

TM
Z5853
.M2
FIME
1987
T6

TM

Z5853

.M2

FIME

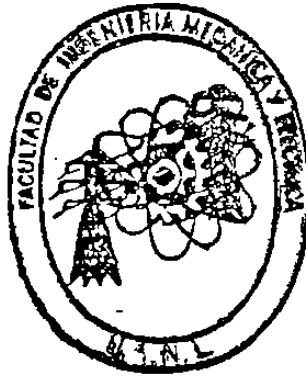
1987

T6



1020070594

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
DIVISION DE ESTUDIOS SUPERIORES



**DIRECCION GENERAL DE
ESTUDIOS DE POSTGRADO**

**ANALISIS DEL DISEÑO DE LEVAS
DE DISCO**

TESIS

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERIA
MECANICA**

PRESENTA

ING. ENRIQUE TOBIAS LOPEZ

MONTERREY, N. L.,

SEPTIEMBRE DE 1987



162132

A MIS PADRES :

A MI PADRE SR. ELIGIO TOBIAS DELGADO
POR SU GRANDEZA Y ENTREGA AL BIENES-
TAR FAMILIAR, POR SU APOYO MORAL Y E
CONOMICO PARA SER POSIBLE LO QUE AHOR
A SOY. GRACIAS.

A MI MADRE SRA. MARIA EULALIA LOPEZ
DE TOBIAS POR SU APOYO DESMEDIDO EN
LO ECONOMICO Y LO MORAL LE OFREZCO -
COMO SIEMPRE Y PARA SIEMPRE TODO LO
MEJOR DE MI PERSONA, AGRADECIENDO DE
ANTEMANO LOS CONSEJOS Y ORACIONES -
QUE EN TODO MOMENTO FUERON OPORTUNOS
PARA ALENTAR LOS MOMENTOS DIFICILES

POR DIOS Y POR LA PATRIA:

ING. ENRIQUE TOBIAS LOPEZ.

A MI ASESOR :

AGRADEZCO GRANDEMENTE A MI ASESOR
ING. NOE HINOJOSA POR SU ACOMPA
ÑAMIENTO TAN IMPORTANTE PARA LA E
LABORACION DE ESTE TRABAJO DE TE-
SIS. AGRADEZCO TAMBIEN A TODAS A
QUELLAS PERSONAS QUE DIRECTA O IN
DIRECTAMENTE HICIERON POSIBLE LA
REALIZACION DEL PRESENTE ESTUDIO.

ANALISIS DEL DISEÑO DE LEVAS DE DISCO

I. GENERALIDADES.

- 1.1. Importancia del diseño de levas.
- 1.2. Clasificación de levas y seguidores.
- 1.3. Diagramas de desplazamiento.

II. CINEMATICA DE LAS LEVAS.

- 2.1. Movimiento del seguidor.
- 2.2. La Leva Polinomial.
- 2.3. Leva de placa con seguidor oscilante de rodillo.

III. DINAMICA DE LAS LEVAS.

- 3.1. Sistema de levas de cuerpos rígidos y elásticos.
- 3.2. Análisis de una leva de disco con seguidor oscilante de rodillo.
- 3.3. Análisis de Sistemas Elásticos de Levas.

IV. DISEÑO DE LEVAS.

- 4.1. Determinación del Esfuerzo de contacto.
- 4.2. Diseño del perfil de una leva.
- 4.3. Bibliografía.

I. G E N E R A L I D A D E S.

1.1. IMPORTANCIA DEL DISEÑO DE LEVAS.

1.2. CLASIFICACION DE LEVAS Y SEGUIDORES.

1.3. DIAGRAMAS DE DESPLAZAMIENTO.

1.1 IMPORTANCIA DEL DISEÑO DE LEVAS.

Al Proyectar una máquina es necesario elegir el mecanismo o series de mecanismos que deben entrar en su composición partiendo de las operaciones a realizar durante el trabajo de la misma. Por lo tanto, los mecanismos se seleccionarán de forma que el movimiento del eslabon conducido se atenga a una determinada Ley.

Con frecuencia ocurre que las Leyes de variación de la velocidad y de la aceleración del eslabon conducido no tienen un significado esencial, y solamente importa que dicho eslabon recorra una determinada carrera, así sucede -- por ejemplo, con las máquinas de vapor, cuyos embolos --- deben tener una carrera de magnitud dada; en las Máquinas Limadoras; en las Máquinas Impresoras y en otras muchas.

En estos casos no ofrece dificultad la elección del tipo de mecanismo ni el calculo de sus dimensiones, y es posible utilizar mecanismos de pares inferiores tales como Biela-Manivela, Colisa y Manivela, Cuadrilatero Articulado Etc.

Cuando el desplazamiento del eslabon conducido deba atenerse a una determinada Ley y , en consecuencia, también sucede lo propio con las variaciones de su velocidad y de su aceleración; o bien cuando el eslabon conducido debe detenerse temporalmente a pesar del movimiento continuo del eslabon con ductor, la solución mas sencilla puede encontrarse con el empleo de mecanismos de Levas.

Una leva es un elemento mecanico que sirve para impulsar a otro elemento llamado seguidor, para que desarrolle un movimiento especificado, por contacto directo. Los Mecanismos de leva y seguidor son sencillos y poco costosos, tienen pocas piezas moviles u ocupan espacios muy reducidos.

Además, no son difíciles de diseñar movimientos del seguidor que tengan casi cualquier característica deseada.

Por estas razones, los mecanismos de Leva se emplea profusamente en la maquinaria moderna.

1.2 CLASIFICACION DE LEVAS Y SEGUIDORES.

La Versatilidad y Flexibilidad en el diseño de los sistemas de Levas se encuentran entre sus características mas atractivas. Con todo, esto da origen también a una gran variedad de perfiles y formas, y a la necesidad de cierta terminología para distinguirlas.

Las Levas se clasifican según formas basicas; en las figura 1. se ilustran cuatro tipos diferentes.

- a) LEVA DE PLACA LLAMADA TAMBIEN DE DISCO O RADIAL
- b) LEVA DE CUÑA
- c) LEVA CILINDRICA O DE TAMBOR
- d) LEVA LATERAL O DE CARGA.

La menos común de ellas en aplicaciones practicas es la leva de Cuña debido a que necesita un movimiento alternativo de entrada en lugar de un movimiento continuo y, con mucho, la mas común de todas es la Leva de Placa que se analizará en este texto.

Los sistemas de Levas se clasifican también según la forma basica del seguidor. En la Figura 2, se presentan Levas de Placa que actuan con cuatro tipos diferentes de seguidores:

- a) SEGUIDOR DE CUÑA
- b) SEGUIDOR DE CARA PLANA
- c) SEGUIDOR DE RODILLO
- d) SEGUIDOR DE CARA ESFERICA O ZAPATA CURVA.

Notese que por lo común, se hace que la cara del seguidor tenga una forma geométrica simple, y el movimiento se logra mediante el diseño apropiado del perfil de la Leva con la que se construira el sistema.

Por supuesto, no siempre sucede así. Otro método para clasificar las levas es de acuerdo con el movimiento de salida característico permitido entre el seguidor y el marco de referencia. Por ende, algunas levas tienen seguidores - de movimiento alternativo (traslación) como se ilustra en las figuras en tanto que otras lo tienen oscilante (rotación). En todos los sistemas de levas el diseñador debe asegurarse de que el seguidor se mantenga en contacto con la leva. Esto se logra mediante la gravedad, incluyendo -- un resorte apropiado o por medio de una restricción mecánica.

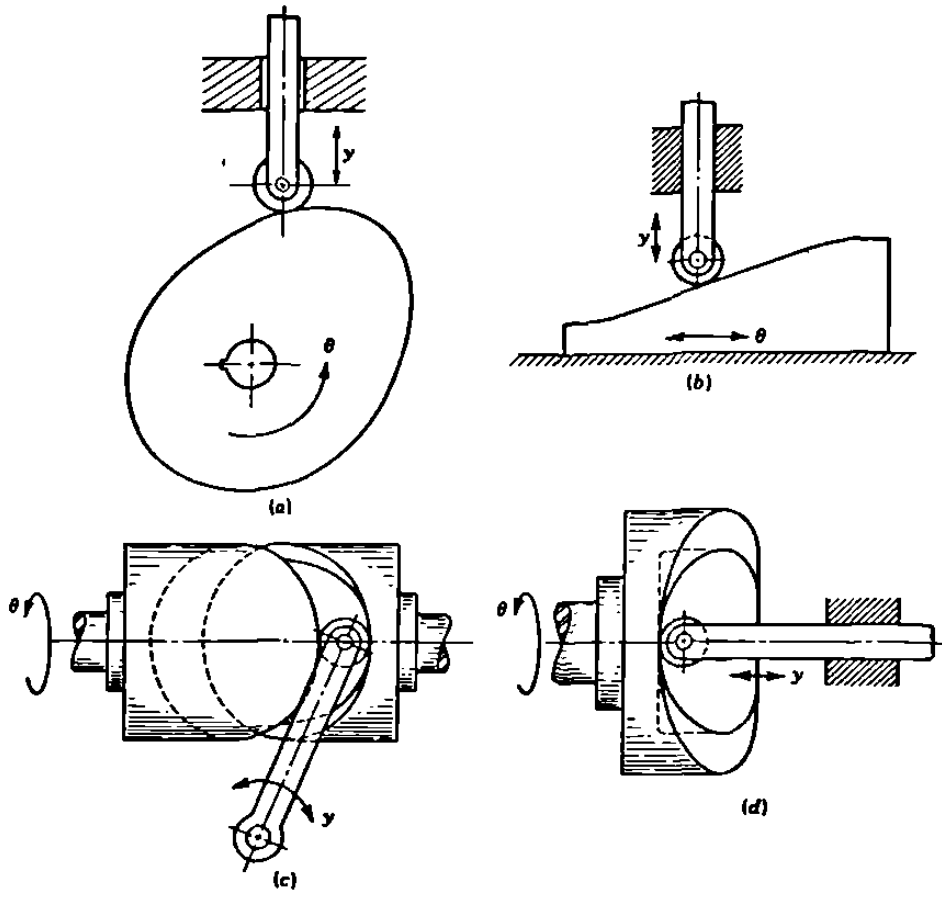


figura 1

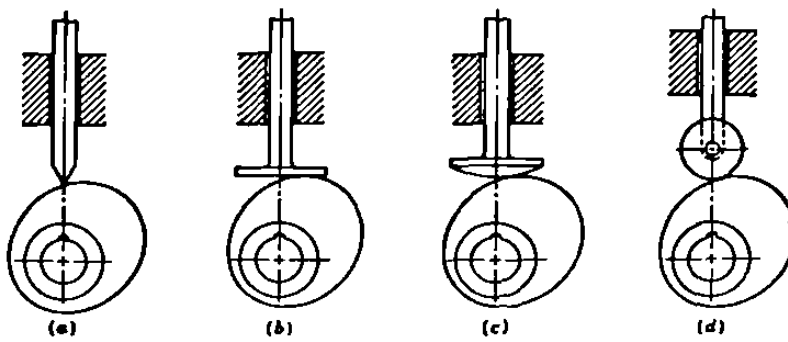


figura 2

1.3 DIAGRAMAS DE DESPLAZAMIENTOS.

Durante la rotación completa de una vuelta de la Leva, el seguidor ejecuta una serie de movimiento de elevación, --- reposo y descenso. Hay varios movimientos posibles para el - seguidor que se pueden emplear en las elevaciones y en los -- descensos. En esta sección se utilizarán metodos graficos para construir los diagramas de desplazamiento para las elevaciones con movimientos uniforme modificado, Armonico, Parabolico y Cicloidal.

