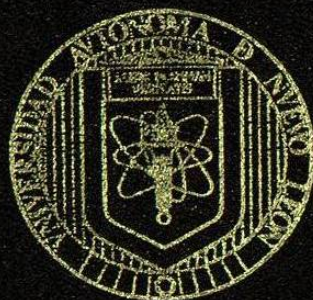


UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA
Y ELECTRICA.
ESCUELA DE GRADUADOS



MODELO MATEMATICO LINEAL APROXIMADO
EN TRANSFERENCIA DE CALOR
(CASO UNIDIMENSIONAL)

T E S I S

QUE PRESENTA.

MAURICIO ACENCIO SANTILLAN MARROQUIN
EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN
CIENCIAS DE LA INGENIERIA MECANICA
CON ESPECIALIDAD EN MATERIALES

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L. JULIO, 1992

TM

Z5853

.M2

FIME

1992

S2



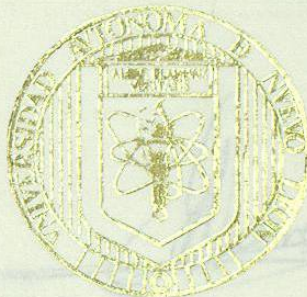
1020070651

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA
Y ELECTRICA.

ESCUELA DE GRADUADOS

MT
52823
SU.
5MT
5201
30



DR. CARLOS GUERRERO SALAZAR

ASESOR

MODELO MATEMATICO LINEAL APROXIMADO
EN TRANSFERENCIA DE CALOR
(CASO UNIDIMENSIONAL)

TESIS

QUE PRESENTA.

MAURICIO ACENCIO SANTILLAN MARROQUIN

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA INGENIERIA MECANICA

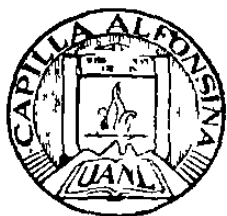
CON ESPECIALIDAD EN MATERIALES



FONDO TESIS
LAR GARIB
5204

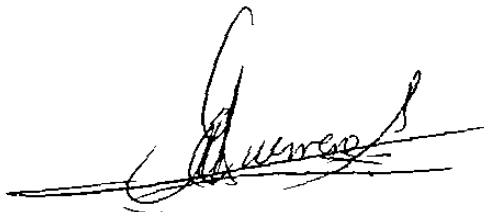
SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L. JULIO, 1992

TM
25 3
M2
F
13



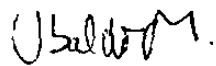
FONDO TESIS

2408 :



DR. CARLOS GUERRERO SALAZAR

ASESOR



DR. UBALDO ORTIZ MENDEZ

REVISOR



DR. JUAN A. AGUILAR GARIB

REVISOR

CON ESFUERZO Y VOLUNTAD,
CULMINO ESTA ETAPA CON LA
PRESENTE TESIS, LA CUAL
DEDICO CON CARÍÑO A:

MI MADRE POR SU BONDAD.

MI ESPOSA POR SU APOYO
COMO COMPAÑERA.

A MIS HIJOS

MAURICIO,

MARCO IVÁN Y

ALEXI.

AGRADEZCO A LA UNIVERSIDAD POR SU VALIOSO APOYO
ECONÓMICO, A LA FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y
ELÉCTRICA POR LAS FACILIDADES QUE ME BRINDÓ.

A LOS CATEDRÁTICOS DEL PROGRAMA DOCTORAL POR
COMPARTIRME SUS CONOCIMIENTOS.

A MI ASESOR Y REVISORES POR SU TIEMPO DEDICADO A
LA REALIZACIÓN DE ESTA TESIS.

MODELO MATEMÁTICO LINEAL APROXIMADO
EN TRANSFERENCIA DE CALOR
(CASO UNIDIMENCIONAL)

TABLA DE CONTENIDO

	RESUMEN.	VII
	LISTA DE SÍMBOLOS.	IX
	LISTA DE ILUSTRACIONES.	X
I.)	INTRODUCCIÓN.	1
II.)	PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.	4
III.)	ANTECEDENTES.	5
IV.)	DESARROLLO DEL MODELO.	7
	IV.1) ADECUANDO LA SOLUCIÓN.	7
	IV.2) CRITERIO DE CONVERGENCIA.	9
	IV.3) COEFICIENTES GENERATIVOS.	10
	IV.3.1) CAPA 1.	10
	IV.3.1.1) CONDICIÓN FRONTERA EN $x=0$.	11
	IV.3.1.2) EXPRESIÓN PARA LA TEMPERATURA EN $x=1$.	11
	IV.3.1.3) EXPRESIÓN PARA EL GRADIENTE DE LA TEMPERATURA EN $x=1$.	12
	IV.3.2) CAPA 2.	13
	IV.3.2.1) CONDICIÓN FRONTERA EN $x=0$.	13
	IV.3.2.2) EXPRESIÓN PARA LA TEMPERATURA EN $x=1$.	14
	IV.3.2.3) EXPRESIÓN PARA EL GRADIENTE DE LA TEMPERATURA EN $x=1$.	16
	IV.3.3) CAPA n .	
	IV.3.3.1) CONDICIÓN FRONTERA EN $x=0$.	17
	IV.3.3.2) EXPRESIÓN PARA LA TEMPERATURA EN $x=1$.	19

IV.3.3.3)	EXPRESIÓN PARA EL GRADIENTE DE LA TEMPERATURA EN $x=1$.	20
IV.3.3.4)	EXPRESIÓN PARA LA TEMPERATURA $T_n(x, t)$.	21
IV.4)	BALANCE DE ENERGÍA.	22
IV.5)	EL GRADIENTE G_{01} EN FUNCIÓN DE $G_{01}^{(j)}$ CON $J \neq 0$.	24
IV.6)	T_n EN FUNCIÓN DE $G_{01}^{(j)}$ CON $J \neq 0$.	24
IV.7)	G_n EN FUNCIÓN DE $G_{01}^{(j)}$ CON $J \neq 0$.	25
V.)	CÁLCULO DE PARÁMETROS.	27
VI.)	ALGORITMO GENERAL.	29
VII.)	ALGORITMO PARTICULAR.	32
VIII.)	SOLUCIÓN APROXIMADA VS. SOLUCIÓN ANALÍTICA	35
VIII.1)	PRIMER CASO.	36
VIII.2)	SEGUNDO CASO.	54
VIII.3)	TERCER CASO.	58
IX.)	CONCLUSIONES.	61
APÉNDICES.		
A.)	PRUEBA DE CONVERGENCIA.	64
B.)	IDENTIDADES.	65
C.)	SOLUCIÓN ANALÍTICA 1.	66
D.)	SOLUCIÓN ANALÍTICA 2.	70
E.)	DATOS.	72
REFERENCIAS.		74

RESUMEN.

El objetivo de este trabajo consiste, en la obtención de un algoritmo general para calcular la temperatura y el flujo de calor unidireccional, en el caso transitorio, cuando se tiene una pared formada por N capas de diferentes materiales.

Partiendo de una solución general para la temperatura donde ésta se expresa mediante dos series infinitas, en las cuales aparecen dos funciones del tiempo desconocidas junto a sus derivadas temporales, y después de eliminar una de ellas y sus derivadas, se obtiene un algoritmo sencillo de usar en donde la búsqueda de la función desconocida se reduce a resolver un sistema de ecuaciones lineales teniendo por incógnitas las derivadas temporales de dicha función. Una vez conocidas las incógnitas mencionadas anteriormente se calcula la temperatura en puntos específicos y el flujo de calor a través de las N capas en los siguientes casos:

- 1.- Manteniendo la conductividad térmica de cada una de las N capas constante e independiente de la temperatura.
- 2.- Considerando los cambios en la conductividad térmica en función de la temperatura.
- 3.- Tomar en cuenta los cambios de la temperatura que calienta al sólido con el tiempo.

El empleo del algoritmo evita encontrar la solución analítica mediante la ecuación diferencial parcial de

Fourier en cada uno de los casos anteriores donde la solución implica, además de sus dificultades matemáticas:

1.- Calcular la expresión de la temperatura para N capas.

2.- Resolver la ecuación diferencial parcial no lineal de Fourier cuando la conductividad térmica cambia con la temperatura.

3.- Encontrar la función de Green cuando la temperatura del medio que calienta al sólido formado por las N capas, cambia con el tiempo.

Además, al resolver algebraicamente el sistema de ecuaciones lineales mencionado anteriormente, se obtiene un algoritmo particular, con la característica de que el tiempo de cómputo se reduce notablemente. La desventaja del algoritmo particular como en todos los casos es que no es generalizable.

El algoritmo particular ha sido utilizado en un programa global que simula el proceso de reducción de mineral de hierro. Los datos obtenidos con el simulador global, concuerdan con los datos experimentales recopilados en planta, validando con esto indirectamente este trabajo.

LISTA DE SÍMBOLOS.

- $a_{n,i}$ coeficiente de la capa n , término i -ésimo.
- C_{pi} capacidad calorífica de la capa i (Julio/Kg-°C).
- $Fo = K_N t/L^2$ número de Fourier.
- $G_{oi} = \partial_x T_i(x,t) \Big|_{x=0}$ gradiente de $T_i(x,t)$ de la capa i -ésima.
- $G_{oi}^{(j)}$ j -ésima derivada temporal de G_{oi} .
- h_i coeficiente de transferencia de calor entre la capa i -ésima y la capa $(i+1)$ (Watts/m²-°C).
- k_i conductividad térmica de la capa i (Watts/m-°C).
- L_i espesor de la capa i (m).
- $L = \sum_{i=1}^N L_i$ espesor total de la pared.
- N número total de capas.
- $R_i = k_i/(h_i L_i)$
- T_{oi} temperatura de la capa i -ésima en $x=0$ (°C).
- $T_{oi}^{(j)}$ j -ésima derivada temporal de T_{oi} .
- T_a temperatura del medio frío (°C).
- T_g temperatura del medio caliente (°C).
- T_i temperatura de la capa i -ésima en $x=0$ (°C).
- x' coordenada global (m) $0 \leq x' \leq L_1+L_2+\dots+L_N$.
- $x = (x' - \sum_{j=1}^{i-1} L_j)/L_i$ coordenada adimensional local en la capa i .
- $\alpha_i = L_i^2/K_i$.
- $\beta_{i+1} = (L_{i+1}/L_i) (k_i/k_{i+1})$.
- $\delta_{i,j}$ delta de kronecker.
- $K_i = k_i/(C_{pi} \rho_i)$ difusividad térmica de la capa i -ésima (m²/seg).

LISTA DE ILUSTRACIONES.

	Pág.
Figura 4.- Gráfica de T_2	39
Figura 6.- Gráfica de T_3	41
Figura 7.- Gráfica de T_3	43
Figura 4.a - Gráfica de T_3	45
Figura 6.a - Gráfica del flujo \dot{q}_0 para dos capas.	46
Figura 7.a - Gráfica del flujo \dot{q}_0 para tres capas.	47
Figura 4.b - Gráfica del flujo \dot{q}_2	50
Figura 6.b - Gráfica del flujo \dot{q}_3	51
Figura 7.b - Gráfica del flujo \dot{q}_3	52
Figura 8.- Gráfica de T_2 cuando k cambia con la tempe- ratura.	55
Figura 8.a.- Gráfica de \dot{q}_0 cuando k cambia con la tempe- ratura.	56
Figura 8.b.- Gráfica de \dot{q}_2 cuando k cambia con la tempe- ratura.	57
Figura 9.- Gráfica de T_2 cuando $T_g(t)$ cambia lineal- mente con el tiempo.	59
Figura 9.a.- Gráfica del flujo de calor \dot{q}_2 cuando $T_g(t)$ cambia linealmente con el tiempo.	60

1. INTRODUCCIÓN.

Existe una gran variedad de reactores industriales, dentro de los cuales se tienen los de la industria del acero, a estos reactores como en otros de otras industrias, se les puede suministrar materia prima de una forma continua o por lotes; en la segunda forma se tiene una clase particular de reactor llamado de lecho fijo, donde en el caso de la reducción directa el mineral tiene un tiempo de permanencia suficiente para efectuar su reducción mediante gas proceso previamente calentado.

Las paredes de los reactores de lecho fijo de la industria del acero están formados por capas múltiples, dentro de los cuales cabe mencionar tres : 1) la capa interna formada de material refractario, usado por su alto punto de fusión y resistencia a la abrasión producida por el material en proceso en el interior ; 2) una capa de concreto aislante para evitar pérdidas de energía calorífica, y 3) una coraza de acero que forma la estructura externa del reactor y que además, sujeta a las capas del aislante y refractario.

En los reactores de lecho fijo el proceso transcurre en el estado térmico transitorio, debido a que se carga el reactor con material a temperatura ambiente; se calienta éste junto con las paredes del reactor mediante el gas proceso que ya está caliente, y sin que la pared del

reactor llegue al estado estacionario se concluye el proceso, por lo cual, al iniciar el ciclo de enfriamiento se enfría tanto al material procesado como al reactor, mediante un gas inerte frío.

En el caso de un proceso de reducción directa en lecho fijo en que se requiera predecir el grado de reducción del mineral, es necesario calcular la pérdida de energía calorífica a través de las paredes, y con esto, evaluar la energía calorífica disponible para que se lleven a cabo las reacciones para la reducción.

Este trabajo surge de la necesidad de desarrollar una herramienta que permita calcular, en un tiempo mínimo, la temperatura y la pérdida de energía calorífica a través de las capas que forman la pared compuesta del reactor.

Un caso particular del algoritmo desarrollado en esta tesis, se implementó como parte de un programa donde se simuló el proceso de reducción directa de mineral de hierro en lecho fijo por lotes. Las predicciones obtenidas mediante la simulación resultaron en buena concordancia con los datos obtenidos en planta, validando con esto de manera indirecta la metodología que empleamos para calcular la temperatura y la pérdida de calor a través de las paredes del reactor.

El objetivo de este trabajo consiste pues, en encontrar un algoritmo general con el cual se calcule la temperara

tura y el flujo de energía calorífica a través de una pared formada por N capas de diferentes materiales. Además, se traza como objetivo el que la metodología de cálculo posea las características siguientes:

1.- Que permita cambiar, por cada intervalo de temperatura pre-definido, los parámetros que sean función de la temperatura.

2.- Que tome en cuenta los cambios de la temperatura del medio caliente cuando ésta cambie con el tiempo.

Los valores de las temperaturas y del flujo de calor a través de las N capas obtenidas mediante nuestro algoritmo se comparan con los valores encontrados por medio de la solución analítica de la ecuación diferencial de Fourier, resuelta para dos casos particulares dados en los apéndices C y D.

II.) PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

Para cumplir el objetivo mencionado en la introducción se plantea el siguiente problema, en el cual, al indagar la solución nos conduce al algoritmo buscado.

Se pretende desarrollar un modelo matemático lineal, aproximado, para el caso unidimensional transitorio, el cual permita evaluar las temperaturas en las fronteras o en puntos internos de N sólidos planos semi-infinitos homogéneos e isotrópicos de espesores L_i en contacto térmico, existiendo resistencia térmica de contacto en las fronteras sólido-sólido, con un coeficiente de transferencia de calor h_i . En la frontera $x=0$ se tiene un coeficiente convectivo h_0 y una temperatura T_a constante para $x \ll 0$. En $x=L_1 + \dots + L_N$ se tiene un coeficiente convectivo h_N y en $x \gg L_1 + \dots + L_N$ la temperatura es $T_g(t)$ dependiente del tiempo, figura 1.

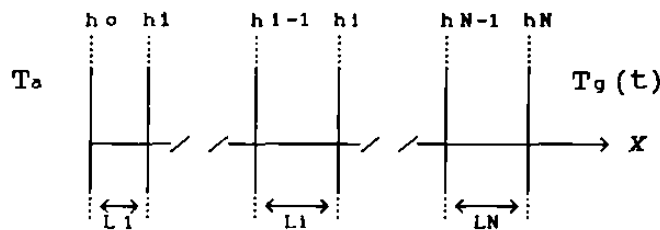


Figura 1.- N capas en contacto térmico.

III.) ANTECEDENTES

En el libro de J. Fourier [1], se encuentra una solución analítica general que se aplicará a cada una de las capas del problema planteado. En el mismo libro se encuentra la deducción que se reproduce a continuación.

Una solución analítica general de la ecuación de Fourier,

$$\partial_t T(x', t) = K \partial_{x'}^2 T(x', t), \quad (1)$$

formada por una serie infinita de términos de acuerdo a potencias ascendentes de x' , se genera de la siguiente forma.

