las decisiones deben ser hechas de acuerdo con acciones presentes y futuras a ser llevadas. Para cumlir con salidas deseadas, la combinación óptima- de entradas en ciertos períodos de tiempo debe ser identificada. Esas entradas pueden incluír mano de obra, materiales, tiempo, capacidad de producción, tecnología, etc. Muchos problemas tales como intinerario de producción, determinación de la localización, planeación financiera, planeación de personal, planeación de estrategias de mercadotecnia, etc. pueden ser analizados por programación por metas.

3) Análisis de Políticas

Para agencias del gobierno y organizaciones no lucrativas, los problemas de decisión básicas involucran la asignación de prioridades a varias metas y el desarrollo de programas para realizar esas metas. Tal- proceso de decisión constituye los análisis de políticas de la organización.

# CAPITULO II

# FORMULACION DEL MODELO DE PROGRAMACION POR METAS Y SOLUCION POR EL METODO GRAFICO

## Variaciones de la Función Objetivo

El modelo general de programación por metas fué presentado en el Capítulo # I como:

$$
\text{(2-1)} \qquad
\begin{array}{ll}
\text{Min.} & cd \\
\text{S.r.} & AX + Rd = b \\
 & X\ ,\ d \geq 0
\end{array}
$$

La función objetivo (Min. cd) es simplemente una minimización de una función de variables de desviación con ciertos factores de prioridad y pesos asignados a ellos. Un número de variaciones en la función objetivo puede ser realizado de acuerdo con la estructura de las metas de el análisis de decisión. Vamos a examinar las siguientes cinco variaciones prácticas.

### I) Minimización de $(d^- + d^+)$

Dado que la restricción de la meta es expresada por $AX + d^- - d^+ = b$, la minimización de $d^- + d^+$ minimizará el valor absoluto de $AX - b$. En otras palabras, la minimización de ambas desviaciones, positiva y negativa tenderá a encontrar cual valor de X realiza la meta $Ax = b$ exactamente. Como se discutió el Capítulo I, al menos una variable de desviación será cero, dependiendo sobre el nivel de las metas y la factibilidad técnica del sistema. Por ejemplo, si $Ax > b$ entonces $d^- = 0$ y $d^+$ =

$= AX - b$, mientras que si $AX < b$, entonces $d^+ = 0$ y $d^- = b-AX$. Si $AX = b$ (la meta se realizó exactamente como se deseaba), por su puesto $d^- = d^+ = 0$. Sin hacer caso de la condición de la restricción de la meta, la minimización de $d^- + d^+$ encuentra el valor de X que minimiza $d^-$ ó $d^+$ cualquiera que sea mas grande.

II. Minimización de $d^-$.

Si la función objetivo es construída para minimizar la desviación negativa de la meta, el conjunto solución consistirá de todas las X's tales que $AX \geq b$ por la minimización de $d^-$ a cero, si tales soluciones son posibles en el modelo. Si no es posible minimizar $d^-$ a cero, el conjunto solución consistirá de todas las X's que minimicen (b-AX) lo mas que se pueda.

III. Minimización de $d^+$

Si la función objetivo es para minimizar la desviación positiva de la meta, la solución identificará todas las X's que satisfagan $AX \leq b$, si tales soluciones son posibles en el modelo. Si el modelo no puede minimizar $d^+$ a cero, la solución consiste de todas las X's las cuales minimicen (AX-b) lo mas que se pueda.

IV. Minimización de $(d^- - d^+)$

La minimización de $(d^- - d^+)$ tiene el mismo efecto que la maximización de AX. Si denotamos $d = (d^- - d^+)$, la variable de desviación d no es restringida en signo. Entonces el modelo de programación por metas puede ser escrito como:

$$
\text{(2-2)} \qquad \begin{array}{ll} \text{Min.} & d \\ \text{S.r.} & AX + d = b \\ & X\ ,\ d \geq 0 \end{array}
$$

Como $d = b - AX$, podemos transformar la función objetivo a minimizar $(b - AX)$. Debido a que b es una constante, la función es equivalente a la maximización de AX. En la práctica, sin embargo la maximización de AX puede también ser realizada si hacemos b muy grande y minimiza $d^-$. Por lo tanto, en muchos casos la función de "minimizar $d^- - d^+$" es raramente usada.

V. Minimización de $(d^+ - d^-)$

El efecto de la función a minimizar $(d^+ - d^-)$ es equivalente a la minimización de AX. Otra vez, sidenotamos $d = d^+ - d^-$, el modelo de programación puede ser escrito como:

$$
\text{(2-3)} \qquad \begin{array}{ll} \text{Min.} & d \\ \text{S.r.} & AX - d = b \\ & X\ ,\ d \geq 0 \end{array}
$$

Como sabemos que $d = AX - b$ y b es una constante, la función objetivo es la misma que minimizar AX. En la mayoría de los problemas reales raramente se minimiza $(d^+ - d^-)$, debido a que podemos obtener idéntico resultado que minimizando $d^+$ si hacemos a b bastante pequeña.

## EJEMPLOS DE FORMULACION DEL MODELO Y SOLUCION POR EL METODO GRAFICO

Ejemplo # 1.- Una Compañía textil produce dos tipos de materiales de lino un material fuerte para tapicería y un material regular para vestido. El material para tapicería es producido de acuerdo a ordenes directas de fabricantes de muebles. El material para vestido, por otro lado, es distribuído a tiendas fabricantes al menudeo. Las razones de producción promedio para el material para tapicería y para el material para vestido son idénticos: 1,000 yardas por hora. Trabajando dos turnos, la capacidad operacional de la planta es de 80 horas por semana.

El departamento de mercadotecnia reporta que las ventas estimadas máximas para la siguiente semana son 70,000 yardas de material para tapicería y 45,000 yardas de material para vestido. De acuerdo con el departamento de contabilidad, la utilidad aproximada de una yarda de material para tapicería es $ 2.50, y de una yarda de material para vestido es $ 1.50.

El presidente de la Cía. cree que una buena relación entre patrón y empleados es un factor importante para el progreso del negocio. Entonces, el decide que un nivel de empleo estable es una meta primaria para la firma. Por lo tanto, cuando haya una demanda que exceda a la capacidad de producción nomral, el simplemente aumenta la capacidad de producción normal por medio de tiempo extra. Sin embargo, el siente también que el tiempo extra de la planta de mas de 10 horas por semana debe ser evitado debido a que incrementaría los costos. El presidente tiene las siguientes cuatro metas.

1.- La primera meta es evitar cualquier baja utilización de la capacidad de producción (para mantener estable el nivel de empleo a capacidad normal).

2.- La segunda meta es limitar el tiempo extra de la planta a 10 horas por semana.

3.- La tercera meta es alcanzar las metas de ventas de 70,000 yardas de material para tapicería y 45,000 yardas de material para vestido.

4.- La cuarta y última meta de el presidente es la de minimizar el tiempo extra de la planta lo mas que se pueda.

Como en este ejemplo se involucran metas múltiples incompatibles, una aproximación de programación lineal no es efectiva para este caso. Se debe desarrollar un modelo de programación por metas para la solución. El caso presenta tres restricciones básicas: producción, ventas y tiempo extra de la planta.

1) Capacidad de Producción

La capacidad de producción está limitada a 80 horas trabajando dos turnos. Sin embargo, como el tiempo extra de la planta es permitido hasta cierta extensión, la restricción puede ser expresada como:

$$X_1 + X_2 \gtreqless 80 \qquad (2\text{-}4)$$

Introduciendo variables de desviación a la restricción ésta puede ser expresada como:

$$X_1 + X_2 + d_1^- - d_1^+ = 80 \qquad (2\text{-}5)$$

donde:

$X_1$ = Número de horas usadas para producir el material para tapicería.

$X_2$ = Número de horas usadas para producir el material para vestido.

$d_1^-$ = Baja utilización de la capacidad de producción fijada a 80 horas de operación.

$d_1^+$ = Sobre utilización de la capacidad de producción normal mas allá de 80 horas.

Debe notarse, como se discutió en el Capítulo I, que $d_1^-$ toma un valor solamente cuando $d_1^+$ es cero y viceversa. Por lo tanto el producto de $(d_1^-)$ $(d_1^+)$ siempre es cero.

2) Restricciones de Ventas

En este caso las ventas máximas para el material para tapicería y el material para vestido se fijaron a 70,000 y 45,000 yardas, respectivamente. Aquí se supone que no es posible la sobrerealización de los límites máximos de ventas. Entonces las restricciones de ventas serán:

$$
\begin{aligned}
X_1 &\leq 70 \\
X_2 &\leq 45
\end{aligned}
\qquad (2\text{-}6)
$$

($X_1$ y $X_2$ son espresadas en miles)

Introduciendo variables de desviación, estas restricciones pueden ser expresadas como:

$$
\begin{aligned}
X_1 + d_2^- &= 70 \\
X_2 + d_3^- &= 45
\end{aligned}
\qquad (2\text{-}7)
$$

donde:

$d_2^-$ = Baja realización de la meta de ventas del material para tapicería.

$d_3^-$ = Baja realización de la meta de ventas del material para vestido.

3) Restricción del Tiempo Extra de la Planta

Para este caso, solamente se pueden formular las restricciones para producción y ventas. No obstante, el análisis de metas indica que el tiempo extra de la planta debe ser minimizado a 10 horas o menos. Para resolver el problema por medio de programación por metas, se necesita una variable de desviación que represente el tiempo extra de la planta más allá de 10 horas. Minimizando ésta variable de desviación a cero podremos realizar la meta. Como no hay tales variables de desviación en las tres restricciones presentadas antes, debemos cerear una nueva restricción.

El tiempo extra de la planta, $d_1^+$, debe ser limitado a 10 horas o menos. Sin embargo, no puede ser posible limitar el tiempo extra de la planta a 10 horas o menos si queremos realizar metas de mayor orden. Por lo tanto, $d_1^+$ puede ser menor que, igual a, o aún mayor que 10 horas. Introduciendo algunas variables de desviación nuevas, una restricción relativa a el tiempo extra puede ser expresada como:

$$(2\text{-}8) \qquad d_1^+ + d_4^- - d_4^+ = 10$$

donde:

$d_4^-$ = Desviación negativa de el tiempo extra a partir de 10 horas.

$d_4^+$ = Tiempo extra mas allá de 10 horas.

En (2-8) la restricción está basada solamente en variables de desviación, tenemos que convertirla de algún modo que quede expresada en función de - las variables de decisión ($X_1$ y $X_2$); ya que de esa manera es más efectiva para ser usada en la solución por el método gráfico. Entonces de (2-5):

$$d_1^+ = X_1 + X_2 + d_1^- - 80$$

sustituyendo $d_1^+$ en (2-8)

$$X_1 + X_2 + d_1^- - 80 + d_4^- - d_4^+ = 10$$

Como la baja utilización de la capacidad de producción ($d_1^-$) en esta meta- de el tiempo extra toma un valor de cero, entonces la ecuación anterior - se convierte en:

$$(2\text{-}9) \qquad X_1 + X_2 + d_4^- - d_4^+ = 90$$

que sería equivalente a la restricción expresada en (2-8) solo que en fun- ción de las variables de decisión.

Ahora el modelo completo puede ser formulado. El objetivo es la minimiza- ción de las desviaciones de las metas con ciertas prioridades asignadas.- La variable de desviación con la mas alta prioridad debe ser minimizada - lo mas que se pueda. Cuando no se pueda mejorar mas la meta mas alta; -- las otras variables de desviación deben ser minimizadas de acuerdo a sus- factores de prioridad asignados. Una cosa que debe ser notada aquí es -- que el factor de prioridad $P_3$ que es asignado a la baja realización de --

las metas de ventas para dos tipos de materiales. Las metas de ventas para ambos materiales son consideradas igualmente importantes. Sin embargo, la proporción para la contribución de las utilidades de cada material difiere algo. Una yarda de material para tapicería, contribuye $2.50 en las utilidades, y una yarda de material para vestido solamente $1.50 en las utilidades. Por lo tanto, deben ser asignados diferentes pesos a las metas de ventas de esos materiales, no obstante ellos están en el mismo nivel de prioridad. La proporción de contribución en las utilidades entre el material para tapicería y el material para vestido es de 5 a 3. Ahora el modelo puede ser formulado como:

$$Z = P_1 d_1^- + P_2 d_4^+ + 5P_3 d_2^- + 3P_3 d_3^- + P_4 d_1^+$$

$$\begin{array}{llr}
 & X_1 + X_2 + d_1^- \qquad - d_1^+ & = 80 \\
 & X_1 + d_2^- & = 70 \\
(2\text{-}10) & X_2 + d_3^- & = 45 \\
 & X_1 + X_2 + d_4^- - d_4^+ & = 90 \\
 & X_1,\ X_2,\ d_1^-,\ d_2^-,\ d_3^-,\ d_4^-,\ d_1^+,\ d_4^+ & \geq 0
\end{array}$$

Las variables de decisión fueron expresadas en términos de miles de yardas en el modelo. Con el fin de resolver este problema de programación por metas por el método gráfico, las restricciones deben ser graficadas como se muestra en la figura (2-1). Como la capacidad de producción puede ser menor o igual o aún mayor que 80 horas, las áreas sombreadas pueden estar sobre los dos lados de la línea recta, como se puede notar con las flechas en la gráfica. Ahora, si las metas presentadas por el presidente son encontradas dentro de las áreas de las restricciones de ventas, el área de solución factible será ABDO.

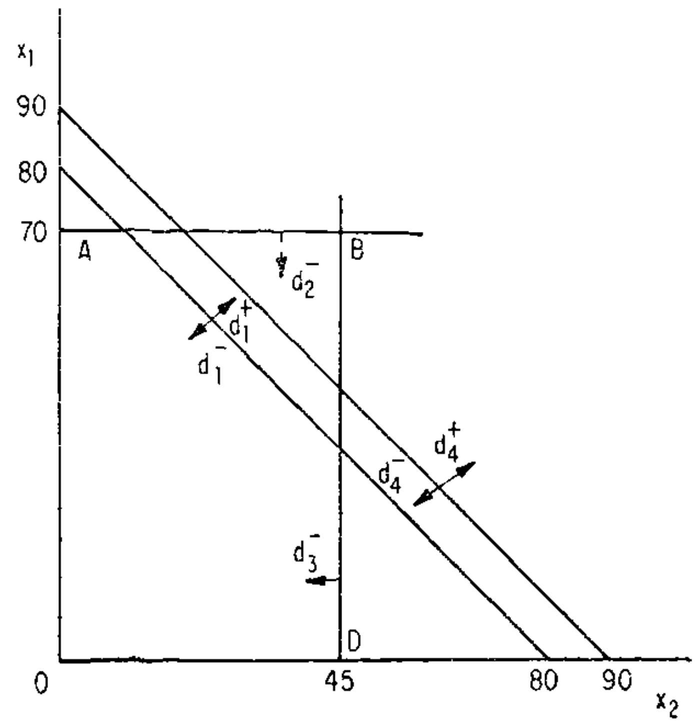


Fig. 2-1

Se han graficado todas las restricciones en la figura (2-1). El paso siguiente es el análisis de la función objetivo. La primera meta es evitar la baja utilización de la capacidad de producción o la minimización de $d_1^-$ a cero. Con el fin de realizar esta meta, la restricción de la capacidad de producción de $X_1 + X_2 - d_1^+ = 80$ debe ser analizada. La flecha que apuntaba hacia el orígen desde la función de arriba debe ser minimizada a cero. El área de solución factible es ahora la parte superior desde la línea recta como se muestra en la figura (2-2).

