UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA
Y ELECTRICA

DOCTORADO EN INGENIERIA DE MATERIALES

ESTUDIO DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR EN LECHO FIJO
(PRIMERA APROXIMACION, CASO UNIDIMENSIONAL)

POR

LIC. CESAR ALBERTO NUÑEZ LOPEZ

TESIS

PRESENTADA PARA LA OBTENCION DEL GRADO
DE MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERIA MECANICA
CON ESPECIALIDAD EN INGENIERIA DE MATERIALES

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L.
MARZO DE 1991

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA
Y ELECTRICA

DOCTORADO EN INGENIERIA DE MATERIALES

ESTUDIO DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR EN LECHO FIJO

(PRIMERA APROXIMACION CASO UNIDIMENSIONAL)

POR
LIC. CESAR ALBERTO NUÑEZ LOPEZ

TESIS

PRESENTADA PARA LA OBTENCION DEL GRADO
DE MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERIA MECANICA
CON ESPECIALIDAD EN INGENIERIA DE MATERIALES

SAN NICOLAS DE LOS GARZA. N. L.
MARZO DE 1991

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
DOCTORADO EN INGENIERIA DE MATERIALES

ESTUDIO DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR EN LECHO FIJO
(PRIMERA APROXIMACION, CASO UNIDIMENSIONAL)

por

Lic. César Alberto Núñez López

TESIS PRESENTADA PARA LA OBTENCIÓN DEL GRADO
DE MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA MECÁNICA
CON ESPECIALIDAD EN INGENIERÍA DE MATERIALES

San Nicolás de los Garza, N.L.
Marzo de 1991.

AGRADECIMIENTOS

Deseo agradecer al personal docente y administrativo del Doctorado en Ingeniería de Materiales de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la Universidad Autónoma de Nuevo León por todo el apoyo brindado durante mis estudios.

A HYLSA, S.A. DE C.V. por las facilidades prestadas durante el desarrollo de la misma así como al *Dr. Luis R.* Farías por el apoyo brindado durante el desarrollo de esta tésis.

A todos mis condicipulos y Profesores del Doctorado en Ingeniería de Materiales *que de una u otra forma* participaron en ésta.

Muy especialmente a mi asesor, el Dr. Raúl Fuentes Samaniego por su respaldo y dedicación en mi formación.

Asi mismo, al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico que me brindó durante mis estudios.

A MI ESPOSA, CON AMOR, POR
TODO EL APOYO QUE ME BRINDÓ
DURANTE MIS ESTUDIOS

A MI MADRE Y A LA
MEMORIA DE MI PADRE

TABLA DE CONTENIDO

ESTUDIO DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR EN LECHO FIJO

(PRIMERA APROXIMACION: CASO UNIDIMENSIONAL)

RESUMEN.

En este trabajo de Tesis se resuelve el problema de transferencia de calor en el tiempo de un reactor cilíndrico, cuyas paredes estan recubiertas de material aislante refractario, que se lleva a cabo entre un gas de calentamiento y pelets esféricos que conforman un lecho fijo.

El problema se plantea a partir de la función Green que resuelve el problema de transferencia de calor para una partícula esférica de radio *a* con un coeficiente de convección *Hg* y temperatura incial constante *To*, determinando con ella la función de distribución de temperaturas en el pelet. De manera semejante se deduce la función de distribución de temperaturas en el refractario conociendo entonces la temperatura del lecho en cualquier punto.

Por otra parte, se resuelve el problema original pero utilizando una formulación de diferencias finitas partiendo del balance energético que debe existir entre el gas de calentamiento y el sistema pelets-refractario.

Los resultados obtenidos con la solución del problema analítico se comparan con la solución proporcionada por el método de diferencias finitas en una formulación explícita. Se observa la concordancia de los resultados pero se manifiestan las ventajas inherentes a la solución analítica.

INTRODUCCION

El estudio de la transferencia de calor en lechos fijos es de interés debido al uso frecuente de reactores químicos con estas configuraciones ya sea para producir una reacción química o para transferir calor. Algunas de las operaciones industriales en las que la fase fluida pasa a través de una fase formada por partículas sólidas son:

a) Filtración.
b) Transferencia de masa en columnas empacadas.
c) Reacciones químicas utilizando catalizadores.
d) Absorción en torres empacadas.
e) Intercambiadores regenerativos de calor.

en estos procesos se pueden encontrar diferentes configuraciones de la fase sólida pudiendo estar:

- Estacionaria, como en torres empacadas.
- Fluida, como en reactores catalíticos de lecho fluidizado.

y dependiendo de la velocidad del fluido puede suceder que las partículas,

i) queden suspendidas,
ii) sean arrastradas con el fluido,
iii) caigan por efecto de la gravedad.

En lechos fijos, el flujo es a través de los espacios entre las partículas y dado que estos no son uniformes, la fase fluida se ve acelerada y frenada a su paso por el lecho.

Como puede intuirse con todo lo anterior, un análisis de transferencia de calor en un lecho fijo es un trabajo de gran complejidad sobre todo si ocurren procesos de transformación químicos durante el proceso. Para atacar este problema, se toman en cuenta una serie de consideraciones que si bien, alteran el sistema físico real, pueden resultar en una muy buena aproximación siempre y cuando las consideraciones se hagan adecuadamente.

No en todos los procesos mencionados anteriormente se tiene que tomar en cuenta la transferencia de calor que pudiera existir entre la fase sólida y el fluido, pero existen una gran cantidad de ellos en que si es de gran importancia este análisis, por ejemplo, en los procesos de reducción de minerales utilizando gases reductores.

Todas las concepciones desarrolladas sobre estos procesos de reducción (tecnológicamente posibles) se han caracterizado por un común denominador: obtener la más rápida y completa conversión química y transferencia de calor en el menor volumen posible; se ha concluido que una circulación uniforme de los gases alrededor de las piezas de mineral ofrece las mejores condiciones..

Un ejemplo de este tipo de proceso es el patentado por HYLSA a finales de los 50's. En este proceso se hace pasar gas reformado (metano y monóxido de carbono) por un lecho fijo de mineral de hierro (hematita principalmente). Si bien, lo que interesa en el proceso es la transformación de hematita a hierro, las reacciones químicas de reducción solo pueden llevarse a cabo al llegar el mineral a una cierta temperatura a partir de la cual inician las reacciones de reducción. De aquí nace la necesidad de analizar el proceso de transferencia de calor.

En el trabajo que se presenta a continuación, se da una primera aproximación al análisis de la transferencia de calor en un lecho fijo de simetría cilíndrica cuyas paredes están recubiertas de material aislante refractario y la fase sólida está en forma de pellets esféricos de tamaño uniforme. Se supone que el gas no reacciona con las partículas por lo que no se considera que exista generación de calor por reacciones químicas.

Aunque existen di-ferentes trabajos relacionados con este análisis de transferencia de calor[1,2,3] , la solución a este problema se dá en función de relaciones empíricas cuyo rango de aplicación no siempre está bien definido. En este trabajo, se parte del análisis de la transferencia de calor entre el pelet y el gas de calentamiento llegando a determinar la función de distribución de temperaturas en el pelet y por otro lado se determina un coeficiente de transferencia de calor promedio entre el pelet y el gas. De una manera similar, se analiza la transferencia de calor entre el gas de calentamiento y el refractario determinando la función de distribución de temperaturas en el refractario y otro coeficiente de transferencia de calor promedio entre el gas de calentamiento y las paredes del refractario. Estos coeficientes de tranferencia de calor promedios se encuentran en función del coeficiente de convección del gas para la geometría descrita, de acuerdo a lo que se expone en la mayoria de los textos sobre transferencia de calor.

Mc Adams[1] muestra que este coeficiente de transferencia de calor por convección está en función del diámetro del cilindro, el flujo de gas y sus propiedades como calor específico, conductividad, viscosidad, etc.. Se llega a una relación del tipo:

$$\frac{h}{C_p\, G_o}\left[\frac{C_p\, \mu}{k}\right]^n = A\left[\frac{D_p\, G_o}{\mu}\right]^m$$

en donde h es el coeficiente de transferencia de calor por convección y n, m y A dependen del gas utilizado. Esta relación es la más encontrada. El valor esperado para h es de 80 a 150 Watts por metro cuadrado por grado centígrado.

ORGANIZACION DE LA TESIS.