Usando (1) y denotando por $f^{(i)}(t)$ la i -ésima derivada temporal de la función $f(t)$, se tiene

$\partial_{x'}^2 T(x', t) = \frac{1}{K} \partial_t T(x', t)$, integrando con respecto a x' dos veces se escribe;

$$T(x', t) = T_0(t) + g_0(t) x' + \frac{1}{K} \int dx' \int \partial_t T(x', t) dx' \quad (2)$$

Derivando i -veces $T(x', t)$ con respecto al tiempo t ;

$$\partial_t^i T(x', t) = T_0^{(i)}(t) + g_0^{(i)}(t) x' + \frac{1}{K} \int dx' \int \partial_t^{i+1} T(x', t) dx'$$

y sustituyendo en (2), $\partial_t^i T(x', t)$ e integrando, se obtiene la siguiente expresión:

$$T(x', t) = T_0(t) + g_0(t) x' + \dots + \frac{1}{K} \int dx' \int dx' \left[T_0^{(1)}(t) + g_0^{(1)}(t) x' + \frac{1}{K} \int dx' \int \partial_t^2 T(x', t) dx' \right],$$

continuando con la sustitución de las derivadas temporales

e integrando, se obtiene la siguiente expresión para la temperatura:

$$\begin{aligned}
 T(x',t) = & T_0(t) + \frac{1}{2!K} T_0^{(1)}(t) x'^2 + \frac{1}{4!K^2} T_0^{(2)}(t) x'^4 + \dots \\
 & + g_0(t) x' + \frac{1}{3!K} g_0^{(1)}(t) x'^3 + \frac{1}{5!K^2} g_0^{(2)}(t) x'^5 + \dots
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

donde $T_0(t)$ y $g_0(t)$ son dos funciones arbitrarias del tiempo con las siguientes propiedades:

$$T(0,t) = T_0(t) \tag{3-1}$$

$$\left. \frac{\partial x' T(x',t)}{\partial x'} \right|_{x'=0} = g_0(t) \tag{3-2}$$

La solución analítica general (3), consiste en dos series infinitas donde aparece en forma explícita la variable posición y de forma implícita la variable tiempo. Las dos funciones del tiempo, la (3-1) y (3-2), son desconocidas, y para encontrarlas se propone truncar las series a un número finito de términos, obteniéndose con ésto, valores aproximados de la temperatura y del flujo de calor.

IV.) DESARROLLO DEL MODELO.

En este tema se desarrolla el modelo matemático lineal que consiste, en la aplicación de la ecuación (3) y sus propiedades en cada una de las capas, conduciendo de esta forma a la generalización de las expresiones de las temperaturas y flujos de calor en y a través de las N capas.

IV.1) ADECUANDO LA SOLUCIÓN.

Para simplificar el desarrollo futuro, se procede a cambiar la variable posición x' , dada en metros, por una adimensional, denotada por x .

En el sólido formado por N capas, se escribe para la i-ésima capa la temperatura, dada por (3), como:

$$T_i(x', t) = T_{oi}(t) + \frac{1}{2!K_i} T_{oi}^{(1)}(t) x'^2 + \frac{1}{4!K_i^2} T_{oi}^{(2)}(t) x'^4 + \dots$$

$$\dots + g_{oi}(t) x' + \frac{1}{3!K_i} g_{oi}^{(1)}(t) x'^3 + \frac{1}{5!K_i^2} g_{oi}^{(2)}(t) x'^5 + \dots$$

con $\sum_{j=1}^{i-1} L_j \leq x' \leq \sum_{j=1}^{i-1} L_j + L_i$, este dominio se puede escribir

$$\text{como } 0 \leq \frac{x' - \sum_{j=1}^{i-1} L_j}{L_i} \leq 1$$

entonces podemos re-escribir $T_i(x', t)$ de la siguiente forma

$$T_i(x', t) = T_{oi}(t) + \frac{L_i^2}{2!K_i} T_{oi}^{(1)}(t) \left[\frac{x' - \sum_{j=1}^{i-1} L_j}{L_i} \right]^2 + \dots$$

$$+ L_i g_{oi}(t) \left[\frac{x' - \sum_{j=1}^{i-1} L_j}{L_i} \right] + \frac{L_i^3}{3!K_i} g_{oi}^{(1)}(t) \left[\frac{x' - \sum_{j=1}^{i-1} L_j}{L_i} \right]^3 + \dots$$

Esta forma de solución satisface a la ecuación diferencial parcial (1) y a las igualdades (3-1) y (3-2) con la ventaja de poder definir una variable x adimensional cuyos valores se encuentran entre cero y la unidad en cada capa.

Definiendo $x = (x' - \sum_{j=1}^{i-1} L_j) / L_i$, $\alpha_i = L_i^2 / K_i$ y $G_{0i}(t) = L_i g_{0i}(t)$

se tiene

$$T_i(x, t) = T_{0i}(t) + \frac{\alpha_i^{(1)}}{2!} T_{0i}(t) x^2 + \frac{\alpha_i^{(2)}}{4!} T_{0i}(t) x^4 + \dots$$

$$\dots + G_{0i}(t) x + \frac{\alpha_i^{(1)}}{3!} G_{0i}(t) x^3 + \frac{\alpha_i^{(2)}}{5!} G_{0i}(t) x^5 + \dots$$

con $0 \leq x \leq 1$

o en forma compacta

$$T_i(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha_i^{(j)}}{(2j)!} T_{0i}(t) x^{2j} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha_i^{(j)}}{(2j+1)!} G_{0i}(t) x^{2j+1} \quad (4)$$

con $0 \leq x \leq 1$

donde se cumplen las siguientes propiedades

$$T_i(0, t) = T_{0i}(t) \quad (4-1)$$

$$\left. \frac{\partial x T_i(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = G_{0i}(t) \quad (4-2)$$

IV.2) CRITERIO DE CONVERGENCIA.

En la expresión para la temperatura $T_1(x,t)$ dada por la serie infinita (4), aparecen $T_{01}(t)$, $G_{01}(t)$ y sus derivadas. Se tomará cada una como una serie.

De la referencia [2], página 22, se cita el criterio de D'Alembert para la convergencia absoluta de series infinitas como sigue:

"We shall now show that a series $u_1+u_2+u_3+..$ is absolutely convergent, provided that for all values of n greater than some fixed value r , the ratio $|u_{n+1}/u_n|$ is less than ρ , where ρ is a positive number independent of n and less than unit."

Aplicando el criterio a las series de (4), se tiene que éstas convergen para toda x y t si

$$\left| \frac{\alpha_1^{n+1} \binom{n+1}{2(n+1)}! T_{01} x^{2(n+1)}}{2n! T_{01} x^{2n}} \right| < 1, \quad \left| \frac{\alpha_1^{n+1} \binom{n+1}{2(n+1)+1}! G_{01} x^{2(n+1)+1}}{(2n+1)! G_{01} x^{2n+1}} \right| < 1$$

donde después de simplificar se tiene que

$$\frac{\alpha_1}{(2n+1)(2n+2)} x^2 \frac{\binom{n+1}{2(n+1)}! |T_{01}|}{\binom{n}{2n}! |T_{01}|} < 1 \quad \text{y} \quad \frac{\alpha_1}{(2n+2)(2n+3)} x^2 \frac{\binom{n+1}{2(n+1)+1}! |G_{01}|}{\binom{n}{2n+1}! |G_{01}|} < 1,$$

como α_1 es constante en cada capa, entonces los factores $\frac{\alpha_1}{(2n+1)(2n+2)} x^2$ y $\frac{\alpha_1}{(2n+2)(2n+3)} x^2$ serán menores que la unidad para alguna $n > r$ (ver apéndice A), de donde, las condiciones que deben cumplir las funciones arbitrarias del tiempo $T_{01}(t)$ y $G_{01}(t)$ para la convergencia son:

$$\frac{\binom{n+1}{2(n+1)}! |T_{01}|}{\binom{n}{2n}! |T_{01}|} < 1 \quad (5)$$

$$\frac{\binom{n+1}{2(n+1)+1}! |G_{01}|}{\binom{n}{2n+1}! |G_{01}|} < 1 \quad (5-1)$$

IV.3) COEFICIENTES GENERATIVOS.

El objetivo de este tema consiste en encontrar la temperatura y su gradiente en cada capa como función lineal de G_{01} y sus derivadas temporales, solamente.

Para esto se evaluará la temperatura y el gradiente de ésta en $x=1$, en la capa 1, donde se definen los coeficientes $a_{1,j}$ y $b_{1,j}$. De la misma forma en la capa 2 donde se definen $a_{2,j}$ y $b_{2,j}$.

Se generalizan los resultados anteriores para la capa n -ésima.

Se hace notar que h_0 y h_n representan los coeficientes de transferencia de calor entre los medios adyacentes a los planos que limitan el sólido compuesto, y h_1, h_2, \dots, h_{n-1} son los coeficientes de transferencia de calor en la frontera entre dos capas.

IV.3.1) CAPA 1.

En la primera capa la serie (4) toma la forma

$$T_1(x,t) = T_{01}(t) + \frac{\alpha_1^{(1)}}{2!} T_{01}(t)x^2 + \frac{\alpha_1^{(2)}}{4!} T_{01}(t)x^4 + \dots$$
$$\dots + G_{01}(t)x + \frac{\alpha_1^{(1)}}{3!} G_{01}(t)x^3 + \frac{\alpha_1^{(2)}}{5!} G_{01}(t)x^5 + \dots \quad (6)$$

con $0 \leq x \leq 1$

con las propiedades

$$T_1(0,t) = T_{01} \quad (6-1)$$

$$\left. \frac{\partial x T_1(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = G_{01} \quad (6-2)$$

IV.3.1.1) CONDICIÓN FRONTERA EN $x=0$, EN LA CAPA 1.

La condición frontera en $x=0$ es

$$\frac{k_1}{L_1} \partial_x T_1(x,t) \Big|_{x=0} = h_0 [T_1(0,t) - T_a] \quad (7)$$

en la cual se sustituye (6-1) y (6-2) con el fin de despejar $T_{o1}(t)$. Omitiendo la dependencia temporal, se tiene que

$$T_{o1} = T_a + R_0 G_{o1} \quad (7-1)$$

$$\text{con } R_0 = k_1 / (L_1 h_0) \quad (7-2)$$

IV.3.1.2) EXPRESIÓN PARA LA TEMPERATURA EN $x=1$, CAPA 1

Evaluando (6) en $x=1$ y llamando $T_1 = T_1(1,t)$ se escribe

$$T_1 = T_{o1} + \frac{\alpha_1^{(1)}}{2!} T_{o1} + \frac{\alpha_1^{(2)}}{4!} T_{o1} + \dots + G_{o1} + \frac{\alpha_1^{(1)}}{3!} G_{o1} + \frac{\alpha_1^{(2)}}{5!} G_{o1} + \dots$$

o en forma compacta

$$T_1 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha_1^{(j)}}{(2j)!} T_{o1} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha_1^{(j)}}{(2j+1)!} G_{o1}. \quad (8)$$

Sustituyendo (7-1) en (8) y agrupando

$$T_1 = T_a + \sum_{j=0}^{\infty} \left(R_0 \frac{\alpha_1^{(j)}}{(2j)!} + \frac{\alpha_1^{(j)}}{(2j+1)!} \right) G_{o1},$$

entonces la igualdad anterior se transforma en

$$T_1 = T_a + \sum_{j=0}^{\infty} a_{1,j}^{(j)} G_{o1} \quad (9)$$

$$\text{con } a_{1,j} = R_0 \frac{\alpha_1^{(j)}}{(2j)!} + \frac{\alpha_1^{(j)}}{(2j+1)!} \quad (9-1)$$

IV.3.1.3) EXPRESIÓN PARA EL GRADIENTE DE LA TEMPERATURA EN $x=1$.

Denotando al gradiente de $T_1(x,t)$ evaluado en $x=1$ por G_1 , se tiene de (6):

$$G_1 = \alpha_1 \overset{(1)}{T_{01}} + \frac{\alpha_1^2}{3!} \overset{(2)}{T_{01}} + \dots + G_{01} + \frac{\alpha_1}{2!} G_{01} + \frac{\alpha_1^2}{4!} G_{01} + \dots,$$

o en forma compacta,

$$G_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_1^j}{(2j-1)!} \overset{(j)}{T_{01}} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha_1^j}{(2j)!} \overset{(j)}{G_{01}}.$$

Sustituyendo las derivadas temporales de (7-1) en G_1 y agrupando los factores comunes, se expresa

$$G_1 = G_{01} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(R_0 \frac{\alpha_1^j}{(2j-1)!} + \frac{\alpha_1^j}{(2j)!} \right) \overset{(j)}{G_{01}}$$

entonces, se escribe,

$$G_1 = \sum_{j=0}^{\infty} b_{1,j} \overset{(j)}{G_{01}} \quad (10)$$

$$\text{con } b_{1,j} = R_0 \frac{\alpha_1^j}{(2j-1)!} + \frac{\alpha_1^j}{(2j)!} \quad (10-1)$$

$$\text{donde se define } b_{1,0} = 1 \quad (10-2)$$

IV.3.2) CAPA 2

En la capa dos se tiene la siguiente expresión,

$$T_2(x,t) = T_{o2}(t) + \frac{\alpha_2^{(1)}}{2!} T_{o2}(t)x^2 + \frac{\alpha_2^{(2)}}{4!} T_{o2}(t)x^4 + \dots$$

$$\dots + G_{o2}(t)x + \frac{\alpha_2^{(1)}}{3!} G_{o2}(t)x^3 + \frac{\alpha_2^{(2)}}{5!} G_{o2}(t)x^5 + \dots \quad (11)$$

con $0 \leq x \leq 1$

con las propiedades

$$T_2(0,t) = T_{o2} \quad (11-1)$$

$$\left. \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = G_{o2}. \quad (11-2)$$

IV.3.2.1) CONDICIÓN FRONTERA EN $x=0$, CAPA 2.

La condición frontera en $x=0$ es

$$\frac{k_1}{L_1} \left. \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial x} \right|_{x=1} = h_1 [T_2(0,t) - T_1(1,t)] \quad (12)$$

$$= \frac{k_2}{L_2} \left. \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (13)$$

usando (11-1) en (12) se despeja T_{o2} obteniéndose

$$T_{o2} = T_1 + R_1 G_1 \quad (12-1)$$

$$\text{donde } R_1 = k_1 / (L_1 h_1) \quad (12-2)$$

y sustituyendo (11-2) en (13) y despejando G_{o2} se llega a que

$$G_{o2} = \beta_2 G_1 \quad (13-1)$$

$$\text{con } \beta_2 = (k_1/k_2) (L_2/L_1) \quad (13-2)$$

reemplazando, en (12-1) y (13-1), a T_1 y G_1 dadas por (9) y (10), y después de agrupar términos semejantes; se encuentra que

$$T_{o2} = T_a + \sum_{j=0}^{\infty} \left(a_{1,j} + R_1 b_{1,j} \right)^{(j)} G_{o1} \quad (14)$$

$$G_{o2} = \beta_2 \sum_{j=0}^{\infty} b_{1,j}^{(j)} G_{o1} \quad (15)$$

IV.3.2.2) EXPRESIÓN PARA LA TEMPERATURA EN $x=1$, CAPA 2.

Evaluando $T_2(x,t)$ en $x=1$ y escribiéndola en forma compacta $T_2=T_2(1,t)$ se encuentra que

$$T_2 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha_2^j}{(2j)!} T_{o2}^{(j)} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha_2^j}{(2j+1)!} G_{o2}^{(j)}$$

sustituyendo (14) y (15) en la igualdad anterior y después de distribuir las sumas de las j se tiene

$$T_2 = T_a + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha_2^j}{(2j)!} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left(a_{1,i} + R_1 b_{1,i} \right)^{(j+1)} G_{o1} + \dots \right. \\ \left. \dots + \beta_2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha_2^j}{(2j+1)!} \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_{1,i} \right)^{(j+1)} G_{o1} \right)$$

aplicando la identidad (B-1) del Apéndice B, se encuentra

$$T_2 = T_a + \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=0}^j \frac{\alpha_2^i}{2i!} \left(a_{1,j-i} + R_1 b_{1,j-i} \right) \right\}^{(j)} G_{o1} + \dots \\ \dots + \beta_2 \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=0}^j \frac{\alpha_2^i}{(2i+1)!} b_{1,j-i} \right\}^{(j)} G_{o1}$$

y arreglando

$$T_2 = T_a + \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=0}^j \frac{\alpha_2^i}{2^i!} (a_{1,j-i} + R_1 b_{1,j-i}) + \dots \right. \\ \left. \dots + \beta_2 \sum_{i=0}^j \frac{\alpha_2^i}{(2^i+1)!} b_{1,j-i} \right\} G_{01}^{(j)}$$

entonces se escribe,

$$T_2 = T_a + \sum_{j=0}^{\infty} a_{2,j} G_{01}^{(j)} \quad (16)$$

con

$$a_{2,j} = \sum_{i=0}^j \frac{\alpha_2^i}{2^i!} (a_{1,j-i} + R_1 b_{1,j-i}) + \beta_2 \sum_{i=0}^j \frac{\alpha_2^i}{(2^i+1)!} b_{1,j-i} \quad (16-1)$$

T_2 corresponde a la temperatura en la capa 2 en función lineal de G_{01} y sus derivadas temporales, esto es, del gradiente de la temperatura de la capa 1 evaluado en $x=0$.

IV-3-2-3) EXPRESIÓN PARA EL GRADIENTE DE LA TEMPERATURA EN
 $x=1$, DE LA CAPA 2.

