UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA
Y ELECTRICA

EL MODELO DE INVENTARIOS CON RESTRICCIONES

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE LA
MAESTRIA EN CIENCIAS DE LA ADMINISTRACION
CON LA ESPECIALIDAD EN INVESTIGACION
DE OPERACIONES

P R E S E N T A

VICTOR MANUEL IBARRA BALDERAS

MONTERREY, N. L. OCTUBRE DE 1983

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA

Y ELECTRICA

EL MODELO DE INVENTARIOS CON RESTRICCIONES

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE LA

MAESTRIA EN CIENCIAS DE LA ADMINISTRACION

CON LA ESPECIALIDAD EN INVESTIGACION

DE OPERACIONES

P R E S E N T A

VICTOR MANUEL IBARRA BALDERAS

MONTERREY, N. L. OCTUBRE DE 1985

PROLOGO

El control de inventarios en su corta historia ha despertado una enorme inquietud entre aquellas personas que desean saber como resolver distintos tipos de problemas de inventarios. Probablemente esta inquietud provenga de la verdadera necesidad de resolver problemas de inventarios.

Básicamente este trabajo se hizo para satisfacer en cierta manera la inquietud de algunos alumnos sobre temas de control de inventarios.

El trabajo principia con una introducción básica de la teoría de inventarios y una variedad de los métodos de sistemas de inventarios. Este método es llamado inventario con restricciones aplicado a inventario de empresas con costo de agotado igual a infinito.

Siempre es conveniente mencionar, que los resultados obtenidos, así como sus análisis es el esfuerzo de trabajo de distintas personas, queriendo de esta manera agradecer la ayuda desinteresada del Ing. Victoriano Alatorre González, el Dr. Juan Simón Gallegos, al Lic. José Luis Segovia Ramos y al Ing. Jorge Mar.

Monterrey, Nuevo León.   Victor M. Ibarra Balderas.

A DIOS:

Por iluminar siempre mi camino, por proporcionarme fuerzas para lograr un afán constante de superación, por ayudarme a ser siempre una persona positiva.

Por permitirme valorar a mis padres y luchar por no defraudarlos nunca.

¡GRACIAS A DIOS, POR TODO!

A MIS PADRES:

Sra. Alicia Balderas Camarillo; por sus desvelos, sus oraciones, por su cariño, por su ayuda firme que siempre me ofreció sin escatimar esfuerzos, ni salúd, con el único fin para que llegara a la meta.

Gracias Madre, ¡Lo he cumplido!

Sr. Manuel B. Pérez; por el cariño y aliento, que siempre me dió, la confianza que siempre me tuvo y el apoyo siempre presente.

Por todo ello...... ¡Gracias!

CON MUCHO AMOR A:

Domingo Corona Sánchez
María de la Luz Ibarra Balderas
Julieta Olivia Ibarra Balderas
Alfonso Ibarra Balderas
Enrique Ibarra Balderas
Aracely Ibarra Balderas
Alicia Pérez Balderas

Mis queridos hermanos, de quienes siempre, en alguna forma, recibí el aliento y apoyo necesarios en el transcurso de mi Maestría.

A todos .... ¡Muchas gracias!

A MI ASESOR:

Ing. Victoriano Alatorre González M.C.

Que con su esfuerzo, dedicación y la disposición que me dedicó para la terminación y ejecución - de la tesis. Le doy mis más sinceras gracias.

A MIS CONDISCIPULOS Y AMIGOS EN GENERAL:

A todas aquellas personas e instituciones que directa o indirectamente intervinieron para darme una de las más grandes satisfacciones de mi vida; Mi Grado.

CONTENIDO

I. INTRODUCCION

I. INTRODUCCION.

1.1. Perspectiva general de la teoría de inventarios.

Se puede decir que las primeras aplicaciones de los métodos cuantitativos para la toma de decisiones gerenciales, fue la teoría y aplicación de los modelos de inventario. Para muchas personas involucradas en la organización y fabricación de productos no sería sorprendente ya que los inventarios representan más del 25% del capital total invertido en una organización de negocios. Además, los inventarios proporcionan una flexibilidad de operación, pues asegura que las operaciones se realicen sin obstáculos. Así, un buen control de inventarios y una adecuada administración, traería como consecuencia un ahorro considerable a una compañía o si se viera en forma global, a la economía mundial.

El desarrollo del primer modelo de inventario fue hecho, por Harris (1915). Posteriormente Raymond (1931) amplió el trabajo de Harris a comienzo de los años 30. Estos hechos dieron la pauta para que fueran proliferando el desarrollo de la teoría y modelos de inventario.

Los modelos de inventario con el desarrollo que se le ha dado cubre cualquier situación de negocios. Es tan importante el hecho de tener existencias de un producto o artículo, ya que la falta de este podría ocasionar, el paro de la producción, la pérdida de algún cliente insatisfecho, que podrían ser muchos en el futuro.

Así, cuando la administración de los inventarios

es eficaz, podrá contribuir a mejores ganancias, aumentar --
los ingresos y la acumulación del activo.

II. CARACTERISTICAS GENERALES

II. CARACTERISTICAS GENERALES.

2.1. Introducción.

Existe una gran cantidad de casos especiales en la teoría de inventarios dadas las diferencias de los casos prácticos que se presentan en los problemas de inventarios. Estas diferencias son motivadas por los componentes principales de los modelos de inventarios. Existen dos componentes principales que motivan las diferencias entre un modelo y otro:

a) Obtener el recurso o artículos
b) La demanda.

Primeramente se considerará a la demanda dada su importancia.

La demanda se presenta en cualquier punto dado en el tiempo, pero cuando la demanda va relacionada con el inventario, es importante tener una referencia sobre el nivel de la demanda futura. Siguiendo la costumbre de la teoría de las decisiones podemos resumir la demanda futura en tres categorías:

a) Demanda conocida (inventario con certidumbre)
b) Demanda con distribución de probabilidad (inventario con riesgo)
c) Demanda desconocida (inventario con incertidumbre).

Estas son entonces las tres clases de problemas de inventario con respecto a la demanda futura.

Los procesos de adquisición son diferencias en los problemas de inventario, ya que son métodos para obtener las mercancías y se dividan en dos categorías:

a) Fuente exterior
b) Fuente interior.

Existe una tercera diferencia que por situaciones de definición no se menciona, pero es importante en los diversos modelos de inventario, y estas decisiones pueden ser:

a) Decisiones únicas (estáticas)
b) Decisiones continuas (dinámicas).

Existen otras diferencias que se consideran menos importantes, por lo que se mencionarán en forma trascedental. Estas diferencias provienen, por ejemplo, de las bodegas múltiples con y sin control de pedidos, cascadas de inventario de materia prima a través de los inventarios de productos en proceso a los inventarios de artículos determinados, etc.

2.2. Funciones que desempeñan los inventarios.

Los inventarios pueden definirse como la cantidad de artículos, mercancías y otros recursos económicos que son almacenados o se mantienen inactivos en un tiempo dado.

Los recursos económicos o artículos, varían de acuerdo al comportamiento de la demanda, que opera para reducir un inventario, y el proceso de abastecimiento que opera para elevarlo.

Los inventarios cubren funciones del sistema de producción-distribución donde los inventarios existen continuamente en el sistema completo, es decir, permiten que las diferentes actividades se desarrollen en forma relativamente independiente. Así los inventarios llenan algunas funciones básicas, como son:

a) Inventario en tránsito o de conducto. El inventario en tránsito es necesario, ya que cubre los retardos en el manejo y transportación de los artículos, materia prima, etc.

b) Inventario ciclo o tamaño de lote. Estos inventarios son los que pedimos como tamaño de lote, porque, es más económico realizarlo así, que pedirlo cuando sea necesario satisfacer la demanda.

c) Inventarios de seguridad. Estos son inventarios que sirven para prevenir cambios repentinos en la demanda.

d) Inventarios de desacople. La función básica de estos inventarios es tratar que todas las operaciones para la elaboración de algún producto, sean más independientes sin tener que depender completamente, en la programación de las salidas en cada proceso de producción.

e) Inventarios estacionarios. Los inventarios utilizados suavizan el nivel de producción de las operaciones, para que el obrero no tenga que despedirse o controlarse con mucha frecuencia.

Los inventarios, dado que cumplen con las funciones vistas anteriormente, son de gran valor para la administración. No es necesario que los inventarios se minimicen para que su costo de producción y distribución sean mínimos, ya que existen empresas que manejan inventarios mínimos y aún así, sus costos de producción y distribución son extremadamente grandes. Lo más conveniente es determinar niveles óptimos de inventario en situaciones dadas. Esto es, balancear de tal manera los costos que suben con los inventarios altos, contra los costos que bajan con respecto a los niveles altos de inventario.

2.3. Decisiones básicas en inventarios.

Una preocupación en la administración es encontrar políticas de inventarios que reduzcan los costos totales de operación de la empresa. Por eso, las decisiones básicas de inventario, son los siguientes dos criterios:

a) ¿Qué cantidad se debe pedir?

b) ¿Cuándo se debe pedir?

Al realizarse estas decisiones, el gerente desearía pedir y producir en grandes tamaños de lote para minimizar los costos de producción y almacenamiento. Así, también, por otra parte, el gerente tratará de minimizar los costos de mantener el inventario, lográndose cuando se produce o abastece en lotes pequeños. Para lograr la optimización es necesario balancear los dos extremos anteriores. Para lograrlo es necesario utilizar métodos cuantitativos clásicos donde, se podrá formular modelos y desarrollar variables de decisión, para obtener la cantidad económica de pedido, como también cuando se debe pedir.

Estas variables de decisión se pueden manejar -- independientemente como interdependientes, según las supo-- siciones implícitas del modelo dado.

III. CARACTERISTICAS DE LOS SISTEMAS DE INVENTARIO

III. CARACTERISTICAS DE LOS SISTEMAS DE INVENTARIO.

3.1. Parámetros económicos (costos de inventario).

En el análisis de inventario el criterio usual -- utilizado, en la minimización de una función de costos que - balancea los costos que se agrupan en las siguientes tres categorías:

a) Costos de Ordenar (C). Los costos de ordenar, son todos los costos incrementables asociados con el reabastecimiento del inventario. Los costos de ordenar ocurren cada vez que se ordena un pedido. A continuación se mostrarán algunos costos de ordenar:
   - Costos de requisición
   - Costos de emitir y seguir la orden de compra
   - Recibo de los artículos
   - Costos de inspección al recibir y colocar los artículos en el inventario
   - Costos cuando se realiza el pago al proveedor
   - Costos administrativos tales como: suministros, papelería, etc.

Por lo regular la determinación de estos costos - se realizan por medio de estudios especiales. Los salarios de los individuos involucrados en tales actividades constituyen la mayor parte de los costos de ordenar.

b) Costos de llevar el inventario (C2). Estos costos -- son los asociados en mantener un nivel dado de inventario disponible, varía con el nivel y período de - - tiempo que se mantiene el inventario.

Los costos de mantenimiento comprenden:

- Costo de oportunidad en la inversión comprometida - en el inventario (todo esto basado en el costo de - Capital)
- Costos de almacenamiento, costos que comprenden (alquiler, calefacción, refrigeración, vigilancia, etc.)
- Costos por deterioro del producto u obsolescencia.
- Costos por depreciación, impuestos y seguros.

Normalmente, los costos de llevar el inventario en las empresas es aproximadamente del 20 al 25 por ciento. Lógicamente existen empresas que quedan fuera de estos rangos, por situaciones extremadas.

Los costos de llevar el inventario se expresan -- como el costo en pesos, de mantener una unidad de inventario por unidad de tiempo, (comúnmente un año).

c) Costo de agotado o quedarse corto (C3). A estos costos se les llama también, costos de penalización, y - se incurre cuando se quedan sin la mercancía necesaria, estos costos comprenden:

- Costo por pérdida de clientes
- Prestigio
- Utilidad perdida debido a pérdida en ventas.

Existe la manera de satisfacer la demanda que no fue satisfecha, esto es por medio de pedidos propuestos, y son costos que varían directamente con la cantidad faltante y el tiempo de retardo. Si la demanda faltante no es cumplida, entonces se originan costos proporcionales a la cantidad faltante.

3.2. Demanda

El comportamiento de la demanda de cualquier producto o artículo puede ser determinístico o probabilístico.

Para la elaboración de este trabajo es necesario conocer la demanda determinística ya que se trabajará con la suposición de que conocemos el comportamiento de la demanda. Es por eso que la demanda probabilística se hará referencia en este capítulo en forma general.

Por determinístico, se entiende que son cantidades pedidas en los períodos siguientes que se conocen con certeza. La demanda sobre períodos iguales de tiempo pueden ser constantes o variables, así como determinística o no determinística. Con lo siguiente podemos clasificar a la demanda como, estática o dinámica respectivamente.

La demanda probabilística se presenta cuando la demanda sobre un período de tiempo es incierto, pero podemos representarla en términos de una distribución de probabilidad. Ahora bien, la demanda probabilística se puede presentar, como una distribución de probabilidad estacionaria o no estacionaria sobre el tiempo.

La demanda para un período de tiempo dado, la podemos satisfacer, instantáneamente al inicio del período o uniformemente durante el transcurso del período. Lógicamente al satisfacer la demanda de esa forma, afectamos los niveles de inventario así como, los costos de mantenimiento del inventario en cuestión.

3.3. Ciclo de pedido.

El concepto de ciclo de pedido, es el perído de tiempo entre la colocación de dos pedidos sucesivos. Existe en el ciclo de pedido, dos distintas maneras de revisión, que son las siguientes:

a) Revisión continua. El registro del nivel de inventario se monitorea continuamente hasta que alcanza un punto de nuevo pedido, especificado con anterioridad donde se coloca el nuevo pedido. A este ciclo de pedido (revisión continua) también se le llama como el sistema de dos cajones.

   El nombre de sistema de dos cajones, se deriva de que al monitorearse en forma continua el inventario se pueden utilizar dada sus características de cajones o pedidos de inventario, así de esta forma, los artículos que retiran de un cajón, al quedarse vacío, se procede a utilizar el otro cajón de artículos disponibles, así se puede decir que se coloca un nuevo pedido de inventario.

b) Revisión periódica. Este método de ciclo de pedido se identifica ya que su iniciación, es que los pedidos se colocan en intervalos regulares de tiempo.

3.4. Otras características de inventarios

a) Tiempos de anticipación. En la colocación de un nuevo pedido, se puede recibir inmediatamente o puede existir que se tome algún tiempo para que se reciba. El tiempo que existe entre la colocación y la recepción del nuevo pedido se denomina como tiempo de anti cipación. Existen dos tipos de tiempos de anticipación, que pueden ser, determinístico o probabilístico.

b) Reabastecimiento del inventario. Al reabastecerse de artículos el inventario, puede ocurrir, instantáneamente o uniformemente sobre el tiempo. El reabastecimiento instantáneo resulta por lo general cuando se compran los artículos o fuentes externas. El reabastecimiento uniforme, ocurre cuando los artículos son producidos por la misma empresa u organización.

c) Número de artículos. En los sistemas de inventario por lo regular existen distintas mercancías, y por lo general estas mercancías compiten por los recursos de la empresa como son, capital y espacio disponible. Al suceder esto, existen interacción entre los artículos diferentes y los modelos de inventario deben adaptarse o desarrollarse para satisfacer esas condiciones.