En el capítulo primero se analiza el problema de transferencia de calor en el pelet a partir de la función Green para la transferencia de calor en esferas tomando en consideración el mecanismo de convección en la superficie. En este capítulo, se determinará una ecuación para la temperatura del pelet en función de su radio y de la temperatura del gas de calentamiento, que es función del tiempo; sin embargo, esta ecuación no toma en cuenta las pequeñas variaciones de la temperatura del gas de calentamiento. La ecuación más general es del tipo,

$$T_P(r;t) = T_g(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^n T_g(t)}{\partial t^n}\sum_{l=0}^{n} A_{nl}\left(\frac{r}{a}\right)^{2l}$$

en donde sí se consideran cambios más finos en la temperatura del gas de calentamiento.

Si se sustituye la relación anterior en la ecuación de transferencia de calor y tomando en cuenta las consideraciones a la frontera del pelet, se llega a determinar el valor de los coeficientes A_{nl}, y los cuales se generan a partir de:

$$A_{n+1,0} = \frac{-1}{K_p} \sum_{l=0}^{n} \left(\frac{k_p \cdot a}{H_g} + \frac{a^2}{2l+2} \right) \frac{A_{nl}}{2l+3} \; ; \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

$$A_{n+1,l} = \frac{a^2}{2l(2l+1)K_p} A_{n,l-1} \; ; \qquad l = 1,2,3,\ldots,n$$

$$A_{n+1,n+1} = \frac{a^2}{2(n+1)(2n+3)K_p} A_{n,n} \; ; \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

en donde los coeficientes de arranque son:

$$A_{10} = \frac{-a^2}{6K_p} \left(\frac{2k_p}{aH_g} + 1 \right)$$

y

$$A_{11} = \frac{a^2}{6K_p}$$

como se verá en el trabajo de tesis, se desprecian los términos que contengan derivadas de orden superior o igual a dos. En este capítulo también se determina una expresión para el coeficiente de transferencia de calor por convección, promedio, entre el pelet y el gas de calentamiento.

En el capítulo segundo se resuelve la ecuación de transferencia de calor que gobierna la distribución de temperaturas en el refractario debido al gas de calentamiento.

Al igual que con la función de distribución de temperaturas en el pelet, se puede demostrar que la solución a este problema, que toma en cuenta aún cambios pequeños en la temperatura del gas de calentamiento, es:

$$T_r(x;t) = T_g(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^n T_g(t)}{\partial t^n} \sum_{l=0}^{2n} B_{nl} x^l$$

en donde, para cumplir con la ecuación de transferencia de calor y los valores a la frontera, los coeficientes B_{nl} están dados por,

$$B_{n0} = \frac{-1}{K_r H_g} \sum_{l=0}^{n} \frac{B_{n-1,l}\,\varepsilon^{l+1}}{l+1}; \quad n = 2,3,4,...$$

$$B_{n1} = \frac{-1}{K_r} \sum_{l=0}^{n} \frac{B_{n-1,l}\,\varepsilon^{l+1}}{l+1}; \quad n = 2,3,4,...$$

$$B_{nl} = \frac{B_{n-1,l-2}}{K\, l\,(l-1)}; \quad l=2,3,...,2n-1\ ;\ n=2,3,4,...$$

$$B_{n,2n} = \frac{1}{(2n)!K^n}; \qquad n = 2,3,...$$

y donde los valores de arranque son:

$$B_{10} = \frac{-\varepsilon\ k_r}{K_r\ H_g}$$

$$B_{11} = \frac{-\varepsilon}{K_r}$$

$$B_{12} = \frac{1}{2K_r}$$

en donde ε es el espesor del refractario. Al igual y como se mencionó en el punto anterior, en este trabajo de tesis se desprecian las derivadas de orden superior o igual a dos.

En este capítulo también se analiza el coeficiente promedio de transferencia de calor por convección entre el gas de calentamiento y el refractario.

El tercer capítulo muestra los balances energéticos considerados y los cuales conducen al plantemiento de las ecuaciones diferenciales que rigen el problema de transferencia de calor en lecho; con ellas se determinará la distribución de temperaturas en el reactor, tanto para los pelets como para el refractario y el gas de calentamiento.

Por otro lado, se definen algunas relaciones fundamentales que llevan a la simplificación de las expresiones encontradas; estas se refieren a Masa de Pelets por unidad de longitud en dirección paralela al eje del reactor, área de refractario por unidad de longitud, etc.

Con las relaciones encontradas en el capítulo anterior, en el capítulo cuarto se establecen las ecuaciones de distribución de temperaturas en el pelet y el gas de calentamiento y sus relaciones diferenciales, las cuales se resuelven utilizando la técnica de transformadas de Laplace; las soluciones encontradas se normalizan a los valores de temperaturas inicial del gas de calentamiento y del lecho, de tal forma que las gráficas generadas a partir de la solución son de caracter más general y por ello no solamente válidas para ciertos valores de las temperaturas inciales del gás de calentamiento y del lecho.

A manera de verificar los resultados, en el capítulo quinto se soluciona el mismo problema de transferencia de calor, pero utilizando un método numérico de diferencias finitas, formulación explícita, la cual proporciona soluciones estables cuando se cumple que,

$$\frac{\alpha\ \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$$

en donde α es el valor de difusividad del material (m^2/s).

La razón por la que se eligió una formulación explícita se basa en el hecho de que el problema es unidimensional y no se presentan discontinuidades en la geometría, además de que no se presentan ni fuentes ni sumideros de energía, por lo que una solución de este tipo es lo suficientemente precisa y estable para este problema con un tiempo de cómputo razonable. Sin embargo, es totalmente válido utilizar alguna otra formulación como la de

Cranck-Nicholson, residuos ponderados o Gallerkin por ejemplo.

En el capítulo sexto se analizan los resultados obtenidos con la modelación matemática analítica y la numérica, basandose en un ejemplo numérico en el que los datos utilizados son bastante aproximados a los que se obtendrian en un reactor de unas 80 toneladas cargado con mineral de hierro.

CAPITULO I.

TRANSFERENCIA DE CALOR EN EL PELET

1.- FUNCION DE DISTRIBUCION DE TEMPERATURAS EN EL PELET.

Del estudio de la transferencia de calor en esferas[4] se obtiene la función Green para una esfera de radio α, de material homogéneo e isotrópico de conductividad térmica k_p, difusividad K_p, densidad ρ_p y capacidad calorífica C_p en cuya superficie existe transferencia de calor por convección de acuerdo a la ecuacion (1):

$$\frac{\partial T_p}{\partial r} = \frac{H_g}{k_p}\left(T_g - T_p\right) , \qquad \text{en } r = a. \qquad (1)$$

en donde H_g es el coeficiente de transferencia de calor entre el gas y el pelet , T_g es la temperatura del gas y T_p es la función de distribución de temperatura del pelet que es función de r y del tiempo.

La función Green está dada como,

$$G(r,r';t-t') = \frac{1}{2\pi a r r'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 + \beta^2}{\lambda_n^2 + \beta^2 + \beta} \times \ldots$$

$$\ldots \times \exp\left[- \lambda_n^2 K_p (t - t')/ a^2\right] \operatorname{sen}\left[\lambda_n r/ a\right] \operatorname{sen}\left[\lambda_n r'/ a\right] \qquad (2)$$

con $\beta = (H_g\, a/k_p) - 1$, y la ecuación de eigenvalores,

$$\lambda_n \cot (\lambda_n) + \beta = 0 \qquad (3)$$

Utilizando la función Green en la ecuación de conducción de calor se encuentra la ecuación de distribución de temperaturas en el pelet en función de r y del tiempo:

$$Tp(r;t) = \frac{2\ Hg}{\rho_p c_p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n \sqrt{\lambda_n^2 + \beta^2}}{(\lambda_n^2 + \beta^2 + \beta) r} \operatorname{sen}(\lambda_n\ r/\ a) \times \ldots$$

$$\ldots \times \int_0^t \exp[\lambda_n^2\ Kp\ (t'-t)/\ a^2]\ Tg(t')\ dt' \qquad (4)$$

Desarrollando el integrando en una serie de Taylor y resolviendo se llega a que:

$$Tp(r;t) = \frac{2\ Hg}{\rho_p c_p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n \sqrt{\lambda_n^2 + \beta^2}}{(\lambda_n^2 + \beta^2 + \beta) r} \operatorname{sen}(\lambda_n\ r/\ a) \times \ldots$$

$$\ldots \times \alpha \left\{ Tg(t) - \dot{T}g(t)\alpha - Tg(0)\ \exp(-\lambda_n^2\ Kp\ t/\ a^2) + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \dot{T}g(0)\ \exp(-\lambda_n^2\ Kp\ t/\ a^2)\ \alpha + \Theta\ [\ddot{T}g(t)] + \ldots \right\} \qquad (5)$$

con $\alpha = a^2/(\lambda_n^2\ Kp)$ y para un valor de tiempo por encima del cual el estado transitorio no es importante. Se llega entonces a que,

$$Tp(r;t) = Tg(t) + \frac{a^2}{6\ Kp} \left[\left(\frac{r}{a}\right)^2 - \frac{2\ Kp}{a\ Hg} - 1 \right] \dot{T}g(t) \qquad (6)$$

de la cual se determina que la temperatura promedio del pelet es:

$$\overline{T}_p(t) = T_g(t) - \frac{a^2}{5K_p}\left[1 + \frac{5k_p}{a\,H_g}\right]\dot{T}_g(t) \qquad (7)$$

2.- COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA DE CALOR PROMEDIO ENTRE EL PELET Y EL GAS DE CALENTAMIENTO.

