

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA



PROPIEDADES INVARIANTES DE LA  
RETROALIMENTACION RESISTIVA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO  
EN CIENCIAS EN INGENIERIA ELECTRICA CON  
ESPECIALIDAD EN ELECTRONICA

P R E S E N T A :  
CESAR ELIZONDO GONZALEZ

CD. UNIVERSITARIA

FEBRERO 1994

F4

1994

FIME

F.M2

Z58

53

TM

F4

1994

FIME

F.M2

Z58

53

F

1994

FIME

F.M2

Z58

53

TM

F4

1994

FIME

F.M2

Z58

53

F4

1994

FIME

F.M2

Z58

53

TM

F4

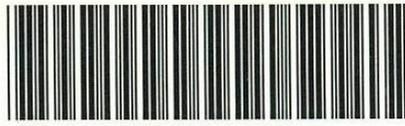
1994

FIME

F.M2

Z58

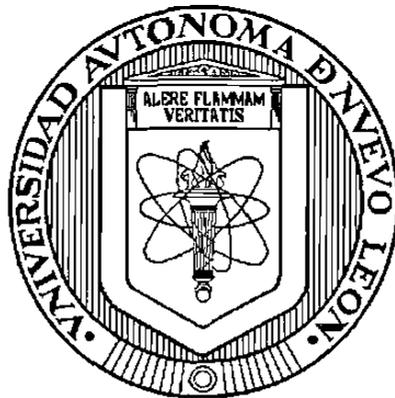
53



1020070571

**UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON**

**FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA**



**PROPIEDADES INVARIANTES DE LA RETROALIMENTACION  
RESISTIVA**

**TESIS**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERIA ELECTRICA  
CON ESPECIALIDAD EN  
ELECTRONICA**

**PRESENTA**

**CESAR ELIZONDO GONZALEZ**

**CD. UNIVERSITARIA**

**FEBRERO DE 1994**

TM  
ZE

1114  
L1



FONDO TESIS

32630

**PROPIEDADES INVARIANTES DE LA RETROALIMENTACION  
RESISTIVA**

Los miembros del comité aprueban la Tesis  
de Maestría de César Elizondo González

Dr. Joaquín Collado Moctezuma  
Asesor



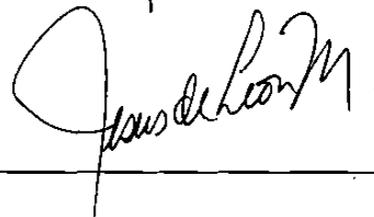
---

Dr. Salvador Acha Daza



---

Dr. Jesús de León Morales



---

Copyright © 1994 por César Elizondo González  
Reservados todos los derechos

**A mi padre Matilde Elizondo García y a la memoria de mi madre María Abraham  
González Garza, quienes me dieron la vida y me enseñaron a ejercerla con  
aspiraciones.**

**A mi esposa María Chapa de Elizondo y a mis hijos Cesar Elizondo Chapa y  
Abraham Elizondo Chapa, quienes me han dado el apoyo y tiempo para el desarrollo  
de la presente.**

## **AGRADECIMIENTOS**

Al Dr. Joaquín Collado Moctezuma, asesor de este trabajo por su esfuerzo y orientación enfocados al mejoramiento y realización del mismo. Al Dr. Salvador Acha Daza, al Dr. Jesús de León Morales y al Dr. Edgar N. Sanchez C. por las correcciones y sugerencias que hicieron a esta tesis.

# Resumen

Los circuitos electrónicos de retroalimentación resistiva modelados como un sistema de segundo grado sin ceros y con dos polos, presentan algunas propiedades invariantes a la configuración del sistema mientras esta sea de retroalimentación resistiva, el desarrollo y estudio de estas propiedades es el objetivo de esta tesis.

La primera aportación de esta tesis es el conjunto de propiedades derivadas de la definición del **Factor de Lazo "K<sub>L</sub>"**, éste se define para sistemas de retroalimentación resistiva, su expresión es función de los valores de retroalimentación "r" ( $r = R_F/R_I$ ), se obtiene de los coeficientes de numerador y denominador de la ecuación de ganancia de voltaje correspondiente a la configuración. El factor de Lazo, además de ser la herramienta que permite demostrar el principal teorema de la tesis que aparece en el párrafo siguiente, establece una relación directa entre los principales parámetros de lazo cerrado con los del abierto, como son: la razón de amortiguamiento, frecuencia natural y ganancia de voltaje en D.C.; permitiendo con esto realizar el diseño apoyándose únicamente en los parámetros, con lo que el cálculo de la relación de resistencias adecuada para lograrlo, queda como paso final.

La segunda aportación importante de esta tesis es el **Teorema de Invarianza de Polos**  $\delta\omega_n = \delta_0\omega_{0n} = \omega_0$  que disminuye en 1 el número de parámetros frecuenciales en las ecuaciones del sistema, simplificando así su solución. El teorema prueba que los sistemas de amplificación electrónica, implementados con un amplificador operacional modelado en dos polos y retroalimentado resistivamente, tienen la propiedad de preservar su promedio de polos " $\omega_0$ " de lazo abierto " $\delta_0\omega_{0n}$ " en lazo cerrado " $\delta\omega_n$ " como un invariante

a el tipo de retroalimentación mientras esta sea resistiva.

El Factor de lazo permite establecer criterio de diseño, puesto que para la configuración específica que se esté analizando, la expresión del factor de lazo tendrá un valor mínimo y un máximo; dada la relación directa que existe entre el factor de lazo con los demás parámetros del sistema, este acotamiento es reflejado a ellos.

Por las propiedades descritas es posible modelar la ganancia de voltaje de una etapa de amplificación de cualquier configuración en función de un solo parámetro de diseño: la razón de amortiguamiento " $\delta$ ". Esta ventajosa propiedad permite analizar y diseñar con notable facilidad, tanto sistemas de una sola etapa como también los casos de multietapas.

# Indice

|                                                                                          |      |
|------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| <b>RESUMEN</b> .....                                                                     | vi   |
| <b>LISTA DE FIGURAS</b> .....                                                            | xi   |
| <b>LISTA DE TABLAS</b> .....                                                             | xii  |
| <b>NOMENCLATURA</b> .....                                                                | xiii |
| <br>                                                                                     |      |
| <b>0) INTRODUCCION</b>                                                                   |      |
| 0.1) Antecedentes .....                                                                  | 1    |
| 0.2) Fundamentos del método propuesto .....                                              | 1    |
| <br>                                                                                     |      |
| <b>1) ANALISIS DEL POLINOMIO EN LA FRECUENCIA</b>                                        |      |
| 1.1) Polos del sistema .....                                                             | 4    |
| 1.2) Frecuencia promedio y desplazamiento de polos .....                                 | 5    |
| 1.3) Polos reales y complejos .....                                                      | 7    |
| <br>                                                                                     |      |
| <b>2) NUCLEO DEL SISTEMA</b>                                                             |      |
| 2.1) El concepto núcleo del sistema .....                                                | 11   |
| 2.2) Razón de amortiguamiento y frecuencia natural<br>del amplificador operacional ..... | 12   |

# Indice

## 3) AMPLIFICADORES BASICOS

|                                              |    |
|----------------------------------------------|----|
| 3.1) Circuito de dos entradas .....          | 17 |
| 3.2) Circuito de una entrada .....           | 20 |
| 3.3) Amplificador de ganancia variable ..... | 21 |

## 4) PROPIEDADES DEL FACTOR DE LAZO E INVARIANZA

|                                                               |    |
|---------------------------------------------------------------|----|
| 4.1) Factor de lazo .....                                     | 24 |
| 4.2) El factor de lazo en el polinomio de la frecuencia ..... | 26 |
| 4.3) Invarianza de promedio de polos .....                    | 29 |
| 4.4) Límites paramétricos .....                               | 32 |

## 5) AMPLIFICADOR INVERSOR

|                                                           |    |
|-----------------------------------------------------------|----|
| 5.1) Concepto general .....                               | 34 |
| 5.2) Análisis de la ganancia .....                        | 34 |
| 5.3) Factor de lazo en el amplificador inversor .....     | 39 |
| 5.4) Límites paramétricos del amplificador inversor ..... | 41 |
| 5.5) El factor de lazo en la ganancia de directa .....    | 43 |
| 5.6) Aplicaciones .....                                   | 45 |

## 6) AMPLIFICADOR NO INVERSOR

|                                                          |    |
|----------------------------------------------------------|----|
| 6.1) Concepto general .....                              | 51 |
| 6.2) Análisis de la ganancia .....                       | 52 |
| 6.3) Factor de lazo en el amplificador no inversor ..... | 56 |

# Indice

|                                                        |    |
|--------------------------------------------------------|----|
| 6.4) El factor de lazo en la ganancia de directa ..... | 58 |
| 6.5) Aplicaciones .....                                | 60 |
| <b>7) MULTIETAPAS</b>                                  |    |
| 7.1) Relación de ganancia límite .....                 | 67 |
| 7.2) Multietasas .....                                 | 71 |
| 7.3) Criterio de selección .....                       | 81 |
| <b>8) CONCLUSIONES</b> .....                           | 83 |
| <b>REFERENCIAS</b> .....                               | 84 |

# Lista de figuras

|                                                                                       |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.3-1) Respuesta a la frecuencia de un sistema de segundo grado ( $\omega/\omega_n$ ) | 8  |
| 1.3-2) Respuesta a la frecuencia de un sistema de segundo grado ( $\omega$ )          | 10 |
| 2.2-1) Símbolo del amplificador operacional                                           | 12 |
| 2.2-2) Diagrama de Bode del amplificador operacional LM359                            | 13 |
| 2.2-2) Diagrama de Bode del amplificador operacional MC1741                           | 15 |
| 2.2-2) Diagrama de Bode del amplificador operacional MC3401                           | 16 |
| 2.2-2) Diagrama de Bode del amplificador operacional LH0024                           | 16 |
| 3.1-1) Amplificador diferencial                                                       | 18 |
| 3.3-1) Amplificador de ganancia variable                                              | 21 |
| 5.1-1) Amplificador Inversor                                                          | 34 |
| 6.1-1) Amplificador no inversor                                                       | 51 |
| 7.1-1) Relación de ganancia límite / razón de amortiguamiento                         | 69 |
| 7.1-2) Ganancia Límite (una etapa caso 1)                                             | 70 |
| 7.1-3) Ganancia Límite (una etapa caso 2)                                             | 70 |
| 7.2-1) Ganancia Límite (multietapas)                                                  | 70 |

# Lista de tablas

|                                                                 |    |
|-----------------------------------------------------------------|----|
| 7.2-1) Diseño de multietapas, ejemplo 7.2-1 .....               | 74 |
| 7.2-2) Diseño de multietapas, ejemplo 7.2-2 .....               | 76 |
| 7.2-1) Diseño de multietapas, ejemplo 7.2-3 .....               | 78 |
| 7.2-1) Diseño de multietapas, ejemplo 7.2-4 .....               | 79 |
| 7.2-1) Criterio de selección del amplificador operacional ..... | 81 |

# Nomenclatura

|               |                                                                                                            |
|---------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| AO            | Amplificador operacional                                                                                   |
| $A(\omega)$   | Ganancia de voltaje de lazo cerrado (del sistema)<br>$A(\omega) = A_d/P(\omega)$                           |
| $A_o(\omega)$ | Ganancia de voltaje de lazo abierto (del AO)<br>$A_o(\omega) = A_{do}/P_o(\omega)$                         |
| $A_d$         | Ganancia de voltaje de corriente directa de lazo cerrado (del sistema)                                     |
| $A_{do}$      | Ganancia de voltaje de corriente directa del AO                                                            |
| $A_L$         | Ganancia límite: magnitud de ganancia a $f_L$                                                              |
| $A_{Ls}$      | Ganancia límite del sistema multietapas                                                                    |
| $A_{Le}$      | Ganancia límite de una etapa                                                                               |
| $\delta$      | Razón de Amortiguamiento del sistema                                                                       |
| $\delta_o$    | Razón de Amortiguamiento del AO                                                                            |
| $f_L$         | Frecuencia límite: máxima frecuencia de operación                                                          |
| $F(\omega)$   | Función de la frecuencia del sistema<br>$F(\omega) = j2\delta(\omega/\omega_n) - (\omega/\omega_n)^2$      |
| $F_o(\omega)$ | Función de la frecuencia del AO<br>$F_o(\omega) = j2\delta_o(\omega/\omega_{no}) - (\omega/\omega_{no})^2$ |
| $\varphi$     | Frecuencia normalizada = $\omega/\omega_o$                                                                 |
| $g$           | Relación de ganancia límite = $A_L/A_d$                                                                    |
| $g_s$         | Relación de ganancia límite del sistema multietapas                                                        |
| $g_e$         | Relación de ganancia límite de una etapa                                                                   |
| $K_D$         | Coficiente de denominador                                                                                  |
| $K_L$         | Factor de lazo                                                                                             |

|                |                                                                                                                                                   |
|----------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $K_N$          | Coeficiente de numerador                                                                                                                          |
| $\omega$       | Frecuencia Angular en Rad/Seg                                                                                                                     |
| $\omega_n$     | Frecuencia natural del sistema (Rad/Seg)                                                                                                          |
| $\omega_{n0}$  | Frecuencia natural del AO (Rad/Seg)                                                                                                               |
| $\omega_{a,b}$ | Polos del AO (Rad/Seg)                                                                                                                            |
| $P_{1,2}$      | Polos del sistema (Rad/Seg)                                                                                                                       |
| $P(\omega)$    | Polinomio en la frecuencia del sistema<br>$P(\omega) = 1 + F(\omega)$<br>$P(\omega) = 1 + j2\delta(\omega/\omega_n) - (\omega/\omega_n)^2$        |
| $P_0(\omega)$  | Polinomio en la frecuencia del AO<br>$P_0(\omega) = 1 + F_0(\omega)$<br>$P(\omega) = 1 + j2\delta_0(\omega/\omega_{n0}) - (\omega/\omega_{n0})^2$ |
| $r$            | Relación de resistencias $R_F/R_I$                                                                                                                |
| $R_I$          | Resistencia por donde entra la señal en el Amplificador Inversor<br>Resistencia entre el nodo negativo y tierra en el Amplificador No Inversor    |
| $R_F$          | Resistencia de retroalimentación                                                                                                                  |
| $v_o$          | voltaje de salida                                                                                                                                 |
| $v_p$          | voltaje de entrada "+"                                                                                                                            |
| $v_n$          | voltaje de entrada "-"                                                                                                                            |

# Capítulo 0

## INTRODUCCION

### 0.1) ANTECEDENTES

Una de las aplicaciones comunes de la electrónica analógica es el diseño de sistemas de amplificación empleando amplificadores operacionales; el método tradicional de análisis consiste básicamente en obtener la ganancia de voltaje del sistema en el dominio de la frecuencia (o de "s" variable de Laplace); para de ahí obtener la ecuación de calculo a detalle de la variable deseada sin revisar la factibilidad del caso.

### 0.2) FUNDAMENTOS DEL METODO PROPUESTO

El fundamento de la tesis básicamente radica en dos conceptos: 1) La definición del Factor de Lazo y 2) El teorema de Invarianza de Polos. El primer concepto además de servir de apoyo para la demostración del teorema, establece una relación directa entre los principales parámetros del sistema en lazo cerrado con los del lazo abierto, así también establece un acotamiento en los parámetros del sistema. El segundo concepto disminuye en 1 el número de parámetros frecuenciales en las ecuaciones del sistema. El conjunto de ecuaciones obtenido de estos dos conceptos permite que todos los parámetros del sistema de cualquier configuración se expresen en función de la razón de amortiguamiento  $\delta$  que es la que determina la velocidad de respuesta del sistema. Lo anterior aporta una metodología de análisis y un criterio de diseño que permite la solución de planteamientos que la electrónica analógica tradicional no los contempla. El desarrollo de la tesis fue efectuado de el siguiente orden:

En el **capítulo 1**, mediante ecuaciones empleadas en el cálculo de polos, se demuestra que el promedio de polos es igual al producto  $\delta\omega_n$ , en el **capítulo 2** se propone el

concepto **Núcleo del Sistema** como una "caja negra" donde radica la capacidad amplificativa que una vez retroalimentada se convierte en el **Sistema**; también se modela la ganancia en voltaje del amplificador operacional (núcleo del sistema) en función de:  $A_{d0}$ ,  $\delta_0$ ,  $\omega_{0n}$  y se obtiene su promedio de polos  $\omega_0$ . El contenido del **capítulo 3** es con el fin de contar con las ecuaciones para aplicar el método propuesto, se obtienen la ganancia de voltaje para los sistemas de amplificación: diferencial (dos entradas), inversor, no inversor y ganancia variable.

El **capítulo 4** se dedica al concepto **Factor de Lazo  $K_L$** , en general éste se obtiene de la ecuación de ganancia de voltaje de cualquier sistema de amplificación mientras éste sea de retroalimentación resistiva y se obtiene la ganancia de voltaje del sistema  $A_d$  en función del factor de lazo; mediante el factor de lazo se obtienen la razón de amortiguamiento y la frecuencia natural del sistema en función de las respectivas del núcleo del sistema:  $\omega_n = \omega_{n0}/K_L$ ,  $\delta = K_L \delta_0$ , multiplicando éstas últimas dos se obtiene el **Teorema de Invarianza de Polos:  $\delta \omega_n = \delta_0 \omega_{n0} = \omega_0$** , la validez de este teorema es independiente del tipo de configuración mientras sea de retroalimentación resistiva; también se analiza en forma general los límites paramétricos del sistema, el factor de lazo esta acotado de acuerdo a la configuración del sistema y por lo tanto la razón de amortiguamiento  $\delta$ , la frecuencia natural  $\omega_n$  y la ganancia de voltaje en corriente directa  $A_d$  estarán acotadas también, aportando entonces criterios de diseño. A través del factor de lazo se puede analizar el sistema mediante ecuaciones que utilizan únicamente los parámetros del sistema sin emplear las voluminosas ecuaciones de resistencias; cuando el estudio es concluido se obtiene el valor relación de resistencias del factor de lazo.

El Amplificador Inversor se analiza en el **capítulo 5**, primeramente por los métodos convencionales y posteriormente por el método propuesto; esto es con la finalidad de comparar los dos métodos. En la parte correspondiente al método propuesto se obtiene explícitamente la expresión del factor de lazo en función de la relación de resistencias y la relación de resistencias en función del factor de lazo, así también se obtienen las

ecuaciones correspondientes de los límites paramétricos, finalmente se obtiene la ecuación de la ganancia de voltaje en D.C. del sistema en función de la misma ganancia del núcleo del sistema y del factor de lazo; una vez completo el conjunto de ecuaciones se procede a hacer ejemplos del método propuesto.

El Amplificador No Inversor se analiza en el **capítulo 6**, el factor de lazo y los límites paramétricos resultan igual que para el amplificador inversor, pero la relación entre la ganancia del sistema con la del núcleo del sistema es diferente a la del capítulo anterior; finalmente se hacen ejemplos de los resultados obtenidos.