IV. MODELO CLASICO DE INVENTARIO (CEP)

IV. MODELO CLASICO DE INVENTARIO (CEP).

4.1. Introducción.

Con las características o atributos discutidos -- con anterioridad son los elementos básicos que son necesa-- rios para formular el modelo clásico de cantidad económica de pedido (CEP). Es necesario considerar que dentro de la formulación de este modelo, la demanda es virtualmente el elemento más importante. Debe mencionarse que es casi imposible formular un modelo de inventario general que tenga en cuenta todas las variaciones que se encuentran en un -- sistema real de inventarios.

Aunque el modelo clásico (CEP) es sobre simplificado para hacer una representación de la mayoría de las situaciones de la vida real, lo podemos considerar como un - punto de partida para la elaboración de modelos más realistas con situaciones más complejas de la vida real. El modelo clásico (CEP) se aplica cuando se considera que la -- cantidad total que se pide llega simultáneamente al sistema de inventario, y cuando la tasa de la demanda (es conocida) es constante. Las situaciones típicas de la aplicación de este modelo son:

- Los inventarios de materiales de construcción de una obra específica deben mantenerse y la demanda se conoce frecuentemente con certeza.
- Utilización de suministros de oficinas, tales como -- ganchos para papel, bolígrafos, lápices y cuadernos - de notas de una oficina.
- Utilización de ciertos suministros industriales, como

tuercas, remaches, arandelas, etc.

- Utilización de suministros para el aseo de una oficina, edificio, etc.

Se puede visualizar muchas otras aplicaciones de modelos clásico (CEP). Las suposiciones primordiales del modelo son las siguientes:

- La demanda se conoce como certeza
- La tasa de demanda es constante
- El inventario se reabastece cuando su nivel está -- exactamente en cero
- El tiempo de anticipación es constante e igual o mayor a cero
- El precio unitario, costo de ordenar, y los costos - de llevar el inventario son constantes.

Como se consideró anteriormente muchas de estas suposiciones pueden ser violadas por situaciones reales, - donde, el modelo se vería afectado en la utilidad del negocio, cuando no se describe una situación verdadera. Sin - embargo si las restricciones son violadas al mínimo, este modelo puede ser representativo e insensible, a las decisiones que se toman para cantidad por pedir y el monto total de los costos, puede ser que su desviación con respecto al óptimo, sea mínimo.

La figura 4.1. ilustra la variación del nivel de inventario para el modelo clásico CEP. La línea de pendiente decreciente indica que el nivel de inventario se - está reduciendo, con el tiempo a una tasa constante (deman da constante). Cuando el nivel de inventario alcanza el -- punto de renovación de pedido, es necesario pedir q_0 unidades del artículo. El pedido de artículo se recibe exactamente cuando el nivel de inventario es cero, durante el - - tiempo de anticipación (L). Por consiguiente, el nivel de inventario se eleva a q_0 unidades (el máximo nivel de inventario), ocasionando con ello la repetición del ciclo.

El valor de q_0 en cualquier ciclo dado, será - - igual puesto que estamos con el modelo clásico CEP, y se - supondrá implícitamente un horizonte de tiempo y un proceso que no cambia con el tiempo, así el t_1 es igual en el - t_2 y q_2, se calcula de la misma manera que q_1.

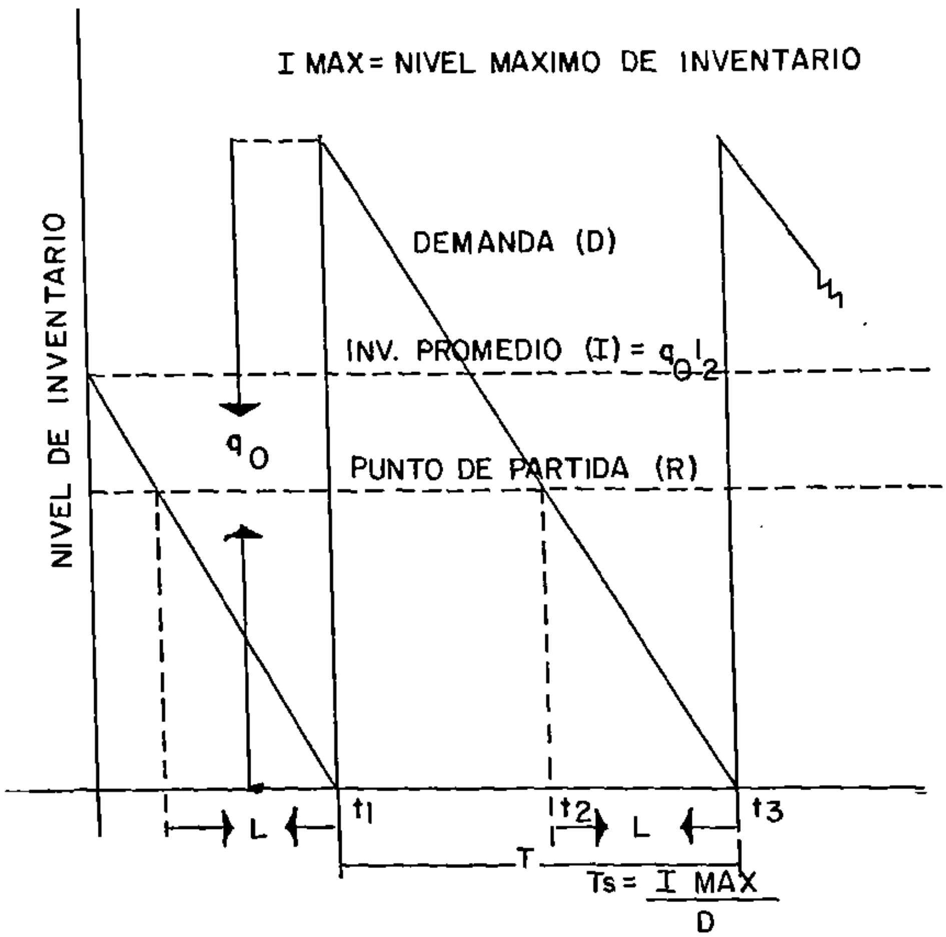


Figura 4.1. Perfil de inventario del modelo clásico CEP

La figura 4.2 muestra perfiles de inventario para cantidades de pedido diferentes. Así mientras más pequeño sea q_0, la colocación de pedidos será más frecuente. Una consecuencia lógica es que el nivel del inventario promedio se reducirá. La cantidad de pedidos más grandes indican un mayor nivel de inventario con colocación de pedidos menos frecuentes. Los costos que se originan como, costos de ordenar y los costos de llevar el inventario, se balancean con respecto a la cantidad q_0, que minimicen los costos totales. Esta es la base para formular un modelo de inventario.

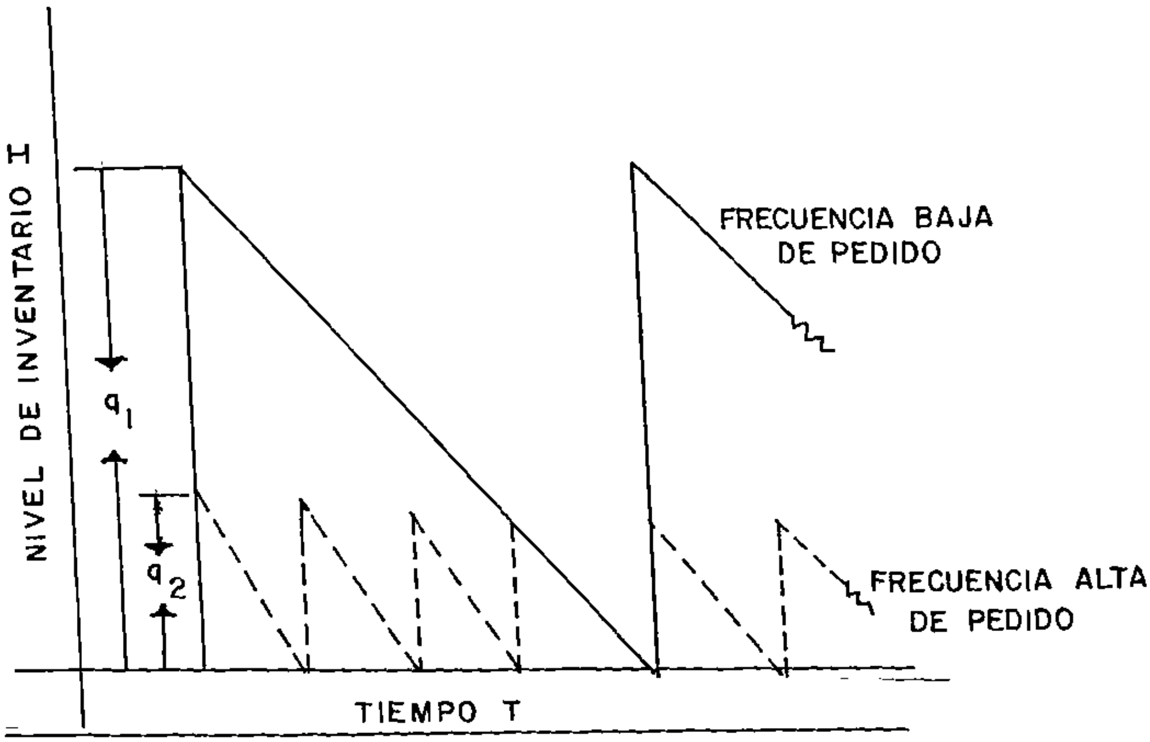


Figura 4.2. Perfiles de inventarios para frecuencias bajas y altas de pedido

Para la solución de los distintos métodos que se verán a continuación utilizaremos un mismo ejemplo, como un punto de partida para encontrar las soluciones en cada uno de sus métodos del modelo clásico CEP.

4.1.1. Ejemplo de la aplicación del modelo de inventario CEP.

La Compañía Alicia de Suministros de Tenis. Se considerará la situación en la que se encuentra la compañía Alicia de suministros de Tenis (AST). AST es un distribuidor de tenis en el Valle de México. AST surte alrededor de 500 detallistas, desde una bodega principal ubicada en Toluca, estos detallistas comprenden, tiendas de deportes, almacenes de zapatos tenis, etc.

El inventario de zapato tenis AST forma el 10% del inventario total de AST y aproximadamente son 100 000 pares. El costo total promedio se estima por par en $12.00, para un costo total de inventario de zapatos de $1;200,000. El costo de capital de AST se estima en una tasa anual del 5%. Los seguros, impuestos, daños, pillajes y costo de administración de la bodega se estima en una tasa anual del 5% del valor de su inventario.

Domingo Corona, el gerente de la bodega ha hecho un análisis preliminar del inventario total de AST, para asegurarse de que las reglas de decisión del inventario que se utilizan, minimizan los costos de inventario. También, el desea realizar un estudio en el zapato de tenis más popular de AST, el "Pique", un zapato liviano de cuero, y respaldado por el jugador de tenis Raúl Ramírez.

Domingo se reunió con el comprador de AST responsable de las ventas de "Pique", Victor Herrero, para averiguar como se tomaban las decisiones de compra del producto. Encontró que Victor, tiende a pedir grandes cantida-- des por adelantado y siempre mantiene un gran inventario, dando como consecuencia que AST nunca quede sin mercancía. Victor parece darle poca importancia a los costos de lle- var el mantenimiento o los costos asociados como son los - costos de ordenar. Las estadísticas muestran que el año pa sado, Victor había colocado 10 pedidos de 1000-pares- cada uno (se pide cada 5 semanas) a un costo de $20.00 por par. El fabricante garantiza que cada pedido se cumple cada 3 -- días. Además, los registros muestran que cada pedido se -- reciba exactamente 3 días depués de haberse colocado.

Domingo ha recogido datos de demanda de "Pique"- del año pasado. La demanda parece constante durante el año. Podemos ver en la siguiente figura la demanda de 10 semanas pasadas.

SEMANA	DEMANDA (PARES)
1	200
2	195
3	203
4	210
5	200
6	204
7	198
8	190
9	200
10	200
TOTAL DE PARES	2000
Promedio de pares por semana	200
Pares vendidos por año (basado en 50 semanas)	10000

Domingo cree que aunque la demanda no es exactamente constante, dada su baja variabilidad, es posible suponer que esta demanda es conocida y constante en 200 pares por semana.

Domingo también analizó los costos de ordenar de AST. Encontró que la mayor parte de los costos de ordenar son los pagos de los salarios de los agentes de compras de AST, como Victor. Como ejemplo, la tasa salarial promedio y el costo de los beneficios adicionales para los compradores, era de $16 por hora, (ya que la preparación de cada pedido son cada 30 minutos por pedido).

Otros costos de ordenar que comprendan papelería, correo, teléfono, mecanografía, etc. alcanzan la suma de $1.00 por pedido.

Domingo tiene que analizar y tomar las decisiones siguientes:

1. ¿Debe mantener inventarios pequeños y pedir frecuentemente?
2. ¿Debe mantener grandes inventarios y pedir con poca frecuencia?

Domingo se daba cuenta que la primera alternativa podría traducirse en costos excesivos de ordenar, mientras que la segunda alternativa probablemente resultaría en costos de llevar el inventario excesivo. Quizá la mejor combinación entre estas dos alternativas conduciría a costos totales de inventario más bajo.

El problema es seleccionar la cantidad óptima que se debe pedir para minimizar los costos totales de inventario.

4.1.2. Formulación del modelo CEP

Definición de variables y parámetros.

q_0 = Cantidad pedida (unidades)
ts = Período de tiempo entre pedidos
C1 = Costo de ordenar (preparación o alistamiento) ($ por pedido)
C2 = Costo de llevar el inventario ($ por unidad de tiempo)
D = Requisitos de demanda anual (unidades por tiempo)
L = Tiempo de anticipación
n = Número de pedidos
$CT(q_0)$=Costo total
R = Punto de pedido.

4.1.3. Variables de Decisión y Parámetros.

Nuestro objetivo es definir las variables de decisión. Si existe una q_0, la cantidad pedida, el objetivo sería determinar la cantidad óptima pedida q_0^* que minimiza C + (q_0), que es la suma de los costos de ordenar y llevar el inventario.

El objetivo ahora se definirá en términos de la variable de decisión q_0 para evaluar y encontrar una q_0^* que minimice el CT (q_0) donde, CT $(q_0$ = f (q_0) (en donde f denota la función).

Al costo total lo afectan los parámetros del modelo: C1, C2 y D. Por lo tanto CT (q_0) = f $(q_0$; C1, C2, D), en donde la variable de decisión se encuentra a la izquierda del punto y como M los parámetros a la derecha. La función de costos de AST que debe minimizarse es entonces:

CT (q_0) = costo de llevar el inventario + costo de ordenar

Nota: Se considerará la unidad de tiempo igual a un año. - Considerando cada una de las componentes anteriores de costo, el costo anual de llevar el inventario es:

Costo de llevar el inventario = Inventario promedio X Costo de manteni-- miento por unidad por año

C2 = 1/2 q_0 (C2/unidad-año)

Así tenemos que el inventario promedio es igual - 1/2 q_0 , puesto que la demanda se supuso constante y el -- máximo nivel de inventario es igual a q_0 (ver figura 5.1).

Para el zapato de tenis "Pique", el costo anual - unitario de llevar el inventario, C2, es igual a la tasa de capital y otros costos que se multiplican por el precio de compra CD o precio unitario: C2 = (10%) ($20.00 costo x -- unidad) = $2.00 por unidad por año.

