TM
Z5853
.M2
FIME
1986
S6

TM
Z5853
.M2
FIME
1986
S6

1020070586

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA
Y ELECTRICA

DIRECCION GENERAL DE
ESTUDIOS DE POSTGRADO

DIVISION DE ESTUDIOS DE POST-GRADO

MODELOS DE INVENTARIO PROBABILISTICO Y UN ENFOQUE DE PROGRAMACION DINAMICA

TESIS

QUE PRESENTA EL

ING. VLADIMIR SOLIZ ALVARO

EN OPCION AL GRADO DE

MAESTRIA EN CIENCIAS DE LA ADMINISTRACION
CON ESPECIALIDAD EN PRODUCCION

MONTERREY, N. L.   JULIO DE 1986

CAPILLA ALFONSINA
UANL
162113

A MIS PADRES:

GERMAN Y CANDIDA.

INDICE

I

INTRODUCCION

INTRODUCCION

El inventario es el almacén físico de productos que una empresa mantiene a la mano para promover el manejo fluído y eficiente de sus operaciones. Se puede mantener antes del ciclo de producción, en la forma de inventario de materias primas; durante una etapa intermedia del ciclo de producción, como inventario de producto en proceso; o al final del ciclo de producción, como inventario de producto terminado.

En general una cierta cantidad de inventario es necesaria para el funcionamiento eficiente de un negocio, aunque alguno pudiera tener algún grado de eficiencia, con una fluctuación bastante grande de los niveles de inventario. El control sobre el inventario se puede ejercer cambiando el programa de producción, cambiando el tamaño de los lotes de producción, y mediante cambios en el esfuerzo promocional o en los alicientes de ventas. Durante el desarrollo del presente trabajo se buscará plantear algunos modelos y luego desarrollar las ecuaciones que los describan; para esto, se considerará que la actividad de ventas es constante o queda fuera del alcance de quien planea el inventario, de manera que una política de inventario comprenderá solamente el programa y los tamaños de los lotes de producción. En este último punto se considerará también la capacidad de los almacenes en que se guarda el inventario.

Las posibles ventajas asociadas con un inventario alto son las economías de producción con tamaños de lotes grandes, el surtido más rapido de los pedidos de los clientes, la estabilización de las cargas de trabajo, y las ganancias derivadas de la especulación en un mercado en donde se espera que suban los precios. La desventaja asociada con el inventario alto es sencillamente que mantener el inventario cuesta dinero (p.e. la renta del almacén, la depreciación, el deterioro, el interés sobre el capital invertido, el manejo físico y la contabilidad). Se ve con claridad que es aconsejable aumentar el inventario solamente cuando los ahorros que resulten (o las ganancias) compensen apropiadamente el aumento en los costos de llevar el inventario.

Entre los modelos de inventarios que se estudian tenemos los modelos determinísticos y los modelos probabilísticos. En los modelos determinísticos se supone que la demanda para ciertos períodos es conocida, así como el tiempo de entrega de los pedidos hechos al proveedor. En general esta situación en la que conocemos con precisión las demandas futuras es mas bién rara y poco común en la práctica, razon por la cual preferimos suponer que contamos con menos información acerca de la demanda futura. Supondremos que conocemos con alguna aproximación el tipo de distribución probabilística que sigue la demanda, asi como sus respectivos parámetros, y en base a esa información decidiremos cuales seran las políticas a seguir, de modo tal que se minimizen los costos totales de llevar el inventario. Los modelos en los cuales solo es conocida la distribución de probabilidad de la demanda son los modelos de inventarios probabilísticos.

Como ya se ha indicado, es poco común que se conozca con precisión la demanda futura asi pues, en el presente trabajo se estudiarán algunos de estos modelos probabilísticos de inventarios. En el capítulo II se hara una breve introducción a la probabilidad, suficiente para luego en el capitulo III tocar los dos primeros modelos. Uno de ellos contemplará demanda discreta y la elección entre hacer pedidos cada semana o cada dos semanas. En el otro modelo la demanda será continua y se supondrá un tiempo de espera entre el pedido y la entrega.

En el capitulo IV se presentará un modelo que supone la existencia de dos almacenes para un mismo producto, cada uno de ellos con su propia demanda. En el capítulo V se considera un modelo que toma en cuenta varios períodos, teniendo que tomarse series de decisiones consecutivas. Siendo que la Programación Dinámica es una herramienta muy útil en los casos en los que se deben tomar series consecutivas de decisiones se trata el modelo usando esta técnica y luego se hace una variación del modelo, asumiendo que el número de períodos no está acotado.

En el capítulo VI se presentan las conclusiones, y finalmente se presenta un apéndice referente a diferencias fínitas, utilizadas en el capítulo III.

Todos los modelos estudiados son del tipo de revisión periódica y de demanda probabilística.

II

ELEMENTOS

DE PROBABILIDAD

ELEMENTOS DE PROBABILIDAD

En los problemas de inventarios, a menudo se tiene la necesidad de tomar decisiones con base en fenómenos asociados con la incertidumbre. Esta incertidumbre resulta de la variación inherente debida a fuentes de variación que eluden el control, o bién , a la inconsistencia de los fenómenos naturales . En lugar de tratar cualitativamente esta variabilidad, se la puede incorporar al modelo matemático y, por consiguiente manejarla cuantitativamente. En general, esto puede llevarse a cabo si los fenómenos exhiben cierto grado de regularidad, de modo que su variación pueda ser descrita mediante un modelo de probabilidad. En el presente capítulo se hará referencia a métodos útiles para caracterizar estos modelos de probabilidad.

Un desarrollo riguroso de la teoría de probabilidad presenta dificultades lógicas y matemáticas de alto nivel, por lo que no se intentará aquí. En lugar de ello, se procurara presentar definiciones practicas de conceptos tales como "variable aleatoria" y "distribución de probabilidad" , ilustrando los mismos con algunos ejemplos.

ESPACIO MUESTRA.- Supongase que se tiene interés en la demanda de un producto durante un cierto período, por ejemplo un mes. Considérese un experimento que conducirá a la observación de la demanda del producto durante el mes que transcurre. En tanto que no puede predecirse el resultado del experimento con exactitud, se puede describir cada resultado posible. Durante el período, la demanda puede tomar cualquiera de los valores 0,1,2,..., es decir, el conjunto completo de los enteros no negativos. Este conjunto de resultados posibles se llama espacio muestra y se denota como S. Cada elemento de este espacio se denomina punto y se denota como s. En la práctica, las demandas pueden acotarse por algun valor N adecuado. Luego el espacio muestra constaría del conjunto de los enteros 0,1,2,...,N. Esta descripción tiene sus limitaciones pero en general podrá ser útil.

Considerese ahora un experimento en el que se mide el tiempo hasta que llega el primer cliente a una tienda. El primer cliente puede llegar en cualquier instante hasta que la tienda cierre (se supone un dia de 8 horas). Para los fines de este experimento se puede considerar S como todos los puntos de la recta real entre cero y ocho horas. Luego S consta de los puntos s tales que

$$0 \leq s \leq 8$$

Ahora consideremos que el experimento se realiza durante dos dias, en cada uno de los cuales se mide el tiempo en que llega el primer cliente. Entonces S consta de los puntos $s=(x_1,x_2)$, donde x_1 es el tiempo de llegada en el primer dia y x_2 en el segundo dia. Ademas

$$0 \leq x_1 \leq 8 \qquad ; \qquad 0 \leq x_2 \leq 8.$$

Por tanto, S consta del conjunto de todos los puntos posibles s, donde s representa un punto en el espacio que se encuentra en el cuadrado mostrado en la figura (2.1):

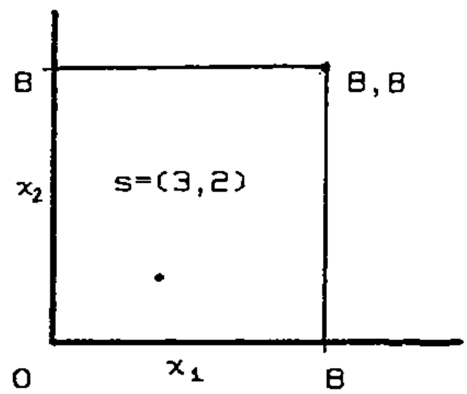


figura (2.1) Espacio muestra del tiempo de llegada.

Un evento se define como un conjunto de resultados del experimento. Por ejemplo, el conjunto

$$s=(x_1,x_2);x_1 \leq 1, x_2 \leq 1$$

es el evento de que la primera llegada en cada uno de los dos dias se produzca antes de que transcurra la primera hora. Es evidente que cualquier subconjunto del espacio muestra (por ejemplo, cualquier punto, colección de puntos, o el espacio muestra completo), es un evento.

Los eventos pueden combinarse de diferentes formas, conduciendo a la formación de nuevos eventos. Para dos ejemplos cualesquiera E_1 y E_2 , el nuevo evento $E_1 \cup E_2$ (E_1 union E_2) se define como aquel que contiene todos los puntos de S que estan en E_1, o bien en E_2, o en ambos.

La intersección de dos eventos E_1 y E_2 se denota por $E_1 \cap E_2$ (o en notación equivalente $E_1 E_2$). Este nuevo evento $E_1 \cap E_2$ se define como aquel que contiene todos los puntos de S que se encuentran tanto en E_1 como en E_2 . Por último, se dice que E_1 y E_2 son mutuamente exclusivos si $E_1 \cap E_2$ no contiene ningún punto. Esto es, E_1 y E_2 no tienen ningún punto en común. Los eventos que no contienen punto alguno se denominan eventos nulos.

VARIABLE ALEATORIA.- Con frecuencia puede ocurrir que al llevar a efecto un experimento no se tiene interes directamente en el espacio muestra completo o en los eventos definidos sobre el espacio muestra. Por ejemplo, supóngase que se llevó a cabo el experimento que mide los tiempos de la primera llegada en los dos dias, con el fin de determinar a que hora se debe abrir la tienda. Si el promedio de los tiempos de llegada es mayor que una hora, de ahí en adelante no se abrira hasta las 10 a.m.

(suponiendo que la hora de apertura actual es a las 9 a.m.). El promedio de x_1 y x_2 (los dos tiempos de llegada) no es un punto en el espacio muestra y, por lo tanto, no se puede tomar la decisión observando directamente el resultado de su experimento. Por el contrario, toma su decisión de acuerdo con los resultados de un regla que asigna el promedio de x_1 y x_2 a cada punto (x_1, x_2) en S . Entonces este conjunto resultante se divide en dos partes: los puntos abajo de 1 y los puntos arriba de 1 . Si el resultado de esta regla (promedio de los dos tiempos) es mayor a 1, entonces la tienda abrirá a las 10 a.m. En el caso de que sea menor a 1 se abrirá a las 9 a.m. La regla que asigna el promedio de x_1 y x_2 a cada punto del espacio muestra se llama variable aleatoria. Asi entonces, una variable aleatoria es una función de valor numérico definida sobre el espacio muestra. Nótese que una función es, en sentido matemático, tan solo una regla que asigna un número a cada valor del dominio de definición, que es en este caso, el espacio muestra.

PROBABILIDAD Y DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD.- En el ejemplo de la demanda de un producto durante un mes, nótese que la demanda real no es una constante; por el contrario, puede esperarse que exhiba cierta "variación". En particular, se puede describir esta información introduciendo el concepto de probabilidad definida sobre eventos en el espacio muestra. Por ejemplo, sea E el evento $\{0 < s < 10\}$. Entonces intuitivamente se puede hablar de P[E], en donde P[E] se lee como la probabilidad de tener una demanda de 10 o menos unidades. Nótese que puede pensarse en P[E] como un valor numérico asociado con el evento E. Si se conoce P[E] para todos los eventos E en el espacio muestra, entonces se dispone de cierta "información" acerca de la demanda que es posible esperar que ocurra. Generalmente, es difícil obtener estos valores numéricos pero, sin embargo, puede postularse su existencia.

Para los fines que se siguen, basta con postular la existencia de valores numéricos P[E] asociados con los eventos E del espacio muestra. El valor P[E] se conoce como probabilidad de ocurrencia del evento E. Ademas, se supondrá que P[E] satisface las siguientes propiedades razonables:

1.- $0 \leq P[E] \leq 1$. Esto implica que la probabilidad de un evento siempre es no negativa y nunca puede ser mayor que 1.

2.- Si E_0 es un evento que no puede ocurrir (un evento nulo) en el espacio muestra, entonces $P[E_0] = 0$. Supongamos que E es el evento de obtener una demanda de -7 unidades. Entonces $P[E_0] = 0$.

3.- $P[S] = 1$. Si el evento consiste en la obtención de una demanda entre cero y N, es decir el espacio muestra completo, la probabilidad de tener algunas demandas entre cero y N es segura.

4.- Si E_1 y E_2 son eventos mutuamente exclusivos en S, entonces $P[E_1 \cup E_2] = P[E_1] + P[E_2]$.

Aún cuando estas propiedades son un tanto formales, conforman nuestra noción intuitiva respecto a la probabilidad. Sin embargo, no pueden usarse estas propiedades con el fín de obtener valores para P[E]. En ocasiones, resulta conveniente la determinación de valores exactos, o al menos valores aproximados . Esto último puede hacerse , junto con una interpretación de probabilidad, a través de una interpretación de frecuencia de tal probabilidad. Puede enunciarse esto de manera precisa como sigue: Denotemos por n el número de veces que se efectúa un experimento y por m el número de ocurrencias con éxito del evento E en las n tentativas. Entonces para tal fenómeno, P[E] puede interpretarse como

$$P[E] = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}$$

suponiendo que el límite exista.

La dificultad que se presenta con la interpretación de frecuencias como una definición de probabilidad es que no es posible determinar realmente la probabilidad de un evento debido a que no puede dar respuesta a la pregunta "¿ Que tan grande debe ser n ?". Sin embargo no tiene una importancia esencial dar una definición rigurosa de probabilidad o hallar los métodos para determinar probabilidades exactas de eventos.

Se ha descrito la existencia de probabilidades, definidas sobre eventos E en el espacio muestra, y se ha presentado el concepto de variable aleatoria. Hallar la relación entre las probabilidades asociadas con eventos del espacio muestra y las "probabilidades" asociadas con variables aleatorias es un tema de sumo ínterés.

Asociada con cada variable aleatoria existe una función de distribución acumulada (FDA). Con el objeto de definir una FDA, es necesario introducir una cierta notación adicional. Defínase el símbolo $E_b^x = \left\{ s / X(s) < b \right\}$ (o, lo que es equivalente, $\left\{ X < b \right\}$ como el conjunto de los resultados s en el espacio muestra que forman el evento E_b^x, tales que la variable aleatoria X toma valores menores que o iguales a b. Entonces $P\left\{ E_b^x \right\}$ es simplemente la probabilidad de este evento. Nótese que esta probabilidad esta bién definida debido a que E_b^x es un evento en el espacio muestra, y este evento depende tanto de la variable aleatoria en la que se tiene interés como el valor b elegido. Por ejemplo, supongase que se lleva a cabo el experimento que mide la demanda de automóviles durante un mes. Sea N = 9, y supongase que cada uno de los eventos [0],[1],...,[9] tiene una probabilidad igual a 1/10; es decir, P[0] = P[1] = ... = P[9] = 1/10. Sea la variable aleatoria X el cuadrado de la demanda y elíjase b igual a 30. Entonces

$$E_{30}^{x} = \left\{ s \middle| X(s) \leq 30 \right\} = \left\{ X \leq 30 \right\}$$

es el conjunto E_{30}^{x} = 0,1,2,3,4,5 (puesto que el cuadrado de cada uno de estos numeros es menor a 30). Ademas,

$$P[E_{30}^{x}] = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{6}{10}$$

Por tanto, $P[E_{30}^{x}] = P[X \leq 30] = 6/10$.

Para una variable aleatoria dada X, $P[X \leq b]$, lo que se denota por $F_x(b)$, recibe el nombre de FDA de la variable aleatoria X y está definida para todos los valores reales de b. En donde no se presenten posibilidades de confusión, la FDA se denotará por F(b); es decir,

$$F(b) = F_X(b) = P[E_b^X] = P[s \,|\, X(s) \leq b] = P[X \leq b].$$

Aunque $P[X \leq b]$ se define a traves del evento E_b^X en el espacio muestra a menudo se dirá que es la "probabilidad" de que la variable aleatoria X tome un valor menor que o igual a b. Sin embargo se deberá interpretar con propiedad esta proposición, es decir, en terminos del evento E_b^X .

Como se mencionó, cada variable aleatoria tiene una función de distribución acumulada asociada a ella. Esta no es una función arbitraria sino que es inducida por las probabilidades asociadas con los eventos de la forma E_b^x definidos sobre el espacio muestra S. Ademas, la FDA de una variable aleatoria es una función de valor numérico definida para todos los b, $-\infty \leq b \leq \infty$, que tengan las propiedades siguientes:

1.- $F_X(b)$ es una función no decreciente de b.

2.- $\lim_{b \to -\infty} F_X(b) = F_X(-\infty) = 0.$

3.- $\lim_{b \to +\infty} F_X(b) = F_X(+\infty) = 1.$

$F_n(x)$ puede interpretarse como la fracción de resultados del experimento menores que o iguales a x y recibe el nombre de FDA de la muestra. Puede demostrarse que conforme el numero de repeticiones n del experimento se hace más grande, la FDA de la muestra tiende a la FDA de la variable aleatoria X.

En la mayor parte de los problemas que se encuentran en la práctica, no se tiene interes en los eventos del espacio muestra y sus probabilidades asociadas. Por el contrario, el interés se enfoca en las variables aleatorias y sus funciones de distribución acumulada asociadas. Generalmente, se elige una variable aleatoria (o variables aleatorias) y se establece una hipótesis acerca de la forma de la FDA o acerca de la variable aleatoria. Por ejemplo, puede tenerse interés en la variable aleatoria X_1, el tiempo de la llegada en el primer dia, y puede establecerse la hipótesis de que la forma de su FDA es exponencial. Analogamente, tambien puede hacerse la misma suposición acerca de X_2, el tiempo de la llegada en el segundo dia. Si estas suposiciones son validas, entonces puede obtenerse la FDA de la variable aleatoria, $\bar{X} = (X_1 + X_2)/2$. Por supuesto, estas suposiciones acerca de la forma de la FDA no son arbitrarias y en realidad implican suposiciones acerca de las probabilidades asociadas con los eventos del espacio muestra. Con esperanza, pueden ser verificadas ya sea por la evidencia empírica, o bién por consideraciones teóricas.

PROBABILIDAD CONDICIONAL Y EVENTOS INDEPENDIENTES.- Ahora, considerense dos eventos en el espacio muestra, E_1 y E_2, en donde E_1 representa el evento que ha ocurrido y E_2 representa el evento en cuya ocurrencia o no ocurrencia se tiene interés. Ademas supongase que $P[E_1] \geq 0$. La probabilidad condicional de la ocurrencia de los eventos E_2, dado que ha ocurrido el evento E_1, $P[E_2|E_1]$, se define como

$$P[E_2|E_1] = \frac{P[E_1 \cap E_2]}{P[E_1]},$$

en donde $[E_1 \cap E_2]$ representa un evento que consta de todos los puntos s en el espacio muestra común tanto a E_1 como a E_2. Por ejemplo, considérese el experimento que consiste en la observación de la demanda de un producto sobre cada uno de 2 meses. Supongase que el espacio muestra S consta de todos los puntos $s = (x_1, x_2)$ en donde x_1 representa la demanda durante el primer mes y x_2 representa la demanda durante el segundo mes; $x_1, x_2 = 0,1,2,\ldots,99$. Ademas, se sabe que la demanda consta de los puntos (10,0), (10,1), (10,2),...,(10,99). Considérese el evento E_2, el cual representa una demanda para el producto en el segundo mes que no sea mayor a 1 unidad. Este evento consta de los puntos (0,0), (1,0), (2,0),...,(10,0),...,(99,0), (0,1), (1,1), (2,1),..., (10,1),..., (99,1). El evento $[E_1 \cap E_2]$ consta de los puntos (10,0) y (10,1). De donde, la probabilidad de una demanda que no sea mayor que 1 unidad en el segundo mes, dado que en el primer mes ocurrió una demanda de 10 unidades, es decir, $P[E_2 | E_1]$, se obtiene por

$$P[E_2 | E_1] = \frac{P[E_1 \cap E_2]}{P[E_1]},$$

$$= \frac{P[s=(10,0),\ s=(10,1)]}{P[s=(10,0),\ s=(10,1),\ldots,\ s=(10,99)]}$$

En esencia, si se tiene interés en la probabilidad condicional, se esta trabajando con un espacio muestra reducido, es decir, de S a E_1, modificando los otros eventos en consecuencia.

De manera semejante, puede definirse la probabilidad condicional de la ocurrencia del evento E_1, dado que ha ocurrido el evento E_2 . Si $P[E_2] \geq 0$, entonces

$$P[E_1 \mid E_2] = P[E_1 \cap E_2] \ / \ P[E_2]$$

Se introdujo el concepto de probabilidad condicional de modo que pudiera aprovecharse la información respecto a la ocurrencia o no ocurrencia de los eventos. Es concebible que la información respecto a la ocurrencia del evento E_1 no proporciona información acerca de la ocurrencia o no ocurrencia del evento E_2.

Si $P[E_2 \mid E_1] = P[E_2]$, o bién $P[E_1 \mid E_2] = P[E_1]$, entonces se dice que E_1 y E_2 son eventos independientes.

Por lo común es difícil demostrar que los eventos son independientes aplicando las definiciones de independencia. Por el contrario , generalmente resulta más sencillo usar la información disponible en relación con el experimento, con el fín de postular si los eventos son independientes . Generalmente esto se basa en consideraciones físicas. Por ejemplo, si se "sabe" que la demanda para un producto durante un mes no afecta a la demanda en los meses subsiguientes entonces puede decirse que los eventos E_1 y E_2 , previamente definidos, son independientes, en cuyo caso

$$P[E_2 \mid E_1] = \frac{P[E_1 \cap E_2]}{P[E_1]},$$

$$P[E_2 | E_1] = \frac{P[s=(10,0),\ s=(10,1)]}{P[s=(10,0),\ s=(10,1), \ldots,\ s=(10,99)]}$$

$$P[E_2 | E_1] = \frac{P[E\ ]P[E\ ]}{P[E\ ]} = P[E\ ],$$

$$P[E_2 | E_1] = P[s=(0,0),\ s=(1,0),\ \ldots,\ s=(99,0),\ s=(0,1),\ s=(1,1),\ \ldots,\ s=(99,1)]$$

Puede extenderse la definición de independencia a cualquier número de eventos. Se dice que E_1, E_2, ..., E_n son eventos independientes sí, para cada subconjunto de estos eventos, E_1, E_2, ..., E_n,

$$P[E_1^* \cap E_2^* \cap \ldots \cap E_n^*] = P[E_1^*]P[E_2^*] \ldots P[E_n^*].$$

Intuitivamente, esto implica que el conocimiento de la ocurrencia de cualquiera de estos eventos no tiene efecto sobre la probabilidad de la ocurrencia de cualquier otro evento.