Para obtener un coeficiente de transferencia de calor promedio entre el pelet y el gas de calentamiento se debe cumplir que

$$\overline{H}_p\,(T_g-\overline{T}_p) = H_g\,(T_g-T_p); \quad \text{en } r = a \qquad (8)$$

donde $\overline{H}_p$ es el coeficiente de transferencia de calor promedio entre el pelet y el gas, T_p es $T_p(r;t)$, $\overline{T}_p$ es $\overline{T}_p(t)$ y T_g es $T_g(t)$; una vez sustituidas las expresiones encontradas anteriormente para T_p y $\overline{T}_p$ se obtiene $\overline{H}_p$:

$$\overline{H}_p = \frac{1}{\dfrac{1}{H_g} + \dfrac{a}{5k_p}} \qquad (9)$$

CAPITULO II

TRANSFERENCIA DE CALOR EN EL REFRACTARIO

1.- FUNCION DE DISTRIBUCION DE TEMPERATURAS EN EL REFRACTARIO.

Con un procedimiento similar al usado en el análisis de transferencia de calor en el pelet, se determina la función de distribución de temperaturas en la pared del lecho la cual se supone es de un material aislante refractario homogéneo e isotrópico de conductividad térmica k_r, difusividad K_r, densidad ρ_r y calor específico C_r, en cuyas paredes existe , por un lado, intercambio de calor con el gas de calentamiento mientras que por el otro extremo no ocurre ningún intercambio de calor, esto es:

$$\frac{\partial T_r}{\partial x} = \frac{H_r}{k_r}\left[T_g - T_r \right]; \quad x = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial T_r}{\partial x} = 0 \quad ; \quad x = \varepsilon \tag{11}$$

donde ε es el espesor de la pared de refractario.

Resolviendo la ecuación de conducción de calor y aplicando las condiciones a la frontera se determina la función de distribución de temperaturas en el refractario:

$$T_r(x;t) = T_g(t) + \frac{\overline{T}_g(t)}{K_r}\left[\frac{x^2}{2} - \varepsilon x - \frac{\varepsilon k_r}{H_g} \right] \tag{12}$$

llegando a que la temperatura promedio en el refractario está dada como:

$$\overline{T}_r(t) = T_g(t) - \frac{\varepsilon}{K_r}\left[\frac{\varepsilon}{3} + \frac{k_r}{H_g}\right]\dot{T}_g(t) \qquad (13)$$

2.- COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA DE CALOR PROMEDIO ENTRE EL REFRACTARIO Y EL GAS DE CALENTAMIENTO.

Igual que con el pelet, se debe cumplir que:

$$\overline{H}_r\ (T_g - \overline{T}_r) = H_g\ (T_g - T_r); \quad \text{en } x = 0 \qquad (14)$$

donde $\overline{H}_r$ es el coeficiente de transferencia de calor promedio entre el gas de calentamiento y el refractario, T_r es $T_r(x;t)$, $\overline{T}_r$ es $\overline{T}_r(t)$ y T_g es $T_g(t)$..

Sustituyendo las ecuaciones encontradas para T_r y $\overline{T}_r$, se llega a que:

$$\overline{H}_r = \frac{1}{\dfrac{1}{H_g} + \dfrac{\varepsilon}{3k_r}} \qquad (15)$$

CAPITULO III

BALANCES DE ENERGIA

El balance de energía entre el calor cedido por el gas de calentamiento a los pelets y al refractario, lleva al planteamiento de las ecuaciones diferenciales cuya solución conduce a las ecuaciones que describen el calentamiento de los pelets y el refractario tomados como uno solo mediante ciertas consideraciones.

1.- DEFINICIONES GENERALES.

Para éste análisis se supone una geometría cilíndrica del lecho y una transferencia de calor unidimensional en z, de acuerdo a la figura 1.

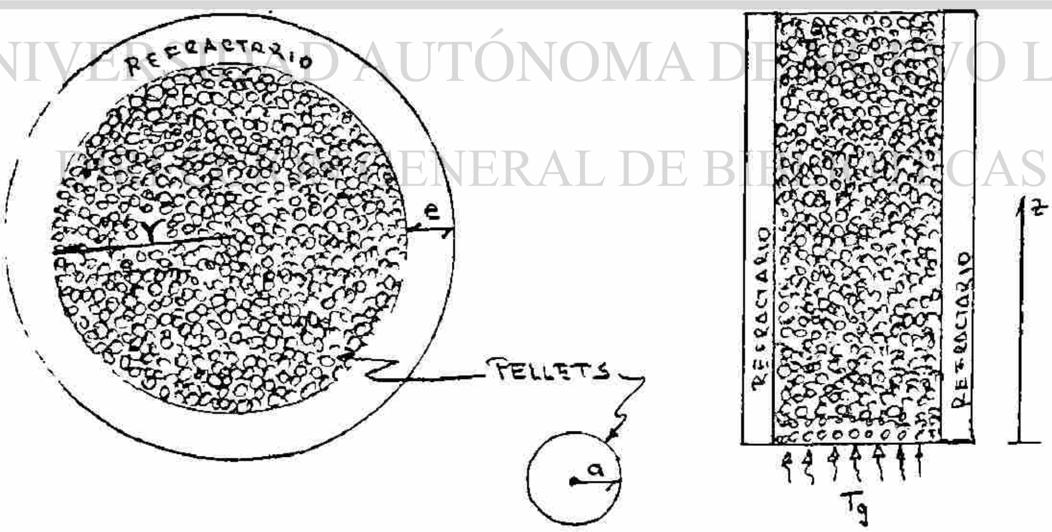

Fig. 1.- Geometria del sistema analizado.

Se definen los siguientes parámetros dependientes de las dimensiones del lecho:

- L_p, es el área de pelets por unidad de longitud (m^2/m de cuba), que es:

$$3\,\pi\,\frac{\rho_{p(aparente)}}{\rho_p}\,\frac{r^2}{a}$$

donde ρ_p(aparente) es la densidad aparente del pelet y ρ_p es la densidad real del pelet, a es el radio del pelet, y r es el radio interno del lecho.

- L_r, es el área de refractario por unidad de longitud (m^2/m de cuba), que es:

$$\pi\,D$$

donde D es el diámetro interno del lecho (diámetro externo menos dos veces el espesor del refractario).

- M_p, es la masa de pelets por unidad de longitud (Kg/m de cuba), que es:

$$\rho_{p(aparente)}\,\pi\,r^2$$

- M_r, es la masa de refractario por unidad de longitud (Kg/m de cuba), que es:

$$\rho_r\,\pi\,(r_e^2 - r^2)$$

donde r_e es el radio externo de la cuba (radio interno más el espesor del refractario) y ρ_r es la densidad del refractario.

- Q_p, es el calor que ceden o reciben los pelets a través del gas de calentamiento.

- Q_r, es el calor que cede o recibe el refractario a través del gas de calentamiento.

- Q_g, es el calor que cede o recibe el gas de calentamiento al pasar a través del lecho (pelets y refractario).

La definición de los parámetros anteriores ayuda a simplificar las expresiones que describen los balances de energía.

2.- BALANCE DE ENERGIA PARA LOS PELETS Y EL REFRACTARIO.