Ahora tenemos el siguiente costo (C1) como se mostrará a continuación:

Costo de ordenar/año = (costo de ordenar) X (número de pe-- didos/año) C1 = C1 (D/q_0)

El costo unitario de ordenar, C1 (para el zapato "Pique") que es independiente de la cantidad ordenada, es igual al salario por hora y a los beneficios adicionales multiplicados por el tiempo en proceso, más los costos admi nistrativos incrementables,

Esto es: $C1 = (\$16.00 \text{ por hora X } 1/2 \text{ hora}) + 1 = \$9.00$

El modelo del costo total (q_0) es igual a:

$$CT(q_0) = 1/2 \quad C_2 + C_1 \quad D/q_0$$

$$= 1/2 \; q_0 \; (2) + 9 \left(\frac{10000}{q_0}\right) \qquad (1)$$

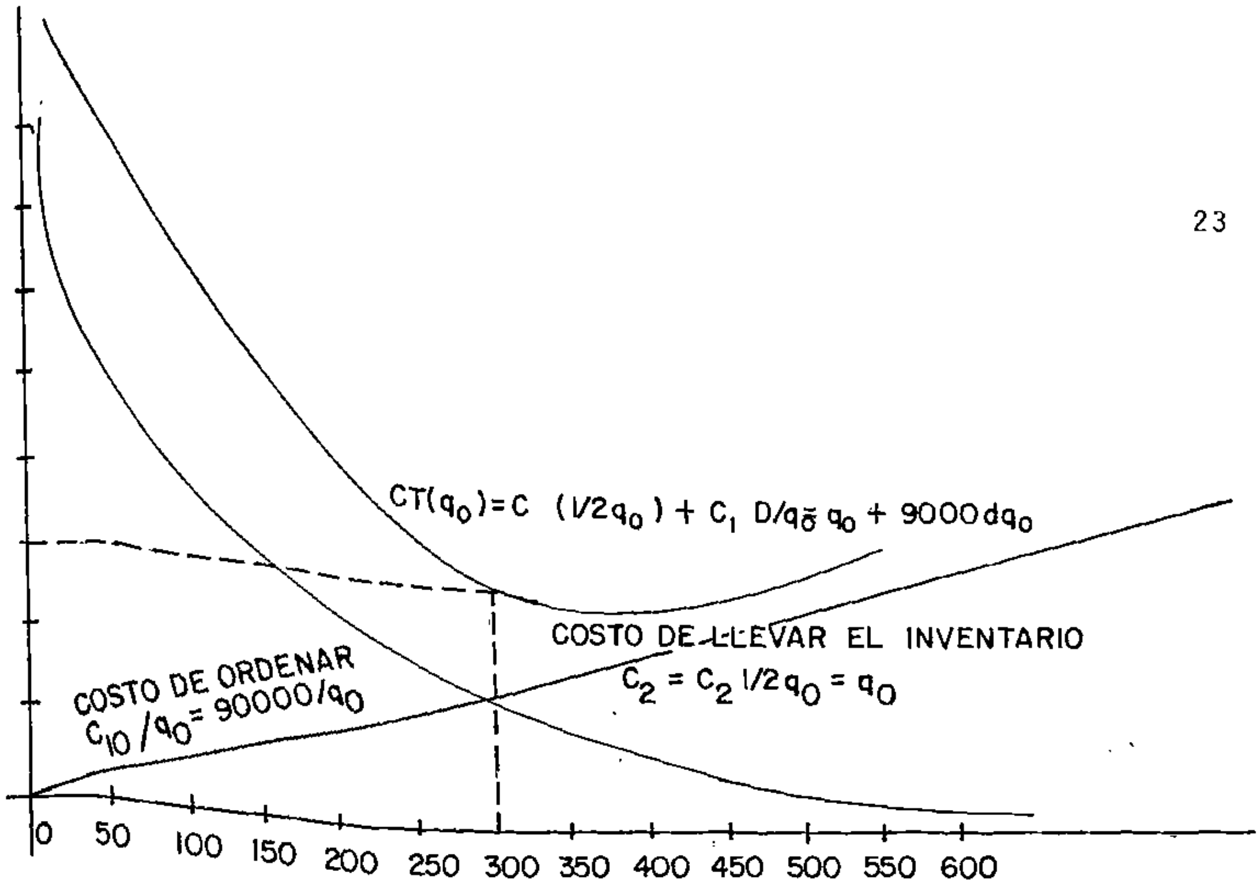
4.2. Solución Gráfica.

Se puede desarrollar un modelo cuantitativo que seleccionara la cantidad óptima que se debía pedir para minimizar los costos totales del inventario, conformados por los costos de llevar el mantenimiento y los costos de ordenar.

De acuerdo al ejemplo (1) se obtienen los siguientes datos:

C_2 = 10% (\$20.00) \$ 2 por unidad 1 año
C_1 = (\$16.00 por hora x 1/2 hora) + 1 = \$9.00
D = 10 000 unidades por año

Con los siguientes datos se puede graficar las curvas de los costos del modelo clásico CEP (figura 5.3)



Cantidad pedida, q_0

Figura 5.3. Curvas de costo del modelo clásico CEP; donde la D = 1000 unidades X año, C2 = \$2.00 por unidad por año, C_1 = \$9.00 por orden

Gráficamente podemos determinar la q_0^*; donde nos preguntaríamos ¿Cuánto se debe pedir?. Como se muestra en la figura 5.3, cuando q_0 aumenta el nivel de inventario -- $q_0/2$ crece, y como consecuencia los costos de llevar el =- inventario. Pero el número anual de pedidos es menor, dando como resultado que los costos de ordenar, disminuyen en forma no lineal, tendiendo a cero asintóticamente (nunca - será cero).

El C + (q_0) que es la suma del costo de ordenar - más el costo de llevar el inventario, disminuye primero - -

cuando q_o aumenta, después el CT (q_o) alcanza un punto mínimo y posteriormente aumenta de nuevo. El objetivo de AST, es encontrar la cantidad mínima de pedido q_o^* que nos reduzca los costos totales.

4.3. Solución por error y ensayo

En el inciso anterior vimos la solución del modelo CEP por el método gráfico, ahora solucionaremos el mismo problema por el método de error y ensayo, esto quiere decir que buscaremos la solución por tanteo hasta llegar al óptimo.

La tabla 4.1. nos muestra los costos de inventarios para valores seleccionados con anterioridad de q_o.

Para tener idea de como se obtuvieron los valores tenemos lo siguiente:

$C_2 = C_2\, q_o/2$ esto nos da; $C_2 = 2\left(\underline{q_o}\right) =$

$C_1 = C_1 \dfrac{D}{q_o}$ = esto nos da; $C_1 = 9\left(\dfrac{10000}{q_o}\right) = \dfrac{90000}{q_o}$

El q_o^*, es obtenido por el procedimiento de error y ensayo, es igual a 300 unidades con un CT (q_o^*) igual a \$600 por año.

(1) Cantidad pedida q_0	(2) Costo de llevar costo $C_2 = q_0$	(3) Costo de ordenar $C_1 = 90000/q_0$	(4) Costo total (4)=(2)+(3)
\$ 100	\$ 100	\$ 900	\$ 1000
150	150	600	750
200	200	450	650
250	250	360	610
$q_0 =$ 300	300	300	600
350	350	257	607
400	400	225	625

Tabla 4.1. Costo de inventario para diversas cantidades - ordenadas a zapatos de tenis "Pique"

4.4. Soluciones por diferenciación.

El último enfoque para resolver o desarrollar -- una regla de decisión óptima CEP general para problemas de este tipo, consiste en utilizar la diferenciación. Es el - mejor método para resolver el modelo de inventario CEP, -- puesto que no tiene las limitaciones de los métodos de soluciones anteriores. La ecuación desarrollada es:

$$1/2\ q_0\ C_2 = D/q_0\ C_1$$

Si diferenciamos la ecuación precedente, la expresión resultante de la pendiente de los costos totales sería:

$$1/2\ q_0\ C_2 = D/q_0 C_1$$

$$CT(q_0) = 1/2\ q_0(2 + D/q_0 C_1)$$

$$\frac{d\,Ct(q_0)}{dq_0} = 1/2\,C_2(1)\ 1\ \cancelto{0}{q_0}(0) - \frac{DC_1(1)}{q_0^{2}} = 0$$

$$= 1/2\,C_2 = \frac{DC_1}{q_0^2}$$

$$q_0^2 = \frac{2\,DC_1}{C_2}$$

$$q_0^{*} = \sqrt{\frac{2DC_1}{C_2}} \qquad (2)$$

donde:

$$(\text{Unidades/pedido}) = \sqrt{\frac{(\text{unidades/año(costo/pedido)}}{(\text{costo/unidades por año})}}$$

Podemos verificar para estar seguros de que la regla de decisión derivada para q_0^* es una solución de costo mínimo, ya que la simple ecuación (2) no nos dice si los costos totales son mínimos o máximos con respecto a la cantidad económica de pedido. El empleo de la prueba de la sēgunda derivada resolverá el problema:

Segunda derivada de:

$$d(CT(q_o)\ ) = 1/2\ C_2 - \frac{DC_1}{q_o{}^2}$$

$$d^2\ (CT(q_o)) = \cancelto{0}{\frac{d(1/2\ C_2)}{d}} - \frac{\cancelto{0}{(q_o{}^2)\ (0)} - DC_1(2q_o)}{q_o{}^4}$$

$$\frac{d^2(CT(q_o))}{d} = \frac{2C_1}{q_o{}^3}$$

El signo más (+) en la prueba de la segunda derivada, indica un punto mínimo de costo toal en vez de un - - punto máximo, con respecto a la cantidad económica de pedido. Así tenemos que el valor de la segunda derivada es mayor que cero para valores positivos, de D, C, y q_o, q_o^* es una solución de costo mínimo.

Después de mostrar $q_o^* = \sqrt{\frac{2DC_1}{C_2}}$ sustituimos los valores supuestos de la compañia AST,

$$q_o^* = \sqrt{\frac{2(10000)\ (9)}{2}} = 300 \text{ unidades}$$

Nos damos cuenta que el valor anterior es igual - al que se obtuvo por el método de error y ensayo, visto en la tabla (5.1.).

Lo siguiente es encontrar el costo total óptimo - para la solución óptima calculada de la ecuación (2) y puede derivarse reemplazando la ecuación (2) en la fórmula de costo de (1) y resolviendo CT (q_o^*) tenemos,

$$CT\ (1_o)^* = \sqrt{2C,C_2\ D} \qquad (3)$$

Al obtener la fórmula del CT (q_o^*) se sustituyen - los valores supuestos con respecto a la compañía AST, y obtenemos;

$$CT(q_o)^* = \sqrt{2(9)\ (2)\ (10000)} = \$600.00$$

de nuevo la cantidad resultante es igual a la que se obtuvo en el método de error y ensayo en la tabla (1).

Al resolver tanto la cantidad q_0^* como el costo - CT (q_0^*) podemos encontrar la frecuencia de pedidos. El número de pedidos óptimo por año (N^*) es igual a la demanda - anual total (D) dividida por la cantidad óptima pedida - -- (q_0^*);

$$N^* = D/q_0$$

sustituyendo valores tenemos:

$$N^* = \frac{10000}{300} = 33 \text{ pedidos por año} \qquad (4)$$

El tiempo entre pedidos (tiempo de ciclo) es recíproco a la ecuación (4) esto es:

$$T^* = \frac{1}{N^*}$$

$$T^* = \frac{q_0^*}{D} \qquad (5)$$

sustituyendo valores tenemos:

$$T^* = \frac{300}{1000} = .03 \text{ por año}$$

Se supone el año de 350 días, se aplica una re--- gla de tres simple y se tiene que cada 10.5 días debe colocarse un pedido.

Se ha logrado determinar q_0^* (cuando se debe pe-- dir) y T^* (que tan frecuente pedir). Ahora la decisión de cuando pedir se enfoca en términos del punto de pedido (R) que es el nivel de inventarios en el cual se debe colocar - un pedido (ver figura 5.1). En AST existía 3 días de tiempo de anticipación. Por lo tanto para una tasa de "Pique" de 200 pares por semana (5 días a la semana) 40 pares por día. Domingo espera vender 120 pares de zapatos tenis "Pique" (40 días x 3 días = 120 pares) durante los tres días - que toma un nuevo pedido para alcanzar la bodega AST.

Este período de entrega de 3 días es el tiempo - de anticipación para un nuevo pedido y los 120 pares de demanda anticipada durante el tiempo de anticipación. Así - el punto de pedido elegido es de 120 pares de inventario.

V. EL MODELO C.E.P. CON RESTRICCIONES

V. EL MODELO C.E.P. CON RESTRICCIONES.

5.1. Introducción.

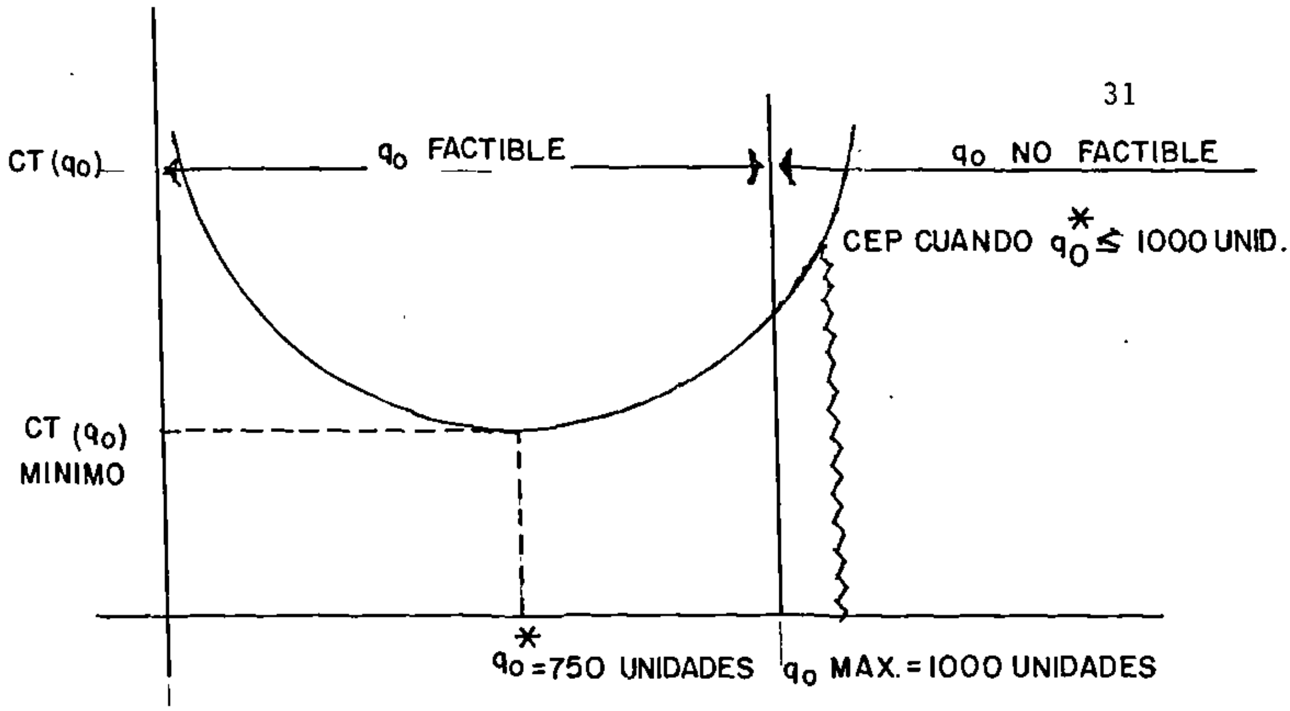
Los modelos CEP algunas veces producen resultados que no son factibles; se puede ver en modelo de inventario de descuentos por cantidad, así como, modelos de producción para productos múltiples que usan las mismas instalaciones.