La segunda meta de el presidente es la de limitar el tiempo extra de la planta a 10 horas. Para realizar esta meta el área de solución facti--

ble debe ser limitada a el área sombreada como se muestra en la figura (2-3).

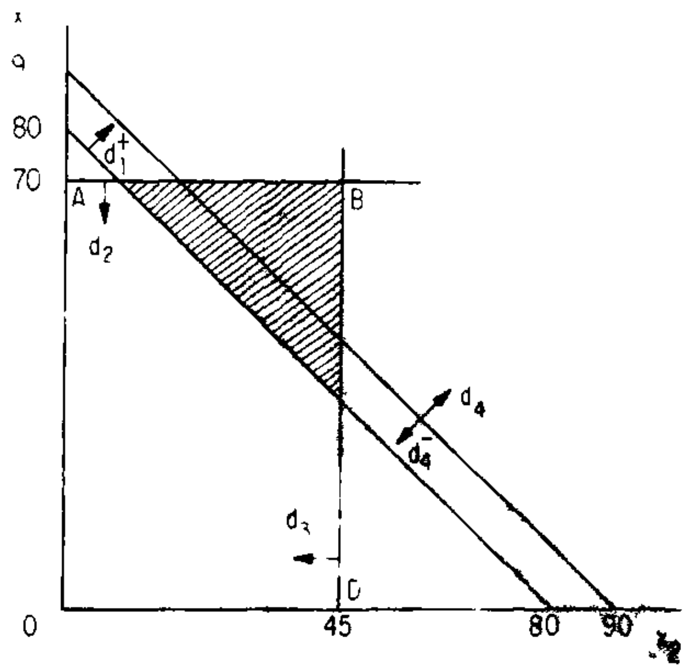


Fig. 2-2

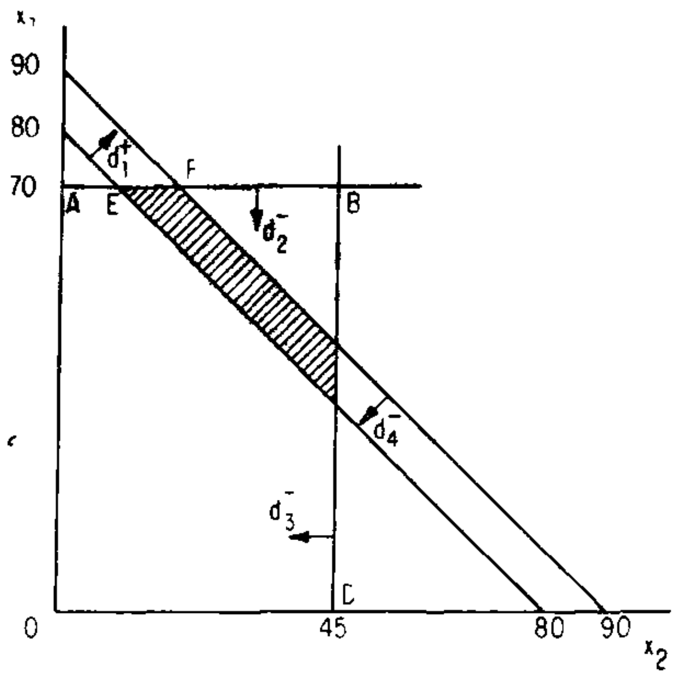


Fig. 2-3

La tercera meta presentada por el presidente es la de realizar ventas - máximas. Como la razón de utilidades entre el material para tapicería- ($X_1$) v el material para vestido ($X_2$) es 5 a 3, se debe tratar de vender el material para tapicería lo más que se pueda, antes de tratar de vender el material para vestido. La cantidad máxima de material para tapicería que se puede vender es, por supuesto, 70,000 yardas. Esta meta de ventas puede ser encontrada sobre la línea EF dentro del área sombreada en la fig. (2-3). En seguida se deben tratar de realizar las ventas máximas para el material para vestido, 45,000 yardas. Sin embargo para realizar esta meta se tiene que alcanzar el punto B en la fig. (2-3) Este punto está fuera del área sombreada, y por lo tanto muestras primeras dos metas no pueden ser realizadas en este punto. Nosotros no deseamos realizar la tercera meta a expensas de las primeras dos metas. - La meta máxima de ventas para el material para vestido obviamente no -- puede ser realizada dentro del medio ambiente de decisión dado. La meta de ventas máximas posibles para el material para vestido debe ser encontrada sobre el segmento de la línea recta EF en la figura (2-3)

Si hacemos simultáneas las ecuaciones:

$$X_1 + X_2 = 80$$

$$X_1 + X_2 = 90$$

con $X_1 = 70$. Encontramos para el punto E que $X_1 = 70$ y $X_2 = 10$ y para- el punto F que $X_1 = 70$ y $X_2 = 20$. Es evidente que en el punto F se --- venderían 70,000 yardas de el material para tapicería y 20,000 yardas - de el material para vestido, entonces, el punto F es el punto óptimo para encontrar las tres metas de la firma.

La última meta del presidente es la de minimizar el tiempo extra de la-- planta. Esta meta no cambia actualmente nuestro punto óptimo, desde que el tiempo extra de la planta ha sido limitado a 10 horas. Si nosotros e liminamos el tiempo extra de 10 horas, esto realizaría la cuarta meta, - pero solamente con el sacrificio de 10,000 yardas de material para ves-- tido. En otras palabras, nos estaríamos regresando del punto F al E. -- Por supuesto nosotros no deseamos alcanzar la cuarta meta a expensas de- la tercera meta.

En el punto óptimo F, la producción será 70,000 yardas de material para tapicería y 20,000 yardas de material para vestido, y la utilidad será- de $ 205,000.00. En este punto las dos primeras metas son alcanzadas - completamente, pero las últimas dos metas no pudieron ser realizadas -- completamente desde que existe una baja realización de la meta de ven-- tas para el material para vestido por 25,000 yardas y 10 horas de tiem- po extra de la planta. Sin embargo, la solución realiza todas las me-- tas lo mas que se pueden de acuerdo a las prioridades establecidas y -- dentro del medio ambiente de decisión dado.

En este momento se puede pensar que con programación lineal se puede re solver el problema si tratamos las dos primeras metas como restriccio-- nes y maximizarmos la utilidad dentro de las restricciones. En otras - palabras formular el problema de programación lineal como:

ta es asignada a esa meta. $P_1$ es entonces asignada a $d_2^-$, la baja re lización de esa meta de ventas.

La segunda meta de el presidente, es evitar cualquier baja utilización de la capacidad de producción; por lo tanto, $P_2$ es asignada a $d_1^-$. La tercera meta es minimizar el tiempo extra de la planta lo mas que se pueda. La cuarta meta es asignada a la realización de la meta de ventas para el material para vestido, así que, $P_4$ es asignada a d,

Si tratamos de utilizar programación lineal para maximizar utilidades, el modelo podría ser desarrollado como:

$$
\begin{array}{lll}
\text{Max} & Z = 2500\ X_1 + 1500\ X_2 & \\
\text{S.r.} & X_1 \geq 100 & \\
 & X_2 \leq 45 & \\
 & X_1 + X_2 \leq 90 & (2\text{-}12) \\
 & X_1\ ,\ X_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

La representación gráfica de el modelo se muestra en la figura (2-4) Obviamente, no existe área de solución factible y consecuentemente el problema no puede ser resuelto por medio de programación lineal.

Si utilizamos el modelo de programación por metas, el problema puede ser fácilmente resuelto. El modelo de programación por metas es formulado así:

$$
\text{(2-11)} \qquad
\begin{aligned}
\text{Max} \quad Z &= 2500\, X_1 + 1500\, X_2 \\
\text{S.r.} \quad X_1 & \leq 70 \\
X_2 & \leq 45 \\
X_1 + X_2 & \leq 90 \\
X_1, X_2 & \geq 0
\end{aligned}
$$

La solución al problema es producir 70,000 yardas de material para tapicería y 20,000 yardas de material para vestido para una utilidad de - - $205,000.00. Como se esperaba, la solución óptima es idéntica en este- caso.

¿ Significa esto que con programación lineal podríamos encontrar idénticas respuestas si convertimos alguna de las metas de la gerencia a restricciones? La respuesta es absolutamente no. En primer lugar puede -- ser muy posible que no todas las metas puestas por el que toma las decisiones involucren metas financieras, ejemplo, máximización de utilidades o minimización de costos. Segundo, las restricciones puestas para- ciertas metas no forman un conjunto convexo o una área simple de solución factible, así que no puede ser posible de solucionarse con el modelo de programación lineal.

Para ilustrar esto, vamos a cambiar el caso anterior muy ligeramente. - Suponiendo que el mejor cliente de la compañía textil ordenó 100,000 -- yardas de material para tapicería. Por varias razones el presidente no desea fallar en cumplir con esa orden; por lo tanto la prioridad más al

$$\text{Min.} \quad Z = P_1d_2^- + P_2d_1^- + P_3d_1^+ + P_4d_3^-$$

S.r.

$$(2\text{-}13) \quad \begin{aligned} X_1 + X_2 + d_1^- \quad\quad -d_1^+ &= 80 \\ X_1 \quad +d_2^- \quad -d_2^+ &= 100 \\ X_2 \quad + d_3^- &= 45 \\ X_1,\ X_2,\ d_1^-,\ d_2^-,\ d_3^-,\ d_1^+,\ d_2^+ &\geq 0 \end{aligned}$$

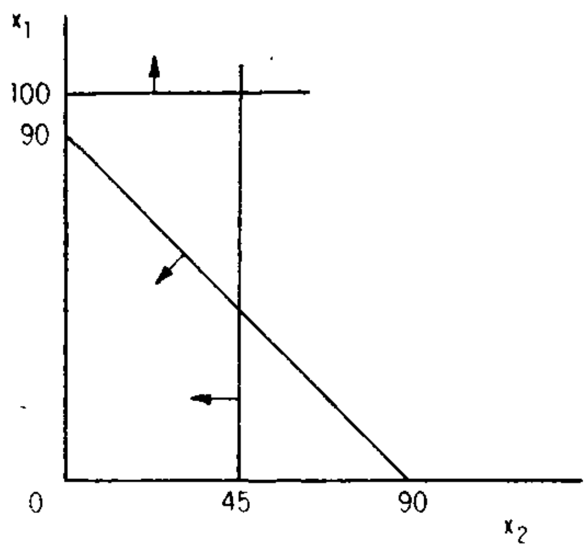


Fig. 2-4

La representación gráfica de el modelo se muestra en la figura (2-5).

Ahora, la primera meta es cumplir con la meta de ventas de 100,000 yardas de material para tapicería ordenada por el mejor cliente. Por lo tanto el área de solución factible estará sobre y arriba de la línea --

recta de $X_1 = 100$. La segunda meta es minimizar la baja utilización de la capacidad de producción, la cual es puesta a 80 horas. Satisfaciendo la primera meta, la segunda es automáticamente lograda. La tercera-meta es minimizar el tiempo extra de la planta lo más que se pueda. Está claro que con el fin de satisfacer la primera meta tenemos que trabajar la planta 100 horas es decir 20 horas de tiempo extra. Entonces, - la tercera meta no puede ser completamente realizada, pero puede ser -- parcialmente alcanzada moviendo $X_2$ a cero. Nuestra última meta es la - de las ventas del material para vestido ($X_2 = 45$). El único modo de -- cumplir con esta meta, es por medio de mas horas de tiempo extra de la-planta. Esto implica que tratando de alcanzar la cuarta meta se sacrifica a la tercera meta. Por lo tanto esta meta tiene que ser ignorada.

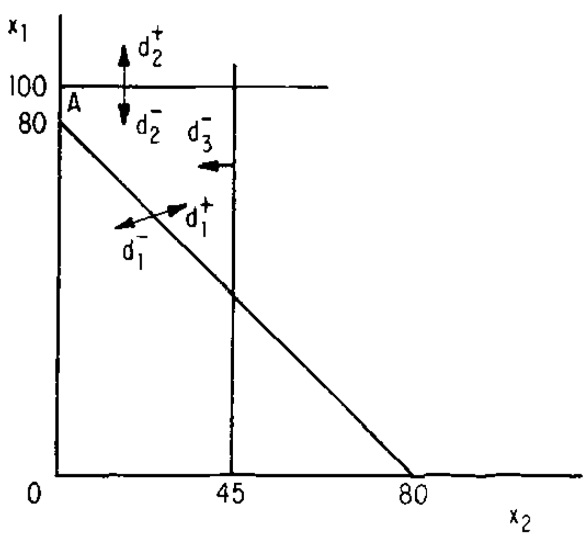


Fig. 2-5

La solución de programación por metas del problema es $X_1 = 100$ y $X_2 = 0$. En este punto A, nuestras primeras dos más importantes metas son satis-- fechas, la tercera meta no es completamente alcanzada y de la última meta no se obtuvo nada. De este ejemplo queda claro que programación por- metas trata de resolver el problema identificando el punto óptimo de a-- cuerdo a las condiciones del medio ambiente especificadas y a la estructura de prioridades establecidas. Mientras que, programación lineal no- puede ser usada aún para tratar de resolver el problema cuando no hay — área simple de solución factible.

Ejemplo # 2.- El gerente de la única tienda de discos de un pueblo que - tiene Universidad tiene un problema de decisión que involucra metas múltiples. La tienda de discos emplea cinco vendedores de discos de tiempo completo y cuatro vendedores de discos de medio tiempo. Las horas de -- trabajo mensuales normales para los vendedores de tiempo completo son -- 160 y 80 horas mensuales para los vendedores de medio tiempo. De acuerdo a los registros de desempeño de los vendedores, las ventas promedio - han sido cinco discos por hora para los vendedores de tiempo completo y- dos discos por hora para los vendedores de medio tiempo. Los rangos de- sueldo promedio por hora son $3 para los vendedores de tiempo completo y $2 para los vendedores de medio tiempo. La utilidad promedio por la venta de un disco es $1.50.

En vista de las ventas pasadas de discos y un incremento de estudiantes-en la Universidad local, el gerente siente que la meta de ventas para el próximo mes debe ser de 5,500 discos. Como la tienda se abre seis días a la semana, es a menudo requerido el tiempo extra de los vendedores (no necesariamente tiempo extra, pero si horas extras para los vendedores de medio tiempo). El gerente cree que una buena relación obrero patronal es un factor esencial para el progreso del negocio. Por lo tanto, el siente que un buen nivel de empleo estable con requerimientos de tiempo extra ocasional es una mejor práctica que un nivel de empleo inestable sin tiempo extra. Sin embargo el siente que el tiempo extra de más de 100 horas al mes entre los vendedores de tiempo completo debe ser evitado debido a la declinación en la efectividad de ventas causadas por la fatiga.