Se toma un elemento diferencial en z y se obtienen las expresiones para Q_p y para Q_r:

$$Q_p = \bar{H}_p \, L_p \, \Delta z \, (T_g - \bar{T}_p) \qquad (16)$$

$$Q_r = \bar{H}_r \, L_r \, \Delta z \, (T_g - \bar{T}_r) \qquad (17)$$

La suma de las ecuaciones anteriores es la cantidad total de energía que se intercambia entre el gas de calentamiento, el refractario y los pelets; usando las ecuaciones (7), (9), (13) y (15), se obtiene que

$$\bar{H}_r = \gamma \, \bar{H}_p \qquad (18)$$

con

$$\gamma = \frac{1 + a \, H_g/(5k_p)}{1 + \varepsilon \, H_g/(3k_r)}$$

y además,

$$\bar{T}_r = \bar{T}_p + \alpha \, \dot{T}_g$$

con

$$\alpha = \frac{a^2}{15 \, K_p} \left[1 + \frac{5 \, k_p}{a \, H_g} \right] - \frac{\varepsilon^2}{3 \, K_r} \left[1 + \frac{3 \, K_r}{H_g \, \varepsilon} \right]$$

y la primera derivada de T_g con respecto al tiempo es,

$$\dot{T}_g = \frac{T_g - \bar{T}_p}{\frac{a^2}{15\ K_p}\left[1 + \frac{5\ k_p}{a\ H_g}\right]}$$

y entonces,

$$Q_r + Q_p = \bar{H}_p\ L_p\ \Delta z\ \gamma\ (T_g - \bar{T}_p) \qquad (19)$$

donde

$$\gamma = 1 + 3\ \frac{L_r\ \varepsilon\ \rho_r\ C_r}{L_p\ a\ \rho_p\ C_p}.$$

3.- BALANCE DE ENERGIA PARA EL GAS.

Para el gas de calentamiento el balance de energía consiste en conocer el aumento o pérdida de la energía interna del gas:

$$Q_g = M_g\ C_g\ \frac{\Delta T_g}{\Delta t} \qquad (20)$$

donde ΔT_g es el cambio de temperatura del gas al transcurrir un intervalo de tiempo Δt y $M_g/\Delta t$ es el gasto de gases (G_g), en Kg/seg.

4.- BALANCE DE ENERGIA AL PASAR EL GAS DE CALENTAMIENTO DE UN PUNTO z A UN PUNTO z + Δz.

Cuando el gas pasa a través de una rebanada de espesor Δz en el lecho, el gas pierde una cantidad de calor igual a la que se transfiere a los pelets y al refractario por convección de acuerdo a la ecuación:

$$G_g \; C_g \; \Delta T_g = - \overline{H}_p \; L_p \; \gamma \; \Delta z \; (T_g - \overline{T}_p) \qquad (21)$$

y cuando los cambios en z y en el tiempo son suficientemente pequeños, la ecuación anterior se expresa en su forma diferencial:

$$\frac{\partial \; T_g}{\partial \; z} = - \frac{\overline{H}_g \; L_p \; \gamma}{G_g \; C_g} \left[T_g - \overline{T}_p \right] \qquad (22)$$

5.- *BALANCE DE ENERGIA AL TRANSCURRIR UN INTERVALO DE TIEMPO* Δt.

Al transcurrir un tiempo Δt, el calor perdido por el gas será igual al calor transferido al refractario y a los pelets durante ése tiempo, o sea, el aumento de energía interna:

$$(C_p \; M_p + C_r \; M_r) \; \Delta z \; \frac{\Delta \overline{T}_p}{\Delta t} = M_p \; L_p \; \Delta z \; \gamma \; (T_g - \overline{T}_p) \qquad (23)$$

y expresando la ecuación en forma diferencial se llega a que,

$$\frac{\partial \; \overline{T}_p}{\partial \; t} = \frac{\overline{H}_p \; L_p \; \gamma}{C_p \; M_p + C_r \; M_r} \left[T_g - \overline{T}_p \right] \qquad (24)$$

Las ecuaciones (22) y (24) describen las funciones de temperatura del gas de calentamiento y del lecho en función de z y del tiempo.

CAPITULO IV

1.-FUNCIONES DE TEMPERATURA DEL LECHO Y DEL GAS

Es necesario definir dos variables ξ y τ como:

$$\xi = \frac{\bar{H}_p \; L_p \; \gamma}{C_g \; G_g} \, z \qquad (25\text{-a})$$

$$\tau = \frac{\bar{H}_p \; L_p \; \gamma}{C_p \; M_p + C_r \; M_r} \, t \qquad (25\text{-b})$$

Usando éstas variables en las ecuaciones (22) y (24) se obtiene que,

$$\frac{\partial \; T_g(\xi,\tau)}{\partial \; \xi} = - \left[T_g \; (\xi,\tau) - T_p(\xi,\tau) \right] \qquad (26)$$

$$\frac{\partial \; T_p(\xi,\tau)}{\partial \; \tau} = \left[T_g \; (\xi,\tau) - T_p(\xi,\tau) \right] \qquad (27)$$

con las condiciones,

- $T_g(0,\tau) = T_g^{\circ}$, temperatura del gas a la entrada del lecho, y
- $T_p(\xi,0) = T_p^{\circ}$, temperatura inicial del pelet.

Despejando T_g de la ecuación (27) y sustituyendo en la ecuación (26) se encuentra:

$$\frac{\partial^2 T_p}{\partial\xi \; \partial\tau} + \frac{\partial \; T_p}{\partial\tau} + \frac{\partial \; T_p}{\partial\xi} = 0 \qquad (28)$$

de donde,

$$T_p = T_g^{o} \left[1 - \exp\left(- \xi - \tau \right) \Psi(\xi,\tau) \right] \tag{29}$$

$$T_g = T_g^{o} \left[1 - \exp\left(- \xi - \tau \right) \frac{\partial \Psi(\xi,\tau)}{\partial \tau} \right] \tag{30}$$

tal que $\Psi(\xi,\tau)$ es una función tal que,

$$\frac{\partial^2 \Psi(\xi,\tau)}{\partial \xi \ \partial \tau} = \Psi(\xi,\tau) \tag{31}$$

Sea entonces,

$$f(\xi) = \Psi(\xi,0), \text{ condición inicial}$$

$$= \exp(\xi) \left[1 - \frac{T_p(\xi,0)}{T_g^{o}} \right] \tag{32}$$

Aplicando la transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación (31):

$$\Psi(\xi,s) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[s \ \bar{\Psi}(\xi,s) - f(\xi) \right] \tag{33}$$

con la condición a la frontera

$$\Psi(0,s) = f(0)/s$$

tal que

$$f(0) = 1 - \frac{T_p(0,0)}{T_g^{o}}$$

Al resolver la ecuación (33) se obtiene:

$$\bar{\Psi}(\xi,s) = \frac{f(0)}{s} \exp(\xi/s) + \int_0^{\xi} \frac{\exp[(\xi-x)/s]}{s} \frac{\partial f}{\partial x} dx \tag{34}$$

y, una vez que se obtiene la antitransformada de $\bar{\Psi}(\xi,s)$, se llega a que:

$$\Psi(\xi,\tau) = f(0)\ I_0(2\sqrt{\xi\ \tau}) + I_0[2\sqrt{(\xi-x)\tau}\ ]\frac{\partial f(x)}{\partial x}\,dx \qquad (35)$$

que también se puede expresar como:

$$\Psi(\xi,\tau) = f(\xi) + 2\tau \int_0^{\xi} f(x)\frac{I_1[2\sqrt{(\xi-x)\tau}\ ]}{2\sqrt{(\xi-x)\tau}}\,dx \qquad (36)$$

y entonces,

$$\frac{\partial\ \Psi(\xi,\tau)}{\partial\ \tau} = \int_0^{\xi} f(x)\ I_0[2\sqrt{(\xi-x)\tau}\ ]\,dx \qquad (37)$$

Sustituyendo las ecuaciones (36) y (37) en las ecuaciones (29) y (30) se encuentran las expresiones para $T_p(\xi,\tau)$ y para $T_g(\xi,\tau)$:

$$T_p(\xi,\tau)=T_g^0\left\{1-\exp(-\xi-\tau)\left[f(\xi)+2\tau\int_0^{\xi} f(x)\frac{I_1[2\sqrt{(\xi-x)\tau}\ ]}{2\sqrt{(\xi-x)\tau}}\,dx\right]\right\} \qquad (38)$$

$$T_g(\xi,\tau)=T_g^0\left\{1-\exp(-\xi-\tau)\left[\int_0^{\xi} f(x)\ I_0[2\sqrt{(\xi-x)\tau}\ ]\,dx\right]\right\} \qquad (39)$$

