3

TERMOELASTOPLASTICIDAD APLICADA A LA DETERMINACION DE ESFUERZOS RESIDUALES EN EL VIDRIO TEMPLADO

3.1 INTRODUCCION

La determinación de esfuerzos residuales durante los diversos procesos de formado de materiales es un problema de gran importancia tanto teórica como práctica. El medir esfuerzos residuales es inherentemente complicado, y contar con modelos matemáticos y paquetes de cómputo para predecir los esfuerzos simulando diversas condiciones de formado es de gran importancia en aplicaciones industriales.

Los tratamientos matemáticos a la fecha[1] son de tipo semi-empíricos y su exactitud se restringe sólo a aquellos que se ajustan estrictamente a las condiciones en las que se estableció el modelo empírico de fluencia. En el presente tratamiento se parte de principios fundamentales de las teorías de elasticidad y plasticidad, ampliamente verificadas por la experiencia, y a través del concepto matemático de termoelastoplasticidad desarrollado por Lardner y otros[2] se genera un modelo de elegancia matemática intrínsica, el cual se aplica a la solución del problema general de termoelastoplasticidad. Como ejemplos de su aplicación se muestran las soluciones matemáticas exactas encontradas para cilindros axisimétricos y planos infinitos, obteniéndose además algunas curvas y resultados numéricos relevantes a los procesos de formado de vidrio.

Estas soluciones son utilizadas para modelar el templado de vidrio plano. Los resultados obtenidos corresponden a las curvas de evolución espacial y temporal de los esfuerzos térmicos, residuales y totales que se generan durante la historia térmica correspondiente la templado por aire forzado.

La discusión de los resultados se limita a las conclusiones más importantes, pero la cantidad de información que proporciona el modelo matamático y su correspondiente modelo en computadora es muy extenso, especialmente si se considera que el paquete de cómputo generado a través del modelo se puede extender a cualesquier material y a cualesquier historia térmica y de tracciones externas aplicadas.

3.2 FORMULACION GENERAL DEL PROBLEMA TERMOELASTOPLASTICO

Considérese un material homogéneo e isotrópico de módulo de Young E, razón de Poisson ν, coeficiente de dilatación α, y sea T(r;t) su temperatura en el punto de coordenadas r al tiempo t, u su campo vectorial de desplazamientos elásticos, e_{ij} su tensor de deformación , σ_{ij} su tensor de esfuerzos, ρ su densidad y sea F el campo vectorial de fuerzas de cuerpo por unidad de masa al que está sujeto el material. Con esta notación y la que se emplea en tensores se tiene que

$$e_{ij}^{TOTAL} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i}) = e_{ij}^{ELASTICA} + e_{ij}^{TERMICA} + e_{ij}^{PLASTICA}, \qquad (1)$$

donde la deformación elástica está dada por

$$e_{ij}^{ELASTICA} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} \quad , \qquad (2)$$

en la que δ_{ij} es la delta de Kronecker (=1 si i=j, y a cero si i es diferente de j) y σ_{kk} denota la traza del tensor de esfuerzos. La deformación térmica está dada por

$$e_{ij}^{TERMICA} = \alpha\, T(r;t)\, \delta_{ij} \qquad (3)$$

y de acuerdo al criterio de Prandtl-Reuss la deformación plástica se determina como

$$\frac{\partial e_{ij}^{PLASTICA}}{\partial t} = \frac{3}{2} \dot{e}_c^P(\sigma_e, T) \frac{S_{ij}}{\sigma_e} , \qquad (4)$$

donde $\dot{e}_c^P$ es la velocidad de deformación plástica en un sistema uniaxial a la temperatura T sujeto a un esfuerzo equivalente

$$\sigma_e = (3/2 \, S_{ij} \, S_{ij})^{1/2} , \qquad (5)$$

en la que S_{ij} es el deviatórico del tensor de esfuerzos ,

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - 1/3 \, \sigma_{kk} \, \delta_{ij} \qquad (6)$$