Para el gradiente de $T_2(x,t)$ evaluado en $x=1$ se tiene,

$$G_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_2^j}{(2j-1)!} T_{02}^{(j)} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha_2^j}{(2j)!} G_{02}^{(j)}$$

sustituyendo T_{02} y G_{02} , dadas por (14) y (15), y sus derivadas, y aplicando las identidades (A-1) y (A-4) del Apéndice A se tiene,

$$G_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^j \frac{\alpha_2^i}{(2i-1)!} (a_{1,j-i} + R_1 b_{1,j-i}) \right\}^{(j)} G_{01} + \dots$$

$$\dots + \beta_2 \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=0}^j \frac{\alpha_2^i}{2i!} b_{1,j-i} \right\}^{(j)} G_{01},$$

adelantando la segunda suma de $j=0$ a $j=1$, se escribe G_2 como

$$G_2 = \beta_2 b_{1,0} G_{01} + \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^j \frac{\alpha_2^i}{(2i-1)!} (a_{1,j-i} + R_1 b_{1,j-i}) + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \beta_2 \sum_{i=0}^j \frac{\alpha_2^i}{2i!} b_{1,j-i} \right\}^{(j)} G_{01},$$

con lo cual podemos expresar G_2 de la siguiente forma:

$$G_2 = \sum_{j=0}^{\infty} b_{2,j} G_{01}^{(j)} \quad (17)$$

con $b_{2,j} = \sum_{i=1}^j \frac{\alpha_2^i}{(2i-1)!} (a_{1,j-i} + R_1 b_{1,j-i}) + \dots$

$$\dots + \beta_2 \sum_{i=0}^j \frac{\alpha_2^i}{2i!} b_{1,j-i} \quad (17-1)$$

IV.3.3) CAPA n.

Se ha expresado la temperatura y el gradiente en $x=1$, como función lineal de las derivadas temporales del gradiente de la temperatura de la primera capa evaluada en $x=0$.

Ahora se generaliza a cualquier capa, tomando como base los resultados anteriores.

De manera general la temperatura en la capa n se escribe de la siguiente forma:

$$T_n(x,t) = T_{0n}(t) + \frac{\alpha_n^{(1)}}{2!} T_{0n}(t)x^2 + \frac{\alpha_n^{(2)}}{4!} T_{0n}(t)x^4 + \dots$$

$$\dots + G_{0n}(t)x + \frac{\alpha_n^{(1)}}{3!} G_{0n}(t)x^3 + \frac{\alpha_n^{(2)}}{5!} G_{0n}(t)x^5 + \dots \quad (18)$$

$$\text{con } 0 \leq x \leq 1$$

con las propiedades siguientes:

$$T_n(0,t) = T_{0n} \quad (18-1)$$

$$\left. \frac{\partial T_n(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = G_{0n}. \quad (18-2)$$

IV.3.3.1) CONDICIÓN FRONTERA EN $x=0$, DE LA CAPA n.

La condición frontera en $x=0$ es

$$\frac{k_{n-1}}{L_{n-1}} \left. \frac{\partial T_{n-1}(x,t)}{\partial x} \right|_{x=1} = h_{n-1} [T_n(0,t) - T_{n-1}(1,t)] \quad (19)$$

$$= \frac{k_n}{L_n} \left. \frac{\partial T_n(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (20)$$

donde el lado izquierdo de (19) es válida para $n > 1$ y $T_0(1,t) = T_a$. Con ayuda de las propiedades (18-1) y (18-2) se obtiene al igualar los lados derechos de (19) y (20)

$$T_{0n} = T_{n-1} + R_{n-1} G_{n-1} \quad (19-1)$$

$$\text{con } R_{n-1} = k_{n-1}/(L_{n-1} h_{n-1}) \quad (19-2)$$

e igualando el lado izquierdo de (19) con (20)

$$G_{0n} = \beta_n G_{n-1} \quad (20-1)$$

$$\text{donde } \beta_n = (L_n/L_{n-1}) (k_{n-1}/k_n) \quad (20-2)$$

Generalizando (14) y (15) se tiene para la capa n ,

$$T_{0n} = T_a + \sum_{j=0}^{\infty} (a_{n-1,j} + R_{n-1} b_{n-1,j}) G_{01}^{(j)}, \quad (21)$$

$$G_{0n} = \beta_n \sum_{j=0}^{\infty} b_{n-1,j} G_{01}^{(j)}. \quad (22)$$

Se definen las siguientes constantes con el fin de tomar en cuenta la capa 1.

Para $n=1$

$$\beta_1 = 1 \quad (23)$$

$$a_{0,j} = 0 \text{ para toda } j \quad (23-1)$$

$$b_{0,j} = \delta_{0j} \quad (23-2)$$

$$G_0 = G_{01} \quad (23-3)$$

$$k_0 = k_1 \quad (23-4)$$

$$L_0 = L_1 \quad (23-5)$$

$$T_0 = T_a \quad (23-6)$$

IV.3.3.2) EXPRESIÓN PARA LA TEMPERATURA EN $x=1$, CAPA n .

Evaluable $T_n(x,t)$, dada por (18), en $x=1$, $T_n(1,t)$ se escribe por

$$T_n = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha_n^j}{(2j)!} T_{0n}^{(j)} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha_n^j}{(2j+1)!} G_{0n}^{(j)}$$

sustituyendo $T_{0n}^{(j)}$ y $G_{0n}^{(j)}$ en la igualdad anterior, T_n se transforma en

$$T_n = T_a + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha_n^j}{(2j)!} \left[\sum_{i=0}^{\infty} (a_{n-1,i} + R_{n-1} b_{n-1,i}) G_{01}^{(j+i)} \right] + \dots$$

$$\dots + \beta_n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha_n^j}{(2j+1)!} \left[\sum_{i=0}^{\infty} b_{n-1,i} G_{01}^{(j+i)} \right],$$

aplicando la identidad (B-1), del apéndice B, se encuentra, después de factorizar $G_{01}^{(j)}$, que

$$T_n = T_a + \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=0}^j \frac{\alpha_n^i}{(2i)!} (a_{n-1,j-i} + R_{n-1} b_{n-1,j-i}) + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \beta_n \sum_{i=0}^j \frac{\alpha_n^i}{(2i+1)!} b_{n-1,j-i} \right\} G_{01}^{(j)}$$

definiendo la temperatura T_n de la siguiente forma, se tiene

$$T_n = T_a + \sum_{j=0}^{\infty} a_{n,j} G_{01}^{(j)} \quad (24)$$

con $a_{n,j} = \sum_{i=0}^j \frac{\alpha_n^i}{(2i)!} (a_{n-1,j-i} + R_{n-1} b_{n-1,j-i}) + \dots$

$$\dots + \beta_n \sum_{i=0}^j \frac{\alpha_n^i}{(2i+1)!} b_{n-1,j-i} \quad (24-1)$$

IV.3.3.3) EXPRESIÓN PARA EL GRADIENTE DE LA TEMPERATURA EN
 $x=1$, CAPA n

Para el gradiente de $T_n(x,t)$, evaluado en $x=1$ se tiene,

$$G_n = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^j}{(2j-1)!} T_{0n}^{(j)} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha_n^j}{(2j)!} G_{0n}^{(j)}$$

sustituyendo T_{0n} y G_{0n} , dadas por (14) y (15), y sus derivadas, y aplicando las identidades (B-1) y (B-4) se tiene,

$$G_n = \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^j \frac{\alpha_n^i}{(2i-1)!} (a_{n-1,j-i} + R_{n-1} b_{n-1,j-i}) \right\} G_{01}^{(j)} + \dots$$

$$\dots + \beta_n \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=0}^j \frac{\alpha_n^i}{(2i)!} b_{n-1,j-i} \right\} G_{01}^{(j)}$$

adelantando la segunda suma de $j=0$ a $j=1$, y agrupando se consigue escribir G_n como

$$G_n = \beta_n b_{n-1,0} G_{01} + \dots$$

$$\dots + \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^j \frac{\alpha_n^i}{(2i-1)!} (a_{n-1,j-i} + R_{n-1} b_{n-1,j-i}) + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \beta_n \sum_{i=0}^j \frac{\alpha_n^i}{(2i)!} b_{n-1,j-i} \right\} G_{01}^{(j)}$$

con lo cual podemos expresar G_n de la siguiente forma:

$$G_n = \sum_{j=0}^{\infty} b_{n,j} G_{01}^{(j)} \quad (25)$$

con $b_{n,j} = \sum_{i=1}^j \frac{\alpha_n^i}{(2i-1)!} (a_{n-1,j-i} + R_{n-1} b_{n-1,j-i}) + \dots$

$$\dots + \beta_n \sum_{i=0}^j \frac{\alpha_n^i}{(2i)!} b_{n-1,j-i} \quad (25-1)$$

IV.3.3.4) EXPRESIÓN PARA LA TEMPERATURA $T_n(x, t)$

La temperatura $T_n(x, t)$ expresada por (18) se escribe en función de T_{on} y G_{on} dadas por (21) y (22) de la siguiente forma.

$$T_n(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha_n^j}{(2j)!} x^{2j} T_{on}^{(j)} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha_n^j}{(2j+1)!} x^{2j+1} G_{on}^{(j)}, \quad (26)$$

sustituyendo T_{on} y G_{on} , y aplicando (B-1), y después de factorizar T_a y G_{o1}

$$T_n(x, t) = T_a + \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=0}^j \frac{\alpha_n^i}{(2i)!} x^{2i} (a_{n-1, j-i} + R_{n-1} b_{n-1, j-i}) + \dots \right. \\ \left. \dots + \beta_n \sum_{i=0}^j \frac{\alpha_n^i}{(2i+1)!} x^{2i+1} b_{n-1, j-i} \right\} G_{o1}^{(j)},$$

o de manera compacta

$$T_n(x, t) = T_a + \sum_{j=0}^{\infty} F_{n, j}(x) G_{o1}^{(j)}, \quad (26-1)$$

donde:

$$F_{n, j}(x) = \sum_{i=0}^j \frac{\alpha_n^i}{(2i)!} x^{2i} (a_{n-1, j-i} + R_{n-1} b_{n-1, j-i}) + \dots \\ \dots + \beta_n \sum_{i=0}^j \frac{\alpha_n^i}{(2i+1)!} x^{2i+1} b_{n-1, j-i} \quad (26-2)$$

Con la expresión (26-1) se alcanza el objetivo planteado de tener la temperatura de cada capa en función de G_{o1} y sus derivadas temporales. Lo que nos resta es solamente definir de forma operacional esta última función G_{o1} , para lo cual se hará uso del balance de energía aplicado al sistema formado por las N capas, en el siguiente tema.

IV.4) BALANCE DE ENERGÍA.

Conociendo el gradiente de la primera capa G_{01} , se tiene el flujo de calor hacia el medio frío.

Mediante el balance de energía aplicado al sistema formado por las N capas, se logra expresar G_{01} en función lineal de sus derivadas temporales.

Denotando por \dot{q}_n , el flujo de energía por unidad de área y tiempo, se tiene para la capa n , figura 2, que

$$\dot{q}_n = \frac{k_n}{L_n} \left. \frac{\partial x T_n(x, t)}{\partial x} \right|_{x=1} = \frac{k_n}{L_n} G_n.$$

En la capa 1, cuando $x=0$ se tiene

$$\dot{q}_0 = h_0 (T_{01} - T_a) \quad (27)$$

$$\dot{q}_0 = \frac{k_1}{L_1} \left. \frac{\partial x T_1(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{k_1}{L_1} G_{01}, \quad (27-1)$$

y para $x=1$, en la capa N ,

$$\dot{q}_N = h_N (T_g - T_N) \quad (28)$$

$$\dot{q}_N = \frac{k_N}{L_N} \left. \frac{\partial x T_N(x, t)}{\partial x} \right|_{x=1} = \frac{k_N}{L_N} G_N, \quad (28-1)$$

entonces, de la conservación de la energía, se encuentra;

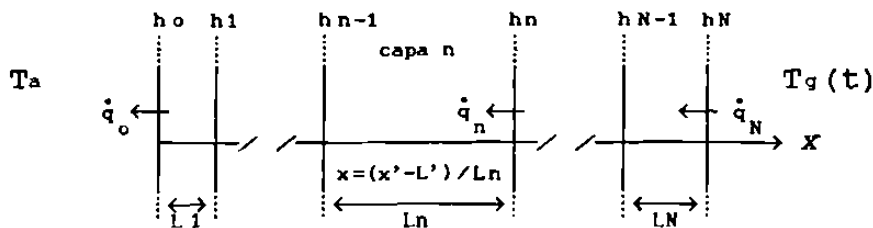


Figura 2.-En la figura \dot{q}_n son los flujos de calor,

$$y L' = \sum_{j=1}^{n-1} L_j.$$

$$\dot{q}_N = \sum_{n=1}^N \rho_n L_n C_{pn} \frac{\partial t}{\partial t} \langle T_n(x, t) \rangle + \dot{q}_0 \quad (29)$$

donde $\langle T_n(x,t) \rangle$ es la temperatura promedio de la capa n , definida por

$$\langle T_n(x,t) \rangle = \int_0^1 T_n(x,t) dx. \quad (30)$$

Sustituyendo en la definición de la temperatura promedio, (30), la expresión de $T(x,t)$ dada por (26), y después de integrar, se obtiene

$$\langle T_n(x,t) \rangle = T_a + \sum_{j=0}^{\infty} c_{n,j} G_{01}^{(j)}, \quad (31)$$

con $c_{n,j} = \sum_{i=0}^j \frac{\alpha_n^i}{(2i+1)!} (a_{n-1,j-i} + R_{n-1} b_{n-1,j-i}) + \dots$

$$\dots + \beta_n \sum_{i=0}^j \frac{\alpha_n^i}{(2i+2)!} b_{n-1,j-i} \quad (31-1)$$

IV.5) EL GRADIENTE G_{01} EN FUNCIÓN DE $G_{01}^{(j)}$ CON $J \neq 0$.

Para encontrar G_{01} se sustituye q_0 y q_N , (27-1) y (28-1), en (29) obteniéndose la siguiente expresión

$$G_{01} = \beta_0 G_N - \frac{L_1}{K_1} \sum_{j=1}^{\infty} S_j^{(j)} G_{01} \quad (32)$$

$$\text{con } \beta_0 = \frac{L_1}{L_N} \frac{K_N}{K_1} \quad (32-1)$$

$$S_j = \sum_{n=1}^N D_n C_{n,j-1} \quad (32-2)$$

$$D_n = \rho_n L_n C_{pn} \quad (32-3)$$

IV.6) T_n EN FUNCIÓN DE $G_{01}^{(j)}$ CON $J \neq 0$.

T_n se encuentra dada por (24); donde aparece G_{01} , para eliminarla se adelanta la suma de $j=0$ a $j=1$ y factorizando $G_{01}^{(j)}$, después de sustituir G_{01} dada por (32), se tiene

$$T_n = T_a + a_{n,0} \beta_0 G_N + \sum_{j=1}^{\infty} e_{n,j}^{(j)} G_{01} \quad (33)$$

$$e_{n,j} = a_{n,j} - a_{n,0} \frac{L_1}{K_1} \sum_{s=1}^N D_s C_{s,j-1} \quad (33-1)$$

IV.7) EL GRADIENTE G_n EN FUNCIÓN DE $G_{01}^{(j)}$ CON $j \neq 0$.

Sustituyendo (32) en la expresión para G_n , (25), se tiene

$$G_n = b_{n,0} \beta_0 G_N + \sum_{j=1}^{\infty} g_{n,j} G_{01}^{(j)} \quad (34)$$

$$\text{con } g_{n,j} = b_{n,j} - b_{n,0} \frac{L_1}{K_1} \sum_{s=1}^N D_s C_{s,j-1} \quad (34-1)$$

Las relaciones (33) y (34) forman el sistema lineal de ecuaciones buscadas, donde para un tiempo t las incógnitas son las derivadas temporales de G_{01} .

Al tener N capas se calculan N temperaturas T_n y N gradientes G_n , en total $2N$ datos, que pueden ser por ejemplo, las temperaturas y gradientes iniciales, obligando a truncar las series y a tomar $2N$ términos de las series (33) y (34), obteniéndose un sistema lineal con $2N$ incógnitas. Las ecuaciones son

$$\sum_{j=1}^{2N} e_{n,j} G_{01}^{(j)} = T_n - T_a - a_{n,0} \beta_0 G_N \quad (35)$$

$$\sum_{j=1}^{2N} g_{n,j} G_{01}^{(j)} = G_n - b_{n,0} \beta_0 G_N \quad (36)$$

donde $n=1, \dots, N$

Igualando el lado derecho de (28) con (28-1) se tiene

$$G_N = \frac{L_N h_N}{K_N} [T_g(t) - T_N]. \quad (37)$$

Con esto, la búsqueda de la función desconocida G_{01} , que depende del tiempo, se ha reducido a la solución de un sistema de ecuaciones lineales, donde las incógnitas son las derivadas temporales de ella o sea $G_{01}^{(j)}(t)$.

