

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA



APLICACION DE TECNICAS DE CONTROL NO
LINEAL A UN PROCESO DE FERMENTACION

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERIA ELECTRICA
CON ESPECIALIDAD EN CONTROL

PRESENTA:

EMILIO JAVIER CASTILLO SILVA

MONTERREY, N. L.

JULIO DE 1994

TM

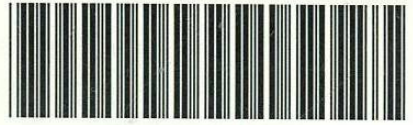
Z5853

.M2

FIME

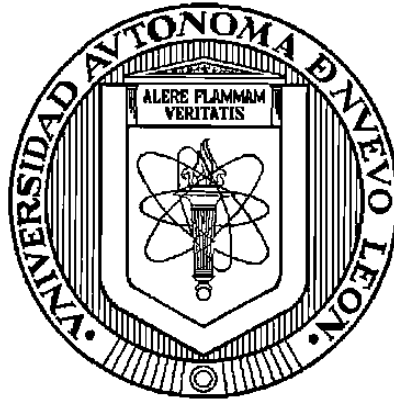
1994

C37



1020070672

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA



**APLICACION DE TECNICAS DE CONTROL NO LINEAL A
UN PROCESO DE FERMENTACION**

TESIS

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERIA ELECTRICA
CON ESPECIALIDAD EN CONTROL**

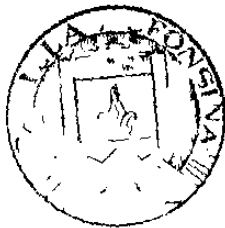
PRESENTA:

EMILIO JAVIER CASTILLO SILVA

MONTERREY, N. L.

JULIO DE 1994

TM
25853
.M2
FIC
1994
C27



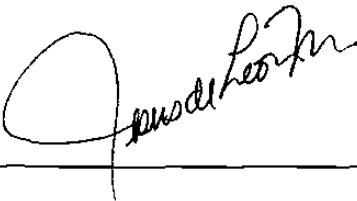
FOLD TEL

62797

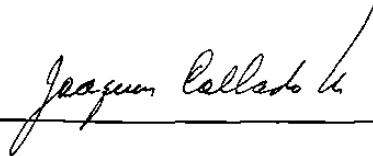
APLICACION DE TECNICAS DE CONTROL NO LINEAL A UN PROCESO DE FERMENTACION

Los miembros del Comité aprueban la Tesis
de Maestría de Emilio Javier Castillo Silva

Dr. Jesús de León Morales
Asesor



Dr. Joaquín Collado Moctezuma



Dr. Edgar N. Sánchez Camperos



A Carmen

AGRADECIMIENTOS

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.

A la Universidad Autónoma de Nuevo León.

Al Dr. Jesús de León Morales por su asesoría en la realización de este trabajo.

Al Dr. Joaquín Collado Moctezuma por sus comentarios y consejos dados en este trabajo y a lo largo de mi estancia en el programa doctoral.

Al Dr. Edgar N. Sánchez Camperos por sus comentarios y consejos dados en este trabajo y a lo largo de mi estancia en el programa doctoral.

Al Dr. Benito Pereyra Alferez por sus comentarios.

A mis amigos.

CONTENIDO

INDICE DE FIGURAS	vi
INTRODUCCION	1
1 GENERALIDADES	4
1.1 Tipos de cultivos	5
1.2 Panorama general del control	7
2 CONTROL Y OBSERVACION DE UN PROCESO DE FERMENTACION ...	10
2.1 Modelo del proceso	11
2.2 Ley de control	12
2.2.1 Estabilización de sistemas conservativos	12
2.2.2 Control por retroalimentación inversa	17
2.3 Observador	22
2.3.1 Antecedentes	23
2.3.2 Observador para el proceso biológico	24
2.4 Resultado de las simulaciones	26
3 PRINCIPIO DE SEPARACION	33
4 TRANSFORMACION DE COORDENADAS	43
4.1 Linearización entrada-salida	43
4.2 Aplicación al proceso biológico	48
4.3 Resultados de las simulaciones	51

5 IDENTIFICACION	53
5.1 Estimación en línea de $\mu(t)$	54
5.1.1 A partir de una medición ruidosa de biomasa	54
5.1.2 A partir de una medición ruidosa de sustrato	56
5.2 Identificación de parámetros	59
6 SISTEMA EN CASCADA	61
6.1 Modelo del proceso	62
6.2 Control	64
6.2.1 Controlabilidad	64
6.2.2 Ley de control	65
6.3 Observador	69
6.4 Resultados de las simulaciones	71
CONCLUSIONES	74
APENDICE	76
A1 Definiciones matemáticas	76
A2 Definiciones biológicas	82
REFERENCIAS	83