Los Sistemas Multietapas son analizados en el **capítulo 7**, para esto se define: La **Frecuencia Normalizada  $\phi$**  como el cociente de la frecuencia angular " $\omega$ " entre el promedio de polos " $\omega_0$ ", La **Ganancia Límite  $A_L$**  que es la magnitud de la ganancia de voltaje a la frecuencia límite y la **Relación de Ganancia Límite  $g$**  que es el cociente de la ganancia límite  $A_L$  entre la ganancia de voltaje en corriente directa  $A_d$ ; gracias a el teorema de invarianza de polos este cociente queda expresado únicamente en función de la frecuencia normalizada límite  $\phi_L$  y la razón de amortiguamiento  $\delta$ ; de ésta expresión es posible obtener la razón de amortiguamiento correspondiente a una relación de ganancia límite conocido. La relación de ganancia límite del sistema multietapas  $g_e$  difícilmente coincide con la relación de ganancia límite del sistema deseado  $g_s$ , el criterio que se toma es  $g_e > g_s$  logrando así que el sistema multietapas diseñado tenga un mejor desempeño que el sistema deseado, entendiéndose por esto que la desviación de ganancia esta dentro del límite fijado. Las ecuaciones desarrolladas se aplican en diferentes ejemplos y finalmente se hace un estudio de criterio de selección de acuerdo a las necesidades a cumplir del sistema deseado.

De lo anterior se concluye en el **capítulo 8** que: los sistemas de amplificación modelados sin ceros y con dos polos pueden ser estudiados con facilidad empleando solo ecuaciones sencillas de por si sin recurrir a simplificaciones por aproximación.

# Capítulo 1

## ANÁLISIS DEL POLINOMIO EN LA FRECUENCIA

### 1.1) POLOS DEL SISTEMA

Uno de los circuitos que frecuentemente se utiliza en electrónica analógica es el circuito amplificador que normalmente es implementado con amplificadores operacionales. La ecuación que caracteriza el comportamiento de un circuito amplificador electrónico normalmente es la ganancia de voltaje del amplificador de la forma (1.1-1), en la que el numerador  $A_d$  es la ganancia en voltaje de D.C. (en capítulos posteriores se mostrará que  $A_d$  depende de los coeficientes del denominador) y el denominador es un polinomio en función de "s" (variable de Laplace) empleándose como parámetros: la razón de amortiguamiento " $\delta$ " y la frecuencia natural del sistema " $\omega_n$ ", [4], [8]. Es de utilidad conocer los polos " $P_1$ ", " $P_2$ " que dan origen a dicho polinomio, con lo que (1.1-1) se puede expresar en la forma (1.1-2).

$$A(s) = \frac{A_d \omega_n^2}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2} \quad (1.1-1)$$

$$A(s) = \frac{A_d P_1 P_2}{(s + P_1)(s + P_2)} \quad (1.1-2)$$

Igualando (1.1-1) y (1.1-2) obtenemos:

$$s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 = (s + P_1)(s + P_2) \quad (1.1-3)$$

$$s^2 + (P_1 + P_2)s + P_1P_2 = s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 \quad (1.1-4)$$

$$P_1 + P_2 = 2\delta\omega_n \quad (1.1-5)$$

$$P_1P_2 = \omega_n^2 \quad (1.1-6)$$

De estas ultimas dos ecuaciones podemos obtener la frecuencia natural y la razón de amortiguamiento en función de los polos si éstos son conocidos, como se muestra (1.1-7) y (1.1-8)

$$\omega_n = (P_1P_2)^{\frac{1}{2}} \quad (1.1-7)$$

$$\delta = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{P_1}{P_2}} + \sqrt{\frac{P_2}{P_1}} \right) \quad (1.1-8)$$

La relación inversa se muestra en (1.1-9) y (1.1-10).

$$P_1 = \delta\omega_n - \omega_n\sqrt{\delta^2-1} \quad (1.1-9)$$

$$P_2 = \delta\omega_n + \omega_n\sqrt{\delta^2-1} \quad (1.1-10)$$

## 1.2) FRECUENCIA PROMEDIO Y DESPLAZAMIENTO DE POLOS

Si analizamos las ecuaciones (1.1-9) y (1.1-10) de donde se calculan los polos:  $P_1$  y  $P_2$ , se puede ver que la diferencia entre ambos solo es el signo del termino que contiene la raíz cuadrada, de tal manera que al hacer la suma de ellos se elimina dicho termino, quedando así el producto de la razón de amortiguamiento por la frecuencia natural " $\delta\omega_n$ " como el promedio de los polos como lo expresa (1.2-1), dado que esto jugará un

papel importante en los circuitos electrónicos implementados a base de amplificadores operacionales con retroalimentación resistiva, se hace la siguiente definición:

$$\omega_0 = \delta \omega_n = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) \quad (1.2-1)$$

**Definición: Promedio de Polos  $\triangleq \omega_0$**

De las ecuaciones de los polos (1.1-9) y (1.1-10) puede verse que cada uno de ellos esta desplazado respecto al promedio " $\omega_0$ " una misma cantidad, un polo en un sentido y el otro en el opuesto ya sea cuando la cantidad es real o imaginaria, siendo así atractivo definir dicha cantidad "**Desplazamiento de Polos**" como " $P_d$ " según lo muestra (1.2-2) que al aplicar el concepto promedio de polos se puede expresar como (1.2-3), se puede ver fácilmente que el desplazamiento de polos es la parte responsable de que el polo sea real o complejo, puesto que " $P_d$ " es un número real cuando la razón de amortiguamiento es mayor que uno, e imaginario cuando esta es menor que uno; algo semejante se obtiene aplicando (1.2-1) en (1.2-2) para obtener (1.2-4) de donde concluimos que " $P_d$ " es real cuando " $\omega_n$ " es menor que " $\omega_0$ " y es imaginario en el caso contrario.

$$P_d = \omega_n \sqrt{\delta^2 - 1} \quad (1.2-2)$$

$$P_d = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{\delta^2}} \quad (1.2-3)$$

$$P_d^2 = \omega_0^2 - \omega_n^2 \quad (1.2-4)$$

De lo anterior se puede obtener una expresión para cada polo de tal manera que quede expresado cada uno de ellos en función de: El promedio y el desplazamiento de polos como lo muestran (1.2-5) y (1.2-6) que se obtienen al aplicar (1.2-2) junto con (1.2-1) en (1.1-9) y (1.1-10).

$$P_1 = \omega_0 - P_d \quad (1.2-5)$$

$$P_2 = \omega_0 + P_d \quad (1.2-6)$$

### 1.3) POLOS REALES Y COMPLEJOS

En los sistemas electrónicos de amplificación es común que la ganancia de voltaje en corriente directa que se encuentra en el numerador de (1.1-1) dependa directamente de el valor de la razón de amortiguamiento " $\delta$ ", de tal manera que una ganancia alta comúnmente se logra con valores de " $\delta$ " mayores que 1 y con polos reales de acuerdo a (1.2-2); las ganancias bajas se logran con valores de " $\delta$ " menores que uno y con polos complejos conjugados. Lo anterior se puede ver fácilmente a través del diagrama de Bode; este diagrama se obtiene cambiando "s" por " $j\omega$ " en la ecuación de ganancia a analizar y de ahí se grafica la magnitud de la ganancia normalmente en "dB" en función del logaritmo de la frecuencia.

Algunos autores [1], [2] explican el comportamiento frecuencial de un sistema de segundo grado mediante la ecuación (1.3-1) cuyo diagrama de Bode aparece en la figura (1.3-1), en la que se puede apreciar que la ganancia tiene valores mas altos en cuanto " $\delta$ " es más pequeña e igualmente muestra poca diferencia en las frecuencias correspondientes a los picos de resonancia para los diferentes valores de " $\delta$ "; de la frecuencia de resonancia (1.3-2) tomada de [1] podemos ver que para  $\delta = 0.1$  la frecuencia de resonancia es  $0.9899\omega_n$  y para  $\delta = 0.3$  es  $0.9055\omega_n$ , en la gráfica se puede observar que ambos valores se encuentran muy cerca uno de otro.

$$G(\omega) = \frac{1}{1 + j2\delta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (1.3-1)$$

Recordemos que un sistema de segundo grado se representa por la ecuación (1.1-1), si hacemos en ésta los cambios necesarios para que adquiera el mismo polinomio en la frecuencia que el de (1.3-1) obtenemos así (1.3-2), comparando éstas últimas dos se puede entender que (1.3-1) representa solo el denominador de (1.3-2) sin tomar en cuenta el numerador que contiene la ganancia en voltaje de D.C. del sistema, por eso es que todas las curvas de (Fig. 1.3-1) tienden a 0 dB cuando  $\omega$  tiende a 0 independientemente del valor de  $\delta$ , por otra parte podemos ver en (Fig. 1.3-1) que el eje horizontal no es  $\omega$  sino  $\omega/\omega_n$  haciendo que los picos de las curvas aparezcan tendientes por la izquierda al valor  $\omega/\omega_n = 1$ , lo cual se puede entender si despejamos  $\omega_r/\omega_n$  de la frecuencia de resonancia (1.3-2) deduciendo que  $\omega_r/\omega_n$  tiende a 1 cuando  $\delta$  tiende a 0.

$$G(\omega) = \frac{A_d}{1 + j2\delta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (1.3-2)$$

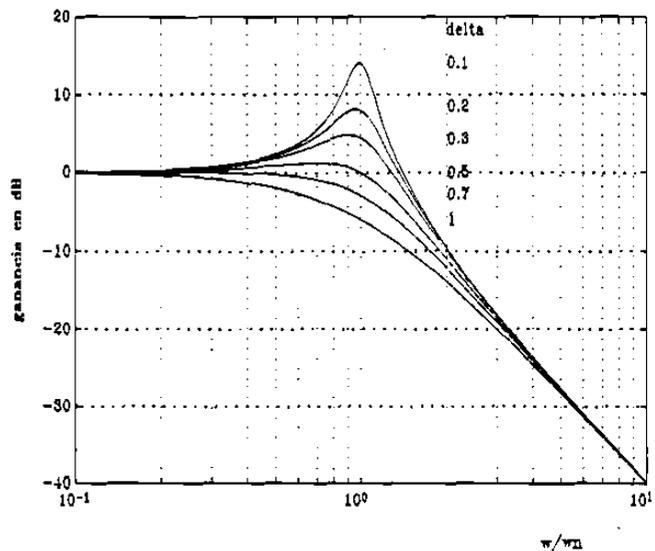


Fig. 1.3-1

La ecuación de ganancia de voltaje de un sistema electrónico de amplificación normalmente es de la forma de (1.1-1), en capítulos siguientes se demostrará que los valores de:  $A_d$ ,  $\delta$  y  $\omega_n$  dependen de los valores de las resistencias de retroalimentación, así que si cambiamos estas para lograr un nuevo en el valor de  $\delta$  automáticamente cambian también su valor  $A_d$  y  $\omega_n$ , esto permite que estas últimas dos variables queden expresadas en función de  $\delta$

Con lo que se verá en los capítulos posteriores es fácil obtener la ecuación (1.3-3) de ganancia de voltaje parametrizada en función de  $\delta$  para un amplificador no inversor implementado con un amplificador operacional MC1741.

Con un diagrama de Bode como el mostrado en (Fig. 1.3-2) en el que se puede notar que las altas ganancias se obtienen con valores altos de  $\delta$  y al disminuir esta aumenta el pico de resonancia pero disminuye su ganancia de voltaje de corriente directa, también se puede ver que si disminuye  $\delta$  aumenta el valor de  $\omega_n$ , siendo este para el amplificador no inversor el valor de frecuencia donde intersectan la asíntota horizontal correspondiente al valor de  $\delta$  con la curva correspondiente a lazo abierto (esto último no se cumple para el amplificador inversor).

$$G(\omega) = \frac{2.5252 * \delta^2}{1 + j2\delta^2\left(\frac{\omega}{4.98 * 10^6}\right) - \delta^2\left(\frac{\omega}{4.98 * 10^6}\right)^2} \quad (1.3-3)$$

El valor unitario de  $\delta$  es el límite entre polos reales y complejos conjugados, el comportamiento de la ganancia de voltaje con pico resonante se presenta en valores de  $\delta$  menores a 0.707, la frecuencia angular donde se presenta dicho pico y la magnitud de su ganancia se calcula con (1.3-2) y (1.3-3) [1].

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\delta^2} \quad (1.3-4)$$

$$|A(\omega_r)| = \frac{1}{2\delta\sqrt{1 - \delta^2}} \quad (1.3-5)$$

Estas últimas dos ecuaciones se pueden emplear para revisar la variación de ganancias dentro del ancho de banda establecido en de un sistema de amplificación con  $\delta$  menor que 0.707

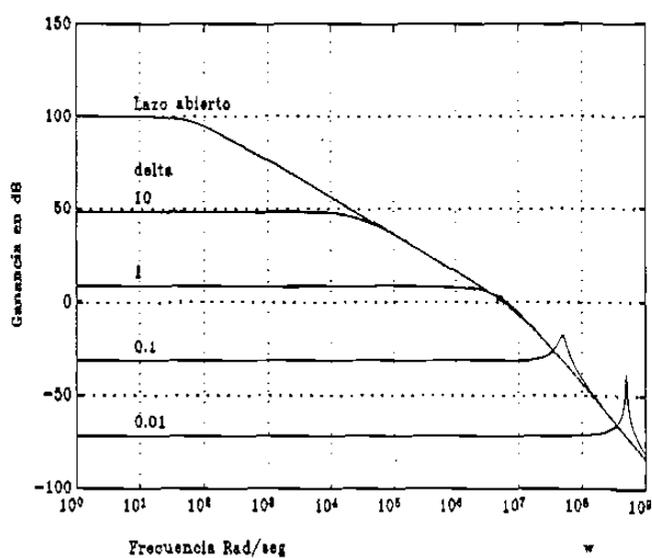


Fig. 1.3-2

# Capítulo 2

## NUCLEO DEL SISTEMA

### 2.1) EL CONCEPTO NUCLEO DEL SISTEMA

En estudio de circuitos electrónicos se emplean los términos Lazo Cerrado y Lazo Abierto, sin embargo resultaría posiblemente más apropiado emplear: "El Sistema" y "El Núcleo del Sistema", ya que si por ejemplo retroalimentamos un Amplificador Operacional ahora será un Lazo Cerrado con sus propias características, si tomamos este circuito y lo volvemos a retroalimentar entonces el término Lazo Abierto ahora se refiere a aquel que realmente es cerrado.

Como este trabajo estudia en buena parte los circuitos electrónicos amplificadores implementados a base de amplificadores operacionales, emplearemos el término "Núcleo del sistema" para referirse al amplificador operacional.

El concepto Núcleo de Amplificación se refiere al amplificador que pudiera ser un circuito electrónico integrado o un circuito retroalimentado compuesto de varios elementos, pero en cualquiera de los casos posee una ecuación de ganancia como (1.1-1) que describe su comportamiento. Para fines prácticos el término Núcleo del Sistema es una "Caja Negra" que no nos interesa como esta construida, pero conocemos su salida en función de su entrada. Una vez que el núcleo es retroalimentado, el conjunto total se transforma en una sola unidad que es el sistema, existiendo así una función del comportamiento del Núcleo del Sistema y otra función del comportamiento del Sistema. Cabe aclarar que el sistema (retroalimentado) de que hablamos puede volverse a retroalimentar para formar un nuevo sistema, convirtiéndose así el primer sistema en el núcleo del nuevo sistema.

## 2.2) RAZON DE AMORTIGUAMIENTO Y FRECUENCIA NATURAL DEL AMPLIFICADOR OPERACIONAL

El amplificador operacional es un circuito integrado que tiene dos entradas y una salida como se muestra esquemáticamente en (Fig. 2.2-1). La respuesta o salida del amplificador operacional es la multiplicación de su ganancia por la diferencia de los voltajes de positivo menos el de negativo como se muestra en la (2.2-1) donde " $A_0(\omega)$ " es la ganancia del amplificador operacional en función de la frecuencia.

$$v_0 = A_0(\omega)(v_p - v_n) \quad (2.2-1)$$

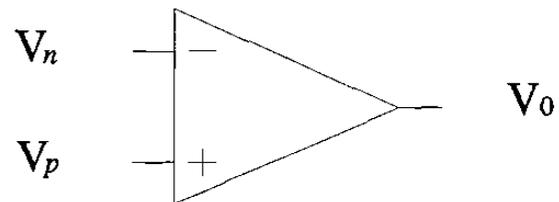


Fig. 2.2-1

La ganancia de un amplificador operacional es normalmente expresada en forma gráfica por los fabricantes, mediante un diagrama de Bode; normalmente aparece con dos polos como lo muestra (Fig. 2.2-2) (frecuencia en Hz en el eje horizontal). El amplificador operacional puede tener mas de dos polos pero solo se consideran los correspondientes a ganancias cercanas o superiores a la unitaria; en algunos casos el fabricante muestra solo un polo porque es el único correspondiente a ganancia superior a la unitaria, pero después de ver en el capítulo 4 las ventajas que aporta el contar con los dos polos, quedará claro que en aquellos casos el fabricante incurre en falta de información y que debería de dar los dos polos aunque el segundo de ellos corresponda a ganancias inferiores a la unitaria. En casos de dicha deficiencia es conveniente obtener el polo faltante mediante mediciones.

Cuando se desea expresar la información gráfica en ecuaciones, el método tradicional [5],

[6] es primeramente obtener los valores de los polos y luego emplearlos en un modelo como el mostrado por (2.2-2), donde  $A_{d0}$  es la ganancia de voltaje D.C.

$$A_{d0} = 3,981$$

$$\omega_a = 9.8858 \cdot 10^4$$

$$\omega_b = 9.2394 \cdot 10^7$$

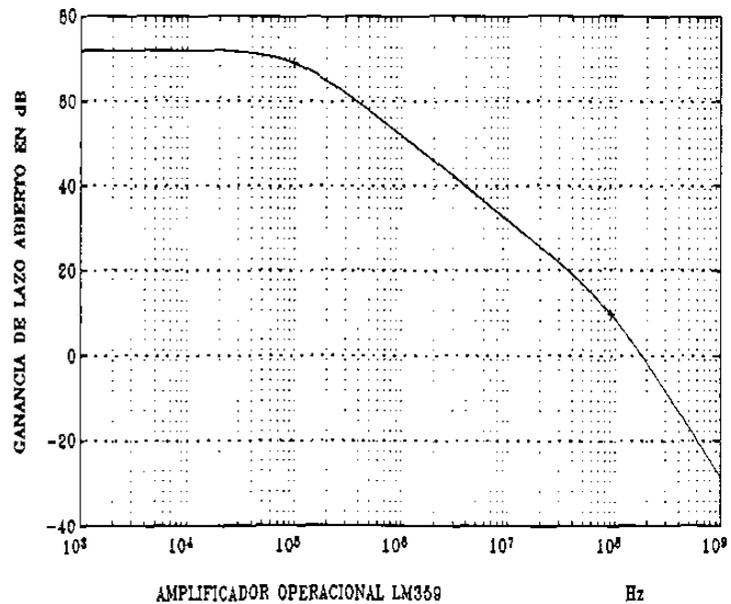


Fig. 2.2-2

$$A_o(\omega) = \frac{A_{d0}}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_a}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_b}\right)} \quad (2.2-2)$$

Si empleamos los valores de los polos en (1.1-8), (1.1-7) y (1.2-1), encontramos los valores de la razón de amortiguamiento " $\delta_0$ ", la frecuencia natural " $\omega_{n0}$ " y el promedio de polos " $\omega_0$ " propios del amplificador operacional, como aparecen en: (2.2-3), (2.2-4) y (2.2-5).

$$\delta_0 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{\omega_a}{\omega_b}} + \sqrt{\frac{\omega_b}{\omega_a}} \right) \quad (2.2-3)$$

$$\omega_{n0} = (\omega_a \omega_b)^{1/2} \quad (2.2-4)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{2}(\omega_a + \omega_b) \quad (2.2-5)$$

Con las ecuaciones anteriores es posible expresar la ganancia del amplificador operacional como lo muestra (2.2-6); donde el denominador " $P_0(\omega)$ " expresado por (2.2-7) que normalmente es un polinomio de segundo grado en la frecuencia, debido a los dos polos que posee dentro del rango de ganancia desde cercana a la unitaria hasta la máxima.

$$A_0(\omega) = \frac{A_{d0}}{P_0(\omega)} \quad (2.2-6)$$

$$P_0(\omega) = 1 + j2\delta_0 \frac{\omega}{\omega_{n0}} - \frac{\omega^2}{\omega_{n0}^2} \quad (2.2-7)$$

Con la finalidad de agilizar un poco el manejo de la información, es conveniente expresar el polinomio en la frecuencia " $P_0(\omega)$ " como la suma de "1" mas una función en la frecuencia que podemos identificarla por " $F_0(\omega)$ " como lo expresa (2.2-8), en la que la función en la frecuencia queda definida por (2.2-9).

$$P_0(\omega) = 1 + F_0(\omega) \quad (2.2-8)$$

$$F_0(\omega) = j2\delta_0 \frac{\omega}{\omega_{n0}} - \left(\frac{\omega}{\omega_{n0}}\right)^2 \quad (2.2-9)$$

Debe de aclararse que el índice cero que aparece en los diferentes términos de las ecuaciones que hemos estado manejando, es debido a que pertenecen a un amplificador operacional. Si las ecuaciones pertenecieran al sistema (retroalimentado), entonces no

llevarían dicho índice. Si empleamos en (1.2-2) los parámetros correspondientes al amplificador operacional que se este empleando, se obtienen el promedio de polos correspondiente al amplificador operacional (2.2-10).

$$\delta_0 \omega_{n0} = \omega_0 \quad (2.2-10)$$

A manera de ejemplo a continuación se mostrará para algunos amplificadores operacionales: Los diagramas de Bode con la información que tradicionalmente se obtiene de ellos que son los polos y la ganancia de voltaje D.C., además se agrega la información que para este estudio se requiere: la razón de amortiguamiento y la frecuencia natural propios del amplificador operacional.