Pero existen situaciones que aparentemente no -- son consideradas donde los resultados no factibles se presentan. Se puede hablar del modelo CEP con restricciones, por ejemplo; cuando el inventario es restringido por el espacio de almacenaje o por el monto total de capital invertido para inventario.

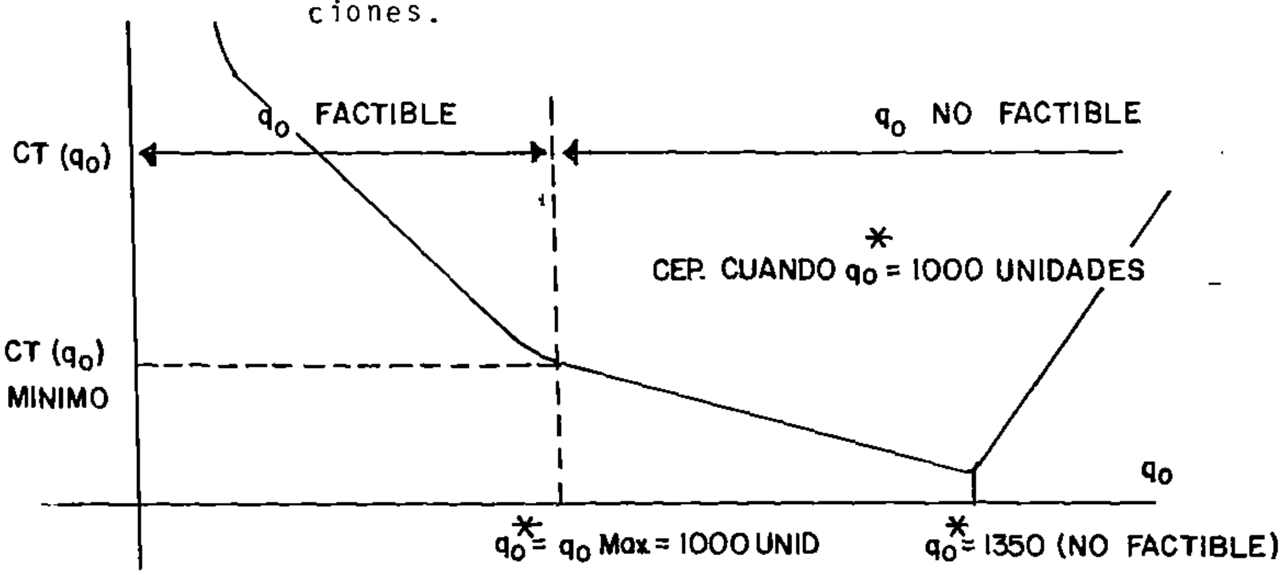
Veremos que cuando una restricción de espacio o capital disponible para el modelo CEP utilizando su fórmula apropiada, si el valor calculado CEP resulta factible,- donde q_0 = 750 unidades que es menor a 1000 unidades entonces q_0^* = 750 unidades esto para la figura 6.1.

Para la segunda figura 6.2 donde q_0 = 1350 unidades nos muestra que no es factible puesto que la máxima cantidad factible es q_0^* = 1000 unidades.

Como se puede observar gráficamente cuando existe un solo producto el problema es mínimo. Sin embargo -- cuando hay artículos múltiples que compitan por el mismo - espacio limitado, capital u otros recursos, el problema resulta complejo.



Gráfica 6.1. Cantidad económica de pedido con restricciones.



Gráfica 6.2. Cantidad económica de pedido con restricciones.

5.2. Inventarios con una sola restriccion.

Los sistemas de inventarios tienen almacén para muchos artículos, no solamente para un solo artículo, esto nos permite estudiar cada artículo individualmente cuando - no hay interacción entre ellos. Existen muchas maneras de interacción entre ellos, por ejemplo, los artículos que se pueden sustituir parcialmente, los almacenes pueden tener capacidad limitada, y los artículos están compitiendo por un espacio del almacén, podemos también tener un límite en el número de órdenes o pedidos al año, o podemos tener un límite en el inventario máximo como inversión.

Para la realización de este tema consideraremos -- solamente las restricciones que se involucran en la máxima capacidad de almacenaje, máxima inversión de inventario en dólares y por último el número máximo de pedido al año.

Considerando primeramente el caso donde hay un -- límite que llamaremos P_i y está dado como capacidad de alma_ cenaje en pies^2. Suponiendo que empezamos con "n" artículos y que una unidad de artículo i tomada de Z_i pies^2 nos representa parte de la demanda. Pero nosotros estudiare-- mos el caso donde se tiene toda la demanda.

Si q_i es el orden cuantitativo de cada artículo - i si el espacio restringido no es violado en ningún momento esto es:

$$\sum_{i=1}^{n} Zi\,qi = Z_1q_1 + Z_2q_2 + \ldots\ldots\ldots + Zn\,qn = P \qquad (1)$$

Tenemos como a D_i, como la demanda anual y se considere determinística, C_1 es el costo de ordenar, C_2 en el costo de llevar el inventario (se asume independientemente de q_i), y i es el costo cargado a cada artículo. Entonces tenemos la función de costo total y es:

$$CT(q_0) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{DiC_1}{qi} + \frac{iC_2 qi}{2} \right] \qquad (2)$$

Si se desea encontrar el valor mínimo absoluto del CT (q_0) en la región de $0 < q_i < 00$, i = 1,2,...,n sujeto a la restricción que se ve en la ecuación (1).

El procedimiento es como sigue: primero solucionaremos el problema ignorando la restricción (1), y se obtiene:

$$q_i = \sqrt{\frac{2DiC1}{i\, C_2}} \qquad i = 1, 2, 3....n \qquad (3)$$

Si la q_i de la ecuación (3) satisface a la ecuación (1) entonces la q_i es la cantidad óptima, en tal caso la restricción no es violada. En este caso el espacio es suficiente, así el costo promedio anual no puede ser reducido para incrementár la cantidad de espacio disponible.

Por otro lado si q_i de la ecuación (3) no satisface a la ecuación (1) entonces la restricción es activada y la q_i de la ecuación (3) no es la óptima. Por lo tanto debemos encontrar el óptimo de q_i usando la técnica de multiplicadores lagrangeanos y formamos la función;

$$L(qi.\lambda_1) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{DiCli}{qi} + \frac{iC2iqi}{2} \right] + \lambda_1 \left[\sum_{i=1}^{n} Ziqi - p \right] \qquad (4)$$

donde el parámetro 1 es el multiplicador lagrangeano. Entonces debemos encontrar la q_i^* de i = 1...,n para cada artícu lo donde la suma de las q_i^* nos den el mínimo costo total - sujeto a la restricción que se ve en la ecuación (1).

En las siguientes ecuaciones veremos la aplica--- ción de los multiplicadores lagrangeanos, dándole solución a un conjunto de ecuaciones por medio de métodos de optimización.

Por lo tanto derivando parcialmente con respecto a $(q_i \lambda 1)$ se obtiene.

$$\frac{(q_i \lambda 1)}{q_i, \lambda, \$/pies^2)}$$

$$\frac{dL}{dqi} = 0 = \frac{DiC_1i}{qi^2} + \frac{iC_2i}{2} + \frac{\lambda_1 Zi}{} \quad : \quad i = 1,2,3 \ldots\ldots n \qquad (5)$$

$$\frac{dL}{d\lambda_1} = 0 = \sum_{i=1}^{n} Zi\, qi - P \qquad (6)$$

Ahora por sustitución encontramos el valor de q_i - y se tiene

$$\frac{-DiCli}{q_i^2} + \frac{lC2i}{2} + \lambda l\, Zi = 0$$

$$\frac{iC2i}{2} + \lambda l Zi = \frac{DiCli}{q_i^2} \therefore \overset{*}{qi} = \sqrt{\frac{2DiCli}{iC2i + 2\lambda l Zi}} \qquad (7)$$

$$i = 1,2 \ldots\ldots\ldots n$$

donde $\lambda \overset{*}{i}$ es el valor óptimo tal que q_i^* de (7) satisface a la ecuación (6) de la función

$$\sum_{i=1}^{n} Zi \left[2DiCli(iC2i + 2\lambda l Zi)^{-1} \right]^{1/2} = P$$

Sabemos que $\lambda \overset{*}{i}$ opuesto que cuando $\lambda 1 = 0$ se está violando la restricción. Por lo tanto hay una única $\lambda^{*}1$ > 0 tal que satisfaga a la ecuación (6).

Sabemos que el costo total CT (q_0) al optimizar -- por medio de λ_1^* debe ser el mínimo valor de CT (q_0) esto - es con respecto a la q_i^*. De este modo se tomó intuitivamente que λ_1^* dada decrece en el costo mínimo.

El multiplicador lagrangeano es a menudo atribuido al precio que se refleja por el espacio a piso. Así el espacio de piso cuesta λ_1^* dólares por pie cuadrado por año entonces el costo variable promedio anual será:

$$CT(q_0) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{Di\,Cli}{qi} + \frac{i\,C2iqi}{2} \right] + \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} Ziqi \qquad (8)$$

La situación donde q_i minimiza la expresión de CT (q_0), es precisamente el mismo que minimiza a la ecuación - (2) sujeta a la ecuación (1). El problema descrito por (8) al cual se le asignó un costo pero no un límite razonable - del espacio, se le llama problema dual del problema descrito por (2) y (1), el cual hace que no se le cargue el espacio, pero tiene un límite razonable del espacio de piso -- disponible.

Considerando el siguiente caso, donde se tiene una restricción en el número total de órdenes o pedidos, donde podemos asumir que no podemos pedir más de H órdenes al año. Esto requiere que:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{Di}{qi} = H \qquad (9)$$

Nosotros podemos decir que ignoramos el número de pedidos al año dado que no pueden ser integradas y pueden - diferir del valor promedio Di/qi en muchas unidades.

Podemos asumir que no fue fijado el costo por ordenar (C1), dado que es imposible fijarlo por las variantes que existen en el mercado (situación supuesta). Solamente los costos cargados al llevar el inventario son dados. De este modo el costo promedio variable anual es:

$$CT(q_o) = \sum_{i=1}^{n} \frac{iC2i\,qi}{2} \qquad (10)$$

Si se desea encontrar el mínimo absoluto de (10) - sujeto (9). Es necesario aclarar que la restricción (9) no siempre es activa, dado que como muchas órdenes podrían ser procesadas, así también los costos de llamar el inventario - podrían ser reducidos en el camino.

Al determinar el óptimo de q_1 nosotros formamos la siguiente función:

$$L(qi.\lambda 2) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{iC2iqi}{} \right] + \lambda 2 \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{Di}{} - H \right] \qquad (11)$$

Donde λ_2 es el multiplicador lagrangeano. Entonces el óptimo de q_i^* podría satisfacer las ecuaciones siguientes:

$$\frac{dL}{dqi} = O = \frac{iC2i}{2} - \frac{\lambda 2\, Di}{q_i^2} \qquad i = 1.2 \ldots\ldots n \qquad (12)$$

$$\frac{dL}{d\lambda_2} = 0 = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{Di}{qi} - H \right] \tag{13}$$

La única solución óptima es:

$$q_i^{*} = \sqrt{\frac{2Di\lambda 2}{iC_2 i}} \qquad i = 1.2 \ldots\ldots\ldots n \tag{14}$$

Ahora sustituyendo (14) en (13) se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{Di}{\left(\frac{2\lambda_2 Di}{i C_2 i}\right)^{1/2}} \qquad i = 1.2 \ldots\ldots n$$

Encontrando el valor de λ_2 se obtiene por medio de la si--- guiente sustitución.

$$\lambda_2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2H}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{Di.\, iC_2 i} \right]^2 \tag{15}$$

En este caso es fácil resolver explícitamente por el valor óptimo del multiplicador lagrangeano. El valor de λ_2^{*} puede ser interpretado como el costo de entrada o costo de orden.

Finalmente considerando el caso donde el límite F en dólares es la máxima inversión de inventario permitido - en una sola vez.

La restricción requiere lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^{n} Ci\, qi = F \tag{16}$$

Se desea minimizar la ecuación (2) nuevamente sujeta a la restricción (16), la restricción es igual o equivalente a la restricción que se utiliza en la formulación de área restringida, y donde se utiliza la restricción (1).

Por lo tanto es necesario repetir de nuevo el - - análisis, solamente sustituimos algunas variables como, son; Ci por Zi y F por P.

5.2.1. Ejemplo que muestra un inventario con una restric-- ción.

Consideramos la compra de tres artículos. El administrador del negocio no había podido investigar inver- - sión de inventarios por más de $14,000. Los artículos son producidos en lotes. La demanda para cada artículo es constante y se asume como determinístico (no se permiten regresar lotes), solo las permitidas o asignadas.

Los datos para los artículos están dados en la -- tabla 1.1, los costos cargados para cada artículo es de i= = .20. Determinar el tamaño óptimo de lote para cada artículo.

TABLA 1.1

DATOS DEL EJEMPLO

ARTICULOS	1	2	3
Demanda (unidades por -- año) Di	1000	500	2000
Costo ordenar (\$/orden) C_{1i}	50	75	100
Costo de llevar el inventario (\$/unidad/año) C_{2i}	20	100	50

Se obtiene el tamaño del lote óptimo (q_i) en ausencia de restricción y es:

$$q_i \sqrt{\frac{2(1000)\ (5)}{4}} = 158 \quad q_2 = \sqrt{\frac{2(500)\ (75)}{20}} = 61$$

$$q_3 \sqrt{\frac{2(200)\ (100)}{100}} = 200$$

Si estos q_i se usaran el máximo de inversión en inventario sería:

$$F = 20\ (158) + 100\ (61) + 50\ (200) = \$\ 19{,}260$$

donde: si comparamos la inversión máxima permitida tenemos:

$19260 \leq F$ donde F = \$14 000 por lo tanto:

$19260 \leq 14\ 000$. No se cumple

Dado que la restricción es activa, se introduce el multiplicador lagrangeano $_1$ \$/unid, por lo cual analógicamente la ecuación (7) que es el óptimo de q_i^* está dado por:

$$q_i^* = \sqrt{\frac{2DiC_1i}{C_2i(i\ 1\ 2\lambda_i^*}} \qquad i=1.2.3.$$

Donde λ_i^* es la solución de la ecuación:

$$\sum_{i=1}^{3} C_2 i\sqrt{\frac{2DiC1i}{C2i(i+2\lambda_1^*)}} = 0 \quad \sqrt{\frac{2DiC1iC2i}{(i+2\lambda_1^*)}} = D$$

Entonces: sustituyendo valores tenemos:

$$14000 = \sqrt{\frac{1 \times 10^6}{.10+\lambda_1^*}} + \sqrt{\frac{3.75 \times 10^6}{.10+\lambda_1^*}} + \sqrt{\frac{10 \times 10^6}{.10+\lambda_1^*}}$$

De este modo obtenemos:

$$\sqrt{.10+\lambda_1^*} = \left[\frac{1+1.935+3.16}{14}\right] = \frac{6.10}{14} = 0.436$$

$$\sqrt{.10+\lambda_1^*} = 0.436 \quad \text{ó} \quad \lambda_1^* = 0.091 \text{ \#/UNIDAD}$$

Por consecuencia el valor óptimo de q_i^* es

$$q_1^* = \sqrt{\frac{2(1000)(50)}{20(.382)}} = 114 \qquad q_2^* = \sqrt{\frac{2(500)(75)}{20(.382)}} = 44 \qquad q_3^* \sqrt{\frac{2(2000)(100)}{20\ (.382)}} = 145$$

Sustituyendo q_i^* en la restricción mostrada esto hace verdaderamente una igualdad (la precisión con los cálculos puede hacer q_i^* esté redondeado a un entero).