El gerente ha puesto las siguientes metas:

1.- La primera meta es alcanzar una meta de ventas de 5,500 discos para el mes siguiente.

2.- La segunda meta es limitar el tiempo extra de los vendedores de tiempo completo a 100 horas al mes.

3.- La tercera meta es la de proporcionar seguridad en el trabajo de los vendedores. El gerente siente que la plena utilización de las horas de trabajo regulares de los empleados (no suspensiones) es un factor importante para una buena relación obrero patronal. Sin embargo, el está convencido de que le conviene mas la plena utilización de los vendedores de tiempo completo que la plena utilización de los vendedores de medio tiempo en una proporción de 2 a 1.

4.- La última meta es la de minimizar la suma del tiempo extra para am--

bos vendedores de tiempo completo y medio tiempo. El gerente desea a-- signar pesos diferentes a la minimización del tiempo extra de acuerdo - a la razón de utilidad marginal neta entre los vendedores de tiempo completo y medio tiempo.

En base al problema establecido, se pueden formular las siguientes restricciones:

1.- Meta de Ventas

La realización de la meta de ventas, la cual es puesta a 5,500 discos,- es una función del total de horas trabajadas por los vendedores de tiempo completo y de medio tiempo y de sus razones de productividad (ventas por hora).

$$(2\text{-}14) \qquad 5X_1 + 2X_2 + d_1^- - d_1^+ = 5{,}500$$

donde:

$X_1$ = Total de horas al mes para los vendedores de tiempo completo.

$X_2$ = Total de horas al mes para los vendedores de medio tiempo.

$d_1^-$ = Baja realización de la meta de ventas

$d_1^+$ = Sobre realización de la meta de ventas

5 = Ventas por hora para el vendedor de tiempo completo

2 = Ventas por hora para el vendedor de medio tiempo

5500 = Meta de ventas para el mes

2.- Horas de Trabajo Régular

Las horas de los vendedores son determinadas por las horas de trabajo -

regular para cada tipo de vendedor y el número de vendedores empleados de tiempo completo y de medio tiempo. Como se denotó a $X_1$ como el total de horas al mes para los vendedores de tiempo completo, con cinco vendedores de tiempo completo, el total de horas regulares por mes será de 5 X 160 = 800. Para los vendedores de medio tiempo, el total de horas al mes será de 4 X 80 = 320. Entonces tenemos;

$$\begin{aligned} X_1 + d_2^- - d_2^+ &= 800 \\ X_2 + d_3^- - d_3^+ &= 320 \end{aligned} \qquad (2\text{-}15)$$

donde:

$d_2^-$ = Baja utilización de las horas de trabajo regular para los vendedores de tiempo completo en horas al mes.

$d_2^+$ = Tiempo extra dado a los vendedores de tiempo completo al mes.

$d_3^-$ = Baja utilización de las horas de trabajo regular para los vendedores de medio tiempo en horas/mes.

$d_3^+$ = Horas de trabajo extra dadas a los vendedores de medio tiempo.

3.- Tiempo Extra

En la solución de programación por metas, para realizar una cierta meta debemos tener una variable de desviación a minimizar. Si no hay variable de desviación a minimizar para realizar la meta, uno debe crear una introduciendo una nueva restricción. En este problema, la segunda meta del gerente es la de limitar el tiempo extra de los vendedores de tiempo completo a 100 horas al mes. No tenemos una variable de desviación a minimizar con el fin de realizar esta meta en las restricciones formula das antes. Por lo tanto debemos introducir una nueva restricción. Ahora esto viene a ser aparente que es un caso de descomposición de una cierta meta. Hay que notar que el gerente clasificó la minimización del tiempo extra para los vendedores de tiempo completo como una parte de la cuarta meta. En esencia, el tiene dos metas separadas concernientes al tiempo extra de los vendedores de tiempo completo. Para limitar el tiempo extra de los vendedores de tiempo completo a 100 horas al mes, debemos introducir la siguiente restricción.

(2-16) $$d_2^+ + d_4^- - d_4^+ = 100$$

donde:

$d_2^+$ = Tiempo extra actual de los vendedores de tiempo completo.

$d_4^-$ = Diferencia entre el tiempo extra actual de los vendedores de tiempo completo y las 100 horas deseadas de tiempo extra.

$d_4^+$ = Tiempo extra en exceso de las 100 horas deseadas

En (2-16) la restricción está basada solamente en variables de la desviación, tenemos que convertirla, de algún modo que quede expresada en función de las variables de decisión ($X_1$ y $X_2$), ya que de esa manera es más efectiva para ser usada en la solución para el método gráfico. Entonces de (2-15)

$$d_2^+ = X_1 + d_2^- - 800$$

sustituyendo

$d_2^+$ en (2-16) tenemos:

$$X_1 + d_2^- - 800 + d_4^- - d_4^+ = 100$$

Como $d_2^-$ para esta meta toma un valor de cero entonces la ecuación anterior se convierte en :

$$X_1 + d_4^- - d_4^+ = 900 \tag{2-17}$$

que sería equivalente a la restricción expresada en (2-16), sólo que en función de las variables de decisión.

El modelo de programación por metas para este problema, entonces es formulado así:

$$\text{Min.} \qquad Z = P_1 d_1^- + P_2 d_4^+ + 2P_3 d_2^- + P_3 d_3^- + 3P_4 d_3^+ + P_4 d_2^+$$

S.r.

$$\begin{array}{llllllll}
 & 5X_1 + 2X_2 + d_1^- & & & -d_1^+ & & & = 5{,}500 \\
 & X_1 & +d_2^- & & -d_2^+ & & & = 800 \\
(2\text{-}18) & X_2 & & +d_3^- & & -d_3^+ & & = 320 \\
 & X_1 & & +d_4^- & & & -d_4^+ & = 900 \\
 & X_1,\ X_2,\ d_1^-,\ d_2^-,\ d_3^-,\ d_4^-,\ d_1^+,\ d_2^+,\ d_3^+,\ d_4^+ & & & & & & - \quad 0
\end{array}$$

En el modelo anterior, el peso diferencial de 3 es asignado a $d_3^+$ al nivel $P_4$ en la base de la razón de utilidad marginal neta por hora entre los vendedores de tiempo completo y los de medio tiempo. La razón de productividad (ventas por hora) entre los vendedores de tiempo completo y medio tiempo es 5 a 2, mientras que la razón del salario por hora para tiempo extra es \$4.50 y \$2.00. La utilidad marginal por hora de tiempo extra es \$3.00 para los vendedores de tiempo completo y \$ 1.00 para los vendedores de medio tiempo. El costo relativo de una hora de tiempo --

extra para los vendedores de medio tiempo es tres veces que el de los vendedores de tiempo completo. Por eso, 3 $P_4$ es asignado a $d_3^+$ mientras que $1P_4$ es asignado a $d_2^+$.

Las restricciones del modelo fueron graficadas en la figura (2-6).

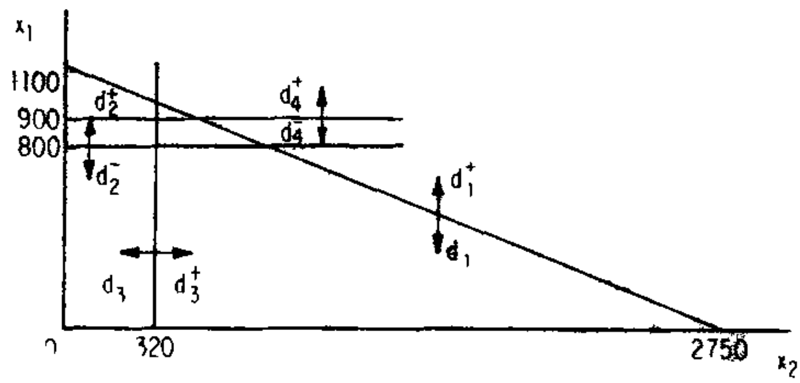


Fig. 2-6

La primera meta del gerente es la de alcanzar la meta de ventas minimizando $d_1^-$ a cero. Por lo tanto, la solución debe estar sobre o arriba de la línea recta $X_1 = 1,100 - 2/5\ X_2$. La segunda meta llama para la limitación de el tiempo extra para los vendedores de tiempo completo a 100 horas por mes. Minimizando $d_4^+$, el área solución viene a ser el área sombreada mostrada en la figura (2-7). Es evidente que la doble área sombreada satisface las primeras dos metas.

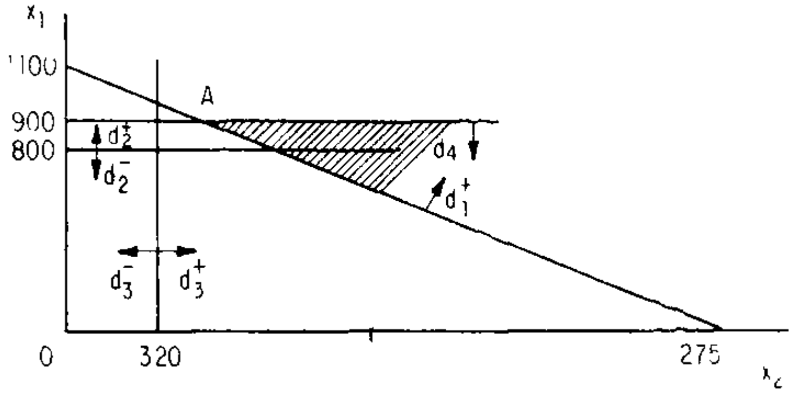


Fig. 2-7

La tercera meta es evitar la baja utilización de las horas de trabajo regulares para los vendedores de tiempo completo y medio tiempo. Como le-asignamos doble peso a la minimización de $d_4^-$ debemos restringir el área-solución sobre y arriba de la línea $X_1 = 800$. Ahora el área solución pasa a ser el área sombreada que se muestra en la figura (2-8).

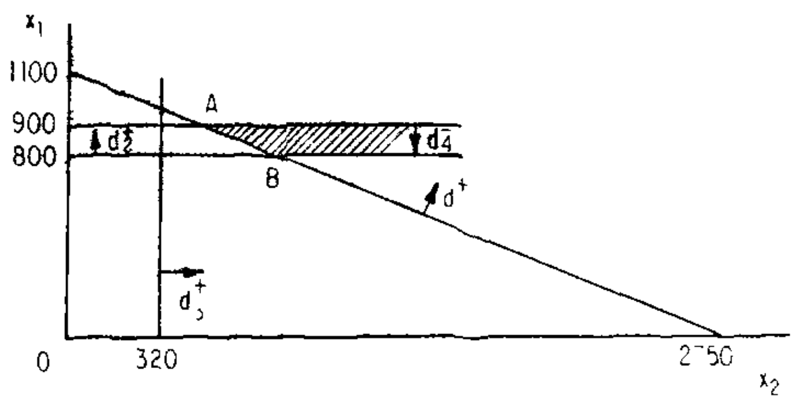


Fig. 2-8

La cuarta meta es la de minimizar la suma de el tiempo extra dado a los vendedores de tiempo completo y de medio tiempo. Como asignamos tres - el peso a la minimización del tiempo extra de los vendedores de medio - tiempo y una vez al peso del tiempo extra de los vendedores de tiempo - completo, $d_3^+$ debe ser minimizada primero. Lo más cercano que podamos - ir a la línea recta $X_2 = 320$ es el punto A. Ahora nos gustaría minimizar $d_2^+$. Sin embargo, si nos movemos abajo hacia B con el fin de minimizar $d_2^+$, estaríamos incrementando $d_3^+$. Por lo tanto la solución óptima - de el problema será el punto A, donde $X_1 = 900$, $X_2 = 500$, $d_2^+ = 100$, -- $d_3^+ = 180$. Con esta solución, el gerente de la tienda de discos es capaz de alcanzar las tres más importantes metas completamente, pero la última meta no es realizada, debido a que hay horas de tiempo extra en la - solución.

Lo antes expuesto en este capítulo lo podemos resumir en los siguientes:

PASOS A SEGUIR PARA LA FORMULACION DEL MODELO DE PROGRAMACION POR METAS.

Como se ilustraron las formulaciones del modelo de programación por metas con ejemplos relativamente simples. Los pasos que se deben seguir- en la formulación del modelo pueden ser resumidos de la siguiente manera:

I) Definir Variables y Constantes

El primer paso en la formulación del modelo es definir las variables de decisión y el lado derecho de la ecuación (las constantes). Las cons-- tantes del lado derecho pueden ser recursos utilizables o niveles de me tas especificadas. Esto requiere un cuidadoso análisis del problema con el fín de identificar todas las variables relevantes que tienen algún - efecto en el conjunto de metas establecidas por el gerente.

II) Formular Restricciones

A través de un análisis de las relaciones entre las variables de deci-- sión y sus relaciones con las metas un conjunto de restricciones debe - ser formulado. Una restricción puede ser una representación de una - - restricción del sistema, una relación entre variables o una restricción de la meta que define la relación entre las variables de decisión y las metas. Debe ser recordado que si no hay variable de desviación a minimizar con el fin de realizar cierta meta, una nueva restricción debe -- ser creada. Si es requerido un refinamiento adicional de metas y prioridades, puede ser facilitado descomponiendo ciertas variables de des-- viación.

III) Desarrollar la Función Objetivo

A través del análisis de la estructura de metas de el que toma las decisiones (gerente), la función objetivo debe ser desarrollada. Primero,- los factores de prioridad preferenciales deben ser asignados a ciertas- variables de desviación que son relevantes para alcanzar una meta. Segundo, si es necesario, deben ser asignados pesos diferenciales a las - variables de desviación que estén al mismo nivel de prioridad. Es imperativo que las metas al mismo nivel de prioridad sean proporcionadas o- tengan una medida común.

## CAPITULO III

## EL METODO SIMPLEX DE PROGRAMACION POR METAS

Ejemplo # 1.

La mejor manera para explicar el método simplex de programación por metas es a través de un ejemplo. Entonces, vamos a examinar el problema presentado como ejemplo # 1, en el capítulo 2. El presidente de una compañía textil tiene el siguiente problema de programación por metas:

$$\text{Min} \quad Z = P_1d_1^- + P_2d_4^+ + 5P_3d_2^- + 3P_3d_3^- + P_4d_1^+$$

S.r.

$$(3\text{-}1) \qquad \begin{array}{lllllll} X_1 + X_2 + d_1^- & & & -d_1^+ & & = & 80 \\ X_1 \quad + \; +d_2^- & & & & & = & 70 \\ \quad X_2 + \; +d_3^- & & & & & = & 45 \\ X_1 + X_2 & +d_4^- & & & -d_4^+ & = & 90 \\ \quad X_1, X_2, d_1^-, d_2^-, d_3^-, d_4^-, d_1^+, d_4^+ & & & & & \geq & 0 \end{array}$$

La razón por la que se formuló la última restricción (minimización del tiempo extra de la planta en exceso de 10 horas) por medio de variables de decisión fué porque debíamos tener todas las restricciones expresadas en términos de variables de decisión con el fin de resolver el problema por el método gráfico. Sin embargo, como ahora utilizamos el método simplex, podemos también resolver el problema si la restricción es formulada como sigue:

$$(3\text{-}2) \qquad d_1^+ + d_{11}^- - d_{11}^+ = 10$$

donde:

$d_1^+$ = tiempo extra de la planta

$d_{11}^-$ = diferencia entre el tiempo extra actual de la planta y 10 horas de tiempo extra.