MOVIMIENTO UNIFORME

El Diagrama de desplazamiento para este tipo de movimiento es un recta de pendiente constante. Por consiguiente, la velocidad del seguidor durante el movimiento es constante. Este movimiento se emplea poco a causa de los choques al comienzo y al final del movimiento suavizando estos choques, como se muestra en la figura 3. se obitene el movimiento uniforme modificado. en este ejemplo, las modificación consistio en utilizar dos arcos de circunferencia tangentes al período de reposo que procedia o seguia al movimiento, pero puede emplearse cualquier otra modificación.

MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE

El Diagrama de desplazamiento para este tipo de movimiento se representa en la figura 4. una semicircunferencia -- que tiene diametro igual a la elevación L se divide en el mismo número de partes iguales en el que se hace la abscisa o eje de tiempos.

A veces la semicircunferencia de la figura 4. se dibuja modificada con forma de elipse, con objeto de conseguir un movimiento modificado.

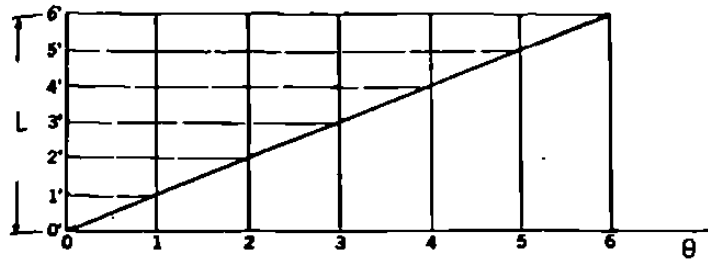


Diagrama de desplazamiento para movimiento uniforme

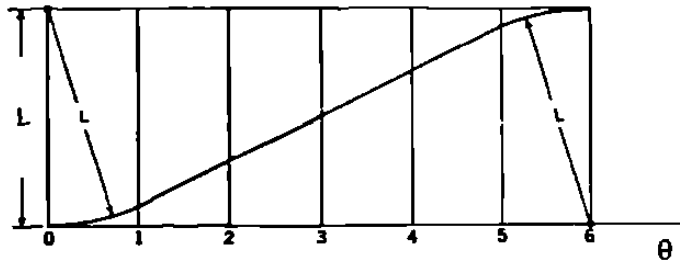


Diagrama de desplazamiento para movimiento uniforme modificado.

figura 3

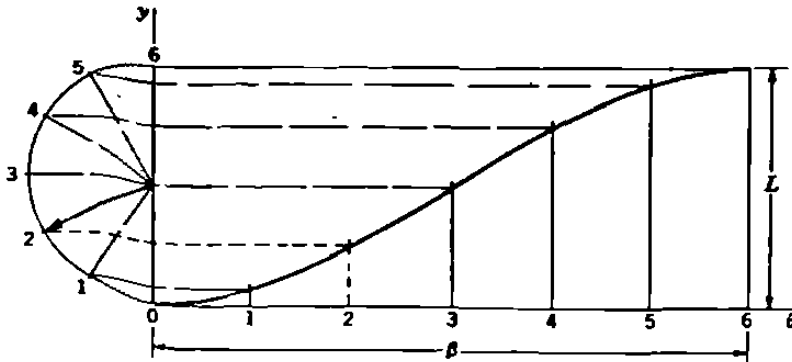


figura 4.

La Elipse se divide de la misma formas que la circunferencia y se traza con el eje mayor paralelo al eje de --- abscisas. De esta forma, la velocidad del seguidor al empezar y al terminar la elevación son menores que el movimiento armonico simple.

MOVIMIENTO PARABOLICO

Tiene aceleración constante. La construcción grafica se representa en la figura 5. se emplea un número para de - divisiones en la escala de tiempos y, como mínimo, deben -- hacerse 6 divisiones. Por el origen del diagrama de desplazamientos se traza una recta oblicua con respecto del eje - de ordenadas (Fig 5.) si se hacen seis divisiones sobre - el eje de abscisas, se divide la recta en partes proporcionales a 1,3,5,5,3,1., Se une el final de la ultima división con el final de la escala de ordenadas y se trazan ahora -- rectas paralelas que pasen por los puntos marcados sobre la oblicua.

MOVIMIENTO CICLOIDAL

Se obtiene mediante la rodadura de una circunferencia da radio $L/2\pi$, en donde L es la elevación total, efectuará exactamente una revolución al rodar a lo largo de la --- ordenada, desde el origen hasta $Y=L$ un punto P del circulo localizado inicialmente en el origen, traza un cicloide como se muestra en la figura. Si el circulo rueda sin resbalar con una velocidad constante, la grafica de la posición vertical Y del punto contra el tiempo da el diagrama de -- desplazamiento que se muestra a la derecha de la figura.

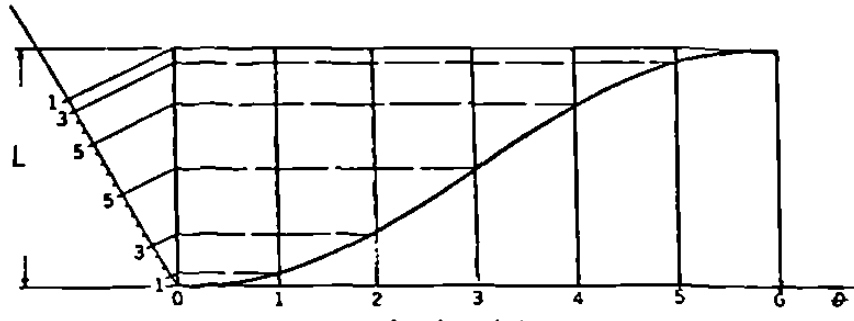


figura 5

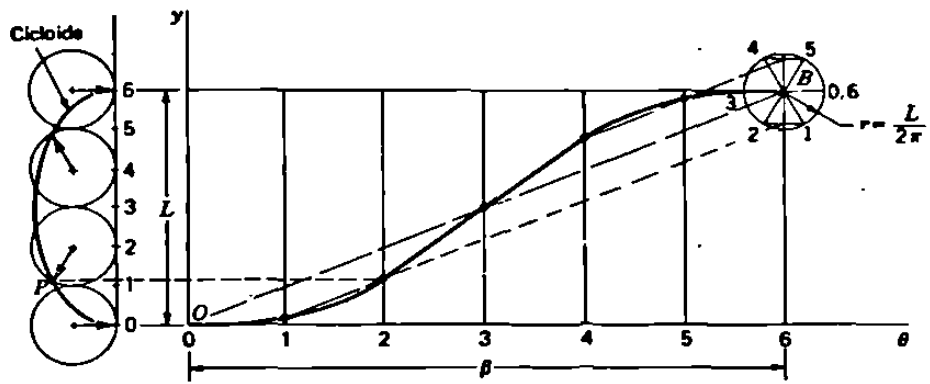
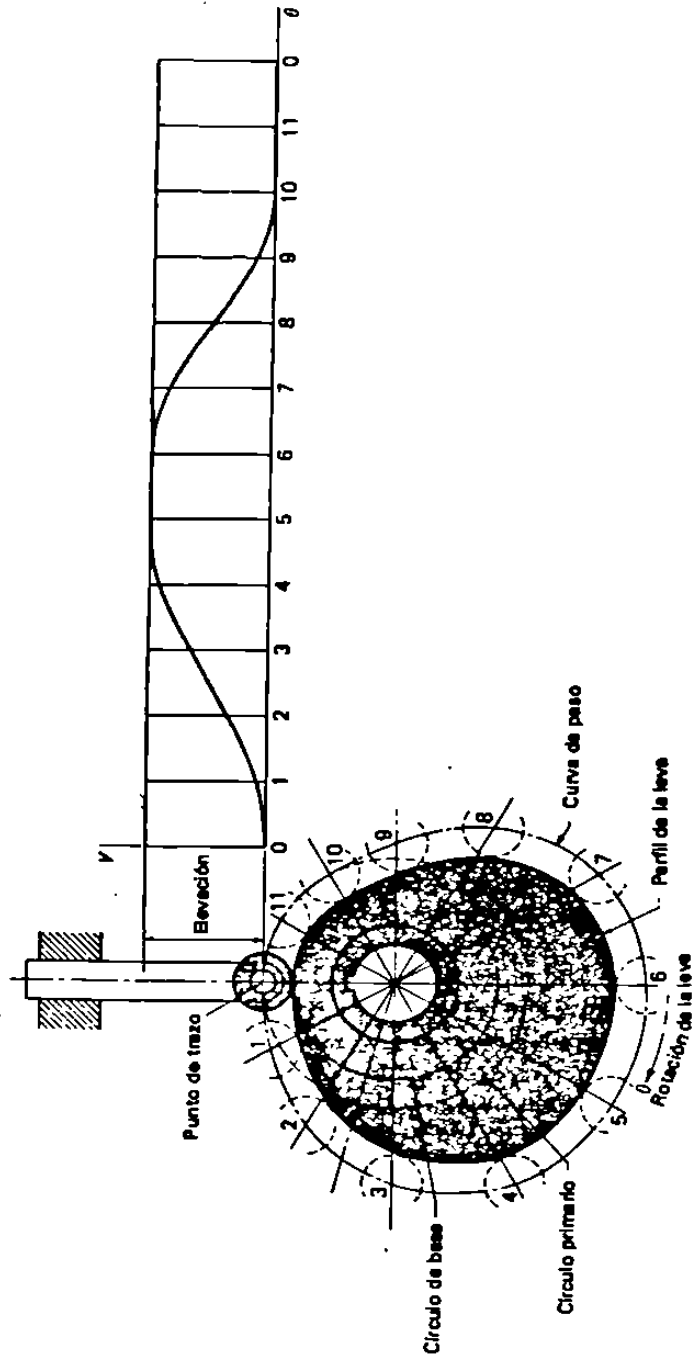


figura 6

Para los fines graficos, resulta mucho mas conveniente dibujar una sola vez, empleando el punto B como centro. Después de dividir el circulo y la abscisa en un numero igual de partes y numeradolas como se indica, se proyecta cada punto del circulo horizontal hasta que se intersecta la ordenada; a continuación, partiendo de esta ultima, se proyecta -- paralelo a la diagonal OB para obtener el punto correspondiente sobre el diagrama de desplazamientos.



· II. CINEMATICA DE LAS LEVAS.

2.1. MOVIMIENTO DEL SEGUIDOR.

2.2. LA LEVA POLINOMIAL.

2.3. LEVA DE PLACA CON SEGUIDOR OSCILANTE DE
RODILLO.

2.1 MOVIMIENTO DEL SEGUIDOR.

Se ha visto que el diagrama de desplazamientos se --
representa graficamente con el movimiento del seguidor Y co-
mo la ordenada y el angulo de rotación de la Leva θ como --
abscisa, sea cual fuera el tipo de leva o seguidor de que se
trate. El diagrama de desplazamientos es, por Ende, una gra-
fica que representa algun función matematica que relaciona -
los movimientos de entrada y de salida del sistema de Leva.