#### Ejemplo 2.2-1 MC1741

$$A_{d0} = 100,000$$

$$\omega_a = 10.000 * 10^0 \text{ Hz.}$$

$$\omega_b = 1.5852 * 10^6 \text{ Hz.}$$

$$\delta_0 = 199.0$$

$$\omega_0 = 4.98 * 10^6 \text{ Rad/seg}$$

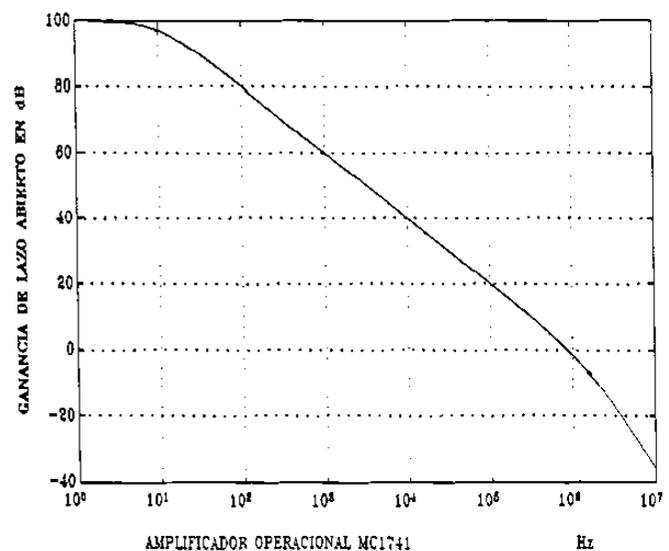


Fig. 2.2-3

## Ejemplo 2.2-2 MC3401

$$A_{d0} = 2,113.5$$

$$\omega_a = 3.5194 \cdot 10^3 \text{ Hz.}$$

$$\omega_b = 4.4414 \cdot 10^6 \text{ Hz.}$$

$$\delta_0 = 17.776$$

$$\omega_0 = 1.3964 \cdot 10^7 \text{ Rad/seg}$$

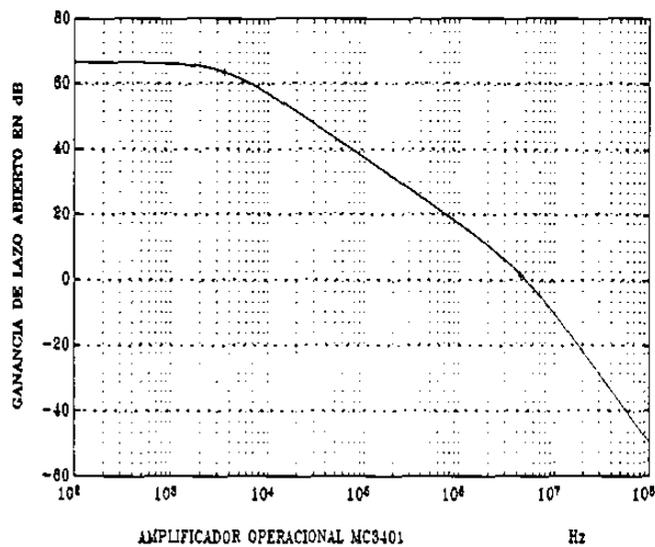


Fig. 2.2-4

## Ejemplo 2.2-3 LH0024

$$A_{d0} = 3,199$$

$$\omega_a = 3.0000 \cdot 10^5 \text{ Hz.}$$

$$\omega_b = 6.0000 \cdot 10^6 \text{ Hz.}$$

$$\delta_0 = 2.348$$

$$\omega_0 = 1.9800 \cdot 10^7 \text{ Rad/seg}$$

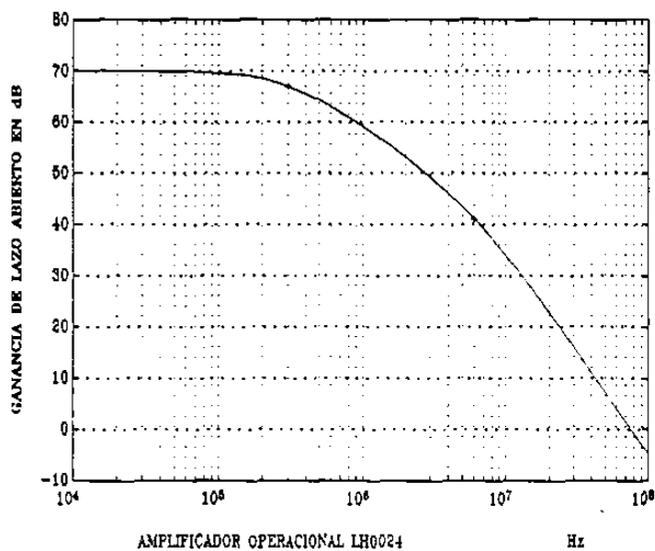


Fig. 2.2-5

# Capítulo 3

## AMPLIFICADORES BASICOS

### 3.1) CIRCUITO DE DOS ENTRADAS

Con la finalidad de fijar las bases para el análisis de las propiedades de la retroalimentación resistiva, es necesario analizar varios circuitos amplificadores; primeramente analicemos el circuito de dos entradas. Para lograr un circuito amplificador con capacidad de manejar señales de voltaje en corriente directa además de manejar un cierto dominio en la frecuencia, es necesario que su retroalimentación sea negativa; es decir que el voltaje de salida se conecte a la entrada "-" a través de una resistencia de retroalimentación " $R_F$ ", ya que de conectarse a la de signo "+" no podría trabajar en corriente directa ni en ninguna frecuencia en la que su fase diera lugar a una retroalimentación positiva.

Tomando en cuenta lo anterior, la señal de voltaje a amplificar debe de conectarse a la entrada "-" a través de una resistencia de entrada " $R_1$ ", formando así entre esta última y la resistencia de retroalimentación un divisor de voltaje que opera en función de la diferencia entre la señal a amplificar " $v_1$ " y la respuesta del amplificador operacional entregando en el nodo "-" una proporción de ello de acuerdo a los valores de las resistencias utilizadas, esto es así ya que se desprecia la corriente que toma el amplificador operacional por sus entradas "-" y "+".

Para analizar la capacidad de amplificación del circuito descrito, primeramente supongamos que la resistencia de entrada se alimenta con un voltaje " $v_1$ " y que la entrada "+" es conectada directamente a una señal de voltaje " $v_2$ " como se muestra en la figura 3.1-1.

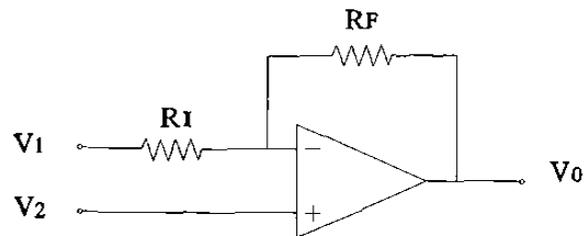


Fig. 3.1-1

El Amplificador Operacional tiene ganancias muy grandes que pueden ser del orden de  $10^5$  de tal manera que con solo alimentar a sus entradas señales de voltaje que den una diferencia de unos cuantos microvolts la respuesta puede ser de valores quizá ya cercanos a la saturación.

Dado que la diferencia de voltajes entre las entradas "positiva" y "negativa" es despreciable, entonces la señal voltaje de "-" es prácticamente igual a la señal de voltaje de "+", concluyéndose así el comportamiento práctico del circuito amplificador de la siguiente manera: El Amplificador Operacional entregara una salida tal que mediante el divisor de voltaje se logre un voltaje en el nodo "-" prácticamente igual que el de la entrada "+".

En el análisis preciso, se desprecia las corrientes de polarización en las entradas del Amplificador Operacional, que realmente si tienen un valor finito diferente de cero, que produce un voltaje en cada nodo "-" y "+" a través de sus resistencias equivalentes aún cuando sus señales de entrada a amplificar sean cero, produciéndose así un voltaje amplificado en su salida. Este efecto se elimina mediante métodos de compensación que no se incluyen a detalle en este trabajo pero a grandes rasgos consisten en obtener las resistencias equivalentes en cada una de las entradas "-" y "+" calculándolas con

valores de cero Volts, tanto en las señales de voltaje a amplificar como en la respuesta del circuito. Una vez obtenidas dichas resistencias equivalentes en cada entrada se agrega una resistencia de compensación en la entrada necesaria para lograr igualar la resistencia equivalente en cada una de sus entradas "-" y "+".

Basándonos en lo anterior podemos entonces suponer que la corriente en la resistencia de entrada " $R_I$ " es igual a la de la resistencia de retroalimentación " $R_F$ " según (3.1.1) y tomando en cuenta la caída de voltaje que esta corriente produce en la resistencia de entrada se calcula el voltaje en el nodo "-" con (3.1-2), que se simplifica en (3.1-3).

$$I = \frac{v_I - v_o}{R_I + R_F} \quad (3.1-1)$$

$$v_n = v_I - IR_I \quad (3.1-2)$$

$$v_n = \left(\frac{R_F}{R_I + R_F}\right)v_I + \left(\frac{R_I}{R_I + R_F}\right)v_o \quad (3.1-3)$$

Aplicando en (2.2-1) el de voltaje " $v_2$ " en la entrada "+" y la expresión de voltaje " $v_n$ " de (3.1-3), se obtiene el voltaje amplificado en la salida (3.1-4) en función de sí mismo y de las señales de entrada. Después de factorizar el voltaje de salida y simplificar se obtiene éste en función de las entradas " $v_1$ " y " $v_2$ ", como se muestra en (3.1-5); las variables  $v_o$ ,  $v_1$  y  $v_2$  están en el dominio de Laplace para  $s = j\omega$ .

$$v_o = A_0(\omega)v_2 - A_0(\omega)\frac{R_F}{R_I + R_F}v_1 - A_0(\omega)\frac{R_I}{R_I + R_F}v_o \quad (3.1-4)$$

$$v_o = \frac{A_0(\omega)(R_I + R_F)}{A_0(\omega)R_I + R_I + R_F}v_2 - \frac{A_0(\omega)R_F}{A_0(\omega)R_I + R_I + R_F}v_1 \quad (3.1-5)$$

Puede observarse en esta última ecuación que el voltaje " $v_1$ " se multiplica por un término diferente al que multiplica a " $v_2$ " mostrando así diferentes ganancias de amplificación en

cada una de las señales, permitiendo de esta manera obtener diferentes aplicaciones: Una aplicación puede ser cuando solo existe una sola señal de entrada a amplificar que se estudiara en el siguiente punto, otra es utilizarlo como un amplificador diferencial muy especial ya que no se amplifica la diferencia de voltajes sino la diferencia de proporciones de voltajes donde cada proporción es su ganancia correspondiente " $A_1(\omega)$ " y " $A_2(\omega)$ " como lo muestra (3.1-6) en donde dichas ganancias son de acuerdo a (3.1-7) y (3.1-8) respectivamente.

$$v_o = A_1(\omega)v_1 + A_2(\omega)v_2 \quad (3.1-6)$$

$$A_1(\omega) = - \frac{A_0(\omega)R_F}{A_0(\omega)R_I + R_I + R_F} \quad (3.1-7)$$

$$A_2(\omega) = + \frac{A_0(\omega)(R_I + R_F)}{A_0(\omega)R_I + R_I + R_F} \quad (3.1-8)$$

### 3.2) CIRCUITO CON UNA ENTRADA

En el caso de tener una sola señal " $v_i$ " para amplificar surgen dos aplicaciones mas; una de ellas es que " $v_i$ " sea la señal " $v_1$ " y entonces " $v_2$ " seria cero Volts ya que no existe y por lo tanto la entrada "+" quedaría conectada a tierra quedando expresado el voltaje de salida por (3.2-1) y (3.2-2) dando lugar así al **Amplificador Inversor** [7], en donde el nombre de inversor es porque su ganancia es de signo negativo.

$$v_o = A_1(\omega)v_1 \quad (3.2-1)$$

$$v_o = - \frac{A_0(\omega)R_F}{A_0(\omega)R_I + R_I + R_F} v_i \quad (3.2-2)$$

Otra aplicación es que la señal " $v_i$ " se aplique en la entrada "+" y entonces " $v_1$ " seria cero Volts quedando conectada a tierra la resistencia de entrada dando lugar así

al **Amplificador No Inversor** [7], en donde el voltaje de salida queda expresado por (3.2-3) y (3.2-4).

$$v_0 = A_2(\omega)v_i \quad (3.2-3)$$

$$v_0 = \frac{A_0(\omega)(R_I + R_F)}{A_0(\omega)R_I + R_I + R_F}v_i \quad (3.2-4)$$

Si analizamos que las ecuaciones de ganancia de los amplificadores "Inversor" y "No Inversor" (3.1-7) y (3.1-8) podemos observar que sus denominadores son iguales, por lo tanto es obvio que de sus correspondientes polinomios en la frecuencia se obtenga la misma ecuación característica y de ahí que se comporten de forma similar.

### 3.3) AMPLIFICADOR DE GANANCIA VARIABLE

Analicemos ahora el circuito que se muestra en la figura 3.3-1. Es semejante al amplificador inversor; recibe la señal a amplificar a través de una resistencia " $R_I$ ", pero tiene la diferencia de no recibir en la retroalimentación todo el voltaje de salida. En vez de este recibe una proporción " $K$ " del voltaje de salida " $v_o$ " a través de una resistencia de retroalimentación " $R_K$ ", esto se puede lograr de muchas maneras, la más sencilla es con un par de resistencias como divisor de voltaje, donde " $R_K$ " es el paralelo de ambas, y " $K$ " es la proporción de voltaje entregado por ellas.

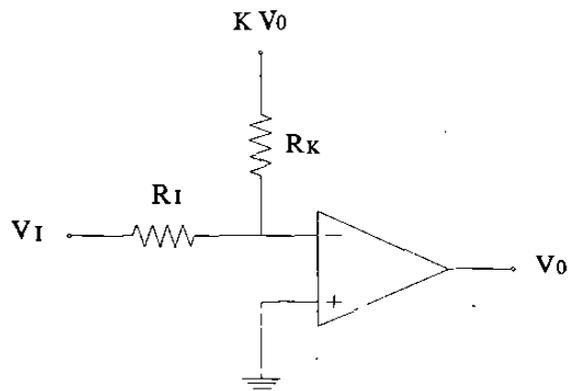


Fig. 3.3-1

Aplicando las mismas consideraciones del punto 3.1 respecto al consumo nulo de corriente en las entradas del amplificador operacional y respecto a la resistencia de compensación, podemos obtener las ecuaciones básicas para obtener el voltaje de salida.

La corriente que circula por la resistencia " $R_I$ " es la misma que la de la resistencia " $R_K$ " y es la que aparece en (3.3-1); con esta corriente se obtiene la caída de voltaje en la resistencia " $R_I$ " y a su vez el voltaje " $v_n$ " en la entrada correspondiente del amplificador operacional como se muestra en (3.3-2). Empleando estas últimas dos se obtiene el voltaje " $v_n$ " en función del voltaje de entrada " $v_i$ " y el voltaje de salida " $v_o$ " logrando así (3.3-3).

$$I = \frac{v_i - Kv_o}{R_I + R_K} \quad (3.3-1)$$

$$v_n = v_i - IR_I \quad (3.3-2)$$

$$v_n = \frac{R_K}{R_I + R_K} v_i + \frac{KR_I}{R_I + R_K} Kv_o \quad (3.3-3)$$

Substituyendo esta última ecuación en el voltaje de salida del amplificador operacional (2.2-1) en función de las señales de entrada " $v_n$ ", " $v_p$ " y tomando en cuenta que esta última señal es cero porque existe la conexión a tierra, se obtiene (3.3-4). Agrupando en ésta los términos que contienen el voltaje de salida y factorizándolo se despeja dicho voltaje como lo muestra (3.3-5); misma que se puede expresar por (3.3-6) que está en función de la ganancia del sistema que aparece en (3.3-7).

$$v_o = -A_0(\omega) \frac{R_K}{R_I + R_K} v_i - A_0(\omega) \frac{KR_I}{R_I + R_K} v_o \quad (3.3-4)$$

$$v_0 = - \frac{A_0(\omega)R_K}{A_0(\omega)KR_I + R_I + R_K} v_i \quad (3.3-5)$$

$$v_0 = A(\omega)v_i \quad (3.3-6)$$

$$A(\omega) = - \frac{A_0(\omega)R_K}{A_0(\omega)KR_I + R_I + R_K} \quad (3.3-7)$$

# Capítulo 4

## PROPIEDADES DEL FACTOR DE LAZO E INVARIANZA

### 4.1) FACTOR DE LAZO

Si observamos las ecuaciones de ganancia de voltaje correspondientes a los circuitos analizados en el capítulo 3, notaremos algo en común: La ganancia de voltaje del sistema se puede expresar como el cociente de la ganancia del núcleo del sistema multiplicada por un coeficiente de numerador, dividido entre uno más la ganancia del núcleo del sistema multiplicada por otro coeficiente de denominador. Los coeficientes mencionados son números reales porque resultan de operaciones entre las resistencias empleadas en la retroalimentación resistiva. Todo esto queda expresado de la manera siguiente.

Definición:  $K_N \triangleq$  Coeficiente de Numerador |  $K_N \in \text{Reales}$ .

$K_D \triangleq$  Coeficiente de Denominador |  $K_D \in \text{Reales}$ .

$$A(\omega) = \frac{A_0(\omega)K_N}{A_0(\omega)K_D + 1} \quad \left| \quad K_N, K_D \in \mathbb{R} \right. \quad (4.1-1)$$

En el transcurso de la tesis se probará que una vez que la ganancia de un sistema queda expresada en la forma anterior, el análisis del comportamiento del sistema es más sencillo.