DISTRIBUCIONES DISCRETAS DE PROBABILIDAD.- Generalmente se tiene interés en las variables aleatorias y sus distribuciones asociadas de probabilidad. Por otra parte las variables aleatorias discretas son aquellas que tienen un conjunto de valores finito o infinito, pero contable. Ademas, la FDA para una variable aleatoria se da mediante

$$F_X(b) = P[s \mid X(s) \leq b].$$

Para una variable aleatoria discreta X, puede expresarse el evento $[s \mid X(s) \leq b]$ como la unión de conjuntos excluyentes; es decir,

$$[s \mid X(s) \leq b] = [s \mid X(s) = x_1] \cup [s \mid X(s) = x_2] \cup \ldots \cup [s \mid X(s) = x_{[b]}],$$

en donde $x_{[b]}$ denota el mayor valor entero de las x menor o igual a b. Entonces se deduce que para la variable aleatoria discreta X, la FDA puede expresarse como

$$F_X(b) = P[s \mid X(s) = x_1] + P[s \mid X(s) = x_2] + \ldots + P[s \mid X(s) = x_{[b]}].$$

$$= P[X = x_1] + P[X = x_2] + \ldots + P[X = x_{[b]}].$$

Esta última expresión también puede escribirse como

$$F_X(b) = \sum_{\forall k \leq b} P[X = k],$$

en donde k es un índice que varía sobre todos los valores x posibles que puede tomar la variable aleatoria X.

Denotemos por $P_X(k)$ las probabilidades $P[X = k]$, de modo que

$$F_X(b) = \sum_{\forall k \leq b} P(k).$$

La $P_X(k)$ recibe el nombre de la distribución de probabilidad de la variable aleatoria discreta X. Cuando no existe ambiguedad, $P_X(k)$ puede denotarse por $P(k)$.

Como un ejemplo considerese la variable aleatoria discreta que representa la demanda de un producto en un mes dado. Sea N=99. Si se supone que $P(k) = P[X = k] = 1/100$ para todos los $k = 0,1, \ldots, 99$, entonces la FDA para esta variable aleatoria es como la de la figura (2.2)

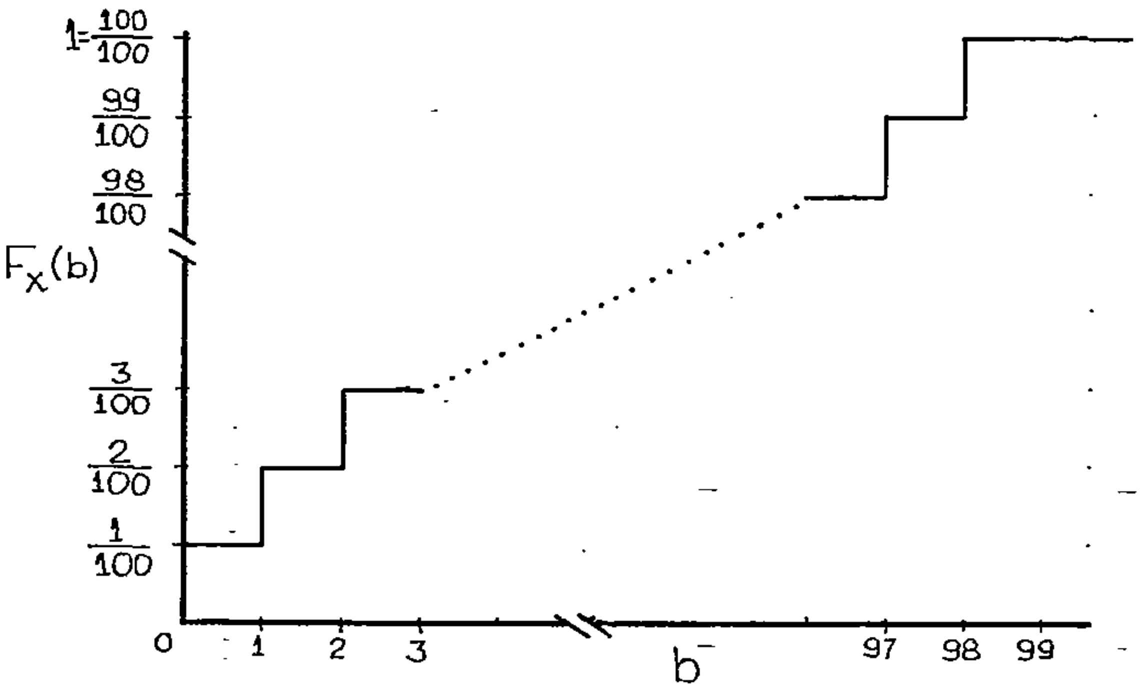


figura (2.2) FDA de una variable discreta

La distribución de probabilidad de esta variable aleatoria discreta se muestra en la figura (2.3). En esta gráfica las alturas de las rectas son iguales debido a que $P(0) = P(1) = \ldots = P(99)$. Para otras variables aleatorias, la altura de las rectas no seran necesariamente iguales. De hecho, todo lo que se requiere para que las $P_X(k)$ formen una distribución de probabilidad es que las $P_X(k)$ sean no negativas y que

$$\sum_{\forall k} P_X(k) = 1.$$

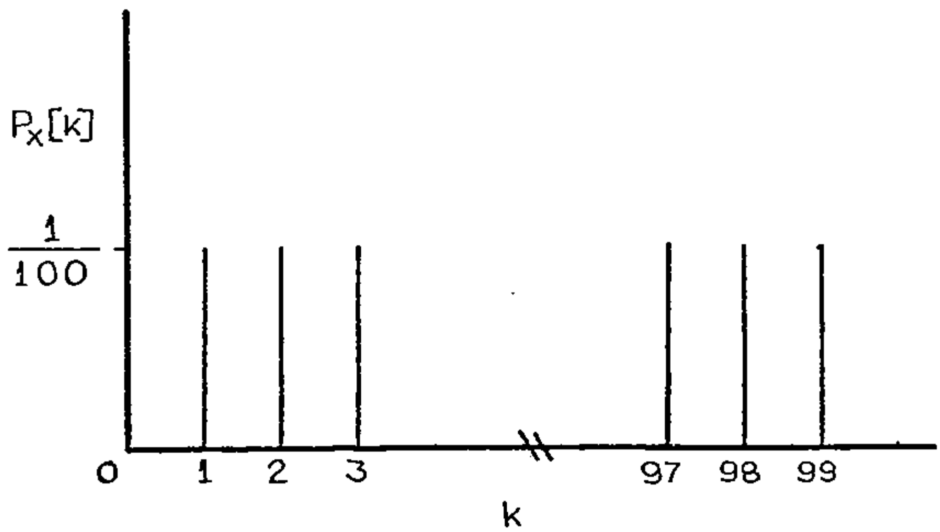


figura (2.3) Distribución de probabilidad de una V.A. discreta.

Existen varias distribuciones de probabilidad importantes que se usan en la teoria de inventarios. Aquí expondremos solo dos de ellas.

DISTRIBUCION BINOMIAL.- Se dice que una variable aleatoria X tiene una distribución binomial si su distribución de probabilidad puede escribirse como

$$P[X = k] = P_X[k] = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

en donde p es una constante tal que $0 \le p \le 1$, n es cualquier entero positivo y k es un entero tal que $0 \le k \le n$.

Nótese que esta distribución es una función de los dos parámetros n y p. En la figura (2.4) se muestra la distribución de probabilidad de esta variable aleatoria.

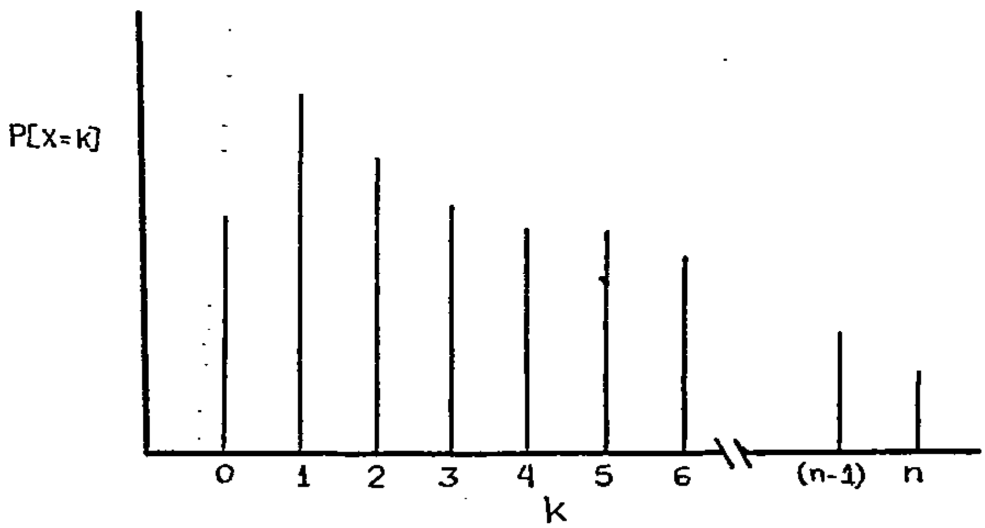


figura (2.4) Dist. binomial con parámetros n y p.

Se obtiene una interesante interpretación de la distribucion binomial cuando $n=1$;

$$P[X = 0] = P(0) = 1-p$$

y

$$P[X = 1] = P[1] = p.$$

Se dice que tal variable aleatoria tiene una distribución de Bernoullí. Por tanto, si una variable aleatoria toma dos valores, p.e. 0 o 1, con probabilidad 1-p o p respectivamente, se obtiene una variable aleatoria de Bernoullí. El resultado que se obtiene al lanzar una moneda es un ejemplo de este tipo: Si una cara se denota asignandole el numero 0, y a una cruz se le asigna un 1, y si la moneda es "legal" (la probabilidad de obtener una cara es 1/2), lo que se obtenga es una variable aleatoria de Bernoullí con parámetro p=1/2.

DISTRIBUCION DE POISSON.- Se dice que una variable aleatoria X tiene una distribución de Poissón si su distribución de probabilidad puede escribirse como

$$P[X = k] = P_X(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

en donde λ es una constante positiva (el parámetro de esta distribución) y k es cualquier entero no negativo. En la figura (2.5) se muestra un ejemplo de esta distribución.

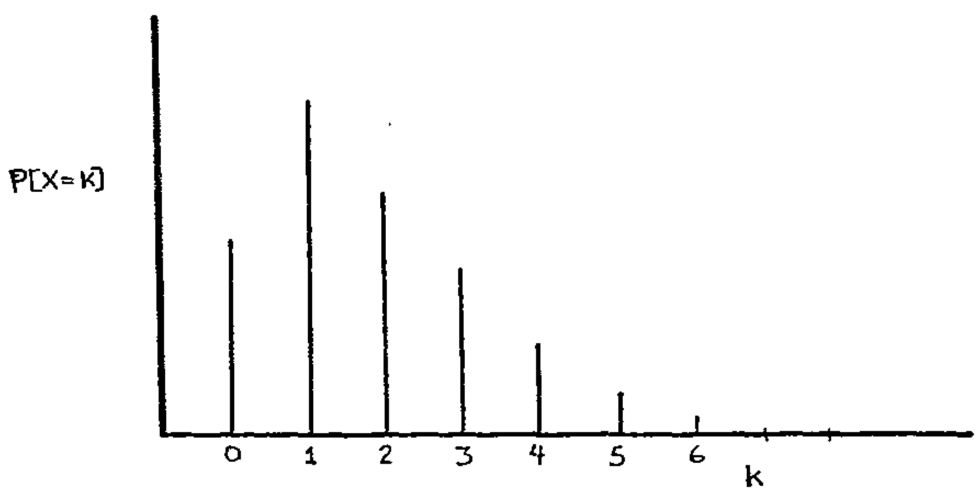


figura (2.5) Distribución de Poissón.

A menudo se utiliza la distribución de Poissón en la investigación de operaciones. Hablando en terminos heurísticos, esta distribución resulta apropiada en muchas situaciones en que ocurre un "evento" sobre un periodo, como la llegada de un cliente; cuando es probable que ocurra este "evento" en un intervalo como en cualquier otro; también, la ocurrencia de un evento no tiene efecto en si ocurre o no otro evento. A menudo se supone también que la demanda de un producto tiene esta distribución.

DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE PROBABILIDAD.- Las variables aleatorias continuas son las que toman un continuo de valores. Comunmente puede escribirse la FDA para una variable aleatoria continua F (b) como

$$F\ (b) = P[X(s) < b] = \int_{-\infty}^{b} f_X(y)\ dy,$$

en donde $f_X(y)$ se conoce como la función de densidad de la variable aleatoria X. Cuando no exista ambiguedad, puede eliminarse el subíndice X y $f_X(y)$ se denotara por $f(y)$. Es evidente que se puede obtener la FDA si se conoce la función de densidad. Ademas, el conocimiento de la función de densidad permite calcular todo tipo de probabilidades, por ejemplo

$$P[a \leq X \leq b] = F(b) - F(a) = \int_a^b f_X(y)\, dy.$$

En terminos estrictos , el simbolo $P[a \leq X \leq b]$ se relaciona con la probabilidad de que el resultado s del experimento pertenezca a un evento particular en el espacio muestra, a saber, ese evento tal que X(s) esta entre a y b, siempre que s pertenezca al evento. Resulta evidente, que a partir de la expresión previa para $P[a \leq X \leq b]$, se puede evaluar esta probabilidad obteniendo el área bajo la función de densidad, entre a y b, como se ilustra mediante el area sombreada bajo la función de densidad que se muestra en la figura (2.6).

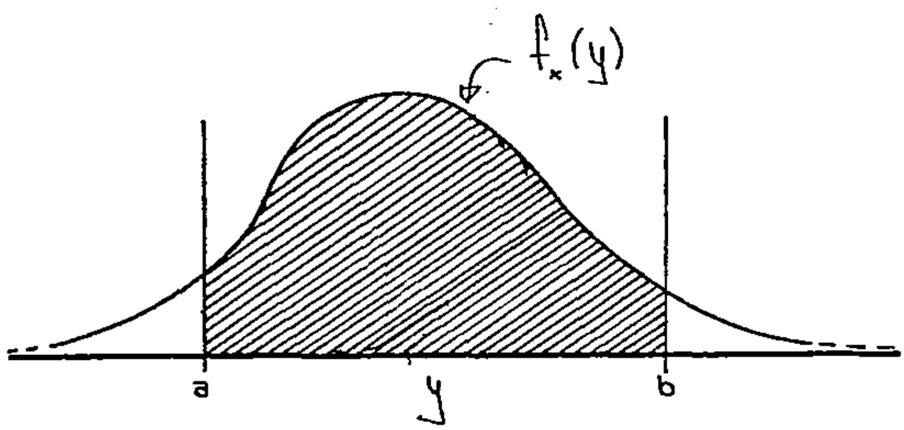


figura (2.6) función de densidad de una variable aleatoria

Existen varias distribuciones de probabilidad continua importantes usadas en la teoria de inventarios. A continuación expondremos algunas de ellas.

LA DISTRIBUCION EXPONENCIAL.- Una variable aleatoria continua cuya densidad esta dada por

$$f_X(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} e^{-y/\theta}, & \text{para } y > 0 \\ 0, & \text{para } y < 0 \end{cases}$$

se dice que es una variable aleatoria exponencialmente distribuida. La distribución exponencial es una función del parámetro único θ, en donde θ es cualquier constante positiva. La FDA de una variable aleatoria exponencial distribuida $F_X(b)$ esta dada por

$$F(b) = \int_{-\infty}^{b} f(y)\, dy = \begin{cases} 0, & \text{para } b < 0 \\ \displaystyle\int_0^b \frac{1}{\theta} e^{-y/\theta} dy = 1 - e^{-b/\theta}, & \text{para } b > 0 \end{cases}$$

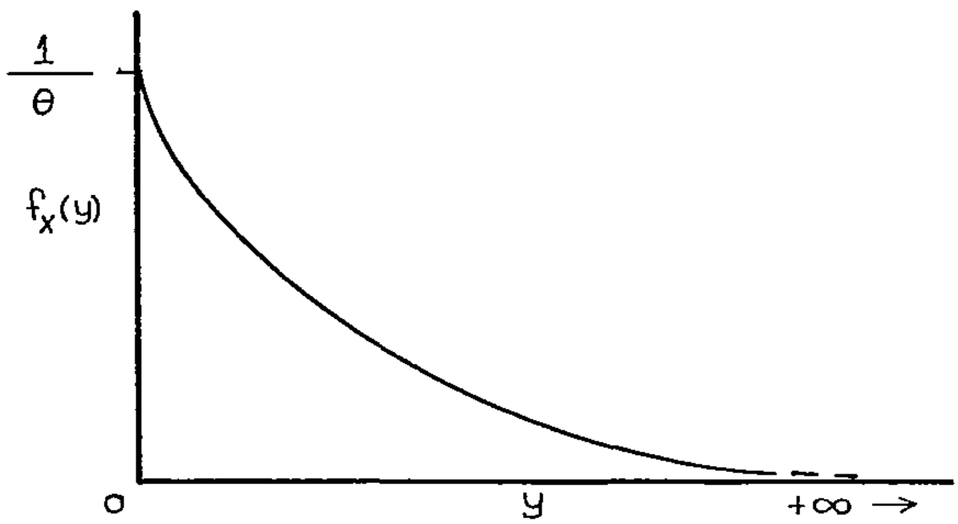


figura (2.7) Función de densidad de la dist. exponencial.

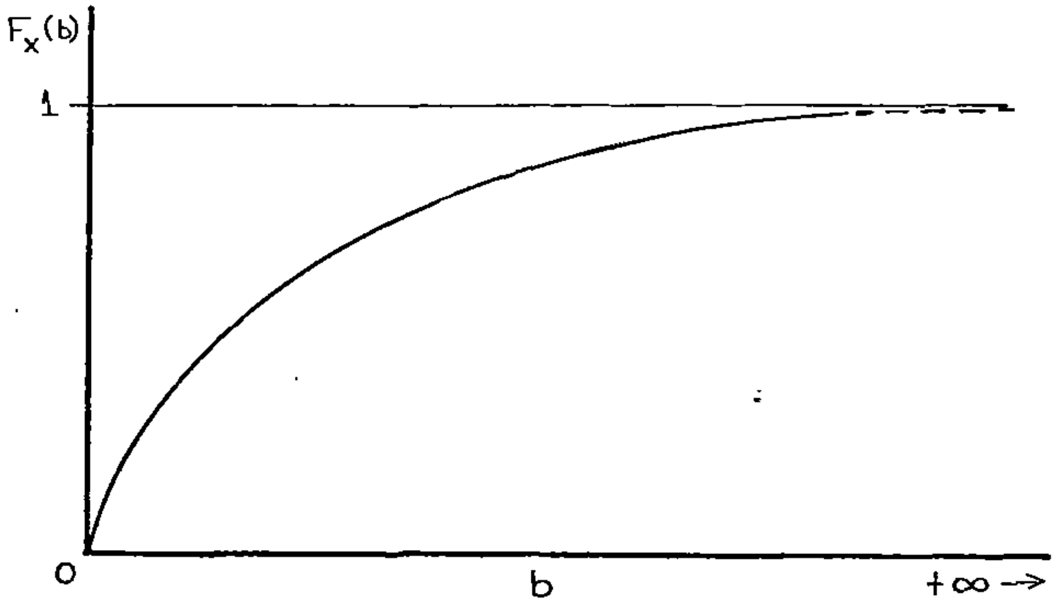


figura (2.8) FDA de la distribución exponencial.

La distribución exponencial se aplica con amplitud en la investigación de operaciones. A menudo se supone que el tiempo entre llegadas de clientes, la duracion de conversaciones telefónicas y la vida de componentes electrónicos tienen una distribución exponencial. Tal suposición tiene la importante implicación de que la variable aleatoria no "envejece". Por ejemplo, supongase que se establece la hipótesis de que la vida de un tubo al vacio tiene una distribución exponencial. Si el tubo ha durado 1000 horas, la probabilidad de que dure 50 horas más es igual a la probabilidad de que dure 50 horas más, si el tubo ya ha durado 2000 horas. En otras palabras, un tubo nuevo no es "mejor" que uno que ya haya durado 1000 horas. Esta implicación de la exponencial es bastante importante y con frecuencia se pasa por alto en la práctica.

LA DISTRIBUCION UNIFORME.- Una variable aleatoria continua cuya función de densidad esta dada por

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta-\alpha} & \text{para } \alpha < y < \beta \\ 0 & \text{por otra parte.} \end{cases}$$

Se conoce como una variable aleatoria uniformemente distribuida. Notese que todos los valores y desde α hasta β son "igualmente posibles". La figura (2.8) nos muestra gráficamente la forma de esta distribución.

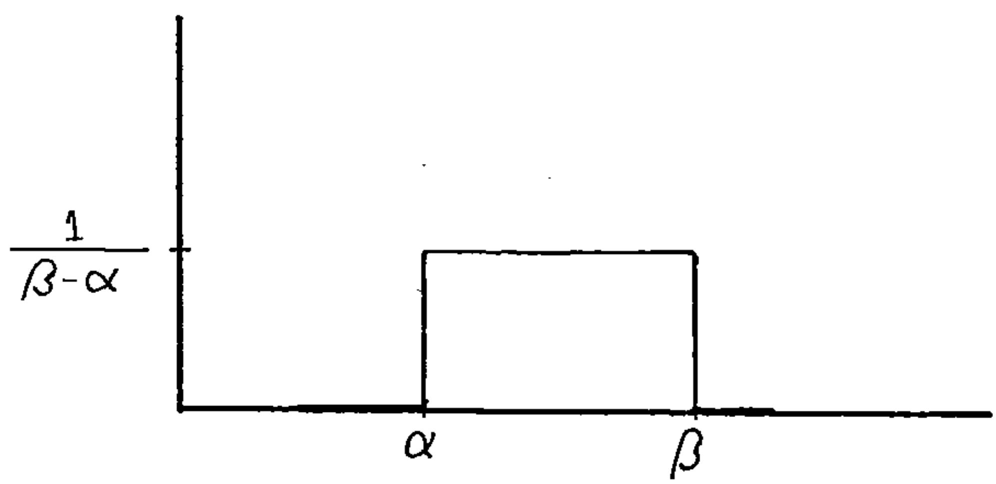


figura (2.8) Función de distribución uniforme

Los parametros de esta distribución son α y β tales que $\alpha > 0$ y $\beta > 0$.