INDICE DE FIGURAS

1.1	Reactor en operación continua	5
1.2	Reactor con alimentación en lotes	6
2.1	Estimación y control de la biomasa	26
2.2	Estimación del sustrato	27
2.3	Ley de control (L/A)	27
2.4	Estimación del sustrato en presencia de ruido	28
2.5	Estimación y control de la biomasa en presencia de ruido	28
2.6	Estimación y control de la biomasa (PI)	29
2.7	Estimación del sustrato (PI)	29
2.8	Ley de control (PI)	29
2.9	Estimación y control de la biomasa (L/A, $x_r=4$)	30
2.10	Estimación del sustrato (L/A, $x_r=4$)	30
2.11	Estimación y control de la biomasa (PI, $x_r=4$)	31
2.12	Estimación del sustrato (PI, $x_r=4$)	31
2.13	Control L/A vs. PI	32
3.1	Sistema, observador, ley de control	33
4.1	Control del sustrato por (4.7)	51
4.2	Biomasa medida	51
4.3	Control del sustrato por (4.8)	52
4.4	Biomasa medida	52
5.1	Razón de crecimiento específico	55
5.2	Medición ruidosa de la biomasa	56
5.3	Razón de crecimiento vs. estimada	56
5.4	Biomasa x vs. biomasa estimada	58

5.5	Razón de crecimiento μ vs. estimada	58
6.1	Celulas con plasmidos x_1^+ vs. estimado	71
6.2	Celulas libres de plasmidos x_1^- vs. estimado	71
6.3	Substrato (s_1)	72
6.4	Celulas con plasmidos en el tanque dos x_2^+ vs. estimado	72
6.5	Celulas libres de plasmidos en el tanque dos x_2^- vs. estimado	73
6.6	Substrato en el tanque dos (s_2)	73
6.7	Producción (p)	73

INTRODUCCION

El estudio de los procesos de fermentación es una área de gran interés para investigación, debido a sus muchas aplicaciones en la industria alimenticia y farmacéutica, donde se busca una mayor efectividad en la producción y una disminución de costos.

El monitorear y controlar automáticamente estos procesos permite una mejor optimización de la producción, además de detectar y corregir disturbios que se puedan presentar durante la operación. Sin embargo, la automatización de los bioreactores en los procesos de fermentación se ha desarrollado lentamente, por dos motivos principales:

- Problemas de modelado: Como los procesos de fermentación involucran organismos vivos, su dinámica y comportamiento es fuertemente no lineal y no estacionaria, ya que su desarrollo esta ligado a muchos factores (temperatura, oxígeno, pH, etc.).

- Problemas de medición: En la mayoría de las aplicaciones industriales, solamente algunas de las variables biológicas y bioquímicas son disponibles en línea; en la mayoría de ellas la medición resulta difícil.

En este trabajo se abordará el problema de control de un proceso de fermentación continuo [9], mediante un control proporcional generalizado (del tipo L/A, [14]). Debido a que el objetivo final en los procesos de fermentación es obtener la mayor cantidad de masa celular o conseguir un producto sintetizado por ésta, se controlará la concentración de la biomasa, llevándola a un valor de referencia específico.

En lo referente al modelado del proceso, se supone que el modelo matemático es ya conocido, con algunas consideraciones tales como: La razón de crecimiento específico de la biomasa es mucho más grande que la razón de muerte; la razón de crecimiento específico está dado por la ley de Monod [9], la cual describe la razón de crecimiento como una función solamente de la concentración del nutriente limitante y

no asume dependencia sobre la concentración de otros nutrientes o otros factores ambientales; entre otras.

Por otra parte, las variables que intervienen en los procesos de fermentación, pueden ser sensadas por medio de mediciones directas o indirectas. En el caso del substrato su medición es directa, ya que es una variable para la cual existen sensores baratos y confiables; no siendo así el caso para la biomasa, para la cual no existe instrumentación apropiada, siendo por tanto, ésta una variable muy difícil de medir.

Por lo anterior, resulta más fácil medir el substrato, pero para fines de control es necesario conocer la biomasa, lo cual implica que es necesario recurrir a otro tipo de estrategias, para conocer su valor.

Por este motivo, el uso de técnicas de observación permite obtener una estimación, la cual será utilizada en la ley de control (L/A); quedando con esto resuelto el problema de conocer la biomasa en todo tiempo.

La presentación de la tesis está organizada como sigue:

En el capítulo 1 se da un panorama general de los procesos de fermentación, y las ecuaciones que describen la dinámica de la masa celular.

En el capítulo 2 se plantea el problema de observación y control en el proceso de fermentación. El problema de control es analizado mostrando que con una ley de control tipo L/A, el sistema es globalmente asintóticamente estabilizable. Por otra parte, como el modelo del proceso pertenece a la clase de sistemas que son afines en el estado, para los cuales existe un observador, el problema de observación queda resuelto.

El algoritmo de control requiere del valor del estado del sistema, el cual no se conoce completamente; éste será reemplazado por su estimado, entonces, en el capítulo 3 se prueba que el sistema compuesto por el par "observador-controlador" es estable.