En este capítulo no se pretende hacer un análisis del comportamiento del sistema en el dominio de la frecuencia, pero si facilitar el inicio de dicho análisis para lo cual es

conveniente substituir (2.2-8) en (2.2-6) que describe la ganancia del núcleo del sistema y esta a su vez en (4.1-1).

$$A_0(\omega) = \frac{A_{d0}}{P_0(\omega)} \quad (2.2-6)$$

$$P_0(\omega) = 1 + F_0(\omega) \quad (2.2-8)$$

Al substituir las ecuaciones en la forma indicada, se obtiene (4.1-2), de donde se puede obtener la ganancia de voltaje en D.C. del sistema "A<sub>d</sub>" (4.1-3); siendo ésta el numerador de (4.1-2) en la que es conveniente definir el cuadrado del **Factor de Lazo** "K<sub>L</sub>" como el termino que multiplica a la función en la frecuencia del núcleo del sistema, quedando definido por (4.1-4). La razón de definir el factor de lazo y de haberlo definido al cuadrado como aparece en (4.1-4), es algo que se aclarará en el siguiente punto al emplearlo y ver sus ventajas sobre los métodos tradicionales; de momento tómesese como una simple definición; entre las ventajas estará el deducir una cierta propiedad invariante en la retroalimentación resistiva entre el núcleo del sistema y el sistema.

$$A(\omega) = \frac{A_{d0} \frac{K_N}{A_{d0} K_D + 1}}{1 + \frac{1}{A_{d0} K_D + 1} F_0(\omega)} \quad (4.1-2)$$

$$A_d = \frac{A_{d0} K_N}{A_{d0} K_D + 1} \quad (4.1-3)$$

Definición: K<sub>L</sub> ≜ **Factor de Lazo**.

$$K_L^2 \triangleq \frac{1}{A_{d0} K_D + 1} \quad (4.1-4)$$

Debe de notarse que el factor de lazo es un número real ya que esta en función de  $A_{d0}$  y  $K_D$  que son numeros reales.

Empleando la definición del factor de lazo en la ecuación de ganancia de voltaje D.C. (4.1-3) del sistema, se simplifica a (4.1-5); empleando ésta y (4.1-4) en (4.1-2) se obtiene la ganancia del sistema (4.1-6).

$$A_d = A_{d0} K_N K_L^2 \quad (4.1-5)$$

$$A(\omega) = \frac{A_d}{1 + K_L^2 F_0(\omega)} \quad (4.1-6)$$

La ganancia de voltaje D.C. del sistema " $A_d$ " y el factor de lazo " $K_L$ " son muy particulares de la configuración del circuito que se esta estudiando; para obtenerlos hay que expresar la ganancia de voltaje del sistema en la forma (4.1-1) para obtener de ahí los coeficientes de numerador y denominador y de éstos a su vez los parámetros mencionados.

#### 4.2) EL FACTOR DE LAZO EN EL POLINOMIO DE LA FRECUENCIA

En los análisis que se harán en este punto, mediante ecuaciones muy sencillas se demostrará que en circuitos de retroalimentación resistiva cuyo núcleo del sistema esta modelado en dos polos se cumple lo siguiente: a) El Factor de Lazo esta íntimamente ligado con los coeficientes paramétricos del polinomio de la frecuencia que son: la razón de amortiguamiento y la frecuencia natural, b) La razón de amortiguamiento y la frecuencia natural del sistema no son parámetros independientes, están relacionados entre si a través del promedio de polos del núcleo del sistema.

En el denominador de la ecuación de ganancia de voltaje del sistema (4.1-6) aparece el producto del cuadrado del factor de lazo por la función en la frecuencia del núcleo del sistema (2.2-9). Tomando en cuenta que el factor de lazo es un número real entonces

la naturaleza matemática de dicha función se conserva en el producto; es decir que la parte real sigue siendo real e igualmente la parte imaginaria sigue conservándose como imaginaria. Entonces dicho producto sigue siendo una función en la frecuencia semejante a la del núcleo del sistema, solo que con diferentes coeficientes ya que los originales fueron modificados en la multiplicación por el cuadrado del factor de lazo, dando lugar así a lo siguiente:

$$K_L^2 \left( j2\delta_0 \frac{\omega}{\omega_0} - \left( \frac{\omega}{\omega_{n0}} \right)^2 \right) = j2\delta \frac{\omega}{\omega_n} - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \quad (4.2-1)$$

El lado derecho de la ecuación anterior es la nueva función en la frecuencia del sistema retroalimentado y sus coeficientes deben ser iguales a los correspondientes en el lado izquierdo para que la igualdad se mantenga, obteniéndose así:

$$2 \frac{\delta}{\omega_n} = K_L^2 \frac{2\delta_0}{\omega_{n0}} \quad (4.2-2)$$

$$\frac{1}{\omega_n^2} = \frac{K_L^2}{\omega_{n0}^2} \quad (4.2-3)$$

En estas dos últimas ecuaciones es donde se empieza a ver que a través del factor de lazo existe una relación entre los coeficientes paramétricos del polinomio de la frecuencia del sistema con los del núcleo del sistema.

De la ecuación (4.2-3) se obtiene directamente la frecuencia natural del sistema (4.2-4) en función de la del núcleo del sistema y el factor de lazo. Empleando ésta en (4.2-2) podemos despejar la razón de amortiguamiento del sistema en función de la del núcleo del sistema y el factor de lazo como aparece en la ecuación (4.2-5). De esta manera los parámetros " $\delta$ " y " $\omega_n$ " del sistema son calculados fácilmente de los del núcleo del sistema.

$$\omega_n = \frac{\omega_{n0}}{K_L} \quad (4.2-4)$$

$$\delta = K_L \delta_0 \quad (4.2-5)$$

Una vez conocidos " $\delta$ " y " $\omega_n$ " queda determinado el polinomio en la frecuencia del sistema (4.2-6) y la ganancia del sistema (4.1-6) se convierte en (4.2-7).

$$P(\omega) = 1 + j2\delta \frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \quad (4.2-6)$$

$$A(\omega) = \frac{A_d}{1 + j2\delta \frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \quad (4.2-7)$$

De las ecuaciones (4.2-4) y (4.2-5) se calculan los parámetros del sistema cuando el factor de lazo es conocido, pero si se desea diseñar un circuito que cumpla un valor específico de " $\omega_n$ " o " $\delta$ " implementado con un cierto amplificador operacional, entonces de ahí se obtiene el valor del factor de lazo como aparece en (4.2-8) y (4.2-9).

$$K_L = \frac{\omega_{n0}}{\omega_n} \quad (4.2-8)$$

$$K_L = \frac{\delta}{\delta_0} \quad (4.2-9)$$

Cuando se desea diseñar un sistema de amplificación que cumpla una cierta ganancia conocida y de una configuración definida por ejemplo amplificador inversor, no inversor o cualquier tipo del que se pueda conocer sus coeficientes de numerador y denominador, entonces es posible despejar el factor de lazo de (4.1-5) a partir de las ganancias del sistema y del núcleo del sistema como se hará en los capítulos 5 y 6.

### 4.3) INVARIANZA DE PROMEDIO DE POLOS

Lo anterior es de utilidad tanto en el análisis como en el diseño de circuitos amplificadores, pero una de las conclusiones más importantes en este tema es que: El producto de la razón de amortiguamiento del sistema (4.2-5) por la frecuencia natural del sistema (4.2-4) es el mismo que el del núcleo del sistema, logrando así lo siguiente:

$$\delta \omega_n = \delta_0 \omega_{n0} \quad (4.3-1)$$

Recordemos que en el capítulo 1 se probó que el producto de la razón de amortiguamiento por la frecuencia natural es igual al promedio de polos, así también en el capítulo 2 se mostró que el producto de la razón de amortiguamiento por la frecuencia natural del núcleo del sistema es igual al promedio de polos del amplificador operacional que es el núcleo del sistema.

Tomando en cuenta lo anterior y (4.3-1) queda probado que: El promedio de polos del sistema es igual al promedio de polos del núcleo del sistema como aparece en la ecuación (4.3-2) dando lugar al siguiente teorema.

### Teorema:

**El promedio de polos:  $\delta \omega_n = \omega_0$  es invariante en la retroalimentación resistiva.**

$$\underset{\text{Sistema}}{\delta \omega_n} = \underset{\text{Núcleo}}{\delta_0 \omega_{n0}} = \omega_0 \quad (4.3-2)$$

De esta última ecuación se obtiene una conclusión importante: **La razón de amortiguamiento y la frecuencia natural del sistema son variables dependientes.** Es decir que no pueden variar ambas arbitrariamente cuando el núcleo del sistema está fijo,

la selección de una determina el valor de la otra.

Una vez contando con la invarianza de polos, se puede simplificar el polinomio en la frecuencia (4.2-6) ya que la frecuencia natural se puede expresar en función de la razón de amortiguamiento y del promedio de polos; obteniendo así el polinomio (4.3-3) y la ganancia del sistema (4.3-4) que será de utilidad en el análisis de ancho de banda y multietapas del capítulo 7.

$$P(\omega) = 1 + j2\delta^2 \frac{\omega}{\omega_0} - \delta^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \quad (4.3-3)$$

$$A(\omega) = \frac{A_d}{1 + j2\delta^2 \frac{\omega}{\omega_0} - \delta^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad (4.3-4)$$

Cuando el núcleo del sistema es conocido, entonces el polinomio mostrado arriba posee un solo parámetro que es la razón de amortiguamiento. Esto rompe el esquema tradicional de que el polinomio en la frecuencia posee dos parámetros ya sean la razón de amortiguamiento y la frecuencia natural o el par de polos del sistema; en los primeros dos la invarianza de polos prueba que es falso ya que uno esta en función del otro y del promedio de polos; en el caso del par de polos también es falso ya que si se conoce el núcleo del sistema entonces se conoce su promedio de polos y en capítulo 1 se vio que ellos se encuentran simétricamente colocados respecto a su promedio, de tal manera que conociendo uno se conoce el otro.

Se puede presentar la posibilidad de que se conozcan los coeficiente del polinomio en la frecuencia (4.3-5) y se desee analizar su relación con la razón de amortiguamiento del sistema, si igualamos los polinomios (4.3-5) y (4.3-3) encontramos que la razón de amortiguamiento se puede calcular a partir de solo uno de los coeficientes A o B, y que

el promedio de polos se obtiene con ambos coeficientes.

$$P(\omega) = 1 + jA\omega - B\omega^2 \quad (4.3-5)$$

$$A = 2 \frac{\delta^2}{\omega_0} \quad (4.3-6)$$

$$B = \frac{\delta^2}{\omega_0^2} \quad (4.3-7)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{2} \frac{A}{B} \quad (4.3-8)$$

El teorema de invarianza de polos se puede demostrar por un método diferente en forma más general. Esto es considerando una función de retroalimentación resistiva "H" igual a una constante y una función de ganancia del núcleo del sistema "G(s)" (4.3-10) con un grado relativo al menos de dos: grado de denominador  $\geq$  grado de numerador + 2, que también se expresa como aparece en (4.3-11).

$$H(s) = h = \text{Cte. Real} \quad (4.3-9)$$

$$G(s) = g_0 \frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} \quad (4.3-10)$$

$$G(s) = \frac{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \cdots + a_{m-1}s^{m-1} + a_ms^m}{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \cdots + b_{n-1}s^{n-1} + s^n} \quad (4.3-11)$$

$$a_m = g_0, \quad b_{n-1} = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$$

Empleando la ya muy conocida ecuación de retroalimentación (4.3-12) de la que se obtiene (4.3-13) y a su vez (4.3-14).

$$A(s) = \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (4.3-12)$$

$$A(s) = \frac{(a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_{m-1}s^{m-1} + a_ms^m)h}{(b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_{n-1}s^{n-1} + s^n) + (a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_{m-1}s^{m-1} + a_ms^m)h} \quad (4.3-13)$$

$$A(s) = \frac{(a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_{m-1}s^{m-1} + a_ms^m)h}{(a_0h + b_0) + (a_1h + b_1)s + \dots + (a_{m-1}h + b_{m-1})s^{m-1} + (a_mh + b_m)s^m + b_{m+1}s^{m+1} + \dots + b_{n-1}s^{n-1} + b_ns^n} \quad (4.3-14)$$

En el denominador de esta última ecuación se puede ver que los primeros coeficientes son compuestos de la suma de  $a_i h$  con  $b_i$ , pero si la condición de grado relativo se cumple entonces el coeficiente correspondiente a  $s^{n-1}$  será solamente  $b_{n-1}$ , lo que significa que la suma de polos permanece sin cambio en el sistema retroalimentado, implicando que:

## Teorema:

**El promedio de polos es invariante a la retroalimentación resistiva en sistemas modelados con un orden relativo al menos dos.**

### 4.4) LIMITES PARAMETRICOS

El factor de lazo se obtiene de (4.1-4) que depende del valor de ganancia de voltaje en D.C. del núcleo del sistema " $A_{d0}$ " y del coeficiente de denominador " $K_D$ ". Este último depende de la configuración del sistema y de los valores de las resistencias empleadas en él; al trabajar en un sistema con su núcleo y configuración definidos y fijos, al variar el valor de sus resistencias varía el valor del coeficiente de denominador " $K_D$ ", dando

lugar así a un valor mínimo y un máximo, mismos que implican la existencia de un factor de lazo mínimo " $K_{L \min}$ " y un máximo " $K_{L \max}$ " dando lugar a la siguiente desigualdad:

$$K_{L \min} < K_L < K_{L \max} \quad (4.4-1)$$

Si multiplicamos cada termino de la desigualdad anterior por la razón de amortiguamiento del núcleo del sistema " $\delta_0$ ", se logrará convertir cada termino en el valor de la razón de amortiguamiento correspondiente; es decir en la izquierda será el mínimo, en el centro el del sistema y en la derecha será el máximo:

$$\delta_{\min} < \delta < \delta_{\max} \quad (4.4-2)$$

$$\delta_{\min} = \delta_0 K_{L \min} \quad (4.4-3)$$

$$\delta_{\max} = \delta_0 K_{L \max} \quad (4.4-4)$$

Las ecuaciones específicas del factor de lazo mínimo y máximo se obtienen de la configuración del sistema en que se este trabajando; la intención en este punto solo es mostrar que la razón de amortiguamiento es un parámetro acotado de acuerdo a la configuración y que posiblemente en algunos casos no se logre el valor que arbitrariamente deseemos.

---

# Capítulo 5

## AMPLIFICADOR INVERSOR

### 5.1) CONCEPTO GENERAL

En los primeros dos puntos de este capítulo se analizará el Amplificador Inversor en la forma tradicional, con el fin de comparar el método propuesto. Este amplificador fue descrito en el capítulo 3, este tipo de amplificador entrega una respuesta de signo inverso a la de su entrada como lo describe el voltaje de salida (3.2-2) que pertenece al circuito mostrado en la figura 5.1-1.

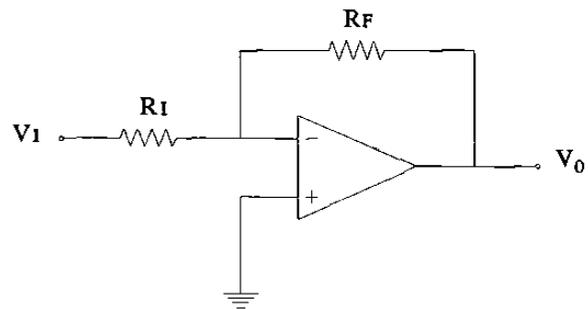


Fig. 5.1-1

### 5.2) ANALISIS DE LA GANANCIA

El voltaje de salida de este amplificador es función de la ganancia y del voltaje de entrada, como lo expresa (3.2-2). Si sustituimos en ella la ganancia del amplificador operacional que se muestra en (2.2-2) obtenemos (5.2-1); simplificandola un poco obtenemos (5.2-2).

$$v_0 = - \frac{A_0(\omega)R_F}{A_0(\omega)R_I + R_I + R_F} v_i \quad (3.2-2)$$

$$A_0(\omega) = \frac{A_{d0}}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_a})(1 + j\frac{\omega}{\omega_b})} \quad (2.2-2)$$

$$v_0 = - \frac{\frac{A_{d0}}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_a})(1 + j\frac{\omega}{\omega_b})} R_F}{\frac{A_{d0}}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_a})(1 + j\frac{\omega}{\omega_b})} R_I + R_I + R_F} v_i \quad (5.2-1)$$

$$v_0 = - \frac{A_{d0}R_F}{A_{d0}R_I + R_I + R_F + j(R_I + R_F)(\frac{1}{\omega_a} + \frac{1}{\omega_b})\omega - (R_I + R_F)\frac{\omega^2}{\omega_a\omega_b}} v_i \quad (5.2-2)$$

Si observamos el denominador de (5.2-2) notaremos que posee: un término independiente que es compuesto de varias partes, un término con " $\omega$ " y otro con " $\omega^2$ ". Esto nos da un polinomio de segundo grado, pero no tiene la forma adecuada para conocer los polos; es decir que el coeficiente de  $\omega^2$  sea unitario, ni tiene tampoco la forma adecuada para conocer sus valores de " $\delta$ " y " $\omega_n$ "; es decir que su término independiente sea de valor unitario.

Pueden hacerse las operaciones necesarias para darle una u otra de las formas mencionadas, pero la forma más conveniente es la que permite conocer con facilidad " $\delta$ " y " $\omega_n$ " ya que estos parámetros aportan muy buena información del comportamiento del sistema, y permiten conocer fácilmente los polos a partir de (1.1-9) y (1.1-10).

$$P_1 = \delta \omega_n - \omega_n \sqrt{\delta^2 - 1} \quad (1.1-9)$$

$$P_2 = \delta \omega_n + \omega_n \sqrt{\delta^2 - 1} \quad (1.1-10)$$

Dado lo anterior, es necesario dividir el numerador y denominador de (5.2-2) entre el término independiente para darle al polinomio la forma adecuada que permite obtener fácilmente " $\delta$ " y " $\omega_n$ "; llegando así a (5.2-3) que posee un denominador de la forma del polinomio mostrado en (5.2-4).

$$v_0 = \frac{\frac{A_{d0} R_F}{A_{d0} R_I + R_I + R_F}}{1 + j \frac{R_I + R_F}{A_{d0} R_I + R_I + R_F} \left( \frac{1}{\omega_a} + \frac{1}{\omega_b} \right) \omega - \frac{R_I + R_F}{A_{d0} R_I + R_I + R_F} \frac{\omega^2}{\omega_a \omega_b}} v_i \quad (5.2-3)$$

$$P(\omega) = 1 + j2\delta \frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \quad (5.2-4)$$

La forma como hasta aquí se ha desarrollado el tema, es como tradicionalmente se maneja; según sean los valores conocidos del caso se substituyen en (5.2-3) y de ella se despejan las variables deseadas. Como ejemplo de los métodos tradicionales podemos ver el siguiente caso.

#### Ejemplo 5.2-1.

Se tiene un circuito amplificador inversor como el de la figura 5.1-1, que es implementado con un amplificador operacional "MC1741" y con los valores de resistencias que se muestran mas abajo, se desea conocer:

- A) La ganancia de voltaje D.C.
- B) La razón de amortiguamiento y la frecuencia natural del sistema.
- C) Con que relación de resistencias " $R_F/R_I$ " se logra un circuito que tenga una razón de amortiguamiento y una frecuencia natural 10% mayor que las del inciso "B".