De la ecuación de equilibrio

$$\sigma_{ij,j} + \rho F_i = 0 , \qquad (7)$$

y definiendo el tensor de **incompatibilidad**

$$\eta = -Inc(e) = - \nabla \times e \times \nabla , \text{ i.e.} \qquad (8)$$

$$\eta_{il} = - \varepsilon_{ijk} \, \varepsilon_{lmn} \, \varepsilon_{kn,jm} , \qquad (9)$$

donde ε_{ijk} es el factor de permutación usual en el producto

vectorial, se tiene que

$$\eta_{ij}^{\text{ELASTICA}} = \frac{1+\nu}{E} \nabla^2 \sigma_{ij} - \frac{1}{E} (\nabla^2 \sigma_{KK} \delta_{ij} - \sigma_{kk,ij}) + \quad \ldots$$

$$\ldots + \frac{1+\nu}{E} \rho (F_{i,j} + F_{j,i} - F_{k,k} \delta_{ij}) , \qquad (10)$$

$$\eta_{i}^{\text{TERMICA}} = - \alpha (\nabla^2 T \delta_{ij} - T_{,ij}) , \qquad (11)$$

$$\eta_{ij}^{\text{PLASTICA}} = \nabla^2 e^{P}_{ij} + e^{P}_{kn,kn} \delta_{ij} - e^{P}_{ij,jk} - e^{P}_{jk,ik} , \qquad (12)$$

con

$$\eta^{\text{TOTAL}} = \eta^{\text{ELASTICA}} + \eta^{\text{TERMICA}} + \eta^{\text{PLASTICA}} = 0 . \qquad (13)$$

La ecuación anterior establece la ecuación diferencial del problema termoelastoplástico general. Aplicaciones de la formulación anterior son relevantes en muchos campos de ciencia e ingeniería y serán desarrollados en trabajos posteriores, aquí se limitará al caso específico de cilindros axisimétricos y planos infinitos.

3.3 APLICACION A CILINDROS AXISIMETRICOS

Considérese un cilindro axisimétrico de radio interior a y de radio exterior b , sujeto a un esfuerzo $\sigma_r(a)$ en su interior y $\sigma_r(b)$en su exterior con una tensión axial promedio $\bar{\sigma}_z$, y una historia térmica $T(r;t)$. Bajo estas condiciones se tiene

$$e_r = \frac{\partial U_r}{\partial r} = \frac{1}{E}\left(\sigma_r - \nu \left(\sigma_\theta + \sigma_z \right)\right) + \alpha T + e_r^p \quad , \qquad (14)$$

$$e_\theta = \frac{U_r}{r} = \frac{1}{E}\left(\sigma_\theta - \nu \left(\sigma_r + \sigma_z \right)\right) + \alpha T + e_\theta^p \quad , \qquad (15)$$

$$e_z = \beta(t) = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu \left(\sigma_r + \sigma_\theta \right)\right) + \alpha T + e_z^p \quad , \qquad (16)$$

por lo que la ecuación de compatibilidad se reduce a

$$e_r = \frac{\partial}{\partial r}\left(r\ e_\theta \right). \qquad (17)$$

Usando la ecuación de equilibrio en coordenadas cilíndricas

$$\sigma_\theta = \frac{\partial}{\partial r}\left(r\ \sigma_r \right) \quad , \qquad (18)$$

se obtiene

$$\sigma_r(r) = \frac{a^2}{r^2}\,\sigma_r(a) + \frac{b^2\sigma_r(b) - a^2\sigma_r(a)}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) I(b, b^2) - \frac{I(r, r^2)}{r^2}\,, \qquad (19)$$

$$\sigma_\theta(r) = -\frac{a^2}{r^2}\,\sigma_r(a) + \frac{b^2\sigma_r(b) - a^2\sigma_r(a)}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\alpha E T}{1-\nu} - \frac{E}{1+\nu}\,e_\theta^p + \frac{\nu E}{1-\nu^2}\,e_r^p + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) I(b, b^2) - \frac{I(r, r^2)}{r^2}\,, \qquad (20)$$