El costo mínimo del inventario para los tres artículos es ausencia de restricciones en la inversión del inventario -- es:

$$CT(q_0) = \sum_{i=1}^{3} \sqrt{2DiC_1i\,C_2i} = 632+1225+2000 = \$\ 3857/\text{AÑO}$$

y así el costo mínimo correspondiente en presencia de restricciones es:

$$CT(q_0) = \sum_{i=1}^{3} \left[\frac{DiC_1i}{q_i^*} + \frac{iC_2iq_i^*}{2}\right] = 667 + 1292 + 2105 = \$\,4064/\text{AÑO}$$

El costo en presencia de restricciones en inver-- sión de inventarios es \$207/año más alto que en ausencia de tales restricciones. Es interesante observar el camino en el cual el óptimo q_i y el promedio mínimo del costo anual - variable a cambia con F, la máxima inversión de inventario - permitido.

Esto se muestra en las figuras 1.10 y 1.11. Cuando $F \geq$ \$19260, el óptimo de las q_{is} se obtiene simplemente en ausencia de alguna restricción.

Simultáneamente cuando $F \geq$ \$19260 $CT(q_0)^*$ = - - - \$3857/año y cuando F = \$14000 el $CT\ (q_0^*)$ = \$4064/año.

5.3. Inventario con dos restricciones.

5.3.1. Formulación y solución al modelo.

Es posible tener dos o más restricciones impuestas simultáneamente. Suponiendo, por ejemplo que hay una res-- tricción por órdenes al año y una restricción en el máximo - valor en la inversión del inventario en algún tiempo. Por - lo tanto deseamos minimizar las ecuaciones vistas anterior-- mente en el modelo con una restricción y son las siguientes:

La ecuación (10) sujeta a la ecuación (9) y a la - ecuación (16). Nosotros sabemos que la restricción (9) debe ser activa. A menudo la ecuación (16) puede ser o no activa. De este modo, primero solucionaremos el problema ignorando

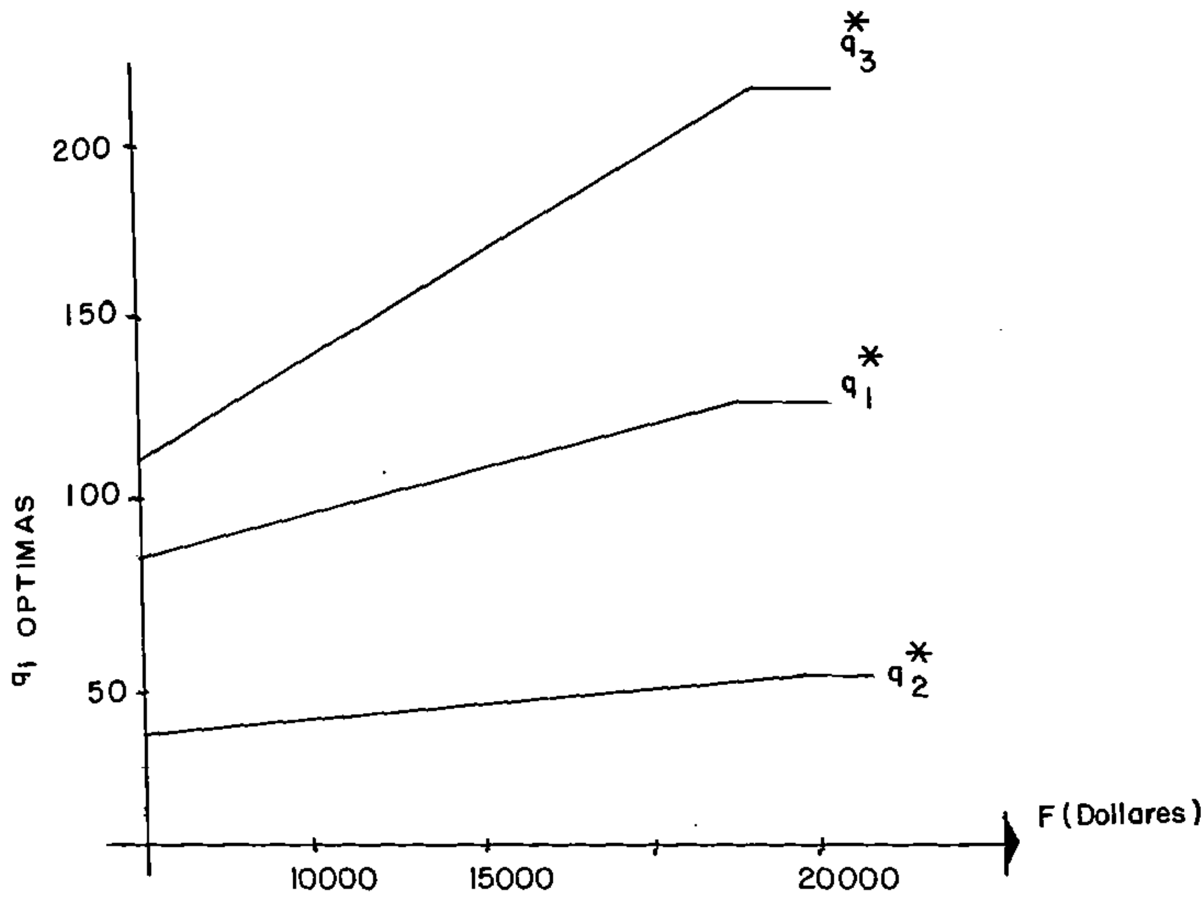


Fig. 1.10

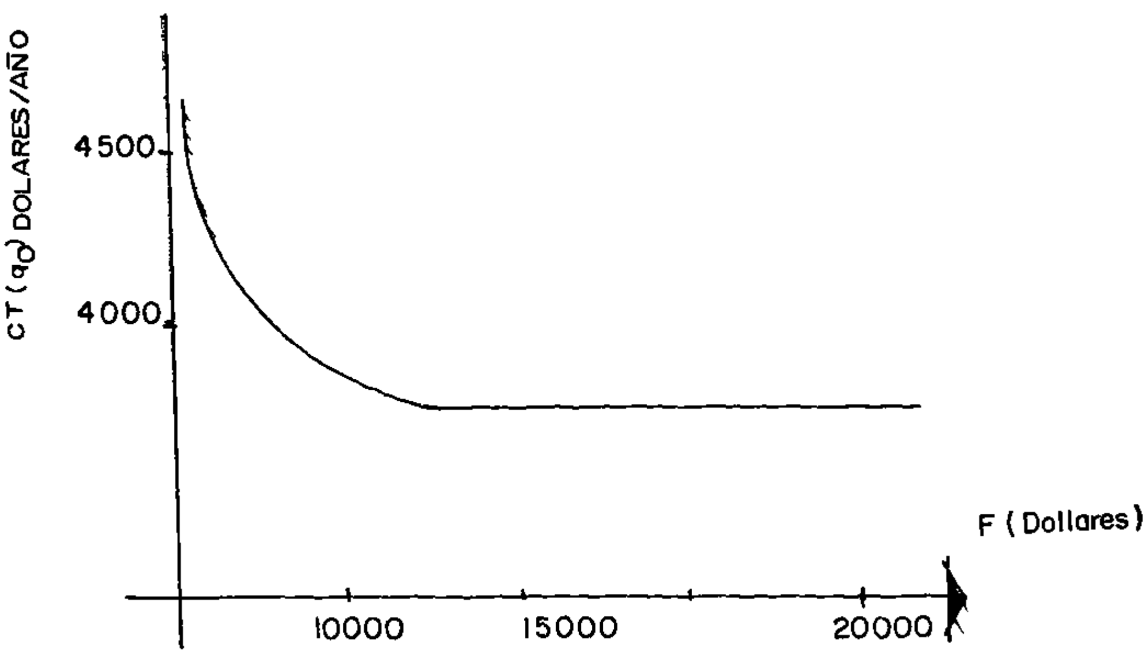


Fig 1.11

la ecuación (16) el problema se terminaría. Si la ecuación (16) no se satisface entonces se introducirían dos multiplicadores de Lagrange (λ_1, λ_2) y la forma de la función es la siguiente:

$$L(qi.\lambda_1.\lambda_2) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{IC2i\,qi}{2} \right] + \lambda_1 \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{Di}{qi} - H \right] + \lambda_2 \left[\sum_{i=1}^{n} Ciqi - F \right] \qquad (17)$$

*Nota esto concedible si las restricciones (9) y (16) son - consistentes; nosotros asumimos que si lo son.

Por lo tanto derivando parcialmente tenemos:

$$\frac{dL}{dqi} = 0 = \frac{iC_2i}{2} - \frac{\lambda_1 Di}{q_i^2} + \lambda_2 Ci_1 \quad i = 1.2.\,n \qquad (18)$$

$$\frac{dL}{d\lambda_1} = 0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{Di}{qi} - H \qquad (19)$$

$$\frac{dL}{d\lambda_2} = 0 = \sum_{i=1}^{n} Ciqi - F \qquad (20)$$

Ahora encontramos el valor de q_i^* de la ecuación (18) y se obtiene:

$$q_i^* = \sqrt{\frac{2\lambda_1 D_i}{C_2^i\,(i+2\lambda_2)}} \qquad i = 1.2 \ldots\ldots n \qquad (21)$$

Sustituyendo la ecuación (21) en la ecuación (19) y obtenemos:

$$\sqrt{\frac{Di^{\cdot}}{\frac{2\lambda_1 D_i}{C_{2i}(i+2\lambda_2}}} - H \qquad i = 1.2 \ldots\ldots\ldots . n$$

Encontrando el valor de λ_1 lo obtenemos por medio de la siguiente sustitución:

$$\lambda_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{2 \quad H}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{DiC_2 i\,(i + 2\lambda_2)} \right] \tag{22}$$

Finalmente sustituyendo la ecuación (22) en (21) y la ecuación (21) en la ecuación (20) se obtiene

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{DiC2i}{i+2\lambda_2} \right)^{1/2} \right] \left[\frac{1}{H} \sum_{i=1}^{n} \left(DiC2i_1\,(i+2\lambda_2) \right)^{1/2} \right] = F \tag{23}$$

A continuación veremos el procedimiento numérico que resuelve dos o más restricciones en un mismo problema:

1. Determine λ_2 a partir de la ecuación (23)
2. Luego determine λ_1 a partir de la ecuación (22)
3. Finalmente determine la q_i^* a partir de la ecuación - - (21)

El valor numérico de λ_2 puede ser determinado de la ecuación (23) usando una técnica de error y ensayo.

Existe un procedimiento más eficiente oue es el uso del método de Newton-Raphson.

La dificultad en la evaluación numérica para q_i^* - aumenta considerablemente con cada una de las restriccio-- nes adicionales las cuales son impuestas en el sistema de - inventarios. En el evento en el cual las dos restricciones impuestas en el sistema de inventarios, son para área res-- tringida y la otra para la restricción. En la máxima inversión en inventario. También puede ser que el problema sea más complicado dado que puede suceder que cuando menos una o ambas restricciones pueden ser inactivas, para el caso - dado.

5.4. Modelo CEP con tres restricciones.

5.4.1. Formulación y solución del modelo.

Es posible suponer que existen tres limitaciones simultáneamente impuestas en un modelo de inventario. Suponiendo por ejemplo que fueran. Estas tres restricciones, - las del máximo valor en la inversión del inventario, así como también las órdenes máximas al año permitidas y por último la capacidad de almacenaje o espacio disponible.

Por lo tanto se formulará con las ecuaciones an-- tes vistas en los modelos anteriores y se tiene:

$$CT(q_0) = \sum_{i=1}^{3} \left[\frac{C_{1i} D_i}{q_i} + \frac{i C_{2i} q_i}{2} \right] \qquad (24)$$

sujeta a:

$$\begin{aligned} Z_i q_i &= P \\ C_i q_i &= F \\ D_i/q_i &= H \qquad i = 1,2,3 \end{aligned} \qquad (25)$$

Ahora trataremos de encontrar el mínimo absoluto sujeto a las restricciones vistas en la ecuación (25). Por lo cual, introduciremos el multiplicador lagrangeano y formaremos la función L $(q_i, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, y esto se realiza como veremos a continuación:

$L(q_i, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ donde:

$$Z_i q_i - P = 0$$
$$C_i q_i - F = 0 \quad i = 1,2,3,$$
$$D_i / q_i - H = 0$$

Escribiendo la función lagrangeana obtenemos

$$L(qi, \lambda 1, \lambda 2, \lambda 3) = \sum_{i=1}^{3} \left[\frac{C_1 i\, Di}{q_1} + \frac{iC_2 i\, qi}{2} \right] + \lambda_1 \left[C1qi - F \right] +$$
$$\lambda 2 \left[2iqi - P \right] + \lambda 3 \left[Di/qi - H \right] i = 1.2.3$$

Esto hace ahora un problema de optimización a un problema sin restricciones. El paso siguiente es diferenciar la función de Lagrange con respecto a las incógnitas - $q_1, \lambda 1, \lambda 2\ \lambda 3$.

Derivando parcialmente con respecto a q_i obtenemos:

$$dL = \frac{-C_1 i\, Di}{q_i^2} + \frac{iC_2 i}{2} + \lambda_1 Ci + \lambda_2 Zi - \frac{\lambda_3 Di}{q_i^2} = 0$$

$$= -\frac{C_1 i Di - \lambda 3 Di}{q_i 2} + \frac{iC2i}{2} + \lambda 1 Ci + \lambda 2 Zi = 0$$

Ahora igualamos a cero la derivada parcial y por sustitución obtenemos el valor de q_i

$$\frac{iC2i}{2} + \lambda 1 Ci + \lambda 2 Zi = \frac{C1iDi + \lambda 3 Di}{q_i 2}$$

$$qi = \sqrt{\frac{2Di(Ci + \lambda 3}{iC2i\,(2\lambda 1 C1 + 2\lambda_2 Zi}} \qquad (27)$$

Ahora derivamos parcialmente la función lagrangeana de la - ecuación (26) con respecto a λ_1, λ_2 y λ_3 y obtenemos:

$$\frac{SL}{S\lambda_1} = Ci\ qi - F = 0$$

$$\frac{SL}{S\lambda_2} = Zi\ qi - P = 0 \qquad i = 1,2,3 \qquad (28)$$

$$\frac{SL}{} = Di/qi - H = 0$$

Se sustituye el valor de q_i enunciado en la ecuación (27) en las restricciones de la ecuación (28) y obtenemos lo siguiente:

$$(1) \quad Ci \sqrt{\frac{2Di(Cli + \lambda 3}{iC2i(2\lambda lCi+2\lambda 2Zi}} - F = 0$$

$$(2) \quad Zi \sqrt{\frac{2Di(Cli + \lambda 3)}{iC2i(2\lambda lCi+2\lambda 2Zi}} - P = 0$$

$$(3) \quad \sqrt{\frac{Di}{\frac{2Di(Ci+\lambda 3)}{iC2i(2\lambda lCi+2\lambda 2Zi)}}} - H = 0$$

A continuación se utiliza el procedimiento numérico visto - en el modelo CEP con 2 restricciones dado que el procedi- - miento es igual para 2 restricciones o más, es innecesario repetir de nuevo el análisis.

VI. APLICACION DE LA PROGRAMACION AL MODELO CEP CON DOS O MAS RESTRICCIONES

VI. APLICACION DE LA PROGRAMACION AL MODELO CEP CON DOS O MAS RESTRICCIONES.

6.1. Programa computacional que resuelve un modelo de inventario con dos o más restricciones.

Primeramente determine q_i de todo el ejemplo sin tomar en cuenta las restricciones (1) y (16).