Datos de resistencias:

$$R_F = 10 \text{ K}\Omega$$

$$R_I = 1 \text{ K}\Omega$$

Datos de MC1741:

$$A_{d0} = 100,000$$

$$f_a = 10.000 \text{ Hz.}$$

$$f_b = 1.5852 \cdot 10^6 \text{ Hz.}$$

Solución.

A) La ganancia de voltaje D.C. es el numerador de (5.2-3); substituyendo los valores en el encontramos:

$$A_{d0} = -\frac{100 \cdot 10^3 * 10 \cdot 10^3}{100 \cdot 10^3 * 10^3 + 10^3 + 10 \cdot 10^3}$$

$$A_{d0} = -9.9989$$

B) La razón de amortiguamiento y la frecuencia natural del sistema, se encuentran del denominador de (5.2-3) ya que es el polinomio en la frecuencia del sistema. Primeramente substituyamos los valores conocidos en denominador mencionado para obtener los coeficientes del polinomio.

$$P(\omega) = 1 + j \frac{10^3 + 10 \cdot 10^3}{100 \cdot 10^3 * 10^3 + 10^3 + 10 \cdot 10^3} * \left( \frac{1}{62.878} + \frac{1}{9.9599 \cdot 10^6} \right) \omega - \frac{10^3 + 10 \cdot 10^3}{100 \cdot 10^3 * 10^3 + 10^3 + 10 \cdot 10^3} * \frac{\omega^2}{(62.878) * (9.9599 \cdot 10^6)}$$

$$P(\omega) = 1 + j1.7491 \cdot 10^{-6} \omega - 1.7561 \cdot 10^{-13} \omega^2$$

Si igualamos cada coeficiente del polinomio anterior con su correspondiente del polinomio de la forma general modelado con parámetros " $\delta$ " y " $\omega_n$ " que se muestra en seguida, podemos obtener los valores " $\delta$ " y " $\omega_n$ "

$$P(\omega) = 1 + j2\delta \frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}$$

$$\frac{1}{\omega_n^2} = 1.7561 * 10^{-13} \quad \omega_n = 2.3863 * 10^6$$

$$\frac{2\delta}{\omega_n} = 1.7491 * 10^{-6} \quad \delta = 2.0869$$

C) La relación de resistencias que en este inciso se pide, se puede analizar de ecuaciones semejantes de donde se obtuvieron " $\delta$ " y " $\omega_n$ " en el inciso anterior, solo que en vez de manejarlas con valores numéricos se manejarían con literales y en lugar de emplear " $R_1$ " y " $R_F$ ", se harían las modificaciones necesarias para que las ecuaciones empleen " $r$ ", donde " $r$ " es la relación de resistencias " $R_F/R_1$ ". Dichas ecuaciones se obtienen igualando los coeficientes del polinomio de (5.2-4) con el denominador de (5.2-3).

$$2 \frac{\delta}{\omega_n} = \frac{1+r}{A_{d0} + 1 + r} \left( \frac{1}{\omega_a} + \frac{1}{\omega_b} \right)$$

$$\frac{1}{\omega_n^2} = \frac{1+r}{A_{d0} + 1 + r} \frac{1}{\omega_a \omega_b}$$

Dado que los polos del amplificador operacional son conocidos al igual que los nuevos valores deseados de " $\delta$ " y " $\omega_n$ ", entonces pueden agruparse en el lado derecho los valores conocidos y llamarles de alguna manera para hacer el análisis con mas claridad.

$$\frac{1+r}{A_{d0} + 1 + r} = C_1, \quad C_1 = \frac{2 \frac{\delta}{\omega_n}}{\left( \frac{1}{\omega_a} + \frac{1}{\omega_b} \right)}$$

$$\frac{1 + r}{A_{db} + 1 + r} = C_2, \quad C_2 = \frac{\omega_a \omega_b}{\omega_n^2}$$

De la primera ecuación de estas últimas dos, puede verse que mientras " $\delta$ " y " $\omega_n$ " cambien en la misma proporción, " $C_1$ " permanecerá en el mismo valor y por lo tanto " $r$ " permanecerá constante en dicho cambio. De la segunda ecuación de las mencionadas, puede verse que con el hecho de que cambie " $\omega_n$ ", " $C_2$ " cambiara también y entonces " $r$ " tendrá que cambiar. Los resultados de este análisis son contradictorios y por el momento solo se dirá que este inciso no tiene solución.

El resultado del último inciso del ejemplo anterior muestra que los conocimientos de electrónica analógica no se deben de limitar a conocer: los modelos matemáticos de los amplificadores operacionales, las leyes básicas de circuitos eléctricos y las bases de números complejos para manejar todo esto. Manejarlo así es bastante tedioso y además limitado.

### 5.3) FACTOR DE LAZO EN EL AMPLIFICADOR INVERSOR

En el capítulo 4 se vio que en todo sistema que tenga su ganancia de voltaje en la forma (4.1-1), se puede definir en el los coeficientes de numerador, denominador y el factor de lazo pudiéndose así aplicar las ventajas que de el se derivan.

$$A(\omega) = \frac{A_0(\omega)K_N}{A_0(\omega)K_D + 1} \quad (4.1-1)$$

La ganancia del amplificador operacional es el termino del lado derecho de (3.2-2) que multiplica al voltaje de entrada como lo muestra (3.1-7); si le hacemos los cambios adecuados para lograr la forma mencionada se obtiene (5.3-1), de donde se obtienen los coeficientes de numerador (5.3-2) y denominador (5.3-3).

$$A(\omega) = - \frac{A_0(\omega)R_F}{A_0(\omega)R_I + R_I + R_F} \quad (3.1-7)$$

$$A(\omega) = - \frac{A_0(\omega) \frac{R_F}{R_I + R_F}}{A_0(\omega) \frac{R_I}{R_I + R_F} + 1} \quad (5.3-1)$$

$$K_N = \frac{R_F}{R_I + R_F} \quad (5.3-2)$$

$$K_D = \frac{R_I}{R_I + R_F} \quad (5.3-3)$$

Empleando la última información en la definición de factor de lazo (4.1-4) se obtiene (5.3-4) con la que se puede obtener el factor de lazo cuando las resistencias " $R_I$ " y " $R_F$ " son conocidas; cuando el dato conocido es la relación de resistencias " $r=R_F/R_I$ " entonces se aplican éstas en (5.3-4) de donde se obtiene (5.3-5).

$$K_L^2 = \frac{1}{A_{do}K_D + 1} \quad (4.1-4)$$

$$K_L^2 = \frac{R_I + R_F}{A_{do} + R_I + R_F} \quad (5.3-4)$$

$$K_L^2 = \frac{1 + r}{A_{do} + 1 + r} \quad (5.3-5)$$

En la ecuación del Factor de Lazo (5.3-5), podemos considerar " $1+r$ " como un sólo término y despejarlo como aparece en (5.3-6), de esta última se puede obtener la relación de resistencias " $r$ " en función del factor de lazo y la ganancia de voltaje en D.C. del núcleo del sistema como se muestra en (5.3-7).

$$1 + r = \frac{A_{d0} K_L^2}{1 - K_L^2} \quad (5.3-6)$$

$$r = \frac{(A_{d0} + 1) K_L^2 - 1}{1 - K_L^2} \quad (5.3-7)$$

Esta última ecuación es útil cuando se desea conocer la relación de resistencias "r" capaz de darle al sistema una razón de amortiguamiento o una ganancia, ya que de estas últimas se determina el factor de lazo para calcular la relación buscada.

#### 5.4) LIMITES PARAMETRICOS DEL AMPLIFICADOR INVERSOR

En el capítulo anterior se mostró la importancia de conocer los límites del factor de lazo. Para este caso se obtienen al analizar el correspondiente al amplificador inversor (5.3-5) tomando en cuenta que la relación de resistencias "r" que puede variar desde cero hasta infinito, dando lugar a dos valores límite : factor de lazo mínimo " $K_{L \min}$ ", y factor de lazo máximo " $K_{L \max}$ ". El factor de lazo mínimo se calcula directamente al substituir " $r = 0$ " en (5.3-5) para obtener así (5.4-1).

$$K_{L \min} = \sqrt{\frac{1}{A_{d0} + 1}} \quad (5.4-1)$$

La ecuación del factor de lazo máximo no se puede obtener directamente haciendo la substitución de " $r = \infty$ " ya que el resultado es indeterminado; de tal manera que hay que obtenerlo empleando el teorema de L'Hospital (pag. 31 [9]),[10] que se muestra en seguida, para de ahí encontrar (5.4-2) y (5.4-3).

$$\text{Si: } \frac{f(a)}{g(a)} = \text{Indeterminado, entonces: } \left. \frac{f(x)}{g(x)} \right|_a = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

$$K_{L \max}^2 = \frac{1}{1} = 1 \quad (5.4-2)$$

$$K_{L \max} = 1 \quad (5.4-3)$$

Substituyendo los resultados de (5.4-1) y (5.4-2) en (4.4-1) nos muestra que el factor de lazo del amplificador inversor no puede tomar cualquier valor arbitrario, es un parámetro acotado como lo muestra (5.4-4).

$$\sqrt{\frac{1}{A_{d0}+1}} < K_L < 1 \quad (5.4-4)$$

Una vez obtenidos los límites del factor de lazo, se pueden conocer los límites de la razón de amortiguamiento de (4.4-3) y (4.4-4) encontrando así (5.4-5) y (5.4-6).

$$\delta_{\min} = K_{L \min} \delta_0 = \delta_0 \sqrt{\frac{1}{A_{d0}+1}} \quad (5.4-5)$$

$$\delta_{\max} = K_{L \max} \delta_0 = \delta_0 \quad (5.4-6)$$

Los límites inmediatos anteriores aportan información importante que puede ser utilizada para normar criterios de diseño, ya que nos muestra que un amplificador inversor no puede ser diseñado para cumplir cualquier razón de amortiguamiento que deseemos,  $\delta$  está acotada como se muestra en (5.4-7).

$$\delta_0 \sqrt{\frac{1}{A_{d0} + 1}} < \delta < \delta_0 \quad (5.4-7)$$

En el teorema del punto 4.3 se probó que el producto de la razón de amortiguamiento por la frecuencia natural es invariante a la retroalimentación resistiva es igual al promedio de polos del núcleo del sistema " $\delta\omega_n = \omega_0$ ", entonces si la razón de

amortiguamiento está en el valor del límite mínimo, la frecuencia natural estará en su límite máximo ya que el producto de ambos es constante y viceversa. De esta manera podemos obtener los límites para la frecuencia natural (5.4-8) y (5.4-9).

$$\omega_{n \min} = \frac{\omega_{n0}}{K_{L \max}} = \omega_{n0} \quad (5.4-8)$$

$$\omega_{n \max} = \frac{\omega_{n0}}{K_{L \min}} = \omega_{n0} \sqrt{A_{d0} + 1} \quad (5.4-9)$$

Es obvio que los resultados inmediatos anteriores se pudieron haber obtenido aplicando los límites del factor de lazo (5.4-1) y (5.4-3) en (4.2-4).

### 5.5) EL FACTOR DE LAZO EN LA GANANCIA DE DIRECTA

La ganancia de voltaje en D.C. del sistema se obtiene de (4.1-5), dado que en ella se emplea el coeficiente de numerador (5.3-2) es conveniente expresarlo en función de la relación de resistencias "r" obteniendo así (5.5-1), al substituir en esta (5.3-6) y (5.3-7) se obtiene (5.5-2).

$$A_d = A_{d0} K_N K_L^2 \quad (4.1-5)$$

$$K_N = \frac{r}{1 + r} \quad (5.5-1)$$

$$K_N = \frac{(A_{d0} + 1)K_L^2 - 1}{A_{d0}K_L^2} \quad (5.5-2)$$

Substituyendo esta última en (4.1-5) y simplificando se obtiene la ganancia de voltaje en D.C. del sistema (5.5-3) que por facilidad de memorización y comparación con su equivalente que se obtendrá para el amplificador no inversor conviene expresarla como (5.5-4), que empleando (4.2-5) también se puede expresar como (5.5-5) y (5.5-6).

$$A_d = (A_{d0} + 1)K_L^2 - 1 \quad (5.5-3)$$

$$\frac{A_d + 1}{A_{d0} + 1} = K_L^2 \quad (5.5-4)$$

$$\frac{A_d + 1}{A_{d0} + 1} = \frac{\delta^2}{\delta_0^2} \quad (5.5-5)$$

$$\frac{A_d + 1}{\delta^2} = \frac{A_{d0} + 1}{\delta_0^2} \quad (5.5-6)$$

Estas últimas dos ecuaciones son de utilidad en diseño ya que queda claramente expresada la relación que existe entre la ganancia de voltaje en D.C. y la razón de amortiguamiento del sistema con las correspondientes del núcleo. El cociente mostrado en la última de ellas permanece invariante; es decir que el cociente del sistema es el mismo que el del núcleo del sistema, de tal manera que los valores de ganancia de voltaje en D.C. y la razón de amortiguamiento del sistema no pueden ser seleccionados por separado. Si se calcula dicho cociente para cada una de los amplificadores operacionales con que pudiéramos trabajar, nos daría una información empleable como criterio de selección de amplificadores operacionales.

Tomando en cuenta los límites del factor de lazo (5.4-1) y (5.4-3) en la ganancia de voltaje en D.C. del sistema (5.5-3), encontramos que el límite inferior de esta queda expresado por (5.5-7) y (5.5-8) y su límite superior por (5.5-9) y (5.5-10). Como era de esperarse el mínimo es cero y el máximo es la ganancia del núcleo del sistema.

$$A_{d \min} = (A_{d0} + 1)K_{L \min}^2 - 1 \quad (5.5-7)$$

$$A_{d \min} = 0 \quad (5.5-8)$$

$$A_{d \max} = (A_{d0} + 1)K_{L \max}^2 - 1 \quad (5.5-9)$$

$$A_{d \max} = A_{d0} \quad (5.5-10)$$

## 5.6) APLICACIONES

Como muestra del factor de lazo y la invarianza de polos es conveniente resolver algunos ejemplos, pero primeramente hay que comparar los conceptos propuestos en ésta tesis con los métodos convencionales y para esto es necesario resolver con los nuevos conceptos el ejemplo 5.2-1

Ejemplo 5.6-1. (nueva solución del ejemplo 5.2-1)

Se tiene un circuito amplificador inversor como el de la figura 5.1-1, que es implementado con un amplificador operacional "MC1741" y con los valores de resistencias que se muestran mas abajo, se desea conocer:

- A) La ganancia de voltaje D.C.
- B) La razón de amortiguamiento y la frecuencia natural del sistema.
- C) Con que relación de resistencias " $R_F/R_I$ " se logra un circuito que tenga una razón de amortiguamiento y una frecuencia natural 10% mayor que las del inciso "B".

Datos de resistencias:

$$R_F = 10 \text{ K}\Omega$$

$$R_I = 1 \text{ K}\Omega$$

Datos de MC1741:

$$A_{d0} = 100,000$$

$$f_a = 10.000 * 10^0 \text{ Hz.}$$

$$f_b = 1.5852 * 10^6 \text{ Hz.}$$

Solución.

1) De el ejemplo 2.2-1 (capítulo 2) tomamos los datos del amplificador operacional:

$$A_{d0} = 100 \cdot 10^3 \quad \delta_0 = 199 \quad \omega_0 = 4.98 \cdot 10^6 \text{ rad/seg}$$

2) De los datos de este ejemplo se obtiene:  $r = R_f/R_i = 10.0$

3) Empleando el valor de "r" y el de  $A_{d0}$  en el factor de lazo:

$$K_L^2 = \frac{1 + r}{A_{d0} + 1 + r} = \frac{1 + 10}{100 \cdot 10^3 + 1 + 10} \quad (5.3-5)$$

$$K_L = 0.0104875$$

A) Con el factor de lazo y el valor de  $A_{d0}$  se obtiene la ganancia de voltaje en D.C. del sistema:

$$A_d = (A_{d0} + 1)K_L^2 - 1 = (100 \cdot 10^3 + 1) \cdot (0.0104875^2) - 1 \quad (5.5-3)$$

$$A_d = 9.9989$$

B) La razón de amortiguamiento se obtiene aplicando en (4.2-5) el valor del factor de lazo y el valor de  $\delta_0 = 199$ . La frecuencia natural se despeja de la invarianza de polos (4.3-2), y aplicando en ella  $\omega_0 = 4.98 \cdot 10^6$  y el valor de  $\delta$  se obtiene  $\omega_n$

$$\delta = K_L \delta_0 = 0.0104875 \cdot 199 \quad (4.2-5)$$

$$\delta = 2.0870$$

$$\delta \omega_n = \delta_0 \omega_{n0} = \omega_0 \quad \omega_n = \frac{\omega_0}{\delta} = \frac{4.98 \cdot 10^6}{2.0870} \quad (4.3-2)$$

$$\omega_n = 2.3862 \cdot 10^6 \text{ rad/seg}$$

C) El teorema de invarianza de polos empleado en el inciso anterior prueba que el producto de la razón de amortiguamiento y la frecuencia natural es invariante e igual al promedio de polos del núcleo del sistema y por lo tanto no es posible pedir que suban ambas.

#### Ejemplo 5.6-2

Con un amplificador operacional MC3401 se desea implementar un amplificador inversor con una ganancia de voltaje en D.C. de 80.

Preguntas:

- A) La relación de resistencias "r"
- B) La razón de amortiguamiento
- C) Con que relación de resistencias "r" se logra  $\delta = 2$  conservando la misma ganancia  $A_d = 80$
- D) Con que valor de resistencias se logra  $\delta = 0.1$  aunque cambie la ganancia  $A_d$

Solución.

1) Del ejemplo 2.2-2 (capítulo 2) se obtienen los datos del amplificador operacional:

$$A_{d0} = 2,113.5 \quad \delta_0 = 17.776 \quad \omega_0 = 1.3964 \cdot 10^7 \text{ rad/seg}$$

2) Empleando el valor de las ganancias del sistema y de su núcleo en la ecuación (5.5-4) se calcula el valor del factor de lazo.

$$K_L^2 = \frac{A_d + 1}{A_{d0} + 1} = \frac{80 + 1}{2,113.5 + 1} \quad (5.5-4)$$

$$K_L = 0.1957$$

A) La relación de resistencias se calcula aplicando el valor del factor de lazo en la ecuación (5.3-7)

$$r = \frac{(A_{do} + 1)K_L^2 - 1}{1 - K_L^2} = \frac{(2,113.5 + 1) \cdot (0.1957^2) - 1}{1 - (0.1957^2)} \quad (5.3-7)$$

$$r = 83.1866$$

B) La razón de amortiguamiento se obtiene empleando el valor del factor de lazo y el valor de  $\delta_0 = 17.776$  en (4.2-5).

$$\delta = K_L \delta_0 = 0.1957 \cdot 17.776 \quad (4.2-5)$$

$$\delta = 3.4788$$

C) Si los cocientes calculados con  $A_d$  y  $\delta$  (del sistema y de su núcleo) en ambos lados de la ecuación (5.5-6) son del mismo valor, entonces se buscaría el valor de "r" adecuado pero en caso contrario significa que no es posible el diseño con esos valores

$$\frac{A_d + 1}{\delta^2} = \frac{A_{do} + 1}{\delta_0^2} \quad \frac{80 + 1}{2^2} \neq \frac{2,113.5 + 1}{17.776^2} \quad (5.5-6)$$

El resultado muestra que no es posible este inciso

D) Primeramente hay que verificar que el valor deseado de  $\delta$  este dentro de las cotas establecidas por la configuración y el núcleo del sistema, esto se logra aplicando (5.4-7)

$$\delta_0 \sqrt{\frac{1}{A_{do} + 1}} < \delta < \delta_0 \quad 17.776 \sqrt{\frac{1}{2113.5 + 1}} < \delta < 17.776 \quad (5.4-7)$$

$$0.3866 < \delta < 17.776$$

La  $\delta$  deseada es menor que  $\delta_{min}$ , no es posible este inciso.