LA DISTRIBUCION NORMAL.- Una de las distribuciones más útiles e importantes en general es la distribución normal. Una variable aleatoria continua cuya función de densidad esta dada por

$$f_X(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(y-\mu)^2/2\sigma^2} \quad , \text{ para } -\infty < y < +\infty$$

se dice que es una variable aleatoria normalmente distribuida. La densidad es una función de los dos parámetros μ y σ , en donde μ es cualquier constante y σ es positiva. En la figura (2.9) se muestra una gráfica de una función de densidad normal típica.

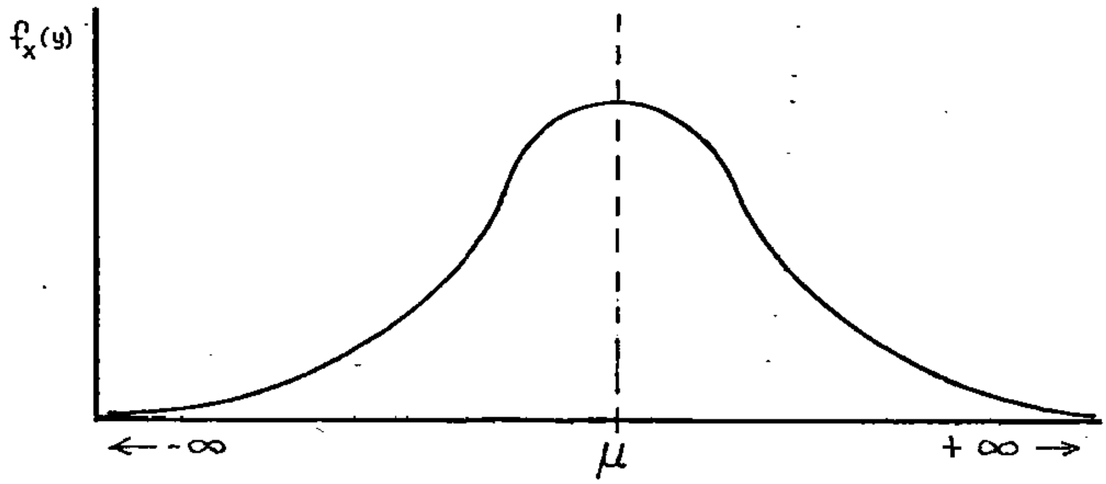


figura (2.9) Función de densidad normal.

Esta función de densidad es una curva con forma de campana simétrica respecto a μ . La FDA de una variable aleatoria normalmente distribuida esta dada por

$$F(b) = \int_{-\infty}^{b} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(y-\mu)^2/2\sigma^2} dy.$$

Haciendo la transformación $z = (y - \mu)/\sigma$, la FDA puede escribirse como

$$F(b) = \int_{-\infty}^{(b-\mu)/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz.$$

De donde, aun cuando esta función no es integrable, se tabula con facilidad. En los textos de probabilidad y estadística se pueden encontrar tablas de esta y otras distribuciones de variable aleatoria.

ESPERANZA MATEMATICA.- Aunque el conocimiento de la distribución de probabilidad de una v.a.(variable aleatoria) nos permite hacer todo tipo de proposiciones de probabilidad, a menudo resulta conveniente tener un solo valor que pueda caracterizar a la v.a. y a su distribución de probabilidad. Esta cantidad es el valor esperado de la variable aleatoria.

Ya formalmente, el valor esperado de una variable aleatoria X se denota por E(X) y esta dado por

$$E(X) = \begin{cases} kP[X = k] = \sum_{\forall k} kP_X(k), & \text{si X es una v.a. discreta.} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_X(y)\, dy, & \text{si X es una v.a. continua.} \end{cases}$$

La esperanza de una variable aleatoria es bastante útil ya que no solo proporciona cierta caracterización de la distribución sino que también tiene significado en términos del promedio de la muestra. En particular, si se observa que una v.a. se repite una y otra vez y se calcula la media aritmética $\bar{X}$, entonces $\bar{X}$ tiende a ser la esperanza de la v.a. X conforme el número de tentativas se hace más grande.

No es necesario confinar el análisis de la esperanza al estudio de la esperanza de una v.a. X. Si Z es alguna función de X, por ejemplo, $Z=g(X)$, entonces $g(X)$ también es una variable aleatoria. La esperanza de g(X) puede definirse como

$$E(X) = \begin{cases} \sum_{\forall k} g(k)P[X = k] = \sum_{\forall k} g(k)P_X(k), & \text{si X es una v.a. discreta.} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)f_X(y)\, dy, & \text{si X es una v.a. continua.} \end{cases}$$

MOMENTOS.- Si la función g descrita en la sección anterior esta dada por

$$Z = g(X) = X^j$$

en donde j es un entero positivo, entonces la esperanza de X se conoce como el j-ésimo momento respecto al origen de la variable aleatoria X y esta dado por

$$E(X^j) = \begin{cases} \sum_{\forall k} k\ P\ (k), & \text{si X es una v.a. discreta.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} y\ f\ (y)dy, & \text{si X es una v.a. continua.} \end{cases}$$

Notese que cuando $j = 1$, el primer momento coincide con la esperanza de X. Generalmente este momento se denota mediante el simbolo μ y a menudo se conoce con el nombre de media o promedio de la distribución.

Si la función g descrita anteriormente esta dada por $Z=g(X)=(X - E(X))^j = (X - \mu)^j$, en donde j es un entero positivo, entonces la esperanza de $(X - \mu)^j$ se llama j-ésimo momento respecto a la media de la variable aleatoria X y esta dada por

$$E(X-E(X))^j = E(X-\mu)^j = \begin{cases} \sum_{\forall k} (k-\mu)^j P_X(k), & \text{si X es una v.a. discreta} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (y-\mu)^j f_X(y)\, dy, & \text{si X es una v.a. continua.} \end{cases}$$

Se ve que si $j=1$, entonces $E(X - \mu) = 0$, si $j=2$, entonces $E(X - \mu)^2$ se llama variancia de la v.a. X y frecuentemente se denota por σ^2. La raiz cuadrada de la variancia, σ, se llama desviación estándar de la v.a. X.

En la tabla (2.1) se encuentran las medias y las variancias de las v.a. que se vieron anteriormente. Para algunas v.a., la media y la variancia suministran una caracterización completa de la distribución, por ejemplo la normal. De hecho, si se conocen todos los momentos de una probabilidad, generalmente esto equivale a especificar la distribución completa.

TABLA DE DISTRIBUCIONES

Distribución de probabilidad	Parametros	valor esperado	variancia
Binomial	n, p	np	np(1 - p)
Poisson	λ	λ	λ
Exponencial	θ	θ	θ
Uniforme	α, β	$\frac{\alpha+\beta}{2}$	$\frac{(\alpha+\beta)^2}{12}$
Normal	μ, σ	μ	σ

III

MODELOS DE

INVENTARIO PROBABILISTICO

MODELOS DE INVENTARIO PROBABILISTICOS

En este capítulo se verán dos modelos de inventarios probabilísticos, en el primero de los cuales la demanda será discreta y se asumirá que pueden haber perdidas por costo de oportunidad. La diferencia con respecto al segundo modelo es que en este otro la demanda se considera como continua y, ademas, que hay un tiempo de demora entre que se hace un pedido y este es entregado. En el primer caso se deberá decidir entre hacer pedidos cada semana o cada dos semanas, asi como la cantidad de unidades a pedir; en el segundo caso la decisión comprenderá la elección de la cantidad a pedir y también la capacidad adecuada de almacenamiento.

El manejo matemático en el primer caso llega a ser tedioso, razon por la cual la definición de lo que son las diferencias finitas, asi como el cálculo de muchos resultados útiles para el ejemplo se han separado y se exponen en el apendice A. En este apendice se muestran con más detalle los procedimientos seguidos, asi como se da la base teórica suficiente para su comprensión y justificación.

ENTREGA INMEDIATA, PEDIDOS SEMANALES O BISEMANALES.- Se considera aquí la situación en la cual se debe decidir entre hacer un pedido cada semana o cada dos semanas. Se supone que no hay tiempo de espera para la entrega de los pedidos. Se asume que cuando se incurre en faltantes se tiene un pérdida por costo de oportunidad. Las siguientes son las variables consideradas para el modelo:

t = intervalo entre pedidos (1, 2)

n = demanda durante el intervalo t

$p_1(n)$= densidad de probabilidad de n para $t = 1$ período

$p_2(n)$= densidad de probabilidad de n para $t = 2$ períodos

C_1= costo de inventario unitario/semana

C_2= costo de faltante unitario

C_3= costo de hacer el pedido

z = nivel de inventario inmediatamente despues de llegar un pedido

$F_1(z)$= costo esperado (excluyendo C_3), asociado con la política de hacer un pedido por período para llevar el inventario al nivel z

$F_1(z)$= costo esperado (excluyendo C_3), asociado con la política de hacer un pedido cada dos períodos para llevar el inventario al nivel z

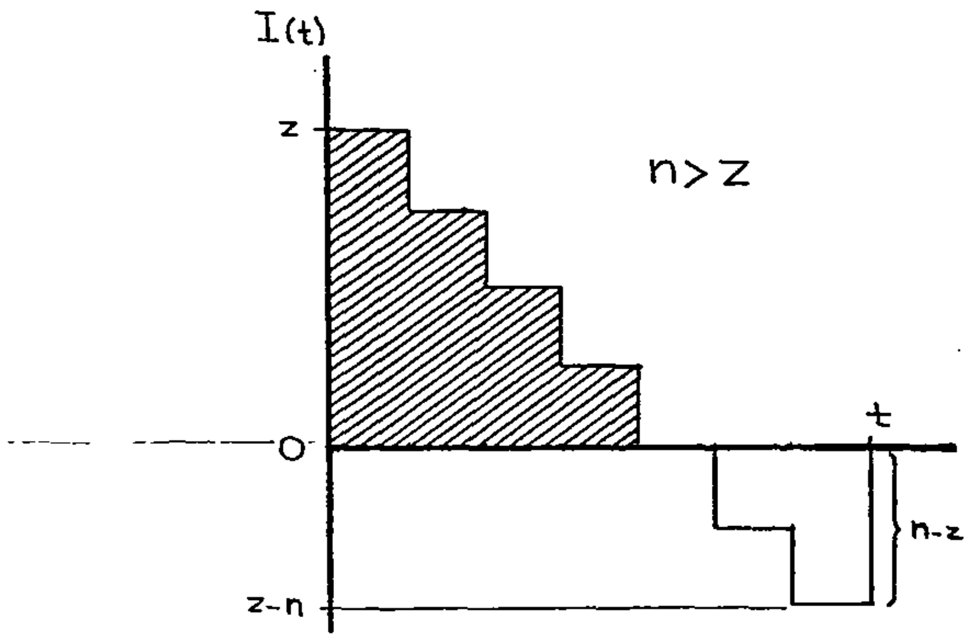
Supondremos que, si hay una demanda de n coches en un período t, la demanda se presenta en los tiempos

$$\frac{t}{n+1}\ , \ \frac{2\,t}{n+1}\ , \ \frac{3\,t}{n+1}\ , \ \ldots\ , \ \frac{n\,t}{n+1}$$

de modo que la demanda se presenta gradualmente durante cada período.

En general existen dos casos:

1.- $n > z$, y por lo tanto se produce un faltante en el inventario. La figura (3.1) muestra la situación, y el área sombreada representa el número de unidades - período.



figura(3.1)

el inventario medio ($\bar{I}$) es

$$\bar{I} = \frac{t}{n+1} \quad \frac{z(z+1)}{2}$$

y por lo tanto el costo de inventario se expresa como:

$$C_1 \frac{t\, z(z+1)}{2(n+1)}$$

cuando se presente el faltante se dejará de surtir a un cliente a un costo de

$$C_2(n-z)$$

y el costo total de este primer caso (CT_1) es de

$$\frac{C_1 t\, z(z+1)}{2(n-1)} + C_2(n-z)$$

2.- $n < z$, se satisface la demanda y la situación se describe en la figura (3.2)

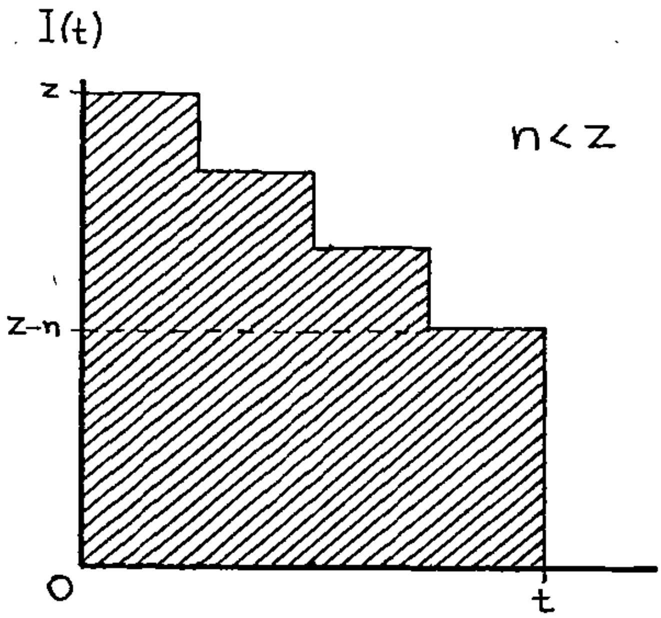


Figura (3.2)

el inventario medio ($\bar{I}$) es

$$\bar{I} = \frac{t}{n+1}\left[\frac{z(z+1)}{2} - \frac{(z-n-1)\ (z-n-1)+1}{2}\right],$$

$$\bar{I} = \frac{t}{n+1}\left[\frac{1}{2}(2z - n)(n + 1)\right],$$

$$\bar{I} = t\left[z - \frac{n}{2}\right]$$

y el costo total para este caso es

$$C_1 t\left[z - \frac{n}{2}\right]$$

El costo esperado total $F_t(z)$ por el período t, excluyendo el costo C_3 de hacer el pedido, se obtiene multiplicando el costo asociado con la demanda n por la probabilidad de n y sumando sobre el recorrido apropiado de n.

$$F_t(z)=\sum_{n=0}^{z} C_1 t\left[z-\frac{n}{2}\right]p_t(n)+\sum_{n=z+1}^{\infty}\left[\frac{C_1 t z(z+1)}{2\,(n+1)}+C_2(n-z)\right]p_t(n)$$

Para hallar el valor mínimo de $F_t(z)$, requerimos que se satisfaga la relación

$$\Delta F_t(z-1) < 0 < \Delta F_t(z)$$

donde $\Delta F_t(z)$ es la primera diferencia de la función $F_t(z)$. En nuestro caso, tenemos que este diferencia es (apendice A)

$$\Delta F_t(z)=(C_1 t+C_2)\sum_{n=0}^{z} p_t(n)+C_1 t(z+1)\sum_{n=z+1}^{\infty}\frac{p_t(n)}{n+1}-C_2$$

Ejemplo.- Una agencia de automóviles tiene la opción de hacer pedidos una vez por semana o una vez cada dos semanas. Se encuentra que el costo de mantener un automóvil en existencia por una semana es de $ 6 (seguros, deterioro menor, intereses de capital, etc). Los clientes, que no pueden obtener automóviles nuevos inmediatamente, tienden a irse a otras agencias; la empresa estima que por cada cliente que no puede obtener entrega inmediata pierde un promedio de $ 100. Para un cierto modelo de automóvil en particular, las probabilidades de una demanda de 0, 1, 2, 3, 4 y 5 coches en una semana son 0.05, 0.10, 0.20, 0.30, 0.20 y 0.15, respectivamenete. Cada vez que la agencia hace un pedido, tiene un costo de $ 40. ¿ Que tan a menudo debe ordenar automóviles, y a que nivel debe tener sus existencias ? (Suponga que no transcurre tiempo entre el pedido y la entrega de las unidades).

Suponemos primero que la agencia hace un pedido semanal, y que cada vez que lo hace lleva sus existencias al nivel z. Encontramos entonces z de manera de hacer mínimos sus costos esperados totales durante la semana. Calculos semejantes, basados en el supuesto de que se hace un pedido cada dos semanas, nos permitirán comparar los costos totales esperados por semana, de las dos políticas. Podemos de esta manera decidir cual política producirá los costos esperados más bajos.

Tenemos pues entonces que:

t = intervalo entre pedidos (1,2)

n = demanda de coches en el intervalo de tiempo t

$p_1(n)$ = densidad de probabilidad de n cuando t es 1 semana

(n = 0,1,2,3,4,5)

$p_2(n)$= densidad de probabilidad de n cuando t es 2 semanas ($n = 0,1,2,...,9,10$)

C_1= \$ 6/s-u

C_2= \$ 100/u

C_3= \$ 40

z = nivel de inventario inmediatamente despues de recibir un envio de automóviles

$F_1(z)$= costo esperado (excluyendo C_3), asociado con la política de hacer un pedido por semana para llevar el inventario al nivel z

$F_2(z)$= costo esperado (excluyendo C_3), asociado con la política de hacer un pedido cada 2 semanas para llevar el inventario al nivel z

De acuerdo al modelo, el calculo del valor óptimo de z se hará a partir de la ecuación de la primera diferencia:

$$\Delta F_t(z) = (C_1 t + C_2)\sum_{n=0}^{z} p_t(n) + C_1 t(z+1)\sum_{n=z+1}^{\infty} \frac{p_t(n)}{n+1} - C_2$$

Los valores del cálculo se encuentran en la siguiente tabla de la siguiente página.

n,z	$p_1(n)$	$\sum_{n=0}^{z} p_1(n)$	$\frac{p_1(n)}{n+1}$	$\sum_{n=z+1}^{\infty} \frac{p_1(n)}{n+1}$	$\Delta F_1(z)$
0	0.05	0.05	0.05	0.2567	-93.15
1	0.10	0.15	0.05	0.2067	-81.62
2	0.20	0.35	0.0667	0.140	-60.48
3	0.30	0.65	0.075	0.065	-29.54
4	0.20	0.85	0.04	0.025	- 9.15
5	0.15	1.00	0.025	---	+ 6.00

De acuerdo a estos cálculos, si la política es hacer pedidos cada semana, el nivel de existencias debe llevarse a cinco automóviles.

Como solo se nos dan los valores de $p_1(n)$ (la distribución de la demanda correspondiente a $t=1$), entonces como asunto preliminar tenemos que calcular $p_2(n)$ (la distribución correspondiente a $t=2$). Si es razonable suponer que las ventas en semanas consecutivas son mutuamente independientes, entonces encontramos que

$$p_2(n) = \sum_{m=0}^{n} p_1(m)\, p_1(n-m)$$

y los resultados obtenidos se muestran en la tabla de la siguiente página, donde de acuerdo a los mismos, si la política es hacer un pedido cada dos semanas, entonces el nivel de automóviles que se debe alcanzar es de ocho.

n,z	$p_2(n)$	$\sum_{n=0}^{z} p_2(n)$	$\frac{p_2(n)}{n+1}$	$\sum_{n=z+1}^{\infty} \frac{p_2(n)}{n+1}$	$\Delta F_2(z)$
0	0.0025	0.0025	0.0025	0.1592	-97.81
1	0.0100	0.0125	0.0050	0.1542	-94.90
2	0.0300	0.0425	0.0100	0.1442	-90.05
3	0.0700	0.1125	0.0175	0.1267	-81.32
4	0.1200	0.2325	0.0240	0.1027	-67.80
5	0.1750	0.4075	0.0292	0.0735	-49.07
6	0.2000	0.6075	0.0286	0.0449	-28.19
7	0.1800	0.7875	0.0225	0.0224	- 9.65
8	0.1300	0.9175	0.0144	0.0080	3.62
9	0.0600	0.9775	0.0060	0.0020	9.72
10	0.0225	1.0000	0.0020	----	12.00

Para responder a la pregunta formulada en el enunciado del problema, debemos comparar los costos semanales totales asociados con las dos políticas óptimas de pedidos. Esto se podría hacer a partir de la fórmula para $F_t(z)$, pero es probablemente más rápido calcular $F_t(0)$ y luego utilizar las primeras diferencias ya tabuladas.

$$F_1(0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_2 n p_1(n) = 295.00$$

$$F_1(5) = F_1(0) + \sum_{n=0}^{4} \Delta F_1(n)$$

$$F_1(5) = 295 - 273.94$$

$$F_1(5) = 21.06$$

Por otra parte

$$F_2(0) = \sum_{n=1}^{\infty} C\ np\ (n) = 590.00$$

$$F_2(8) = F(0) + \sum_{n=0}^{7} \Delta F_2(n)$$

$$F_2(8) = 590.00 - 518.79$$

$$F_2(8) = 71.21$$

Con una política de ordenar cada semana de manera de llevar el inventario a cinco automóviles, el costo semanario (exclusivo del de hacer el pedido) es de \$ 21.06; así, el costo total por semana asociado con hacer un pedido cada semana es \$ 21.06 + \$ 40.00, o sea \$ 61.06.

Con la política de pedir cada dos semanas, para llevar el inventario a ocho automóviles, el costo por quincena (exclusivo del costo de hacer el pedido) es \$ 71.21; el costo total por quincena (de cada dos semanas) es de \$ 111.21, o un promedio de \$ 55.60 por semana.

Hay, por lo tanto, un ahorro de \$ 5.46 que puede obtenerse si se hace el pedido cada dos semanas.