En terminos generales, esta relación es.

$$Y = Y (\theta)$$

Si se quisiera tomar la molestia de hacerlo, se po---
dría trazar graficas adicionales que representen las deriva-
das de Y con respecto a θ . La primera derivada se denota-
ra como

$$Y' (\theta) = \frac{dY}{d\theta}$$

Esta expresión representa la pendiente del diagrama -
de desplazamiento en cada angulo θ . Esta derivada, aunque
ahora parece tener poco valor practico, es una medida de lo
empinado del diagrama de desplazamiento. descubriremos des--
pués que esta intimamente relacionada con la ventaja mecani-
ca del sistema de leva y se manifiesta en aspectos tales co-
mo el angulo de presión. Si se considera una leva de cuña -
con un seguidor también de Cuña, el propio diagrama de des--
plazamientos tiene la misma forma que la leva correspondien-
te. Aquí se puede empezar por imaginar las dificultades que
se presentarán si la leva es demasiado empinada, esto es, si
 Y' tiene un valor demasiado alto.

La segunda derivada de \underline{Y} con respecto a θ también es significativa, se representa aquí como.

$$Y'' (\theta) = \frac{d^2 Y}{d\theta^2}$$

Aunque no tan fácil de imaginar, esta íntimamente relacionada con el radio de curvatura de la Leva en varios puntos a lo largo del perfil. Puesto que existe una relación inversa, conforme Y'' se hace muy grande, el radio de curvatura se hace muy pequeña. Si Y'' se hace infinita, el perfil de la Leva se hace puntiaguda en esa posición, lo que constituye una condición no satisfactoria en extremo desde el punto de vista de los esfuerzos de contacto entre las superficies de la Leva y el seguidor.

La siguiente derivada también se puede representar gráficamente, si así se desea.

$$Y''' (\theta) = \frac{d^3 Y}{d\theta^3}$$

Aunque no es fácil describirla geométricamente, es la rapidez de cambio de Y'' , y más adelante se verá que esta derivada también se debe controlar al elegir la forma detallada del diagrama de desplazamientos.

Obtención de las ecuaciones para describir el diagrama de desplazamiento de una Leva que sube con movimiento parabólico, desde una detención hasta otra.

\underline{L} ELEVACION TOTAL
 $\underline{\beta}$ ANGULO TOTAL DE ROTACION DE LA LEVA.

Como se muestra en la figura 5, se necesitarán dos parabolitas que se encuentren en un punto de inflexión. Para la primera mitad del movimiento se elige la ecuación general de una parábola.

$$1 \quad Y = A \theta^2 + B \theta + C$$

Derivando :

$$2 \quad Y' = 2A \theta + B$$

$$3 \quad Y'' = 2A$$

$$4 \quad Y''' = 0$$

Igualado la posición y la pendiente con la detención anterior.

$$\text{Cuando } \theta = 0 \quad Y = 0$$

$$Y(0) = A(0)^2 + B(0) + C \Rightarrow C = 0$$

$$Y'(0) = 2A(0) + B \Rightarrow B = 0$$

PUNTO DE INFLEXION :

$$\text{Cuando } \theta = \frac{\beta}{2} \quad Y = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo los valores A y B en 1 así como las condiciones θ y Y

$$L/2 = A(\beta/2)^2 + B(0) + C$$

Para la primera mitad del movimiento las ecuaciones son:

$$Y = 2L \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2$$

$$Y' = \frac{4L}{\beta^2} \theta$$

$$Y'' = \frac{4L}{\beta^2}$$

$$Y''' = 0$$

La pendiente maxima ocurre en $\theta = \frac{\beta}{2}$

$$5 \quad Y'_{\text{max.}} = \frac{2L}{\beta}$$

Para analizar la segunda mitad del movimiento, se regresa a las ecuaciones generales 1 a 4.

Sustituyendo las condiciones iniciales :

$$\theta = \beta \quad y \quad Y = L$$

Asi como:

$$Y' = 0$$

$$6 \quad L = A\beta^2 + B\beta + C.$$

Para sacar la pendiente para la segunda parabola derivamos esta ecuacion :

$$7 \quad 0 = 2A\beta + B$$

Iguando la pendiente para la primera y segunda parábolas

$$8 \quad \frac{2L}{\beta} = 2A\frac{\beta}{2} + B$$

RESOLVIENDO SIMULTANEAMENTE 6 Y 8.

$$(1/\beta) \quad L = A\beta^2 + B\beta + C \quad (1/\beta)$$

$$(-) \quad \frac{2L}{\beta} = 2A\frac{\beta}{2} + B \quad (-)$$

$$L/\beta = \frac{A\beta^2}{\beta} + \frac{B\beta}{\beta} + \frac{C}{\beta}$$

$$- \frac{2L}{\beta} = -A\beta - B$$

$$- L/\beta = C/\beta$$

$$- C = -L$$

RESOLVIENDO SIMULTANEAMENTE: 7 Y 8.

$$0 = 2A\frac{\beta}{2} + B$$

$$(-) \quad \frac{2L}{\beta} = A\beta + B \quad (-)$$

$$0 = 2A\frac{\beta}{2} + B$$

$$- \frac{2L}{\beta} = A\beta - B$$

$$- \frac{2L}{\beta} = A\beta$$

$$A = -\frac{2L}{\beta}$$

SUSTITUYENDO ESTE VALOR EN EC. 7

$$0 = 2 \left(-\frac{2L}{\beta} \right) \beta + B$$

$$B = \frac{4L}{\beta}$$

Sustituyendo el valor de estas constantes en las formas mas generales nos da la ecuaciones para la segunda mitad del movimiento :

$$Y = L \left\{ 1 - 2 \left(1 - \frac{\theta}{\beta} \right)^2 \right\}$$

$$Y' = \frac{4L}{\beta} \left(1 - \frac{\theta}{\beta} \right)$$

$$Y'' = - \frac{4L}{\beta^2}$$

$$Y''' = 0.$$

Hemos encontrado las derivadas cinematicas del movimiento del seguidor. Estas son derivadas con respecto a θ . Ahora consideramos las derivadas de los movimientos del seguidor con respecto al tiempo.

$$\theta (t).$$

Suponemos que se conoca su velocidad y aceleracion :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad ; \quad \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Tambien suponemos conocida la siguiente derivada -- (tiron o segunda aceleracion).

$$\dot{\alpha} = \frac{d^3\theta}{dt^3}$$

Por lo comun , la leva de placa es impulsada por un eje a velocidad constante, por lo tanto ω es una cte. conocida.

Consideremos la situacion mas general :

$$Y = Y (\theta)$$

$$\theta = \theta (t).$$

Por lo tanto se puede derivar para encontrar las derivadas respecto al tiempo del movimiento del seguidor.

$$\dot{Y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

$$\dot{Y} = Y'\omega$$

Del mismo modo, la aceleracion y el tiron del seguidor estan dados por :

$$\ddot{Y} = \frac{d^2y}{dt^2} = Y''\omega^2 + Y'\alpha$$

$$\dddot{Y} = \frac{d^3y}{dt^3} = Y'''\omega^3 + 3Y''\omega\alpha + Y'\dot{\alpha}$$

Cuando la velocidad del eje de la leva es constante estas expresiones se reducen a :

$$\dot{Y} = Y'\omega$$

$$\ddot{Y} = Y''\omega^2$$

$$\dddot{Y} = Y'''\omega^3$$

Debido a que la curva de aceleracion de la leva en la que su seguidor determinó un movimiento parabolico es discontinua tiene aplicacion en sistemas de baja velocidad

A Continuación se mostrará el estudio para una leva de gran velocidad se ha escogido para este analisis una leva de tipo CICLOIDAL.

Al Diseñar una leva para movimiento rapido el movimiento del seguidor puede obedecer a esta misma ley de gravedad y tener un movimiento acelerado hasta que la mitad de este camino sea alcanzado despues de un movimiento retardado hasta el final de su trayectoria.

Un cuerpo en caída libre desciende por espacios durante -- unidades sucesivas de tiempo, y proporcionales a los números impares 1,3,7,9,. etc y el espacio total atravesado igual a la suma de todos los espacios, otro tipo de movimiento para el seguidor de la Leva el cual ha sido utilizado con buenos resultados y el cual evita cambios bruscos de aceleración, da una curva de desplazamientos la cual -- normalmente esta dada por la ecuación de una CICLOIDE mostrada a continuación.

$$Y = \frac{L}{\pi} \left(\theta - \frac{1}{2} \text{SEN } 2 \theta \right).$$

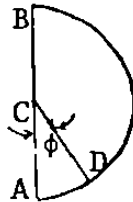
Refiriendonos a la figura mostrada permite que el seguidor se mueva a la largo de la línea AB.

Dibujamos un semicirculo con AB como un diametro y asumimos el radio CD de este semicirculo para voltear con una velocidad angular uniforme empezando con CA cuando el seguidor comienza a moverse y girando 180° A CB mientras el seguidor se mueve A B.

Vamos a hacer el desplazamiento del seguidor cuando

CD ha alcanzado el ángulo θ . después la Leva esta tan (DESIGNADA) que el seguidor tiene un desplazamiento - que satisface la ecuación mostrada anteriormente.

FIGURA



Si B es el ángulo total hasta el cual la leva regresa haciendo al seguidor moverse la distancia L y θ es el ángulo regresado por la Leva cuando el radio CD ha girado hacia el ángulo θ , entonces:

$$\frac{\theta}{\pi} = \frac{\theta}{\beta} \quad \text{o} \quad \theta = \frac{\pi\theta}{\beta}$$

SUSTITUYENDO ESTE VALOR DE θ EN LA ECUACION (1) NOS DA:

$$Y = \frac{L}{\pi} \left(\frac{\pi\theta}{\beta} - \frac{1}{2} \text{ sen } \frac{2\pi\theta}{\beta} \right)$$

LA VELOCIDAD Y ACELERACION SERAN:

$$Y' = \frac{L}{\beta} \left(1 - \text{Cos } 2\frac{\pi\theta}{\beta} \right)$$

$$Y'' = \frac{2\pi L}{\beta^2} \text{ Sen } \frac{2\pi\theta}{\beta}$$

Y TAMBIEN :

$$Y''' = \frac{4\pi^2 L}{\beta^3} \text{ Cos } \frac{2\pi\theta}{\beta}$$

Las ecuaciones para el movimiento cicloidal de retor
no completo seran :

$$Y = L \left(1 - \frac{\theta}{\beta} + \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen} \frac{2\pi\theta}{\beta} \right)$$

$$Y' = - \frac{L}{\beta} \left(1 - \cos \frac{2\pi\theta}{\beta} \right)$$

$$Y'' = - \frac{2\pi L}{\beta^2} \operatorname{sen} \frac{2\pi\theta}{\beta}$$

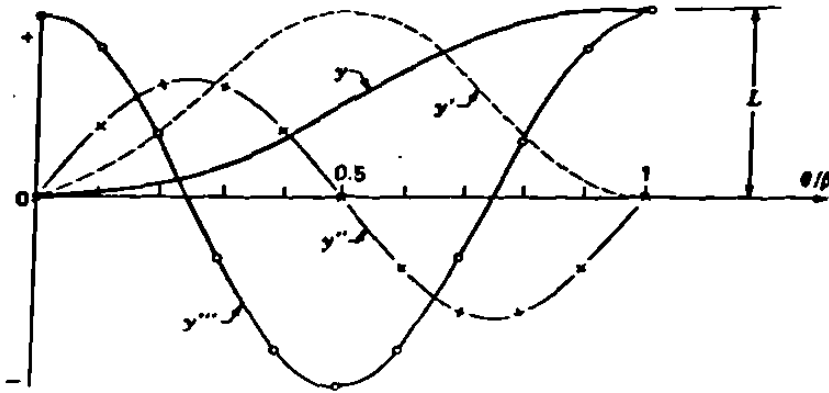


Diagrama de desplazamientos para una leva cicloidal de subida completa

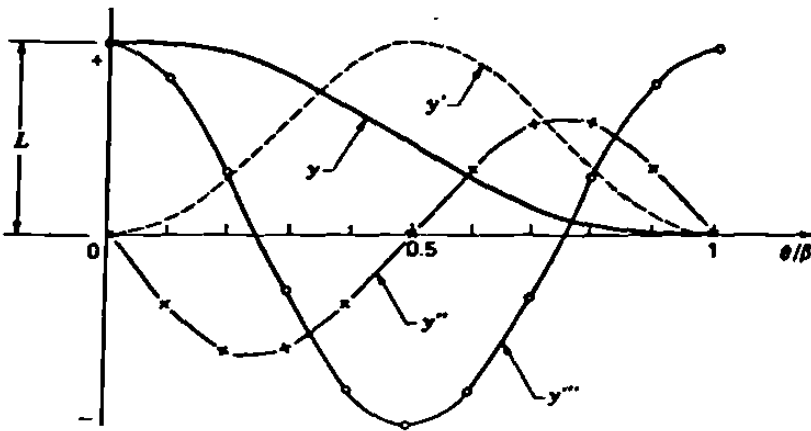


Diagrama de desplazamientos para una leva cicloidal de retorno completo.