Conocidas las $G_{01}^{(j)}$, se calculan las temperaturas T_n y los gradientes G_n iterándolos en el tiempo, esto es, de las ecuaciones (24) y (25) se tiene al derivar con respecto al tiempo y después de expresar las derivadas como diferencias finitas, que:

$$T_n(t+\Delta t) = T_n(t) + \Delta t \sum_{j=1}^{2N} a_{n,j-1} G_{01}^{(j)}(t), n=1..,N \quad (38)$$

$$G_n(t+\Delta t) = G_n(t) + \Delta t \sum_{j=1}^{2N} b_{n,j-1} G_{01}^{(j)}(t), n=1, \dots, N-1. \quad (39)$$

En las ecuaciones anteriores, (38) y (39), se ha escrito la variable tiempo que se había omitido hasta ahora, para evitar confusiones.

El algoritmo que permite calcular las temperaturas y gradientes mediante la iteración, queda formado por las ecuaciones (33), (34), (35), (36) (36), (37), (38) y (39).

V.) CÁLCULO DE PARÁMETROS.

Se hace un resumen de todos los parámetros y definiciones que a lo largo del desarrollo se formularon, y se enlistan los datos para generarlos.

V.1) DATOS.

Para $n=1,2,\dots,N$

L_n, C_{pn}, ρ_n, k_n y h_n

V.2) DEFINICIÓN DE TÉRMINOS

Para $n=1,2,\dots,N$

$K_n = k_n / (\rho_n * C_{pn})$

$D_n = L_n * \rho_n * C_{pn}$

$\alpha_n = L_n^2 / K_n$

$R_n = k_n / (L_n * h_n)$

$R = 1/h_0$

$\beta_0 = (L_1/L_N) (k_N/k_1)$

$\beta_1 = 1$

$\beta_{i+1} = (L_{i+1}/L_i) (k_i/k_{i+1})$ CON $i = 1, 2, \dots, N-1$

V.3) INICIACIÓN DE LOS COEFICIENTES.

Para $j=0,1,2,\dots,2N$

$$a_{1,j} = R_0 \frac{\alpha_1^j}{(2j)!} + \frac{\alpha_1^j}{(2j+1)!}$$

$$b_{1,j} = R_0 \frac{\alpha_1^j}{(2j-1)!} + \frac{\alpha_1^j}{(2j)}$$

Para $i=0,1,2,\dots,j$

$a_{0,j-i} = 0$

$b_{0,j-i} = \delta_{ji}$

V.4) GENERACIÓN DE LOS COEFICIENTES.

Para $n=1, 2, \dots, N$

Para $j=0, 1, 2, \dots, 2N$

Para $i=0, 1, \dots, j$

$$f_{1ab} = \alpha_n^1 (a_{n-1, j-1} + R_{n-1} b_{n-1, j-1})$$

$$f_{2ab} = \beta_n \alpha_n^1 b_{n-1, j-1}$$

$$S_{0, i} = \begin{cases} 0 & \text{para } i=0 \\ 1 & \text{para } i \neq 0 \end{cases}$$

$$S_{0, j} = \begin{cases} 0 & \text{para } j=0 \\ 1 & \text{para } j \neq 0 \end{cases}$$

$$a_{n, j} = \sum_{i=0}^j \left(\frac{f_{1ab}}{(2i)!} + \frac{f_{2ab}}{(2i+1)!} \right)$$

$$b_{n, j} = \sum_{i=0}^j \left(\frac{S_{0, i} f_{1ab}}{(2i-1)!} + \frac{f_{2ab}}{(2i)!} \right)$$

$$c_{n, j} = \sum_{i=0}^j \left(\frac{f_{1ab}}{(2i+1)!} + \frac{f_{2ab}}{(2i+2)!} \right)$$

$$S_j = \sum_{n=1}^N D_n c_{n, j-1}$$

Para $n=1, 2, \dots, N$

Para $j=0, 1, \dots, 2N$

$$f_{eg} = L_1 / K_1 \sum_{s=1}^N D_s c_{s, j-1}$$

$$e_{n, j} = S_{0, j} \{ a_{n, j} - a_{n, 0} f_{eg} \}$$

$$g_{n, j} = S_{0, j} \{ b_{n, j} - b_{n, 0} f_{eg} \}$$

VI.) ALGORITMO GENERAL.

El siguiente algoritmo general permite calcular, por iteración en el tiempo, las temperaturas $T_n(t)$ y los gradientes $G_n(t)$ a partir de las condiciones iniciales.

VI.0.) DATOS

- a) los parámetros del capítulo V.
- b) T_a
- c) $T_g(t)$

VI.0.1.) CONDICIONES INICIALES.

$$T_n(0) \quad , \quad n=1,2,\dots,N$$

$$G_n(0) \quad , \quad n=1,2,\dots,N-1$$

$$G_N(0) = [T_g(0) - T_N(0)]/R_N$$

VI.3.) SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES.

Conocidas las temperaturas $T_n(t)$ y los gradientes $G_n(t)$ al tiempo t , se resuelve el siguiente sistema lineal de ecuaciones, formado por (35) y (36).

$$\sum_{j=1}^{2N} e_{n,j}^{(j)} G_{o1}(t) = T_n(t) - a_{n,o} \beta_o G_N(t) - T_a$$

$$\sum_{j=1}^{2N} g_{n,j}^{(j)} G_{o1}(t) = G_n(t) - b_{n,o} \beta_o G_N(t)$$

VI.4) ITERACIÓN DE LA TEMPERATURA T_n Y EL GRADIENTE G_n

Con el vector solución $(G_{o1}^{(1)}, G_{o1}^{(2)}, \dots, G_{o1}^{(2N)})$, obtenido del sistema de ecuaciones lineal anterior, se calculan $T_n(t+\Delta t)$ y $G_n(t+\Delta t)$ al tiempo $t+\Delta t$, donde Δt es el incremento en el tiempo, mediante las ecuaciones (38) y (39).

$$T_n(t+\Delta t) = T_n(t) + \Delta t \sum_{j=1}^{2N} a_{n,j-1}^{(j)} G_{o1}(t) \quad , \quad n=1,2,\dots,N$$

$$G_n(t+\Delta t) = G_n(t) + \Delta t \sum_{j=1}^{2N} b_{n,j-1}^{(j)} G_{o1}(t) \quad , \quad n=1,2,\dots,N-1$$

VI.5) CÁLCULO DEL GRADIENTE G_N

Usando $T_N(t+\Delta t)$ se calcula $G_N(t+\Delta t)$ dada por (28):

$$G_N(t+\Delta t) = [T_g(t+\Delta t) - T_N(t+\Delta t)] / R_N$$

VI.6) ITERACIÓN DEL GRADIENTE G_{o1}

Mediante los valores de $G_N(t)$ y el vector solución se calcula $G_{o1}(t)$, dada por la ecuación (32), al tiempo t .

$$G_{o1}(t) = \beta_o G_N(t) - \frac{L_1}{K_1} \sum_{j=1}^{2N} S_j^{(j)} G_{o1}(t)$$

VI.7) CÁLCULO DE LA TEMPERATURA T_{on}

De la ecuación (19-1) se tiene para $n=1$:

$$T_{o1}(t+\Delta t) = T_a + R_o G_{o1}(t+\Delta t)$$

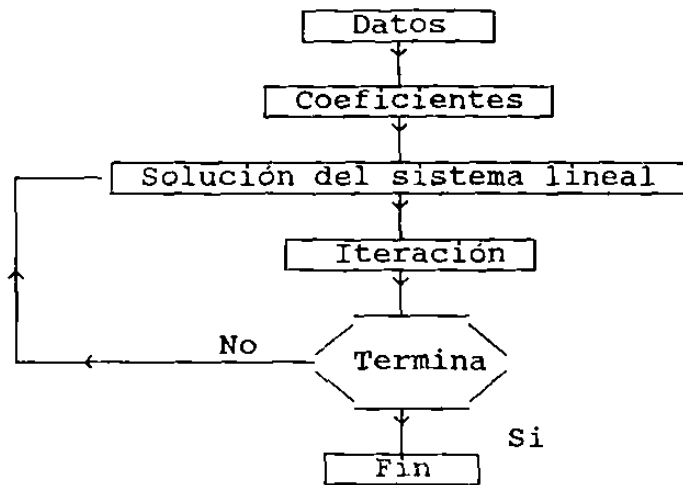
y para $n=2,\dots,N$

$$T_{on}(t+\Delta t) = T_{n-1}(t+\Delta t) + R_{n-1} G_{n-1}(t+\Delta t)$$

VI.8) REPETICIÓN DEL CICLO.

Con las temperaturas $T_n(t+\Delta t)$ y los gradientes $G_n(t+\Delta t)$ se calcula el nuevo vector solución $(G_{o1}^{(1)}, G_{o1}^{(2)}, \dots, G_{o1}^{(2N)})$, repitiendo en cascada los incisos correspondientes, hasta obtenerse el estado estacionario.

El siguiente diagrama resume lo anterior.



Del diagrama se tiene, que si se resuelve el sistema de ecuaciones lineales, se reduce el tiempo de cómputo proporcionalmente al número de operaciones realizadas por el método de Gauss-Jordan. En el siguiente tema se encuentra el esquema para iterar la temperatura y el gradiente de ésta resolviendo el sistema de ecuaciones lineal algebraicamente para un caso particular, puesto que no es generalizable.

VIII. ALGORITMO PARTICULAR.

Cuando se resuelve el sistema de ecuaciones lineal (35) y (36) algebraicamente, el tiempo de cómputo para calcular la temperatura se reduce notablemente, siendo menor que el tiempo consumido por la solución analítica.

En el caso particular de tener dos capas en contacto térmico perfecto., con $T_a = 0$ y T_g constante, se obtiene de la ecuación (24):

$$\sum_{j=1}^4 a_{n,j}^{(j)} G_{o1} = T_n - a_{n,o} G_{o1} \quad (40)$$

y de la ecuación (25)

$$\sum_{j=1}^4 b_{n,j}^{(j)} G_{o1} = G_n - g_{n,o} G_{o1} \quad (41)$$

con $n = 1, 2$.

Las soluciones $G_{o1}^{(j)}$, obtenidas de (40) y (41), que son funciones lineales de T_1 , T_2 , G_{o1} , G_1 y G_2 , se sustituyen en la ecuación de la temperatura del paso VI.4 del algoritmo, obteniéndose:

$$T_n(t+\Delta t) = T_n(t) + \Delta t \{ D_{n,1} * T_1(t) + D_{n,2} * T_2(t) + \dots \\ \dots + D_{n,3} * G_{o1}(t) + D_{n,4} * G_1(t) + D_{n,5} * G_2(t) \} \quad (42)$$

donde $D_{n,i}$ son constantes dependiendo de los materiales.

De (41) se obtienen dos ecuaciones donde se sustituyen las soluciones $G_{o1}^{(j)}$, obteniéndose dos relaciones lineales:

$$G_1 = f_1(T_1, T_2, G_{o1}, G_2) \text{ y } G_2 = f_2(T_1, T_2, G_{o1}, G_1)$$

que, al eliminar G_1 de ambas se obtiene:

$$G_{o1} = D_{3,1} * T_1 + D_{3,2} * T_2 + D_{3,3} * G_2 \quad (43)$$

y al eliminar G_{o1} :

$$G_1 = D_{4,1} * T_1 + D_{4,2} * T_2 + D_{4,3} * G_2. \quad (44)$$

Como las expresiones (43) y (44) son válidas para todo tiempo, se usarán para encontrar G_{o1} y G_1 al tiempo $t + \Delta t$ como sigue:

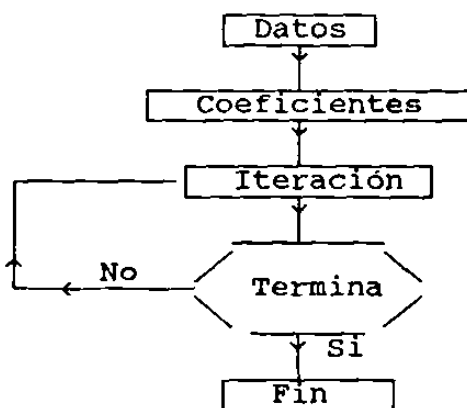
$$\begin{aligned} G_{o1}(t + \Delta t) = & D_{3,1} * T_1(t + \Delta t) + D_{3,2} * T_2(t + \Delta t) + \dots \\ & \dots + D_{3,3} * G_2(t + \Delta t) \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} G_1(t + \Delta t) = & D_{4,1} * T_1(t + \Delta t) + D_{4,2} * T_2(t + \Delta t) + \dots \\ & \dots D_{4,3} * G_2(t + \Delta t) \end{aligned} \quad (46)$$

donde G_2 está dada por

$$G_2(t + \Delta t) = h_2 * L_2 * (T_g - T_2(t + \Delta t)) / k_2 \quad (47)$$

Al iterar las ecuaciones dadas por (42) se obtienen las temperaturas al tiempo $t + \Delta t$, con estos datos se encuentran G_{o1} , G_1 y G_2 , ecuaciones (45), (46) y (47), al tiempo $t + \Delta t$. El siguiente diagrama resume lo anterior:



El tiempo de cómputo requerido por este algoritmo que llamaremos algoritmo particular, resulta ser menor que el empleado por la solución analítica, obtenida de la ecuación diferencial parcial de Fourier, cuando ambas se usan en el mismo problema. Si llamamos t_0 al tiempo de cómputo consumido por el algoritmo particular, el tiempo empleado por la solución analítica resulta ser de 4 veces t_0 y 8 veces t_0 cuando se usa el algoritmo general.

El algoritmo particular fue usado como parte de un programa global que simula el proceso de reducción del mineral de hierro [3]. Los datos arrojados por el simulador fueron compatibles con los datos recopilados en planta validándose con esto este trabajo.

VIII.) SOLUCIÓN APROXIMADA VS SOLUCIÓN ANALÍTICA.

Para valorar el error debido al truncamiento de las series que expresan la temperatura y el gradiente, ecuaciones (33) y (34), se comparan los conjuntos de puntos encontrados con la solución aproximada con los puntos correspondientes obtenidos con la solución analítica para dos casos particulares, dados en los apéndices C y D.

Se usarán dos criterios para calcular el error en la temperatura aproximada con respecto a la exacta.

a).- El error estándar [4] expresado por la siguiente fórmula:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (T_{ei} - T_{ai})^2}{N - 1}} \quad (48)$$

donde T_{ei} y T_{ai} son las temperaturas exacta y aproximada, y N el número de datos.

b).- El error relativo [5] promedio en porcentaje definido por:

$$\text{Error} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{T_{ei} - T_{ai}}{T_{ei}} \right| 100\% \quad (49)$$

donde las barras indican valor absoluto.

Con el error típico estándar se obtiene una desviación con respecto a la solución exacta expresada en °C.

Con el error relativo se obtiene el promedio de la diferencia entre ambas temperaturas comparada con la temperatura exacta.

Los datos usados para probar el algoritmo se encuentra en el apéndice E y corresponden al concreto aislante VSL-50 y al concreto refractario KX-99 ambos materiales industriales.

VII.1 PRIMER CASO.

Como primer caso se usarán dos capas, figura 3, la primera será el aislante y la segunda el refractario. Las gráficas se obtienen a partir de las siguientes condiciones:

- i).- Las conductividades térmicas se consideran constantes.
- ii).- Entre las capas se tiene contacto térmico perfecto.
- iii).- Las temperaturas T_a y $T_g(t)$ se mantienen constantes e iguales a cero y novecientos grados centígrados respectivamente. El coeficiente de transferencia de energía calorífica h_0 entre el medio ambiente y la cara de la primera capa, depende por un lado, de la temperatura, velocidad y propiedades del fluido [6], y por otra, de la forma, rugosidad y temperatura de la superficie, por lo que se ha tomado como infinito para simplificar los cálculos. El valor del coeficiente de transferencia de calor entre la cara del refractario y el fluido que la calienta se toma de $200 \text{ W/m}^2\text{K}$, por ser el

valor promedio usado en el reactor donde se simuló la reducción del mineral de hierro.

iv).- Los espesores del aislante y del refractario se denotan por L_a y L_r respectivamente.

Como escala del tiempo se usará el número adimensional de Fourier denotado por Fo y definido como

$$Fo = K t / L^2 \quad (50)$$

donde t es el tiempo en segundos, K es la difusividad térmica definida por

$$K = k / (\rho C_p)$$

y L siendo una longitud. Para comparar los valores de la temperatura y flujos de calor encontrados usando el algoritmo y las soluciones analíticas de los apéndices C y D, Fo estará definido por la difusividad térmica del refractario y L por el espesor de la pared compuesta. Con los datos del apéndice E se obtiene la siguiente equivalencia:

$$Fo = 0.01 \text{ equivale a } t = 609.54 \text{ seg} = 10.15 \text{ min} = 0.1692 \text{ hr.}$$

VII.1.1.- TEMPERATURA APROXIMADA VS ANALÍTICA.

A continuación se presentan las primeras tres figuras mostrando en cada una de ellas la gráfica de la temperatura aproximada y exacta contra el número Fo . Además se acompañan con sus correspondientes tablas las cuales muestran los errores encontrados al comparar ambas curvas.

VII.1.1.A.- DOS CAPAS.