DEMANDA PROBABILISTA CON TIEMPO DE ESPERA EN PRODUCCION.- En el caso anterior se consideró que no había tiempo de espera entre el pedido y la entrega, ahora consideraremos el efecto de un tiempo de espera apreciable entre la decisión de producir (o de hacer el pedido) para acrecentar el inventario y la llegada de los productos al almacén. La diferencia fundamental entre los cálculos de estos casos es que aquí tenemos que considerar la disminución del inventario entre la fecha en la que se toma una decisión y la iniciación del período para el que se afectarán los costos debido a dicha decisión

EJEMPLO 2.- Un comerciante en solventes industriales tiene un producto que se hace especialmente para él. Hace pedidos para tener existencias cada mes y recibe las entregas un mes después. En el evento de que la capacidad de su tanque sea insuficiente para contener toda la cantidad que pidió al momento en que le surten su pedido, el saldo de la orden se desperdicia a un costo k por galón desperdiciado

La demanda de los clientes en un mes puede representarse por la función de densidad de probabilidad $p(x)$; la demanda es independiente de la demanda en cualquier otro mes. El costo de almacenar el solvente es de C_1 por galón por mes, y el costo de un déficit es de C_2 por galón por mes. Ademas, hay un costo fijo por mes de KZ, donde Z es su capacidad total de almacenamiento.

Si el criterio de decisión es mínimo costo total esperado, discuta la determinación de

a) la cantidad que debe pedirse cada mes con la capacidad actual de almacenamiento.
b) el mejor valor de la capacidad total de almacenamiento.

Supongamos que hoy es el primer día del mes y que tenemos que hacer hoy nuestro pedido, el cual llegara el próximo mes (y por lo tanto nuestra decisión no tendra efectos sino hasta el próximo mes). La información con la que contamos se resume como sigue:

a.- La cantidad que sobró a fin del mes pasado (o en su caso, la cantidad que faltó)
b.- La cantidad que se pidio el mes pasado y que llega hoy.

Ahora bién, sea

$$z = a + b + \text{La cantidad a pedir hoy}$$

Supongamos que hay una demanda y en el presente mes y una demanda x en el siguiente mes. La decisión acerca de z afectará los costos únicamente en el mes siguiente al de nuestro pedido.

El tomar la decisión sobre z es equivalente a tomar la decisión sobre la cantidad a pedir hoy, ya que los otros dos términos en la ecuación son constantes.

Consideremos ahora las siguientes posibilidades:

1) $z - y \geq Z$. En este caso se desperdiciará una cantidad $z - y - Z$ y el segundo mes se iniciará con Z en el almacén.

En el segundo mes analizamos las dos posibles situaciones a ocurrir con la demanda x

$x \leq Z$. La demanda se satisface plenamente. La figura (3.3) siguiente describe esta situación

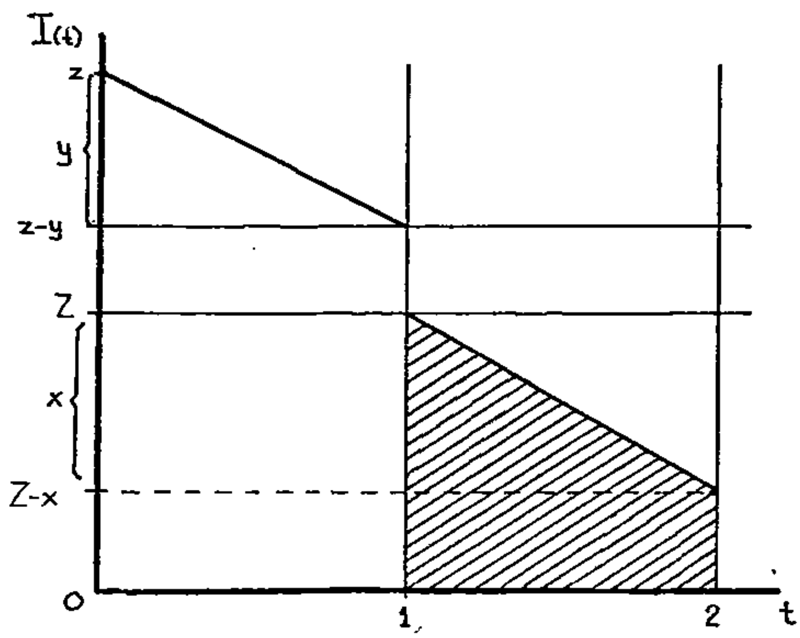


figura (3.3)

en la figura vemos que el inventario medio es:

$$\bar{I} = \frac{z + (z - x)}{2} = z - \frac{x}{2}$$

por lo tanto, los costos correspondientes a este caso son:

$$C_1\left[z - \frac{x}{2}\right] + k\,(\,z - y - z\,)$$

$x \geq Z$. En este caso se producirá un faltante en el inventario. La figura (3.4) describe la situación

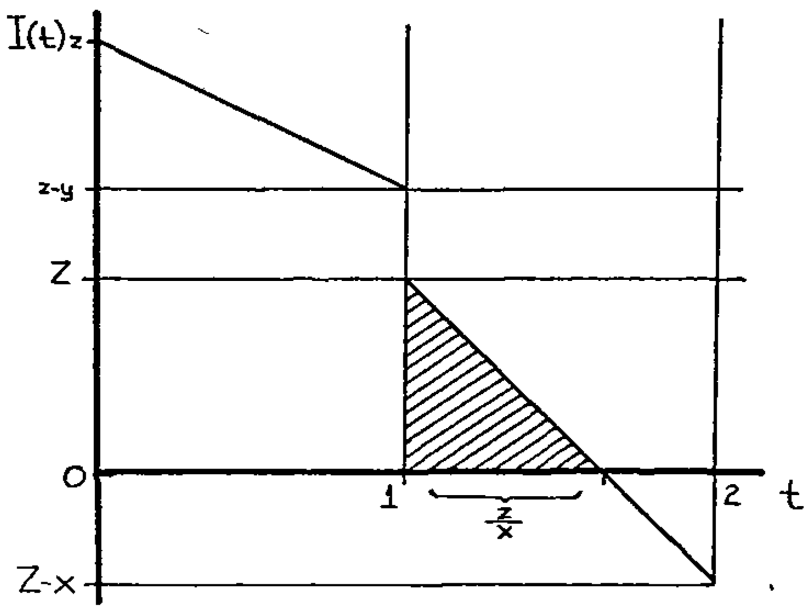


figura (3.4)

El inventario promedio es:

$$\bar{I} = \frac{1}{2} \frac{Z}{x} Z = \frac{Z^2}{2x}$$

Por otra parte el faltante promedio es:

$$\bar{B} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{Z}{x}\right](x - Z) = \frac{(x - Z)^2}{2x}$$

Tenemos que los costos de este caso son:

$$C_1 \frac{Z^2}{2x} + C_2 \frac{(x - Z)^2}{2x} + k(z - y - Z)$$

2) $0 \leq z-y \leq Z$. En este caso no habrá desperdicio y el segundo mes se iniciará con $(z - y)$ en el almacén. Aqui también se presentan dos posibles casos para la demanda x.

$x \leq z-y$. En este caso se satisface plenamente la demanda. La figura (3.5) describe este caso.

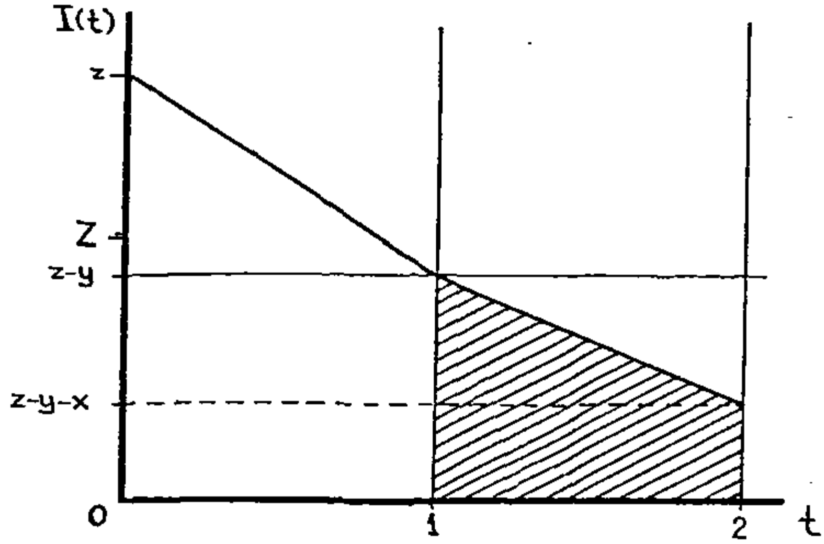


figura (3.5)

El inventario promedio es

$$\bar{I} = \frac{(z-y)+(z-y-x)}{2} = z - y - \frac{x}{2}$$

$x \geq z-y$. En este caso se presenta un faltante en el inventario. La situación se describe en la figura (3.6)

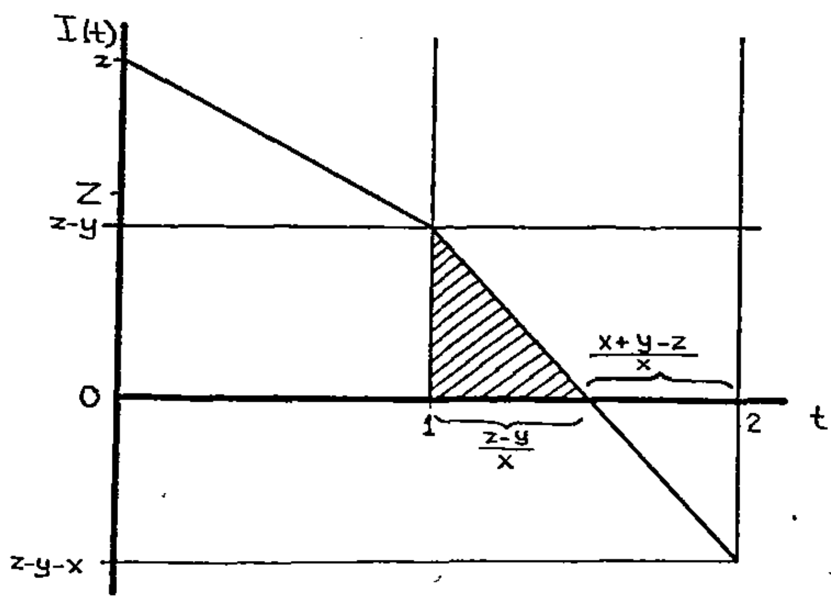


figura (3.6)

El inventario promedio es

$$\bar{I} = \frac{1}{2} \; \frac{z - y}{x} \; (z - y) = \frac{(z - y)^2}{2x}$$

Y el faltante promedio ($\bar{B}$) es

$$\bar{B} = \frac{1}{2} \; \frac{x-z+y}{x} \; (x-z+y) = \frac{(x - z - y)^2}{2\,x}$$

Los costos de este caso serań

$$C_2 \frac{(x - z - y)^2}{2\,x} + C_1 \frac{(z - y)^2}{2x}$$

3) $z - y \leq 0$. En este caso tampoco habrá desperdicio, pero el segundo mes empezará con un faltante que quedó del mes anterior. La figura (3.7) describe el caso.

El faltante promedio es

$$\bar{B} = \frac{1t}{2t}\left[(z-y) + (z-y-x)\right] = z - y - \frac{x}{2}$$

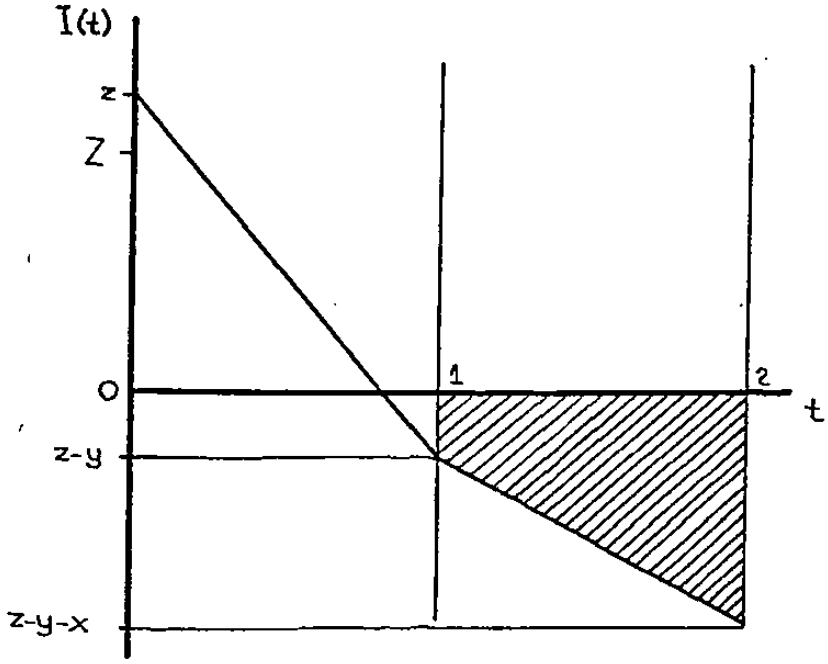


Figura (3.7)

El costo resultante de este faltante es

$$C_2\left[z - y - \frac{x}{2} \right]$$

Para obtener los costos esperados totales, multiplicamos por las funciones de densidad de probabilidad apropiadas e integramos con respecto a x e y. Tambien deberemos agregar el costo fijo de almacenaje KZ.

Se usará F(z,Z) para denotar el resultado. Para contestar la pregunta a, se deberá derivar F con respecto a z, igualar esta derivada a O y resolver para z.

$$F(z,Z)= \int_{y=0}^{z-Z}\int_{x=0}^{Z} p(x)p(y)\left[C_1\left(Z - \frac{x}{2}\right)+ k(z-y-Z)\right] dxdy \quad +$$

$$+ \int_{y=0}^{z-Z}\int_{x=Z}^{\infty} p(x)p(y)\left\{\frac{1}{2\,x}[\,C_1 Z^2 + C_2 (x-Z)^2\,] + k(z-y-Z)\right\} dxdy$$

$$+ \int_{y=z-Z}^{z}\int_{x=0}^{z-y} p(x)p(y)\left[C_1\left(z-y- \frac{x}{2}\right)\right] dxdy$$

$$+ \int_{y=z-Z}^{z}\int_{x=z-y}^{\infty} p(x)p(y)\left[\frac{1}{2\,x}[\,C_1 (z-y)^2 + C_2 (x+y-z)^2\,]\right] dxdy$$

$$+ \int_{y=z}^{\infty}\int_{x=0}^{\infty} p(x)p(y)\left[C_2\left(\frac{x}{2} + y - z\right)\right] dxdy$$

$$+ \quad KZ$$

Para contestar b, se halla la derivada parcial de F con respecto a z y despues con respecto a Z. Luego se igualan las derivadas a cero y se resuelve el sistema de ecuaciones para z y Z. El cálculo de estas derivadas es bastante complejo y no se va a intentar aquí. En el próximo capítulo encontraremos una dificultad similar y se buscará una solución mediante la simulación. Si se quiere hallar una solución aproximada para este problema, se puede seguir un procedimiento similar al utilizado en el capítulo IV.

IV

EL MODELO

PROBABILISTICO MULTIALMACEN

EL MODELO PROBABILISTICO MULTIALMACEN

En este capítulo se desarrollará un modelo de inventario de un producto en dos almacenes. Consideremos el siguiente problema: Una compañía es propietaria de dos almacenes o bodegas X e Y. Se envían embarques de la fábrica el primero de cada mes para llevar el nivel de la existencia en X hasta S_1 y en Y hasta S_2 . La demanda durante el mes es uniforme en cada almacén, con una función de densidad $f(x)$ en X y $f(y)$ en Y; x es independiente de y. El costo de mantener el inventario es de C_1 por unidad por mes, en cada uno de los almacenes. En caso de que haya un faltante en bodega, se le envía el producto desde la otra bodega hasta que, en su caso, ambas queden sin existencias. Sin embargo, cuesta una cantidad adicional k por unidad hacer un envío de X a un cliente de Y, y viceversa. El costo de faltante en X es de C_{2X}/u , y en Y es de C_{2Y}/u .

Se pide encontrar los valores de S_1 y S_2 que hagan mínimo el costo total esperado.

El costo total esperado es una función de los valores que se materializan de x y de y. Primeramente identificaremos las diferentes regiones del plano xy, las cuales en total son siete:

Región I:

$0 \le x \le S_1$ $\quad\quad$ $0 \le y \le S_2$.

Ambas bodegas satisfacen sus demandas.

Región II:

$0 \le x \le S1$ $\quad\quad$ $S_2 \le y \le S_1 + S_2 - x$.

Se presenta un faltante en X, pero es cubierto por Y.

Región III:

$0 \le y \le S_2$ $\quad\quad$ $S_1 \le x \le S_1 + S_2 - y$.

Se presenta un faltante en Y, pero es cubierto por X.

Región IV:

$0 \le x \le S_1$ $\quad\quad$ $y \ge S_1 + S_2 - x$.

Se presenta un faltante en Y que X no alcanza a cubrir.

Región V:

$0 \le y \le S_2$ $\quad\quad$ $x \ge S_1 + S_2 - y$.

Se presenta un faltante en X que Y no alcanza a cubrir.

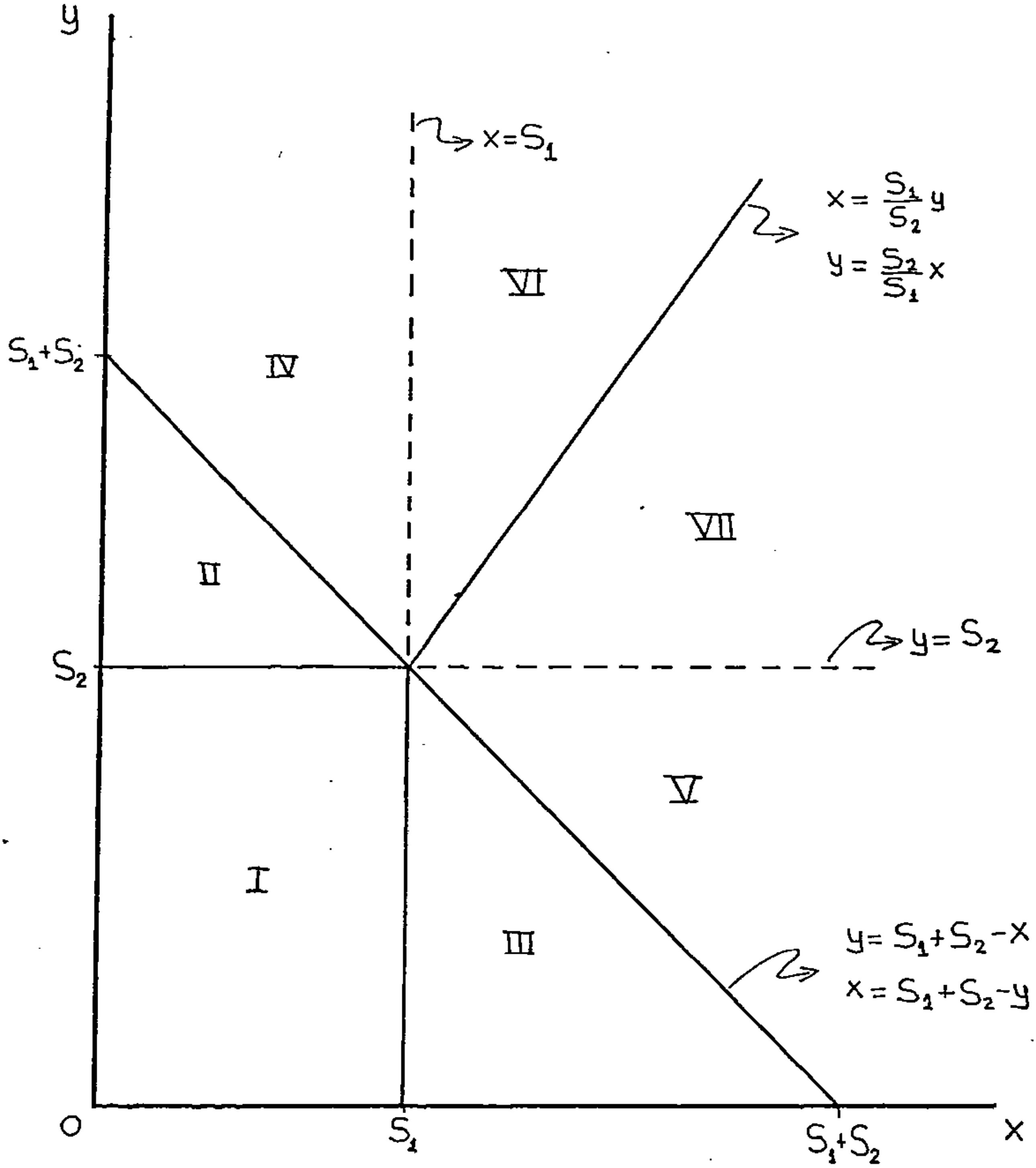


figura (4.1) Regiones del modelo.

Región VI:

$$y \geq S_2 \qquad\qquad S_1 \leq x \leq y(S_1/S_2).$$

Las demandas de cada almacén son mayores que sus existencias. El faltante se presenta primero en Y, luego en X.

Región VII:

$$x \geq S \qquad\qquad S_2 \leq y \leq x(S_2/S_1).$$

El mismo caso de la región VI. El faltante se presenta primero en X, luego en Y.

A continuación, hallaremos las funciones de costo para cada una de las regiones. De acuerdo a la situación de cada región, los componentes del costo serán diferentes; en algún caso se presentara solamente el costo de inventario, en otros se presentará también el costo de transporte y en otros se presentará incluso el costo de faltante, ya sea en el almacén X o en el almacén Y y también en los dos almacenes.

REGION I

$0 \leq x \leq S_1$ X abastece su demanda x.

$0 \leq y \leq S_2$ Y abastece su demanda y.

Este caso se describe en la gráfica (4.1). Se puede ver que el único costo que se presenta es el de inventario.

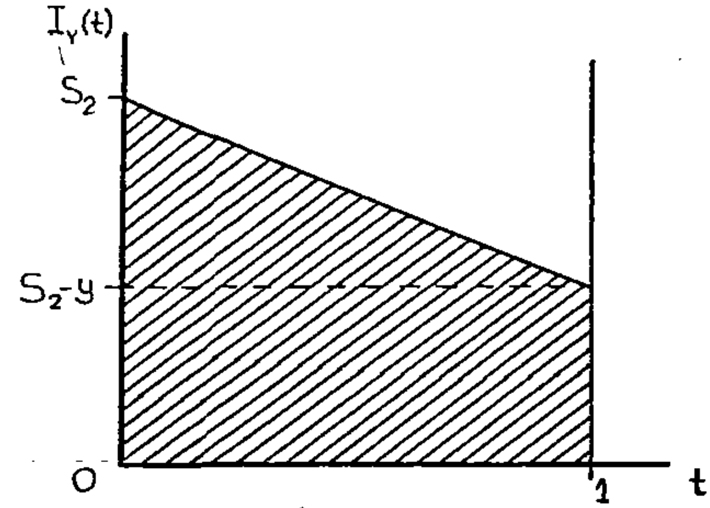


figura (4.1a) Almacen Y.