## Ejemplo 5.6-3

Se desea diseñar un amplificador inversor con una ganancia de voltaje en D.C. de 100 y con la máxima razón de amortiguamiento posible empleando cualquier amplificador operacional de: MC1741 o MC3401.

## Preguntas

- A) Con que amplificador operacional se logra el diseño deseado.  
 B) Cual es el valor de la razón de amortiguamiento.  
 C) Cual es el valor de la relación de resistencias "r"

## Solución:

1) De los ejemplos (2.2-1) y (2.2-2) se obtienen los datos de los amplificadores operacionales propuestos:

$$\text{MC1741} \quad A_{d0} = 100 \cdot 10^3 \quad \delta_0 = 199 \quad \omega_0 = 4.98 \cdot 10^6 \text{ rad/seg}$$

$$\text{MC 3401} \quad A_{d0} = 2,113.5 \quad \delta_0 = 17.776 \quad \omega_0 = 1.3964 \cdot 10^7 \text{ rad/seg}$$

2) Con los datos anteriores se calcula para ambos amplificadores operacionales el cociente derecho de (5.5-6):

$$\text{MC1741} \quad \frac{A_d + 1}{\delta^2} = \frac{A_{d0} + 1}{\delta_0^2} = \frac{100 \cdot 10^3 + 1}{199^2} = 2.525214 \quad (5.5-6)$$

$$\text{MC3401} \quad \frac{A_d + 1}{\delta^2} = \frac{A_{d0} + 1}{\delta_0^2} = \frac{2,113.5 + 1}{17.776^2} = 6.6917484 \quad (5.5-6)$$

A) Si analizamos la ecuación (5.5-6) encontramos que el amplificador operacional MC1741 de cociente mas pequeño es el que da la razón de amortiguamiento mas grande.

B) Despejando la razón de amortiguamiento de la ecuación (5.5-6) se obtiene el valor

de ella.

$$\delta = \sqrt{\frac{A_d + 1}{2.525214}} = \sqrt{\frac{100 + 1}{2.525214}}$$

$$\delta = 6.32423$$

C) El factor de lazo se despeja de (4.2-5) y de este se obtiene la relación de resistencias  $r$  mediante (5.3-7).

$$K_L = \frac{\delta}{\delta_0} = \frac{6.32423}{199}$$

$$K_L = 0.03178$$

$$r = \frac{(A_{d0} + 1)K_L^2 - 1}{1 - K_L^2} = \frac{(100 \cdot 10^3 + 1) \cdot 0.03178^2 - 1}{1 - 0.03178^2} \quad (5.3-7)$$

$$r = 100.09895$$

Con los tres ejemplos anteriores se puede comparar los conceptos propuestos en esta tesis contra los tradicionales. Es importante aclarar que las ecuaciones empleadas en estos ejemplos son simples de por sí, no existe en ninguna de ellas absolutamente ninguna simplificación por aproximación; es decir despreciar elementos que sean muy pequeños con respecto al resto de su término.

# Capítulo 6

## AMPLIFICADOR NO INVERSOR

### 6.1) CONCEPTO GENERAL

Algunos autores [2], [3] tratan el amplificador inversor y el no inversor como dos temas distintos, sin embargo si analizamos lo expuesto en el capítulo tres veremos que ambos tipos de amplificadores poseen igual denominador en la ganancia de voltaje del sistema (3.2-2) y (3.2-4). Esto implica que tanto el factor de lazo como los conceptos que de él se derivan sean los mismos en el amplificador no inversor e inversor, lo que si resulta diferente entre ellos pero con cierta semejanza es la ganancia de voltaje en D.C.

Al igual que en el capítulo anterior, los primeros dos puntos de este capítulo se tratarán en la forma tradicional para poder comparar ésta con los conceptos propuestos en esta tesis. El Amplificador No Inversor es aquel que entrega una respuesta del mismo signo de la señal que se le aplica a su entrada; su circuito es el que se muestra en la figura 6.1-1. Entre sus características importantes se encuentra el hecho de que la señal a amplificar entra directamente al amplificador operacional lográndose así una alta impedancia de entrada,

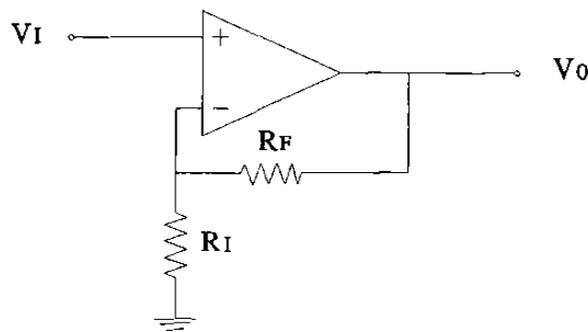


Fig. 6.1-1

## 6.2) ANALISIS DE LA GANANCIA

El principio fundamental de este tipo de amplificador es en gran parte muy parecido al del Amplificador Inversor ya que los dos "nacen" de un mismo concepto de amplificación, pero la ganancia de voltaje en corriente directa del Amplificador No Inversor es diferente a la del Inversor; esta es la única diferencia que existe entre ambos tipos de amplificadores.

El voltaje de salida del amplificador no inversor se obtiene de (3.2-4); substituyendo en ella la de ganancia del amplificador operacional (2.2-2) se obtiene así (6.2-1), de la cual mediante procedimientos algebraicos se simplifica en (6.2-2).

$$v_0 = \frac{A_0(\omega)(R_I + R_F)}{A_0(\omega)R_I + R_I + R_F} v_i \quad \text{Ec. 3.2-4}$$

$$A_0(\omega) = \frac{A_{d0}}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_a})(1 + j\frac{\omega}{\omega_b})} \quad \text{Ec. 2.2-2}$$

$$v_0 = \frac{\frac{A_{d0}}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_a})(1 + j\frac{\omega}{\omega_b})} (R_I + R_F)}{\frac{A_{d0}}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_a})(1 + j\frac{\omega}{\omega_b})} R_I + R_I + R_F} v_i \quad (6.2-1)$$

$$v_0 = \frac{A_{d0}(R_I + R_F)}{A_{d0}R_I + R_I + R_F + j(R_I + R_F)(\frac{1}{\omega_a} + \frac{1}{\omega_b})\omega - (R_I + R_F)\frac{\omega^2}{\omega_a\omega_b}} v_i \quad (6.2-2)$$

En el denominador de la ecuación (6.2-2), puede verse que el término independiente no es de valor unitario y dicho valor es necesario para que el polinomio de la frecuencia quede modelado en función de la razón de amortiguamiento y la frecuencia natural del sistema como lo muestra el polinomio (4.2-6), para lograr que dicho denominador adopte esta forma, se dividirá el numerador y el denominador de (6.2-2) entre el término independiente logrando así (6.2-3).

$$v_0 = \frac{\frac{A_{d0}(R_I+R_F)}{A_{d0}R_I+R_I+R_F}}{1 + j\frac{R_I+R_F}{A_{d0}R_I+R_I+R_F}\left(\frac{1}{\omega_a} + \frac{1}{\omega_b}\right)\omega - \frac{R_I+R_F}{A_{d0}R_I+R_I+R_F}\frac{\omega^2}{\omega_a\omega_b}} v_i \quad (6.2-3)$$

$$P(\omega) = 1 + j2\delta\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \quad (4.2-6)$$

Lo que hasta estas líneas se ha expuesto en este capítulo es la manera tradicional de tratarlo; es decir que en un caso particular se substituyen en (6.2-3) los datos de la aplicación que se este haciendo y se despejan de ahí las necesidades a calcular. Como ejemplo de esto veamos el siguiente caso.

#### Ejemplo 6.2-1.

Se desea diseñar un circuito amplificador no inversor utilizando un amplificado operacional "MC3401"; se desea una ganancia de voltaje D.C. de 500 y se pide calcular lo siguiente:

- A) La relación de resistencias  $r = R_F/R_I$ .
- B) La razón de amortiguamiento del sistema.
- C) Con que relación de resistencias "r" se logra un circuito con una razón de amortiguamiento de 0.2, aunque la ganancia de voltaje D.C. sea diferente de 500.

Datos de MC3401

$$A_{do} = 2,113.5$$

$$f_a = 3.5194 \cdot 10^3 \text{ Hz.}$$

$$f_b = 4.4414 \cdot 10^6 \text{ Hz.}$$

Solución.

A) En la ecuación (6.2-3) puede verse que su numerador es la ganancia de voltaje en D.C. el cual podemos expresarlo en función de la relación de resistencias "r", despejando la relación de resistencias en función de las ganancias y obtener su valor.

$$A_d = \frac{A_{do}(R_I + R_F)}{A_{do}R_I + R_I + R_F} = \frac{A_{do}(1+r)}{A_{do} + 1 + r}$$

$$r = \frac{A_d(A_{do} + 1) - A_{do}}{A_{do} - A_d}$$

$$r = \frac{500 \cdot (2,113.5 + 1) - 2,113.5}{2,113.5 - 500}$$

$$r = 653.94$$

B) si comparamos el denominador de la ecuación (6.2-3) con la forma polinomial que debe ser de la forma (4.2-6), obtenemos dos ecuaciones necesarias para calcular la razón de amortiguamiento.

$$2 \frac{\delta}{\omega_n} = \frac{1 + r}{A_{do} + 1 + r} \left( \frac{1}{\omega_a} + \frac{1}{\omega_b} \right)$$

$$\frac{1}{\omega_n^2} = \frac{1 + r}{A_{do} + 1 + r} \frac{1}{\omega_a \omega_b}$$

De este par de ecuaciones debemos de obtener: Primeramente una ecuación para calcular la frecuencia natural, y otra para calcular la razón de amortiguamiento a través de la frecuencia natural.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{(A_{d0} + 1 + r)\omega_a\omega_b}{1 + r}}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{(2,113.5 + 1 + 653.94) * 2\pi * 3.5194 * 10^3 * 2\pi * 4.4414 * 10^6}{1 + 653.94}}$$

$$\omega_n = 1.6151 * 10^6 \text{ rad/seg}$$

$$\delta = \frac{\omega_a + \omega_b}{2\omega_n}$$

$$\delta = \frac{2 * \pi * 3.5194 * 10^3 + 2 * \pi * 4.4414 * 10^6}{2 * 1.6151 * 10^6}$$

$$\delta = 8.6461$$

C) Para resolver este inciso necesitamos substituir la ecuación de la frecuencia natural del inciso anterior en la ecuación de la razón de amortiguamiento del mismo inciso, para así relacionar la razón de amortiguamiento con la relación de resistencias y el resto de los datos; una vez logrado esto despejamos de ahí la relación de resistencias.

$$\delta = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\omega_a} + \frac{1}{\omega_b} \right) \sqrt{\omega_a \omega_b} \sqrt{\frac{1+r}{A_{d0}+1+r}}$$

agrupando los datos de un solo lado de la ecuación se forma una constante que podemos llamarle "C", con lo que se facilita calcular la relación de resistencias "r".

$$\frac{1+r}{A_{d0}+1+r} = \frac{4\delta^2}{\left(\frac{1}{\omega_a} + \frac{1}{\omega_b}\right)^2 \omega_a \omega_b} = C$$

$$r = \frac{C(A_{d0}+1)-1}{1-C}$$

$$C = \frac{4*(0.2^2)}{\left(\frac{1}{2\pi*3.5194*10^3} + \frac{1}{2\pi*4.4414*10^6}\right)^2 2\pi*3.5194*10^3 * 2\pi*4.4414*10^6}$$

$$C = 1.2658*10^{-4}$$

$$r = \frac{1.2658*10^{-4}*(2,113.5+1)-1}{1-1.2658*10^{-4}}$$

$$r = -0.7324$$

La relación de resistencias calculada para lograr una razón de amortiguamiento de 0.2 es un valor negativo, lo cual es no realizable físicamente y por lo tanto este inciso no tiene solución.

### 6.3) FACTOR DE LAZO EN EL AMPLIFICADOR NO INVERSOR

Este tema se analizara de la misma manera que se hizo en el capítulo anterior, es decir haciendo los cambios necesarios para que la ganancia en voltaje del amplificador no inversor, que es la parte que multiplica al voltaje de entrada  $v_i$  en el lado derecho de (6.2-3), tome la forma (4.1-1); de donde se puede definir los coeficientes de numerador, denominador y el factor de lazo. Una vez logrado dicho objetivo es posible aplicar todas las ventajas que ofrece el uso del factor de lazo y la invarianza del promedio de los polos como fue mostrado en el capítulo anterior.

$$A(\omega) = \frac{A_0(\omega)K_N}{A_0(\omega)K_D + 1} \quad (4.1-1)$$

La ganancia del amplificador no inversor mostrada por (3.1-8), haciendo los cambios necesarios para lograr la forma deseada se obtiene (6.3-1) de donde a su vez se encuentran los coeficientes de numerador (6.3-2) y denominador (6.3-3).

$$A(\omega) = - \frac{A_0(\omega)(R_I + R_F)}{A_0(\omega)R_I + R_I + R_F} \quad (3.1-8)$$

$$A(\omega) = - \frac{A_0(\omega) \frac{R_I + R_F}{R_I + R_F}}{A_0(\omega) \frac{R_I}{R_I + R_F} + 1} \quad (6.3-1)$$

$$K_N = 1 \quad (6.3-2)$$

$$K_D = \frac{R_I}{R_I + R_F} \quad (6.3-3)$$

Aplicando lo anterior en la definición de factor de lazo (4.1-4) se obtiene (6.3-4), de donde se obtiene el factor de lazo en función de las resistencias "R<sub>I</sub>" y "R<sub>F</sub>", expresando esto mismo en función de la relación de resistencias "r=R<sub>F</sub>/R<sub>I</sub>"; se obtiene (6.3-5).

$$K_L^2 = \frac{1}{A_{d0}K_D + 1} \quad (4.1-4)$$

$$K_L^2 = \frac{R_I + R_F}{A_{d0} + R_I + R_F} \quad (6.3-4)$$

$$K_L^2 = \frac{1 + r}{A_{d0} + 1 + r} \quad (6.3-5)$$

Como se puede ver en la ecuación anterior, el factor de lazo para el amplificador no inversor es exactamente el mismo que el del amplificador inversor, de tal manera que la relación de resistencias  $r$  en función del factor de lazo y la ganancia de voltaje en D.C. (6.3-6) se obtiene igual que en el capítulo 5.

$$r = \frac{(A_{d0} + 1)K_L^2 - 1}{1 - K_L^2} \quad (6.3-6)$$

Los conceptos referentes a Límites Paramétricos del Amplificador No Inversor no serán incluidos en este capítulo, ya que todos ellos provienen del factor de lazo y por lo tanto dichos conceptos son exactamente los mismos que los correspondientes del capítulo 5, usándose así en el amplificador no inversor las ecuaciones (5.4-1) a la (5.4-9).

#### 6.4) FACTOR DE LAZO EN LA GANANCIA DE DIRECTA

El coeficiente de numerador en el amplificador no inversor es diferente al del inversor y por esto sus ganancias de voltaje en D.C. también son diferentes. El procedimiento para obtener dicha ganancia es mucho más sencillo que el del capítulo anterior, ya que al substituir el coeficiente de numerador (6.3-2), que en este caso es de valor unitario, en la ganancia de voltaje en D.C. del sistema (4.1-5) se obtiene una relación entre la ganancia de voltaje en D.C. del sistema con la de su núcleo y el factor de lazo (6.4-1) que conviene expresar como lo muestra (6.4-2), llegando así a una relación que es equivalente pero mas simple que la correspondiente del capítulo anterior (5.5-4).

$$A_d = A_{d0}K_N K_L^2 \quad (4.1-5)$$

$$A_d = A_{d0}K_L^2 \quad (6.4-1)$$

$$\frac{A_d}{A_{d0}} = K_L^2 \quad (6.4-2)$$

Es conveniente relacionar la ganancia de voltaje en D.C. con la razón de amortiguamiento del mismo, para esto se substituye (4.2-5) en (6.4-2) logrando así (6.4-3) y (6.4-4).

$$\frac{A_d}{A_{d0}} = \frac{\delta^2}{\delta_0^2} \quad (6.4-3)$$

$$\frac{A_d}{\delta^2} = \frac{A_{d0}}{\delta_0^2} \quad (6.4-4)$$

Esta última ecuación muestra que el cociente de la ganancia de voltaje en D.C. del sistema entre el cuadrado de la razón de amortiguamiento del mismo es invariante a los valores de retroalimentación; el cociente del sistema conserva el mismo valor que el de su núcleo, dando así una buena base como criterio de selección del amplificador operacional.

Los límites de ganancia del amplificador no inversor, no son exactamente iguales a los del amplificador inversor ya que su límite inferior es distinto entre ambos. Para obtener éste solo hay que substituir el factor de lazo mínimo (5.4-1) en la ganancia (6.4-1) llegando así a (6.4-5) y (6.4-6), en el caso de ganancia máxima se substituye en (6.4-1) el factor de lazo máximo (5.4-3) obteniéndose así (6.4-7) y (6.4-8).

$$A_{d \min} = A_{d0} K_{L \min}^2 \quad (6.4-5)$$

$$A_{d \min} = \frac{A_{d0}}{A_{d0} + 1} \quad (6.4-6)$$

$$A_{d \max} = A_{d0} K_L^2 \quad (6.4-7)$$

$$A_{d \max} = A_{d0} \quad (6.4-8)$$

La ganancia mínima (6.4-6) es ligeramente menor que 1, lo cual es explicable ya que para lograrlo se necesita que el valor de  $r$  sea cero y como  $R_F$  no puede ser cero por razones prácticas, entonces  $R_I$  es infinito convirtiéndose así el amplificador no inversor en un seguidor de voltaje.

### 6.5) APLICACIONES

Ejemplo 6.5-1 (nueva solución del ejemplo 6.2-1).

Utilizando un amplificador operacional "MC3401" se desea diseñar un circuito amplificador no inversor con una ganancia de voltaje D.C. de 500, calcular lo siguiente:

- A) La relación de resistencias  $r = R_F/R_I$ .
- B) La razón de amortiguamiento del sistema.
- C) Con que relación de resistencias "r" se logra un circuito con una razón de amortiguamiento de 0.2 aunque la ganancia de voltaje D.C. sea diferente de 500.

Solución.

1) Del ejemplo 2.2-2 (capítulo 2) tomamos los datos del amplificador operacional:

$$A_{d0} = 2,113.5 \quad \delta_0 = 17.776 \quad \omega_0 = 1.3964 \cdot 10^7$$

2) Con la ganancia de voltaje en D.C. del sistema y la de su núcleo, se obtiene el factor de lazo

$$K_L^2 = \frac{A_d}{A_{d0}} = \frac{500}{2,113.5} \quad (6.4-2)$$

$$K_L = 0.4864$$

A) En la ecuación (5.2-3) puede verse que su numerador es la ganancia de voltaje en D.C. el cual podemos expresarlo en función de la relación de resistencias "r", despejando la relación de resistencias en función de las ganancias y obtener su valor.

$$r = \frac{(A_{do} + 1)K_L^2 - 1}{1 - K_L^2} = \frac{(2,113.5 + 1) \cdot (0.4864^2) - 1}{1 - (0.4864^2)} \quad (6.3-6)$$

$$r = 653.94$$

B) La razón de amortiguamiento se obtiene de su relación con el factor de lazo (4.2-5) o de (6.4-3)

$$\delta = K_L \delta_0 = 0.4864 \cdot 17.776 \quad (4.2-5)$$

$$\delta = 8.6461$$

C) Antes de intentar calcular la relación de resistencias para obtener la razón de amortiguamiento deseada, hay que verificar si ésta se encuentra dentro de las cotas establecidas.

$$\delta_0 \sqrt{\frac{1}{A_{do} + 1}} < \delta < \delta_0 \quad 17.776 \sqrt{\frac{1}{2,113.5 + 1}} < \delta < 17.776 \quad (5.4-7)$$

$$0.3866 < \delta < 17.776$$

Del resultado anterior se puede ver que la razón de amortiguamiento deseada es menor que la mínima y por lo tanto esto no puede ser realizable.