Si aquella q_i satisface la restricción esta será q_i^* óptima. Cuando éste no sea el caso incluya una de las restricciones digamos la restricción (16) en el análisis pero no la otra.

Si la q_i obtenida satisface la restricción, entonces esta será la óptima.

Cuando aquéllo no resuelva el problema incluya la restricción de área ignorando la restricción de inversión. Si la q_i satisface la restricción de la inversión esta será la óptima.

Si no sucede así, entonces estamos seguros de que ambas restricciones son activas. De este modo introducimos dos multiplicadores de Lagrange y resolvemos el problema tratando ambas restricciones como inicialmente activas.

Es importante notar que es necesario examinar los casos donde uno o ambos multiplicadores de Lagrange son ceros. Por ejemplo donde una o ambas restricciones mantienen una estricta desigualdad.

Procedimiento que se utiliza en el método computacional para alimentar de datos correctos al programa y así mismo comprobamos si las restricciones son activas o inactivas. Por lo tanto tenemos:

$$CT(q_0) = \sum_{i=1}^{3} \frac{DiC1i}{qi} + \frac{iC2iqi}{2} \tag{1.1}$$

sujeto a:

$$Ciqi = F \quad i = 1, 2, 3 \tag{1.2}$$

$$Ziqi = P \quad i = 1, 2, 3 \tag{1.3}$$

A continuación vemos los valores de las variables utilizadas en este modelo:

ARTICULO	1	2	3
DEMANDA (UNID/AÑO) Di	1000	500	2000
COSTO DE ORDENAR ($/ORDEN) C1i	50	75	100
COSTO DE LLEVAR EL INVENTARIO (#/UNIDAD/AÑO) 2i	20	100	50
VOLUMEN POR UNIDAD (PIES2/UNIDAD) Zi	2	2	1

ARTICULO	1	2	3
Demanda(unid/año)D_1	1000	500	2000
Costo de ordenar -- (\$/orden)C_{1i}	50	75	100
Costo de llevar el - inventario (#/unidad /año)2_i	20	100	50
Volumen por unidad (pies^2/unidad) Z_i	2	2	1

Así como el valor de la máxima capacidad de almacenaje que es (P) = 638 pies^2, la inversión máxima de inventario (F) = \$15 440/año así como el costo cargado a cada artículo (i) = 20%.

Ahora realizaremos los pasos que nos indica el método computacional y es el siguiente:

1. Determine cada q_i del ejemplo sin tomar en cuenta las dos restricciones (1.2) y (1.3) por lo tanto.

$$q1 = \sqrt{\frac{2(1000)(50)}{4}} = 159 \; ; \; q2 = \sqrt{\frac{2(500)(75)}{20}} = 62 \qquad q3 = \sqrt{\frac{2(2000)(100)}{10}} = 200$$

- Para el modelo de máxima inversión permitida:
  Sustituyendo valores para conocer si la igualdad es --

violada y si es activa o no activa:

20 (159) + 100 (62) + 50 (200) = \$15 440

\$19380 ≠ \$15 440

Por lo tanto si es violada y por consiguiente la restricción si es activa.

- Para el modelo de máxima capacidad de almacenaje permitido:
  Es necesario primeramente sustituir valores para conocer si la igualdad es violada y si la restricción es activa o inactiva.

$$2(159) + 2(62) + 1\ (200) = 638 \text{ pies}^2$$
$$642 \text{ pies}^2 \neq 638 \text{ pies}^2$$

Por lo tanto si es violada la restricción y por consiguiente también es activa.

El siguiente paso es introducir los multiplicadores de Lagrange y resolvemos el problema tratando inicialmente ambas restricciones como activas, por lo que se obtiene:

$$L(qi.\lambda 1.\lambda 2) = \sum_{i=1}^{3} \left[\frac{DiCli}{} + \frac{iC2iqi}{} \right] + \lambda 1 \left[\sum_{i=1}^{3} Ciqi - F \right] + \lambda 2 \left[\sum_{i=1}^{3} Ziqi - P \right] \quad (1.4)$$

Donde anteriormente al utilizar la función de Lagrange se tiene:

$$\sum_{i=1}^{3} Ciqi - F = 0 \quad (1.5)$$

$$\sum_{i=1}^{3} Ziqi - P = 0 \qquad (1.6)$$

Ahora derivamos parcialmente con respecto a q_i la función lagrangeana vista en la ecuación (1.4) y obtenemos:

$$\frac{dL}{dqi} = -\frac{DiCli}{q_i^2} + \frac{iC2i}{2} + \lambda 1Ci + \lambda 2 Zi = 0 \qquad (1.7)$$

Por medio de la sustitución obtenemos el valor de q_i

$$-\frac{DiCli}{qi^2} + \frac{iC2i}{2} + \lambda_1 Ci + \lambda 2Zi = 0$$

$$\frac{iC2i}{2} + \lambda 1Ci + \lambda 2Zi = \frac{DiCli}{q_i^2} \qquad qi = \sqrt{\frac{2DiCli}{iC2i(2\lambda 1Ci + 2\lambda 2Zi)}} \qquad (1.8)$$

El siguiente paso es derivar λ_1 y λ_2 con respecto a la ecuación (1.4) y se obtiene.

$$\frac{dL}{d\lambda 1} = \sum_{i=1}^{3} Ciqi - F = 0 \qquad (1.9)$$

$$\frac{dL}{d\lambda_2} = \sum_{i=1}^{3} Ziqi - P = 0 \qquad (2.0)$$

Ahora se sustituye el valor de la ecuación (1.8) en la ecuación (1.9) y se obtiene;

$$C_i \sqrt{\frac{2 D_i C_{1i}}{i C_{2i} (2 \lambda_1 C_i + 2 \lambda_2 Z_i)}} - F = 0 \quad i = 1,2,3 \tag{2.1}$$

$$Z_i \sqrt{\frac{2 D_i C_{1i}}{i C_{2i} (2 \lambda_1 C_i + 2 \lambda_2 Z_i}} - P = 0 \quad i = 1,2,3. \tag{2.2}$$

Dada su dificultad para encontrar los valores de los parámetros $q_i, \lambda_1, \lambda_2$, se utilizará el algoritmo que resuelve ecuaciones simultáneas no lineales, llamado, método de Newton-Raphson, el cual se verá su procedimiento en el Apéndice A.

*Nota. Los parámetros λ_1 y λ_2, serán representadas por X y Y, dado que así se facilita su uso en el algoritmo de Newton-Raphson.

A continuación se mostrará la función f(x,Y) que será la ecuación no-lineal del algoritmo Newton-Raphson.

$$f(X,Y) = C_i \left[\frac{2 D_i C_{1i}}{i C_{2i} (2 X C_i + 2 Y Z_i} \right]^{1/2} - F = 0 \quad i = 1,2,3. \tag{2,3}$$

La siguiente función g (x, y) forma también parte del algoritmo como la ecuación no lineal de inicio.

$$g(X,Y) = Z_i \left[\frac{2 D_i C_{1i}}{i C_{2i} (2 X C_i + 2 Y Z_i} \right]^{1/2} - P = 0 \quad i = 1,2,3. \tag{2.4}$$

Ahora derivamos f(x, y) de la ecuación (2.3) con respecto a X y Y como se verá a continuación:

$$\frac{\delta f(X,Y)}{\delta f(X)} = Ci/2 \left[\frac{2DiCli}{iC2i(2XCi+2YZi}\right]^{-1/2} \left[\frac{-2CliDi(2Ci)}{(iC2i(2XCi+2YZi))^2}\right] \quad i=1,2,3. \qquad (2.5)$$

$$\frac{\delta f(X,Y)}{\delta f(Y)} = Ci/2 \left[\frac{2DiCli}{iC2i(2XCi+2YZi)}\right] \left[\frac{-2CliDi(2Zi)}{(iC2i(2XCi+2YZi))^2}\right] \quad i=1,2,3$$

A continuación derivamos la función g(x,y) de la ecuación -- (2.4) con respecto a X y Y, como se mostrará a continuación:

$$\frac{\delta g(X,Y)}{\delta g(X)} = Zi/2 \left[\frac{2DiCli}{iC2i(2XCi+2YZi}\right] \left[\frac{-2DiCli(2Ci)}{(iC2i(2XCi+2YZi))^2}\right] \quad i=1,2,3$$

$$\underline{\delta g(X,Y)} = Zi/2 \left[\frac{2DiCli}{iC2i(2XCi+2YZi}\right] \left[\frac{-2DiCli(2Zi)}{(iC2i(2XCi+2YZi))^2}\right] \quad i=1,2,3.$$

Con la obtención de las anteriores derivadas, se podrá empezar a trabajar con el algoritmo computacional de Newton-Raphson que se explicará en el Apéndice A su procedimiento.

A continuación se presenta la codificación del algoritmo de Newton-Raphson que sirve para resolver ecuaciones no lineales. También es conveniente mencionar la notación que se usará.

E = Error para evitar que el computador no se cicle en caso de no haber convergencia.

KM = Control del número de refinaciones (Iteraciones) cuando se presentan valores divergentes.

Delta (I) = Vector obtenido en cada iteración.

N = Número de ecuaciones

X = Coordenadas de inicio en X

Y = Coordenadas de inicio en Y.

6.2. Comprobación de los resultados obtenidos por el algoritmo de Newton-Raphson.

Puesto que el algoritmo computacional de Newton-Raphson, resuelve ecuaciones simultáneas no lineales, es necesario comprobar los resultados obtenidos por este método, dado que fue utilizado para resolver el modelo inventario para dos o más restricciones. Así al obtener el valor de λ_1 y λ_2, se sustituye dentro de las restricciones mismas, para comprobar si satisfacen la condición de igualdad;

$$\sum_{i=1}^{3} C_i q_i = 0 \qquad (6.2.1.)$$

$$\sum_{i=1}^{3} Z_i q_i - P = 0$$

Esto nos queda al utilizar la función de Lagrange sobre las ecuaciones (6.2.1.). Posteriormente se utilizan las primeras derivadas parciales y se obtiene el valor de cada q_i como lo veremos a continuación:

$$q_i = \sqrt{\frac{2C_{1i}D_i}{iC_{2i}(2\lambda_1 C_i + 2\lambda_2 Z_i}} \qquad i = 1,2, 3$$

Puesto que el programa computacional nos proporcionó los valores de λ_1 y λ_2 se sustituyen dentro de la ecuación (6.2.2.) donde:

Para $\lambda 1$ = .003104 y λ_2 = .117365 \$ / PIES^2

Los valores para q_1, q_2, q_3 son los siguientes; q_1 = 205 unidades; q_2 = 59 unidades, q_3 = 108 unidades.

Estos valores son sustituidos en cada q_1 de las ecuaciones (6.2.1.) para comprobar si cumple la restricción de igualdad:

1. C_1 (205) + C_2(59) + C_3 (108) = F
2. Z_1 (205) + X_2 (59) + Z_3 (108) = P

donde C_1 = \$20.00, C_2 = \$ 100.00, C_3 = \$50.00, F = 15 440
Z_1 = 2 pies^2/unidad, Z_2 = 2 pies^2 / unidad, Z_3 = 1 pie^2/unidad y P = 638 pies^2

Así al sustituir los valores se tiene:

1.- \$20.00 (205 unidades) + \$100.00 (59 unid.) + \$50.00 (108 unid.) = \$15 440

\$ 4,100.00/unid. + 5900.00/unid \$5400.00 = 15440.00/ /unidades \$15400/unid.$\approx$\$15440./unidad

2.- 2 pies^2 (205 unid) + 2 pies^2 (59 unid) + 1 pie^2 (108 unid) = 638 pies^2/unidades; 636 pies^2/ unidad $\approx$ 638 pies^2/unidad

Puesto que las restricciones de igualdad son respetadas, se deduce que los resultados obtenidos para λ_1 y $\lambda 2$ por medio del algoritmo de Newton_Raphson son las más óptimas posibles.

6.3. Determinación de puntos máximos o mínimos para funciones restringidas y no restringidas utilizando la matriz Hessiana.

Para la determinación de puntos máximos o mínimos en una función es necesario utilizar la optimización clásica, pero su procedimiento se podrá ver en el Apéndice A.2. Por lo tanto se pasará directamente a encontrar, el punto que podrá ser máximo o mínimo. En la función utilizada en el modelo de inventario con dos restricciones.

a) Solución para problemas no restringidos.

Para facilitar el procedimiento es conveniente -- cambiar el parámetro q_i pr las X_i y λ_1, λ_2, por X_4 y X_5; -- por lo tanto se tiene:

$$L(Xi,\ X_4,\ X_5) = \frac{Di\ C_1 i}{Xi} + \frac{C_2 i Xi}{2} + X_4\ (CiXi-f) + X_5 \cdot (ZiXi-P) \quad i = 1,\ 2,3$$

una condición necesaria debe ser $\nabla L(Xo) = 0$, por lo tanto se obtienen las siguientes derivadas parciales:

$$\frac{dL}{dX1} = -\frac{D1C11}{X_1} + \frac{C_2 1X1}{C_i} + X4\ (C_1 X_1 - F) + X_5\ (Z1X1-P) = 0$$

$$\frac{dL}{dX_2} = -\frac{D2\ C12}{X_2} + \frac{iC22X2}{2} + X4\ (C2\ Xi-F) + X5(Z2\ X2\ -P) = 0$$

$$\frac{dL}{dX_3} = \frac{D3C13}{X_3} + \frac{iC23X3}{2} + X_4\ (C3X3-F) + X_5\ (Z3X3-P) = 0$$

$$\frac{dL}{dX4} = C1X1+C2X2 + C3X3 - F = 0$$

$$\frac{dL}{dX5} = Z1X1 + Z2X2 + Z3X3 - P = 0$$

El siguiente paso es resolver por ecuaciones simultáneas, pero como anteriormente el algoritmo de Newton-Raphson nos había proporcionado el valor de X4 y X5 se tiene que:

$$X_i = \sqrt{\frac{2D_1 C_{11}}{iC2i(2Ci\ (X_i 4)+2Z1(X_5)}} \quad i = 1,2,3$$

donde X_4 = .003104 y X_5 = .117365 por lo que tenemos;

X_1 = 205 ' X_2 = 59, X_3 = 108

Así, X_{0*} = (205,59,108,0,0) es el vector de puntos extremos, donde Xo = (X1, X2, X3, X4, X5)

Para establecer la suficiencia, debemos considerar la matriz Hessiana.

$$
H/Xo = \left[\begin{array}{ccccc}
\frac{d^2L}{dX1^2} & \frac{d^2L}{dX1X2} & \frac{d^2L}{dX1X3} & \frac{d^2L}{dX1X4} & \frac{d^2L}{dX1X5} \\
\frac{d^2L}{dX2X1} & \frac{d^2L}{dX2^2} & \frac{d^2L}{dX2X3} & \frac{d^2L}{dX2X4} & \frac{d^2L}{dX2X5} \\
\frac{d^2L}{dX3X1} & \frac{d^2L}{dX3X2} & \frac{d^2L}{dX3^2} & \frac{d^2L}{dX3X4} & \frac{d^2L}{dX3X5} \\
\frac{d^2L}{dX4X1} & \frac{d^2L}{dX4X2} & \frac{d^2L}{dX4X3} & \frac{d^2L}{dX4^2} & \frac{d^2L}{dX4X5} \\
\frac{d^2L}{dX5X1} & \frac{d^2L}{dX5X2} & \frac{d^2L}{dX5X3} & \frac{d^2L}{dX5X4} & \frac{d^2L}{dX5^2}
\end{array}\right]_{Xo}
$$