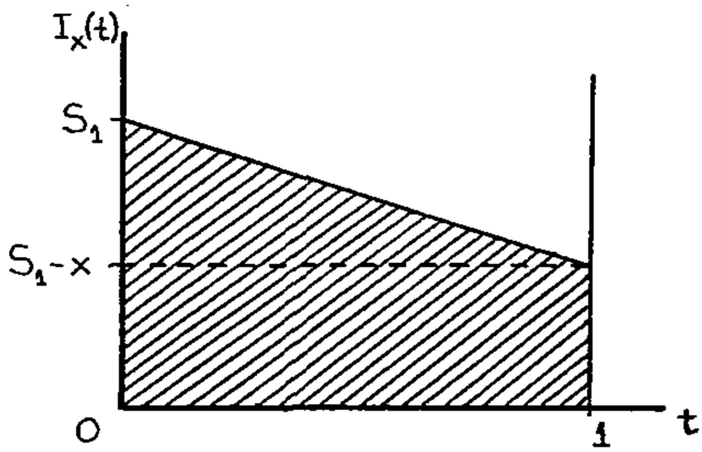


figura (4.1b) Almacen X.

El inventario medio total ($\bar{I}_{R1}$) será igual a la suma de los inventarios de cada almacen ($\bar{I}_{Y1}$ e $\bar{I}_{X1}$ respectivamente). Esta suma es posible ya que la duración de los períodos para cada uno de los casos es la misma. Hallamos pués primeramente $\bar{I}_{Y1}$

$$\bar{I}_{Y1} = \left[\frac{S_2 + (S_2 - y)}{2} \, t \right] \frac{1}{t}$$

que se reduce a

$$\bar{I}_{Y1} = \frac{2\, S_2 - y}{2} = S_2 - \frac{y}{2}$$

Similarmente para $\bar{I}_{X1}$

$$\bar{I}_{X1} = \left[\frac{S_1 + (S_1 - x)}{2} \right] t \quad \frac{1}{t}$$

que reducimos así

$$\bar{I}_{X1} = \frac{2\, S_1 - x}{2} = S_1 - \frac{x}{2}$$

y el inventario medio de la región será

$$\bar{I}_{R1} = \bar{I}_{X1} + \bar{I}_{Y1} = S_1 + S_2 - \frac{x + y}{2}$$

Así, la función de costo total de la región (CT_{R1}) será:

$$CT_{R1} = C_1 \left[S_1 + S_2 - \frac{x + y}{2} \right]$$

REGION II

$S_2 \leq y \leq S_1 + S_2 - x$ Hay faltante en Y.

$0 \leq x \leq S_1$ X cubre el faltante.

En la gráfica (4.2) se describe este caso.

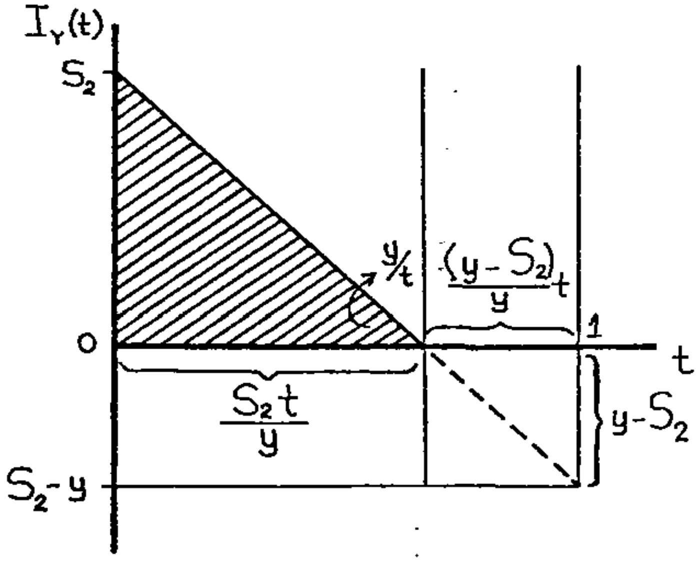


figura (4.2a) Almacén Y.

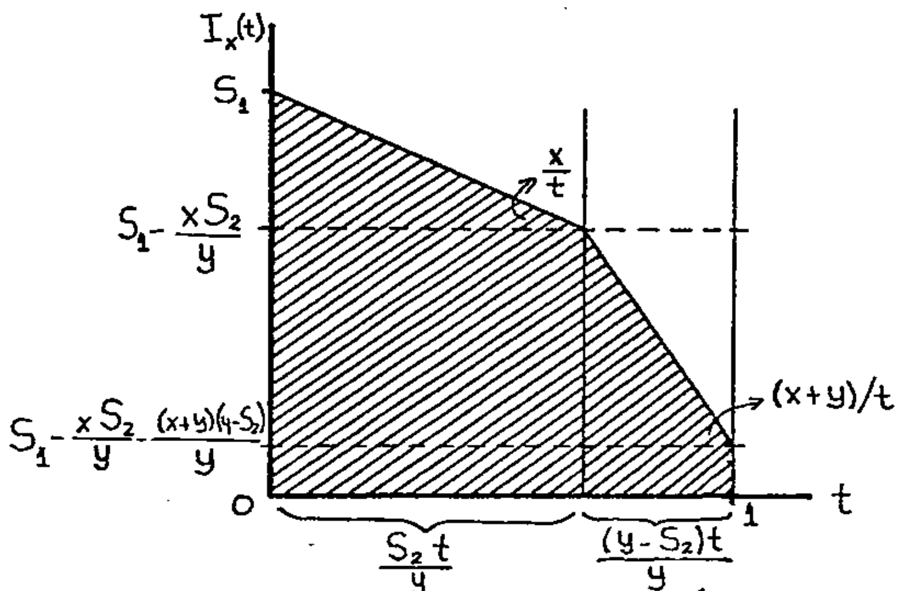


figura (4.2b) Almacén X.

Se observa que la función de costo es esta región estará compuesta por el costo de inventario más el costo de transporte por el envio de unidades de X a Y. Asimismo, el almacen Y queda sin existencias en un tiempo $S_2 t/y$, teniendo que realizar la transferencia de unidades de X a Y durante un tiempo $t(y-S_2)/y$.

En base a esta información, calculamos $\bar{I}_{Y2}$ de la siguiente manera:

$$\bar{I}_{Y2} = \left[S_2 \frac{S_2 t}{2\, y} \right] \frac{1}{t} = \frac{S_2^2}{2\, y}$$

Ahora calculamos $\bar{I}_{X2}$

$$\bar{I}_{X2} = \frac{1}{2\, t} \left[S_1 + S_1 - \frac{x\, S_2}{y} \right] \frac{S_2 t}{y} + \frac{1}{2\, t} \left[S_1 - \frac{xS_2}{y} + S_1 - \frac{xS_2}{y} - \frac{(x+y)(y-S_2)}{y} \right] \frac{(y-S_2)t}{y}$$

Haciendo operaciones obtenemos

$$\bar{I}_{X2} = \frac{S_2}{2\, y} \left[2S_2 - \frac{x\, S_2}{y} \right] + \frac{(y-S_2)}{2y} \left[2S_1 - \frac{2xS_2}{y} - \frac{(x+y)(y-S_2)}{y} \right]$$

que finalmente se reduce a

$$\bar{I}_{X2} = (2S_1 y - xy - y^2 + 2yS_2 - S_2^2)/2y$$

Ahora para obtener el inventario medio de la región sumamos

$$\bar{I}_{R2} = \bar{I}_{X2} + \bar{I}_{Y2} = (2s_1 y - xy - y^2 + 2yS_2 - S_2^2 + S_2^2)/2y$$

y simplificando

$$\bar{I}_{R2} = S_1 + S_2 - \frac{x + y}{2}$$

Ahora obtenemos la cantidad que faltó en el almacén Y $(\bar{B}_Y)$ y que causa un costo de transporte k. Fácilmente puede verse que

$$B_{R2} = y - S_2$$

Multiplicando $\bar{I}_{R2}$ y B_{R2} por sus respectivos costos, obtenemos la función de costo para la REGION II

$$C_{R2} = C_1 \left[S_1 + S_2 - \frac{x + y}{2} \right] + k\ (y - S_2)$$

REGION III

$S_1 \leq x \leq S_1 + S_2 - y$ Hay faltante en x.

$0 \leq y \leq S$ Y cubre el faltante de X.

La gráfica (4.4) describe este caso, que es similar caso anterior. En realidad se puede decir que es la inversa del caso anterior.

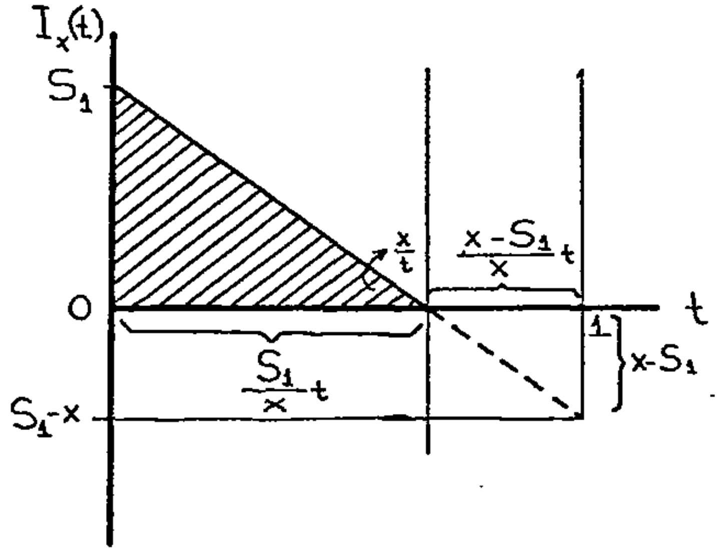


figura (4.4a) Almacén X.

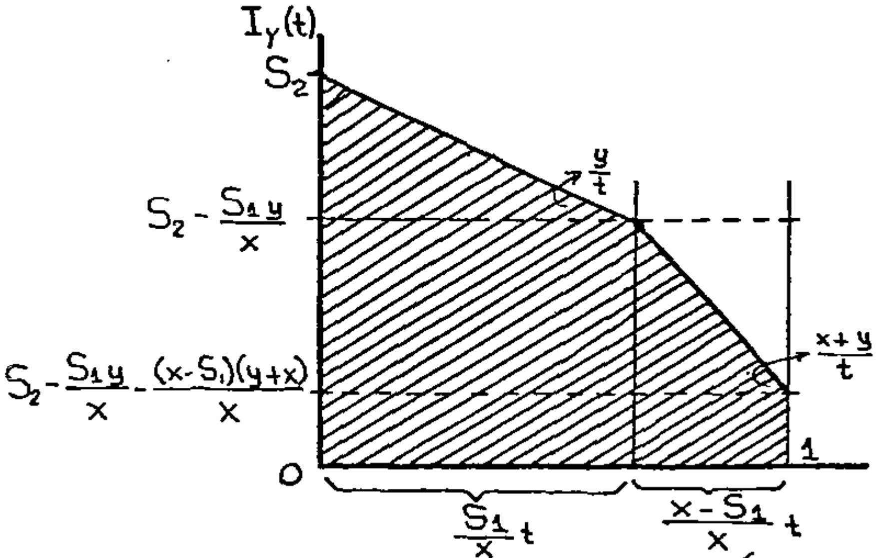


figura (4.4b) Almacén Y.

Analogamente al caso de la REGION II, la función de costo esta compuesta por el costo de inventario más el costo de transporte de unidades, en este caso de Y a X. Asimismo, el almacén X queda sin existencias en un tiempo $S_1 t/x$, teniendo que realizar la transferencia de unidades de X a Y durante un tiempo $t(x-S_1)/x$.

Asi pues, de manera similar a como procedimos en la REGION II, calculamos los inventarios medios de X y de Y.

$$\bar{I}_{X3} = \left[S_1 \frac{S_1 t}{2\,x} \right] \frac{1}{t} = \frac{S_1^2}{2\,x}$$

Ahora calculamos $\bar{I}_{Y3}$

$$\bar{I}_{Y3} = \frac{1}{2\,t} \left[S_2 + S_2 - \frac{y\,S_1}{x} \right] \frac{S_1 t}{x} + \frac{1}{2\,t} \left[S_2 - \frac{yS_1}{x} + S_2 - \frac{yS_1}{x} - \frac{(x+y)(x-S_1)}{x} \right] \frac{(x-S_1)t}{x}$$

que finalmente se reduce a

$$\bar{I}_{Y3} = (2S_1 x - xy - x^2 + 2xS_2 - S_1^2)/2x$$

Ahora para obtener el inventario medio de la región sumamos

$$\overline{I}_{R3} = \overline{I}_{X3} + \overline{I}_{Y3} = (2S_1x - xy - x^2 + 2xS_2 - S_1^2 + S_1^2)/2x$$

y simplificando

$$\overline{I}_{R3} = S_1 + S_2 - \frac{x + y}{2}$$

Nótese que esta expresión es igual a la que se obtuvo para el inventario medio de la REGION III. Ahora obtenemos la cantidad que faltó en el almacén X (B) y que causa un costo de transporte k. Se observa que

$$B_{R3} = x - S_1$$

Multiplicando $\overline{I}_{R3}$ y B_{R3} por sus respectivos costos, obtenemos la función de costo para la REGION III

$$C_{X3} = C_1 \left[S_1 + S_2 - \frac{x + y}{2} \right] + k\,(x - S_1)$$

Se observa que la función de costo de esta región se podría obtener también con solo cambiar la demanda x, por la demanda y en la función de costo obtenida para la REGION II. Podía esperarse esta "simetría", dada la forma en que se hallan distribuidas las regiones en el plano xy (figura (4.1)).

REGION IV

$y \geq S_1 + S_2 - x$	Hay faltante en X.
$0 \leq x \leq S_1$	X no alcanza a cubrir el faltante de Y.

La gráfica (4.5) describe este caso. Si X no tuviera que enviar unidades a los clientes de Y, entonces cubriria su propia demanda.

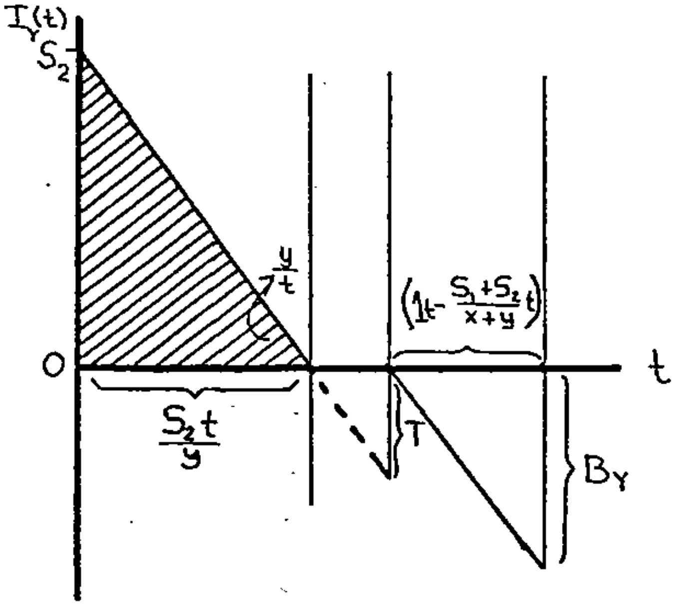


figura (4.5a) Almacén Y.

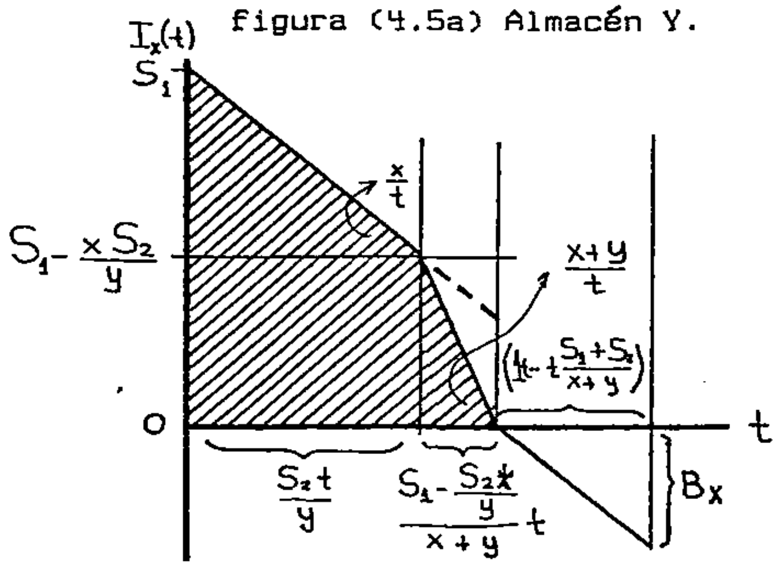


figura (4.5b) Almacén X.

Ahora se presentan tres costos: el costo de inventario, el costo de transporte y el costo de faltante. Este último costo se divide en dos, ya que se considera que la penalización por faltante puede ser diferente para cada uno de los almacenes. En la gráfica se observa que se empieza a incurrir en costo de transporte a partir de un tiempo $S_2 t/y$. Por otra parte, el lapso de tiempo en que se transfieren unidades es

$$\frac{1}{x + y} \left[S_1 - \frac{S_2 x}{y} \right] t$$

Calculamos ahora el inventario medio para el almacén Y ($\bar{I}_{Y4}$)

$$I = \left[\frac{1}{2} S_2 \frac{S_2 t}{y} \right] \frac{1}{t} = \frac{S_2^2}{2y}$$

Ahora, calculamos el inventario medio para el almacén X ($\bar{I}_{X4}$). Asi pues

$$\bar{I}_{X4} = \left[S_1 + (S_1 - xS_2/y) \right] \frac{S_2}{2y} t$$

$$+ \left[S_1 - \frac{xS_2}{y} \right] \frac{1}{x+y} \left[S_1 - \frac{S_2 x}{y} \right] \frac{1}{2} \quad \frac{1}{t}$$

que se reduce a

$$\overline{I}_{X4} = \left[2S_1 - \frac{xS_2}{y} \right] \frac{S_2}{2\,y} + \frac{1}{2} \left[\frac{S_1 y - S_2 x}{y} \right] \left[\frac{S_1 y - S_2 x}{y\,(x+y)} \right]$$

para asi obtener

$$\overline{I}_{X4} = \frac{2\,S_1 S_2 y^2 - xyS_2^2 + S_1^2 y^2}{2\,y\,(x+y)}$$

Finalmente, para obtener $\overline{I}_{R4}$ sumamos resultados parciales

$$\overline{I}_{R4} = \overline{I}_{X4} + \overline{I}_{Y4} = \frac{y(x+y)S_2^2 + 2S_1 S_2 y^2 - yxS_2^2 + S_1^2 y^2}{2y^2 (x+y)}$$

que se reduce a

$$\overline{I}_{R4} = \frac{(S_1 + S_2)^2}{2\,(x + y)}$$

Ahora hallamos la cantidad transportada del almacén X al almacen Y. Denotamos esta cantidad como T_4.

$$T_4 = \frac{t}{x + y} \left[S_1 - \frac{S_2 x}{y} \right] \frac{y}{t}$$

haciendo las operaciones obtenemos

$$T_4 = \frac{S_1 y - S_2 x}{x + y}$$

Obtenemos ahora el faltante que se presenta en Y (B_4). Dado que el tiempo durante el cual se presenta el faltante es

$$\left[1 - \frac{S_1 + S_2}{x + y} \right] t$$

por tanto, obtenemos

$$B_{Y4} = y - \frac{y(S_1 + S_2)}{x + y}$$

similarmente para el almacen X

$$B_{X4} = x - \frac{x(S_1 + S_2)}{x + y}$$

Ahora, para obtener la función de costo de esta región multiplicamos por su respectivo costo el inventario medio, la cantidad de unidades transferidas de X a Y y los faltantes tanto en el almacén X, como en el almacén Y. De esta manera obtenemos

$$CT_{R4} = C_1 \frac{(S_1 + S_2)}{2\ (x+y)} + k\ \frac{(S_1 y - S_2 x)}{x + y} + C_{2X} \left[x - \frac{x(S_1 + S_2)}{x + y} \right]$$

$$+ C_{2Y} \left[y - \frac{y(S_1 + S_2)}{x + y} \right]$$

REGIÒN V

$0 \leq y \leq S_2$ Y no alcanza a cubrir el faltante de X.

$x \geq S_1 + S_2 - y$ Hay faltante en Y.

La gráfica (4.6) describe este caso. Si X no tuviera que enviar unidades a los clientes de Y, entonces cubriria su propia demanda.

Ahora tambien se presentan tres costos: el costo de inventario, el costo de transporte y el costo de faltante. Ahora, para este caso, el lapso de tiempo en que se transfieren unidades es

$$\frac{1}{x + y} \left[S_2 - \frac{S_1 y}{x} \right] t$$

Procedemos a calcular ahora el inventario medio, la cantidad transferida y los faltantes de cada almacén. En la gráfica (4.6) se proporcionan los tiempos correspondientes a cada caso.

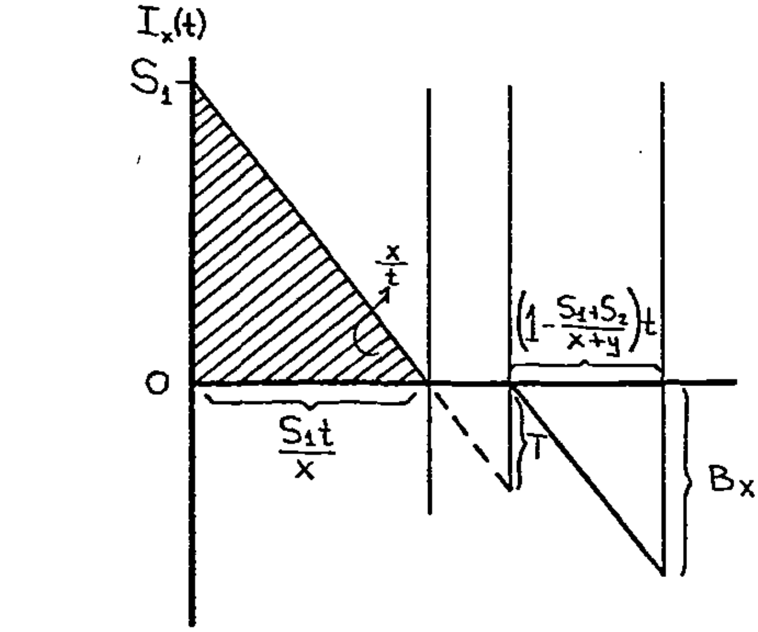


figura (4.6a) Almacen X.