$d_{11}^+$ = tiempo extra de la planta en exceso de 10 horas.

Si usamos la restricción formulada en (3-2), entonces la segunda meta en la función objetivo debe leer $P_2\ d_{11}^+$. Cualquier modelo es perfectamente aceptable para la solución por el método simplex del problema. Entonces el modelo para solucionar por el método simplex quedaría así:

$$
\begin{array}{lllll}
\text{Min.} & Z = P_1 d_1^- + P_2 d_{11}^+ + 5P_3 d_2^- + 3P_3 d_3^- + P_4 d_1^+ & & = & 80 \\
\text{S.r.} & & & & \\
 & X_1 + X_2 + d_1^- \qquad - d_1^+ & & = & 70 \\
 & X_1 \qquad + d_2^- & & = & 45 \\
 & \quad X_2 \qquad + d_3^- & & = & 10 \\
 & \qquad d_{11}^- + d_1^+ - d_{11}^+ & & \geq & 0 \\
 & X_1,\ X_2,\ d_1^-,\ d_2^-,\ d_3^-,\ d_{11}^-,\ d_1^+,\ d_{11}^+ & & &
\end{array}
$$

Antes de que sea presentada la primera tabla del método simplex para el modelo (3-3), hay varias cosas que debemos considerar.

Primero, en programación por metas, el propósito de la función objetivo es minimizar el total de metas inalcanzables. Esto se logra minimizando las variables de desviación a través del uso de ciertos factores de prioridad preferenciales o pesos diferenciales. No hay maximización de utilidades o minimización de costos a seguir en la función objetivo. Por -

lo tanto, los factores de prioridad preferenciales y los pesos diferenciales toman el lugar de Cj como se usa en programación lineal.

Segundo, la función objetivo es expresada asignando factores de prioridad a ciertas variables. Estos factores de prioridad preferenciales son multidimensionales como ellos son valores ordinales en lugar de valores cardinales. Esto implica que el criterio simplex (Zj o Zj - Cj) no puede ser expresado por una fila simple, como se hace en el caso de programación lineal.

En lugar de esto el criterio simplex viene a ser una matriz de tamaño mxn, donde m representa el número de niveles de prioridad preferenciales y n es el número de variables incluyendo ambas variables de decisión y de desviación.

Tercero, como el criterio simplex es expresado como una matriz en lugar de una fila, debemos diseñar un nuevo procedimiento para la identificación de la columna óptima (clave). La relación entre los factores de prioridad preferenciales es Pj >>> Pj + 1, lo cuál significa que Pj siempre lleva prioridad sobre Pj + 1. Está, entonces claro que el procedimiento para la selección de la columna óptima (clave) debe considerar el nivel de prioridades.

La tabla (3-1) presenta la tabla inicial de este problema de programación por metas. La suposición básica que se hace al formular la tabla inicial de programación por metas es idéntica a la que se hace para programación-

**lineal. Suponemos que la solución inicial es en el orígen, donde los - valores de todas las variables de decisión son cero. En la primera restricción, por lo tanto, las hóras de operación totales de la planta son, por supuesto cero como $X_1 = X_2 = 0$.**

| $C_j$ | | | | | $P_1$ | $5P_3$ | $3P_3$ | | $P_4$ | $P_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $V$ | $C$ | $x_1$ | $x_2$ | $d_1^-$ | $d_2^-$ | $d_3^-$ | $d_{11}^-$ | $d_1^+$ | $d_{11}^+$ |
| $P_1$ | $d_1^-$ | 80 | 1 | 1 | 1 | | | | 1 | |
| $5P_3$ | $d_2^-$ | 70 | 1 | | | 1 | | | | |
| $3P_3$ | $d_3^-$ | 45 | | 1 | | | 1 | | | |
| | $d_{11}^-$ | 10 | | | | | | 1 | 1 | 1 |
| | $P_4$ | 0 | | | | | | | 1 | |
| $Z_j - C_j$ | $P_3$ | 485 | 5 | 3 | | | | | | |
| | $P_2$ | 0 | | | | | | | | -1 |
| | $P_1$ | 80 | 1 | 1 | | | | | -1 | |

TABLA 3-1

Naturalmente, no hay tiempo extra en la planta ($d_1^+ = 0$). Por lo tanto, la baja utilización de la capacidad normal de producción ($d_1^-$) será 80 - horas. Por consiguiente la variable $d_1^-$ entra en la solución base (en-- tra a la base) y la constante de el lado derecho pasa a ser 80. De la- misma manera $d_2^-$ y $d_3^-$ están también en la solución base. En la última- restricción ($d_1^+ + d_{11}^- - d_{11}^+ = 10$), como la planta no está en operación $d_1^+$ tiene que ser cero. Entonces el tiempo extra de la planta en exceso de 10 horas ($d_{11}^+$) también debe ser cero ($d_{11}^+ = 0$). Consecuentemente - $d_{11}^-$ toma el valor de 10 como se muestra en la tabla (3-1). Siempre la- regla en la tabla inicial de programación por metas es que las variables de desviación negativas ($d_i^-$) aparecerán en la solución base.

Ahora, vamos a examinar a Cj. En programación por metas Cj está representado por los factores de prioridad preferenciales y los pesos diferenciales como se muestra en la función objetivo de programación por metas. La mayoría de los problemas de programación por metas involucran un gran número de variables. Por esa razón, con el fin de hacer la tabla más -- simple de leer se dejan espacios vacíos en la tabla en donde debería aparecer cero.

El criterio simplex(Zj - Cj) es una matriz de 4 x 8 debido a que tenemos cuatro niveles de prioridad y ocho variables (dos de decisión y seis de desviación) en el modelo. El procedimiento de programación por metas primero realiza la meta mas importante en toda la extensión posible y entonces considera la meta de siguiente orden, y así sucesivamente. Debe- ser fácilmente aparente que la selección de la columna óptima debe estar basada en el porcentaje de contribución unitario de cada variable para - realizar la meta más importante. Cuando la primera meta es completamente alcanzada, entonces el criterio de selección de la columna óptima - (clave) será basado en el porcentaje de realización de la segunda meta y así sucesivamente. Es por eso que los factores de prioridad preferenciales se arreglaron de menor a mayor en la tabla (3-1) de manera que la columna óptima pueda ser fácilmente identificada en la parte más baja de - la tabla.

El problema de programación por metas es un problema de minimización. - En los problemas de minimización de programación lineal, los valores en- la columna de constantes del criterio simplex representan el costo total de la solución. En programación por metas esos valores ($P_4$ = 0, $P_3$ = -485, $P_2$ = 0 y $P_1$ = 80) en la columna de constantes representan la porción que no se ha alcanzado de cada meta. Por ejemplo, en la tabla inicial donde la planta no está aún en operación es evidente que la segunda y cuarta metas están en ese momento completamente alcanzadas porque son metas que se refieren a tiempo extra de la planta. La baja realización de la primera meta es 80 porque la baja utilización de la capacidad normal de operación de la planta es de 80 horas. Para la tercera meta, la baja realización de la meta es 485. Se recordará que se asignaron diferentes pesos de 5 y 3 a la baja realización de las metas de ventas para los materiales para tapicerías y vestido. Como esas dos metas son proporcionadas y están al mismo nivel de prioridad, este procedimiento es absolutamente apropiado 5(70) + 3(45) = 485.

Ahora, examinaremos los cálculos de Zj - Cj en la tabla (3-1). Ya se había discutido que los valores de Cj representan los factores de prioridad asignados a las variables de desviación y los valores de Zj son porductos de la suma de Cj por constantes o coeficientes. Entonces el valor de Zj en la columna de $X_1$ será ($P_1$x1 + $5P_3$x1), o $P_1+5P_3$. El valor de Cj en la columna de $X_1$ es cero como se muestra por el espacio en blanco en la hilera de Cj. Por lo tanto, Zj - Cj para la columna $X_1$ es $P_1 + 5P_3$. Como $P_1$ y $P_3$ no son proporcionadas, se deben listar separadamente en las hileras $P_1$ y $P_3$ del criterio simplex (Zj - Cj). Consecuentemente, el valor de (Zj - Cj) será 1 en la hilera de $P_1$ y 5 en la hilera de $P_3$ en la columna $X_1$. Con el mismo procedimiento, los valores de (Zj - Cj) de la columna $X_2$ pueden ser obtenidos.

Estos serán ($P_1$ X 1 + $3P_3$ X 1) - 0 o $P_1$ + $3P_3$. Para las siguientes - tres columnas, $d_1^-$, $d_2^-$, y $d_3^-$, los valores (Zj - Cj) serán cero porque los valores $Z_j$ son idénticos a los respectivos valores Cj.

Para la columna $d_{11}^-$, el valor (Zj - Cj) es cero porque Zj y [illegible] bas cero. Para la columna $d_1^+$, se puede fácilmente calcular el valor de Zj de $-P_1$ de la tabla. Como el valor de Cj en la columna es $P_4$, entonces Zj - Cj será ($-P_1$ - $P_4$). Entonces se pone un menos uno (-1) en la hilera de $P_1$ y también en la de $P_4$ para la columna $d_1^+$. La última columna $d_{11}^+$, indica cero Zj. Sin embargo su valor para Cj es $P_2$. Entonces Zj-Cj para la columna viene a ser $-P_2$ de acuerdo a esto se pone un (-1) en la hilera $P_2$ para la columna $d_{11}^+$.

Ahora, seleccionaremos la columna óptima (o clave) y la hilera (o renglón) clave. El criterio usado para determinar la columna óptima es el porcentaje de contribución de cada variable en la realización de la meta mas importante ($P_1$).

En otras palabras, la columna con el valor máximo positivo en el nivel-Pl en (Zj - Cj) será seleccionada como la columna óptima. En la tabla-(3-1), hay dos valores positivos idénticos en las columnas $X_1$ y $X_2$. Con el fin de romper este empate, checaremos los siguientes niveles de prioridad mas bajos. Como hay un valor más grande en la columna $X_1$ en el - nivel $P_3$ comparado con el de la columna $X_2$ (5 en $X_1$; 3 en $X_2$), entonces se selecciona $X_1$ como la columna óptima. El renglón (o hilera) clave - es el que tiene el mínimo valor cuando se dividen los valores de la columna de constantes entre los coeficientes de la columna óptima. El coeficiente de 1 es encerrado en la tabla (3-1) para indicar que es la intersección de la columna óptima y el renglón clave. Entonces entra $X_1$ en la base, la baja utilización de la capacidad normal de la planta y la baja realización de la meta de ventas para el material para tapicería será afectada. Esto está claro de una observación de los coeficientes existentes en las hileras $d_1^-$ y $d_2^-$.

Utilizando el procedimiento simplex regular de programación lineal, la primera tabla es revisada para obtener la segunda tabla como se muestra en la tabla (3-2). La planta está en operación 70 horas para producir 70,000 yardas de material para tapicería. Por lo tanto, la baja utilización de la capacidad regular de planta es ahora 10 horas como se muestra por la constante en la hilera $d_1^-$. Tenemos también completamente realizada la meta de ventas para el material para tapicería , y por lo tanto $d_2^-$ salió de la solución base.

Como nuestra atención inmediata es la realización de la meta más importante , debemos simplemente examinar si Zj ha decrecido en el nivel $P_1$ al final de cada paso (en este paso decreció 70). Cuando Zj en el nivel $P_1$ es completamente minimizada a cero, nuestra atención debe entonces ser enfocada en el valor Zj en el nivel $P_2$, y así sucesivamente.

En la tabla (3-2) la columna óptima es identificada como $X_2$. El renglón (o hilera) clave como $d_1^-$ es determibadi por el procedimiento usual. La mejor manera de alcanzar la meta mas importante completamente es pro duciendo 10,000 yardas de material para vestido. La producción de 70,000 yardas de material para tapicería y 10,000 yardas de material para vestido requerirá de 80 horas de operación en la planta:

| $C_j$ | | | | | $P_1$ | $5P_2$ | $3P_3$ | | $P_4$ | $P_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | V | C | $x_1$ | $x_2$ | $d_1^-$ | $d_2^-$ | $d_3^-$ | $d_{11}^-$ | $d_1^+$ | $d_{11}^+$ |
| $P_1$ | $d_1$ | 10 | | 1 | 1 | 1 | | | 1 | |
| | $x_1$ | 70 | 1 | | | 1 | | | | |
| $3P_3$ | $d_3$ | 45 | | 1 | | | 1 | | | |
| | $d_{11}$ | 10 | | | | | | 1 | 1 | 1 |
| $Z_j - C_j$ | $P_4$ | 0 | | | | | | | 1 | |
| | $P_3$ | 135 | | 3 | | 5 | | | | |
| | $P_2$ | 0 | | | | | | | | 1 |
| | $P_1$ | 10 | | 1 | | 1 | | | 1 | |

TABLA (3-2)

El tercer paso de la solución es presentado en la tabla (3-3).

| $C_j$ | | | | | $P_1$ | $5P_2$ | $3P_3$ | | $P_4$ | $P_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | V | C | $x_1$ | $x_2$ | $d_1^-$ | $d_2^-$ | $d_3^-$ | $d_{11}^-$ | $d_1^+$ | $d_{11}^+$ |
| | $x_2$ | 10 | | 1 | 1 | 1 | | | 1 | |
| | $x_1$ | 70 | 1 | | | 1 | | | | |
| $3P_3$ | $d_3$ | 35 | | | 1 | 1 | 1 | | 1 | |
| | $d_{11}$ | 10 | | | | | | 1 | 1 | 1 |
| $Z_j - C_j$ | $P_4$ | 0 | | | | | | | 1 | |
| | $P_3$ | 105 | | | −3 | −2 | | | 3 | |
| | $P_2$ | 0 | | | | | | | | 1 |
| | $P_1$ | 0 | | | −1 | | | | | |

TABLA (3-3)

La solución indica que la producción de 70,000 yardas de material para - tapicería y 10,000 yardas de material para vestido es suficiente para al canzar la primera segunda y cuarta metas. Sin embargo, la tercera meta- no está completamente alcanzada debido a que a la meta de ventas del material para vestido le faltan 35,000 yardas para lograrla; el valor de - $d_3^-$ de 35 en la solución base indica esto. En los niveles $P_1$ y $P_2$ todos los coeficientes en (Zj - Cj) son negativo o cero como se muestra en la tabla (3-3).

La selección de la columna óptima es ahora determinada en el nivel $P_3$. La columna $d_1^+$ es obviamente la columna óptima debido a que el único valor positivo en el nivel $P_3$ de (Zj - Cj) está en esa columna. El renglón clave es $d_{11}^-$. El procedimiento es a la vez sensible y racional. - Se emplea tiempo extra de operación de la planta para alcanzar la tercera meta completamente. Como le asignamos la cuarta prioridad a la minimización del tiempo extra de la planta, entonces estamos alcanzando la - tercera meta a expensas de la cuarta.