Para obtener el determinante del Hessiano H, debemos calcular las segundas derivadas parciales.

$$\frac{d^2L}{dX1^2} = \frac{2C11D1}{X1^3},\quad \frac{d^2L}{dX2^2} = \frac{2C12\,D2}{X2^3},\quad \frac{d^2L}{dX3^2} = \frac{2C13D3}{X3^3},\quad \frac{d^2L}{dX4^2} = 0,\quad \frac{d^2L}{dX5^2} = 0$$

$$\frac{d^2L}{dX1X2} = 0,\quad \frac{d^2L}{dX2X1} = 0,\quad \frac{d^2L}{dX3X1} = 0,\quad \frac{d^2L}{dX4X1} = C1,\quad \frac{d^2L}{dX5X1} = Z1$$

$$\frac{d^2L}{dX1X3} = 0,\quad \frac{d^2L}{dX2X3} = 0,\quad \frac{d^2L}{dX3X2} = 0,\quad \frac{d^2L}{dX4X2} = C2,\quad \frac{d^2L}{dX5X2} = Z2$$

$$\frac{d^2L}{dX1X4} = C1,\quad \frac{d^2L}{dX2X4} = C2,\quad \frac{d^2L}{dX3X4} = C3,\quad \frac{d^2L}{dX4X3} = C3,\quad \frac{d^2L}{dX5X3} = Z3$$

$$\frac{d^2L}{dX1X5} = Z1,\quad \frac{d^2L}{dX2X5} = Z2,\quad \frac{d^2L}{dX3X5} = Z3,\quad \frac{d^2L}{dX4X5} = 0,\quad \frac{d^2L}{dX5X4} = 0$$

No es necesario sustituir valores, puesto que la intención es expresarlo en una forma más general para poder aplicarlo en distintos tipos de problemas. Por lo tanto tenemos la Matriz Hessiana H:

$$H\Big|_{X_0^*} \begin{bmatrix} \dfrac{2C11D1}{X1^3} & 0 & 0 & C_1 & Z_1 \\ 0 & \dfrac{2C_{12}D_2}{X_2^3} & 0 & C_2 & Z_2 \\ 0 & 0 & \dfrac{2C_{13}D_3}{X_3^3} & C_3 & Z_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 & 0 & 0 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Encontrando el valor de la matriz por cofactores 1 tenemos:

$$\frac{-2C_{11}D_1}{x_1^{\,3}}\begin{bmatrix} \dfrac{2C_{12}D_2}{x_2^3} & 0 & C_2 & Z_2 \\ 0 & \dfrac{2C_{13}D_3}{x_3^{\,3}} & C & Z \\ C_2 & C_3 & 0 & 0 \\ Z_2 & Z_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} - C_1 \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{2C_{12}D_2}{x_2^3} & 0 & Z_2 \\ 0 & 0 & \dfrac{2C_{13}D_3}{x_3^{\,3}} & Z_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 & 0 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$Z_1 \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{2C_{12}D_2}{x_1^{\,3}} & 0 & C_2 \\ 0 & 0 & \dfrac{2C_{13}D_3}{x_3^{\,3}} & C_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 & 0 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{C_{11}D_1}{x_1^3}\right)\cancelto{0}{\left(\frac{2C_{12}D_2}{x_2^3}\right)\left(\frac{2C_{13}D_3}{x_3^3}\right)}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \left(\frac{2C_{11}D_1}{x_1^3}\right)\cancelto{0}{\left(\frac{2C_{12}D_2}{x_2^3}\right)(-C_3)}\begin{bmatrix} C_3 & 0 \\ Z_3 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$\left(\frac{\ _{11}D_1}{x_1^3}\right)\cancelto{0}{\left(\frac{2C_{12}D_3}{x_2^3}\right)(Z_3)}\begin{bmatrix} C_3 & 0 \\ Z_3 & 0 \end{bmatrix} + \left(\frac{2C_{11}D_1}{x_1^3}\right)(C_2)\cancelto{0}{\left(\frac{-2C_{13}D_3}{x_3^3}\right)}\begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ Z_2 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$\left(\frac{\ _1D_1}{x_1^3}\right)(C_2)\,(Z_3)\begin{bmatrix} C_2 & C_3 \\ Z_2 & Z_3 \end{bmatrix} + \left(\frac{2C_{11}D_1}{x_1^3}\right)(-Z_2)\cancelto{0}{\left(\frac{-2C_{13}D_3}{x_3^3}\right)}\begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ Z_2 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$\left(\frac{\ _{11}D_1}{x_1^3}\right)\underline{(-Z_2)(C_3)}\begin{bmatrix} C_2 & C_3 \\ Z_2 & Z_3 \end{bmatrix} \frac{-(C_1)(-2C_{12}D_2)}{x_2^3}\cancelto{0}{\left(\frac{-2C_{13}D_3}{x_3^3}\right)}\begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ Z_1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{C(-Z_2)(2C_{13}D_3)}{x_3^3}$$

$$\begin{bmatrix} C_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} \frac{-C(-2C_{12}D_2)(Z_3)}{x_2^3}\begin{bmatrix} C_1 & C_3 \\ Z_1 & Z_3 \end{bmatrix} + Z_1\left(\frac{-2C_{12}D_2}{x_2^3}\right)\cancelto{0}{\left(\frac{-2C_{13}D_3}{x_3^3}\right)}\begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ Z_1 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$\ _1\left(\frac{-2C_{12}D_2}{x_3^3}\right)(C_3)\begin{bmatrix} C_1 & C_3 \\ Z_1 & Z_3 \end{bmatrix} + Z_1(-C_2)\frac{(2C_{13}D_3)}{x_3^3}\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ Z_1 & Z_2 \end{bmatrix}$$

El siguiente paso es obtener el valor total del determinante, y como es un problema que busca minimizar la función de costo total, solamente puede ser un punto mínimo, o sea un determinante mayor a cero.

$$\left[\frac{(2C_{11}D_1)}{X_1^3}(C_2)(Z_3)(C_2Z_3)(-Z_2C_3)\right]+\left[\frac{(2C_{11}D_1)}{X_1^3}(-Z_2)(C_3)(C_2Z_3)(-Z_2C_3)\right]-\left[C_1\frac{(-2C_{12}D_2)}{X_2^3}\right.$$

$$\left.(Z_3)(C_1Z_3)(Z_1C_3)\right]-\left[C_1(-Z_2)\frac{(2C_{13}D_3)}{X_3^3}(C_1Z_2)(-Z_1C_2)\right]+\left[Z_1\frac{(-2C_{12}D_2)}{X_2^3}C_1(C_1Z_3)(-Z_1C_3)\right]+$$

$$+\left[Z_1(-C_2)\frac{(2C_{13}D_3)}{X_3^3}(C_1Z_2)(-Z_1C_2)\right]>0\ ;$$

Como una comprobación a lo dicho con anterioridad de que el único valor que puede tomar el determinante es - mayor a cero, por lo cual se sustituyen los valores de las variables utilizadas en la matriz Hessiana y nos dan el -- siguiente determinante:

$$H_{X_0^*} = -584.16 - 2032 + 2920.80 + 10,160 = 10464,64$$

$$H_{X_0^*} = +10464.64 > 0$$

Como vemos el $H_{X_0^*}$ es positivo definido y el $X_0^* =$ $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ representa un punto mínimo local, como se indica en el procedimiento que se encuentra en el Apéndice (A.2)

```
T=00004 IS ON CR JA   USING 00018 BLKS R=0000

TN4,L
      PROGRAM LEOI
      ************MAESTRO:ING. VICTORIANO ALATORRE          *************
      ************ALUMNO:VICTOR MANUEL IBARRA BALDERAS *************
      ************NUMERO DE CONTROL 126717                 *************
      ************ESTE PROGRAMA SIRVE PARA CALCULAR UN *************
      ************SISTEMA DE ECUACIONES SIMULTANEAS NO-*************
      ************LINEALES POR EL METODO DE NEWTON-RAPH*************
      ************SON.                                     *************
      DIMENSION A(20,20)
      WRITE(1,1)
1     FORMAT("DONDE ")
      READ(1,*)LU
      WRITE(LU,2)
2     FORMAT(15X,"FUNCIONES",/,10X,"F(X,Y)=#@#@$#@@#",/,10X,"G(X,Y)=#@#&
     *@#@#&*#",//,20X,"D A T O S ")
      WRITE(1,1013)
1013  FORMAT(10X,"ERROR = _")
      READ(1,*)E
      WRITE(LU,1010)E
1010  FORMAT(10X,"ERROR = ",F7.5)
      WRITE(1,3)
3     FORMAT("NUMERO DE REFINACIONES")
      READ(1,*)KM
      WRITE(LU,1011)KM
1011  FORMAT(10X,"NUMERO DE REFINACIONES = ",I3)
      WRITE(1,4)
4     FORMAT("DAME LAS COORDENADAS DE INICIO DE X,Y ")
      READ(1,*)X,Y
      WRITE(LU,1012)X,Y
1012  FORMAT(10X,"COORDENADA X DE INICIO = ",F4.2,/,10X,"COORDENADA Y DE
     *INICIO = ",F4.2)
      N=2
      M=3
      WRITE(1,5)
5     FORMAT(/)
      DO 6 L=1,KM
      WRITE(LU,7)L
7     FORMAT(10X,"REFINACION #",I2)
      A(1,3)=((20.*(100000./160.*X+16.*Y)**(1./2.))+(100.*(75000./4000.*
     *X+80.*Y)**(1./2.))+(50.*(400000./1000.*X+20.*Y)**(1./2.))-
     *15440.)*(-1.)
      A(2,3)=((2.*(100000./160.*X+16.*Y)**(1./2.))+(2.*(75000./4000.*X+
     *80.*Y)**(1./2.))+(1.*(400000./1000.*X+20.*Y)**(1./2.))-640.)
     **(-1.)
      A(1,1)=((20.*(100000./160.*X+16.*Y)**(-1./2.)*(-2000000./(160.*X+
     *16.*Y)**(2.)))+(100.*(75000./4000.*X+80.*Y)**(-1./2.)*(
     *-7500000./(4000.*X+80.*Y)**(2.)))+(50.*(400000./1000.*X+20.*Y)
     ***(-1./2.)*(-20000000./(1000.*X+20.*Y)**(2.))))
      A(1,2)=((20.*(100000./160.*X+16.*Y)**(-1./2.)*(-200000./(160.*X+
     *16.*Y)**(2.)))+(100.*(75000./4000.*X+80.*Y)**(-1./2.)*(-
     *150000./(4000.*X+80.*Y)**(2.)))+(50.*(400000./1000.*X+20.*Y)
     ***(-1./2.)*(-200000./(1000.*X+20.*Y)**(2.))))
      A(2,1)=((2.*(100000./160.*X+16.*Y)**(-1./2.)*(-2000000./(160.*X+
     *16.*Y)**(2.)))+(2.*(75000./4000.*X+80.*Y)**(-1./2.)*(-7500
     *000./(4000.*X+80.*Y)**(2.)))+(1.*(400000./1000.*X+20.*Y)**
     *(-1./2.)*(-20000000./(1000.*X+20.*Y)**(2.))))
      A(2,2)=((2.*(100000./160.*X+16.*Y)**(-1./2.)*(-200000./(160.*X+
```

```
     *16.*Y)**(2.)))+(2.*(75000./4000.*X+80.*Y)**(-1./2.)
     **(-150000./(4000.*X+80.*Y)**(2.)))+(1.*(400000./1000.*X+20.*Y)
     ***(-1./2.)*(-200000./(1000.*X+20.*Y)**(2.))))
      GO TO 1000
1001  IF(IND.EQ.1)GO TO 99
      X=X+A(1,3)
      Y=Y+A(2,3)
      Z=ABS(A(1,3))
      C=ABS(A(2,3))
      IF(Z.GT.E)GO TO 6
      IF(C.GT.E)GO TO 6
      WRITE(LU,8)X,Y
8     FORMAT(10X,"YA HAY CONVERGENCIA",/,10X,"X = ",F12.6,5X,"Y = ",F12.
     *6)
      GO TO 290
6     CONTINUE
      WRITE(LU,9)X,Y
9     FORMAT(10X,"NO HAY CONVERGENCIA",/,10X,"X = ",E9.3,5X,"Y = ",E9.3)
      GO TO 290
99    WRITE(LU,10)
10    FORMAT(3X,"NO FUNCIONA DEBIDO A QUE HAY UN CERO EN LA DIAGONAL ")
      GO TO 290
1000  IF(M.GT.6)Q=5
      IF(M.LE.6)Q=32/3.
      R=0
      DO 11 I=1,N
      D=A(I,I)
      WRITE(1,405)D
405   FORMAT(10X,"<<<<<<<",5X,F16.7,5X,">>>>>>>")
      IF(D.EQ.0)GO TO 99
      DO 12 J=I,M
      A(I,J)=A(I,J)/D
12    CONTINUE
      DO 13 K=1,N
      IF(K.EQ.I)K=K+1
      IF(K.GT.N)GO TO 13
      F=A(K,I)
      DO 14 J=1,M
      A(K,J)=A(K,J)-(A(I,J)*F)
14    CONTINUE
13    CONTINUE
      DO 15 J=1,N
      DO 16 K=1,M
      IF(M.GT.6)GO TO 90
      WRITE(LU,17)A(J,K)
17    FORMAT(10X,F9.3)
      GO TO 91
90    WRITE(LU,18)A(J,K)
18    FORMAT(10X,F9.3)
91    R=R+Q
16    CONTINUE
      R=0.
15    CONTINUE
11    CONTINUE
      DO 19 I=1,N
      WRITE(LU,20)I,A(I,M)
20    FORMAT(10X,"DELTA (",I2,") = ",E9.3)
19    CONTINUE
100   GO TO 1001
290   STOP
```

```
    FUNCIONES
F(X,Y)=#@#@$#@@#
G(X,Y)=#@#&@#@#&*#

          D A T O S
ERROR =  ,00100
NUMERO DE REFINACIONES =  20
COORDENADA X DE INICIO =  ,02
COORDENADA Y DEINICIO =  ,01
REFINACION # 1
     1,000
      ,056
    -,007
     0,000
-3479,487
 -342,277
     1,000
     0,000
    -,013
     0,000
     1,000
      ,098
 DELTA ( 1) = -,125E-01
 DELTA ( 2) =  ,984E-01
 REFINACION # 2
     1,000
      ,035
    -,002
     0,000
 -9605,154
   -79,561
     1,000
     0,000
    -,002
     0,000
     1,000
      ,008
 DELTA ( 1) = -,229E-02
 DELTA ( 2) =  ,828E-02
 REFINACION # 3
     1,000
      ,030
    -,001
     0,000
 -13668,29
   -20,442
     1,000
     0,000
    -,001
     0,000
     1,000
      ,001
 DELTA ( 1) = -,126E-02
 DELTA ( 2) =  ,150E-02
 REFINACION # 4
     1,000
      ,027
    -,001
     0,000
 -17673,31
```

```
   13.853
    1.000
    0.000
    -.001
    0.000
    1.000
    -.001
DELTA ( 1) = -.816E-03
DELTA ( 2) = -.784E-03
YA HAY CONVERGENCIA
X =        .003104      Y =        .117365
```

VII. CONCLUSION GENERAL

VII. CONCLUSION GENERAL.

Es necesario hacer mención sobre la limitación -- que existe al tratar de resolver modelos de inventario con más de una restricción.

Las limitaciones o desventajas comienzan desde el principio, ya que el problema es único e individual y no - puede ser utilizado para otros problemas, sin realizar una serie de cambios tanto en la planteación del problema como en el algoritmo computacional.