Las capas están formadas por los materiales mencionados arriba y la figura 3 ilustra el arreglo. Con dos capas se tienen cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas con lo cual la temperatura y el gradiente dados por (38) y (39) se expresan por cuatro términos de la sumatoria, más un término adicional que es el dato calculado anteriormente.

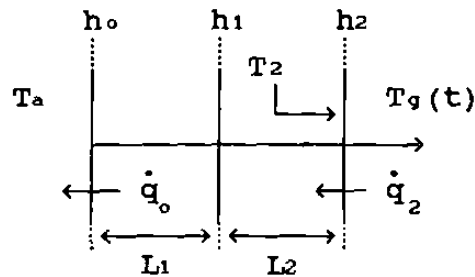


Figura 3.- Dos capas en contacto térmico perfecto con $L_1=L_a$ y $L_2=L_r$.

En la figura 3, T_2 representa la temperatura en la superficie del refractario en contacto con el fluido que la calienta. Los flujos de calor por unidad de área y unidad de tiempo, a través de las superficies en contacto con el medio frío y el medio caliente, se representan por \dot{q}_0 y \dot{q}_2 respectivamente.

En la figura 4 se muestran las gráficas de las temperaturas T_2 . En la tabla 4 se encuentran los errores de la curva aproximada por intervalos.

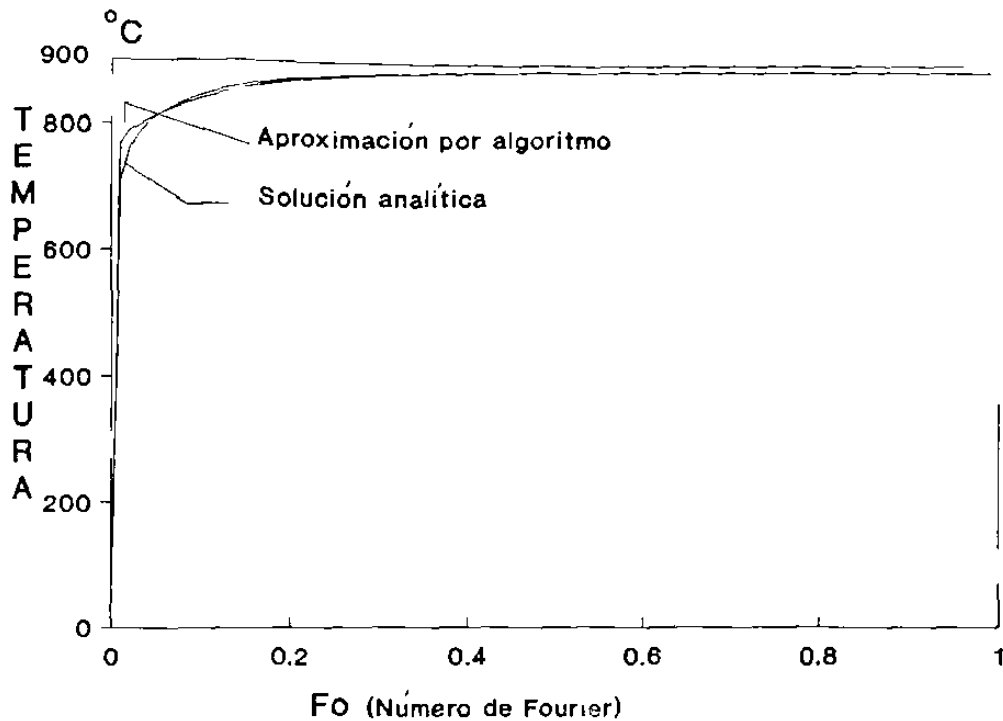


Figura 4.- Gráfica de la temperatura T_2 en función del tiempo.

TABLA 4

intervalo ΔFo	Error estándar	Error relativo
0.01 - 0.03	47.5 °C	4.58 %
0.04 - 0.25	4.0 °C	0.33 %
0.26 - 0.33	1.7 °C	0.20 %
0.34 - 1.0	0.3 °C	0.02 %

De la tabla 4 se tiene que al principio cuando se empieza a calentar la pared, la temperatura aproximada tiene una desviación de 47°C con respecto a la analítica con un error relativo de 4.5% que es aceptable.

VII.1.1.B.- TRES CAPAS.

Con el propósito de disminuir el error entre ambas curvas, se tomará cualquiera de los dos materiales como dos capas de igual espesor, teniéndose de esta forma un arreglo de tres capas.

VII.1.1.B.1.- EL AISLANTE DIVIDIDO EN DOS CAPAS.

Cuando en el aislante formamos dos capas de espesores $L_a/2$ cada una, y se mantiene el refractario como una sola capa de espesor L_r , figura 5, las expresiones (38) y (39) contribuyen con seis términos en la sumatoria, más el dato anterior.

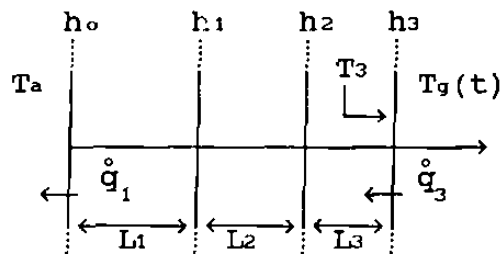


Figura 5.- Tres capas en contacto térmico perfecto con $L_1=L_2=L_a/2$ y $L_3=L_r$.

En la figura 6 se muestran las gráficas de las temperaturas T_3 , aproximada y analítica, y en la tabla 6 los errores entre ambas por intervalos de F_0 .

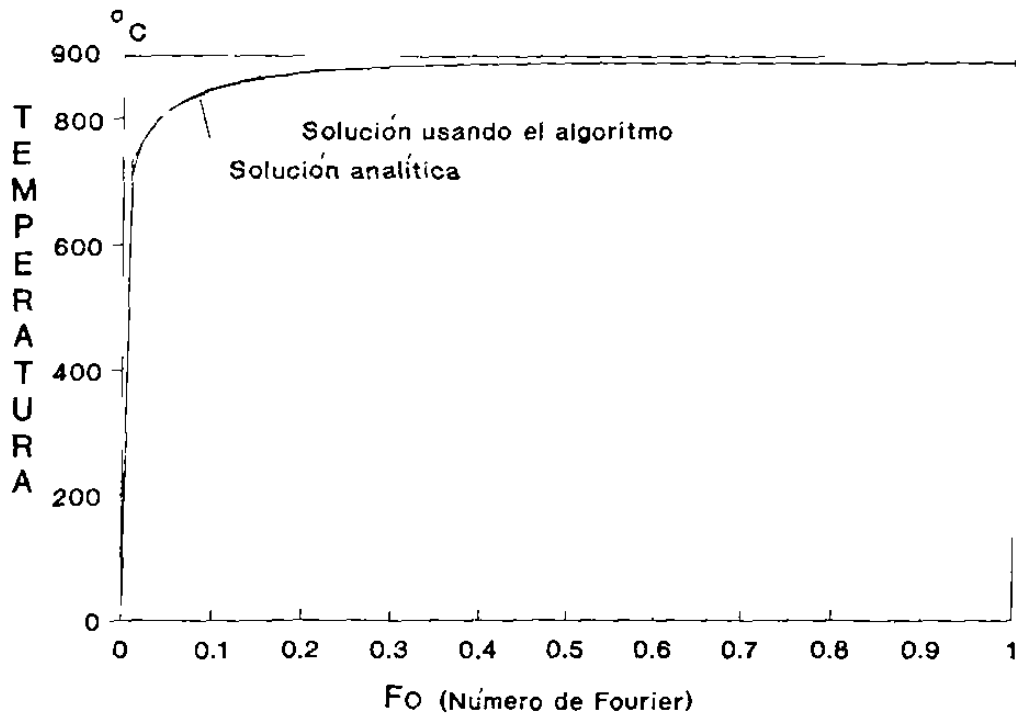


Figura 6.- Gráficas de las temperaturas aproximada y exacta T_s cuando en el aislante se forman dos capas.

TABLA 6.

intervalo ΔFo	Error estándar	Error relativo
0.01 - 0.03	16.60 °C	0.91 %
0.04 - 0.25	2.52 °C	0.27 %
0.26 - 0.33	0.25 °C	0.07 %
0.34 - 1.0	0.05 °C	0.002 %

En la tabla 6 se observa que, al aumentar el número de términos en las sumas que expresan a las temperaturas, ecuación, (38) el error correspondiente al primer intervalo

disminuye notablemente.

La otra posibilidad de dividir al refractario en dos capas de igual espesor.

VII.1.1.B.2.- EL REFRACTARIO DIVIDIDO EN DOS CAPAS.

Se forman tres capas cuando se considera el aislante como una sola capa de espesor L_a , y el refractario forma dos capas de espesor $L_r/2$ cada una.

La figura 7 muestra una curva donde se sobreponen la gráfica de la temperatura exacta y aproximada T_3 . La tabla 7 contiene la información de los errores producidos por intervalo ΔF_0 . Se observa en la tabla la disminución notable del error en el primer intervalo de tiempo, esto se debe a que, los términos de la sumatoria de la ecuación (38) contribuyen en forma diferente por efecto de los datos de la segunda capa, siendo los órdenes de magnitud mayores cuando la segunda capa pertenece al refractario.

De las tablas 4, 6, y 7, se tiene que la temperatura encontrada mediante el algoritmo para tiempos equivalentes a 0.01 de F_0 (10.15min) en adelante, el error encontrado al comparar las curvas es menor del 5%, siendo una buena aproximación.

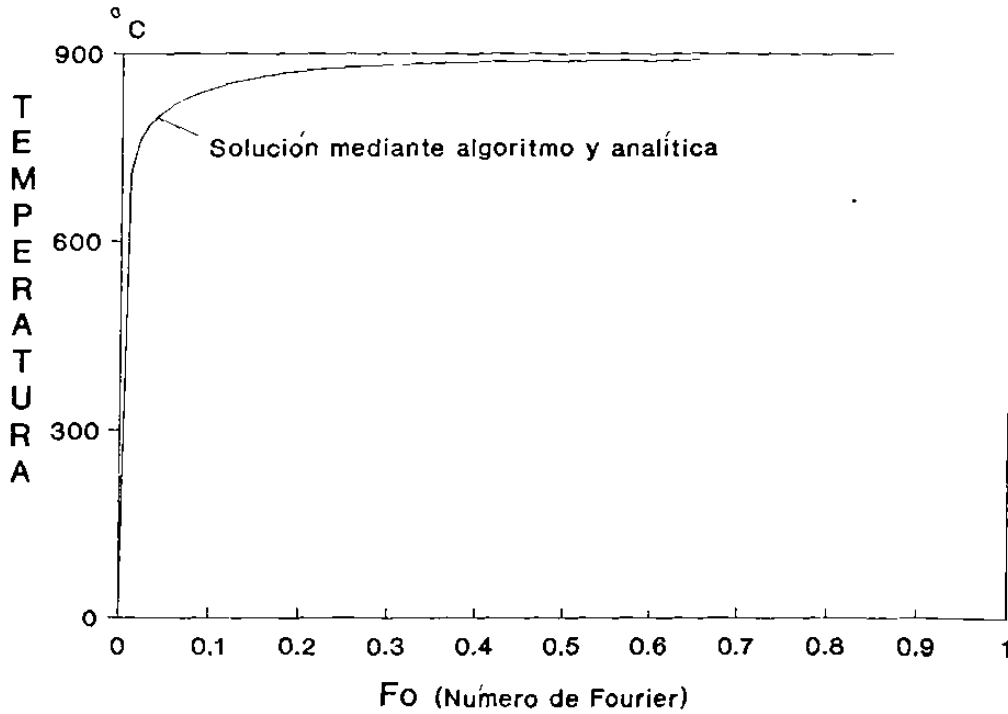


Figura 7.- Gráficas de las temperaturas aproximada y exacta T_3 cuando en el refractario se forman dos capas.

TABLA 7

intervalo ΔFo	Error estándar	Error relativo
0.01 - 0.03	0.60 °C	0.07 %
0.04 - 0.25	0.19 °C	0.01 %
0.26 - 0.33	0.08 °C	0.003 %
0.34 - 1.0	0.05 °C	0.0002 %

VIII.1.2.- FLUJO DE CALOR APROXIMADO VS FLUJO EXACTO.

En este punto se presentan los flujos de calor a través de las superficies externas del aislante y refractario, junto con las tablas que agrupan los errores encontrados al comparar el flujo aproximado con el exacto.

VIII.1.2.A.- GRÁFICAS DEL FLUJO \dot{q}_0

Paralelamente con los perfiles de las temperaturas calculadas y mostradas en las figuras anteriores, en las figuras siguientes se grafica el flujo de energía calorífica por unidad de área y unidad de tiempo, \dot{q}_0 .

En la figura 4.a, se muestran las gráficas de \dot{q}_0 , y la tabla 4.a, los errores encontrados al comparar ambas curvas cuando se tienen dos capas.

La figura 6.a, muestra las gráficas de los flujos exacto y aproximado cuando se tiene dos capas en el aislante y una en el refractario, donde a partir de 0.17 de F_0 el error encontrado es menor del 10%.

Y por último, en la figura 7.a, se tiene la gráfica de \dot{q}_0 cuando se tiene una capa en el aislante y dos en el refractario.

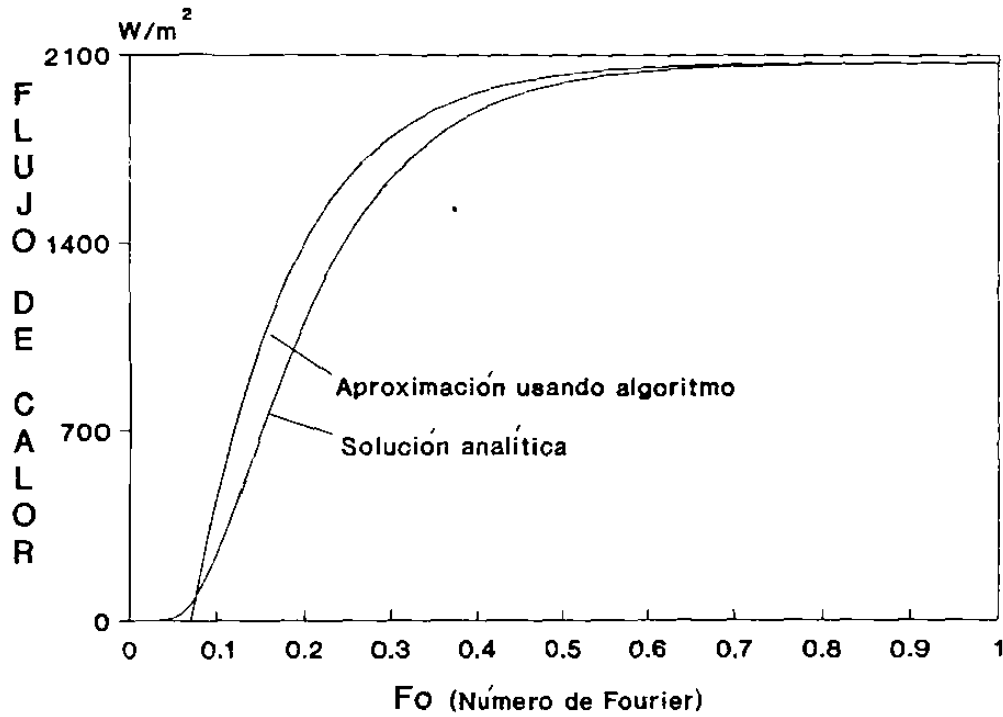


Figura 4.a.- Flujo calorífico de la solución analítica y aproximada \dot{q}_0 en la cara exterior del aislante, cuando se tiene dos capas.