2.2 LA LEVA POLINOMIAL.

Aunque la diversidad de curvas basicas estudiadas en secciones anteriores por lo comun son adecuadas, evidentemente no representan una lista exhaustiva de los movimientos que podrian usarse en el diseño de levas.

Otro metodo comun para diseñarlas consiste en sintetizar las curvas de movimiento adecuadas usando ecuaciones polinomiales. Se principia con la siguiente ecuacion basica.

$$Y = C_0 + C_1 \frac{\theta}{\beta} + C_2 \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2 + C_3 \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^3 + \dots$$

$$\beta = \text{Recorrido total de } \theta$$

En donde Y y θ son, como antes, el movimiento de subida y de entrada de la leva. El valor de β representa el recorrido total de θ tal que para la seccion de la leva que se esta desarrollando, la razon $\frac{\theta}{\beta}$ varia de 0 a 1. Las constantes C_i dependen de las condiciones impuestas en la frontera, por lo comun se logra desarrollar un movimiento apropiado mediante la seleccion correcta de las condiciones en la frontera y el orden del polinomio.

Como ejemplo del metodo polinomial, tomamos la curva de subida completa con las condiciones frontera siguientes

$$\theta = 0 \quad Y = 0 \quad Y' = 0 \quad Y'' = 0$$

$$\theta = \beta \quad Y = L \quad Y' = 0 \quad Y'' = 0$$

$$Y' = C_0 + C_1 \frac{\theta}{\beta} + C_2 \frac{\theta}{\beta^2} + 3C_3 \frac{\theta^2}{\beta^3} + 4C_4 \frac{\theta^3}{\beta^4} + 5C_5 \frac{\theta^4}{\beta^5}$$

$$Y' = \frac{1}{\beta} \left\{ C_1 + 2C_2 \frac{\theta}{\beta} + 3C_3 \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2 + 4C_4 \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^3 + 5C_5 \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^4 \right\}$$

$$Y'' = \frac{1}{\beta^2} \left[2C_2 + 6C_3 \frac{\theta}{\beta} + 12C_4 \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2 + 20C_5 \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^3 \right]$$

Sustituyendo en estas ecuaciones las condiciones ---,
 frontera.

$$1 \quad 0 = C_0$$

$$2 \quad L = C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5$$

$$3 \quad 0 = C_1$$

$$4 \quad 0 = C_1 + 2C_2 + 3C_3 + 4C_4 + 5C_5$$

$$5 \quad 0 = 2C_2$$

$$6 \quad 0 = 2C_2 + 6C_3 + 12C_4 + 20C_5$$

$$C_0, C_1 \text{ y } C_2 = 0$$

$$2 \quad L = C_3 + C_4 + C_5 \quad (-2)$$

$$4 \quad 0 = 3C_3 + 4C_4 + 5C_5$$

$$6 \quad 0 = 6C_3 + 12C_4 + 20C_5 \quad \left(-\frac{1}{6}\right)$$

$$-2L = -2C_3 - 2C_4 - 2C_5$$

$$0 = 3C_3 + 4C_4 + 5C_5$$

$$0 = -C_3 - 2C_4 - \frac{20}{6}C_5$$

$$-2L = -\frac{12}{6}C_3 + \frac{30}{6}C_4 - \frac{20}{6}C_5 = -\frac{2}{6}C_5$$

$$C_5 = 6L.$$

$$2 \quad L = C_3 + C_4 + 6L$$

$$4 \quad \underline{0 = 3C_3 + 4C_4 + 30L}$$

$$(-4) \quad -5L = C_3 + C_4 \quad (-4)$$

$$\underline{-30L = 3C_3 + 4C_4}$$

$$20L = -4C_3 - 4C_4$$

$$\underline{-30L = 3C_3 + 4C_4}$$

$$-10L = -C_3$$

$$C_3 = 10L$$

$$2 \quad L = 10L + C_4 + 6L$$

$$C_4 = -15L$$

Sustituyendo las constantes en la ecuacion general :

$$Y = L \left\{ 10 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^3 - 15 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^4 + 6 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^5 \right\}$$

Este es el movimiento polinomial 3 - 4 - 5. De su-

- bida completa, las propiedades de este tipo de leva son muy similares a las del movimiento cicloidal. (comparar --- curvas de respuesta).

$$Y' = \frac{L}{\beta} \left\{ 30 \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2 - 60 \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^3 + 30 \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^4 \right\}$$

$$Y'' = \frac{L}{\beta^2} \left\{ 60 \frac{\theta}{\beta} - 180 \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2 + 120 \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^3 \right\}$$

$$Y''' = \frac{L}{\beta^3} \left\{ 60 - 360 \frac{\theta}{\beta} + 360 \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2 \right\}$$

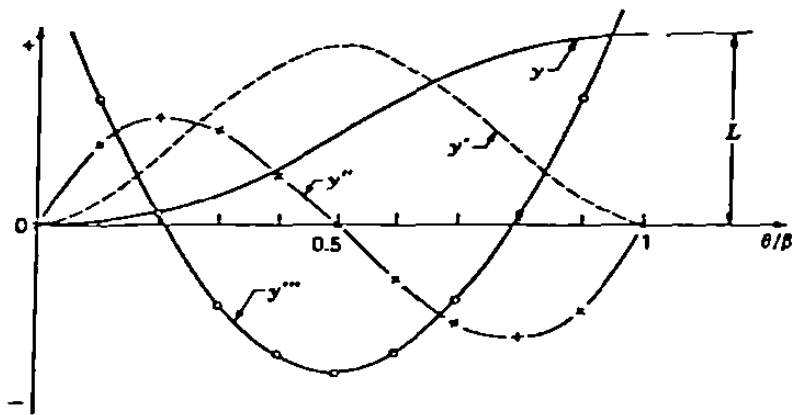


Diagrama de desplazamientos para una leva Polinomial de subida completa

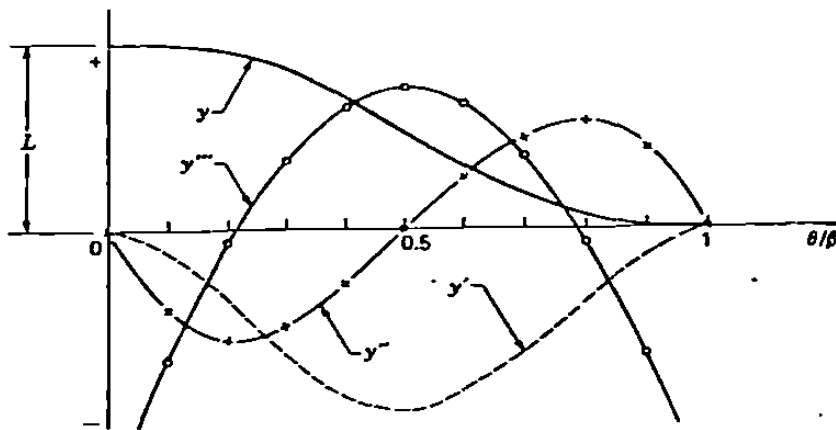


Diagrama de desplazamientos para una leva Polinomial de retorno completo.

2.3 LEVA DE PLACA CON SEGUIDOR OSCILANTE DE RODILLO

Mostramos a continuacion una leva de placa con seguidor oscilante de rodillo, nos faltan por elegir tres parametros, despues de completar el diagrama de desplazamientos. Dicho esto para poder efectuar el trazo de la leva -- encontraremos los siguientes parametros.

- r_A Radio del circulo primitivo.
- e Excntricidad.
- r_R Radio del rodillo.

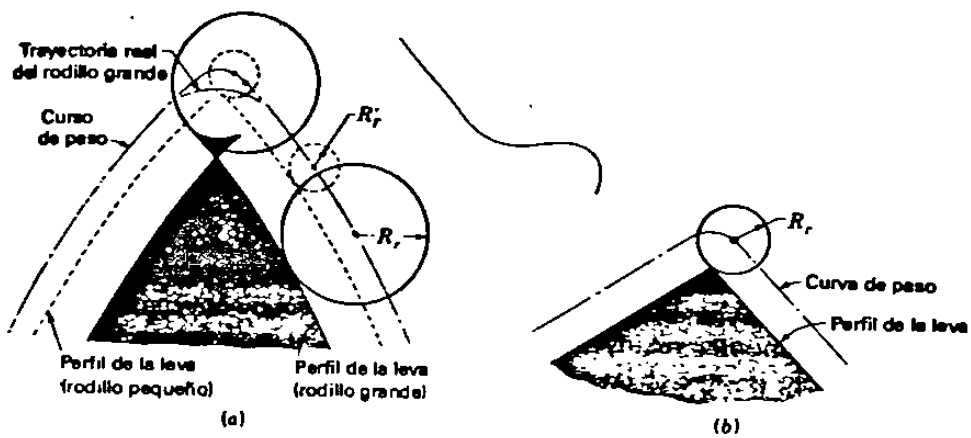
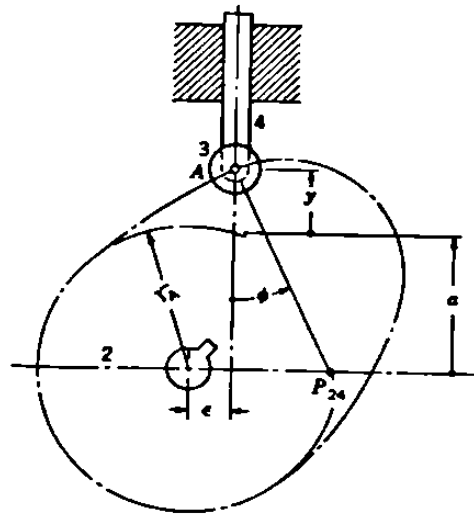
Tambien hay dos problemas potenciales que es necesario considerar al elegir estos parametros y son :

- 1 La Socavacion
- 2 Angulo de Presion.