Las ecuaciones (38) y (39) describen las funciones de temperatura del lecho y del gas a partir de una distribución inicial de temperaturas $f(\xi)$ en z. Para el caso en que la temperatura inicial es constante, las ecuaciones anteriores se reducen a:

$$T_p(\xi,\tau) = T_p^0 + (T_g^0 - T_p^0)\exp(-\xi-\tau)\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\tau^l}{l!}\sum_{n=0}^{l-1}\frac{\xi^n}{n!} \qquad (40)$$

$$Tg(\xi,\tau) = Tp + (T_g^o - T_p^o)\exp(-\xi-\tau)\left[1 + \sum_{l=1}^{\infty}\frac{\tau^l}{l!}\sum_{n=0}^{l}\frac{\xi^n}{n!}\right] \quad (41)$$

Normalizando las ecuaciones anteriores se llega a

$$Tnp(\xi,\tau) = \exp(-\xi-\tau)\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\tau^l}{l!}\sum_{n=0}^{l-1}\frac{\xi^n}{n!} \quad (42)$$

y

$$Tng(\xi,\tau) = \exp(-\xi-\tau)\left[1+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\tau^l}{l!}\sum_{n=0}^{l}\frac{\xi^n}{n!}\right] \quad (43)$$

donde

$$Tnp(\xi,\tau) = \frac{Tp(\xi,\tau) - T_p^o}{T_g^o - T_p^o}, \quad (44)$$

y

$$Tng(\xi,\tau) = \frac{Tp(\xi,\tau) - T_p^o}{T_g^o - T_p^o} \quad (45)$$

Si $Tnp(\xi,\tau)=0$, la temperatura en ése punto es igual a la temperatura inicial (T_p^o), mientras que si $Tnp(\xi,\tau)=1$, la temperatura en ése punto es igual a la temperatura del gas a la entrada del lecho (T_g^o); de forma similar, si $Tng(\xi,\tau)=0$, la temperatura del gas en ese punto es igual a la temperatura inicial del lecho (T_p^o), mientras que con un valor de 1 indica que la temperatura del gas es la misma que al entrar al lecho (T_g^o).

CAPITULO V

SOLUCION POR ELEMENTOS FINITOS (CASO UNIDIMENSIONAL)

En el caso unidimensional, el método de elementos finitos se reduce a las ecuaciones de transferencia de calor en forma diferencial o de incrementos deltas. En éste caso, se considera una rebanada de espesor Δz del lecho, igual que en el capitulo tres. Dado que,

$$Q_g = Q_p + Q_r \tag{46}$$

entonces, sutituyendo las expresiones encontradas para cada una de las variables anteriores, *ecs. (16), (17) y (20), se obtiene que,*

$$\Delta T_g = \left(T_g^{t+\Delta t} - T_g^{t-\Delta t} \right) = - \frac{H_p \; L_p \; \Delta z}{G_g \; C_g} \left(T_g^{t} - T_p^{t} \right) - \ldots$$

$$\ldots - \frac{H_r \; L_r \; \Delta z}{G_g \; C_g} \left(T_g^{t} - T_r^{t} \right) \tag{47}$$

de la cual se obtiene que,

$$T_g^{t+\Delta t} = \left[\bar{H}_p \; L_p \; T_p^{t} + \bar{H}_r \; L_r \; T_r^{t} + \ldots \right.$$

$$\ldots + \left. \left(\frac{G_g \; C_g}{\Delta z} - \bar{H}_p \; L_p - \bar{H}_r \; L_r \right) T_g^{t} \right] \frac{\Delta z}{G_g C_g} \tag{48}$$

Por otra parte, el calor que intercambia el gas de calentamiento con el refractario es igual al aumento de energía interna del refractario:

$$M_r\, C_r\, \Delta z\, \frac{(T_r^{t+\Delta t} - T_r^{t})}{\Delta t} = \frac{\bar{H}_r\, L_r}{M_r\, C_r} \left[T_g^{t} - T_r^{t}\right] \Delta z \qquad (49)$$

de donde se obtiene la expresión para $T_r^{t+\Delta t}$:

$$T_r^{t+\Delta t} = \frac{\bar{H}_r\, L_r}{M_r\, C_r} (T_g^{t} - T_r^{t})\, \Delta t + T_r^{t} \qquad (50)$$

Un análisis similar para el pelet resulta en que:

$$T_p^{t+\Delta t} = \frac{\bar{H}_p\, L_p}{M_p\, C_p} (T_g^{t} - T_p^{t})\, \Delta t + T_p^{t} \qquad (51)$$

Las ecuaciones (48), (50) y (51) proporcionan las temperaturas del gas, los pelets y el refractario a un tiempo t+Δt en función las temperaturas al tiempo t y de los incrementos Δz y Δt. Es obvio que para poder llegar a estos resultados es imprescindible conocer las temperaturas a un tiempo dado para generar la evolución de las mismas de ahí en adelante. Se supone además que los incrementos en el tiempo, Δt, y en la altura, Δz, son razonablemente pequeños de tal manera que se asegure la estabilidad de las ecuaciones y la exactitud de los resultados asi como un adecuado tiempo de computo por ciclo calculado.

CAPITULO VI

RESULTADOS

1.- MODELO MATEMATICO.

Al graficar T_{np} contra τ para diferentes valores de ξ de la ecuación (42), se obtiene el conjunto de curvas mostradas en la figura 2.

De la figura 2, se pueden encontrar los valores de ξ y de τ para un valor dado de T_{np} pudiendo seguirse una de dos alternativas :

(1), determinar los valores de ξ y de τ correspondientes a las características físicas del modelo en particular para que a partir de estos valores se pueda determinar el tiempo necesario en alcanzar el valor de T_{np}.

(2), hacer una gráfica de τ contra ξ para un valor de T_{np} y obtener la ecuación que relaciona estas variables para que, una vez que se sustituyan las expresiones para ξ y para τ se encuentre una ecuación que relaciona el tiempo de calentamiento en función del gasto de gases y de las demás variables del sistema.

En este trabajo se escoge la segunda opción ya que no se pierde ninguna generalidad, obteniendose las curvas mostradas en la figura 3.

Mediante un análisis de regresión lineal, se obtiene una ecuación que relaciona a ξ y τ con un coeficiente de correlación satisfactorio, lo cual nos lleva a una ecuación del tipo:

$$\tau = E\,\xi + F \qquad (52)$$

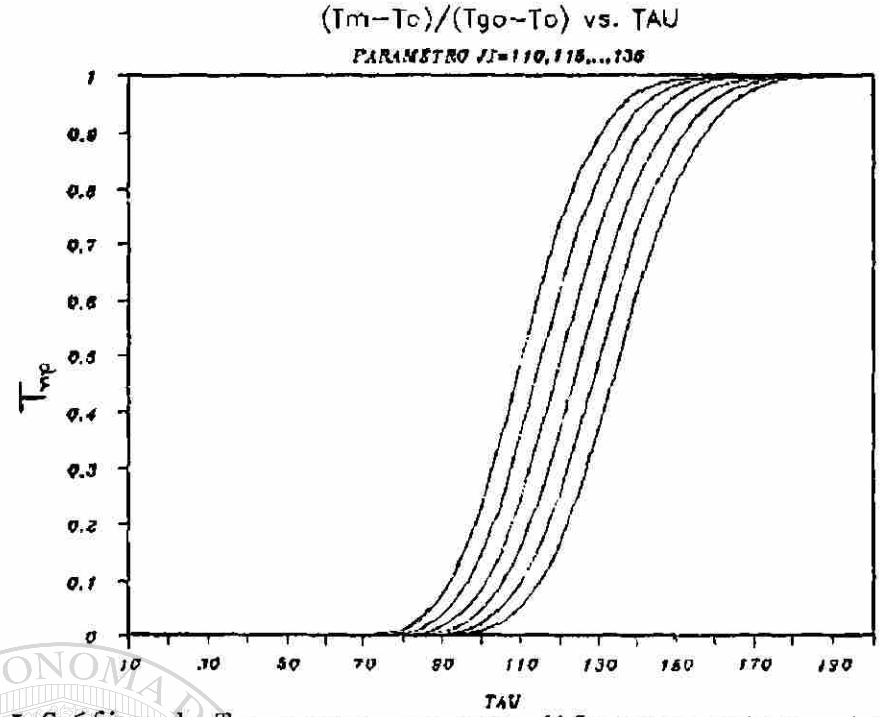

Figura 2.- Gráfica de Tnp contra tau para diferentes valores del parámetro ji.