$$\sigma_z(r) = \bar{\sigma}_z - \frac{\alpha E T}{1-\nu} + \frac{E}{1+\nu}\,e_\theta^p + \frac{E}{1-\nu^2}\,e_r^p + J\,, \qquad (21)$$

donde

$$I(\lambda, \xi) = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_a^\lambda \left(2(1+\nu)\,\alpha T(x;t) + \frac{\xi}{x^2}\left(e_\theta^p - e_r^p\right) - \ldots \right.$$

$$\left. \ldots - (1-2\nu)\,e_z^p \right) x\,dx\,, \qquad (22)$$

$$J = \frac{E}{(1-\nu^2)(b^2 - a^2)} \int_a^b \left(2(1+\nu)\,\alpha T(x;t) + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \left(\frac{b^2(\nu-1) + a^2}{x^2}\right)\left(e_\theta^p - e_r^p\right) - (2-\nu)\left(e_\theta^p + e_r^p\right) \right) x\,dx \qquad (23)$$

El estado transiente de esfuerzos y los esfuerzos residuales se obtienen a través de una integración numérica en el tiempo. Para un material viscoelástico como el vidrio

$$\dot{e}_c^{\,p} = \frac{\sigma_e}{3\mu} \tag{25}$$

donde μ representa la viscosidad del material, entonces

$$\dot{e}_{ij}^{\,p} = \frac{S_{ij}}{2\mu} \tag{26}$$

para un cilindro de vidrio soda-calcio de parámetros físicos

$$E = 6.7 \times 10^{10} \text{ Pa.}$$
$$\nu = 0.22 ,$$
$$\alpha = (52 + 0.015\, T(^{\circ}C)) \times 10^{-7} , (^{\circ}k^{-1}) ,$$
$$\log_{10} \mu = -4.726 + \frac{6671.9}{T-107^{\circ}c} , \ \mu \text{ en Pa seg} ,$$
$$a = 0.06 \text{ mts.}$$
$$b = 0.063 \text{ mts.}$$

con condiciones a la frontera $\sigma_r(a) = \sigma_r(b) = 0$, y sujeto a la historia térmica marcada en la figura 1, la cual se obtuvo de la solución exacta del problema de extracción de calor por medio convectivo[4], los esfuerzos generados durante el enfriamiento resultan compresivos en la superficie interior y exterior del cilindro y en la parte interna se generan esfuerzos de tensión, tal como se muestra en las figuras 2,3. El esfuerzo σ_z es del mismo orden de magnitud que σ_θ y σ_r es del orden de un centésimo de σ_θ, ver figuras 2 y 4.