El angulo de presion.- Es el comprendido entre el eje del vastago del seguidor y la linea de accion de la fuerza ejercida por la leva sobre el seguidor de rodillo, la normal a la curva de paso que pasa por el punto de trazo. El angulo de presion es denotado por ϕ . Solo la componente de la fuerza a lo largo de la linea de movimiento del seguidor resulta util para contrarrestar la carga de salida ; la componente perpendicular debe mantenerse en valor bajo para reducir la friccion de deslizamiento entre el seguidor y su guia, si el angulo de presion es demasiado grande, aumentara el efecto de friccion y puede hacer que el seguidor sufra una traslacion que produzca un traqueteo e incluso un atascamiento. Los angulos de presion en la leva hasta de aproximadamente 30° a 35° se consideran

como los mas grandes que es factible usar sin probocar pro
blemas .

En la figura se ve que la normal a la curva de paso se intersecta con el eje horizontal en el punto P_{24} , el -- centro instantaneo de velocidad entre la leva 2 y el seguidor 4. Puesto que el seguidor se esta trasladando, todos - sus puntos tienen velocidades iguales a la de P_{24} pero esta tambien debe ser igual a la velocidad del punto coincidente del eslabon 2.



EL ANGULO DE PRESION.

$$VP' = \dot{Y} = \omega RP O$$

$$\frac{\dot{Y}}{\omega} = Y' = RB_{2\alpha} O_2$$

1 $Y' = \epsilon + (a + Y) \tan \phi$

$$r_A^2 = a^2 + \epsilon^2$$

2 $a = \sqrt{r_A^2 - \epsilon^2}$

Despejando de 1

$$Y' - \epsilon = (a + Y) \tan \phi$$

3 $\phi = \tan^{-1} \frac{Y' - \epsilon}{a + Y}$

Sustituyendo 2 en 3

$$\phi = \tan^{-1} \frac{Y' - \epsilon}{\sqrt{r_A^2 - \epsilon^2} + Y}$$

Si $\epsilon = 0$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{Y'}{r_A + Y}$$

EL RADIO DE CURVATURA.

En la figura 7 observamos :

$$r_R = \rho_K$$

r_R Radio del rodillo.

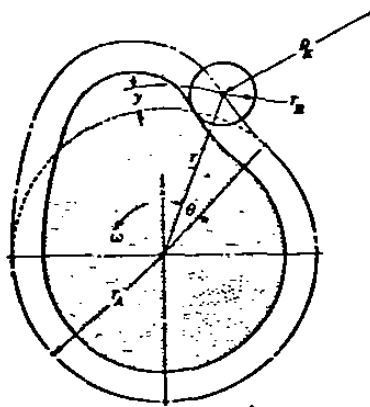
ρ_K Radio de curvatura de la curva primitiva para -
seguidor con rodillo.

$$\rho_K > r_R$$

r_A Radio de la circunferencia principal.

Y Desplazamiento del seguidor.

figura 7



El radio de cualquier punto de la circunferencia primitiva depende del ángulo θ de la leva.

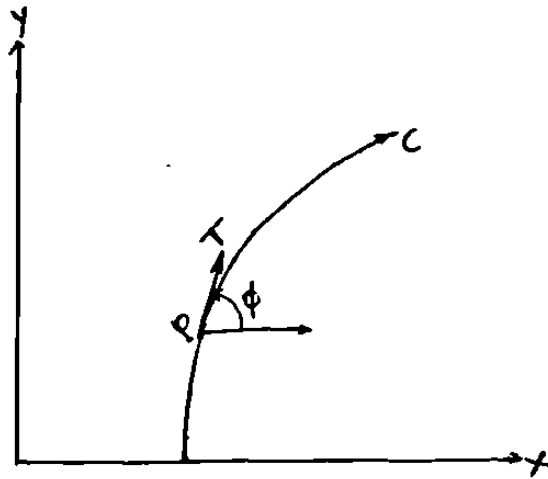
Definición del radio de curvatura: si $k(t)$ es la curvatura de una curva cualquiera en un punto P , y $k(t) \neq 0$ en tonces el radio de curvatura en P denotado por $\rho(t)$ esta de finido por :

$$\rho(t) = \frac{1}{k(t)}$$

Encontraremos una formula para calcular la curvatura de las ecs. parametricas de la curva $X=f(t)$ y $Y=g(t)$.

$$k(t) = ?$$

$$k(t) = |Ds\phi|.$$



s unidades = Longitud de arco medida desde un punto - escogido arbitrariamente en C al punto P.

$$Ds \phi = \frac{d\phi}{ds} = \frac{d\phi/dt}{ds/dt} = \frac{d\phi/dt}{\sqrt{|f'(t)|^2 + |g'(t)|^2}}$$

$$1 \quad DS \phi = \frac{d\phi/dt}{\sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2}}$$

$$\tan \phi = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

Diferenciando ambos lados de la ecuacion con respecto a t.

$$\sec^2 \phi \frac{d\phi}{dt} = \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right) \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) - \left(\frac{dy}{dt}\right) \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

Despejando

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right) \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) - \left(\frac{dy}{dt}\right) \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)}{\sec^2 \phi \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

Sabiendo que :

$$\sec^2 \phi = 1 + \tan^2 \phi = 1 + \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

Sustituyendo esto :

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right) \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) - \left(\frac{dy}{dt}\right) \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

Sustituyendo esto en 1.

$$k(t) = Ds \phi = \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right) \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) - \left(\frac{dy}{dt}\right) \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)}{\left|\left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{dy}{dt}\right)\right|^{\frac{1}{2}} \left|\left(\frac{dx}{dt}\right) - \left(\frac{dy}{dt}\right)\right|^{\frac{1}{2}}}$$

$$\rho(t) = \frac{1}{k(t)}$$

$$\rho(t) = \frac{\left| \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right|^{3/2}}{\left(\frac{dx}{dt} \right) \left(\frac{d^2y}{dt^2} \right) - \left(\frac{dy}{dt} \right) \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right)}$$

La ecuacion general para el radio de curvatura en ---
coordenadas polares es :

$$b \quad \rho = \frac{\left| (r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2) \right|^{3/2}}{r + 2 \left(\frac{dr}{d\theta} \right) - r \left(\frac{d^2r}{d\theta^2} \right)}$$

De a :

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dy}{d\theta}$$

$$c \quad \rho = \frac{\left| (r_A + Y)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta} \right)^2 \right|^{3/2}}{(r_A + Y)^2 + 2 \left(\frac{dy}{d\theta} \right) - (r_A + Y) \left(\frac{d^2y}{d\theta^2} \right)}$$

De $\theta = \omega t$ en $Y = f(t)$.

$$d \quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{d\theta} = \frac{dy/dt}{d\theta/dt}$$

$$e \quad \frac{d^2y}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta} \frac{dy}{d\theta} = \frac{d \frac{dy/dt}{d\theta/dt}}{d\theta/dt} = \frac{d(dy/dt)/d\theta}{d\theta/dt}$$

De ecuacion d para el numerador :

$$f \quad \frac{d}{dt} \frac{dy}{d\theta} = \frac{d}{dt} \frac{dy/dt}{d\theta/dt} = \frac{\left(\frac{d\theta}{dt}\right) \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) - \left(\frac{dy}{dt}\right) \left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)}{\left(d\theta/dt\right)^2}$$

Sustituyendo el numerador en ecuacion e :

$$g \quad \frac{d^2y}{d\theta^2} = \frac{\left(\frac{d\theta}{dt}\right) \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) - \left(\frac{dy}{dt}\right) \left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)}{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^3}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = \dot{Y}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0 \quad \text{ya que } \omega = \text{cte.}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{Y}$$

Sustituyendo esto en ecuacion g.

$$h \quad \frac{d^2y}{d\theta^2} = \frac{\omega \ddot{Y}}{\omega^3} = \frac{\ddot{Y}}{\omega^2}$$

Haciendo para radio minimo :

$$\frac{dy}{d\theta} = 0 \quad ; \quad \theta = 0 \quad ; \quad Y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{Y} \quad \text{para } \theta = 0 .$$

Utilizando tambien la ecuacion h tenemos de c.

$$\rho = \frac{|(r_A^2 + 2r_A Y^2 + Y^2) + (dy/d\theta)^2|^{3/2}}{(r_A^2 + 2Yr_A + Y^2) + 2(dy/d\theta)^2 - (r_A + Y)(d^2y/d\theta^2)}$$

$$= \frac{r_A^3}{r_A^2 - r_A(d^2y/d\theta^2)}$$

$$= \frac{r_A^2}{r_A - (\dot{Y}/\omega^2)}$$

Aqui la unidad de tiempo no influye en Y y es una propiedad geometrica. El radio de curvatura minimo de la leva debe ser :

$$\rho_{c \text{ min.}} = \rho_{\text{min}} + r_R .$$

III. DINAMICA DE LAS LEVAS.

3.1. SISTEMAS DE LEVAS DE CUERPOS RIGIDOS Y ELASTICOS.

3.2. ANALISIS DE UNA LEVA DE DISCO CON SEGUIDOR OSCI -
LANTE DE RODILLO.

3.3. ANALISIS DE SISTEMAS ELASTICOS DE LEVAS.

En este tema aplicaremos el material aprendido antes para la investigacion de las fuerzas presentes en un sistema de leva seguidor.

Encontraremos que el movimiento maquinado en la superficie de la leva no siempre es fielmente reproducido por el seguidor. Esto en cuanto a la velocidad, y la elasticidad o flexibilidad de los miembros del seguidor.

Por lo tanto aplicaremos aqui la teoria de la vibracion con el proposito de determinar la manera como el seguidor responde al movimiento que la leva describa.

3.1 SISTEMA DE LEVAS DE CUERPOS RIGIDOS Y ELASTICOS.

Con el proposito de hacer posible el analisis de las vibraciones en un sistema elastico tal como el de una leva seguidor, es primero necesario reducir el sistema mecanico a un modelo matematico.

Esto sugiere que un modelo puede ser analizado simplemente y rapidamente, pero la simplificacion puede ser tal que no existe en cierto punto relacion adecuada entre los resultados calculados y las medidas reales de las cantidades.

Por otra parte puede ser posible crear un modelo muy bueno del sistema mecanico, pero el resultado puede ser -- como necesitar tiempo muy costoso en computadoras digitales o normales para obtener un resultado.

Si este tipo de solucion no se justifica por el presupuesto de ingenieria entonces el diseñador debera emplear un modelo mas simple y alterar los resultados mediando entre su juicio y experiencia que son factores importantes para una mas rapida solución.

Un tren seguidor puede consistir en una o mas vari -
llas, brazos, engranes y resortes los cuales todos son e -
lasticos. Todos estos miembros tienen masa la cual esta --
distribuida o arreglada de acuerdo con sus dimensiones fi -
sicas. Varias clases de friccion o humedad existen debido
al resbalar relativo, la resistencia del aire y efectos in -
ternos o moleculares.

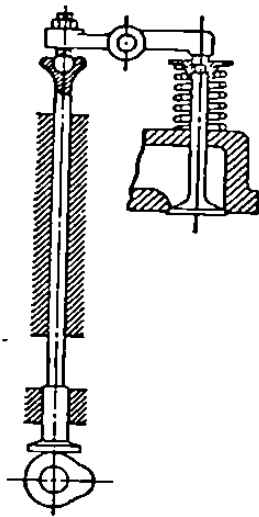


figura 1

En la figura 1. se muestra el dibujo esquemático de una válvula en la culata en un motor de automóvil. Este es un ejemplo típico de tren seguidor que se puede analizar en cualquier mecanismo de levas. Presentamos en la figura 2. un modelo matemático que es un sistema vibratorio de tres grados de libertad, en esta figura la masa m_1 es la masa de la leva y parte de la flecha de la leva y k_1 representa la rigidez o elasticidad de la flecha.