Otra limitación es cuando se trata de buscar los valores óptimos de las λi, ya que es una busca exhaustiva, puesto que dependen mucho del valor de inicio que se le -- da al algoritmo de Newton-Raphson. Así nos damos cuenta de que si los valores no son aproximados al cruce de las λi, podemos perdernos y nunca hallar la convergencia deseada.

También es conveniente mencionar que al utilizar la optimización clásica para problemas no restringidos, - era la comprobación de nuestro problema siempre fue un -- punto mínimo y por situación lógica el problema estaba dado como un costo mínimo total.

Por último la ventaja es proporcionar información al alumno que se le presenten problemas de inventario con más de una restricción y tenga a la mano información - sobre la planteación y solución de los modelos de inventarios con restricciones.

APENDICE A

APENDICE A.-

A.1.- Solución a sistemas de ecuaciones simultáneas no-lineales por el método de Newton-Raphson.

Este método es de gran utilidad ya que ahorra un gran número de cálculos en problemas que involucran la solución de ecuaciones de más de tres grados. Puesto que al buscar solución las raíces se van complicando.

Su procedimiento se basa en la serie de Taylor - donde trunca los valores a partir de la segunda derivada. La desventaja de este método es que es muy particular ya - que cada problema trabaja con las ecuaciones originales, y solo funciona para el sistema deseado.

Ejemplo: Serie de Taylor:

$$f(X\ \Delta X) = f\frac{(X) + f^{1}(X)\Delta X}{1!} + \frac{f^{M}(X)\ \Delta X^{2}}{2!} + \ .\ .\ .\ .\ . + \frac{f^{J}(X)\ \Delta X^{J}}{J!}$$

Para explicar el algoritmo utilizaremos la siguiente serie de Taylor:

$$f(X\ \Delta X),(Y\ \Delta Y) = f(X,Y)\ \ f'X(X,Y)\Delta X\ fY(X,Y)\ \Delta Y = 0$$

$$g(X+\Delta X, Y+\Delta Y) = g(XY) + gX\ (XY)'\ \Delta X + gY(X,Y)\Delta Y = 0$$

Despejando f (x,y) y g(x,y):

$$-f(X,Y) = f{\cdot}X(XY)\ \Delta X + f^{1}Y\ (XY)\ \Delta Y$$

$$-g(XY) = g'X\ (XY)\Delta X + g^{1}Y(XY)\ \Delta Y$$

Nuestro siguiente paso es integrar las matrices que vamos a utilizar:

$$\begin{bmatrix} \Delta \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \quad \Delta \quad \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \end{bmatrix}$$

Los elementos que forman estas matrices son:

$$\begin{bmatrix} f'X & f'Y \\ g'X & g'Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f \\ -g \end{bmatrix}$$

Para poder encontrar los valores de f'_x, f'_y, g'_x, g'_y, f, g.

Es necesario dar un valor inicial en forma arbitraria como un dato inicial en X y Y. Estos valores dados se sustituyen en los elementos de la matriz anteriormente formada y se soluciona con el método de Gauss-Jordan. Estos resultados serán ahora el nuevo vector, revisando si estos nuevos valores son menores en valor absoluto al valor establecido anteriormente por nosotros, de suceder así, ya hay convergencia y tenemos solución, si no existe la solución se utiliza nuevamente el mismo procedimiento hasta que se sumpla la condición.

A veces sucede que los valores detenidos son --divergentes, esto es, que por muchas refinaciones que se le de al problema los resultados varían demasiado, esta es la razón, por la cual se le pone un control de iteraciones (km) que tendrá un valor grande para el error que deseamos es pequeño (.001, .0001, .00001, etc.) esto es para evitar que la computadora no se cicle.

En caso que la condición ΔX y Δy sea menor o - igual que el error dado, y se cumpla antes de la KM de - iteraciones dado, el computador dará por terminado el problema. Esto ocurre cuando existe convergencia de valores.

A.2. Optimización clásica utilizada para calcular máximos o mínimos para problemas restringidos y no restringidos.

La teoría de optimización clásica considera el - uso del cálculo diferencial para determinar puntos máxi-- mos y mínimos (extremos) para funciones restringidas y no restringidas.

a) Un punto extremo de una función f(x) define a un -- máximo o mínimo de la función. Matemáticamente, un punto $X_0 = (X1,\dots X_j \dots X_n)$ es un máximo si

$$f(X_0+h) \geq f(X_0)$$

- Condiciones necesarias y suficientes para puntos extremos.

Se establecen condiciones necesarias y suficientes para que tenga varios puntos extremos una función f(x) de n variables. Se supone debido a que las -- primeras y segundas derivadas parciales de f(x) son continuas en cada X.

Así una condición necesaria para que X_0 sea un punto extremo de f(x) es que;

$$\nabla f(X_0) = 0$$

debe satisfacerse; esto es, el vector gradiente debe ser nulo.

Para funciones con solamente una variable (digamos Y), la condición anterior se reduce a;

$$f'(y_0) = 0$$

Como se estableció anteriormente, la condición se satisface también para los puntos en silla y de inflexión. Consecuentemente, estas condiciones son necesarias, pero no suficientes para identificar los puntos extremos. Por consiguiente, es más apropiado referirse a los puntos obtenidos a partir de la solución de:

$$\nabla f(X_0) = 0$$

Como puntos estacionarios. Por lo que se establecen las condiciones de suficiencia para que X_0 sea un punto extremo.

Así una condición suficiente para que un punto estacionario sea extremo es que la matriz Hessiana H evaluada en X_0 sea;

- Positiva definida cuando X_0 es un punto mínimo
- Negativa definida cuando X_0 es un punto máximo.

A.3.- Gráfica del Modelo de Inventario con una restricción.

En este Apéndice se mostrará la gráfica de un modelo de inventario con una restricción. Es conveniente mencionar que el modelo de inventarios con más de dos artículos es casi imposible de graficar. Es la razón por la cual utilizaremos solamente dos artículos para que nuestra gráfica se presente en forma tridimensional.

A continuación se proporciona la tabla de variables y parámetros a utilizar:

TABLA A.3.1.

ARTICULOS	1	2
Demanda (unidades por año)	1000	500
Costo de ordenar ($/orden)C1i	50	70
Costo de llevar el inventario ($/unidad/año) C2i	20	1000

Así también interviene la variable i = 20% que es el costo cargado a cada artículo, y la máxima inversión permitida es $8000.00.

La formulación del modelo de inventario con una restricción es la siguiente:

$$CT(qi) = \frac{C_{11}D_1}{q_1} + \frac{iC_{21}q_1}{2} + \frac{C_{12}D_2}{q_2} + \frac{iC_{22}q_2}{2}$$

sujeta a:

$$C_1q_1 \; C_2q_2 \leq 8000$$

Ahora mencionaremos el criterio para encontrar una gráfica de la función CT (q_i).

Primero debemos encontrar CT'(qi) y CT"(qi). Luego los valores críticos de CT (qi). Luego los números críticos de CT(qi) son los valores de qi en el dominio de CT (qi) para los cuales o' CT' (qi) no existe O'CT'(qi) = 0. Para determinar donde CT(qi)es creciente encontramos los valores de qi para los cuales CT'(qi) es positiva; para determinar los intervalos donde CT (qi) es decreciente --- encontramos los valores de qi para los cuales C'+ (qi) es negativa. Donde CT'(qi) = 0, ya que es un punto mínimo o máximo. Ahora encontrando en las segundas derivadas parciales de CT(qi) tenemos que si.

CT" (qi) $\geqslant$ 0 , es convexa del CT(qi)
CT" (qi) $<$ 0 , es cóncava del CT(qi)
CT" (qi) $=$ 0 , es punto de inflexión o punto silla.

A continuación se obtienen las primeras y segundas derivadas parciales del CT(qi), dado que es necesario para formar la tabla A.3.2 y demostrar donde se encuentra el punto mínimo de la función de CT(qi);

$$\frac{dCT'(qi)}{dq_1'} = -\frac{C_{11}D_1}{q_1^2} + \frac{iC_{21}}{2} = 0$$

$$\frac{dCT'(qi)}{dq_2'} = -\frac{C_{12}D_2}{q_2^2} + \frac{iC_{22}}{2} = 0$$

Por lo tanto se encuentra la segunda derivada parcial y se obtiene:

$$\frac{d^2CT(qi)}{dq_1^2} = \frac{2C_{11}D_1}{q_1^3}$$

$$\frac{d^2CT(qi)}{dq_2^2} = \frac{2C_{12}D_2}{q_2^3}$$

Obteniendo las derivadas se varian valores de q_i para encontrar el punto máximo o mínimo de la función CT (q_i).

TABLA A.3.2.

q_1	$CT'(q_1)$	$CT''(q_i)$	$CT(q_1)$	q_2	$CT'(q_2)$	$CT''(q_2)$	$CT(q_2)$	$CT(q_i)$
0	00	00	Asintota	0	00	00	Asintota	Asintota
50	(-18)	+	1100	50	(-4)	+	1200	2300
70	(-8.2)	+	1016.8	59.16	0	+	1183.21	2200
100	(-3)	+	700	100	6.5	+	1350	2050
125	(-1.2)	+	655	120	7.5	+	1327.4	1982.45
158.11	0	+	632.45	59.16	0	+	1183.21	1815.66
180	.4567	+	634	150	8.44	+	1734	2368
200	.75	+	650	200	9.125	+	2175	2825
300	1.44	+	766	300	9.611	+	3116.66	3883
400	1.6875	+	925	400	9.78	+	4087	5012
500	1.8	+	1100	500	9.86	+	5070	6170

*Nota: Punto mínimo de la función de CT(qi)

CONCLUSION:

Utilizando los criterios antes mencionados podemos saber cuando nuestra función de CT(qi) en q_1 y q_2 son:

Decreciente cuando $\frac{dCT(qi)}{dq_i} \quad 0$ para:

q_1, desde o hasta 158.11
q_2, desde 0 hasta 59.16

Creciente cuando $\frac{dOT(qi)}{qi} > 0$ para;

q_1, desde 158.11 hasta 500....n

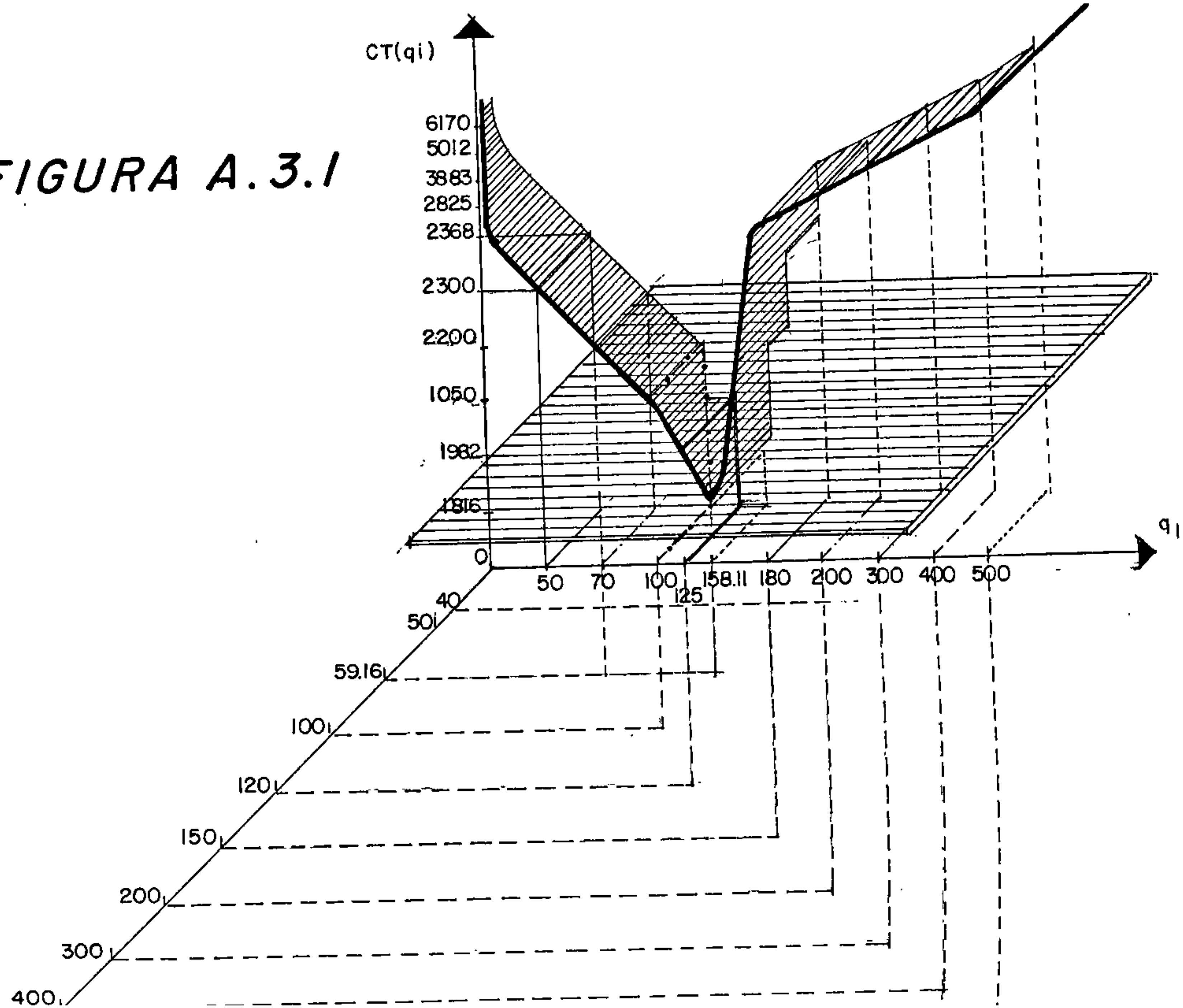
q_2, desde 59.16 hasta 500....n

Así encontramos que el punto mínimo que es cuando la primer derivada es:

$$\frac{dOT(qi)}{dqi} = 0 \quad \text{para, } q_1 = 158.11 \text{ y } q_2 = 59.16$$

A continuación se muestra la gráfica 1.3.1

FIGURA A.3.1



CT(qi)
6170
5012
3883
2825
2368
2300
2200
1050
1982
1816
0
q_1
50
70
100
125
158.11
180
200
300
400
500
40
50
59.16
100
120
150
200
300
400

BIBLIOGRAFIA

1. Investigación de Operaciones
   Herbert Moskowitz/Gordon P. Wrhight
   Editorial Prentice/Hall Internacional.

2. Toma de Decisiones por medio de investigación de Operaciones
   Robert J. Thierauf/Richard A. Gorsse
   Editorial Limusa

3. Métodos Numéricos Aplicados
   Brice Carnahan/H.A. Luthar/James O. Wilkes
   Editorial John Wilen/Sons Inc.

4.. Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones (Volumen I)
   Dr. Juan Prawda Witenberg
   Editorial Limusa

5. Control de Inventarios
   Starr y Miller
   Editorial Diana

6. Sistemas de Producción e Inventarios
   Buffa y Taubert
   Editorial Limusa

'. Planeación y Control de la Producción
   Bock Holstein
   Editorial Limusa

8. Production and Inventory Control
   P/oss/and Wight
   Editorial Prentice Hall

9. Production Planning and Inventory Control
   Magee
   Editorial Mc. Graw-Hill

10. Operations Research in Production Planning Scheduling and Inventory Control
   Johnson Montgomery
   Editorial Wiley

11. Investigación de Operaciones
Una Introducción
Hamd y A. Taha
Editorial Representaciones y Servicios de Ingeniería,
S.A.