TABLA 4.a

intervalo ΔFo	W / m^2 Error estándar	Error relativo
0.01 - 0.03	1438	3667474%
0.04 - 0.1	363	7411%
0.11 - 0.25	304	39%
0.26 - 0.33	172	10%
0.34 - 1.0	35	1%

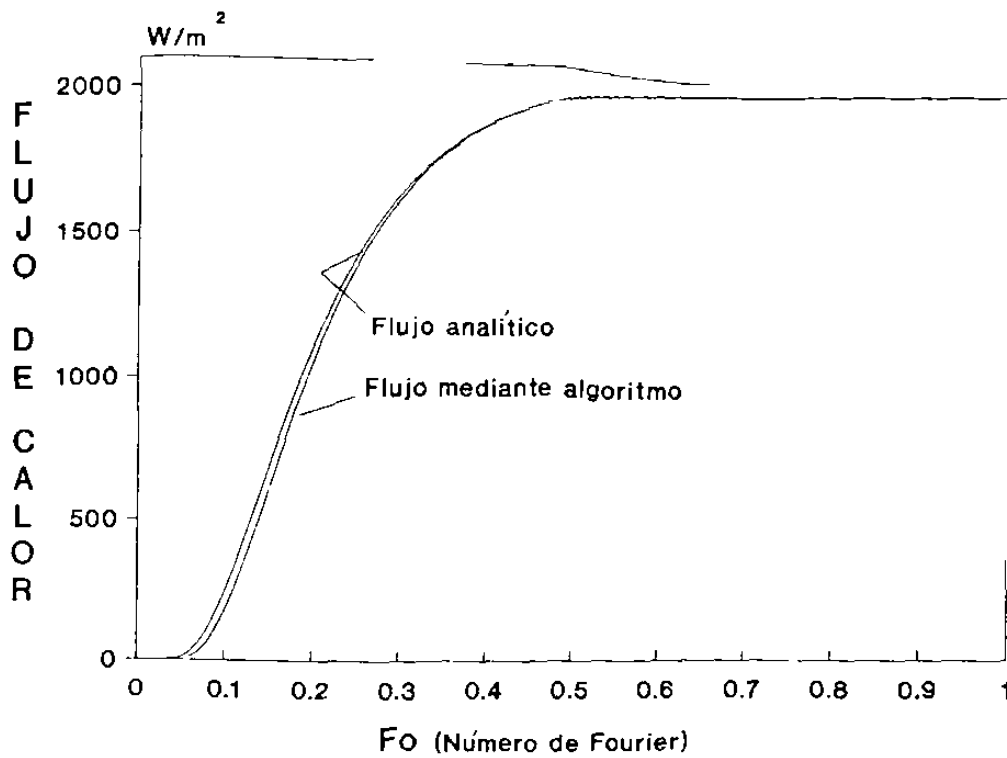


Figura 6.a.- Gráficas del flujo calorífico usando la solución analítica y aproximada \dot{q}_o , cuando se tiene dos capa en el aislante y una en el refractario.

TABLA 6.a

intervalo ΔFo	W / m^2 Error estándar	Error relativo
0.01 - 0.03	102.7	243615%
0.04 - 0.1	43.0	96.5%
0.11 - 0.25	65.8	8.9%
0.26 - 0.33	19.7	1.1%
0.34 - 1.0	3.1	0.1%

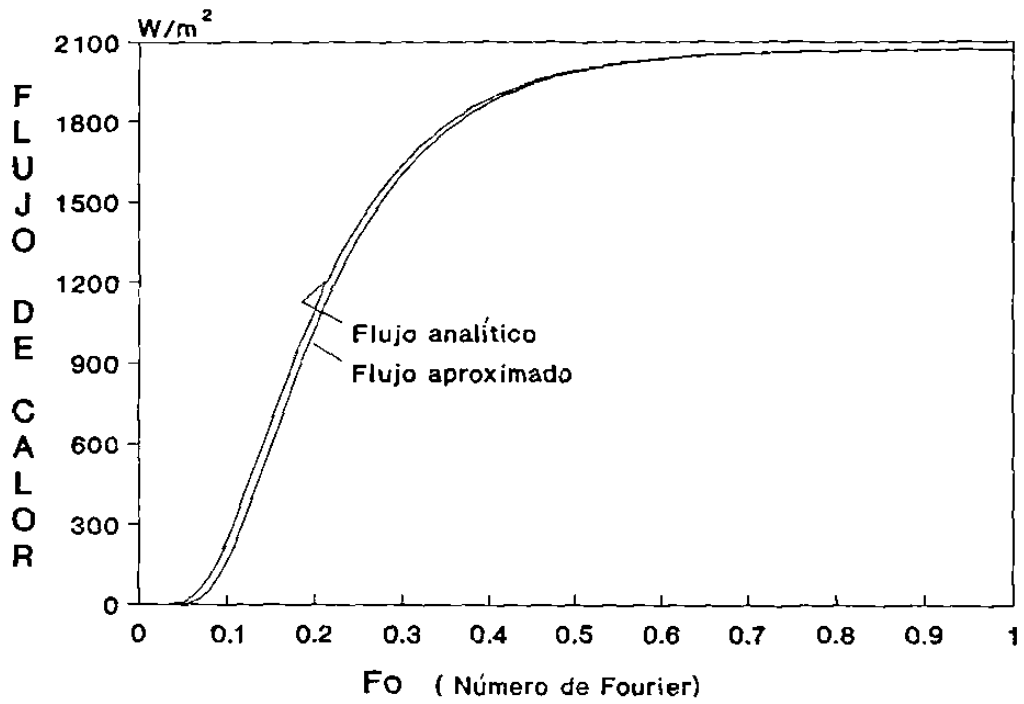


Figura 7.a.- Gráficas del flujo exacto y aproximado \dot{q}_o , cuando se tiene dos capas en el refractario y una en el aislante.

TABLA 7.a

intervalo ΔFo	W / m^2	
	Error estándar	Error relativo
0.01 - 0.03	6138.1	309548%
0.04 - 0.1	170.1	4014%
0.11 - 0.25	81.7	10.6%
0.26 - 0.33	43.2	2.0%
0.34 - 1.0	8.5	0.2%

De las tablas 4.a, 6.a y 7.a se tiene que en el intervalo $0 \leq F_0 \leq 0.11$ se detectan grandes errores en el flujo aproximado debido a la oscilación que sufre por la falta de convergencia de la serie (32) cuando se trunca a $2N$ términos. Los flujos de calor para F_0 menores que 0.11 no podrán ser usados como datos, además este flujo no es de importancia como lo es el flujo de calor establecido entre la superficie fría del refractario y el gas caliente, que es el siguiente punto a tratar.

VIII.1.2.B.- GRÁFICAS DEL FLUJO \dot{q}_2 Y \dot{q}_3 .

El flujo de energía calorífica entre el gas caliente y la superficie fría del refractario, es de importancia debido a que, esta energía no es aprovechable si es que debe usarse para activar procesos, como el de la reducción directa, mediante ella.

Las gráficas de \dot{q}_2 y \dot{q}_3 se muestran en las siguientes figuras.

La figura 4.b muestra la gráfica del flujo \dot{q}_2 en la cara externa del refractario, cuando se tienen dos capas.

La figura 6.b tiene las gráficas del flujo \dot{q}_3 cuando se tiene tres capas, dos en el aislante y una en el refractario.

Y en la última figura 7.b, se encuentran las gráficas de \dot{q}_3 , cuando se tienen tres capas, una en el aislante y dos en el refractario.

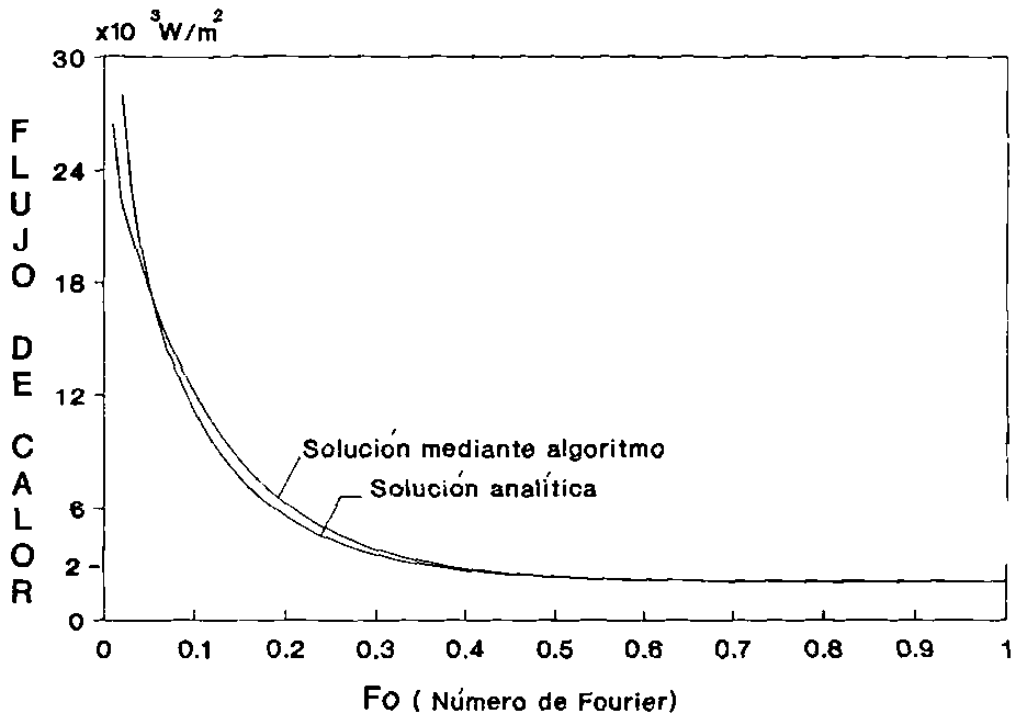


Figura 4.b .- Gráfica del flujo de calor exacto y aproximado \dot{q}_2 , a través de la superficie del refractario en contacto con el gas caliente, cuando se tienen dos capas.

intervalo ΔFo	W / m^2	
	Error estándar	Error relativo
0.01 - 0.03	9514	20.7%
0.04 - 0.25	801	9.5%
0.26 - 0.33	341	8.6%
0.34 - 1.0	57	1.6%

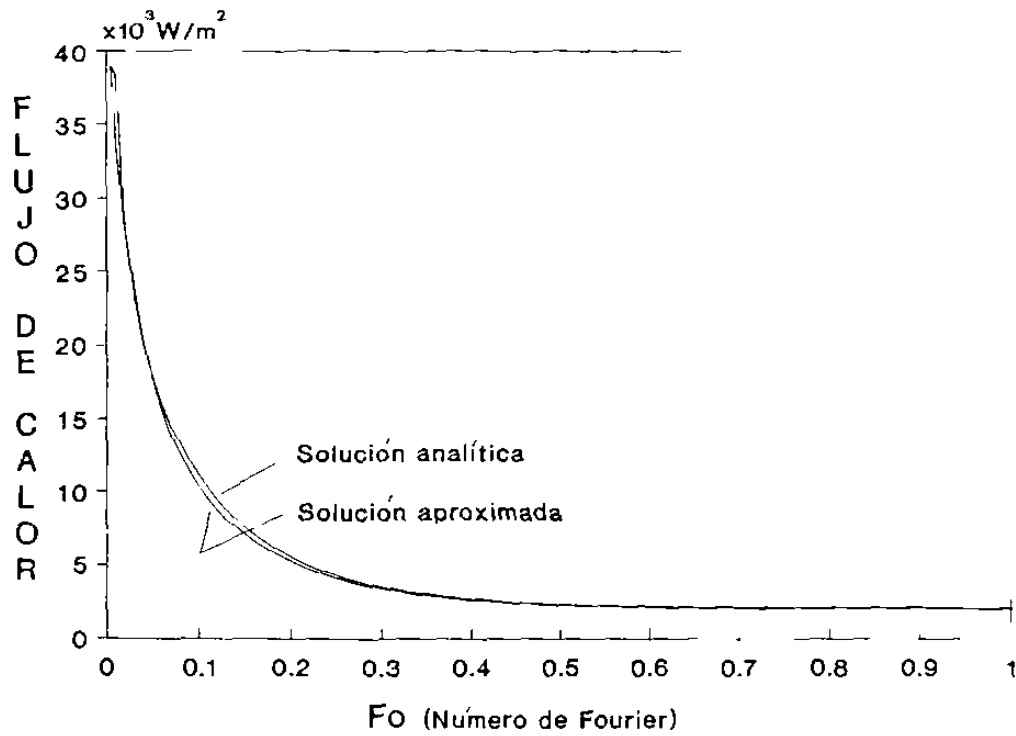


Figura 6.b .- Gráfica del flujo de calor exacto y aproximado \dot{q}_3 , a través de la superficie del refractario en contacto con el gas caliente, en el caso de tener dos capas en el aislante y una en el refractario.

TABLA 6.b

intervalo ΔFo	W/m^2 Error estándar	Error relativo
0.01 - 0.03	3320	4.8%
0.04 - 0.25	550	5.3%
0.26 - 0.33	149	3.8%
0.34 - 1.0	64	2.8%

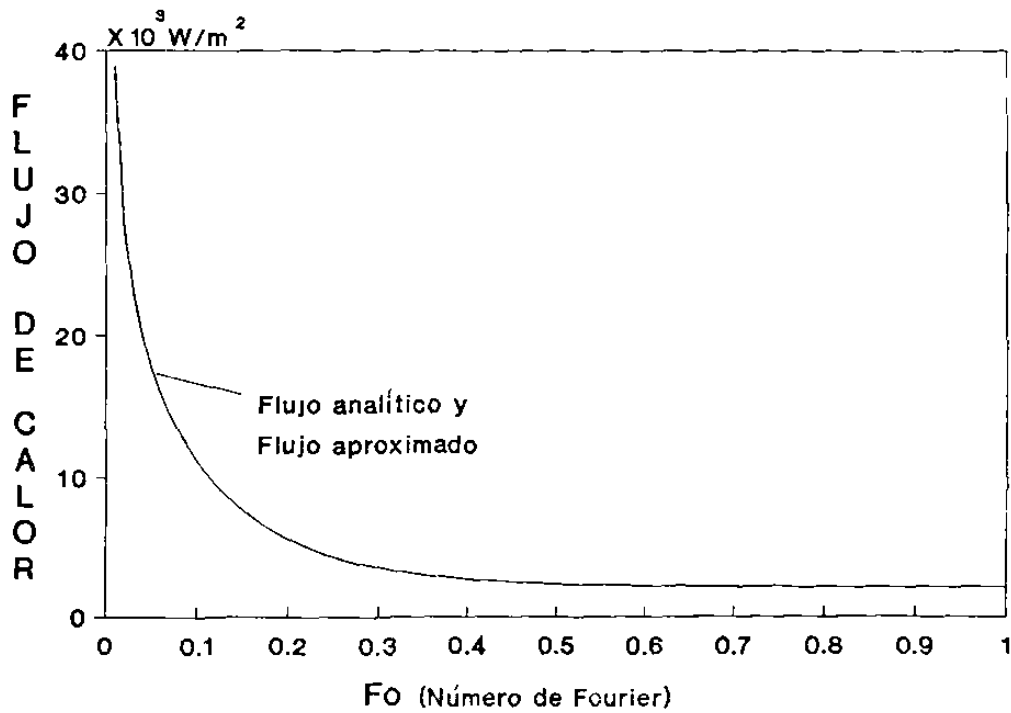


Figura 7.b .- Gráfica del flujo de calor exacto y aproximado \dot{q}_3 , a través de la superficie externa del refractario en el caso de tener una capa en el aislante y dos en el refractario.

TABLA 7.b

intervalo ΔFo	W/m^2	Error relativo
0.01 - 0.03	121.0	0.3%
0.04 - 0.25	39.0	0.2%
0.26 - 0.33	7.7	0.1%
0.34 - 1.0	1.6	0.04%

Los flujos más críticos se encuentran para F_0 menor de 0.04 en la tabla 4.b que corresponden a \dot{q}_2 , y para \dot{q}_3 los flujos críticos corresponden a F_0 menor de 0.01, esto es, después de 10 minutos de operación los datos son confiables; esto es debido a que los flujos heredan la estabilidad de las temperaturas por estar definidos por la ecuación (28).

VIII.2.- SEGUNDO CASO.

Cuando es necesario tomar en cuenta los cambios de la conductividad térmica con la temperatura, la ecuación diferencial parcial de Fourier pasa a ser no lineal, con lo cual, la solución analítica se vuelve difícil o imposible de encontrar.

Con el algoritmo es posible dar una solución aproximada cuando se toma en cuenta los cambios en la conductividad térmica, por intervalos de temperatura pre-definidos.

Las gráficas que se presentan corresponden al caso de tener dos materiales en contacto térmico: a) el aislante, en el cual se mantiene constante la conductividad térmica, y b) el refractario donde se cambia la conductividad con la temperatura; la tabla del apéndice E contiene los intervalos de la temperatura y los valores de la conductividad térmica usados para encontrar las gráficas que a continuación se presentan.

Por no contarse con la solución analítica en este caso, en la figura 8 se grafican las temperaturas T_2 aproximadas cuando la conductividad térmica cambia con la temperatura y por otro lado, cuando se mantiene constante. En la tabla 8 se muestran los errores encontrados al comparar ambas temperaturas, observándose que no afecta, en este caso particular, mantener constante la conductividad térmica del refractario.