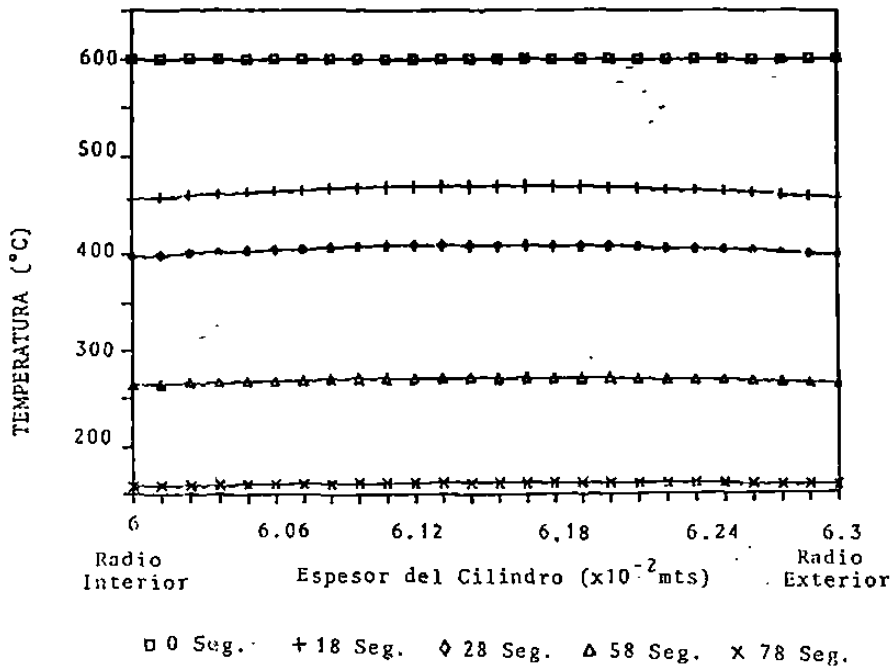

Figura 1. Historia Térmica

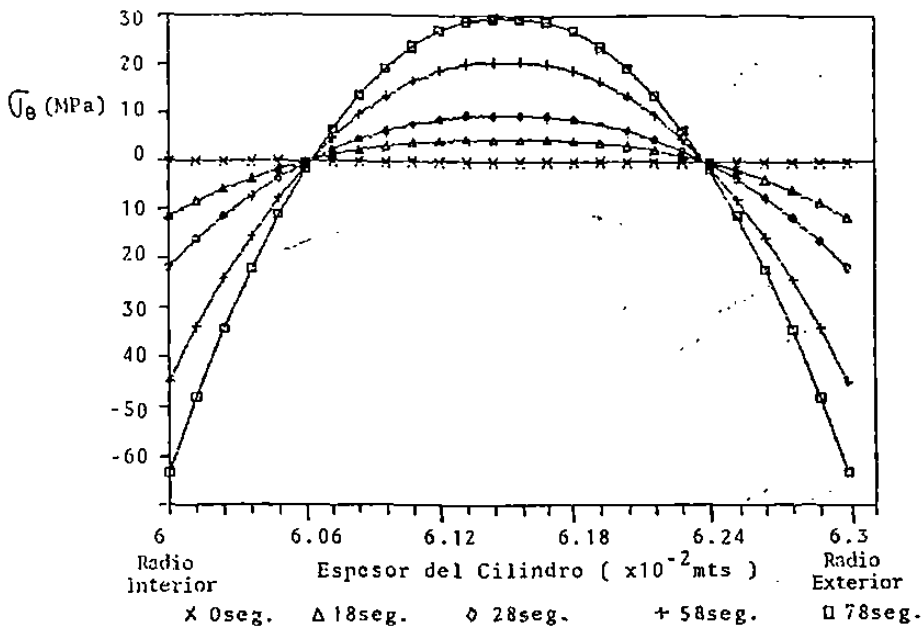

Figura 2. Evolución temporal de σ_θ

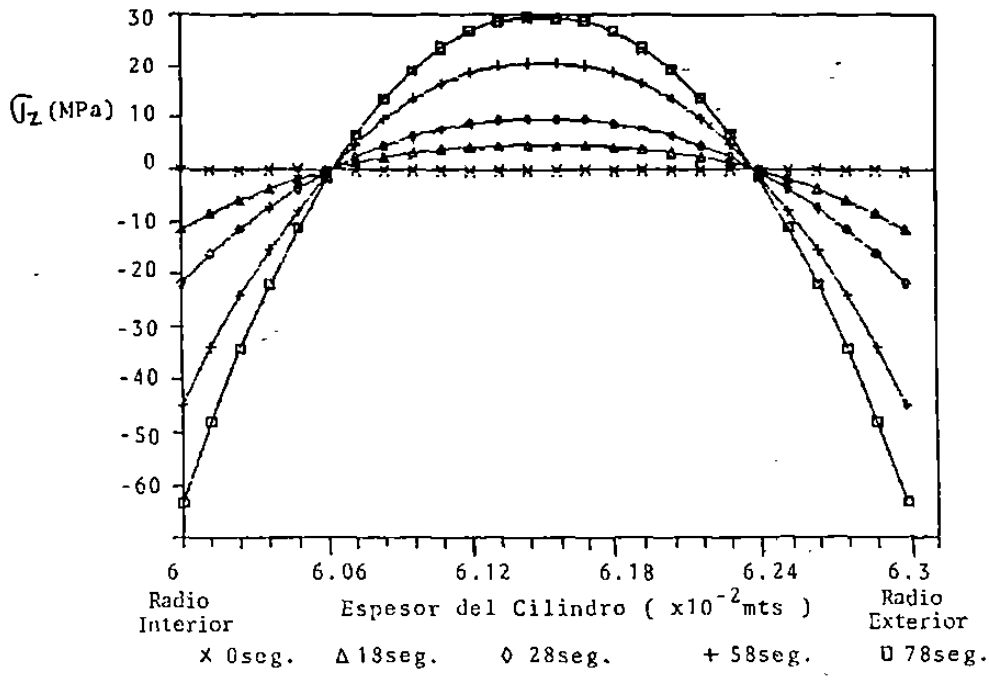

Figura 3. Evolución temporal de σ_z

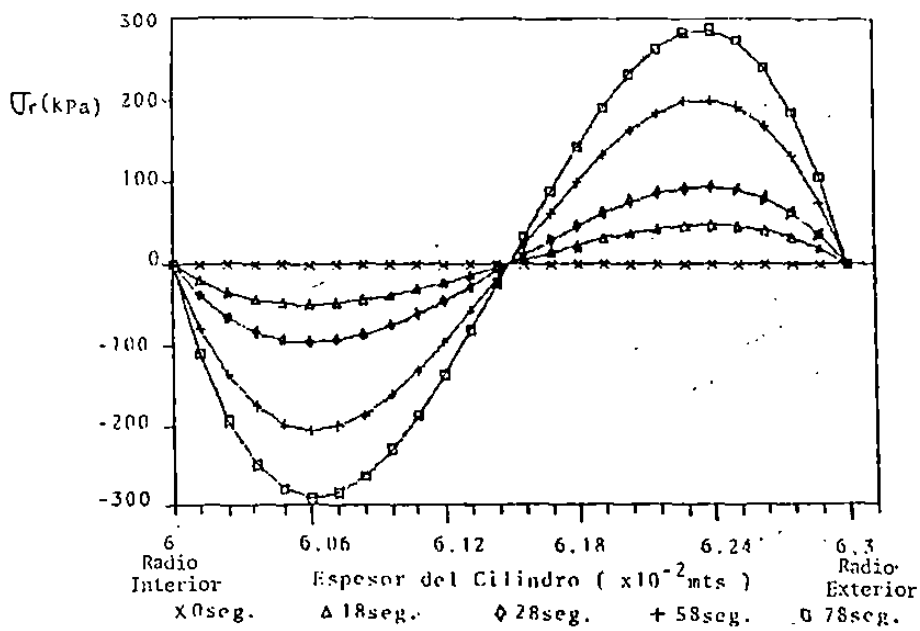

Figura 4. Evolución temporal de σ_r .

3.4 APLICACION AL TEMPLADO DE VIDRIO PLANO

Este sistema se puede modelar tomando b-a = ε (espesor de la placa) y haciendo tender al infinito el radio interior del cilindro, de esta manera se obtiene

$$\sigma_r(r) = 0 \qquad (27)$$

y

$$\sigma = \sigma_\theta(r) = \sigma_z(r) = \sigma(r)^{TERMICO} + \sigma(r)^{RESIDUAL} \qquad (28)$$

DONDE

$$\sigma^{TERMICO} = \frac{E}{1-\nu} \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} \alpha T \, dx - \alpha T \right) \qquad (29)$$

$$\sigma^{RESIDUAL} = \frac{E}{1-\nu} \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} e_\theta^p \, dx - e_\theta^p \right) \qquad (30)$$

Para este sistema de (4) y (6) se obtiene

$$e_\theta^p = \frac{\sigma_\theta(r)}{6\mu}$$

Aplicando esta solución a una placa de vidrio soda-calcio de iguales parámetros físicos que en el caso anterior, pero con espesor ε = 0.003 mts. y sujeta a la historia térmica de templado severo como se muestra en la figura 5 (obtenida de la solución exacta del problema térmico[4]) se obtiene la evolución de los esfuerzos residuales en el tiempo mostrados en la figura 6.