La tabla (3-4) presenta la solución óptima de el problema. Es óptima en el sentido de que esa solución capacita al que toma las decisiones para- alcanzar sus metas lo mas cercano posible dentro de sus restricciones de decisión dadas y su estructura de prioridades.

Se debe notar como disminuyó el valor de Zj en el nivel $P_3$ de 105 a 75.- Para disminuír la baja realización de la tercera meta se sacrificó la - completa realización de la cuarta meta en 10 unidades (horas) como se --

muestra en el nivel $P_4$. La solución óptima es $X_1 = 70$, $X_2 = 20$, $d_1^+ = 10$, $d_3^- = 25$. En otras palabras la compañía debe producir 70,000 yardas de material para tapicería y 20,000 yardas de material para vestido con 10 horas de tiempo extra de la planta y 25,000 yardas de baja realización en la meta de ventas del material para vestido.

| $C_j$ | | | | | $P_1$ | $5P_3$ | $3P_3$ | | $P_4$ | $P_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $V$ | $C$ | $x_1$ | $x_2$ | $d_1^-$ | $d_2^-$ | $d_3^-$ | $d_{11}^-$ | $d_1^+$ | $d_{11}^+$ |
| | $x_2$ | 20 | | 1 | 1 | 1 | | 1 | | 1 |
| | $x_1$ | 70 | 1 | | | 1 | | | | |
| $3P_3$ | $d_3^-$ | 25 | | | 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 |
| $P_4$ | $d_1^+$ | 10 | | | | | | 1 | 1 | 1 |
| $Z_j - C_j$ | $P_4$ | 10 | | | | | | 1 | | −1 |
| | $P_3$ | 75 | | | 3 | 2 | | −3 | | 3 |
| | $P_2$ | 0 | | | | | | | | 1 |
| | $P_1$ | 0 | | | 1 | | | | | |

TABLA (3-4)

En la tabla (3-4), como la tercera meta no está completamente alcanzada, hay un valor positivo en (Zj - Cj) en el nivel $P_3$ que es 3 en la columna $d_{11}^+$. Obviamente, podemos tratar de alcanzar la tercera meta en una extensión mayor si introdujeramos $d_{11}^+$ en la solución. Pero encontramos un valor negativo (-1) en el nivel de prioridad mayor ($P_2$). Esto implica que si entra $d_{11}^+$ a la base, mejoraríamos la tercera meta a expensas de la segunda. Entonces no podemos meter $d_{11}^+$ en la solución. La misma lógica se aplica a la columna $d_{11}^-$ donde encontramos un valor positivo (+1) en el nivel $P_4$. La regla es que si hay un elemento positivo en un nivel de prioridad menor en (Zj - Cj), la variable en esa columna no pue de entrar a la solución si es que hay un elemento negativo en la misma-columna en un nivel de prioridad mayor.

## PASOS DEL METODO SIMPLEX DE PROGRAMACION POR METAS

Ahora que ya se ha ilustrado como resolver un problema de programación-por metas por el método simplex modificado, podemos resumir los pasos - de la solución para ayudarnos en soluciones futuras:

1. OBTENER LA TABLA INICIAL EN BASE AL MODELO DE PROGRAMACION POR METAS

   Suponemos que la solución inicial está en el orígen. Por lo tanto,- todas las variables de desviación negativas en las restricciones del modelo deben entrar en la solución base inicialmente. Enlistar las-constantes del lado derecho y los coeficientes de todas las variables en el cuerpo principal de la tabla. También hay que enlistar los -- factores de prioridad preferenciales y los pesos diferenciales a las variables apropiadas examinando la función objetivo. En el criterio simplex (Zj - Cj), enlistar los niveles de prioridad en la columna V desde el mas bajo en la parte superior al mas alto en la parte inferior. Los valores de Zj deben ser calculados y anotados en la columna C. El último paso es calcular los valores (Zj - Cj) para cada - columna comenzando desde las variables de decisión hasta las últimas variables de desviación positivas.

2. DETERMINE LA NUEVA VARIABLE DE ENTRADA

   Este paso es idéntico a la identificación de la columna óptima. Pri mero, buscamos el nivel de prioridad más alto que no haya sido completamente realizado, examinando los valores (Zj - Cj) en la columna de constantes. Cuando el nivel de prioridad esté determinado, procederemos a identificar la columna de variables que tenga el valor (Zj-Cj) más positivo. La variable en esa columna entrará en la solución base en la siguiente iteración. Si existe un empate entre los valores más positivos en (Zj - Cj) en el nivel de prioridad más alto, hay que checar el siguiente nivel de prioridad mas alto y seleccionar la columna que tenga el valor más positivo en ese nivel de prioridad. Si el empate continúa escoja una columna arbitrariamente. La otra columna será escogida en las iteraciones subsiguientes.

3. DETERMINE LA VARIABLE DE SALIDA DE LA SOLUCION BASE

Este proceso es idéntico al de encontrar el renglón clave. Calcular el valor de la constante dividida entre el coeficiente correspondiente de la columna óptima. Seleccione el renglón que tenga el mínimo cociente positivo o cero. La variable en ese renglón será reemplazada por la variable de la columna óptima en la siguiente iteración. Si existe un empate cuando las constantes son divididas entre los coeficientes, encuentre el renglón que tenga la variable con el factor de prioridad más alto. Este procedimiento capacita la realización de las metas de más alto orden primero y por lo tanto reduce el número de iteraciones.

Primero, encuentre los nuevos valores de constantes y coeficientes en el renglón clave dividiendo los valores antiguos entre el elemento pivote (o intersección de la columna óptima y renglón clave).

Segundo, encuentre los nuevos valores para todos los otros renglones usando el mismo procedimiento, de cálculo que en el método simplex - de programación lineal.

5. DETERMINE SI LA SOLUCION ES OPTIMA

Primero, analice el nivel de realización de cada meta checando el valor Zj para cada renglón de prioridad. Si los valores Zj son todos cero esta es la solución óptima. Segundo, si existe un valor positivo de Zj, examine los coeficientes (Zj - Cj) para ese renglón. Si - hay un valor (Zj - Cj) positivo en el renglón, determine si hay un - valor (Zj - Cj) negativo en el nivel de prioridad más alto en la misma columna. Si hay un valor (Zj - Cj) negativo en el nivel de prioridad más alto para el valor (Zj - Cj) positivo en el renglón de interés, la solución es óptima. Tercero, si existe un valor (Zj - Cj) positivo en un cierto nivel de prioridad y no hay un valor (Zj - Cj) negativo a un nivel de prioridad más alto en la misma columna, entonces la solución no es óptima. Por lo tanto, hay que regresarse al - paso 2 y continuar. La figura (3-1) ilustra el procedimiento solución simplex para problemas de programación por metas.

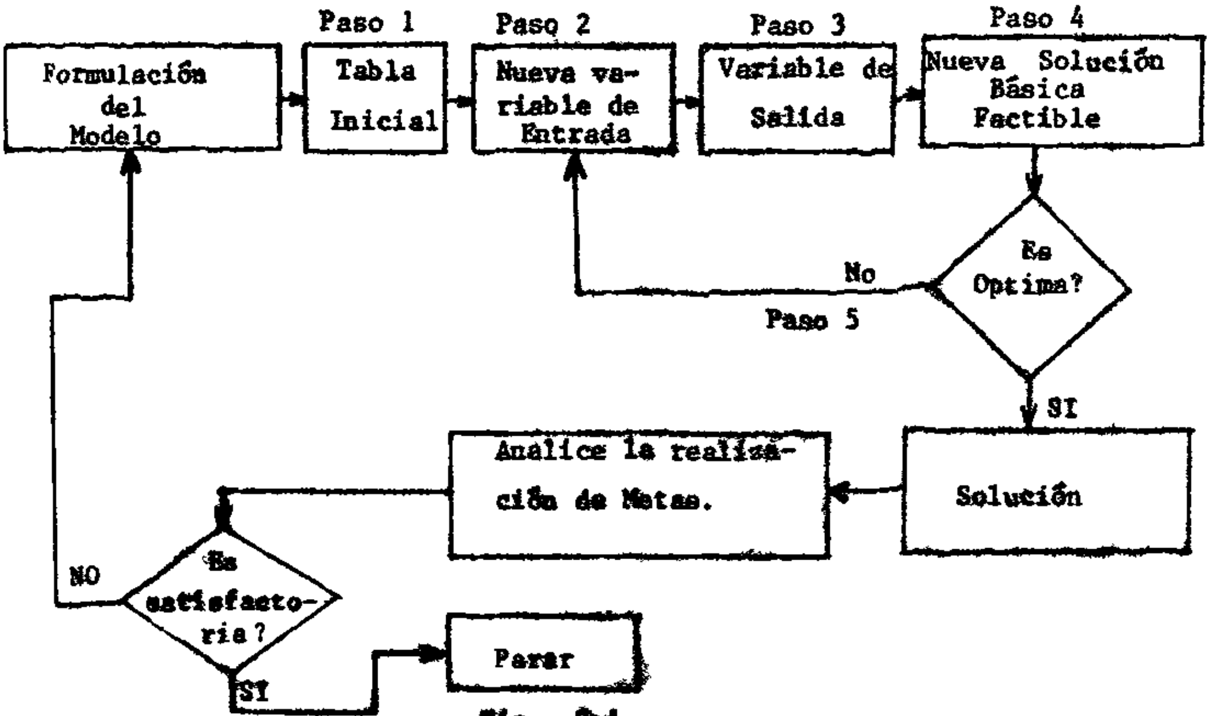

Fig. [illegible]

Ejemplo # 2.

Ahora, parece apropiado resolver un problema mas complicado de programación por metas por el método simplex. Vamos a examinar el caso de la tienda de discos que se presentó en el Capítulo # 2 como ejemplo # 1 y se resolvió por el método gráfico. El modelo formulado fué:

$$
\begin{array}{llr}
\text{Min} & Z = P_1d_1^- + P_2d_{21}^+ + 2P_3d_2^- + P_3d_3^- + P_4d_2^+ + 3P_4d_3^+ & \\
\text{S.r.} & 5X_1 + 2X_2 + d_1^- \qquad -d_1^+ & = 5,500 \\
(3\text{-}4) & X_1 \qquad +d_2^- \qquad -d_2^+ & = 800 \\
 & X_2 \qquad +d_3^- \qquad -d_3^+ & = 320 \\
 & d_{21}^- \qquad +d_2^+ \quad -d_{21}^+ & = 100 \\
 & X_1,\ X_2,\ d_1^-,\ d_2^-,\ d_3^-,\ d_{21}^-,\ d_1^+,\ d_2^+,\ d_3^+,\ d_{21}^+ & \geq 0
\end{array}
$$

El problema involucra cuatro factores de prioridad y 10 variables, dos - de decisión y ocho de desviación. Vamos a seguir los pasos del método - simplex de programación por metas descritos anteriormente.

1. OBTENGA LA TABLA INICIAL PARA EL PROBLEMA

La tabla (3-5) proporciona la tabla inicial para el problema. Todas- las variables de desviación negativas están en la solución base ini-- cial, como supusimos la solución inicial está en el orígen. La tabla inicial indica que la segunda y la cuarta meta están completamente al canzadas pero la primera y tercera no. En el orígen no hay horas de- trabajo para los vendedores de tiempo completo y los de medio tiempo. Por lo tanto, la segunda y cuarta metas, que se relacionan con el --- tiempo extra de los vendedores, deben estar completamente alcanzadas- en la solución inicial.

| $C_j$ | | | | | $P_1$ | $2P_3$ | $P_3$ | | | $P_4$ | $3P_4$ | $P_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $V$ | $C$ | $x_1$ | $x_2$ | $d_1^-$ | $d_2^-$ | $d_3^-$ | $d_{21}^-$ | $d_1^+$ | $d_2^+$ | $d_3^+$ | $d_{21}^+$ |
| $P_1$ | $d_1^-$ | 5500 | 5 | 2 | 1 | | | | −1 | | | |
| $2P_3$ | $d_2^-$ | 800 | 1 | | | 1 | | | | −1 | | |
| $P_3$ | $d_3^-$ | 320 | | 1 | | | 1 | | | | −1 | |
| | $d_{21}^-$ | 100 | | | | | | 1 | | 1 | | −1 |
| $Z_j - C_j$ | $P_4$ | 0 | | | | | | | | −1 | −3 | |
| | $P_3$ | 1920 | 2 | 1 | | | | | | −2 | −1 | |
| | $P_2$ | 0 | | | | | | | | | | −1 |
| | $P_1$ | 5500 | 5 | 2 | | | | | −1 | | | |

TABLA (3-5)

2. DETERMINE LA NUEVA VARIABLE DE ENTRADA

A través de un examen de los valores (Zj - Cj) en el nivel $P_1$, es aparente que la columna $X_1$ es la columna óptima, como $X_1$ tiene el valor más positivo (+5).

3. DETERMINE LA VARIABLE DE SALIDA DE LA SOLUCION BASE

Después de que se determinó la columna óptima, el renglón clave debe ser identificado encontrando el renglón con el mínimo valor cuando - las constantes son divididas entre los coeficientes de la columna óptima. En la tabla (3-5), el renglón $d_2^-$ es el renglón clave. Por - lo tanto en la siguiente tabla, $d_2^-$ será reemplazada por $X_1$ en la solución base.

4. DETERMINE LA NUEVA SOLUCION FACTIBLE BASICA

La tabla revisada es presentada en la tabla (3-6). Es fácil derivarlos nuevos valores del renglón clave ($d_2^-$) como los valores anteriores son divididos por el elemento pivote y este es la unidad (1). — Es aún más fácil derivar los nuevos valores en los renglones $d_3^-$ y - $d_{21}^-$ ya que permanecen iguales que los valores anteriores debido a - que había ceros en las intersecciones con la columna $X_1$. El único - renglón donde algunos cálculos son requeridos es $d_1^-$ porque existe - un coeficiente (5) en la columna óptima $X_1$.

| $C_j$ | | | | | $P_1$ | $2P_3$ | $P_3$ | | | $P_4$ | $3P_4$ | $P_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $V$ | $C$ | $x_1$ | $x_2$ | $d_1^-$ | $d_2^-$ | $d_3$ | $d_{21}^-$ | $d_1^+$ | $d_2^+$ | $d_3^+$ | $d_{21}^+$ |
| $P_1$ | $d_1^-$ | 1500 | | 2 | 1 | 5 | | | −1 | 5 | | |
| | $x_1$ | 800 | 1 | | | 1 | | | | −1 | | |
| $P_3$ | $d_3^-$ | 320 | | 1 | | | 1 | | | | −1 | |
| | $d_{21}^-$ | 100 | | | | | | 1 | | 1 | | −1 |
| $Z_j - C_j$ | $P_4$ | 0 | | | | | | | | −1 | 3 | |
| | $P_3$ | 320 | | 1 | | −2 | | | | | −1 | |
| | $P_2$ | 0 | | | | | | | | | | −1 |
| | $P_1$ | 1500 | | 2 | | 5 | | | −1 | 5 | | |

TABLA (3-6)

5. DETERMINE SI LA SOLUCION ES OPTIMA

A través de un análisis de la realización de las metas (valores Zj)- en la columna de constantes en la tabla (3-6), es evidente que aún - no es la solución óptima. Entonces se deben repetir los pasos dos- al cinco.