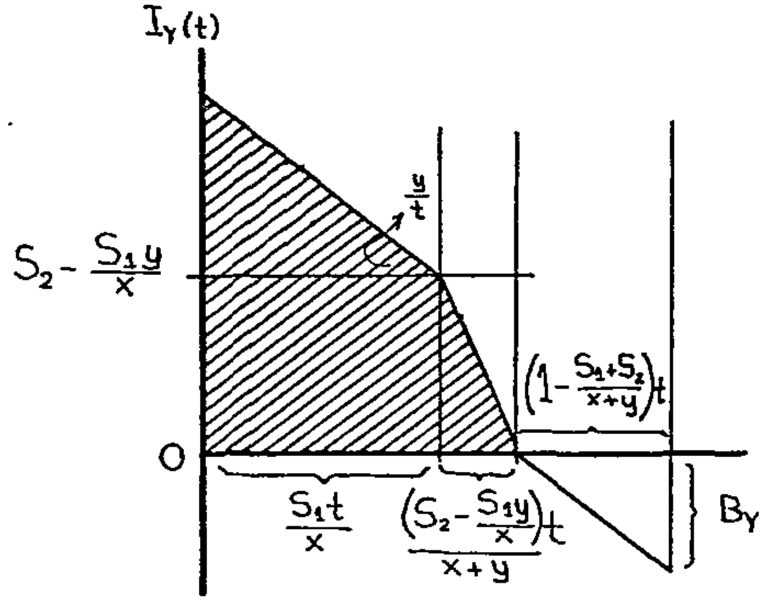


figura (4.6b) Almacen X.

Calculamos el inventario medio para el almacen X ($\bar{I}_{X5}$)

$$\bar{I}_{X5} = \frac{1}{2}\left[S_1 \; \frac{S_1 t}{x}\right] \frac{1}{t} = \frac{S_1^2}{2\,x}$$

En seguida calculamos el inventario medio para el almacén Y ($\bar{I}_{Y5}$). Asi pues

$$\bar{I}_{Y5} = \left\{ \left[S_2 + (S_2 - yS_1/x)\right] \frac{S_1}{2\,x}\, t + \left[S_2 - \frac{yS_1}{x}\right] \frac{1}{x+y} \left[S_2 - \frac{S_1 y}{x}\right] \frac{t}{2} \right\} \frac{1}{t}$$

que se reduce a

$$\bar{I}_{Y5} = \left[2S_2 - \frac{yS_1}{x} \quad \frac{S_1}{2\,x}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{S_2 x - S_1 y}{x}\right]\left[\frac{S_2 x - S_1 y}{x\,(x+y)}\right]$$

para así llegar a

$$\bar{I}_{Y5} = \frac{2\,S_1 S_2 x^2 - xyS_1^2 + S_2^2 x^2}{2\,x^2 (x+y)}$$

Finalmente, para obtener $\bar{I}_{R5}$ sumamos resultados parciales

$$\bar{I}_{R5} = \bar{I}_{X5} + \bar{I}_{Y5} = \frac{x(x+y)S_1^2 + 2S_1S_2x^2 - yxS_1^2 + S_2^2x^2}{2x\,(x+y)}$$

que se reduce a

$$\bar{I}_{R5} = \frac{(S_1 + S_2)^2}{2\,(x + y)}$$

Ahora hallamos la cantidad transportada del almacén X al almacen Y. Denotamos esta cantidad como T_5.

$$T_5 = \frac{t}{x + y}\left[S_2 - \frac{S_1 y}{x}\right]\frac{x}{t}$$

que reducimos a

$$T_5 = \frac{S_2 x - S_1 y}{x + y}$$

Obtenemos ahora el faltante que se presenta en X (B_{5X}). Dado que el tiempo durante el cual se presenta el faltante es

$$\left[1 - \frac{S_1 + S_2}{x + y}\right] t$$

por tanto, obtenemos

$$B_{5X} = x - \frac{x(S_1 + S_2)}{x + y}$$

similarmente para el almacén y

$$B_{5Y} = y - \frac{y(S_1 + S_2)}{x + y}$$

Ahora, para obtener la función de costo de esta región, multiplicamos por su respectivo costo el inventario medio, la cantidad de unidades transferidas de X a Y y los faltantes tanto en el almacén X, como en el almacén Y. De esta manera obtenemos

$$CT_{R5} = C_1 \frac{(S_1 + S_2)^2}{2\,(x+y)} + k\,\frac{(S_2 x - S_1 y)}{x + y} + C_{2X}\left[x - \frac{x(S_1 + S_2)}{x + y}\right]$$

$$+ C_{2Y}\left[y - \frac{y(S_1 + S_2)}{x + y}\right]$$

Expresión que difiere de la obtenida para la REGION IV solo en la componente del costo de transporte. Nuevamente se presenta la "simetría" a la que se aludió en el desarrollo de la función de costo de la región III.

REGION VI

$y \geq S_2$	Hay faltante en Y.
$S_1 \leq x \leq yS_1/S_2$	X no alcanza a cubrir el faltante de Y.

La gráfica (4.7) describe este caso.

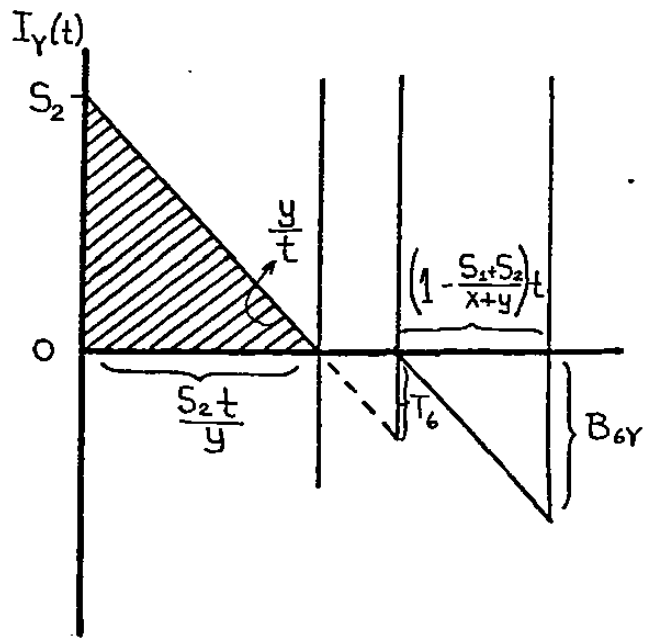


figura (4.7a) Almacén Y.

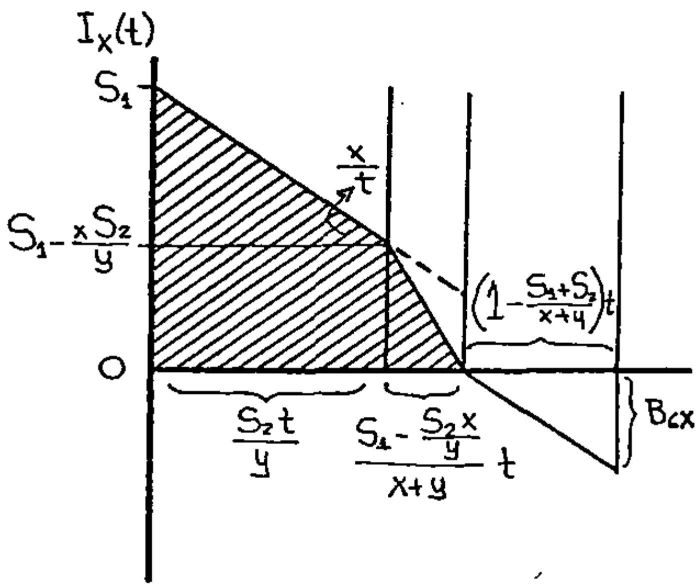


figura (4.7b) Almacén X.

Se observa en la gráfica (4.7), que es prácticamente el mismo caso de la REGION IV, con la sola variacion de que si X no tuviera que enviar unidades a los clientes de Y, de todos modos incurriría en faltante. De cualquier manera, la forma de la función de costo es la misma.

REGION VII

$x \geq S_1$	Hay faltante en X.
$S_2 \leq y \leq xS_2/S_1$	Y no alcanza a cubrir el faltante de X.

En la gráfica (4.8) se muestra este caso, que es similar al de la REGION V. Si Y no tuviera que cubrir los faltantes de X, de todos modos también incurriría en faltante. Esto último es evidente por la pendiente de la curva de demanda de X. La forma de la función de costo es igual a la de la región V.

Con este último caso, terminamos de hallar las funciones de costo de las siete regiones en que se dividió el plano xy. A continuación, para obtener el costo esperado total (denotado como $F(S_1,S_2)$, multiplicamos los costos de cada región (CT_i) por las funciones de densidad de probabilidad correspondientes e integramos con respecto a x e y. Los límites de integración se obtendrán de la gráfica (4.1). Ahora se puede observar que la REGION IV y la REGION VI corresponden en realidad al mismo caso, y que la división se hizo por la necesidad de simplificar los límites de integración. El caso de la REGION V y la REGION VII es similar.

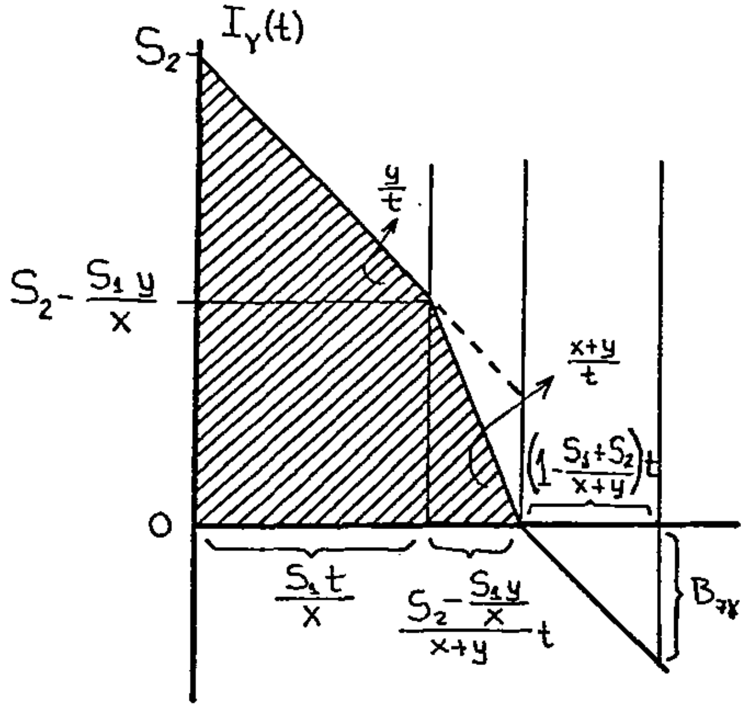


figura (4.8a) Almacén Y.

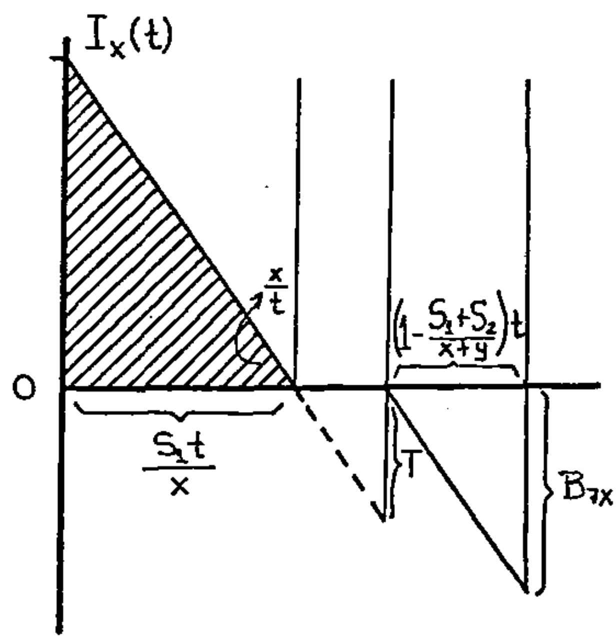


figura (4.8b) Almacén X.

$$
\begin{aligned}
F(S\ ,S\ ) = & \int_{y=0}^{S_2}\int_{x=0}^{S_1} C_1\left[S_1 + S_2 - \frac{x+y}{2}\right] f(x)g(y)dxdy \\
& + \int_{x=0}^{S_1}\int_{y=S_2}^{S_1+S_2-x} \left\{ C_1\left[S_1 + S_2 - \frac{x+y}{2}\right] + k(y - S_2) \right\} f(x)g(y)dydx \\
& + \int_{y=0}^{S_2}\int_{x=S_1}^{S_1+S_2-y} \left\{ C_1\left[S_1 + S_2 - \frac{x+y}{2}\right] + k(x - S_1) \right\} f(x)g(y)dxdy \\
& + \int_{x=0}^{S_1}\int_{y=S_1+S_2-x}^{\infty} \left\{ C_1\frac{(S_1+S_2)^2}{2\ (x+y)} + k\,\frac{(S_1 y - S_2 x)}{x+y} + C_{2X}\left[x - \frac{x(S_1+S_2)}{x+y}\right] \right. \\
& \qquad \left. + \ C_{2Y}\left[y - \frac{y(S_1+S_2)}{x+y}\right] \right\} f(x)g(y)dydx \\
& + \int_{y=0}^{S_2}\int_{x=S_1+S_2-y}^{\infty} \left\{ C_1\frac{(S_1+S_2)}{2\ (x+y)} + k\,\frac{(S_2 x - S_1 y)}{x+y} + C_{2X}\left[x - \frac{x(S_1+S_2)}{x+y}\right] \right. \\
& \qquad \left. + \ C_{2Y}\left[y - \frac{y(S_1+S_2)}{x+y}\right] \right\} f(x)g(y)dxdy \\
& + \int_{y=S_2}^{\infty}\int_{x=S_1}^{\frac{S_1}{S_2}y} \left\{ C_1\frac{(S_1+S_2)}{2\ (x+y)} + k\,\frac{(S_2 y - S_1 x)}{x+y} + C_{2X}\left[x - \frac{x(S_1+S_2)}{x+y}\right] \right. \\
& \qquad \left. + \ C_{2Y}\left[y - \frac{y(S_1+S_2)}{x+y}\right] \right\} f(x)g(y)dxdy \\
& + \int_{x=S_1}^{\infty}\int_{y=S_2}^{\frac{S_2}{S_1}x} \left\{ C_1\frac{(S_1+S_2)}{2\ (x+y)} + k\,\frac{(S_2 x - S_1 y)}{x+y} + C_{2X}\left[x - \frac{x(S_1+S_2)}{x+y}\right] \right. \\
& \qquad \left. + \ C_{2Y}\left[y - \frac{y(S_1+S_2)}{x+y}\right] \right\} f(x)g(y)dydx
\end{aligned}
$$

Para minimizar el valor de $F(S_1,S_2)$ y hallar los valores óptimos de S_1 y S_2, requerimos hallar las derivadas de F con respecto a S_1 y S_2. Luego se igualan las dos derivadas a cero y obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incognitas. El sistema en cuestión es

$$\frac{\partial F}{\partial S_1} = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial S_2} = 0$$

y la solución del mismo nos dará los valores de S_1 y S_2 que minimizan el costo esperado $F(S_1,S_2)$.

Aunque el procedimiento a seguir es aparentemente simple, no es tan fácil llevarlo a la práctica. Esto debido principalmente a la dificultad inherente al proceso de derivación de funciones que incluyen integrales dobles y por otra a que si las funciones de densidad corresponden a funciones no integrables (por ejemplo, la Normal), tambien aparecerian en el sistema de ecuaciones y tendríamos que recurrir a soluciones de análisis numérico.

Otra alternativa, es la de simular el proceso. Como ya se tienen identificadas las regiones del plano xy, y ademas se conoce la forma de la función de costo de cada una de las regiones, entonces el proceso a seguir sería el siguiente:

Paso I.- establecer todas las condiciones iniciales, constantes, y los parámetros de las funciones de probabilidad.

Paso II.- se genera la demanda x y la demanda y.

Paso III.- se identifica la región a la que corresponde esta demanda generada.

Paso IV.- se calcula el costo segun la región, y se va acumulando.

Paso V.- si el número de iteraciones indicado ya se ha alcanzado, entonces se sigue al paso V. En caso contrario se regresa al paso II.

Paso VI.- se calcula el costo promedio, dividiendo el costo acumulado entre el número de iteraciones totales.

Como ejemplo, consideremos el caso en que la demanda del almacén X sigue una distribución normal con μ = 100 unidades y σ = 20 unidades; la distribución del almacén Y será exponencial con λ = 90.

Los demas costos son:

costo C_1 de mantener inventario = 20 \$/unidad mes

costo k de transferir unidades = 12 \$/unidad

costo C_{2X} de faltante en X = 37 \$/unidad

costo C_{2Y} de faltante en Y = 30 \$/unidad

A continuación se da el listado del programa utilizado para simular el proceso. Se formará un plano $S_1 S_2$ con S_1 variando de 60 a 140 unidades. La variación de S_2 será de 50 a 130 unidades. En cada caso la el incremento de un valor a otro de S_1 y S_2 será de 10 unidades.

DEFINICION DE VARIABLES Y CONSTANTES UTILIZADAS EN EL PROGRAMA

MU = media de la demanda de X (exponencial)
SG = desviación estándar de la demanda X
S1 = capacidad del almacén S_1
A1 = valor mínimo de S_1
B1 = valor máximo de S_1
P1 = paso de variacion de S_1
LD = media de la demanda de Y (exponencial)
S2 = capacidad del almacén S_2
SC = suma acumulada de costos
A2 = valor mínimo de S_2
B2 = valor máximo de S_2
P2 = paso de variación de S_2
CX2 = costo de faltante unitario en X

CY2 = costo de faltante unitario en Y
K = costo de tranporte unitario
C1 = costo de inventario por unidad por mes
NI = número de iteraciones totales
R = variable aleatoria rectangular
VA = variable aleatoria normal y rectangular
X = variable aleatoria normal (demanda x)
Y = variable aleatoria rectangular(demanda y)
SUM = acumulador parcial de sumas

En la subrutina 150 se inicializan las constantes, y en la linea 50 se inicia propiamente la ejecución del programa.

```
2 GOSUB 150:GOTO50
```

De la linea 20 a la 36 se encuentra la subrutina de generación de la variable aleatoria normal (demanda x). El metodo utilizado para generar esta variable se basa en el teorema del límite central.

```
20 SUM=0
24 FOR I=1TO12
26 R=RND(1)
28 SUM=SUM+R
30 NEXT I
32 IF ABS(SG*(SUM-6))>MU THEN GOTO 24
34 VA=MU+SG*(SUM-6):X=VA
36 RETURN
```

De la linea 40 a la 46 se encuentra el procedimiento de generación de la variable aleatoria exponencial. El método utilizado es el de la inversa de la función.

```
40 R=RND(1)
44 VA=-LOG(R)*LD:Y=VA
46 RETURN
```

De la linea 50 a la 112 se encuentra la parte del programa que realiza la simulación. Para cada par ordenado del plano S_1S_2 el proceso se repite NI veces. En las lineas 50 y 54 se fijan los los valores de S_1 y S_2, creando de esta manera un par ordenado.

```
50 FOR S1=A1 TO B1 STEP P1
54 FOR S2=A2 TO B2 STEP P2
```

En la linea 56 se inician las NI iteraciones para el par ordenado establecido en el paso anterior. En la linea 58 se genera la demanda x y en la linea 60 la demanda y.

```
56 FOR IT=1 TO NI
58 GOSUB 20
```

```
60 GOSUB 40
```

Aquí inicia el proceso de identificación de la región a la cual pertenece la demanda generada. Si la demanda x es mayor que S_1, entonces este caso corresponde a las regiones III, V, VI o VII. Si la condición no se cumple, entonces el caso corresponde a las regiones I, II o IV

```
62 IF X>S1 THEN GOTO 80
```

Si se cumple la condición, la demanda y es mayor a la capacidad del almacen S_2, entonces el caso corresponde a las regiones II o IV. En caso contrario el caso pertenece a la región IV y en la linea 66 se calcula el costo correspondiente.

```
64 IF Y>S2 THEN GOTO 68
66 SC=SC+C1*(S1+S2-.5*(X+Y)):GOTO 96
```

Si se cumple la condición de la linea 68 el caso corresponde a la región IV y su costo se calcula en la linea 72 a 76. En caso contrario corresponde a la región II y su costo se calcula en la linea 70.

```
68 IF Y=>S1+S2-X GOTO 72
70 SC=SC+C1*(S1+S2-.5*(X+Y))+K*(Y-S2): GOTO 96
72 K1=.5*C1*(S1+S2)^2/(X+Y)+K*(S1*Y-S2*X)/(X+Y)
74 K2=CX2*(X-X*(S1+S2)/(X+Y))+CY2*(Y-Y*(S1+S2)/(X+Y))
76 SC=SC+K1+K2: GOTO 96
```

Si se cumple la condición de la linea 80, entonces el caso corresponde a las regiones V, VI o VII. En caso contrario, pertenece a la región III y su costo se calcula en la linea 82.

```
80 IF Y =>S1+S2-X THEN GOTO 84
82 SC=SC+C1*(S1+S2-.5*(X+Y))+K*(X-S1): GOTO 96
```

Si se cumple la condición de la linea 84, entonces, el caso corresponde a las regiones VI o VII. En caso contrario, el caso pertenece a la región V y su costo se calcula en las lineas 86 a 90.

```
84 IF Y>S2 THEN GOTO 92
86 K1=.5*C1*(S1+S2)^2/(X+Y)+K*(S2*X-S1*Y)/(X+Y)
88 K2=CX2*(X-X*(S1+S2)/(X+Y))+CY2*(Y-Y*(S1+S2)/(X+Y))
90 SC=SC+K1+K2: GOTO 96
```

Si se cumple la condición de la linea 92, entonces el caso corresponde a la región VII y su costo se calcula en las lineas 86 a 90. En caso contrario, el caso corresponde a la región VI y su costo se calcula en las lineas 72 a 76.

```
92 IF Y < X*S2/S1 THEN GOTO 86
```

```
94 GOTO 72
```

Si no se han concluido todas las iteraciones, entonces se continua el proceso en la linea 50. De otra forma se despliegan el resultado en las linea 106. En la linea 102 y 104 se despliega el par ordenado correspondiente.

```
96 NEXT IT
102 PRINT"S1="S1" UNIDADES"
104 PRINT"S2="S2" UNIDADES"
106 PRINT"EL COSTO PROMEDIO ES ="SC/NI" $":SC=0
```

En las lineas 108 y 112 se continua fijando nuevos pares ordenados. Si ya se ha procesado el último par ordenado, entonces se termina la ejecución del programa en la linea 114.

```
108 NEXTS2
112 NEXT S1
114 END
```

En las lineas 150 a 156 esta la subrutina en la que se establecen las constantes. En la linea 150 se establece una semilla del generador de números aleatorios (funcion RND) con el reloj interno de la computadora (TI).

```
150 R=RND(-TI)
152 MU=100 :SG=20  :LD=90 :A1=60   :B1=140:P1=10  :SC=0
154 A2=50:B2=130:P2=10:CX2=37:CY2=30:K=12:C1=20:NI=2000
156 RETURN
```

La primera corrida se hizo fijando los siguientes valores: A1=60, B1=140, P1=10, A2=50, B2=130, P2=10, NI=2000. Los resultados de muestran en la tabla (4.1).