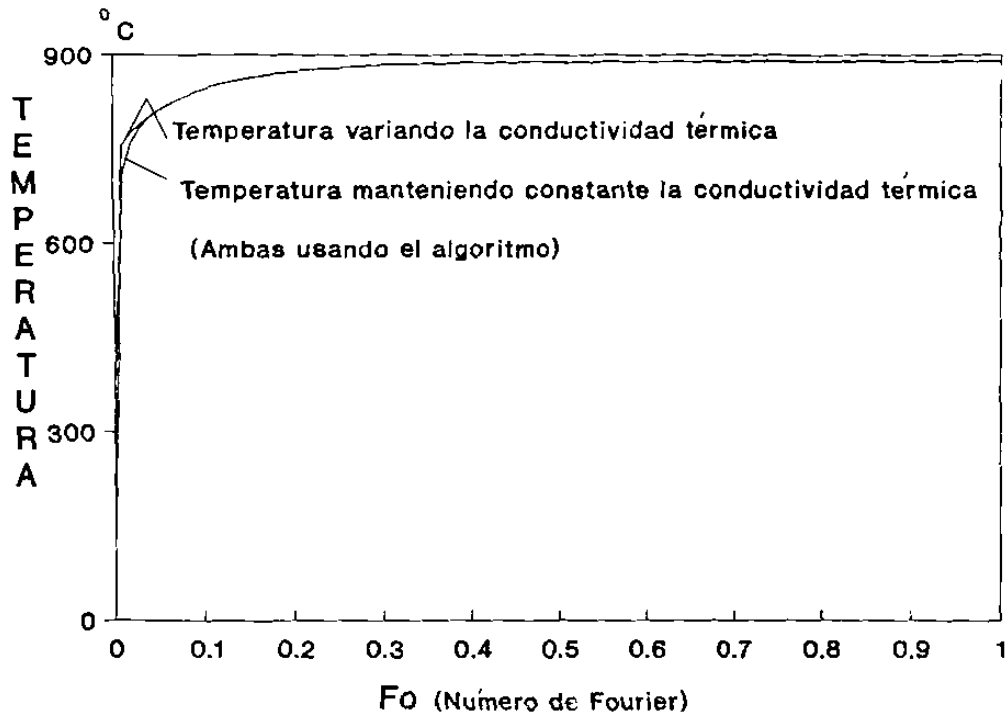


Figura 8.-Gráfica de las temperaturas T_2 , cuando se mantiene constante la conductividad térmica del refractario y cuando ésta cambia con la temperatura. La conductividad del aislante se mantiene constante

TABLA 8.

intervalo ΔFo	Error estándar	Error relativo
0.0 - 0.02	16.8 °C	4.12 %
0.02 - 1.0	2.3 °C	0.18 %

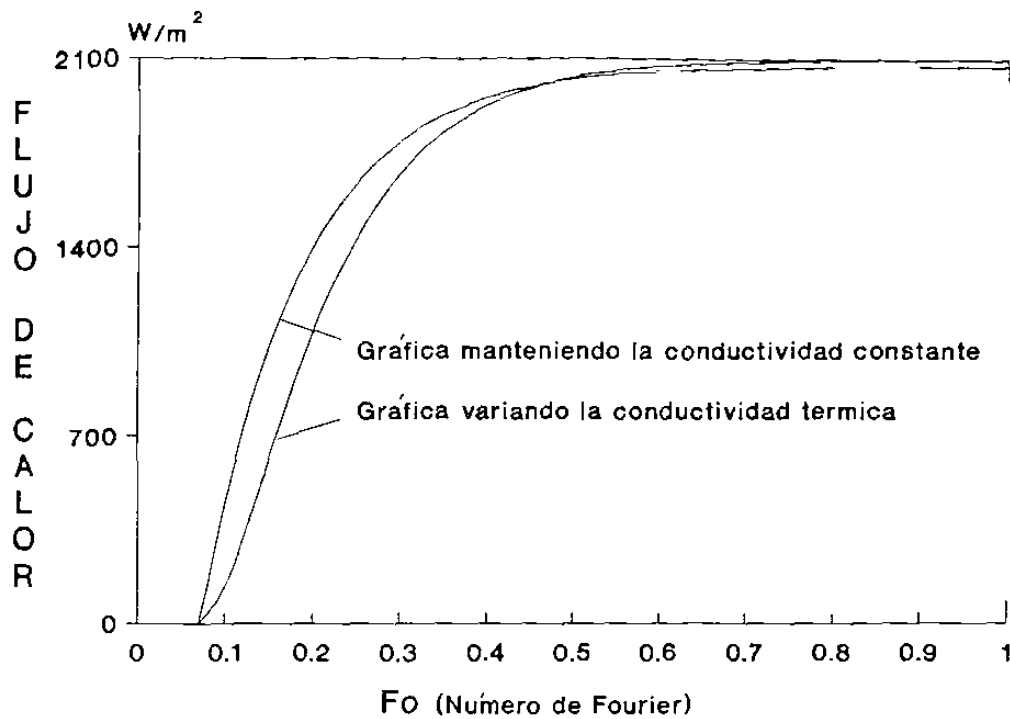


Figura 8.a.-Flujos de calor \dot{q}_0 en dos capas cuando la conductividad del refractario cambia con la temperatura.

TABLA 8.a

intervalo ΔFo	W / m^2 Error estándar	Error relativo
0.0 - 0.02	8314	213%
0.03 - 0.09	889	142%
0.1 - 0.4	261	20%
0.41 - 1.0	21	0.9%

Los flujos de calor se presentaron en las figuras 8.a y 8.b, se observa que el flujo de calor hacia la pared del refractario en contacto con el medio caliente, tiene comportamiento aceptable.

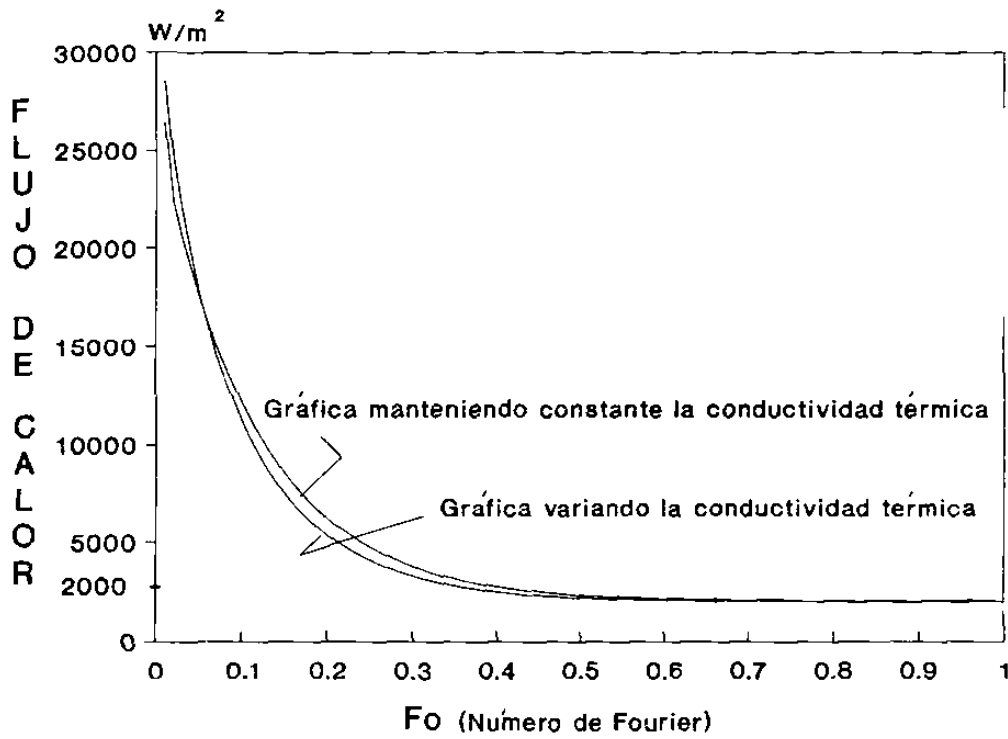


Figura 8.b.-Flujos de calor \dot{q}_2 en dos capas cuando la conductividad del refractario cambia con la temperatura.

TABLA 8.b

intervalo ΔFo	W / m^2 Error estándar	Error relativo
0.0 - 0.02	3362	6.9%
0.03 - 0.09	828	3.9%
0.1 - 0.4	736	12.2%
0.41 - 1.0	102	3.8%

VIII.3.-TERCER CASO.

Cuando la temperatura $T_g(t)$ cambia con el tiempo, la solución analítica se encuentra usando Green.

La solución mediante la función Green, cuando se tiene un solo material se encuentra en el apéndice C.

Como tercer caso se considera que la temperatura $T_g(t)$ cambia con el tiempo linealmente, esto es $T_g(t) = -0.01t + 900$ y el material usado es el refractario, en el cual se forman dos capas con conductividad térmica constante.

En la figura 9, se muestran las gráficas de las temperaturas, y en la tabla 9 se agrupan los errores como resultado al comparar las dos curvas.

La figura 9.a se muestran las gráficas de los flujos analítico y el aproximado mediante el algoritmo en la cara en contacto con el medio caliente.

De las tablas 9 y 9.a se observa que el error relativo promedio es menor del 10% , teniéndose una buena aproximación tanto en las temperaturas como en el flujo de calor.

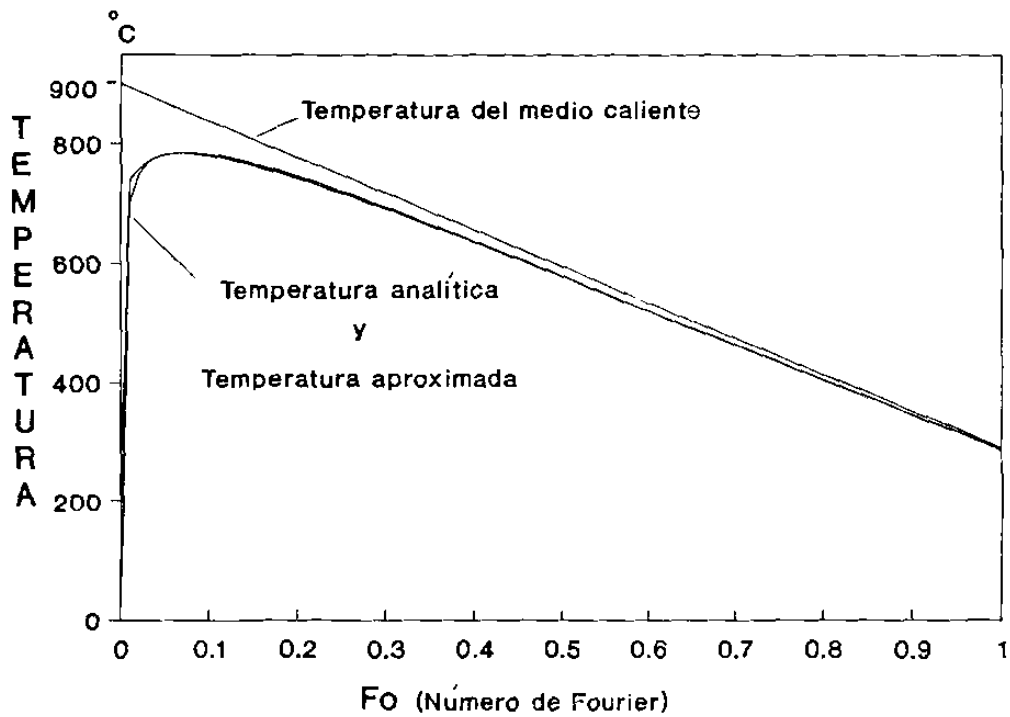


Figura 9.- Gráfica de la temperatura cuando $T_g(t)$ cambia linealmente con el tiempo y se tiene el refractario como único material.

TABLA 9.

intervalo ΔFo	Error estándar	Error relativo
0.01 - 0.03	27.0 °C	0.47 %
0.04 - 0.22	3.6 °C	0.44 %
0.23 - 0.51	2.8 °C	0.39 %
0.52 - 1.0	1.1 °C	0.25 %

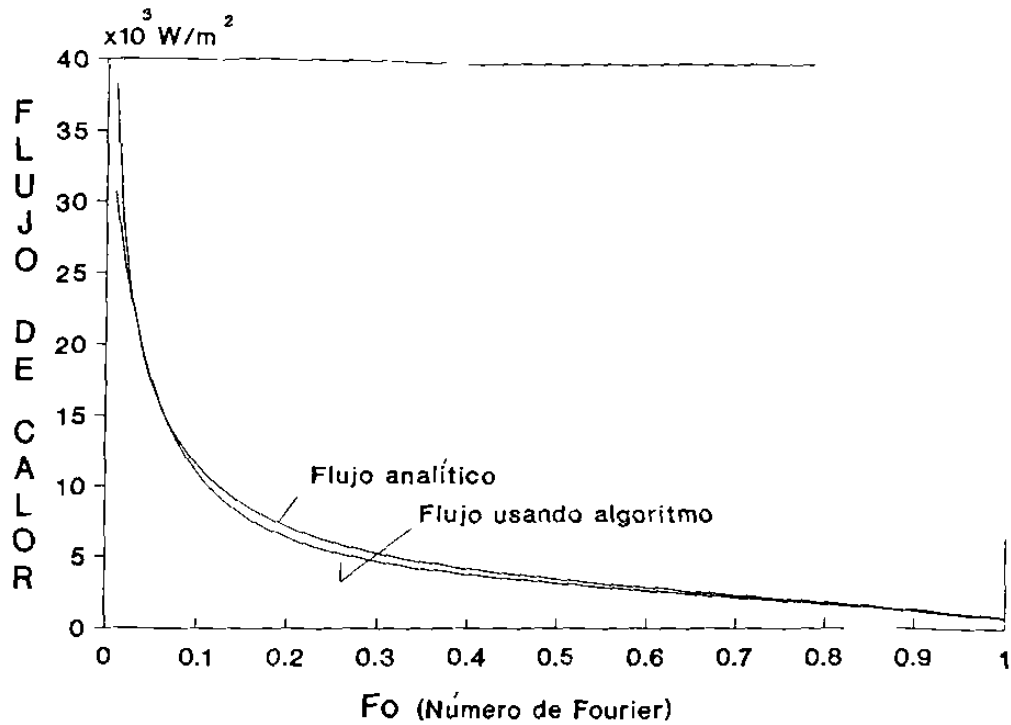


Figura 9.a.- Gráfica de los flujos de calor a través de la cara en contacto con el medio caliente cuando la temperatura $T_g(t)$ cambia linealmente con el tiempo.

TABLA 9.a

intervalo ΔFo	W/m^2 Error estándar	Error relativo
0.01 - 0.03	5349.0	2.63 %
0.04 - 0.22	660.7	7.15 %
0.23 - 0.51	488.5	9.67 %
0.52 - 1.0	163.9	7.40 %

IX.) CONCLUSIONES.

La forma empleada en el cálculo de la temperatura y del flujo de calor usando el algoritmo encontrado, presenta las siguientes características :

1. Calcula la temperatura y el flujo de calor a través de una pared formada por N capas, en el estado transitorio.
2. Acepta cambios en la conductividad térmica, por intervalos de temperaturas, cuando sea función de ésta. Esto se logra actualizando los parámetros con el nuevo valor de la conductividad térmica, e iniciar el algoritmo con las últimas temperaturas y gradientes calculados con el anterior valor de la conductividad térmica.
3. Toma en cuenta los cambios de la temperatura del medio que calienta al sólido, cuando ésta sea función del tiempo.

El algoritmo general presenta las siguientes ventajas con respecto a la solución analítica de la ecuación de Fourier:

1. No requiere eigenvalores, evitando el cálculo de éstos.
2. Acepta cambios en la conductividad térmica con la temperatura sin tener que resolver una ecuación diferencial parcial no lineal.
3. Evita resolver la ecuación diferencial parcial de Fourier de forma general para N capas.
- 4.-Evita resolver la función de Green para N capas.
5. Es sencillo de programar y de instalar en otros programas que lo necesiten.

5. Es sencillo de programar y de instalar en otros programas que lo necesiten.

Las desventajas son:

1. El tiempo de cómputo es mayor que el de la solución analítica.
2. Se obtienen buenos valores aproximados de la temperatura y del flujo de calor entre el gas caliente y la pared fría en contacto con el gas.

El algoritmo particular que se obtiene para un número fijo de capas, tiene las siguientes ventajas frente a la solución analítica:

1. Todas las anteriores del algoritmo general, pero con N fija.
2. El tiempo de cómputo es menor, en igualdad de circunstancias, que el empleado por el algoritmo general o por la solución analítica. Esto se debe, a que no requiere la solución del sistema de ecuaciones lineales.

Tiene las siguientes desventajas:

1. No es generalizable.
2. Se obtienen valores aproximados de la temperatura y del flujo de calor.

El algoritmo particular, por su rapidez de cálculo, se implementó en un programa global que simula el proceso de reducción del mineral de hierro. Los resultados teóricos obtenidos mediante el simulador, concordaron con los recopilados en planta, validándose de esta forma la metodología de la simulación y con esto el algoritmo para calcu-

lar la temperatura y el flujo de calor.

Los errores relativos promedios de las temperaturas aproximadas, calculadas usando el algoritmo, fueron menores del 10%.

Con respecto al flujo de calor que sale de la pared, debido a la falta de convergencia de la serie (32), éste manifiesta oscilaciones produciendo grandes errores al principio, haciéndose más estable conforme la variable tiempo aumenta. El flujo de entrada dado por la ecuación (37) es más estable produciendo errores aceptables a partir de 0.01 del número de Fourier en general.

APÉNDICE A. DEMOSTRACIÓN DE LA CONVERGENCIA.

En el tema V.2) Criterio de convergencia se afirma que las expresiones $\frac{\alpha_1}{(2n+1)(2n+2)} x^2$ y $\frac{\alpha_1}{(2n+2)(2n+3)} x^2$ son menores que la unidad para $n > r$. En este apéndice fundamentaremos lo anterior.