La tabla (3-7) presenta las restantes tablas de la solución simplex- del problema.

La solución óptima indica que las primeras tres metas están completamente alcanzadas pero la cuarta meta (minimización del tiempo extra- de los vendedores) no pudo ser alcanzada. La solución es, por lo -- tanto $X_1 = 900$ ; $X_2 = 500$ ; $d_2^+ = 100$, y $d_3^+ = 180$.

| $C$ | | | | | $P$ | $2P_4$ | $P_3$ | | | $P_4$ | $3P_4$ | $P$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | I | $C$ | $x$ | $x_2$ | $l_1$ | $d_2$ | $d_3$ | $d$ | $l_1^+$ | $d^+$ | $d_3^+$ | $d^+_1$ |
| $P_1$ | $d_1$ | 1000 | | 2 | 1 | 5 | | 5 | 1 | | | 5 |
| | $x_1$ | 900 | 1 | | | 1 | | 1 | | | | |
| $P$ | $d_3$ | 320 | | 1 | | | 1 | | | | 1 | |
| $P_4$ | $d_2^+$ | 100 | | | | | | 1 | | 1 | | 1 |
| $Z_j\ C_j$ | $P_4$ | 100 | | | | | | 1 | | | 3 | 1 |
| | $P_3$ | 320 | | 1 | | 2 | | | | | 1 | |
| | $P_.$ | 0 | | | | | | | | | | 1 |
| | $P$ | 1000 | | 2 | | 5 | | 5 | 1 | | | 5 |
| $P_2$ | $d_{21}^+$ | 200 | | 2/5 | 1/5 | 1 | | 1 | 1/5 | | | 1 |
| | $x_1$ | 1100 | 1 | 2 5 | 1 5 | | | | 1 5 | | | |
| $P_3$ | $d_3$ | 320 | | 1 | | | 1 | | | | 1 | |
| $P_4$ | $d_2^+$ | 300 | | 2 5 | 1/5 | 1 | | | 1/5 | 1 | | |
| $Z_j\ C_j$ | $P_4$ | 300 | | 2 5 | 1 5 | 1 | | | 1/5 | | 3 | |
| | $P_3$ | 320 | | 1 | | 2 | | | | | 1 | |
| | $P_2$ | 200 | | 2 5 | 1/5 | 1 | | 1 | 1/5 | | | |
| | $P_1$ | 0 | | | 1 | | | | | | | |
| $P_2$ | $d_{21}^+$ | 72 | | | 1/5 | 1 | 2/5 | 1 | 1/5 | | 2/5 | 1 |
| | $x_1$ | 972 | 1 | | 1/5 | | 2/5 | | 1/5 | | 2/5 | |
| | $x_2$ | 320 | | 1 | | | 1 | | | | 1 | |
| $P_4$ | $d_2^+$ | 172 | | | 1 5 | −1 | 2/5 | | −1/5 | 1 | 2/5 | |
| $Z_j\ C_j$ | $P_4$ | 172 | | | 1/5 | −1 | 2/5 | | 1 5 | | 13 5 | |
| | $P_3$ | 0 | | | | 2 | 1 | | | | | |
| | $P_2$ | 72 | | | 1/5 | 1 | 2 5 | 1 | 1/5 | | 2/5 | |
| | $P_1$ | 0 | | | 1 | | | | | | | |
| $3P_4$ | $d_3^+$ | 180 | | | 1/2 | 5/2 | 1 | 5 2 | 1/2 | | 1 | 5 2 |
| | $x_1$ | 900 | 1 | | | 1 | | 1 | | | | 1 |
| | $x_2$ | 500 | | 1 | 1/2 | 5 2 | | 5 2 | 1/2 | | | 5 2 |
| $P_4$ | $d_2^+$ | 100 | | | | | | 1 | | 1 | | 1 |
| $Z_j\ C_j$ | $P_4$ | 640 | | | 3/2 | 15/2 | 3 | 13 2 | 3/2 | | | 13/2 |
| | $P_3$ | 0 | | | | 2 | 1 | | | | | |
| | $P_2$ | 0 | | | | | | | | | | 1 |
| | $P_1$ | 0 | | | 1 | | | | | | | |

TABLA (3-7)

Ejemplo # 3.

Vamos a resolver ahora un problema más complejo de programación por metas con tres variables de decisión, 16 de desviación y cinco factor de prioridad preferenciales.

Una compañía fabricante de computadoras, produce tres diferentes tipos de estas: Alfa, Beta y Gamma. La producción de una computadora Alfa requiere de cinco horas en la línea de ensamble, una Beta requiere de ocho horas y una Gamma requiere de 12 horas. La capacidad de operación normal de la línea de ensamble es de 170 horas al mes. Los departamentos de mercadotecnia y contabilidad han estimado que las utilidades por unidad para los tres tipos de computadoras son $ 100,000 para la Alfa, $ 144,000 para la Beta y $ 252,000 para la Gamma. El departamento de mercadotecnia también reporta que la demanda es tal que la firma puede esperar vender todas las computadoras que sean producidas en el mes.

El presidente de la firma ha establecido las siguientes metas de acuerdo a su importancia:

1.- Evitar la baja utilización de la capacidad en horas de operación de la línea de ensamble.

2.- Satisfacer la demanda de un distrito de ventas para cinco computadoras Alfa, cinco Beta y ocho Gammas (deben ser asignados pesos diferenciales de acuerdo a los márgenes de utilidad neta entre los tres tipos de computadoras).

3.- Limitar el tiempo extra de la línea de ensamble a 20 horas.

4.- Satisfacer la meta de ventas para cada tipo de computadora: Alfa, - 10; Beta, 12 y Gamma, 10 (nuevamente se deben asignar pesos de a--- cuerdo al márgen de utilidad relativa de cada computadora).

5.- Minimizar el tiempo extra total de la línea de ensamble.

Basados en el problema establecido, se pueden formular las siguientes restricciones:

I) CAPACIDAD DE OPERACION NORMAL DE LA LINEA DE ENSAMBLE

La capacidad de operación normal de la línea de ensamble para el mes- es de 170 horas. Con esta capacidad, la firma produce tres tipos de computadoras. Las horas de operación total requeridas para producir las -- computadoras será simplemente una función del ritmo de producción (en número de horas) para una unidad de cada tipo de computadora. Así que podemos formular la capacidad normal de operación de la línea de ensamble- como:

$$(3\text{-}5) \qquad 5X_1 + 8X_2 + 12X_3 + d_1^- - d_1^+ = 170$$

donde:

$X_1$ = número de computadoras Alfa

$X_2$ = número de computadoras Beta

$X_3$ = número de computadoras Gamma

$d_1^-$ = baja utilización de la operación normal en horas de la - línea de ensamble

$d_1^+$ = tiempo extra de la línea de ensamble

II) RESTRICCIONES DE VENTAS

Primero la firma tiene que cumplir unas ordenes con un distrito de - ventas como sigue:

$$\begin{aligned} X_1 + d_2^- - d_2^+ &= 5 \\ X_2 + d_3^- - d_3^+ &= 5 \qquad (3\text{-}5A) \\ X_3 + d_4^- - d_4^+ &= 8 \end{aligned}$$

De aquí en delante, se supone que se pueden definir las variables sin - necesidad de escribir su significado más abajo. La firma también tiene las metas de ventas para el mes, las cuales son:

$$\begin{aligned} X_1 + d_5^- - d_5^+ &= 10 \\ X_2 + d_6^- - d_6^+ &= 12 \qquad (3\text{-}5B) \\ X_3 + d_7^- - d_7^+ &= 10 \end{aligned}$$

III) TIEMPO EXTRA DE LA LINEA DE ENSAMBLE

Ya se ha mencionado que frecuentemente, tenemos que introducir nuevas restricciones con el fin de definir variables de desviación que debemos-de minimizar para alcanzar ciertas metas. El presidente limitó el tiempo extra de la línea de ensamble a 20 horas. Como no tenemos una variable de desviación a minimizar con el fin de realizar esta meta, vamos a introducir la siguiente restricción:

(3-5c) $$d_1^+ + d_{11}^- - d_{11}^- = 20$$

donde:

$d_{11}^-$ = la diferencia entre el tiempo extra real de la línea de ensamble y las 20 horas admitidas de tiempo extra

$d_{11}^+$ = tiempo extra de la planta en exceso de 20 horas

Ahora, este problema puede ser formulado como un modelo de programación por metas:

Min. $Z = P_1 d_1^- + 20P_2 d_2^- + 18P_2 d_3^- + 21P_2 d_4^- + P_3 d_{11}^+ + 20P_4 d_5^- + 18P_4 d_6^- +$

S.r. $+ 21P_4 d_7^- + P_5 d_1^+$

(3-5D)
$$\begin{array}{lllllllll}
5X_1 & + 8X_2 & + 12X_3 & + d_1^- & & & -d_1^+ & & = 170 \\
X_1 & & & +d_2^- & & & -d_2^+ & & = 5 \\
 & X_2 & & +d_3^- & & & -d_3^+ & & = 5 \\
 & & X_3 & +d_4^- & & & -d_4^+ & & = 8 \\
X_1 & & & & +d_5^- & & -d_5^+ & & = 10 \\
 & X_2 & & & +d_6^- & & -d_6^+ & & = 12 \\
 & & X_3 & & +d_7^- & & -d_7^+ & & = 10 \\
 & & & & d_{11}^- & + d_1^+ & & -d_{11}^+ & = 20
\end{array}$$

$$X_1, X_2, X_3, d_1^-, d_2^-, d_3^-, d_4^-, d_5^-, d_6^-, d_7^-, d_{11}^-, d_1^+, d_2^+, d_3^+, d_4^+, d_5^+, d_6^+, d_7^+, d_{11}^+ \geq 0$$

En la función objetivo del modelo anterior asignamos pesos diferencia-- les a los factores de prioridad segundo y cuarto. Recordemos que el -- criterio usado para asignar los pesos fué el márgen de utilidad relativa para los tres tipos de computadora. Aquí, hacemos la suposición de- que el costo de operación de la línea de ensamble es proporcional a - - cual computadora se está produciendo en la línea. La utilidad marginal neta, por lo tanto, será simplemente determinada dividiendo la utilidad entre las hojas de operación requeridas para producir cada tipo de computadora. Para la Alfa, la utilidad es $ 100,000 por unidad y esta requiere de 5 horas de operación en la línea de ensamble. Entonces, la - utilidad por hora de la línea de ensamble para la Alfa es $ 20,000. - - Similarmente, las utilidades por hora de la línea de ensamble para la - Beta y Gamma será de $ 18,000 y $ 21,000 respectivamente. Los pesos diferenciales estan basados en esto.

Se presentan las tablas inicial y final (3-8) y (3-9) del método simplex para la solución de este problema. En la tabla final solución tabla -- (3-9) se puede ver que las primeras tres metas fueron totalmente alcanzadas, mientras que las últimas dos no. La solución es por lo tanto:

$X_1 = 5$ ; $X_2 = \frac{49}{8}$ ; $X_3 = \frac{39}{4}$ ; $d_1^+ = 20$; $d_3^+ = \frac{9}{8}$ ; $d_5^- = 5$

$d_6^- = \frac{47}{8}$ y $d_7^- = \frac{1}{3}$

| $C_j$ | | | | | | $P_1$ | $20P_2$ | $18P_2$ | $21P_2$ | $20P_4$ | $18P_4$ | $21P_4$ | | $P_5$ | | | | | | | $P_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $V$ | $C$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $d_1^-$ | $d_2^-$ | $d_3^-$ | $d_4^-$ | $d_5^-$ | $d_6^-$ | $d_7$ | $d_{11}^-$ | $d_1^+$ | $d_2^+$ | $d_3^+$ | $d_4^+$ | $d_5^+$ | $d_6^+$ | $d_7^+$ | $d_{11}^+$ |
| $P_1$ | $d_1^-$ | 170 | 5 | 8 | 12 | 1 | | | | | | | | −1 | | | | | | | |
| $20P_2$ | $d_2^-$ | 5 | 1 | | | | 1 | | | | | | | | −1 | | | | | | |
| $18P_2$ | $d_3^-$ | 5 | | 1 | | | | 1 | | | | | | | | −1 | | | | | |
| $21P_2$ | $d_4^-$ | 8 | | | 1 | | | | 1 | | | | | | | | −1 | | | | |
| $20P_4$ | $d_5^-$ | 10 | 1 | | | | | | | 1 | | | | | | | | 1 | | | |
| $18P_4$ | $d_6^-$ | 12 | | 1 | | | | | | | 1 | | | | | | | | −1 | | |
| $21P_4$ | $d_7^-$ | 10 | | | 1 | | | | | | | 1 | | | | | | | | −1 | |
| | $d_{11}^-$ | 20 | | | | | | | | | | | 1 | 1 | | | | | | | −1 |
| $Z_j - C_j$ | $P_5$ | 0 | | | | | | | | | | | | −1 | | | | | | | |
| | $P_4$ | 626 | 20 | 18 | 21 | | | | | | | | | | | | | −20 | −18 | 21 | |
| | $P_3$ | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 |
| | $P_2$ | 358 | 20 | 18 | 21 | | | | | | | | | | 20 | −18 | 21 | | | | |
| | $P_1$ | 170 | 5 | 8 | 12 | | | | | | | | | −1 | | | | | | | |

TABLA (3-8)

| $C_j$ | | | | | | $P_1$ | $20P_2$ | $18P_2$ | $21P_2$ | $20P_4$ | $18P_4$ | $21P_4$ | | $P_5$ | | | | | | | $P_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $V$ | $C$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $d_1^-$ | $d_2^-$ | $d_3^-$ | $d_4^-$ | $d_5^-$ | $d_6^-$ | $d_7^-$ | $d_{11}^-$ | $d_1^+$ | $d_2^+$ | $d_3^+$ | $d_4^+$ | $d_5^+$ | $d_6^+$ | $d_7^+$ | $d_{11}^+$ |
| | $x_2$ | 49/8 | | 1 | | 1/8 | −5/8 | | 3/2 | | | | | | 5/8 | | 3/2 | | | | |
| | $x_1$ | 5 | 1 | | | | 1 | | | | | | | | −1 | | | | | | |
| $21P_4$ | $d^-$ | 1/3 | | | | | | | −2/3 | | | 1 | −1/12 | | −5/12 | | 1 | | | −1 | 1 12 |
| | $x_3$ | 39/4 | | | 1 | | | | 3/2 | | | | 1/12 | | | | | −2 3 | | 1 | 1,12 |
| $20P_4$ | $d_5$ | 5 | | | | | −1 | | | 1 | | | | | 1 | | | −1 | | | |
| $18P_4$ | $d_6$ | 47/8 | | | | 1/8 | 5/8 | | 3/2 | | 1 | | | | −5/8 | | −3/2 | | −1 | | |
| | $d_3^+$ | 9/8 | | | | 1/8 | −5/8 | −1 | −3/2 | | | | | | | 1 | 3/2 | | | | |
| | $d_1^+$ | 20 | | | | | | | | | | | 1 | 1 | | | | | | | −1 |
| $Z_j - C_j$ | $P_5$ | 20 | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | −1 |
| | $P_4$ | 154 | | | | −9/4 | −35/4 | | 13 | | | | 7/4 | | | | −6 | −20 | −18 | −21 | 7 4 |
| | $P_3$ | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | −1 |
| | $P_2$ | 0 | | | | | −20 | −18 | −21 | | | | | | | | | | | | |
| | $P_1$ | 0 | | | | −1 | | | | | | | | | | | | | | | |

TABLA (3-9)

## ALGUNAS COMPLICACIONES Y SU RESOLUCION

Hay algunas complicaciones que a menudo surgen en los problemas de programación por metas. Ellas se discutirán en seguida:

1.- CONSTANTES NO POSITIVAS

Para explicar el problema de constantes del lado derecho no positivas, vamos a considerar la restricción que se muestra en seguida:

$$(3\text{-}6) \qquad -5X_1 - X_2 + d_1^+ - d_1^+ = -25$$

En la tabla inicial del método simplex de programación por metas, - se supone que la solución es en el orígen. Por lo tanto, la variable de desviación $d_1^-$ tomará un valor de -25. Sin embargo, el método simplex requiere la condición de variables no negativas ($X_i$; $d_i^-$, $d_1^+ \geq 0$); entonces, $d_1^- = -25$ no está permitido. Con el fin de facilitar la solución inicial podemos multiplicar ambos lados por (-1). La restricción de la meta pasa a ser:

$$(3\text{-}7) \qquad 5X_1 + X_2 + d_1^+ - d_1^- = 25$$

Si la meta es alcanzar exactamente -25, de la restricción original, esto puede ser fácilmente alcanzado minimizando ambas $d_1^-$ y $d_1^+$ al -- mismo nivel de prioridad. Sin embargo, si la meta es hacer que la-restricción produzca -25 o mas, $d_1^-$ debe ser minimizada en (3-6) pero en la restricción de la meta revisada (3-7), $d_1^+$ debe ser minimizada para derivar el mismo efecto. Similarmente suponiendo un va-- lor de -25 a menos de la restricción, $d_1^+$ debe ser minimizada en - - (3-6) y $d_1^-$ debe ser minimizada en la ecuación revisada (3-7).