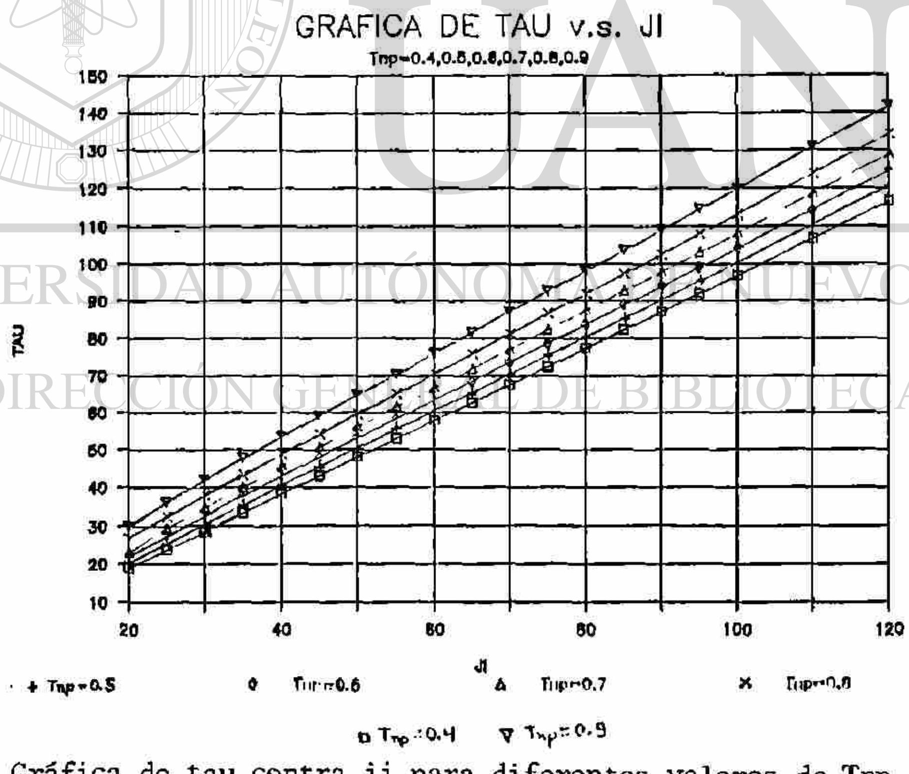

Figura 3.- Gráfica de tau contra ji para diferentes valores de Tnp. Se observa la linealidad de las curvas.

Sustituyendo las ecuaciones (25-a,b) en la ecuación anterior, se llega a que,

$$t = \frac{(C_pM_p + C_rM_r)}{C_g\ G_g} E\ z + \frac{(C_pM_p + C_rM_r)F}{\varepsilon\ L_p}\left[\frac{1}{H_g} + \frac{a}{5\ k_p}\right] \qquad (53)$$

En la figura 4, se grafica la ecuación (53) para diferentes gastos de gases usandose los siguientes valores a manera de ejemplo:

ρ_r = 2650 Kg/m^3

C_r = 960 J/Kg °C

k_r = 2 W/m °C

$\rho_{p(aparente)}$ = 2200 Kg/m^3

ρ_p = 3700 Kg/m^3

C_p = 890 J/Kg °C

k_p = 0.5 W/m °C

$a = 6.4 \times 10^{-3}$ m

z_{max} = 10 m

D = 2 m

ε = 0.1 m

H_g/unidad de área = 120 W/m^2 °C

C_g = 1160 J/Kg °C

Se aprecia en la figura 4 que las curvas no se alejan mucho una de otra. En parte esto se debe a que un valor constante de H_g como el utilizado en este ejemplo no es del todo adecuado, ya que H_g en realidad depende también del valor de G_g.

Puede observarse también que las curvas se aproximan cada vez más conforme el gasto de gases aumenta tal como lo predice la ecuación (53). En este caso, el límite es un gasto de gases

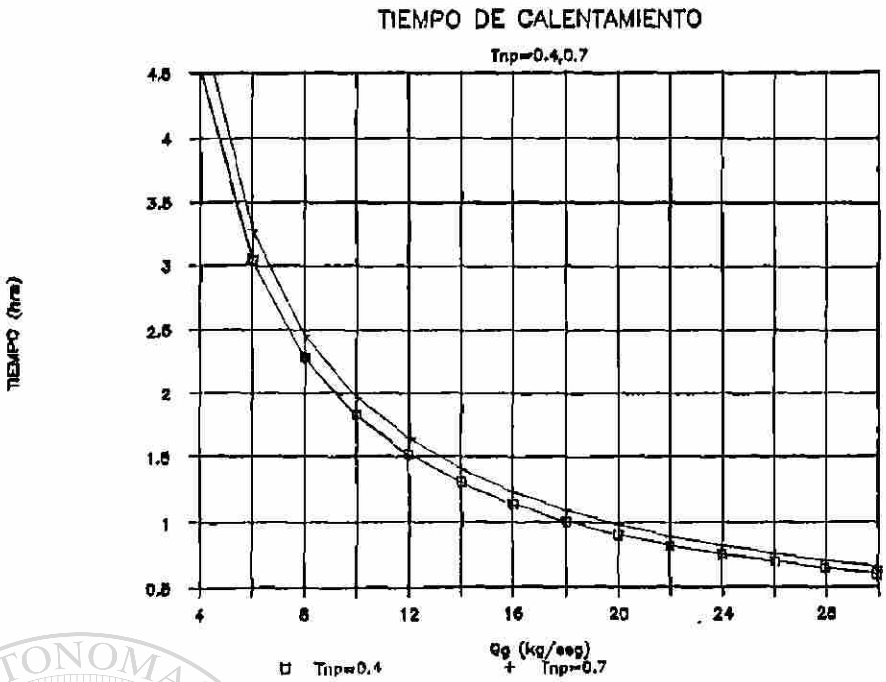

Figura 4.- Gráfica del tiempo de calentamiento contra el gasto de gases para Tnp = 0.4 y 0.7.

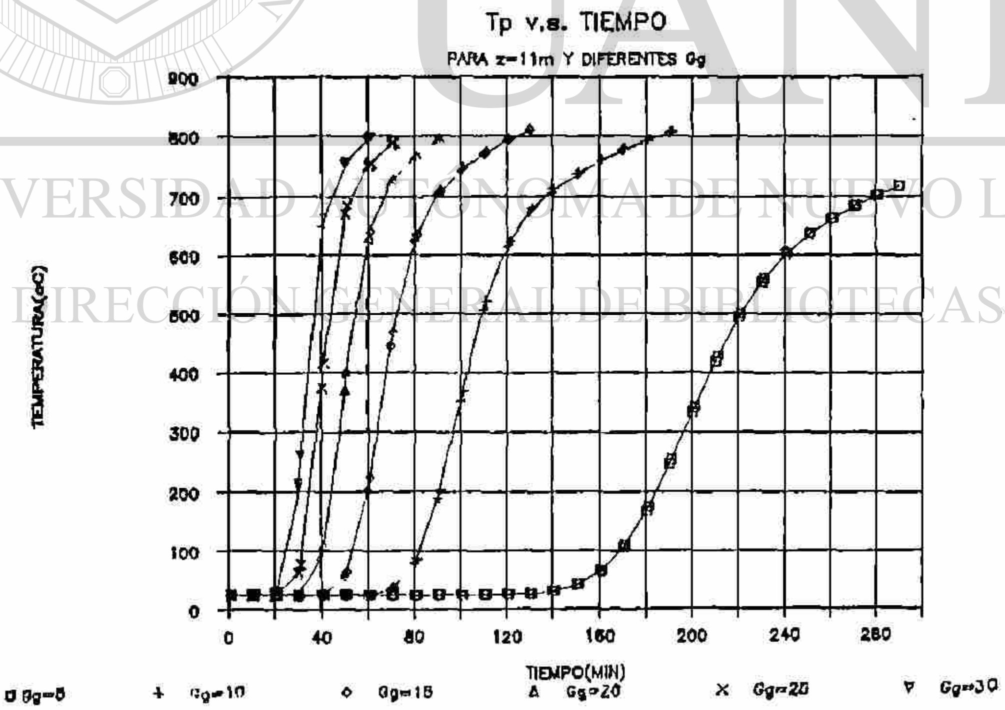

Figura 5.- Gráfica de la temperatura del pellet contra tiempo de calentamiento para diferentes valores del gasto de gases (Modelo Numérico).

infinito debido al cual la transferencia de calor esta limitada solamente por la inercia térmica del material.

2.- MODELO NUMERICO.

El modelo numérico se ejecutó con los valores numéricos de el ejemplo usado para el modelo matemático de tal manera que se puedan analizar los resultados paralelamente.