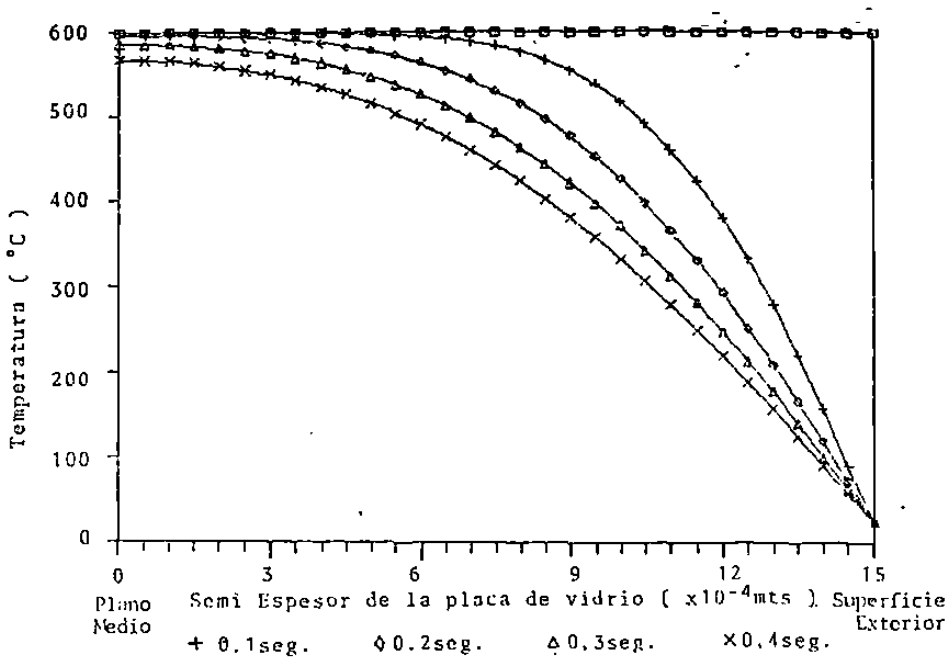

Figura 5. Historia térmica

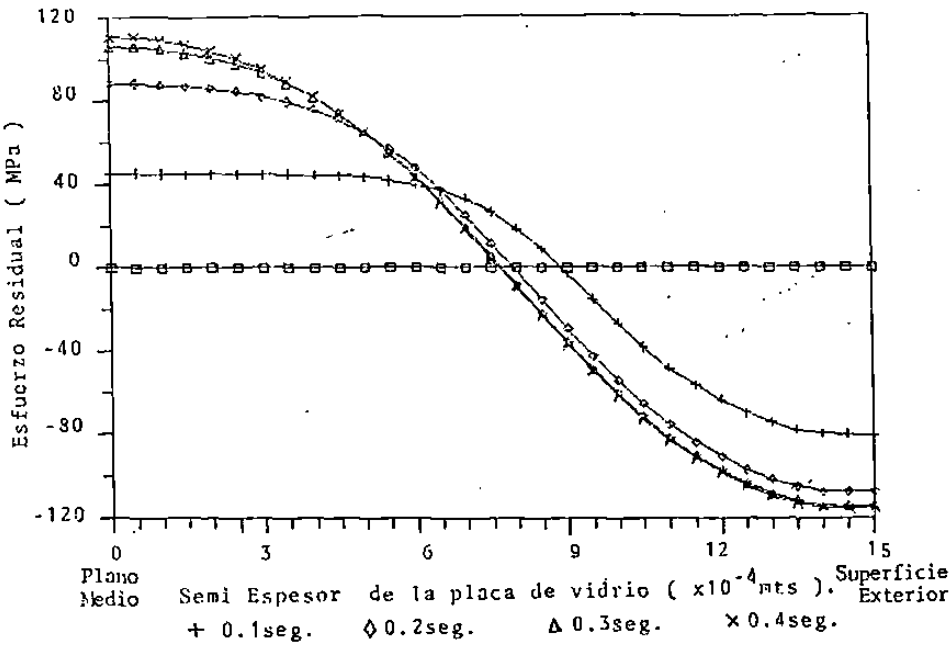

Figura 6. Evolución de los esfuerzos residuales.