La masa m_1 puede ser usada para representar la carga a mover, y esta es sostenida por el resorte k_1 . La coordenada X_1 es el movimiento de la carga, este es el movimiento deseado por y es el que el diseñador desea obtener cuando especifica la forma y la curva de la leva.

La masa m_2 es la del tren del seguidor. Los amortiguadores están dispuestos para responder a la fricción y a la humedad.

El sistema descrito antes puede ser reducido a 2 grados de libertad si tomamos la flecha de la leva como absolutamente rígida, esto nos da el sistema vibratorio de la figura 3a. Con esta configuración el movimiento Y es el movimiento maquinado en la leva. Johnson de la universidad de Yale resolvió este problema con cero amortiguamiento usando el método de diferenciales finitas. Debido a esto reducimos a uno los grados de libertad de las figuras 3b o 3c.

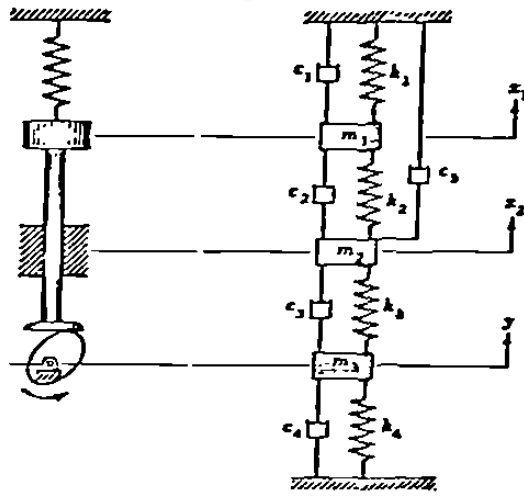


figura 2

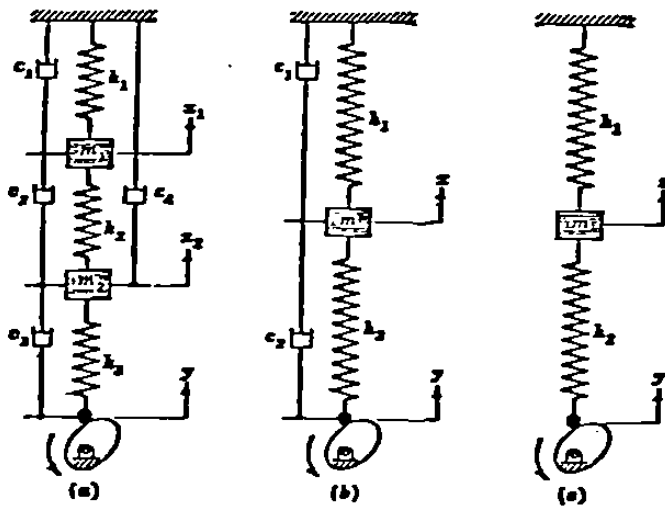


figura 3

3.2 ANALISIS DE UNA LEVA DE DISCO CON SEGUIDOR OSCILANTE DE RODILLO

En esta seccion se presenta un planteamiento analitico en el que se incluye friccion por deslizamiento. La geometria de este sistema aparece ilustrada en la figura 4. - en este analisis se hace caso omiso del efecto del peso -- del seguidor sobre los cojinetes.

Se presenta tambien en la figura un diagrama de cuerpo libre del seguidor y el rodillo. Si Y es cualquier movimiento maquinado en la leva y $\theta = \omega t$ es el angulo de la -- leva, en $Y=0$ el seguidor se encuentra en la parte baja de su carrera, de manera que $O_2A=R+r$ de manera que:

$$a = R + r + Y$$

En la figura observamos que la fuerza de contacto -- del rodillo forma el angulo ϕ , el angulo de presion con el eje X. Puesto que la direccion de F_{23} es la misma que la de la normal a la de las superficies en contacto, la interseccion de esta recta con el eje X es el centro instantaneo -- comun de la leva y el seguidor. Esto significa que la velocidad de este punto es la misma, no importa que se considere como un punto del seguidor o un punto de la leva, de -- donde :

$$\dot{Y} = a \omega \tan \phi$$

$$\tan \phi = \frac{\dot{Y}}{a \omega}$$

$$1 \quad F_{34}^X = F_{23} - Nb + Nc$$

$$2 \quad \Sigma F_{34}^Y = F_{23} - \mu (Nb+Nc) - F_{14} - k(Y+) - m\ddot{Y} = 0.$$

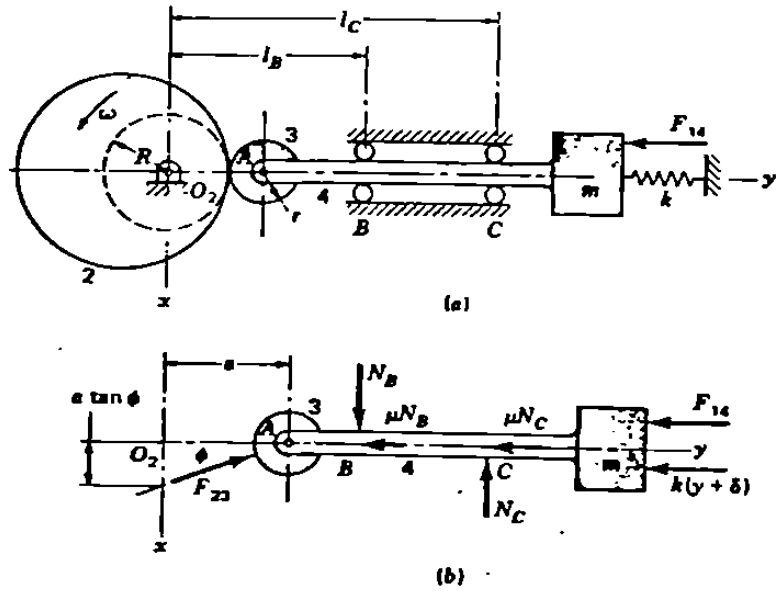


figura 4

$$3 \quad \Sigma M_A = - Nb (1b-a) + Nc (1c-a) = 0$$

Resolviendo las Ecuaciones.

De 3

$$a \quad Nc = Nb \frac{1b-a}{1c-a}$$

Sustituyendo esta ecuacion en la ecuacion 1.

$$F_{23}^X - Nb + Nb \frac{1b-a}{1c-a} = 0$$

$$F_{23}^X + Nb \left(\frac{1b-a}{1c-a} - 1 \right) = 0$$

$$0 = F_{23}^X + Nb \left(\frac{1b-a}{1c-a} - \frac{1c-a}{1c-a} \right)$$

$$0 = F_{23}^X + Nb \left(\frac{1b-a-1c+a}{1c-a} \right)$$

$$0 = F_{23}^X + Nb \frac{1b-1a}{1c-a}$$

$$Nb = \frac{-F_{23}^X}{\frac{1b-1c}{1c-a}}$$

$$Nb = \frac{1c-a}{1b-1c} (-F_{23}^X)$$

$$Nb = (F_{23}^X) \frac{1c-a}{1c-1b}$$

$$F_{23}^X = F_{23}^Y \tan \phi$$

$$b \quad Nb = \frac{F_{23}^Y \tan \phi (1c-1a)}{1c-1b}$$

Sustituyendo b en a.

$$N_c = F_{23}^Y \tan \phi \frac{1c-a}{1c-1b} \left(\frac{1b-a}{1c-a} \right)$$

$$N_c = F_{23}^Y \tan \phi \frac{1b-a}{1c-1b}$$

Sustituyendo b y c en 2.

$$0 = F_{23}^Y - \mu \left\{ F_{23}^Y \tan \phi \frac{1c-a}{1c-1b} + F_{23}^Y \tan \phi \frac{1b-a}{1c-1b} - F_{14} - k(Y+\delta) - m\ddot{Y} \right\}$$

$$0 = F_{23}^Y \left\{ 1 - \mu \tan \phi \left(\frac{1c-1b-2a}{1c-1b} \right) - F_{14} - k(Y+\delta) - m\ddot{Y} \right\}$$

$$F_{23}^Y = \frac{F_{14} + k(Y+\delta) + m\ddot{Y}}{1 - \mu \tan \phi \left\{ \frac{(1c+1b-2a)}{(1c-1b)} \right\}}$$

En momento de torsion en el eje de la leva es :

$$T = - a F_{23}^Y \tan \phi .$$

3.3 ANALISIS DE SISTEMAS ELASTICOS DE LEVAS.

Presentaremos en esta seccion la respuesta de un movimiento uniforme de un mecanismo de leva no-amortiguado utilizando el metodo analitico.

Comenzando nuestro analisis despues de que las masas y las constantes de los resortes hayan sido obtenidos.

En esta parte del analisis podemos obtener una buena aproximacion del movimiento si asumimos que no hay amortiguamiento. Esto resulta en un sistema de un solo grado de libertad. De la figura 5 la velocidad angular de la leva es ω y el movimiento maquinado hacia la curva de la leva es Y .

La masa total del seguidor es m y la constante k_1 sirve para detener al seguidor en contra de la curva de la leva, este resorte esta siempre ensamblado con una fuerza inicial o precarga actuando en contra del seguidor. El resorte k_2 representa la elasticidad del tren seguidor y asi que sera mucho mas duro que el resorte k_1 .

Con el proposito de escribir las condiciones de equilibrio dinamico, asumimos en algun instante en el tiempo -- que el desplazamiento X es mas grande que Y . Esto nos da un diagrama de cuerpo libre como en la figura 5, con las dos fuerzas de los resortes actuando hacia abajo en la masa.

Las ecuaciones quedan como sigue :

$$m\ddot{X} = - k_1 X - k_2 (X-Y).$$

6

$$\ddot{X} + \frac{k_1 + k_2}{m} X = \frac{k_2 Y}{m}$$

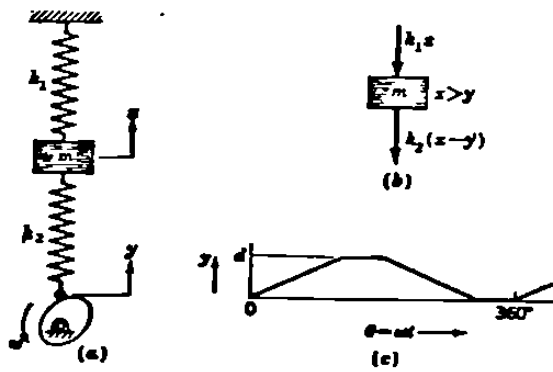


figura 5

Sabiendo que la frecuencia circular natural no amortiguada para un sistema es :

a
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

b
$$\ddot{X} + \omega_n^2 X = \frac{k_2 Y}{m}$$

La solución de esta ecuación diferencial es :

c
$$X = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t + \frac{k_2 Y}{m \omega_n^2}$$

Donde :

d
$$Y = \frac{L}{\beta} \theta = \frac{L \omega \cdot t}{\beta}$$

Esta ecuación es para un solo movimiento y solo es va lida durante el periodo de salida.

e
$$\dot{X} = -A \omega_n \sin \omega_n t + B \omega_n \cos \omega_n t + \frac{k_2 \dot{Y}}{m \omega_n^2}$$

Si :

$$t = 0$$

$$X = \dot{X} = 0$$

Sustituyendo estas condiciones en c.

$$0 = A \cos \omega_n(0) + B \operatorname{sen} \omega_n(0) + \frac{k_2}{m \omega_n} \left\{ \frac{L \omega(0)}{\beta} \right\}$$

$$A = 0.$$

Ahora sustituyendo en e.

$$0 = -A \omega_n \operatorname{sen} \omega_n(0) + B \omega_n \cos \omega_n(0) + \frac{k_2 \dot{Y}}{m \omega_n^2}$$

$$B = - \frac{k_2 \dot{Y}}{m \omega_n^3}$$

De donde c toma la siguiente forma :

$$X = 0 + - \left(\frac{k_2 \dot{Y}}{m \omega_n^3} \right) (\operatorname{sen} \omega_n t) + \frac{k_2 Y}{m \omega_n^2}$$

$$f \quad X = \frac{k_2}{m \omega_n^2} \left(Y - \frac{\dot{Y}}{\omega_n} \operatorname{sen} \omega_n t \right).$$

La velocidad de la leva durante la elevacion es :

$$\dot{Y} = \frac{L \omega}{\beta}$$

$$k = \frac{\omega n}{\omega}$$

$$\omega n t = k \omega t = k \theta$$

Sustituyendo d y g en f:

$$X = \frac{k_2}{k m \omega n^2} \left(\frac{L \omega t}{\beta} - \frac{L \omega}{\beta \omega n} \text{sen} \omega n t \right).$$

$$X = \frac{k_2 L}{k m \omega n^2 \beta} (k \theta - \text{sen} k \theta).$$

Esta ecuacion es valida solo para $0 < \theta < \beta$

En el analisis del movimiento del seguidor las condiciones del final de un evento pueden ser usadas como -- condiciones iniciales para un segundo evento.