Es obvio que los resultados así obtenidos no son de carácter general, ya que éstos dependerán de los valores utilizados y de la discretización en el modelo de elementos finitos.Sin embargo los resultados proporcionados por el método numérico están en muy buena concordancia con los reportados por el modelo matemático, de tal manera que la convergencia de los resultados es satisfactoria con las consabidas ventajas del modelo matemático (solución automática para cualquier tiempo y cualquier posición en el lecho sin necesidad de basarse en la historia térmica del punto a determinar).

En la figura 5 se reporta una grafica de la temperatura del pelet en la parte alta del lecho (z = 11 m) en función del tiempo para diferentes valores del gasto de gases. Las curvas encontradas poseen la misma forma que las curvas de la figura 2, correspondientes al modelo matemático.

En la figura 6 se grafica la temperatura del refractario para diferentes tiempos tomando como parámetro el gasto de gases.

Finalmente, en la figura 7 se grafica el tiempo de calentamiento para z = 11 m (salida del lecho) y T_{np} igual a 0.4 y 0.7, en función del gasto de gases.

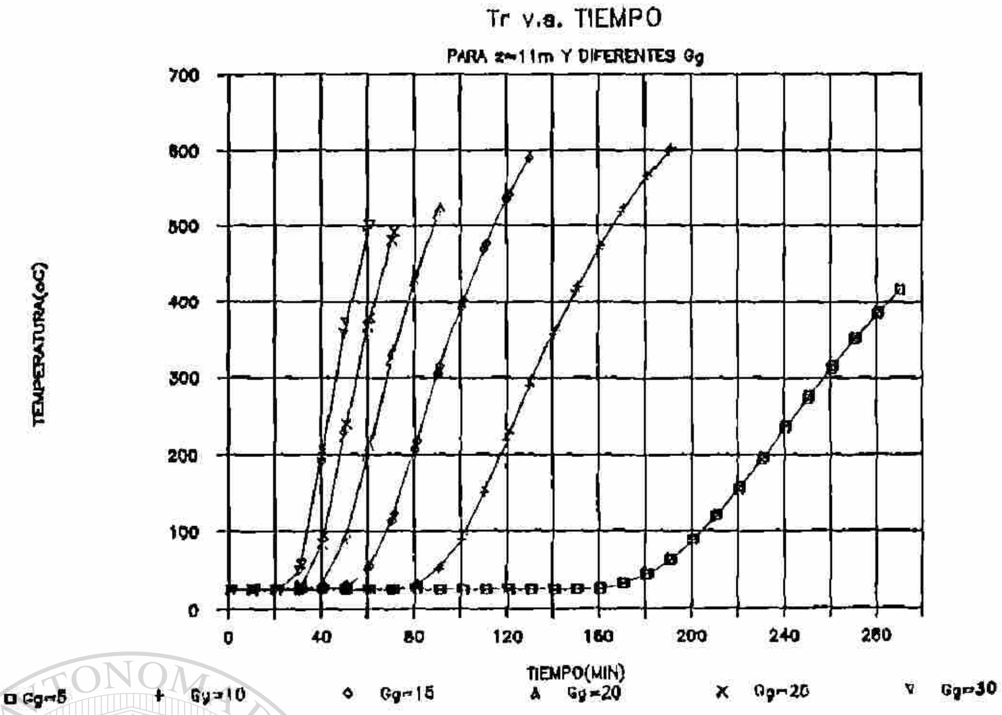

Figura 6.- Gráfica de la temperatura del refractario contra el tiempo para diferentes valores del gasto de gases (Modelo Numérico).

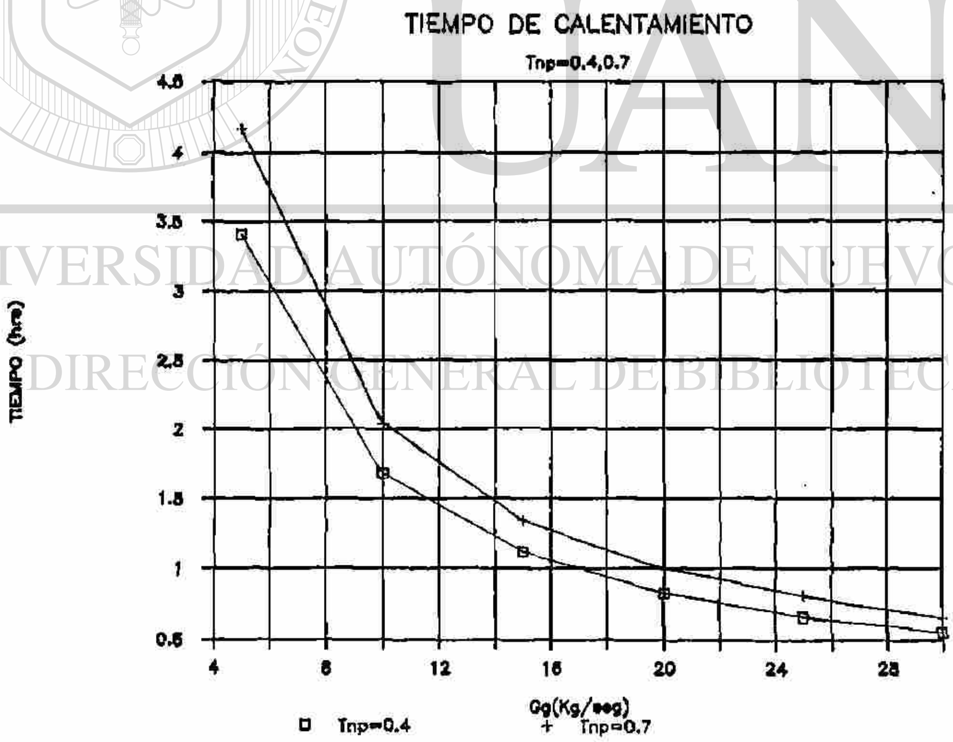

Figura 7.- Gráfica del tiempo de calentamiento contra el gasto de gases para diferentes valores de Tnp (Modelo Numérico).

3.- COMPARACION DE MODELOS.

Las graficas de la figura 8 muestra las curvas proporcionadas por ambos modelos con T_{np} = 0.4 y 0.7, observandose que:

a).- Conforme el gasto de gases aumenta, ambos modelos tienden al mismo valor de tiempo de calentamiento.

b).- Para gasto de gases pequeños y valores altos de T_{np}, el tiempo de calentamiento es mayor en la solución numérica que en la solución matemática.

c).- Para gastos de gases pequeños y valores bajos de T_{np}, el tiempo de calentamiento es menor en la solución numérica que en la solución matemática.

Sin embargo, hay que notar que estas diferencias no son muy grandes apreciandose que los resultados de ambos modelos son casi idénticos. Las diferencias encontradas son facilmente explicables tomando en consideración que en el modelo matemático:

1.- Se supone que el cambio de la temperatura con respecto al tiempo es igual tanto en el refractario como en los pelets como se expresa en la ecuación (23). Notese que se trata del cambio de temperatura promedio.

2.- La temperatura del lecho, T_{np} , es una temperatura promedio que toma en cuenta tanto al refractario como a los pelets. Es por ello que a valores altos de T_{np} se da tiempo para calentar al refractario con lo que el valor reportado será menor que el dado por el modelo numérico, ya que este último si considera el calentamiento del refractario por separado.