#### Ejemplo 6.5-2

Con un amplificador operacional MC1741 se desea implementar un Amplificador No Inversor con una ganancia  $A(\omega)$  como se muestra en seguida, de la que se conoce:  $B = 1.7575 \cdot 10^{-13}$

$$A(\omega) = \frac{A_d}{1 + jA\omega - B\omega^2}$$

Preguntas:

- A) La razón de amortiguamiento del sistema.
- B) Los polos del sistema.
- C) La ganancia  $A_d$ .
- D) La relación de resistencias  $r$ .
- E) Con que relación de resistencias  $r$  se logra  $\delta = 0.4$  aunque cambien los coeficientes  $A$  y  $B$ .
- F) Con que relación de resistencias  $r$  se logra  $A_d = 200$  y  $\delta = 10$ , aunque cambien los coeficientes  $A$  y  $B$ .

Solución:

1) Del ejemplo (2.2-1) tomamos los datos del amplificador operacional MC1741.

$$A_{d0} = 100 \cdot 10^3 \quad \delta_0 = 199 \quad \omega_0 = 4.98 \cdot 10^6 \text{ rad/seg}$$

A) De la ecuación (4.3-6) se despeja la razón de amortiguamiento:

$$\delta = \omega_0 \sqrt{B} = 4.98 \cdot 10^6 \sqrt{1.7575 \cdot 10^{-13}}$$

$$\delta = 2.0877$$

B) Aplicando la invarianza de polos (4.3-2) en las ecuaciones de los polos (1.1-9) y (1.1-10) y empleando el valor de la razón de amortiguamiento del inciso anterior se obtiene:

$$P_i = \omega_0 \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{\delta^2}} \right) = 4.98 \cdot 10^6 \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{2.0877^2}} \right)$$

$$P_1 = 608,438.66 \text{ Rad/Seg} \quad P_2 = 9,350,461.3 \text{ Rad/Seg}$$

C) Primeramente se obtiene el Factor de Lazo de la ecuación (4.2-9) empleando el valor de  $\delta$  ya calculado y el valor de  $\delta_0$ , posteriormente se emplea el valor del Factor de Lazo en (6.4-1).

$$K_L = \frac{\delta}{\delta_0} = \frac{2.0877}{199} = 1.0491 \cdot 10^{-2} \quad (4.2-9)$$

$$K_L = 1.0491 \cdot 10^{-2}$$

$$A_d = K_L^2 A_{d0} = (1.0491 \cdot 10^{-2})^2 10^5 \quad (6.4-1)$$

$$A_d = 11.006$$

D) La relación de resistencias  $r$  se obtiene empleando el Factor de Lazo y el valor de la ganancia  $A_{d0}$  en (6.3-6).

$$r = \frac{(A_{d0} + 1)K_L^2 - 1}{1 - K_L^2} = \frac{(10^5 + 1)1.1 \cdot 10^{-4} - 1}{1 - 1.1 \cdot 10^{-4}} \quad (6.3-6)$$

$$r = 10$$

E) Primeramente hay que calcular los límites de ésta en la ecuación (5.4-7).

$$\delta_0 \sqrt{\frac{1}{A_{d0} + 1}} < \delta < \delta_0 \quad (5.4-7)$$

$$199.06 \sqrt{\frac{1}{10^5 + 1}} < \delta < 199$$

$$0.6295 < \delta < 199$$

No es posible lograr un Amplificador No Inversor con una  $\delta = 0.4$  y un amplificador operacional MC1741.

F) Para probar si es posible que con un amplificador operacional MC1741 se puede lograr un Amplificador No Inversor con:  $A_d = 200$  y  $\delta = 10$ , hay que evaluar la ecuación (6.4-4) que relaciona dichas variables:

$$\frac{A_d}{\delta^2} = \frac{A_{d0}}{\delta_0^2} \quad (6.4-4)$$

$$\frac{200}{10^2} = \frac{10^5}{199^2}$$

$$2 \neq 2.5252$$

La igualdad de la ecuación no se cumple y entonces no es posible implementar este inciso.

### Ejemplo 6.5-3

Se desea diseñar un amplificador no inversor con una ganancia de la forma mostrada en seguida de la que se sabe que:  $A/B = 9.96 \cdot 10^6$  y la razón de amortiguamiento es de 8.8995506.

$$A(\omega) = \frac{A_d}{1 + jA\omega - B\omega^2}$$

Preguntas.

A) Con cual de los siguientes amplificadores operacionales se puede lograr el diseño deseado: MC1741, MC3401 o LH0024.

B) Cual es la ganancia de voltaje en D.C. del sistema.

C) Con que relación de resistencias  $r$  se logra que los coeficientes: A y B tengan la relación especificada

Solución

1) De los ejemplos: (2.2-1), (2.2-2), (2.2-3) se obtienen los datos de los amplificadores operacionales.

|        |                           |                     |                                |         |
|--------|---------------------------|---------------------|--------------------------------|---------|
| MC1741 | $A_{d0} = 100 \cdot 10^3$ | $\delta_0 = 199$    | $\omega_0 = 4.98 \cdot 10^6$   | rad/seg |
| MC3401 | $A_{d0} = 2,113.5$        | $\delta_0 = 17.776$ | $\omega_0 = 1.3964 \cdot 10^7$ | rad/seg |
| LH0024 | $A_{d0} = 3,199$          | $\delta_0 = 2.348$  | $\omega_0 = 1.98 \cdot 10^7$   | rad/scg |

A) De la ecuación (4.3-7) se obtiene el promedio de polos del sistema que de acuerdo a la invarianza de polos (4.3-2) es el mismo que el del núcleo del sistema. Una vez conocido este promedio se busca en los datos de los amplificadores operacionales cual es el que posee dicho valor.

$$\omega_0 = \frac{1 A}{2 B} = \frac{1}{2} \frac{3.1808032 \cdot 10^{-5}}{3.1935776 \cdot 10^{-12}} \quad (4.3-7)$$

$$\omega_0 = 4.98 \cdot 10^6$$

El amplificador operacional correcto es el MC1741

B) Una vez conocido el amplificador operacional y con el dato de la razón de amortiguamiento, la ganancia de voltaje en D.C. del sistema se despeja de (6.4-3).

$$A_d = A_{d0} \frac{\delta^2}{\delta_0^2} = 100 \cdot 10^3 \frac{8.8995506^2}{199^2}$$

$$A_d = 200$$

C) Primeramente hay que calcular el factor de lazo de (4.2-9) y de ahí se calcula la relación de resistencias  $r$  de (6.3-6).

$$K_L = \frac{\delta}{\delta_0} = \frac{8.8995506}{199} \quad (4.2-9)$$

$$K_L = 0.0447213$$

$$r = \frac{(A_{do} + 1)K_L^2 - 1}{1 - K_L^2} = \frac{(100 \cdot 10^3 + 1)(0.0447213^2) - 1}{1 - 0.0447213^2} \quad (6.3-6)$$

$$r = 199.4$$

Es importante recalcar que algunos de los incisos de los ejemplos anteriores, aparentan no tener solución tratándolos por los métodos convencionales. El método propuesto brinda mediante el factor de lazo y el teorema de invarianza de polos una ventajosa alternativa con la no se contaba en los métodos convencionales.

# Capítulo 7

## MULTIETAPAS

### 7.1) RELACION DE GANANCIA LIMITE

El concepto ancho de banda normalmente es definido por la diferencia de frecuencias a las cuales el sistema maneja la mitad de la potencia máxima o 0.707 de su ganancia máxima, aproximadamente es 3dB por debajo de la máxima ganancia. Esta definición es un buen indicador del comportamiento frecuencial del sistema, pero no es el camino mas simple cuando se trata de realizar un diseño de condiciones especificas.

La ganancia del sistema expresada en la forma (4.3-4) resulta útil para este tema y ésta se simplifica aún mas si el cociente de frecuencia angular entre el promedio de polos se define como se muestra en seguida (que es diferente a la empleada en filtros activos [5].), simplificandose así (4.3-4) en (7.1-2).

$$A(\omega) = \frac{A_d}{1 + j2\delta^2 \frac{\omega}{\omega_0} - \delta^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad (4.3-4)$$

Definición: Frecuencia Normalizada  $\triangleq \varphi$

$$\varphi = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (7.1-1)$$

$$A(\omega) = \frac{A_d}{1 + j2\delta^2 \varphi - \delta^2 \varphi^2} \quad (7.1-2)$$

Entre las aplicaciones de electrónica nos encontramos eventualmente la necesidad de diseñar un amplificador que sea capaz de amplificar una señal de voltaje desde D.C. con una ganancia de voltaje  $A_d$ , hasta una frecuencia límite  $f_L$  con una magnitud de ganancia de voltaje no menor de  $A_L$ , con una magnitud de la ganancia entre  $A_L$  y  $A_d$  para toda frecuencia entre D.C. y  $f_L$ , donde  $A_L$  queda de acuerdo a la siguiente definición.

Definición: **Ganancia Límite**  $\triangleq A_L$

$$A_L = |A(\omega_L)| \quad (7.1-3)$$

$$A_L = \left| \frac{A_d}{1 + j2\delta^2\varphi_L - \delta^2\varphi_L^2} \right| \quad (7.1-4)$$

Si analizamos esta última ecuación encontramos que al despejar el cociente formado por la ganancia límite  $A_L$  entre la ganancia de directa  $A_d$ , éste queda en función de solo dos variables: la razón de amortiguamiento del sistema y la frecuencia límite normalizada; el cociente mencionado, mas que ser la división de dos parámetros, es en si un solo parámetro que representa la capacidad del sistema a mantener la ganancia de voltaje en D.C. dentro del dominio de frecuencia menor o igual a la frecuencia límite, siendo así útil la siguiente definición de la que se obtiene (7.1-6).

Definición: **Relación de Ganancia Límite**  $\triangleq g$

$$g = \frac{A_L}{A_d} \quad (7.1-5)$$

$$g = \frac{1}{\sqrt{(1 - \delta^2\varphi_L^2)^2 + (2\delta^2\varphi_L)^2}} \quad (7.1-6)$$

La ecuación anterior es independiente de la configuración del sistema pero si depende del núcleo del sistema, ya que para obtener la frecuencia límite normalizada  $\varphi_L$  es necesario el promedio de polos. Su comportamiento se puede apreciar gráficamente en la figura 7.1-1 en la que la frecuencia límite se mantiene como parámetro con valores desde  $10^2$  Hz hasta  $10^6$  Hz, a las que corresponde una frecuencia límite normalizada  $\varphi_L$  de  $1.26168 \cdot 10^{-4}$  a 1.26168 respectivamente.

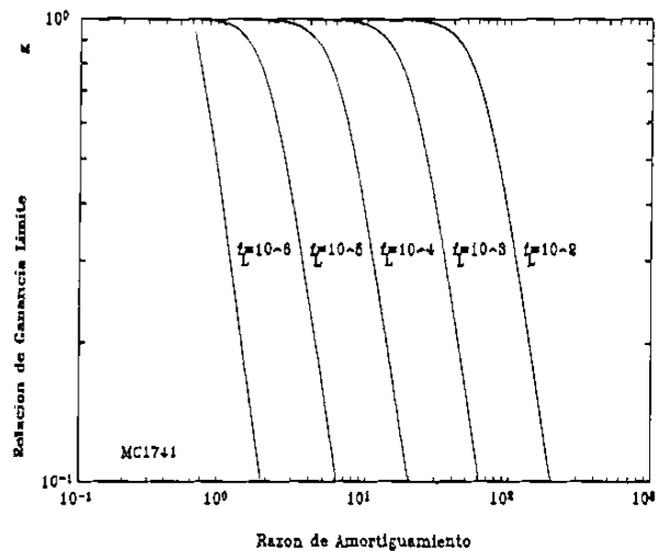


Fig. 7.1-1

En la figura 7.1-1 se puede ver que para un valor dado de frecuencia límite, la relación de ganancia límite aumenta al disminuir la razón de amortiguamiento. Esto se puede entender analizando el diagrama de Bode de un sistema en dos casos: En alta ganancia ( $\delta$  grande) y en baja ganancia ( $\delta$  pequeña). En el caso de alta ganancia (Fig. 7.1-2) se puede ver que para una cierta frecuencia límite  $W_L$ , los valores de  $A_d$  y  $A_L$  están separados y entonces la relación de ganancia límite "g" tendrá un valor bajo; para el caso de baja ganancia (Fig. 7.1-3) la curva es más plana en su parte superior de tal manera que para la misma frecuencia límite se muestra un acercamiento entre los valores  $A_d$  y

$A_L$  resultando en un valor alto de la relación de ganancia límite "g".

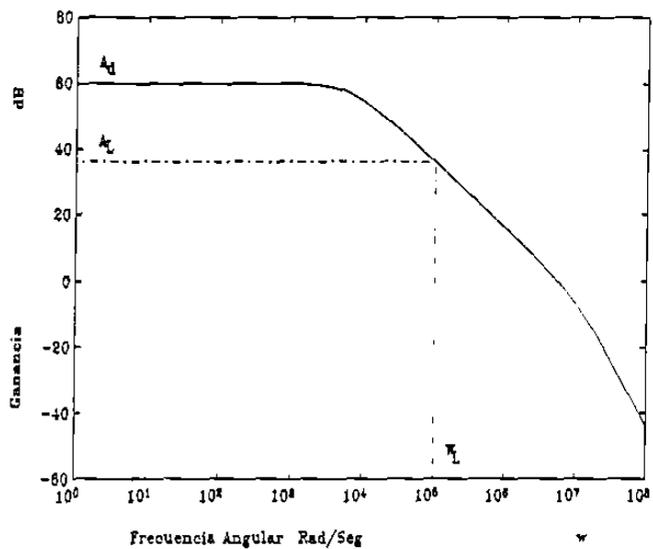


Fig. 7.1-2

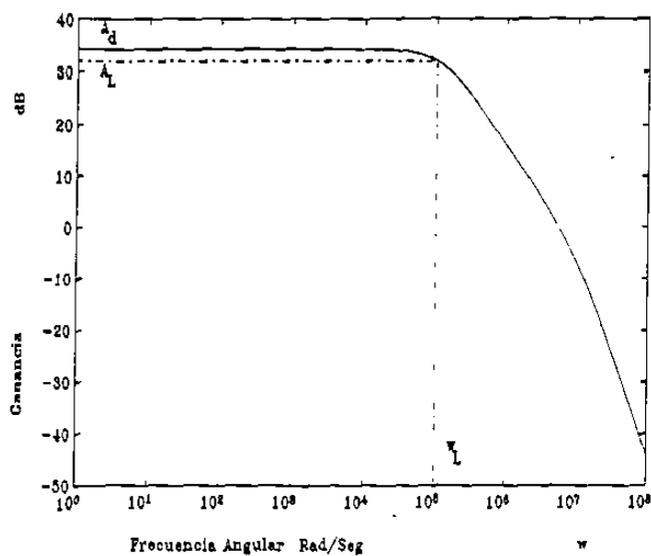


Fig. 7.1-3

## 7.2) MULTIETAPAS

Lo analizado en el punto anterior es lo correspondiente al comportamiento de una etapa de amplificación, pero existen casos en los que los requerimientos son tales que no los puede cumplir una sola etapa de amplificación. Por ejemplo pedir una ganancia de directa  $A_d$  y una ganancia límite  $A_L$  superior a la correspondiente a la frecuencia límite  $f_L$  en una sola etapa como se muestra en la figura 7.2-1, en la que se muestra el diagrama de Bode de la ganancia en voltaje de una etapa de amplificación diseñada con una ganancia de voltaje en D.C  $A_d$ ; la ganancia en voltaje correspondiente a la frecuencia límite es la altura marcada con la línea punteada vertical, que se puede ver es inferior a el valor  $A_L$  deseado.

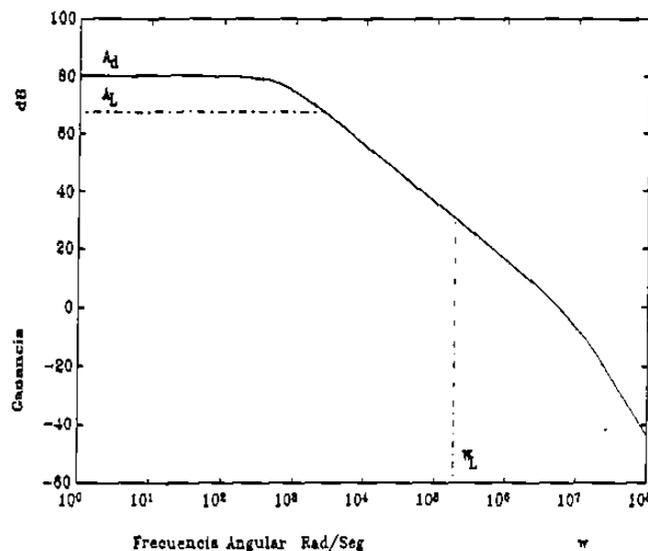


Fig. 7.2-1

La solución a este caso es lograr el sistema a base de varias etapas de amplificación en serie implementando así un sistema multietapas; en un sistema de "n" etapas, todas ellas se consideran iguales dado que cada una debe de tener la misma capacidad de manejar una señal desde corriente directa hasta la frecuencia límite, los parámetros de la etapa y del sistema se identifican respectivamente por:  $A_{de}$ ,  $A_{Le}$ ,  $g_e$ ,  $\delta_e$ ,  $A_{ds}$ ,  $A_{Ls}$ ,  $g_s$ ,  $\delta_s$

La ganancia del sistema multietapas  $A_{ds}$  es el producto de las "n" ganancias  $A_{de}$ ; la ganancia límite  $A_{Ls}$  es el producto de las "n" ganancias  $A_{Le}$ , la relación de ganancia límite del sistema multietapas " $g_s$ " es el cociente de  $A_{Ls}$  entre  $A_{ds}$ , que debe ser menor o igual a el producto de las "n"  $g_e$ ; la igualdad anterior es muy difícil de cumplir ya que muy remotamente se encontrará el caso donde  $A_{ds} = A_{de}^n$  y  $A_{Ls} = A_{Le}^n$ , al no cumplirse la igualdad entonces se busca una solución que mejore las condiciones deseadas.

$$A_{ds} = A_{de}^n \quad (7.2-1)$$

$$A_{Ls} \leq A_{Le}^n \quad (7.2-2)$$

$$g_s = \frac{A_{Ls}}{A_{ds}} \leq \frac{A_{Le}^n}{A_{de}^n} = \left( \frac{A_{Le}}{A_{de}} \right)^n \quad (7.2-3)$$

$$g_s \leq g_e^n \quad (7.2-4)$$

Lo que esencialmente se trata de lograr en el caso de multietapas es obtener una ganancia del sistema  $A_d$  con una relación de ganancia límite no menor que " $g_s$ " a una frecuencia límite establecida  $f_L$ , la solución a esto se puede intentar con (7.2-1), (7.2-4), (7.1-6) y la correspondiente a la configuración que se este empleando, donde se relacione la razón de amortiguamiento con la ganancia de voltaje en D.C.