El análisis de los resultados muestra que el menor costo corresponde al caso en el cual $S_1 = 90$ y $S_2 = 80$. A su alrededor se encuentran costos algo mayores pero en general se observa que los costos más bajos se obtienen cuando S_1 varia de 80 a 100 unidades y S_2 de 70 a 90 unidades. Se puede hacer una afinación del resultado reduciendo el paso de variacion de S_1 y S_2, obteniendo de esta manera valores más aproximados a los ideales.

S_2 \ S_1	60	70	80	90	100	110	120	130	140
50	3593	3476	3349	3252	3228	3246	3271	3322	3381
60	3504	3371	3262	3232	3202	3218	3253	3308	3403
70	3396	3295	3236	3204	3191	3197	3261	3334	3444
80	3362	3279	3220	3167	3174	3215	3292	3414	3525
90	3340	3263	3201	3197	3214	3283	3372	3487	3600
100	3319	3255	3223	3230	3275	3359	3447	3544	3686
110	3324	3296	3295	3312	3355	3415	3524	3655	3796
120	3397	3363	3364	3379	3426	3526	3634	3771	3925
130	3463	3435	3431	3465	3526	3618	3754	3904	4045

tabla (4.1) Resultados de la primera corrida.

S_2 \ S_1	80	85	90	95	100
70	3236	3271	3285	3307	3249
75	3216	3222	3236	3246	3278
80	3273	3213	3232	3254	3401
85	3296	3265	3243	3284	3305
90	3282	3338	3291	3324	3342

tabla (4.2) Resultados de la segunda corrida

En la tabla (4.2) se muestran los resultados de la segunda corrida en la cual se utilizaron los siguientes valores: A1=80, B1=100, P1=5, A2=70, B2=75, P2=5, NI=3000. Como se puede ver, ahora los valores optimos son $S_1 = 85$ unidades y $S_2 = 80$ unidades. El costo asociado es $F(S_1,S_2) =$ \$ 3213.

En esta segunda corrida se hicieron 3000 iteraciones para cada par ordenado (S_1,S_2). En todo caso se podría reducir aun más los pasos P1 y P2 al mismo tiempo que se incrementa el número de iteraciones para de esta forma obtener una mejor aproximación. En todo caso, el resultado que se obtenga siempre será una aproximación y su refinamiento dependera de los recursos con que se cuenten, asi como de la variacion que se presente en cuanto al costo. En ocasiones el costo no sera muy sensible a las variaciones de S_1 y S_2 y por lo tanto no se justificará el seguir refinando la aproximación.

V

ENFOQUE DE

PROGRAMACION DINAMICA

ENFOQUE DE PROGRAMACION DINAMICA

La programación dinámica es una técnica matemática que es de utilidad en muchos tipos de problemas de decisión. En muchas de las situaciones en que se tiene que tomar una serie de decisiones consecutivas, se puede llegar a la política óptima general considerando los efectos de cada decision por separado. En el area de inventario, por ejemplo, hay algunas situaciones en donde la política de producción que optimiza el costo de inventario en un mes dado, minimiza el costo de inventario para todo el año. En muchos otros problemas, sin embargo, no es evidente en modo alguno que el beneficio general que se obtiene de un procedimiento de optimización sobre cada periodo individual sea el mejor que se puede alcanzar. Pudiera ser, por ejemplo, que un poco de sacrificio en el beneficio obtenido en Enero nos coloque en una posición mucho más fuerte con respecto a Febrero, y asi sucesivamente. La programación dinámica nos da metodos para investigar estas posibilidades.

Contrastando con la programación lineal, no existe un planteamiento estandar "del" problema de programación dinámica.

Más bién la programación dinámica es un tipo general de enfoque para resolver problemas y las ecuaciones particulares usadas deben desarrollarse para que se ajusten a cada situación individual.

Los elementos básicos que caracterizan a los problemas de programación dinámica son los siguientes:

1.- El problema puede dividirse en etapas, con una decisión de la política requerida en cada una de las etapas.

2.- Cada etapa tiene un cierto número de estados asociados a ella. En general, los estados son las diversas condiciones posibles en las que el sistema podría estar en esa etapa del problema. El número de etapas puede ser finito o infinito.

3.- El efecto de la decisión una política en cada etapa es transformar el estado actual en un estado asociado con la etapa siguiente (posiblemente de acuerdo con una distribución de probabilidad).

4.- Dado el estado actual, una política óptima para las etapas restantes es independiente de la política adoptada en las etapas previas. Para los problemas de programación dinámica en general, el conocimiento del estado actual del sistema comunica toda la información acerca de su comportamiento previo, necesaria para determinar la política óptima a de allí en adelante. A veces se menciona esta propiedad como el principio de optimidad.

5.- El procedimiento de resolución empieza por hallar la política óptima para cada estado de la última etapa. Comunmente, la resolución de este problema de una etapa es trivial.

6.- Se dispone de una relación recursiva que identifica la política óptima para cada estado en la etapa n, dada la política óptima para cada estado en la etapa (n+1).

7.- Usando esta relación recursiva, el procedimiento de resolución se mueve hacia atras, etapa por etapa - hallando en cada ocasión la política óptima para cada estado de esa etapa - hasta que encuentra la política óptima cuando se parte de la etapa inicial.

Usualmente se habla de programación dinámica determinística y programación dinámica probabilística. La primera se caracteriza porque contempla problemas determinísticos, en los que el estado en la etapa siguiente queda completamente determinado por el estado y la decisión de la política en la etapa actual. Debido a que consideramos en el presente trabajo problemas de inventario probabilísticos, nos interesaremos principalmente en la programación dinámica probabilística.

La programación dinámica probabilística difiere de la programación dinámica determinística en que el estado en la etapa siguiente no queda completamente determinado por el estado y la decisión de la política en el estado actual. En lugar de ello, existe una distribución de probabilidad para lo que será el estado siguiente. Sin embargo, esta distribución de probabilidad todavia está completamente determinada por el estado y la decisión de la política en el estado actual.

En la figura (5.1) se describe diagramáticamente la estructura básica que resulta para la programación dinámica probabilística, en donde n denota el numero de estados posibles en la etapa N+1 ; $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ es la distribución de probabilidad de lo que sera el estado, dados el estado s y la decisión x_N en la etapa N; y C_i es la contribución resultante a la función objetivo, de la etapa N, si el estado resulta ser el estado i.

Como consecuencia de la estructura probabilista , la relación entre $K_N(s_N, x_N)$ y la $K^*_{N+1}(S_{N+1})$ necesariamente es algo más complicada que para la programación dinámica determinística. La forma precisa de esta relación dependerá de la forma de la función objetivo global. Como ilustración, supongase que el objetivo es minimizar la suma esperada de las contribuciones de las etapas individuales. En esta caso, $K_N(s_N, x_N)$ representaría la suma mínima esperada de la etapa N en adelante, dado que el estado y la decisión de la política en la etapa N son s_N y x_N respectivamente. Como consecuencia, obtendríamos

$$K_N(s_N, x_N) = \quad p_i \ C_i + K^*_{N+1}(i) ,$$

con

$$K^*_{N+1}(s_{N+1}) = \min_{x_{N+1}} K_{N+1}(s_{N+1}, x_{N+1}),$$

donde esta minimización se toma sobre los valores factibles de x_{N+1}.

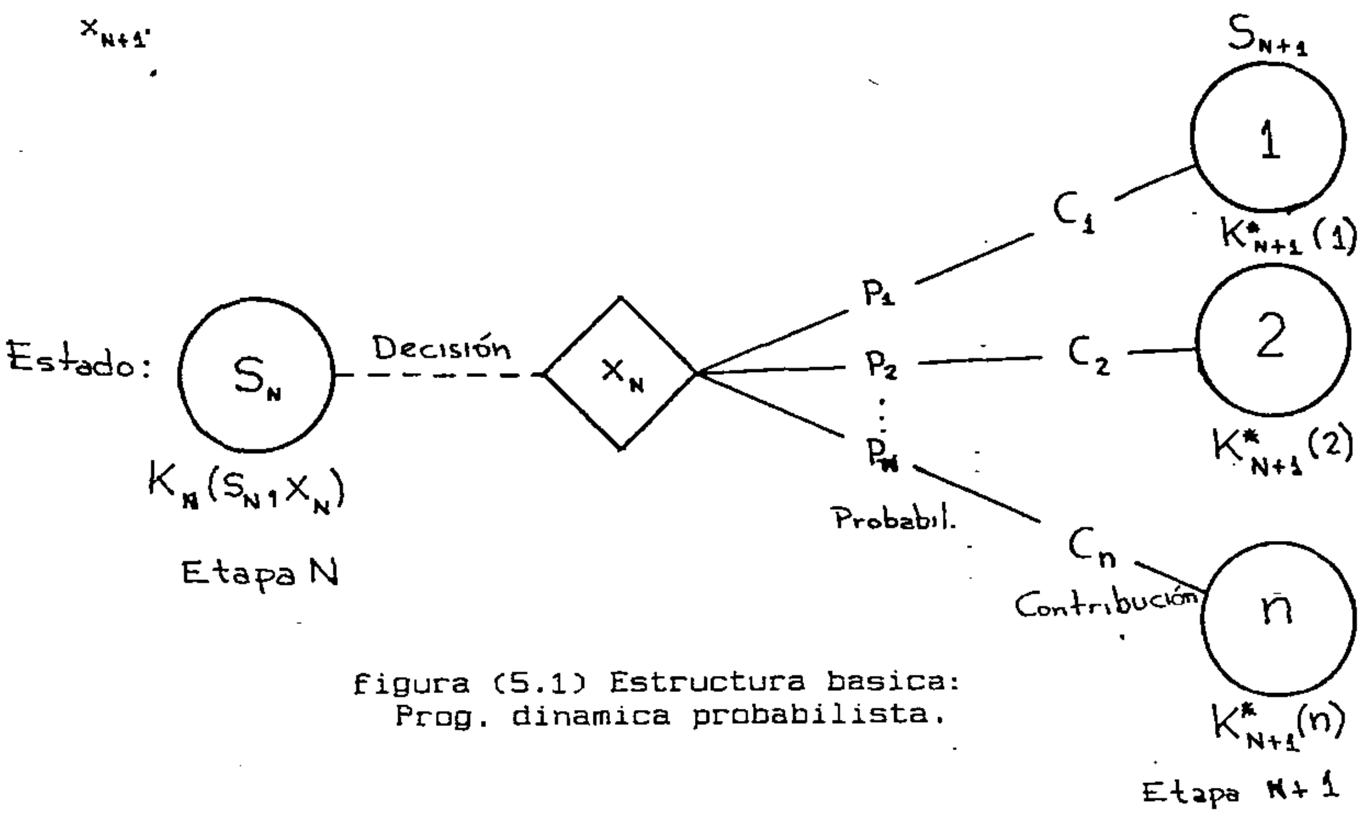


figura (5.1) Estructura basica: Prog. dinamica probabilista.

La forma de la relación de recursión variará segun la forma de la función objetivo global. En los modelos que se analizarán en este capítulo, se verá una forma diferente a la ya expuesta.

Hasta ahora, los modelos analizados comprendían un solo período o dos. En muchos casos, sin embargo, las decisiones que se deben tomar consecutivamente comprenden varios períodos y en algunos de ellos , el numero de períodos de decisión sobre el que debemos intentar la optimización no es obvio. En la teoría del valor es un problema fundamental para quién toma decisiones, si se debe considerar únicamente el año próximo, o los proximos cinco, o los proximos cincuenta; no se va a intentar este análisis . Se observa, también , que las operaciones de una empresa raras veces se considera que terminan en un punto específico en el tiempo. Generalmente hay una intención implícita en la administración de continuar indefinidamente. Por ello, la gerencia puede querer minimizar los costos esperados totales en un futuro indefinido.

Debe notarse, que en tanto que se deban esperar algunos costos sustanciales no nulos en cada período de decisión, todas las políticas resultan en un costo ilimitado si consideramos un tiempo futuro suficientemente grande. No tiene sentido hablar de escoger una política que haga mínima una suma, divergente para todas las políticas. Una manera de obviar esta dificultad consiste en descontar los costos en que va a incurrirse en el futuro. Si se van a tomar decisiones (y se va a incurrir en costos) poco frecuentemente, digamos que con una frecuencia menor que una vez al año, esta manera tiene sentido, tanto intuitivamente como económicamente. Uno siente, intuitivamente, que los costos en que se van a incurrir este año deben tener más influencia en nuestras decisiones que los que van a incurrirse el año próximo . Económicamente, es de desearse que se pueda posponer un gasto, ya que los ahorros pueden supuestamente invertirse por otro lado.

Si el factor de descuento es menor que la unidad, y si los costos cada año son del mismo orden de magnitud, la suma de los costos descontados converge, y tiene sentido buscar una política que haga mínima la suma de todos los costos descontados futuros.

En este capítulo, se analizará un modelo multiperíodo acotado, sin costo de ordenar. Se considerara inicialmente que el número de períodos del modelo esta acotado y se buscará una solución mediante la programación dinámica. Luego, se considerará una extension del modelo y se asumirá que el número de periodos del horizonte de planeación no está acotado. Este modelo corresponde a los de revisión periódica.

MODELO MULTIPERIODO, SIN COSTO DE ORDENAR.- Se considera la situación en la cual el horizonte de planeación consta de N periodos. Se asume que el inventario se revisa al inicio de cada periodo, el tiempo de distribución es cero y los faltantes son arrastrados (excepto al final del periodo N, cuando se pierden), y que las demandas en cada uno de los N periodos son independientes y siguen idénticas distribuciones continuas de variable aleatoria, cuya función de densidad de probabilidad es $f(D)$. El precio de compra, C, es independiente del número de unidades ordenadas. El costo de de manejo por unidad es C_1, y el costo de faltante por unidad es C_2. Finalmente, se define un factor de descuento , $0 < \alpha < 1$, tal que $\alpha = (1+k)^{-1}$, donde k es la tasa de interés por período.

Si I es el inventario neto al inicio del período j, entonces se asumirá que la política a seguir es la siguiente:

$$\begin{cases} \text{Ordenar } \bar{R}_j - I_j, & \text{si } \bar{R}_j > I_j \\ \text{No ordenar,} & \text{si } \bar{R}_j \leq I_j \end{cases}$$

donde $\bar{R}$ es el nivel deseado del inventario en el período j. Se puede demostrar que en ausencia de un costo de ordenar fijo, la política de alcanzar un nivel $\bar{R}$ es optima. El costo para un período j es por tanto

$$\begin{cases} C\,(R_j - I_j) + G\,(R_j), & \text{si} \quad R_j > I_j \\ G\,(I_j) & \text{, si} \quad R_j \leq I_j \end{cases}$$

donde G es la suma esperada, para un período simple, de los costos de inventario de la forma que sigue:

$$G\,(R_j) = C_1 \int_0^{R_j} (R_j - D)f(D)dD + C_2 \int_{R_j}^{\infty} (D - R_j)f(D)dD$$

El problema de optimización consiste en encontrar una cantidad a ordenar R_j^* para cada período $j = 1,2,\ldots,N$ tal que el costo esperado descontado

$$K = E\left[\sum_{j=1}^{N} \alpha^{j-1}\Big(C(R_j - I_j) + G(R_j)\Big)\right]$$

se minimize. K representa el costo promedio por periodo.

La programación dinámica se puede utilizar para minimizar la anterior expresión. La relación de recursión que nos permite hacerlo es

$$K_j(I_j) = \min_{R_j \geq I_j} \left[C(R_j - I_j) + G(R_j) + \alpha\, E\Big(K_{j+1}(R_j - D)\Big)\right]$$

$$j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N$$

Donde tenemos que

$$K_{N+1}(I_{N+1}) = 0$$

y por otra parte

$$E\left[K_{j+1}(R_j - D)\right] = \int_0^{\infty} K_{j+1}(R_j - D)f(D)d(D)$$

En la relación de recursión, $K_j(I_j)$ es el mínimo costo descontado esperado sobre los períodos $j, j+1, \ldots, N$, cuando el inventario neto al principio del periodo j es I_j. Nótese que $C(R_j - I_j) + G(R_j)$ constituye el costo esperado en el período j y $K_{j+1}(R_j - D)$ es el mínimo costo obtenible sobre los últimos $N - j$ períodos como una función de la decisión en el período j y la demanda que se presenta en el período j. El último término de la ecuación de recursión se obtiene promediando este costo sobre D y descontandolo al principio del período j mediante la multiplicacion por α.

Para hallar una solución para la ecuación de recursión se usa un procedimiento hacia atrás. Esto es, para el período N se calcula $K_N(I_N)$ dado $K_{N+1}(I_{N+1})$, a continuación se calcula $K_{N-1}(I_{N-1})$ dado $K_N(I_N)$, luego se calcula $K_{N-2}(I_{N-2})$ dado $K_{N-1}(I_{N-1})$, etc., hasta que $K_1(I_1)$ queda determinado.

EJEMPLO.- La demanda para un artículo en cada uno de dos períodos esta uniformemente distribuida de 0-10. Por ejemplo, $f(D) = 0.10$, $0 \le D \le 10$. El precio de compra es de $ 2 por unidad. Si hay exceso de inventario al final de un período, se carga un costo de \$ 6 por unidad. El costo de faltante es de \$ 10. Se desea encontrar la política óptima para 2 períodos con $\alpha = 1$.

Considérese el período 2, en el que la ecuación de recursión toma la forma

$$K_2(I_2) = \min_{R_2 \geq I_2} \left[G(R_2 - I_2) + G(R_2) + K_3(I_3) \right]$$

que una vez desarrollado da

$$K_2(I_2) = \min_{R_2 \geq I_2} \left[C(R_2 - I_2) + C_1 \int_0^{R_2} (R_2 - D) f(D) dD + C_2 \int_{R_2}^{\infty} (D - R_2) f(D) dD + K_3(I_3) \right]$$

R_2^* (el valor de R_2 para el cual K es mínimo) se obtiene de la solución de

$$\frac{\partial K}{\partial R_2} = 0.$$

Asi pues, derivamos K_2 , teniendo ademas que $K_3(I_3) = 0$, y obtenemos

$$\frac{\partial K}{\partial R} = C + C_1 \int_0^{R_2} f(D)dD + C_2 \int_{R_2}^{\infty} (-f(D))dD = 0.$$

Si $F(R_2)$ es la función acumulada de la distribución de probabilidad f(D). Entonces tenemos:

$$C + C_1 F(R_2) - C_2\left(1 - F(R_2)\right) = 0.$$

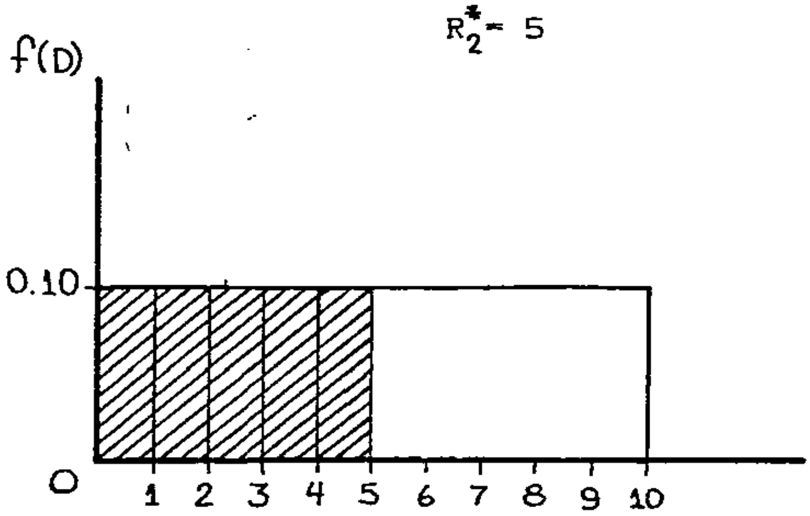
Se resuelve la ecuación para F(R) y obtenemos

$$F(R_2^*) = \frac{C_2 - C}{C_2 + C_1}$$

Ecuación en la cual reemplazamos valores

$$F(R_2^*) = \frac{10 - 2}{10 + 6} = 0.5$$

Como se puede ver en la gráfica (5.2), el valor de R_2^* que satisface $F(R_2^*) = .5$ es



gráfica (5.2) distribución F(D)

Ahora bién, en general

$$G(R) = 6\int_0^R (R - D)(0.1)d(D) + 10\int_R^{10} (D-R)(0.1)dD$$

$$= 6\left[(0.1)RD - \frac{0.1\ D^2}{2}\right]_0^R + 10\left[\frac{0.1\ D^2}{2} - 0.1RD\right]_R^D$$

$$= 6\left[0.1R^2 - \frac{0.1\ R^2}{2}\right]$$

$$+ 10\left[\frac{0.1(100)}{2} - 0.1(10R) - \frac{0.1\ R^2}{2} + 0.1R^2\right]$$

$$G(R) = 6\ (0.05\ R^2) + 10\ (50 - R + 0.05\ R^2)$$

$$G(R) = 0.3\ R^2 + 50 - 10\ R + 0.5\ R^2$$

$$G(R) = 0.8\ R^2 - 10\ R + 50$$

y a partir de este resultado obtenemos $E\left[K_2(R_1-D)\right]$, que nos será útil en la siguiente etapa de recurrencia. De este modo

$$E\left[K_2(R_1-D)\right] = \int_0^{10} K_2(R_1-D)(0.1)dD$$

$$= \int^{R_1-R_2^*} G(R_1-D)(0.1)dD$$

$$+ \int_{R_1-R_2^*}^{10} C(R_2^*-R_1+D) + G(R_2^*)\ (0.1)dD$$

$$= \int_0^{R_1-5} .8(R_1-D)^2 - 10(R_1-D) + 50\ (0.1)dD$$

$$+ \int_{R_1-5}^{10} 2(5-R_1+D) + 50 - 10(5) + .8(5)^2\ (.1)dD$$

y una vez realizada la integración y reemplazados los límites se obtiene

$$E\left(K_2(R_1-D)\right) = \frac{8}{300} R_1^3 - \frac{4}{10} R_1^2 - \frac{1100}{30}$$

Ahora, para la consideración del período 1 obtenemos la siguiente ecuación de recurrencia

$$K_1(I_1) = \min_{R_1 \geq I_1} \left[2(R_1-I_1) + .8R_1^2 - 10R_1 + 50 + \frac{8}{300} R_1^3 - \frac{4}{10} R_1^2 - \frac{1100}{30} \right]$$

que reducimos a

$$K_1(I_1) = \min_{R_1 \geq I_1} \left[-2I + \frac{40}{3} - 8R_1 + \frac{4}{10} R_1^2 + \frac{8}{300} R_1^3 \right]$$

Obtenemos R_1^* (el valor de R_1 para el cual $K_1(I_1)$ se minimiza) derivando la función a minimizar e igualandola a cero. Obtenemos

$$\frac{\partial K}{\partial R_1} = 0,$$

así llegamos a

$$-8 + \frac{8}{10} R_1 + \frac{24}{300} R_1^2 = 0$$

cuya solución positiva es

$$R_1^* = 6.18.$$

De aquí, tenemos que la política óptima consiste en ordenar la cantidad suficiente para completar 6.18 unidades en inventario, siempre que el nivel actual del mismo no exceda esta cantidad. Si al inicio del segundo período el inventario existente no alcanza las 5 unidades, entonces se ordenarán las unidades suficientes para alcanzar este nivel. En caso contrario no se ordenará.