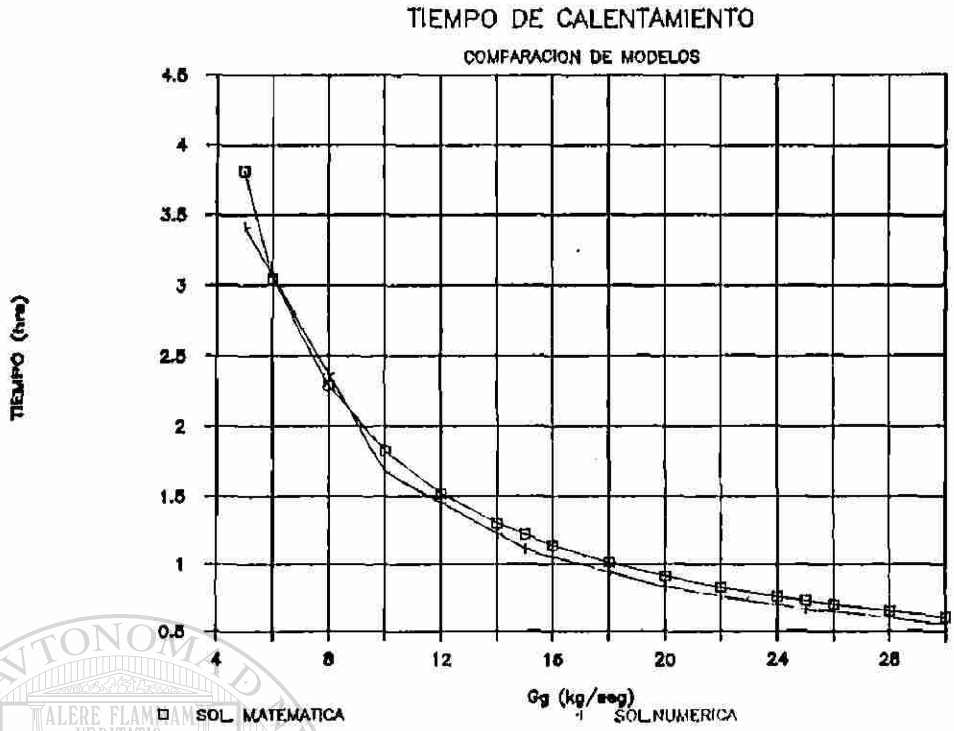

Figura 8 a.- Tiempo de calentamiento contra el gasto de gases para un valor de Tnp = 0.4, predicho según la solución numérica y la solución matemática exacta. Se observa la consistencia entre los dos modelos.

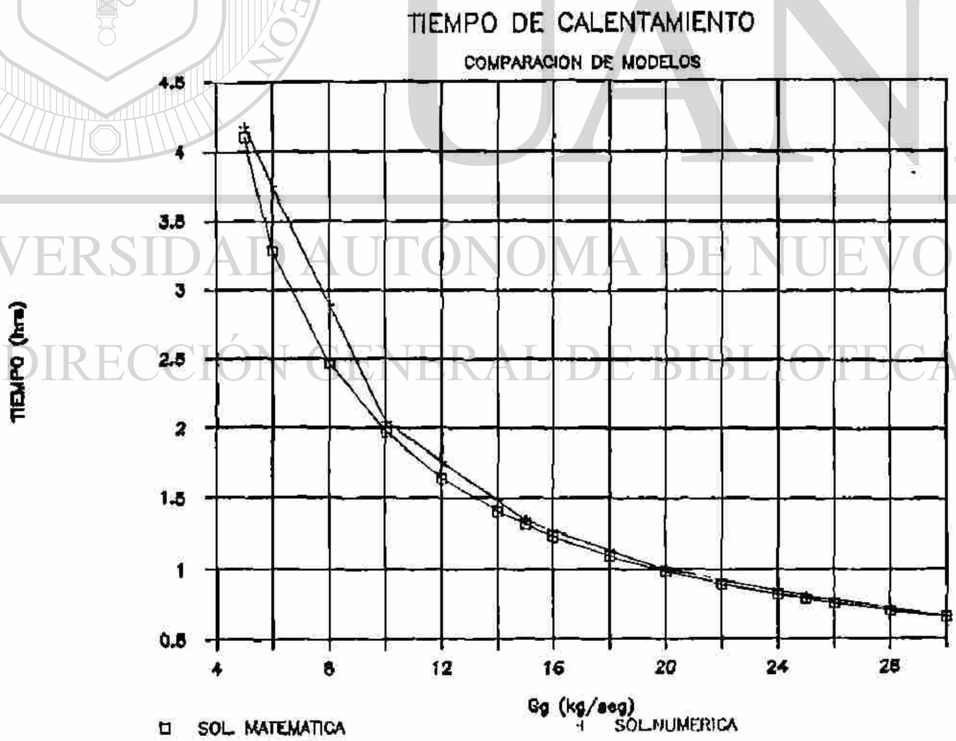

Figura 8 b.- Tiempo de calentamiento contra el gasto de gases para un valor de Tnp = 0,7, de cauerdo con los modelos numérico y matemático exacto. Se observa nuevamente una buena concordancia entre los dos resultados predichos por ambos modelos.

En cambio, para valores bajos de T_{np}, no se cuenta con el tiempo suficiente para calentar al refractario por lo que estará muy "frío" y la temperatura promedio será más baja en el modelo matemático que en el numérico, el cual solamente reporta la temperatura del pelet.

Por último cabe señalar la importancia de determinar el valor del coeficiente de transferencia de calor entre el gas y los pelets y el refractario, H_g.

En este trabajo se supone un valor constante para dar mayor simplicidad al ejemplo numérico pero existen diversos métodos para encontar un valor de H_g con la simetría utilizada en esta modelación.

Una consideración muy importante que se debe señalar es el que se haya supuesto un mismo valor de coeficiente de transferencia de calor para los pelets y para el refractario, lo cual es bastante valido dado el sistema físico con el que se trabajó. Está suposición se toma para las ecuaciones (8) y (14).

CAPITULO VII

CONCLUSIONES

1.- Los resultados que proporciona el modelo matemático aquí presentado representan valores muy cercanos a los que se obtendrían a partir de un modelo numérico como el de diferencias finitas.

2.- El modelo matemático proporciona resultados en tiempos de cómputo insignificantes.

3.- El modelo numérico requiere de tiempos de computo mucho mayores que el modelo matemático.

4.- Las curvas mostradas en las figuras 2 y 3 no dependen de las propiedades de los materiales del lecho.

5.- La ecuación (53) es una excelente alternativa para el cálculo del tiempo de calentamiento necesario para llevar un punto del lecho a un valor de T_{np} dado.

6.- El modelo descrito manifiesta el hecho de que a partir de un gasto dado, el tiempo de calentamiento del lecho depende de la capacidad de respuesta del material.

REFERENCIAS.

[1] Mc. Adams, William H.; "Heat Transmission"; International Student Edition, Third Edition, 1954, pp 290-299.

[2] Bugdandy, L. Von, Engell, H.J.; "The Reduction of Iron Ores, Scientific Basis and Technology"; Springer-Verlag Berlin Heiderberg, New York, Verlag Stahleisen m.b. H. Düsseldorf, 1971, pp 203-221.

[3] Mc. Gannon, Harold E.; "The Making Shaping and Treating of Steel", United States Steel, Ninth edition, 1971, pp 417-418.

[4] Carslaw, H.S., Jaeger, J.C.; "Conduction of heat in Solids", Oxford University Press, 1959, pp 367.

NOMENCLATURA.

a	Radio del pelet.
C_p	Calor específico del pelet.
C_r	Calor específico del refractario.
D	Diámetro del lecho.
G_g	Gasto de gases.
H_g	Coeficiente de transferencia de calor entre el lecho y el gas de calentamiento.
$\bar{H}_p$	Coeficiente promedio de transferencia de calor entre el pelet y el gas de calentamiento.
$\bar{H}_r$	Coeficiente promedio de transferencia de calor entre el refractario y el gas de calentamiento.
k_p	Conductividad del pelet.
k_r	Conductividad del refractario.
L_p	Area de pelet por unidad de longitud.
L_r	Area de refractario por unidad de longitud.
M_p	Masa de pelet por unidad de longitud.
M_r	Masa de refractario por unidad de longitud.
Q_g	Energía calorífica del gas de calentamiento.
Q_p	Energía calorífica del pelet en un Δz de lecho.
Q_r	Energía calorífica del refractario en un Δz de lecho.
r	Coordenada del pelet; $r = a$ en la superficie del pelet.

T_g Temperatura del gas de calentamiento en función del tiempo.

T_p Temperatura del pelet en función del radio del pelet y del tiempo.

T_r Temperatura del refractario en función del espesor y del tiempo.

T_g^o Temperatura del gas de calentamiento al entrar al lecho.

T_p^o Temperatura inicial del pelet.

T_{ng} Temperatura del gas referenciada a T_p^o y normalizada a $T_g^o-T_p^o$.

T_{np} Temperatura del pelet referenciada a T_p^o y normalizada a $T_g^o-T_p^o$.

x Coordenada del refractario referenciada a la pared en contacto con los pelets; dirección positiva hacia afuera del lecho perpendicularmente al eje de simetría.

z Coordenada del lecho referenciada a la base; dirección positiva hacia arriba.

GRIEGAS.

ε	Espesor del refractario.
K_p	Difusividad del pelet.
K_r	Difusividad del refractario.
ρ_p	Densidad del pelet.
ρ_r	Densidad del refractario.
τ	Parámetro adimensional del tiempo.
ξ	Parámetro adimensional de la altura en el lecho.