Primero demostraremos que $\frac{\alpha_1}{(2n+1)(2n+2)} x^2 < 1$ para $n > r_1$.

$$\frac{\alpha_1}{(2n+1)(2n+2)} x^2 \leq \frac{\alpha_1}{(2n+1)(2n+2)} < 1 \text{ por ser } x \leq 1$$

de donde $\frac{\alpha_1}{4} < n^2 + \left(-\frac{3}{2}n + 2\right)$, por ser α_1 y $n > 0$

Al graficar las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = -\frac{3}{2}x + 2$ se aprecia que $g(n) < f(n)$ para $n > 2$,
 $\Rightarrow \frac{\alpha_1}{4} < n^2 + \left(-\frac{3}{2}n + 2\right) < 2n^2$, para $n > 2$
 $\Rightarrow n > \sqrt{\frac{\alpha_1}{8}}$

llamando a $r_1 = \max\left\{2, \sqrt{\frac{\alpha_1}{8}}\right\}$, se tiene que
 $\frac{\alpha_1}{(2n+1)(2n+2)} x^2 < 1$, si $n > r_1$.

De igual forma se obtiene para $\frac{\alpha_1}{(2n+2)(2n+3)} x^2$ que

$$\frac{\alpha_1}{(2n+2)(2n+3)} x^2 < 1 \text{ si } n > r_2 \text{ donde } r_2 = \max\left\{3, \sqrt{\frac{\alpha_1}{8}}\right\}.$$

Por tanto $\frac{\alpha_1}{(2n+1)(2n+2)} x^2 < 1$ y $\frac{\alpha_1}{(2n+2)(2n+3)} x^2 < 1$ si $n > r$,
 con $r = \max\{r_1, r_2\}$

L.Q.D.

APÉNDICE B. DEMOSTRACIÓN DE LAS IDENTIDADES.

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} b_i c_{i+j} \right\} = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \left\{ \sum_{i=0}^j a_i b_{j-i} \right\} \quad (B-1)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} a_j \left\{ \sum_{i=j}^{\infty} b_{i-j} c_i \right\} \quad (B-2)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} b_i c_{j+i} \right\} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \left\{ \sum_{i=j}^{\infty} b_{i-j} c_i \right\} \quad (B-3)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} c_j \left\{ \sum_{i=1}^j a_i b_{j-i} \right\} \quad (B-4)$$

Demostración de (B-1)

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} a_j \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} b_i c_{i+j} \right\} &= a_0 (b_0 c_0 + b_1 c_1 + b_2 c_2 + \dots) + \\ &+ a_1 (b_0 c_1 + b_1 c_2 + b_2 c_3 + \dots) + \\ &+ a_2 (b_0 c_2 + b_1 c_3 + b_2 c_4 + \dots) + \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

agrupando y factorizando las c^s se tiene

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} b_i c_{i+j} \right\} = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \left\{ \sum_{i=0}^j a_i b_{j-i} \right\}$$

Demostración de (B-2)

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} a_j \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} b_i c_{j+i} \right\} &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j \left\{ b_0 c_j + b_1 c_{j+1} + b_2 c_{j+2} + \dots \right\} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j \left\{ \sum_{i=j}^{\infty} b_{i-j} c_i \right\} \end{aligned}$$

(B-3) y (B-4) se demuestran de forma similar.

APÉNDICE C. SOLUCIÓN ANALÍTICA PARA EL CASO DE DOS CAPAS.

Dos sólidos homogéneos e isotrópicos, semi-infinitos de espesores L_1 y L_2 en contacto térmico, se encuentran inicialmente a la temperatura T_a . Los coeficientes de transferencia de calor son; h_0 en $x'=0$, h_1 entre ambos y h_2 en $x'=L_1 + L_2$. La temperatura en $x' \ll 0$ es T_a y en $x' \gg L_1 + L_2$ es T_g , Figura C.

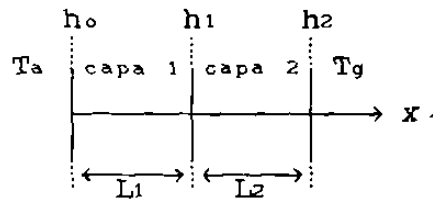


Figura C.- Dos sólidos en contacto térmico.

Denotando la temperatura del sólido 1 por $T_1(x', t)$ y para el sólido 2 por $T_2(x', t)$. La solución se escribe como

$$T_1(x', t) = T_{e1}(x') + T_{t1}(x', t) \text{ para } 0 \leq x' \leq L_1$$

$$T_2(x', t) = T_{e2}(x') + T_{t2}(x', t) \text{ para } L_1 \leq x' \leq L_2$$

donde $T_{e1}(x')$ es la temperatura estacionaria y $T_{t1}(x', t)$ la temperatura transitoria.

Mediante el siguiente cambio de variable $x=x'/L$ para el sólido 1 y $x=(x'-L_1)/L$, donde $L=L_1+L_2$; para el sólido 2, se escriben las temperaturas como

$$T_1(x, t) = T_{e1}(x) + T_{t1}(x, t) \text{ para } 0 \leq x \leq L_1/L$$

$$T_2(x, t) = T_{e2}(x) + T_{t2}(x, t) \text{ para } 0 \leq x \leq L_2/L$$

C.1) ESTADO ESTACIONARIO.

Ecuación de Fourier

$$\partial_x^2 T_e(x) = 0$$

1.- CONDICIONES FRONTERA.

a) .- $(k_1/L) \partial_x T_{e1}(x) \Big|_{x=0} = h_0 (T_{e1}(x) - T_a) \Big|_{x=0}$

b) .- $(k_1/L) \partial_x T_{e1}(x) \Big|_{x=L_1/L} = (k_2/L) \partial_x T_{e2}(x) \Big|_{x=0}$
 $= h_1 (T_{e2}(x) \Big|_{x=0} - T_{e1}(x) \Big|_{x=L_1/L})$

c) .- $(k_2/L) \partial_x T_{e2}(x) \Big|_{x=L_2/L} = h_2 (T_g - T_{e2}(x)) \Big|_{x=L_2/L}$

SOLUCIÓN.

$$T_{e1}(x) = a_1 + b_1 x \quad , \quad 0 \leq x \leq L_1/L$$

$$T_{e2}(x) = a_2 + b_2 x \quad , \quad 0 \leq x \leq L_2/L$$

donde

$$a_1 = T_a + (T_g - T_a) \gamma R_0$$

$$a_2 = T_a + (T_g - T_a) \gamma (R_0 + R_1 + L_1/L)$$

$$b_1 = (T_g - T_a) \gamma$$

$$b_2 = (T_g - T_a) \gamma k_1/k_2$$

$$\gamma = 1 / \left((R_1 + L_1/L) + (R_2 + L_2/L) k_1/k_2 + R_0 \right)$$

$$R_0 = k_1 / (h_0 L)$$

$$R_1 = k_1 / (h_1 L)$$

$$R_2 = k_2 / (h_2 L)$$

C.2) ESTADO TRANSITORIO.

Ecuación de Fourier

$$K \partial_x^2 T_t(x, t) = \partial_t T_t(x, t)$$

1.- CONDICIONES FRONTERA.

a).- $(k_1/L) \partial_x T_{t1}(x, t) \Big|_{x=0} = h_0 T_{t1}(x, t) \Big|_{x=0}$

b).- $(k_1/L) \partial_x T_{t1}(x, t) \Big|_{x=L_1/L} = (k_2/L) \partial_x T_{t2}(x, t) \Big|_{x=0}$
 $= h_1 (T_{t2}(x, t) \Big|_{x=0} - T_{t1}(x, t) \Big|_{x=L_1/L})$

c).- $(k_2/L) \partial_x T_{t2}(x, t) \Big|_{x=L_2/L} = - h_2 T_{t2}(x, t) \Big|_{x=L_2/L}$

2.- CONDICIÓN INICIAL.

d).- $T_t(x, 0) = T_a - T_e(x)$,
 para $x \in [0, L_1/L] \cup [0, L_2/L]$

SOLUCIÓN.

$$T_{t1}(x, t) = \gamma (T_g - T_a) \sum_{n=1}^{\infty} A_n g_{1n}(x) \text{EXP}(-K_2 t \alpha_n^2 / L^2) , 0 \leq x \leq L_1/L$$

$$T_{t2}(x, t) = \gamma (T_g - T_a) \sum_{n=1}^{\infty} A_n g_{2n}(x) \text{EXP}(-K_2 t \alpha_n^2 / L^2) , 0 \leq x \leq L_2/L$$

con

$$g_{1n}(x) = \text{Sen}(\alpha_n \sqrt{K_2/K_1} x) + B_n \text{Cos}(\alpha_n \sqrt{K_2/K_1} x)$$

$$g_{2n}(x) = C_n \text{Sen}(\alpha_n x) + D_n \text{Cos}(\alpha_n x)$$

$$B_n = R_0 \alpha_n \sqrt{K_2/K_1}$$

$$C_n = (k_1/k_2) \sqrt{K_2/K_1} \{ \text{Cos}(\alpha_n L_1/L \sqrt{K_2/K_1}) - \dots$$

$$\dots - R_0 \alpha_n \sqrt{K_2/K_1} \text{Sen}(\alpha_n L_1/L \sqrt{K_2/K_1}) \}$$

$$D_n = \alpha_n \sqrt{K_2/K_1} (R_0 + R_1) \cos(\alpha_n L_1/L \sqrt{K_2/K_1}) + \dots \\ \dots + [1 - R_0 R_1] (\alpha_n \sqrt{K_2/K_1})^2 \text{Sen}(\alpha_n L_1/L \sqrt{K_2/K_1})$$

$$A_n = 2 (N_1 + N_2) / (D_1 + D_2)$$

$$N_1 = F_1 \cos(\alpha_n L_1/L \sqrt{K_2/K_1}) + F_2 \text{Sen}(\alpha_n L_1/L \sqrt{K_2/K_1}) + F_3$$

$$N_2 = \lambda \{ F_4 \cos(\alpha_n L_2/L) + F_5 \text{Sen}(\alpha_n L_2/L) + F_6 \}$$

$$D_1 = F_7 \text{Sen}(2\alpha_n L_1/L \sqrt{K_2/K_1}) + F_8 \cos(2\alpha_n L_1/L \sqrt{K_2/K_1}) + F_9$$

$$D_2 = \gamma \{ F_{10} \text{Sen}(2\alpha_n L_2/L) + F_{11} \cos(2\alpha_n L_2/L) + F_{12} \}$$

$$F_1 = R_0 + L_1/L - B_n / (\alpha_n \sqrt{K_2/K_1})$$

$$F_2 = -(R_0 + L_1/L) B_n - 1 / (\alpha_n \sqrt{K_2/K_1})$$

$$F_3 = -R_0 + B_n / (\alpha_n \sqrt{K_2/K_1})$$

$$F_4 = \sqrt{K_2/K_1} \{ [R_0 + R_1 + L_1/L] C_n + k_1/k_2 [L_2/L C_n - D_n/\alpha_n] \}$$

$$F_5 = \sqrt{K_2/K_1} \{ -[R_0 + R_1 + L_1/L] D_n - k_1/k_2 [C_n/\alpha_n - L_2/L D_n] \}$$

$$F_6 = \sqrt{K_2/K_1} \{ -[R_0 + R_1 + L_1/L] C_n + (k_1/k_2) (D_n/\alpha_n) \}$$

$$F_7 = 0.5 (B_n^2 - 1)$$

$$F_8 = -B_n$$

$$F_9 = L_1/L \sqrt{K_2/K_1} \alpha_n (1 + B_n^2) + B_n$$

$$F_{10} = 0.5 \sqrt{K_2/K_1} (D_n^2 - C_n^2)$$

$$F_{11} = -\sqrt{K_2/K_1} C_n D_n$$

$$F_{12} = \sqrt{K_2/K_1} \{ (L_2/L) \alpha_n [C_n^2 + D_n^2] + C_n D_n \}$$

$$\lambda = \rho_2 C_{p_2} / (\rho_1 C_{p_1})$$

y las α_n soluciones de la ecuación de eigenvalores

$$(\alpha_n R_2 C_n + D_n) \cos(\alpha_n L_2/L) + (C_n - R_2 \alpha_n D_n) \text{Sen}(\alpha_n L_2/L) = 0$$

APÉNDICE D. SOLUCIÓN PARA UNA SOLA CAPA MEDIANTE GREEN.

Un sólido, homogéneo e isotrópico, semi-infinito de espesor L , con una conductividad y difusividad térmicas k y K respectivamente, se encuentra inicialmente a temperatura T_a . La temperatura en $x \ll 0$ es constante e igual a T_a . Súbitamente se le pasa un fluido a temperatura $T_g(t)$ variable en el tiempo en la región $x > L$. Los coeficientes de transferencia de calor son h_0 en $x'=0$ y h_1 en $x'=L$, figura D.

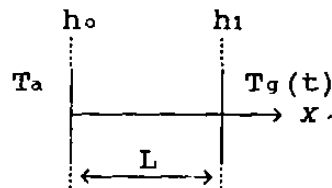


Figura D.- La temperatura $T_g(t)$ cambia con el tiempo

La solución dada a continuación es para el siguiente caso:

$$T_g(t) = DT_g t + T_g$$

SOLUCIÓN.

$$T(x,t) = 2 T_a \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_i^2} A_i(0) g_i(x) \{1 - \text{EXP}(-K\alpha_i^2 t/L^2)\} + \dots$$

$$\dots - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_i^2} A_i(1) g_i(x) \{F_g(t) + F_g \text{EXP}(-K\alpha_i^2 t/L^2)\} + \dots$$

$$\dots + 2T_0 \sum_{i=1}^{\infty} A_i g_i(x) \text{EXP}(-K\alpha_i^2 t/L^2) \}$$

donde

$$g_i(x) = \text{Sen}(\alpha_i x) + \alpha_i R_0 \text{Cos}(\alpha_i x), \text{ con } 0 \leq x \leq 1$$

$$A_i(0) = \alpha_i/D_i$$

$$D_i = 1+R_0 + (R_0\alpha_i)^2 + R_1 \frac{1 + (R_0 \alpha_i)^2}{1 + (R_1 \alpha_i)^2}$$

$$A_i(1) = \alpha_i \{ \cos(\alpha_i) - R_0 \alpha_i \sin(\alpha_i) \} / D_i$$

$$A_i = \{ 1 - \cos(\alpha_i) + R_0 \alpha_i \sin(\alpha_i) \} / (D_i \alpha_i)$$

$$F_g(t) = T_g(t) - L^2/(K \alpha_i^2) DT_g$$

$$F_g = L^2/(K \alpha_i^2) DT_g - T_g$$

$$R_i = k/(L h_i) , \quad i = 0, 1.$$

y las α_i soluciones de la ecuación de eigenvalores

$$\alpha_i(R_0 + R_1)\cos(\alpha_i) + (1 - R_0 R_1 \alpha_i^2)\sin(\alpha_i) = 0$$

APÉNDICE E. DATOS.

Las siguientes tablas contienen los datos del concreto aislante VSL-50 y del concreto refractario KX-99.

TABLA 1:EL AISLANTE

ESPESOR L_a		DENSIDAD ρ_a		CAPACIDAD CALORÍFICA C_{pa}	
0.1016m		800Kg/m ³		1154.26 Julios/Kg-°C	
CONDUCTIVIDAD TÉRMICA (k_a) W /m-°C			VS TEMPERATURA (T) °C		
k	T	k	T	k	T
0.209	204	0.255	426	0.269	704
0.235	260	0.261	482	0.271	760
0.242	315	0.267	593	0.271	815
0.250	371	0.268	648	0.271	871

TABLA 2:EL REFRACTARIO

ESPESOR L_r		DENSIDAD ρ_r		CAPACIDAD CALORÍFICA C_{pr}	
0.0762m		2355.77 Kg/m ³		1178.72 Julios/Kg-°C	
CONDUCTIVIDAD TÉRMICA (k_r) W /m-°C			VS TEMPERATURA (T) °C		
k			T		
1.06			426		
1.185			648		
1.311			871		
1.440			1093		

TABLA 3: Para el aislante y refractario.

D _{i, j}				
i \ j	1	2	3	4
1	-3.045600E-4	8.681844E-4	-1.760188	2.267650
2	1.711834E-5	-1.377545E-3	2.497797	-1.146750
3	6.466493E-5	2.563176E-4	-.6204318	0.283406
4	4.970088E-5	3.558828E-4		
5	-3.599574E-5	6.462376E-4		

REFERENCIAS.

- 1.- Fourier, Joseph, The analytical theory of heat. Dover, 1955.
- 2.- Whittaker, E.T. & G.N. Watson, A course of modern analysis. Fourth ed. Cambridge, Cambridge university press, 1927.
- 3.- Aguilar, J. R. Fuentes y R. Viramontes. "Reducción de pelet de mineral de hierro en lecho fijo", Congreso IBEROMET II, Mexico D.F., a publicarse (Octubre, 1992)
- 4.- Mode, Elmer B. Elements of probability and statistics. N.J., Prentice Hall, 1966.
- 5.- Spiridonov, V.P. y A.A. Lopatkin, Tratamiento matemático de datos Fisico-Químicos, URSS, Mir, 1973.
- 6.- Schenck Jr, Hilbert, Heat transfer engineering. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, Inc 1959