Al final de la elevacion descrita por la ecuacion - $\theta = \beta$ y el desplazamiento es :

$$\theta = \beta$$

$$X_1 = \frac{k_2 L}{k m \omega n^2 \beta} (k \beta - \text{sen} k \beta).$$

Diferenciando la ec. f obtenemos la velocidad.

$$\dot{X} = \frac{k_2}{m \omega n^2} (\dot{Y} - \dot{Y} \cos \omega n t).$$

Sustituyendo $k\beta$ por $\omega n t$ y \dot{Y} por $\frac{L\omega}{\beta}$ nos da la velocidad al final de la elevación :

$$\dot{X}_1 = \frac{k_2 L}{k m \omega n \beta} (1 - \cos k \beta)$$

Las nuevas condiciones frontera seran :

$$t = 0 \quad X = X_1 \quad \dot{X} = \dot{X}_1$$

Aqui $Y = \text{cte.} = L.$

Sustituyendo en la ec. c.

$$X_1 = A \cos \omega n(0) + B \sen \omega n(0) + \frac{k_2 L}{m \omega n^2}$$

$$A = X_1 - \frac{k_2 L}{m \omega n^2}$$

$$\text{Si } Y = \text{cte} \quad \dot{Y} = 0.$$

Sustituyendo ahora las condiciones frontera en la ec.
e :

$$X = -A\omega_n \text{sen}\omega_n(0) + B\omega_n \text{cos}\omega_n(0) + \frac{k_2(0)}{m\omega_n^2}$$

$$B = \frac{\dot{X}}{\omega_n}$$

Sustituyendo estas constantes en la ec. gral. nos da
la ecuacion para el periodo de movimiento constante.

$$X = \left(X_1 - \frac{k_2 L}{m\omega_n^2}\right) \text{cos}\omega_n t + \frac{\dot{X}_1}{\omega_n} \text{sen}\omega_n t + \frac{k_2 L}{m\omega_n^2}$$

Transformando a un solo termino trigonometrico y a --
un un angulo de fase.

$$X = \sqrt{\left(X_1 - \frac{k_2 L}{m\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{\dot{X}_1}{\omega_n}\right)^2} \text{cos}(\omega_n t - \phi) + \frac{k_2 L}{m\omega_n^2}$$

$$\tan \phi = \frac{\dot{X}_1}{\omega_n \left(X_1 - \frac{k_2 L}{m\omega_n^2}\right)}$$

Finalmente reemplazando nt por $k\theta$ nos da la ecuacion

para el movimiento durante el periodo de descanso de el se
guidor :

$$X = \sqrt{\left(X_1 - \frac{k_2 L}{m\omega n^2}\right)^2 + \left(\frac{\dot{X}_1}{\omega n}\right)^2} \cos (k\theta - \phi) + \frac{k_2 L}{m\omega n^2}$$

IV. D I S E N O D E L E V A S .

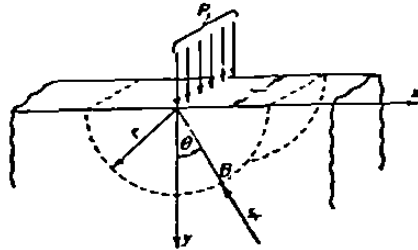
4.1 DETERMINACION DEL ESFUERZO DE CONTACTO .

4.2 DISEÑO DEL PERFIL DE UNA LEVA.

4.3 BIBLIOGRAFIA.

4.1 DETERMINACION DEL ESFUERZO DE CONTACTO.

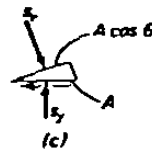
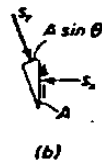
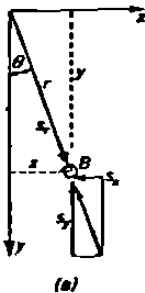
Consideramos primero el caso de una fuerza P uniformemente distribuida a través de una línea sobre una placa semi-infinita de espesor unitario.



El esfuerzo en la placa tiene una simple distribución radial S_r alrededor del semicírculo de radio r

$$S_r = - \frac{2P}{\pi r} \cos \theta$$

Presentamos un elemento infinitesimal en el punto B. Como se muestra en la figura a , b y c con sus componentes de esfuerzo.



$$S_{xA} = S_r A \sin^2 \theta$$

a $S_x = S_r \sin^2 \theta$

Y

$$S_{yA} = S_r A \cos^2 \theta$$

b $S_y = S_r \cos^2 \theta$

Sabiendo que :

$$\sin \theta = \frac{X}{r} \quad \text{y} \quad \cos \theta = \frac{Y}{r}$$

Sustituyendo 1 en a y b.-

$$S_x = - \frac{2P_1}{\pi r} \left(\frac{X^2}{r}\right) \frac{Y}{r} = - \frac{2PX^2Y}{\pi(X^2+Y^2)^2}$$

$$S_y = - \frac{2P_1}{\pi r} \left(\frac{Y^2}{r}\right) \frac{Y}{r} = - \frac{2PY}{\pi(X^2+Y^2)^2}$$

Por la ley de Hooke's la elongacion y en la direccion vertical es dada por :

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} (S_y - \mu S_x).$$

Sustituyendo :

c
$$\epsilon_y = - \frac{2P_1}{\pi E} \left\{ \frac{Y}{(X^2+Y^2)^2} - \mu \frac{X^2Y}{(X^2+Y^2)^2} \right\}$$

El desplazamiento v de una superficie con respecto a un punto a una distancia h es fundado cambiando el signo de cy e integrando entre los límites 0 y h .

$$d \quad v = \frac{2P_h}{\pi E} \int_0^h \frac{Y^3 dy}{(X+Y)} + \mu X^2 \int_0^h \frac{Y dy}{(X^2+Y^2)^2}$$

X se considera cte.

Resolvemos la primer integral por partes de la siguiente manera :

$$e \quad \int u dv = uv - \int v du.$$

Donde :

$$\begin{aligned} u &= Y^2 & dv &= \frac{Y dy}{(X^2+Y^2)^2} \\ du &= 2Y dy & v &= -\frac{1}{2(X^2+Y^2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^h \frac{Y^3 dy}{(X^2+Y^2)^2} &= -\frac{Y^2}{2(X^2+Y^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{2Y dy}{(X^2+Y^2)} \\ &= \frac{Y^2}{2(X^2+Y^2)} + \frac{1}{2} \ln (X^2+Y^2) \Big|_0^h \\ &= \frac{h^2}{2(X^2+h^2)} + \frac{1}{2} \ln (X^2+h^2) - \frac{1}{2} \ln X^2 \\ &= \ln \sqrt{\frac{X^2+h^2}{X^2}} - \frac{h^2}{2(X^2+Y^2)} \end{aligned}$$

Si $h \gg X$

$$= \ln \frac{h}{X} - \frac{1}{2}$$

Para la segunda mitad tenemos :

$$\int_0^h \frac{Y dy}{(X^2 + Y^2)^2} = -\frac{1}{2(X^2 + Y^2)} \Big|_0^h$$

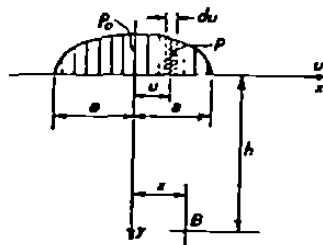
$$= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{X^2 + Y^2} - \frac{1}{X^2} \right\} = \frac{1}{2X^2}$$

Sustituimos el valor de las integrales en d

$$v = \frac{2P_1}{\pi E} \left(\ln \frac{h}{X} - \frac{1}{2} - \frac{u}{2} \right)$$

Para una distribución sería :

$$\frac{\partial v}{\partial X} = -\frac{2P_1}{\pi E X}$$



Sustituyendo ahora P_1 por $\int P du$ y X por $(X-u)$ e integrando entre los límites de $u=-a$ y $u=a$.

$$\frac{dv}{dX} = - \frac{2}{\pi E} \int_{-a}^a \frac{P du}{X-u} = - \frac{2}{\pi E} \left| \int_{-a}^0 \frac{P du}{X-u} + \int_0^a \frac{P du}{X-u} \right|$$

En la región de $u=-a$ a $u=0$. u es negativa y $(X-u)$ -- será igual a los valores correspondientes $(X+u)$ en la región $u=0$ a $u=a$. Entonces :

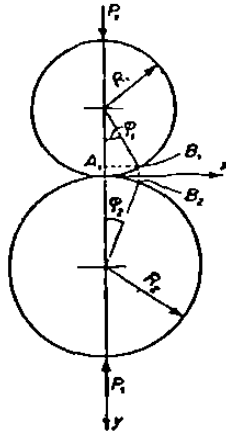
$$\begin{aligned} \frac{dv}{dX} &= - \frac{2}{\pi E} \left| \int_0^a \frac{P du}{X+u} + \int_0^a \frac{P du}{X-u} \right| \\ &= - \frac{2}{\pi E} \left| \int_0^a \left(\frac{1}{X+u} + \frac{1}{X-u} \right) P du \right| \\ &= - \frac{4X}{\pi E} \int_0^a \frac{P du}{X^2 - u^2} \end{aligned}$$

Ahora consideramos dos cilindros en contacto, como se muestra en la figura.

Al presionar los cilindros la cga. P_1 en lbs. por -- pulg. la zona de contacto es extendida en el eje Y y la -- extensión es igual a $A_1 B_1$. Los puntos B_1 y B_2 son sustentados por los pequeños ángulos ϕ_1 y ϕ_2 . Entonces:

$$X = R_1 \sin \phi_1 = R_1 \phi_1 \quad \text{ó} \quad \phi_1 = \frac{X}{R_1}$$

$$X = R_2 \sin \phi_2 = R_2 \phi_2 \quad \text{ó} \quad \phi_2 = \frac{X}{R_2}$$



La figura muestra dos cilindros en contacto entre los cuales se genera un esfuerzo compresivo llamado tambien esfuerzo de contacto.