Dichos esfuerzos resultan compresivos en la superficie externa y de tensión máxima en el plano medio. Estos esfuerzos dejan de evolucionar y se mantienen fijos a partir de 0.4 seg, ya que la viscosidad es tan alta por debajo de los 575 •c que no se permite deformación plástica subsecuente como se aprecia en la figura 7. En la figura 8 se muestra la evolución de los esfuerzos térmicos que se originan del gradiente de temperatura en la placa, resultando esfuerzos tensiles en la superficie exterior e interior, y compresivos en la parte interna.

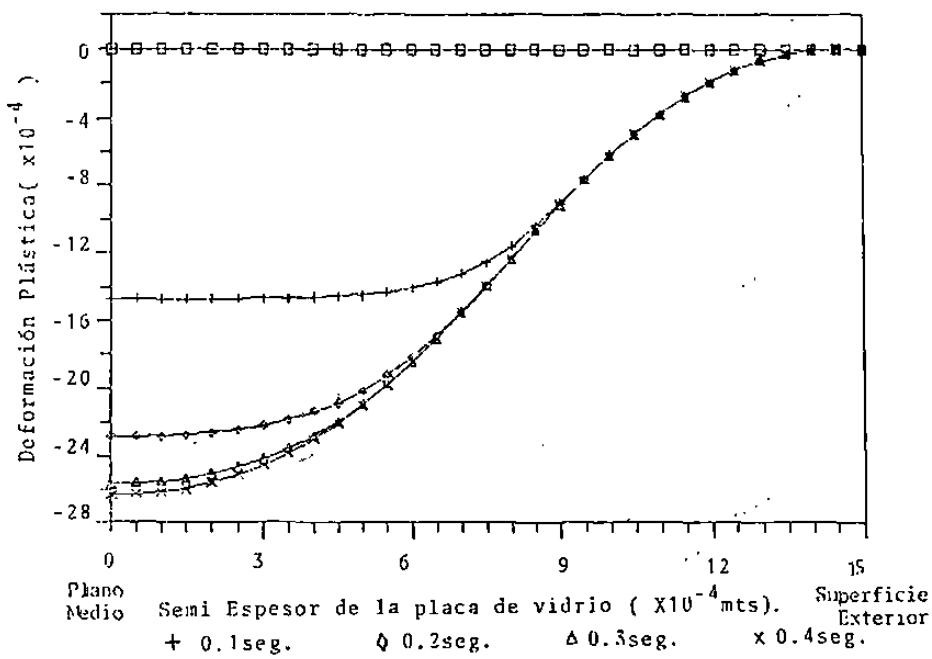

Figura 7. Evolución de la deformación plástica.

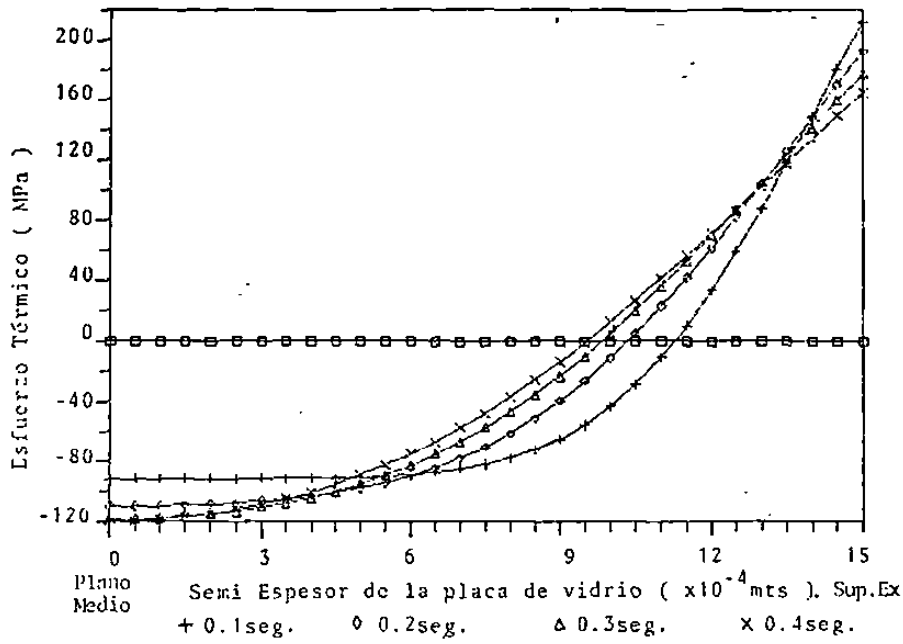

Figura 8. Evolución del esfuerzo térmico.