2.- EMPATE PARA LA VARIABLE DE ENTRADA

En cualquier problema de programación por metas puede fácilmente suceder durante las iteraciones que dos o más columnas tengan exactamente el mismo valor (Zj - Cj) positivo en el más alto nivel de metas no alcanzadas. Como se explicó antes cuando suceda esto, la determinación de la columna óptima y consecuentemente de la variable de entrada está basada en los valores (Zj - Cj) en los niveles de prioridad más bajos. Si el empate aún así no puede ser roto, la selección entre las variables contendientes debe ser hecha arbitrariamente. La otra variable generalmente será introducida dentro de la solución base en las iteraciones subsiguientes.

3.- EMPATE PARA LA VARIABLE DE SALIDA

Para determinar la variable que saldrá de la solución base, las constantes deben ser divididas entre los coeficientes de la columna óptima y debemos determinar entonces el renglón con el mínimo cociente positivo. Si hay dos o más renglones con idénticos cocientes mínimos positivos, surge el problema de degeneración. La resolución de el problema de degeneración debe ser decidida determinando que renglón tiene la variable con factor de prioridad más alto.

Seleccionando la variable con el factor de prioridad más alto como la variable de salida, el proceso de solución puede ser acortado como las metas de más alta prioridad serán alcanzadas más rápidamente.

4.- SOLUCION ILIMITADA

Es posible que debido a una estructura de prioridades no realista - del que toma las decisiones o por falta de restricciones, el proble ma puede admitir que una o más variables se incrementen sin ningún- límite. En la mayoría de los problemas reales, sin embargo, esta - situación raramente ocurre, como las metas tienden a ponerse más -- altas que niveles fácilmente alcanzables dentro del medio ambiente- de decisión existente. La solución ilimitada si es que ocurre, tam bién proporciona algún dicernimiento en analizar la estructura de - metas del que toma las decisiones.

Es frecuente el caso de que restricciones importantes sean omitidas en el problema cuando es obtenida una solución ilimitada.

5.- SOLUCIONES OPTIMAS ALTERNATIVAS

Es posible que dos o más puntos proporcionen soluciones óptimas que- alcancen exactamente el mismo nivel de metas. Esto no debe ocurrir- si es que se respeta lo siguiente: (1) Que haya solamente una varia- ble de desviación simple (meta simple) en cada nivel de prioridad -- preferencial y (2) que sean asignados pesos diferenciales entre las- submetas al mismo nivel de prioridad cuando hay más de una meta sim- ple en cada nivel de prioridad. Para ilustrar este punto, examine- mos el caso de la tienda de discos que se discutió como ejemplo # 2- en este capítulo. Suponiendo que el gerente ha alterado su estructu ra de prioridades de tal manera que el modelo es formulado como si--

gue:

$$\text{Min.} \quad Z = P_1 d_1^- + P_2 d_{21}^+ + 2P_3 d_2^- + P_3 d_3^- + P_4 d_2^+ + P_4 d_3^+$$

S.r.

$$(3\text{-}8) \quad \begin{array}{lll} 5X_1 + 2X_2 + d_1^- \quad -d_1^+ & = & 5{,}500 \\ X_1 \quad +d_2^- \quad -d_2^+ & = & 800 \\ X_2 \quad +d_3^- \quad -d_3^+ & = & 320 \\ d_{21}^- + +d_2^+ \quad -d_{21}^- & = & 100 \\ X_1, X_2, d_1^-, d_2^-, d_3^-, d_{21}^-, d_1^+, d_2^+, d_3^+, d_{21}^+ & \geq & 0 \end{array}$$

La función objetivo de el modelo indica que el gerente no asignó pesos diferenciales en la minimización del tiempo extra entre los vendedores de tiempo completo y medio tiempo. La solución gráfica del problema es presentada en la figura (3-2).

Las primeras tres metas pueden ser completamente alcanzadas en cualquier punto A o B o cualquier punto en la línea recta que une a A y B, pero la cuarta meta no puede ser realizada, debido a que la suma del tiempo extra no puede ser eliminado completamente. La solución óptima alternativa podría ser evitada si el gerente de la tienda de discos asignara pesos diferenciales en la minimización del tiempo extra de acuerdo con los costos de oportunidad involucrados.

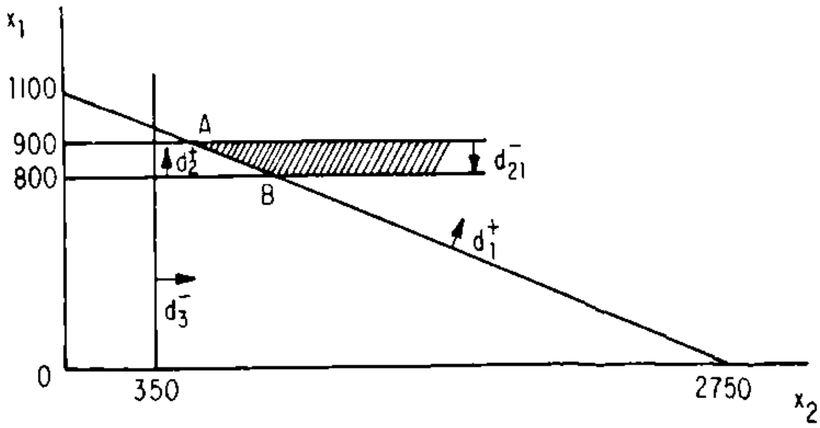


Fig. 3-2

# CAPITULO # IV

## UN MODELO DE PROGRAMACION POR METAS PARA DISTRIBUCION DE RECURSOS ACADEMICOS

### Introducción

La aproximación de programación por metas parece ser una de las técnicas más apropiadas en el desarrollo de un modelo para alcanzar metas múltiples, competitivas y a menudo conflictivas con diferentes prioridades. Este es el propósito de este capítulo, y de esta tesis, presentar un modelo de programación por metas para una distribución óptima de recursos en instituciones de alto aprendizaje (o de educación superior).- No obstante que es posible formular un modelo para un período de tiempo múltiple bastante complejo que sirva para el propósito de planeación a largo plazo para una universidad entera, el enfoque de este estudio está limitado a la planeación de una facultad dentro de la universidad. - Mas aún el tiempo de planeación bajo consideración está limitado a un año. Este enfoque limitado admite una clara presentación del desarrollo de la metodología del modelo, y de la aplicación potencial de este estudio. Una vez que el modelo básico esté completo para un año, este puede ser extendido (no obstante que no es una tarea simple) para un tiempo mayor pronosticando cambios de los parámetros.

### El Modelo General

Será introducido primeramente un modelo general de planeación para distribución de recursos de una facultad. En el punto siguiente se aplica rá el modelo en un ejemplo numérico. Para el desarrollo del modelo de-- programación por metas, se deben examinar las siguientes variables, constantes y restricciones:

VARIABLES

$X_1$ = Número de asistentes investigadores graduados

$X_2$ = Número de asistentes de maestros graduados

$X_3$ = Número de instructores

$X_4$ = Número de profesores asistentes sin grado

$X_5$ = Número de profesores asociados sin grado

$X_6$ = Número de profesores de tiempo completo sin grado

$X_7$ = Número de profesores de medio tiempo sin grado

$X_8$ = Número de profesores especiales sin grado

$X_9$ = Número de personal administrativo

$Y_1$ = Número de profesores asistentes con grado

$Y_2$ = Número de profesores asociados con grado

$Y_3$ = Número de profesores de tiempo completo con grado

$Y_4$ = Número de profesores de medio tiempo con grado

$Y_5$ = Número de profesores especiales con grado

$W_2$ = Incremento total de la nómina del año anterior, compuesto del incremento salarial de profesores, administrativos y asistentes graduados.

CONSTANTES

$a_1$ = Porcentaje del personal académico que está clasificado como profesores de tiempo completo.

$a_2$ = Porcentaje del personal académico a nivel licenciatura con grado.

$a_3$ = Porcentaje del personal académico a nivel graduados con grado.

$a_4$ = Número estimado de horas crédito de estudiantes de licenciatura requeridas por sesión.

$a_5$ = Número estimado de horas crédito de estudiantes de graduados requeridas por sesión.

$a_6$ = Proporción deseada profesor/estudiante de licenciatura.

$a_7$ = Proporción deseada profesor/estudiante de graduados

$a_8$ = Proporción deseada profesor/personal administrativo.

$a_9$ = Proporción deseada profesor/asistente investigador graduado.

$b_{14}$ = Número de estudiantes esperados de licenciatura para el próximo año escolar.

$b_{15}$ = Número de estudiantes esperados de graduados para el próximo año escolar.

$b_{16}$ = Porcentaje de incremento salarial deseado para asistentes graduados.

$b_{17}$ = Porcentaje de incremento salarial deseado para profesores.

$b_{18}$ = Porcentaje de incremento salarial deseado para personal administrativo.

Cargas de enseñanza máximas, proporción deseada de cada tipo de profesores y salario promedio definidos como:

CARGAS DE ENSEÑANZA

| Variable | Proporción | Licenciatura | Graduados | Salario |
|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | $C_1$ | $b_1$ | $b'_1$ | $S_1$ |
| $X_2$ | $C_2$ | $b_2$ | $b'_2$ | $S_1$ |
| $X_3$ | $C_3$ | $b_3$ | $b'_3$ | $S_2$ |
| $X_4$ | $C_4$ | $b_4$ | $b'_4$ | $S_3$ |
| $X_5$ | $C_5$ | $b_5$ | $b'_5$ | $S_4$ |
| $X_6$ | $C_6$ | $b_6$ | $b'_6$ | $S_5$ |
| $X_7$ | $C_7$ | $b_7$ | $b'_7$ | $S_6$ |
| $X_8$ | $C_8$ | $b_8$ | $b'_8$ | $S_7$ |
| $X_9$ | — | — | — | $S_8$ |
| $Y_1$ | $C_9$ | $b_9$ | $b'_9$ | $S_3$ |
| $Y_2$ | $C_{10}$ | $b_{10}$ | $b'_{10}$ | $S_4$ |
| $Y_3$ | $C_{11}$ | $b_{11}$ | $b'_{11}$ | $S_5$ |
| $Y_4$ | $C_{12}$ | $b_{12}$ | $b'_{12}$ | $S_6$ |
| $Y_5$ | $C_{13}$ | $b_{13}$ | $b'_{13}$ | $S_7$ |

Restricciones

A. Acreditación

1.- Un cierto porcentaje del personal académico deben ser profesores de tiempo completo.

$$(4\text{-}1) \qquad \left(\sum_{i=3}^{6} X_i + X_8 + \sum_{i=1}^{3} Yi + Y_5\right) / \left(\sum_{i=2}^{8} Xi + \sum_{i=1}^{5} Yi\right) \geq a_i$$

donde se supone que el denominador es positivo en todas las restricciones.

2. Un porcentaje dado de profesores disponibles para licenciatura v obligaciones o actividades de enseñanza en graduados son usualmente requeridos para poseer grado. Si suponemos para este modelo que de $X_2$ a $X_7$ y de $Y_1$ a $Y_3$ están disponibles para enseñar asignaturas de licenciatura, y $X_8$ y de $Y_1$ a $Y_5$ están disponibles para responsabilidades de enseñanza en graduados, podemos escribir:

$$\sum_{i=1}^{3} Yi \,/ \left(\sum_{i=2}^{7} Xi + \sum_{i=1}^{3} Yi\right) \geq a_2$$

(4-2)

$$\sum_{i=1}^{5} Yi \,/ \left(X_8 + \sum_{i=1}^{5} Yi\right) \geq a_3$$

3. Hay usualmente un número máximo de horas crédito estudiante por sesión (para ambos, licenciatura y graduados) que un profesor debe enseñar. No es necesario formular una restricción separada para este requerimiento como este es fácilmente incorporable dentro de restricciones siguientes seleccionando tamaños de clase deseados y cargas de enseñanza.