Como se pudo apreciar, la formulación de un problema mediante programación dinámica presenta dificultades a la hora de hacer los cálculos necesarios, incluso para problemas con un número de etapas reducido, como el del ejemplo anterior. Sin embargo, si consideramos el caso en el que el horizonte de planeación no está acotado, podemos obtener una solución aproximada de una forma relativamente sencilla. El resultado que se obtenga podrá ser aplicado a problemas multiperíodo acotados, siempre que tengan un mínimo de períodos.

A medida que $N \to \infty$, una aproximación razonable de la ecuación de recurrencia del caso anterior

$$K_j(I_j) = \min_{R_j \geq I_j} \left[C(R_j - I_j) + G(R_j) + \alpha E\left(K_{j+1}(R_j - D)\right)\right],$$

$$j = 1, 2, \ldots, N,$$

para un horizonte no acotado es la ecuación funcional

$$K(I) = \min_{R \geq I} \left[C(R - I) + G(R) + \alpha E\left(K(R - D)\right)\right],$$

con la condición de que $0 < \alpha < 1$ (esto porque necesitamos que $\alpha < 1$ con el fín de asegurar que $\alpha E K(R - D)$ es finito.

Desarrollando esta última ecuación tenemos la siguiente expresión

$$K(I) = \min_{R \geq I} \left[C(R - I) + C_1 \int_0^R (R - D) f(D) dD + C_2 \int_R^\infty (D - R) f(D) dD + \alpha \int_0^\infty K(R - D) dD \right]$$

Para hallar el mínimo, derivamos esta expresion tomando en cuenta que

$$\frac{d\,K(R - D)}{dR} = - C,$$

ya que por cada unidad adicional en mano al principio del período el costo para el período decrecerá por C, puesto que esas unidades no tendrán que ser ordenadas. Por tanto, la R^* óptima es la solución a

$$C + C_1\int_0^R f(D)dD - C_2\int_R^\infty f(D)dD - \alpha C \int_0^\infty f(D)dD = 0.$$

Si $F(R^*)$ es la función de distribución acumulada de F(D) entonces al efectuar los cálculos necesarios en la ecuación anterior obtenemos

$$C + C_1 F(R^*) - C_2\left[1 - F(R^*)\right] - \alpha\, C\left[1\right] = 0.$$

Ecuacion que se resuelve para $F(R^*)$, obteniendose de esta forma

$$F(R^*) = \frac{C_2 - C(1 - \alpha)}{C_2 + C_1}$$

donde R^* es la cantidad que optimiza nuestra función.

Si el número de períodos en el horizonte de planeación es mayor que tres o cuatro, entonces esta solución aproximada, obtenida asumiendo que el número de periodos es infinito, será usualmente satisfactoria.

EJEMPLO.- Supongamos que la demanda para un artículo en cada uno de cinco períodos se distribuye uniformemente entre cero y diez, esto es, $f(D) = .1, \quad 0 \leq D \leq 10$. El costo de faltante es \$20 por unidad, el costo de inventario es \$10 por unidad, y el costo de compra es \$10. El factor de descuento es de $\alpha = .8$, y suponemos que el horizonte de planeación es lo suficientemente largo para emplear la ecuación de aproximación.

Calculamos entonces

$$F(R^*) = \frac{20 - 10(1 - 0.8)}{20 + 10} = \frac{18}{30} = 0.6$$

y por tanto

$$R^* = 6$$

En la figura (5.3), se muestra la forma de la distribución f(D) así como la determinación de R^*.

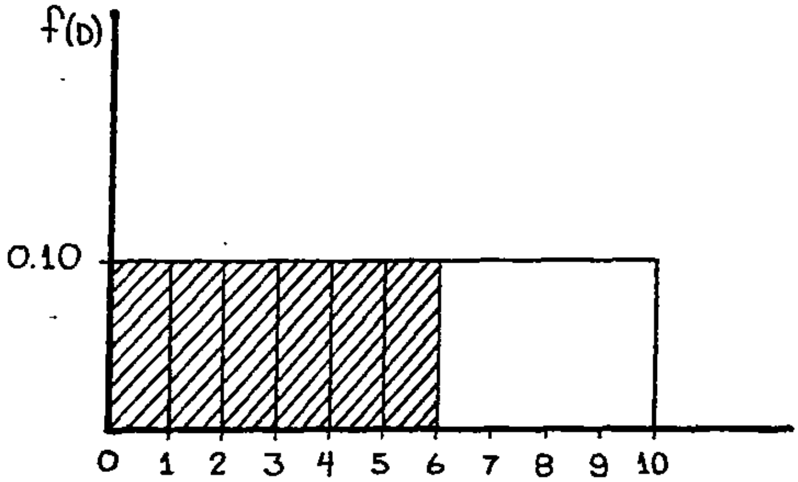


figura (5.3) distribución f(D) = 0.1

VI

CONCLUSIONES

CONCLUSIONES

Se han analizado en total cuatro diferentes modelos de inventario probabilístico . Cada uno de ellos tuvo su característica, ya sea demanda continua o discreta, de uno o más períodos, de uno o dos almacenes, etc. Un aspecto común en el tratamiento de estos modelos, exceptuando el de multiperíodo, fue la utilización intensiva de gráficas para el desarrollo de las ecuaciones matemáticas que describieran el modelo. Considero que la comprensión del comportamiento del modelo se facilita en gran modo con la utilización de estas gráficas.

En uno de los casos no se llego a obtener una solución numeral, el segundo modelo del capitulo III, ya que su manejo matemático resultaba complejo. Sin embargo, el procedimiento aplicado para la obtencion de una solución para el modelo de dos almacenes, mediante simulación, es tambien aplicable y se podría usar con algunas variaciones a el modelo no resuelto. Lo importante en todo caso es llegar a plantear las ecuaciones del modelo, puesto que en la práctica todos los casos son diferentes y conviene poder adaptarse a ellos de modo que el planteo de las ecuaciones sea más fácil.

Las dificultades, ya en cuanto a la solución de problemas específicos, se presentan no tanto respecto al planteo de las ecuaciones, como en la solución de estas ecuaciones. En el primer modelo presentado, se hace el manejo de las diferencias finitas como herramienta que conduzca a la optimización. Este manejo requiere alguna pericia y cuidado, que puede no estar siempre disponible. En el segundo y tercer modelo, estos requerimientos (pericia y cuidado) crecen considerablemente, y esto por la complejidad inherente a las funciones de densidad, así como de los procedimientos de derivación (por ejemplo, de integrales dobles). Debido a estas dificultades, se deben buscar otros caminos, y en el modelo de dos almacenes de utiliza la simulación como herramienta para llegar a obtener una solución aproximada y satisfactoria. Debe notarse que se pueden buscar más caminos de solución (por ejemplo mediante análisis numérico), pero que sin embargo, es imprescindible contar con las ecuaciones que describen el modelo.

Finalmente, se dirá que para el tratamiento de los modelos de períodos múltiples, deberán buscarse otras alternativas aparte de la programación dinámica. Si bién el uso de la técnica es correcto, se percibe la inconveniencia de su empleo debido a que la cantidad de cálculos es muy grande, incluso en el caso de problemas con un número de períodos reducido (en el ejemplo dado se consideraban dos períodos). Como se hizo en el capitulo IV y al final del capitulo V, lo más recomendable será buscar soluciones aproximadas, las cuales quizá no sean rigurosas, pero serán mucho mas fáciles de buscar y en general podrán se razonablemente satisfactorias.

APENDICE

DIFERENCIAS FINITAS

DEFINICION DEL OPERADOR DE DIFERENCIA.- Se tratan únicamente con funciones $f(n)$ definidas únicamente para valores enteros del argumento n.

La "primera diferencia" de $f(n)$ se denota por $\Delta f(n)$ y se define por la fórmula:

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n) \;;$$

La segunda diferencia de $f(n)$ y las sucesivas se definen por:

$$\Delta^{r+1} f(n) = \Delta\left\{\Delta^{r} f(n)\right\} \;;$$

también:

$$\Delta^{r+1} f(n) = \Delta^{r}[\Delta f(n)] = \Delta^{r}[f(n+1) - f(n)] = \Delta^{r} f(n+1) - \Delta^{r} f(n) \;;$$

con Δ^{0} = operador de identidad; $\Delta^{1} = \Delta$.

CONDICIONES PARA UN MINIMO DE f(n).- La función f(n) tiene un "mínimo local" en n, siempre que se satisfagan las dos condiciones siguientes:

$$f(n_o+1) > f(n_o) \text{ ; esto es } \Delta f(n\,)_o > 0$$

$$f(n_o-1) > f(n_o) \text{ ; esto es } \Delta f(n_o-1) < 0$$

Así, f(n) tiene un mínimo local en n_o si:

$$\Delta f(n_o-1) < 0 < \Delta f(n_o).$$

DIFERENCIACION BAJO EL SIGNO DE SUMA.- En aplicaciones de inventario en las que el nivel de existencias se considera una variable discreta, a menudo se necesita calcular la primera diferencia de alguna función c(z) de la forma:

$$C(z) = \sum_{x,y,\ldots u} f(x,y,\ldots,u;z)$$

Si $f(x,y,\ldots,u;z)$ tiene la misma forma funcional en toda la región de suma, y si la frontera de esta región no depende de z, entonces podemos usar la siguiente propiedad:

$$\Delta[f(n) + g(n)] = \Delta f(n) + \Delta g(n)\ ,$$

a cada termino por separado y obtenemos:

$$\Delta C(z) = \sum_{x,y,\ldots u} \Delta f(x,y,\ldots;z) \;;$$

donde las diferencias del segundo término se toman con respecto a z. Sin embargo, si f tiene diferentes formas funcionales en diferentes sectores de la región de suma, o si la frontera de la región depende de z, el computo de $\Delta C(z)$ es generalmente más complicado.

Consideraremos inicialmente el caso unidimensional, suponiendo que $a(z)$ y $b(z)$ son funciones crecientes de z, en donde:

$$C(z) = \sum_{x=a(x)}^{b(z)} f(x,z) \;,$$

entonces tenemos:

$$C(z+1) = \sum_{x=a(z+1)}^{b(z+1)} f(x,z+1)$$

$$= \sum_{a(z)}^{b(z)} f(x,z+1) + \sum_{b(z)+1}^{b(z+1)} f(x,z+1) - \sum_{a(z)}^{a(z+1)-1} f(x,z+1),$$

luego

$$C(z) = C(z+1) - C(z)$$

$$= \sum_{a(z)}^{b(z)} [f(x,z+1) - f(x,z)] + \sum_{b(z)+1}^{b(z+1)} f(x,z+1) - \sum_{a(z)}^{a(z+1)-1} f(x,z+1)$$

y finalmente:

$$\Delta C(z) = \sum_{a(z)}^{b(z)} \Delta f(x,z) + \sum_{b(z)+1}^{b(z+1)} f(x,z+1) - \sum_{a(z)}^{a(z+1)-1} f(x,z+1) .$$

Supongamos aHora que f(x,z) se define por:

$$f(x,z) = \begin{cases} f_1(x,z) \text{ para } 0 \leq x < b(z) \\ f_2(x,z) \text{ para } x > b(z) \end{cases}$$

y teniendo:

$$C(z) = \sum_{0}^{\infty} f(x,z) ,$$

deseamos obtener $\Delta C(z)$.

Tenemos entonces que:

$$C(z) = \sum_{x=0}^{b(z)} f_1(x,z) + \sum^{\infty} f_2(x,z) ,$$

luego, aplicando un resultado anterior tenemos que:

$$\Delta C(z) = \sum_{x=0}^{b(z)} \Delta f_1(x,z) + \sum_{x=b(z)+1}^{b(z+1)} f_1(x,z+1) - \sum_{x=0}^{0} f_1(x,z+1)$$
$$+ \sum_{x=b(z)+1}^{\infty} \Delta f_2(x,z) + \sum_{\infty}^{\infty} f_2(x,z+1) - \sum_{x=b(z)+1}^{b(z+1)} f_2(x,z+1)$$

y obtenemos:

$$\Delta C(z) = \sum_{x=0}^{b(z)} \Delta f_1(x,z) + \sum_{x=b(z)+1}^{\infty} \Delta f_2(x,z) + \sum_{x=b(z)+1}^{b(z+1)} [f_1(x,z+1) - f_2(x,z+1)]$$

En los casos de sumas simples, en los cuales se cumple que:

$$f_1(x,z+1) = f_2(x,z+2) \; ,$$

para todas las x en el intervalo

$$b(z) + 1 \leq x \leq b(z+1),$$

se tiene como consecuencia de esta igualdad que:

$$\sum_{x=b(z)+1}^{b(z+1)} [f_1(x,z+1) - f_2(x,z+1)] = 0,$$

luego

$$\Delta C(z) = \sum_{x=0}^{b(z)} \Delta f_1(x,z) + \sum_{b(z)+1}^{\infty} \Delta f_2(x,z),$$

y obtenemos el resultado final para sumas simples:

$$\Delta C(z) = \sum_{x=0}^{\infty} \Delta f(x,z)$$

Por ejemplo en el caso:

$$f_t(z) = \sum_{n=0}^{z} C_1 t \left[z - \frac{n}{2} \right] p_t(n) + \sum_{n=z+1}^{\infty} \left[\frac{C_1 t z(z+1)}{2(n+1)} + C_2(n-z) \right] p_t(n)$$

Si:

$$f_{t1}(z) = C_1 t \left[z - \frac{n}{2} \right] p\,(n) \;;$$

Entonces:

$$f_{t1}(z+1) = C_1 t \left[z + 1 - \frac{n}{2} \right] p\,(n) \;.$$

Por otra parte:

$$f_{t2}(z) = \frac{C_1 t z(z+1)}{2(n+1)} + C_2(n-z) \quad ;$$

y similarmente:

$$f_{t2}(z+1) = \frac{C_1 t(z+1)(z+2)}{2(n+1)} + C_2(n-z-1) \;.$$

En este ejemplo, si se cumple que:

Ec.[1a] $$C_1 t \left[z + 1 - \frac{n}{2} \right] p_t(n) = \left[\frac{C_1 t(z+1)(z+2)}{2(n+1)} + C_2(n-z-1) \right] p_t(n)$$

, en el intervalo $b(z) + 1 \leq n \leq b(z+1)$, podremos aplicar la fórmula de suma simple encontrada anteriormente. En nuestro caso, dado que

$$\Delta F_1(z) = C_1 t\ p_t(n)\ .$$

Similarmente para $F_2(z)$:

$$\Delta F_2(z) = \left[\frac{C_1 + (z+1)(z+2)}{2\ (n+1)} + C_2(n-z-1)\right] p_t(n) - \left[\frac{C_1 tz(z+1)}{2\ (n+1)} + C_2(n-z)\right] p_t(n)$$

$$= \left[\frac{C_1 t(z+1)(z+2) - C_1 tz(z+1)}{2\ (n+1)} + C_2(n-z-1) - C_2(n-z-1) - C_2(n-z)\right] p_t(n)$$

$$= \left[\frac{C_1 t(z+3z+2-z-z)}{2\ (n+1)} + C_2(n-z-1-n+z)\right] p_t(n)$$

$$= \left[\frac{C_1 t(2z + 2)}{2\ (n+1)} - C_2\right] p_t(n)$$

condensando:

$$\Delta F_2(z) = \left[\frac{C_1 t(z + 1)}{(n+1)} - C_2\right] p_t(n)\ .$$

Asi, podemos obtener:

$$\Delta F_t(z) = \sum_{n=0}^{z} C_1 t p_t(n) + \sum_{n=z+1}^{\infty}\left[\frac{C_1 t(z + 1)}{n + 1} - C_2\right] p_t(n)$$

$$b(z) = z$$

entonces

$$b(z) + 1 = z + 1 = b(z + 1)$$

y por tanto el intervalo consta solo del elemento $n = z + 1$.

Reemplazamos este valor en la ecuación (1a) y obtenemos:

$$C_1 t\left[z+1- \frac{(z+1)}{2}\right] p_t(n) = \left[\frac{C_1 t(z+1)(z+2)}{2\ (z+1+1)} + C_2(z+1-z-1)\right] p_t(n) \ ;$$

$$C_1 t\left[\frac{2z + 2 - z - 1}{2}\right] p_t(n) = \left[\frac{C\ t(z + 1)}{2}\right] p_t(n) \ ;$$

que resulta en:

$$\frac{C_1 t(z + 1)}{2} p_t(n) = \frac{C_1 t(z + 1)}{2} p_t(n) \ .$$

con lo cual se verifica la condición y podemos aplicar (II), obteniendo:

$$\Delta f_t(z) = \sum_{n=0}^{z} \Delta f_1(z) + \sum_{n=z+1}^{\infty} \Delta f_2(z)$$

$$\Delta f_t(z) = C_1 t\left[z+1- \frac{n}{2}\right] p_t(n) - \left[C_1 t\right]\left[z- \frac{n}{2}\right] p_t(n)$$

$$= C_1 t\left[\frac{2z + 2 - n - 2z + n}{2}\right] p_t(n)$$

condensando

como:

$$\sum_{n=0}^{z} C_2 p_t(n) + \sum_{n=z+1}^{\infty} C_2 p_t(n) = C_2$$

tenemos que:

$$\sum_{n=z+1}^{\infty} C_2 p_t(n) = C_2 - \sum_{n=0}^{z} C_2 p_t(n) \quad .$$

Desarrollando:

$$\Delta f_t(z) = \sum_{n=0}^{z} C_1 t p_t(n) + \sum_{n=z+1}^{\infty} \frac{C_1 t(z+1)}{n+1} p_t(n) - \sum_{n=z+1}^{\infty} C_2 p_t(n)$$

y sustituyendo

$$\Delta f_t(z) = \sum_{n=0}^{z} C_1 t p_t(n) + \sum_{n=z+1}^{\infty} \frac{C_1 t(z+1)}{n+1} p_t(n) + \sum_{n=0}^{z} C_2 p_t(n) - C_2$$

obtenemos la primera diferencia de f (z):

$$\Delta f_t(z) = (C_1 t + C_2) \sum_{n=0}^{z} p_t(n) + \sum_{n=z+1}^{\infty} \frac{C_1 t(z + 1)}{n + 1} - C_2$$

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

Johnson, Lynwood y Douglas Montgomery. OPERATIONS RESEARCH IN PRODUCTION PLANING, SCHEDULING, AND INVENTORY CONTROL.
Ed. John Wiley & Sons, 526 pp.
1974, New york, U.S.A.

Sasieni, Maurice, A. Yaspan y L. Friedman. INVESTIGACION DE OPERACIONES.
Editorial Limusa, 1a. edición, 336 pp.
1967, México D.F., México.

Miller, Irwin y John E. Freund. PROBABILIDAD Y ESTADISTICA. PARA INGENIEROS.
Editorial Reverté Mexicana, 1a. edición, 410 pp.
1973, México D.F., México.

Hillier, Frederick y Gerald J. Lieberman. INTRODUCCCION A LA
INVESTIGACION DE OPERACIONES.
Editorial Mc-Graw Hill, 1a. edición, 834 pp.
1982, México D.F., México.

Gillet, Billy E. INTRODUCTION TO OPERATION RESEARCH.
A COMPUTER-ORIENTED ALGORITHMIC APPROACH.
Editorial Mc-Graw Hill Book Co. 620 pp.
1976, New York, U.S.A.

Prawda, Juan. METODOS Y MODELOS DE INVESTIGACION DE OPERACIONES.
VOL. 2 MODELOS ESTOCASTICOS.
Editorial Limusa, 1a. edición, 2 vv.,1028 pp.
1980, México D.F., México.

Coss Bú, Raúl. SIMULACION.
Editorial Limusa, 1a. edición, 158 pp.
1982, México D.F., México.