En la figura 9 se observa la evolución de los **esfuerzos** totales (residuales más térmicos), resultando tensiles en la superficie y compresivos en el interior de la placa. De comparar la evolución de los diferentes esfuerzos, se observa que la incompatibilidad plástica genera esfuerzos que tienden a disminuir el esfuerzo total, y por ende la energía elástica del sistema.

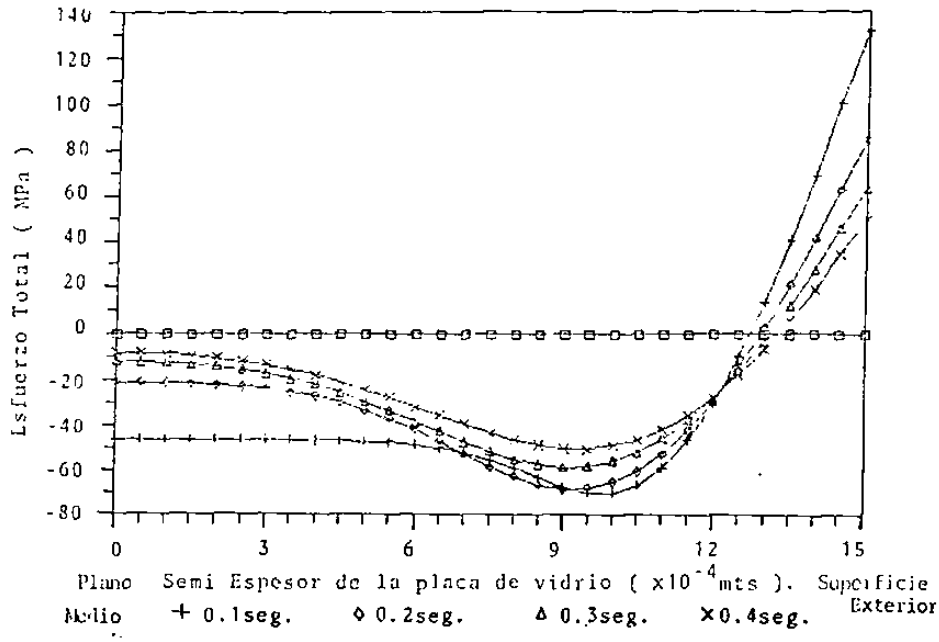

Figura 9. Evolución del esfuerzo total.

3.5 CONCLUSIONES

La teoría matemática de termoelastoplasticidad aquí presentada permite modelar los esfuerzos mecánicos, térmicos y residuales de los materiales sujetos a cualesquier sistema de formado. La teoría se ha aplicado con éxito a la determinación de la evolución de los esfuerzos originados durante el templado de vidrio plano.

De los resultados obtenidos se observa que los esfuerzos residuales aparecen debido a una deformación plástica no uniforme causada por los esfuerzos de origen térmico desarrollados en el material.

Los efuerzos residuales son de sentido opuesto a los efuerzos térmicos, es decir , de compresión máxima en la superficie exterior y de tensión en el centro de la placa, disminuyendo el esfuerzo total.

Cuando el templado se realiza a una temperatura ligeramente mayor a la de ablandamiento, los esfuerzos residuales generados no alcanzan a disminuir lo suficiente al esfuerzo total con lo que se origina fractura completa de vidrio.

Los esfuerzos residuales dejan de evolucionar cuando ya no existe deformación plástica debido a un aumento en la viscosidad originado por la disminución de la temperatura. Estos esfuerzos permanecen en el vidrio y provocan un aumento en su resistencia mecánica.