Utilizando las formulas antes vistas en este tema determinaremos una ecuacion para el esfuerzo de contacto actuando en acero.

El desplazamiento vertical B_1B_2 se puede escribir :

$$B_1B_2 = R_1 (1 - \cos \phi_1) + R_2 (1 - \cos \phi_2)$$

Como los angulos ϕ_1 y ϕ_2 son muy pequeños, el coseno puede ser aproximado para los dos primeros terminos de las series.

$$\begin{aligned}
B_1 B_2 &= R_1 \frac{\phi_1^2}{2} + R_2 \frac{\phi_2^2}{2} = \\
&= \frac{R_1}{2} \left(\frac{X^2}{R_1^2} \right) + \frac{R_2}{2} \left(\frac{X^2}{R_2^2} \right) = \frac{X^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).
\end{aligned}$$

La distancia $B_1 B_2$ para la zona de contacto es muy pequeña comparada con las otras dimensiones de los cilindros. La elasticidad aproximada H entre dos puntos contenidos en la zona de contacto en los cilindros será :

$$\begin{aligned}
H &= B_1 B_2 + v_1 + v_2 . \\
&= \frac{X^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + v_1 + v_2 .
\end{aligned}$$

Aplicando la aproximación H a la totalidad del cilindro.

Ya que la coordenada X es independiente de esto, la derivada con respecto a X es igual a cero :

$$\frac{\partial H}{\partial X} = X \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{\partial v_1}{\partial X} + \frac{\partial v_2}{\partial X} = 0$$

Sustituiremos la ec. que encontramos antes del análisis de los cilindros en los últimos términos de esta ecuación :

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \int_0^a \frac{P du}{X^2 - u^2} = 0$$

Asumimos como en la primera figura que la carga curva es semicircular :

$$p = \frac{P_0 \sqrt{a^2 - u^2}}{a}$$

Entonces :

$$g \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{4P_0}{\pi a} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \int_0^a \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{X^2 - u^2} du = 0$$

Resolviendo la integral :

$$h \quad \int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{(X^2 - u^2) \sqrt{a^2 - u^2}} du = \int \frac{(X^2 - u^2 + a^2 - X^2) du}{(X^2 - u^2) \sqrt{a^2 - u^2}}$$

El valor de la primera integral sera :

$$i \quad \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen} \frac{u}{a} \Big|_0^a = \frac{\pi}{2}$$

Para el problema del esfuerzo de contacto solo en la region de $X^2 < a^2$ es de interes . Por esto, la segunda integral en la ecuacion h tiene el valor cero.

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{2P_0}{a} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) = 0.$$

Despejando el valor de a.

$$j \quad a = \frac{2P_0(1/E_1 + 1/E_2)}{1/R_1 + 1/R_2}.$$

La carga total P₁ puede ser tomada como :

$$\begin{aligned} P_1 &= \int P du = \frac{2P_0}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - u^2} du. \\ &= \left(\frac{2P_0}{a} \right) \frac{1}{2} \left(u \sqrt{a^2 - u^2} + a^2 \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} \right) \Big|_0^a \end{aligned}$$

$$P_1 = \frac{\pi P_0 a}{2}$$

Despejando P_0 de la ecuacion j.

$$P_0 = \frac{a(1/R_1 + 1/R_2)}{2(1/E_1 + 1/E_2)}$$

Sustituyendo en ecuacion k.

$$P = \frac{\pi a}{2} \left\{ \frac{a(1/R_1 + 1/R_2)}{2(1/E_1 + 1/E_2)} \right\} = \frac{\pi a^2 (1/R_1 + 1/R_2)}{4(1/E_1 + 1/E_2)}$$

$$a = \sqrt{\frac{4P_1 (1/E_1 + 1/E_2)}{\pi (1/R_1 + 1/R_2)}}$$

Sabiendo que :

$$a = \frac{2P_1}{\pi P_0}. \text{ Despejando } P_0 \text{ y sustituyendo el valor de } \underline{a} :$$

$$P_0 = \sqrt{\frac{P_1 (1/R_1 + 1/R_2)}{\pi (1/E_1 + 1/E_2)}}$$

Considerando el efecto de la deformacion:

Sustituyendo E por $\frac{E}{(1 - \mu^2)}$ enemos :

$$\sigma = P_0 = \sqrt{\frac{P_1 (1/R_1 + 1/R_2)}{\pi (1 - \mu^2) (1/E_1 + 1/E_2)}}$$

Considerando una relacion de poisson's $\mu = .3$ y E_1 y $E_2 = 30 \times 10^6$ Para acero nos queda :

$$\sigma = P_0 = 2290 \sqrt{P_1 (1/R_1 + 1/R_2)}.$$

4.2 DISEÑO DEL PERFIL DE UNA LEVA DE DISCO

En esta seccion resumimos todo el material estudiado en secciones anteriores para lograr el diseño de una leva de disco.

Ejemplo.- Diseñaremos una leva cicloidal con una altura maxima de desplazamiento del seguidor (nos referimos a su diagrama de desplazamientos) de 1 in. y un angulo β de 70° . El valor del radio del circulo primitivo es $r_A=2$ in. y el radio del cilindro seguidor es $r_R=0.8$ in.

Para obtener como resultado un buen perfil de leva necesitamos encontrar las siguientes incognicas.

- 1 Desplazamiento y velocidad que comprende la seccion de -
Cinematica de Levas.
- 2 Fuerzas actuantes en la leva y rodillo que comprende la -
seccion de Dinamica de Levas.
- 3 Esfuerzos de contacto actuantes debido a las fuerzas --
existentes y Trazo del Perfil de la Leva..

Para poder ejecutar el trazo de la leva necesitamos hacer calculos tabulares a intervalos de 0.1 hasta 1 para la variable X .

Esta variable sera la relacion de :

$$\frac{\theta}{\beta} \quad \therefore X = \frac{\theta}{\beta}$$

En los calculos siguientes solo tomamos el valor $X = 0.5$. Haciendo uso de los demas valores de X podremos llenar la forma tabular para el trazo de la leva.

1.- Empezamos por calcular el desplazamiento tomando para esto la ecuacion de un retorno completo contenida en la segunda seccion.

$$Y = L \left(1 - \frac{\theta}{\beta} + \frac{1}{2\pi} \text{sen} \frac{2\pi\theta}{\beta} \right) = L \left(1 - X + \frac{1}{2\pi} \text{sen} 2\pi X \right).$$

$$Y = 1 \left\{ 1 - .5 + \frac{1}{2\pi} \text{sen} 2\pi(.5) \right\}$$

$$Y = .5$$

La velocidad y la aceleracion se encuentran derivando la ecuacion del desplazamiento.

$$Y' = -L (1 - \cos 2\pi X)$$

$$Y' = -1 (1 - \cos 2\pi .5)$$

$$Y' = -2$$

La aceleracion correspondiente sera :

$$Y'' = -2\pi L \text{sen} 2\pi X$$

$$Y'' = -2\pi(1) \text{sen} 2\pi(.5)$$

$$Y'' = 0$$

2.- Calculamos ahora la magnitud de las fuerzas :

$$F_y = \frac{F_w + k(Y + \delta) + m\ddot{Y}}{1 - \mu \tan \phi \left| \frac{1c + 1b - 2a}{1c - 1b} \right|}$$

Para el calculo dinamico tenemos los siguientes datos:
 $1c - 1b = 2 \text{ in}$, $1b = 3.9 \text{ in}$, $\mu = .1$, $\delta = 0$, $k = 50 \text{ lb/in.}$, $\omega =$

600 rev/min., $F_{14} = 55$ lbs. El ancho del rodillo es .625 in
 Requerimos encontrar la distancia lc y el angulo ϕ .

$$lc = lb + 2 \text{ in} = 3.9 + 2$$

$$lc = 5.9 \text{ in.}$$

Aquí conviene hacer un cambio de variable :

$$\frac{d\theta}{dX} = \beta$$

$$\frac{dY}{dX} = \beta \frac{dY}{d\theta} \quad \delta \quad \frac{dY}{d\theta} = \frac{1}{\beta} \frac{dY}{dX}$$

$$\frac{dY}{d\theta} = \frac{Y'}{\beta}$$

$$\beta = 70^\circ \text{ en radianes} = 1.22173.$$

$$\tan \phi = \frac{Y'}{\beta(r_A + Y)}$$

$$\tan \phi = \frac{-2}{(1.22173)(2 + .5)} = .6548.$$

$$\phi = 33.21^\circ$$

Sustituyendo en la ec. de la fuerza.

$$a = r_A + Y = 2 + .5 = 2.5$$

$$F_y = \frac{55 + 50(.5) + m\ddot{Y}}{1 - .1(.6548) \left\{ \frac{5.9 + 3.9 - 2(2.5)}{2} \right\}}$$

$$F_y = 95 \text{ lbs.}$$

$$F_x = F_y \tan \phi = (95)(.6548) = 62.21 \text{ lbs.}$$

El valor de la fuerza normal sera :

$$F_n = \sqrt{(62.21)^2 + (95)^2} = 113.6 \text{ lbs.}$$

En caso de que \ddot{Y} (aceleracion) tenga algun valor diferente que cero :

$$m\ddot{Y} = \frac{W}{g} \left(\frac{2\pi \cdot \text{p.m.}}{60 \beta} \right)^2 Y''$$

$$g = 386 \text{ in/seg.}$$

3.- Encontraremos ahora el esfuerzo debido a las --- fuerzas dinamicas.

$$\sigma = 2,290 \sqrt{F_n \left(\frac{1}{r_A} + \frac{1}{R} \right)}$$

r_A = Radio del circulo primitivo.

R = Radio de la leva en un punto determinado.

Procedemos a evaluar el radio de curvatura :

$$\rho = \frac{\left| (r_A + Y)^2 + (Y')^2 \right|^{3/2}}{(r_A + Y)^2 + 2(Y')^2 - (r_A + Y)Y''}$$

$$\rho = \frac{\left| (2+5)^2 + (-2)^2 \right|^{3/2}}{(2+.5)^2 + 2(-2)^2 - (2+.5)(0)}$$

$$\rho = 2.30 \text{ in.}$$

$$R = \rho - r_R$$

$$R = 2.30 - .8 = 1.5 \text{ in.}$$

La fuerza axial por pulgada de espesor sera :

$$F_n = \frac{113.5}{.625} = 181.76 \text{ lbs.}$$

$$\sigma = 2290 \sqrt{181.76 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1.5} \right)}$$

$$\sigma = 33,347.10 \text{ lbs/pul}$$

Que es el esfuerzo compresivo existente.

HOJA

TABULAR.

X	Y	Y'	Y''	tan		$r_A^+ Y$
0	1	0	0	0	0	3
.1	.9936	-.1910	-3.693	.0522	2.59	2.994
.2	.9514	-.692	-5.976	.01919	10.51	2.951
.3	.8514	-1.308	-5.976	.3755	20.35	2.851
.4	.6936	-1.809	-3.693	.5497	28.48	2.694
.5	.5	-2.00	0	.655	33.13	2.500
.6	.3064	-1.809	3.693	.642	32.42	2.306
.7	.1486	-1.308	5.976	.498	26.29	2.149
.8	.0486	-.692	5.976	.276	15.27	2.049
.9	.0064	-.1910	3.693	.0779	4.27	2.006
1	0	0	0	0	0	2