El número de etapas seleccionado "n" debe de ser tal que baje la ganancia de la etapa  $A_{de}$  a un valor menor que  $A_0$  del que se obtenga una razón de amortiguamiento de etapa  $\delta_e$ , de la cual se logre una relación de ganancia límite de etapa  $g_e$  que al elevarla a la potencia "n" sea igual o superior a la relación de ganancia límite deseada  $g_s$ .

Debe de aclararse que la ganancia del sistema multietapas  $A_{de}^n$  coincide exactamente con la ganancia del sistema deseado  $A_{ds}$  ya que primero se obtiene de esta última la raíz

enésima para lograr  $A_{de}$  y luego se eleva a la enésima potencia para lograr la ganancia del sistema multietapas coincidiendo así ambas ganancias; pero esta coincidencia no sucede con la relación de ganancia límite ya que una vez obtenida la ganancia de etapa  $A_{de}$  se le aplica una transformación no lineal para obtener la razón de amortiguamiento de la etapa  $\delta_e$  y de esta mediante otra transformación no lineal (7.1-6) se obtiene la relación de ganancia límite de la etapa  $g_e$  que al elevarla a la enésima potencia se obtiene la relación de ganancia límite  $g$  del sistema multietapas que difícilmente coincide con la  $g_s$  mínima deseada, buscando entonces que sea mayor o igual a ésta última.

Para entender mas claramente lo anterior se proponen los siguientes 4 ejemplos en los que además de aplicar la teoría propuesta para multietapas, se comparan en entre si los amplificadores inversor y no inversor, y los amplificadores operacionales empleados.

#### Ejemplo 7.2-1

Se desea lograr un sistema de amplificación con una ganancia  $A_{ds} = 5000$  y una desviación en la magnitud de la ganancia no mayor de 2.5% dentro de un dominio de frecuencia desde corriente directa hasta una frecuencia limite  $f_L \approx 14,000$  Hz.

Implementar cada etapa en configuración no inversor empleando el amplificador operacional MC1741.

- A) Cuál es la ganancia límite del sistema y cual es la relación de ganancia límite del sistema?.
- B) Cuál es el número de etapas?.
- C) Cuál es la relación de ganancia límite del sistema multietapas?.
- D) Cuál es la relación de resistencias de cada etapa?.

#### Solución

1) Del ejemplo (2.2-1) tomamos los datos del amplificador operacional MC1741.

$$A_{uo} = 100 \cdot 10^3 \quad \delta_0 = 199 \quad \omega_0 = 4.98 \cdot 10^6$$

A) La ganancia límite del sistema es la ganancia del sistema  $A_{ds}$  menos la desviación de ganancia que es el porcentaje de desviación multiplicado por la ganancia del sistema  $A_{ds}$  y aplicando  $A_{Ls}$  y  $A_{ds}$  en (7.1-5) se obtiene la relación de ganancia límite.

$$A_{Ls} = A_{ds} - \frac{2.5}{100}A_{ds} = (1 - 0.025)*A_{ds} = 0.975*5,000$$

$$A_{Ls} = 4,875$$

$$g_s = \frac{A_{Ls}}{A_{ds}} = \frac{4875}{5000} = 1 - \frac{2.5}{100}$$

$$g_s = 0.975$$

B) El número de etapas se obtiene de la siguiente manera: Partiendo de  $n=1$  y del valor  $A_{ds}$  se calcula  $A_{de}$  mediante (7.2-1), se checa que esta última sea menor que  $A_0$ , si lo es se continúa con el procedimiento, si no lo es se incrementa en 1 el número de etapas  $n$  antes de continuar; posteriormente se calcula  $\delta_c$  y con ella y (7.1-6) se calcula  $g_c$  y se compara con la raíz enésima de  $g_s$ , si  $g_c$  es mayor entonces el número de etapas utilizado es suficiente, si  $g_c$  no es mayor entonces se incrementa el número de etapas en uno y se repite el procedimiento.

| n | $A_{de}$ | $\delta_c$  | $g_c$       | $g_s^{1/n}$ |
|---|----------|-------------|-------------|-------------|
| 1 | 5,000    | 4.4496e+001 | 1.4297e-002 | 9.7500e-001 |
| 2 | 70.7107  | 5.2915e+000 | 7.1410e-001 | 9.8742e-001 |
| 3 | 17.0998  | 2.6021e+000 | 9.7451e-001 | 9.9160e-001 |
| 4 | 8.4090   | 1.8248e+000 | 9.9417e-001 | 9.9369e-001 |

Tab. 7.2-1

Se puede ver en la tabla superior que el número de etapas necesario para satisfacer las condiciones mencionadas es  $n = 4$ .

C) Con el valor de  $g_e$  correspondiente a cuatro etapas se obtiene la relación de ganancia límite del sistema multietapas mediante (7.2-4).

$$g_s \leq g_e^n = (9.9417 * 10^{-1})^4 \quad (7.2-4)$$

$$g_e^4 = 0.9768 \quad g_s < g_e^4$$

D) Para obtener la relación de resistencias de la etapa, primeramente se calcula el factor de lazo correspondiente a la etapa mediante (4.2-9), una vez logrado este valor se aplica en (6.3-6) para obtener la relación de resistencias.

$$K_L = \frac{\delta}{\delta_0} = \frac{1.8248}{199} \quad (4.2-9)$$

$$K_L = 9.1696 * 10^{-3}$$

$$r = \frac{(A_{d0} + 1)K_L^2 - 1}{1 - K_L^2} = \frac{(100 * 10^3 + 1) * (9.1696 * 10^{-3})^2 - 1}{1 - (9.1696 * 10^{-3})^2} \quad (6.3-6)$$

$$r = 7.4089$$

### Ejemplo 7.2-2

Reproducir el ejemplo (7.2-1) con los mismos datos y con el mismo amplificador operacional, solo que en configuración inversor.

Solución.

1) Los datos del amplificador operacional MCI741 se obtuvieron en el ejemplo anterior.

$$A_{d0} = 100 * 10^3 \quad \delta_0 = 199 \quad \omega_0 = 4.98 * 10^6$$

A) La ganancia límite del sistema  $A_{Ls}$  y la relación de ganancia límite del sistema son exactamente las mismas que se calcularon en el ejemplo anterior ya que estas no dependen de la configuración del sistema.

$$A_{Ls} = 4,875$$

$$g_s = 0.975$$

B) El número de etapas se obtiene con el mismo procedimiento del ejemplo anterior, logrando así los siguientes valores.

| n | $A_{de}$ | $\delta_e$  | $g_e$       | $g_s^{1/n}$ |
|---|----------|-------------|-------------|-------------|
| 1 | 5,000    | 4.4500e+001 | 1.4294e-002 | 9.7500e-001 |
| 2 | 70.7107  | 5.3287e+000 | 7.0913e-001 | 9.8742e-001 |
| 3 | 17.0998  | 2.6771e+000 | 9.7145e-001 | 9.9160e-001 |
| 4 | 8.4090   | 1.9302e+000 | 9.9258e-001 | 9.9369e-001 |
| 5 | 5.4928   | 1.6034e+000 | 9.9669e-001 | 9.9495e-001 |

Tab. 7.2-2

De la tabla superior se obtiene el número de etapas necesario que resulta ser  $n = 4$ .

C) Con el valor de  $g_e$  correspondiente a cinco etapas se obtiene la relación de ganancia límite del sistema multietapas mediante (7.2-4).

$$g_s \leq g_e^n = (9.9669 \cdot 10^{-1})^5 \quad (7.2-4)$$

$$g_e^5 = 0.9836 \quad g_s < g_e^5$$

D) Con el mismo procedimiento del ejemplo anterior: se calcula el factor de lazo correspondiente a la etapa mediante (4.2-9), una vez logrado este valor se aplica en (6.3-6) para obtener la relación de resistencias.

$$K_L = \frac{\delta}{\delta_0} = \frac{1.6034}{199} \quad (4.2-9)$$

$$K_L = 8.0573 \cdot 10^{-3}$$

$$r = \frac{(A_{d0} + 1)K_L^2 - 1}{1 - K_L^2} = \frac{(100 \cdot 10^3 + 1) \cdot (8.0574 \cdot 10^{-3})^2 - 1}{1 - (8.0574 \cdot 10^{-3})^2} \quad (6.3-6)$$

$$r = 5.4926$$

### Ejemplo 7.2-3

Resolver el ejemplo (7.2-1) en la misma configuración no inversor y con los mismos datos, solo que se empleará un amplificador operacional MC3401 en vez del MC1741.

Solución.

1) Del ejemplo 2.2-2 tomamos los datos del amplificador operacional MC3401

$$A_{d0} = 2,113.5 \quad \delta_0 = 26.144 \quad \omega_0 = 1.9584 \cdot 10^7$$

A) La ganancia límite del sistema  $A_L$  y la relación de ganancia límite del sistema son exactamente las mismas que se calcularon en el ejemplo anterior, ya que estas no dependen del amplificador operacional empleado.

$$A_{Ls} = 4,875$$

$$g_s = 0.975$$

B) El número de etapas se obtiene con el mismo procedimiento del ejemplo (7.2-1), logrando así los siguientes valores.

| n | $A_{de}$ | $\delta_e$  | $g_e$       | $g_s^{1/n}$ |
|---|----------|-------------|-------------|-------------|
| 1 | 5,000    | 4.0212e+001 | 6.8690e-002 | 9.7500e-001 |
| 2 | 70.7107  | 4.7820e+000 | 9.7998e-001 | 9.8742e-001 |
| 3 | 17.0998  | 2.3516e+000 | 9.9888e-001 | 9.9160e-001 |

Tab. 7.2-3

De la tabla superior se obtiene el número de etapas necesario que resulta ser  $n = 3$ .

C) Con el valor de  $g_e$  correspondiente a cinco etapas se obtiene la relación de ganancia límite del sistema multietapas mediante (7.2-4).

$$g_s \leq g_e^n = (9.9888 \cdot 10^{-1})^3 \quad (7.2-4)$$

$$g_e^3 = 0.9966 \quad g_s < g_e^3$$

D) Con el mismo procedimiento del ejemplo anterior: se calcula el factor de lazo correspondiente a la etapa mediante (4.2-9), una vez logrado este valor se aplica en (6.3-6) para obtener la relación de resistencias.

$$K_L = \frac{\delta}{\delta_0} = \frac{2.3516}{26.144} \quad (4.2-9)$$

$$K_L = 8.9948 \cdot 10^{-2}$$

$$r = \frac{(A_{d0} + 1)K_L^2 - 1}{1 - K_L^2} = \frac{(2,113.5 + 1) \cdot (8.9948 \cdot 10^{-2})^2 - 1}{1 - (8.9948 \cdot 10^{-2})^2} \quad (6.3-6)$$

$$r = 16.2392$$

## Ejemplo 7.2-4

Resolver los incisos: B, C y D del ejemplo (7.2-1) en la misma configuración no inversor y con los mismos datos, solo que se empleará un amplificador operacional LH0024 en vez del MC1741. Añadir al inciso "C" el porcentaje de la máxima desviación de ganancia del sistema multietapas en el dominio de frecuencias especificado.

B) El número de etapas se obtiene con el mismo procedimiento del ejemplo (7.2-1), logrando así los siguientes valores.

| n | $A_{de}$ | $\delta_e$ | $g_e$         | $g_s^{1/n}$   |
|---|----------|------------|---------------|---------------|
| 1 | 5,000    | 2.9355e+00 | 9.9724765e-01 | 9.7500000e-01 |
| 2 | 70.7107  | 3.4909e-01 | 1.0000018e+00 | 9.8742088e-01 |

Tab. 7.2-4

En la tabla superior se ve que el numero de etapas necesario es 2, pero dado el valor de relación de ganancia límite de etapa  $g_e$  es superior a 1 entonces la ganancia límite de la etapa  $A_{Le}$  es superior a su valor de ganancia  $A_{de}$ ; esto es debido a que el bajo valor de  $\delta_0$  ocasiona un valor de  $\delta_e$  menor de .707 ( $\delta_e = 3.4909e-01$ ) que se comporta con pico resonante según se trato en el punto (1.3). Si el valor de frecuencia límite es menor que la frecuencia de resonancia (1.3-2) entonces se puede asegurar que el máximo valor de ganancia es  $A_L$  en el dominio de frecuencia entre cero y la frecuencia límite  $f_L$ ; si el valor de ganancia límite o la relación de ganancia límite son satisfactorias entonces el sistema multietapas se puede utilizar confiablemente.

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\delta^2} = \omega_{0\lambda} \sqrt{\frac{1}{\delta^2} - 2} = 1.98 * 10^7 \sqrt{\frac{1}{(3.4909 * 10^{-1})^2} - 2} \quad (1.3-2)$$

$$\omega_r = 4.9326 \cdot 10^7 \rightarrow f_r = 7.8504 \cdot 10^6 \gg f_L$$

De acuerdo a lo anterior el número de etapas es 2 con un excelente desempeño

C) Con el valor de  $g_e$  correspondiente a 2 etapas se obtiene la relación de ganancia límite del sistema multietapas mediante (7.2-4).

$$g = g_e^n = (1.0000018)^2 \quad (7.2-4)$$

$$g_e^2 = 1.0000036$$

$$A_{Le}^2 = A_{de}^2 g_e^2 = 5000 \cdot 1.0000036 = 5,000.018$$

$$\frac{A_{Le}^2 - A_{de}^2}{A_{de}^2} \% = \frac{5,000.018 - 5,000}{5,000} * 100$$

$$\frac{A_{Le}^2 - A_{de}^2}{A_{de}^2} \% = 3.6 \cdot 10^{-6} \%$$

D) Con el mismo procedimiento del ejemplo anterior: se calcula el factor de lazo correspondiente a la etapa mediante (4.2-9), una vez logrado este valor se aplica en (6.3-6) para obtener la relación de resistencias.

$$K_L = \frac{\delta}{\delta_0} = \frac{3.4909 \cdot 10^{-1}}{2.348} \quad (4.2-9)$$

$$K_L = 1.4867 \cdot 10^{-1}$$

$$r = \frac{(A_{d0} + 1)K_L^2 - 1}{1 - K_L^2} = \frac{(3,199 + 1) \cdot (1.4867 \cdot 10^{-1})^2 - 1}{1 - (1.4867 \cdot 10^{-1})^2} \quad (6.3-6)$$

$$r = 71.3090$$

### 7.3) CRITERIO DE SELECCION

En los últimos 4 ejemplos se puede ver que del grupo de amplificadores operacionales empleados, el mejor para sistema multietapas es el LH0024 y se ve que el MC3401 es superior al MC1741. En el ejemplo 5.6-3 se deseaba un amplificador de una ganancia específica y la máxima razón de amortiguamiento posible, quedando seleccionado el amplificador operacional MC1741 al compararlo con el MC3401. Debe de recordarse que un sistema con una razón de amortiguamiento grande se comporta con baja velocidad de respuesta posible [1]. Dado lo anterior es conveniente tabular los principales parámetros de los amplificadores operacionales empleados y hacer un estudio sobre ellos para tratar de obtener un criterio de selección.

| OPAM   | $A_{d0}$ | $P_a$             | $\omega_0$        | $\delta_0$ | $A_d P_a$         |
|--------|----------|-------------------|-------------------|------------|-------------------|
|        |          | Hz                | Rad/Seg           |            |                   |
| MC1741 | 100,000  | 10                | $4.98 \cdot 10^6$ | 199        | $1.00 \cdot 10^6$ |
| MC3401 | 2,113.5  | $3.52 \cdot 10^3$ | $1.40 \cdot 10^7$ | 17.776     | $7.44 \cdot 10^6$ |
| LH0024 | 3,199    | $3.00 \cdot 10^5$ | $1.98 \cdot 10^7$ | 2.384      | $3.60 \cdot 10^8$ |

Tab. 7.3-1

Si se analiza la información de cada uno de los amplificadores operacionales que aparece en la tabla y se comparan entre ellos tomando en cuenta los resultados de los ejemplos mencionados, las ecuaciones donde se relaciona la ganancia de voltaje en D.C. del sistema y la velocidad de respuesta en función de  $\delta$ , se concluye lo siguiente:

Los amplificadores operacionales de gran ganancia  $A_{d0}$  no necesariamente son los más adecuados en una aplicación de multietapas o de alta velocidad de respuesta, ya que si poseen un alto valor de  $\delta_0$  conduce a un gran valor de razón de amortiguamiento del sistema y por consecuencia una baja velocidad del sistema. Los amplificadores

operacionales de gran producto de la ganancia  $A_{d0}$  por el polo dominante  $P_a$  son adecuados para lograr una relación de ganancia límite específica con un mínimo número de etapas. En los casos de existir varios amplificadores operacionales con alto valor del producto y con poca diferencia de éste, se establece así una situación de compromiso de selección entre máximo valor del producto  $A_{d0}P_a$  para lograr un mínimo de etapas o mínima  $\delta_0$  para lograr máxima velocidad de respuesta.

# Capítulo 8

## CONCLUSIONES

Para los sistemas retroalimentados resistivamente y modelados sin ceros y con dos polos, se cumple lo siguiente:

- 1) El promedio de polos del sistema es invariante a la configuración del mismo
- 2) Mediante la invarianza de polos y el factor de lazo, se desarrollan relaciones sencillas entre los principales parámetros del sistema y los del núcleo del sistema.
- 3) Cualquier parámetro del sistema se puede expresar en función de la razón de amortiguamiento del sistema.
- 4) El factor de lazo está acotado de acuerdo a la configuración del sistema.
- 5) El acotamiento del factor de lazo implica acotamientos en los parámetros del sistema.

En conclusión se puede decir que las ecuaciones derivadas del teorema de invarianza de polos y de las propiedades del factor de lazo, permiten que los sistemas de amplificación sin ceros y con dos polos, sean estudiados con agilidad tanto en el análisis como en el diseño, basándose solo en ecuaciones sencillas de por sí sin recurrir a simplificaciones por aproximación.

El método propuesto consiste en dos pasos: análisis de factibilidad y cálculo de la variable deseada mediante el factor de lazo.

El presente trabajo puede continuar en diferentes líneas: una de ellas es continuar en análisis mediante el factor de lazo en circuitos de amplificación; considerando las resistencias de entradas y salida del amplificador operacional, otra línea de estudio futuro es aplicar la filosofía del factor de lazo en el análisis de filtros.

# Referencias

- [1] K. Ogata. *Modern Control Engineering*. Prentice Hall. 1990
- [2] G. E. Tobey, J. G. Graeme, L. P. Huelsman. *Operational Amplifiers Design and Applications*. McGraw Hill book company. 1991
- [3] R. G. Irvine. *Operational Amplifier Characteristics and Applications*. Prentice Hall. 1987
- [4] F. H. Raven. *Mathematics of Engeneering System*. McGraw Hill book company. 1966
- [5] W. D. Stanley. *Operational Amplifiers with Linear Integrated Circuits*. Macmillan publishing company. 1990
- [6] A. Barna, D. I. Porat. *Operational Amplifiers*. John Wiley & Sons. 1989
- [7] D. Shilling, C. Belove. *Circuitos Electrónicos*. Alfaomega Marcombo. 1991
- [8] K. Ogata. *Dinámica de Sistemas*. Prentice Hall. 1987
- [9] L. A. Pipes. *Matemáticas aplicadas para Ingenieros y Físicos*. McGraw Hill book company. 1963
- [10] M. Abramowitz, I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover publications. 1972