B. NUMERO TOTAL DE PERSONAL ACADEMICO

Uno de los más importantes factores para determinar los requerimien--

tos de personal académico es el número estimado de horas crédito estudiante (para ambos, licenciatura y graduados) que se necesitan - por sesión. Con esta información más las cargas máximas de enseñanza deseadas de los profesores, los requerimientos de personal académico pueden ser determinados.

$$\sum_{i=2}^{7} bi\ Xi + \sum_{i=1}^{5} bi + 8\ Yi \geq a_4 \quad \text{(licenciatura)}$$

(4-3)

$$\sum_{i=2}^{7} bi'\ Xi + \sum_{i=1}^{5} bi' + 8\ Yi \geq a_5 \quad \text{(graduados)}$$

Otro aspecto a ser considerado en la determinación de los requerimientos de personal académico es la proporción deseada profesor/estudiante.

$$\left(\sum_{i=2}^{7} Xi + \sum_{i=1}^{3} Yi\right)/b_{14} \geq a_6 \quad \text{(licenciatura)}$$

(4-4)

$$\left(X_8 + \sum_{i=1}^{5} Yi\right)/\ b_{15} \geq a_7 \quad \text{(graduados)}$$

C. DISTRIBUCION DEL PERSONAL ACADEMICO

Es necesario imponer algunas restricciones en la distribución del -- personal académico. Si no hubiera restricciones, el modelo llamaría por el personal académico en términos de cargas de enseñanza, salario y acreditación, por ejemplo, los profesores asistentes con grado y los instructores. En este modelo, supondremos que la facultad desea minimizar el número de personal académico sin grado y maximizaraquéllos con grado.

$$(4\text{-}5)\qquad \begin{aligned} &\prod_{i=2}^{8} Ci\ T \leq \prod_{i=2}^{8} Xi \\ &C_{12}\ T \leq Y_4 \\ &\prod_{i=1}^{3} Ci\ T \geq \prod_{i=1}^{3} Yi \\ &C_{13}\ T \geq Y_5 \end{aligned}$$

donde $\pi$ representa producto de los términos indicados y T representa:

$$\sum_{i=2}^{8} Xi + \sum_{i=1}^{5} Yi$$

D. NUMERO DE PERSONAL ADMINISTRATIVO

Debido a la gran cantidad de trabajos de mecanografía requeridos por el personal académico, es imperativo, si se quieren evitar resagos y cuéllos de botella, que un personal administrativo adecuado sea pro-- porcionado. Este objetivo puede ser incorporado en el modelo dise-- nando una restricción que refleje una proporción deseada profesor/-- personal administrativo.

$$(4\text{-}6)\qquad \sum_{i=2}^{8} Xi + \sum_{i=1}^{5} Yi) \,/\, X_9 \geq a_8$$

E. NUMERO DE ASISTENTES INVESTIGADORES GRADUADOS

Para proporcionar el soporte adecuado en lo que respecta a investi-- gación para el personal académico, es deseado asignar asistentes investigadores graduados a los profesores.

Esto puede ser manejado introduciendo una restricción para la proporción deseada profesores/asistentes investigadores graduados.

(4-7) $$\left(\sum_{i=3}^{8} Xi + \sum_{i=1}^{5} Yi\right) / Xi \geq a_9$$

F. INCREMENTO SALARIAL

Para mantener un personal adecuado, es necesario proporcionar aumentos salariales periódicos. La restricción para el incremento nominal es:

(4-8) $$b_{16}\left(S_1 \sum_{i=1}^{2} Xi\right) + b_{17}\left(S_2X_3 + \sum_{i=3}^{7} Si\ X_{i+1} + \sum_{i=3}^{7} Si\ Y_{i-2}\right) + b_{18}\left(S_8X_9\right) \leq w$$

G. LA NOMINA TOTAL PRESUPUESTADA

El incremento en los salarios del personal representa solamente una faceta del presupuesto entero. La nómina total presupuestada es una preocupación mayor en una situación donde están involucrados recursos limitados. La restricción para la nómina total puede ser expresada:

(4-9) $$S_1 \sum_{i=1}^{2} Xi + S_2X_3 + \sum_{i=3}^{7} Si\ X_{i+1} + \sum_{i=3}^{7} Si\ Y_{i-2} + S_8Y_9 + w = p$$

donde p representa la nómina total presupuestada.

FUNCION OBJETIVO

La función objetivo es minimizar desviaciones, ya sean negativas o positivas de un conjunto de metas con ciertos factores de prioridad preferenciales asignados por el director de la facultad de acuerdo con políticas universitarias, condiciones existentes y su juicio.

UN EJEMPLO NUMERICO

Un ejemplo numérico simplificado se presentará para demostrar la aplicación del modelo general. Supongamos que el Director de una Facultad de Administración en una universidad proporciona la siguiente estructura de prioridades para metas académicas además de información sobre constantes.

A. ESTRUCTURA DE PRIORIDADES

$P_1$ = Mantener los requerimientos necesarios para acreditación basados en las regulaciones de acreditación y las políticas académicas del director.

$P_2$ = Asegurar incrementos de salario adecuados para el personal académico, asistentes graduados y personal administrativo general.

$P_3$ = Asegurar un número adecuado de profesores cumpliendo con las proporciones deseadas de profesores/estudiantes y teniendo instrucción disponible para las horas crédito necesarias de los estudiantes. Los requerimientos de profesores/estudiantes para graduados son considerados doblemente importantes que los requerimientos para licenciatura (hay que asignar diferentes pesos en el nivel $P_3$ en la función objetivo).

$P_4$ = Alcanzar una distribución deseable del personal académico con respecto a categoría (rango).

$P_5$ = Mantener una proporción deseada profesor/personal administrativo.

$P_6$ = Mantener una proporción deseada profesor/asistente investigador-graduado.

$P_7$ = Minimizar costos

Cargas de Enseñanza, Salarios Promedio, Proporciones deseadas del Personal total.

| | Cargas de Enseñanza | | Proporción Deseada | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Variable | Licenciatura | Graduados | Máxima | Mínima | Salario |
| $X_1$ | 0 | 0 | - | - | $ 3,000.00 |
| $X_2$ | 6 | 0 | 7% | - | 3,000.00 |
| $X_3$ | 12 | 0 | 7 | - | 8,000.00 |
| $X_4$ | 9 | 0 | 15 | - | 13,000.00 |
| $X_5$ | 9 | 0 | 5 | - | 15,000.00 |
| $X_6$ | 6 | 0 | 2 | - | 17,000.00 |
| $X_7$ | 3 | 0 | 1 | - | 2,000.00 |
| $X_8$ | 0 | 3 | - | 1% | 30,000.00 |
| $X_9$ | - | - | - | - | 4,000.00 |
| $Y_1$ | 6 | 3 | - | 21 | 13,000.00 |
| $Y_1$ | 6 | 3 | - | 14 | 15,000.00 |
| $Y_2$ | 3 | 3 | - | 23 | 17,000.00 |
| $Y_3$ | 0 | 3 | 2 | - | 2,000.00 |
| $Y_5$ | 0 | 3 | - | 2 | 30,000.00 |

B. RESTRICCIONES

1. Restricciones para Acreditación

Se requiere que el 75% del personal académico sean profesores de tiempo completo de acuerdo a las regulaciones de acreditación y las políticas académicas del director. Como en el modelo $X_3$ a $X_6$, $X_8$, $Y_1$ a $Y_3$, $Y_5$ son considerados de tiempo completo, podemos escribir:

$$(4\text{-}10) \quad \sum_{i=3}^{6} Xi + X_8 + \sum_{i=1}^{3} Yi + Y_5 - 0.75 \left( \sum_{i=1}^{8} Xi + \sum_{i=1}^{5} Yi \right) + d_1^- - d_1^+ = 0$$

También es requerido que al menos el 40% del personal académico que enseña a nivel licenciatura tenga grado. Esto es expresado como:

$$(4\text{-}11) \quad \sum_{i=1}^{5} Yi - 0.40 \left( \sum_{i=2}^{7} Xi + \sum_{i=1}^{3} Yi \right) + d_2^- - d_2^+ = 0$$

También es requerido que al menos el 75% del personal académico que enseña a nivel graduados tenga grado. Esto es expresado como:

$$(4\text{-}12) \quad \sum_{i=1}^{5} Yi - 0.75 \left( X_8 + \sum_{i=1}^{6} Yi \right) + d_3^- - d_3^+ = 0$$

2. Restricciones para número de personal académico

Para determinar los requerimientos de personal académico, es necesario pronosticar el número total de horas crédito estudiante de instrucción que se necesita. En este ejemplo el número de estudiantes esperado es 1,820, el número promedio de horas crédito/estudiante llevados en la facultad es 10, y el tamaño de clase deseado es puesto en 20. Por lo tanto, por medio de la siguiente fórmula pueden ser calculadas 910 horas crédito estudiante totales.

$$\left(\begin{array}{c}\text{Número de estudiantes}\\ \text{esperado}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\text{Número de horas cré-}\\ \text{dito/estudiante}\end{array}\right)\Big/\left(\begin{array}{c}\text{Tamaño de clase}\\ \text{deseado}\end{array}\right)$$

(4-13) $6X_2 + 12X_3 + 9X_4 + 6X_6 + 3X_7 + 6Y_1 + 6Y_2 + 3Y_3 + d_4^- - d_4^+ = 910$

Para las horas crédito/estudiante de instrucción para graduados, se pronosticaron 100 horas por sesión. El procedimiento es similar al pronóstico de licenciatura y la restricción viene a ser:

(4-14) $3X_8 + 3Y_1 + 3Y_2 + 3Y_3 + 3Y_4 + 3Y_5 + d_5^- - d_5^+ = 100$

El siguiente aspecto a ser considerado en la determinación del personal académico requerido es la proposición deseada profesor/estudiante a ambos niveles, licenciatura y graduados. Los pronósticos de número esperado de estudiantes son 1820 para licenciatura y 100 para graduados. La proporción deseada profesor/estudiante para licenciatura es 1/20 y la proporción deseada profesor/estudiante para graduados es 1/10. Esas restricciones vienen a ser para licenciatura.

(4-15) $\sum_{i=2}^{7} Xi + \sum_{i=1}^{3} Yi + d_6^- - d_6^+ = (0.05)\ (1820) = 91$

y para graduados

(4-16) $X_8 + \sum_{i=1}^{8} Yi + d_7^- - d_7^+ = (0.10)\ (100) = 10$

3. Restricciones para la Distribución del Personal Académico

Es necesario imponer algunas restricciones en la distribución del -- personal académico de acuerdo a la proporción deseada del personal - académico total para cada tipo de personal.

(4-17)

$$
\begin{aligned}
0.07T - X_2 + d_8^- - d_8^+ &= 0\\
0.07T - X_3 + d_9^- - d_9^+ &= 0\\
0.15T - X_4 + d_{10}^- - d_{10}^+ &= 0\\
0.05T - X_5 + d_{11}^- - d_{11}^+ &= 0\\
0.02T - X_6 + d_{12}^- - d_{12}^+ &= 0\\
0.01T - X_7 + d_{13}^- - d_{13}^+ &= 0\\
0.01T - X_8 + d_{14}^- - d_{14}^+ &= 0\\
0.21T - Y_1 + d_{15}^- - d_{15}^+ &= 0\\
0.14T - Y_2 + d_{16}^- - d_{16}^+ &= 0\\
0.23T - Y_3 + d_{17}^- - d_{17}^+ &= 0\\
0.02T - Y_4 + d_{18}^- - d_{18}^+ &= 0
\end{aligned}
$$

donde

$$T = \sum_{i=2}^{8} Xi + \sum_{i=1}^{5} Yi$$

Con el fin de asegurar personal administrativo adecuado para el trabajo administrativo y de oficina, la proporción deseada profesor/personal administrativo es puesta a 4 por 1 por el director. La restricción es entonces:

(4-18) $$T - 4X_9 + d_{20}^- - d_{20}^+ = 0$$

4. Número de Asistentes Investigadores Graduados

Se fijó la proporción deseada profesor/asistente investigador graduado a 5 por 1. Entonces la restricción es:

$$(4\text{-}19)\quad \sum_{i=3}^{8} Xi + \sum_{i=1}^{5} Yi - 5X_1 + d_{21}^{-} - d_{21}^{+} = 0$$

5. Costo del Personal Académico, Asistentes Graduados y Personal Administrativo.

La restricción para el incremento salarial total puede ser expresada como:

$$(4\text{-}20)\quad \begin{aligned} & 0.06\ (3{,}000 \sum_{i=1}^{2} Xi) + 0.08\ (8{,}000\ X_3 + 13{,}000\ X_4 \\ & + 15{,}000\ X_5 + 17{,}000\ X_6 + 2{,}000\ X_7 + 30{,}000\ X_8 \\ & + 3{,}000\ Y_1 + 15{,}000\ Y_2 + 17{,}000\ Y_3 + 2{,}000\ Y_4 \\ & + 30{,}000\ Y_5) + 0.06\ (4{,}000\ X_9) - w + d_{22}^{-} - d_{22}^{+} = 0 \end{aligned}$$

donde hay un 6% de incremento para estudiantes graduados y personal administrativo y un 8% de incremento para personal académico.

La restricción para la nómina total de la facultad completa será:

$$(4\text{-}21)\quad \begin{aligned} & 3{,}000\ x_1 + 3{,}000\ X_2 + 8{,}000\ X_3 + 13{,}000\ X_4 + 5{,}000\ X_5 \\ & + 17{,}000\ X_6 + 2{,}000\ X_7 + 30{,}000\ X_8 + 13{,}000\ Y_1 + 15{,}000\ Y_2 \\ & + 17{,}000\ Y_3 + 2{,}000\ Y_4 + 30{,}000\ Y_5 + 4{,}000\ X_9 + w + d_{23}^{-} - d_{23}^{+} = 0 \end{aligned}$$

C. Función Objetivo

$$\text{Min.} \quad Z = P_1 \sum_{i=1}^{3} d\bar{i} + P_2\, d_{22}^- + 2P_3 d_7^- + P_3 d_4^-$$

$$(4\text{-}22) \qquad + P_3 d_6^- + P_4 \sum_{i=8}^{13} d\bar{i} + P_4\, d_{18}^- + P_4 \sum_{i=14}^{17} di^+$$

$$+ P_4 d_{19}^+ + P_5\, d_{20}^+ + P_6 d_{21}^+ + P_7\, d_{23}^+$$

D. Solución

La solución a este modelo de programación por metas fué la siguiente:

Realización de Metas

| | |
|---|---|
| Acreditación | Alcanzada |
| Incremento Salarial | " |
| Proporciones profesores/estudiantes | " |
| Proporción profesores/personal administrativo | " |
| Distribución del Personal | " |
| Académico | " |
| Proporción profesores/asistentes graduados | " |
| Minimizar costo | \$ 2;471,000 |

Variables

| | | |
|---|---|---|
| $X_1 = 32$ | $X_6 = 0$ | $Y_1 = 42$ |
| $X_2 = 10$ | $X_7 = 1$ | $Y_2 = 20$ |
| $X_3 = 10$ | $w = \$176{,}000$ | $Y_3 = 34$ |
| $X_4 = 22$ | $X_8 = 1$ | $Y_4 = 0$ |
| $X_5 = 7$ | $X_9 = 38$ | $Y_5 = 3$ |

CONCLUSION:

La aproximación de programación por metas no es la última solución para- problemas de presupuestos y planeación en una facultad. Se requiere que los administradores sean capaces de definir, cuantificar y ordenar sus - objetivos. El modelo de programación por metas simplemente proporciona- la mejor solución bajo la estructura de prioridades y restricciones da-- das. Por lo tanto, algunas cuestiones para investigar concernientes a - la identificación, definición y clasificación de metas todavía se requie ren. Existe la necesidad de futuras investigaciones para desarrollar -- una metodología sistemática para generar tal información.

# B I B L I O G R A F I A


. INTRODUCTION TO OPERATIONS RESEARCH
HILLIER AND LIEBERMAN

. GOAL PROGRAMMING FOR DECISION ANALYSIS
SANG M. LEE

. PRINCIPLES OF OPERATIONS RESEARCH WITH APPLICATIONS TO
MANAGERIAL DECISIONES
WAGNER, H.

. CAPACITY MODELS OF UNIVERSITY MANAGEMENT
MENGES, G. AND ELSTERMANN, G.