El capítulo 4 consiste en aplicar una transformación al modelo y llevarlo a una forma normal; a partir de ésta se obtendrá la ley de control linealizante y estabilizante para el modelo original.

Otra alternativa para el control del proceso, es abordada en el capítulo 5, aquí se hace uso de un algoritmo adaptable para la estimación de la ley de crecimiento específico, la cual es difícil de modelar, y así utilizar este valor en la ley de control. Dos tipos de leyes de control para la biomasa son usadas; la primera que considera el caso de la medición de la biomasa, la segunda la medición del substrato, ambas en presencia de ruido.

Finalmente, en el capítulo 6, se extiende el problema de control a un cultivo en dos etapas.

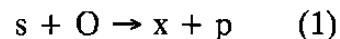
1. GENERALIDADES

En este capítulo se estudiarán algunos diferentes tipos de procesos de fermentación, junto con el modelo matemático, que describe el comportamiento dinámico de la masa celular en cada uno de ellos. Además, se dará un panorama general del control y de la teoría de los estimadores de estado, así como su aplicación a un proceso de fermentación.

Antes se verán algunas importantes definiciones.

Reactor biológico [25]: Es un tanque en el cual algunas reacciones biológicas ocurren simultáneamente, en un medio líquido. Estas reacciones pueden ser clasificadas en dos clases: reacción de crecimiento microbiano (o reacciones microbiológicas) y reacciones enzima-catalizadoras (también llamadas reacciones bioquímicas o biotransformaciones).

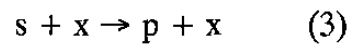
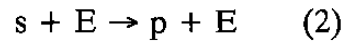
Reacciones de crecimiento microbiano [25]: El crecimiento de microorganismos (como bacterias, levaduras,...) procede por el consumo de nutrientes apropiados o substratos (involucran carbonó, nitrógeno, oxígeno, etc.). La masa de microorganismos vivos en el reactor es llamada la biomasa; una típica reacción microbiana es representada por:



donde s representa la fuente de carbonó (por eje. glucosa), O el oxígeno disuelto, x la biomasa y p un producto asociado con el crecimiento.

Reacciones enzima-catalizadoras [25]: Estas son reacciones donde el substrato s , es transformado a un producto p atreves de la acción catalizadora de una enzima E . El

esquema de la reacción puede ser de dos formas:



Las enzimas son proteínas producidas por microorganismos vivos. Estas pueden ser extracelulares (enzimas secretadas por la célula en un medio líquido) o intracelulares (enzimas confinadas dentro de la célula).

Proceso biológico [25]: Esta definido como un conjunto de m reacciones biológicas (tales como (1), (2), (3)) que involucran n componentes.

1.1 TIPOS DE CULTIVO

En este trabajo se consideran los reactores biológicos en modo de operación continuo (CST). El diagrama esquemático de un tanque agitado continuo es el siguiente:

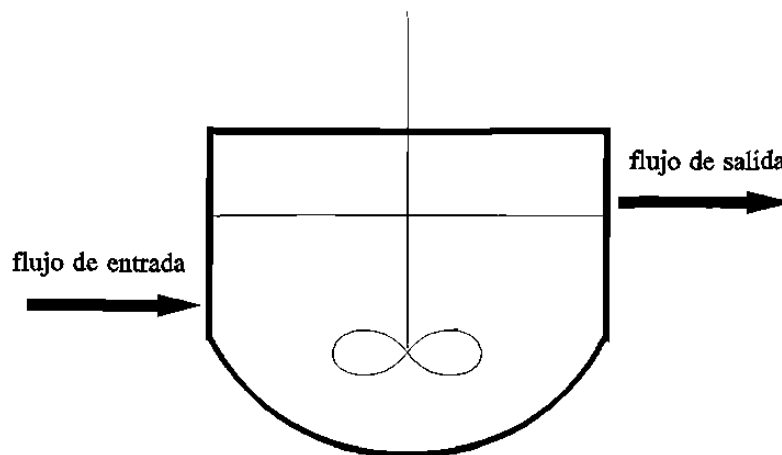


Fig. 1.1 Reactor en operación continua

El término continuo significa que substratos son alimentados a el reactor continuamente, y que un flujo es drenado del sistema, de tal manera que el volumen del cultivo es mantenido constante.

Un balance de material de la masa celular sería

$$\dot{x} = \frac{F}{V}x_0 - \frac{F}{V}x + \mu x - \alpha x \quad (1.1)$$

donde

$\frac{F}{V}x_0$ = células que entran, $\frac{F}{V}x$ = células que salen, μx = células que crecen, $-\alpha x$ = células que mueren, \dot{x} = células de acumulación, x_0 y x son la masa celular (g/l) en el alimento y fermentador, respectivamente; F es la razón de flujo (1/hr.), V es el volumen del fermentador, μ y α son la razón de crecimiento específico y la razón de muerte (1/hr.) respectivamente, y t es el tiempo (hr.).

Usualmente, el flujo de alimentación es estéril y $x_0 = 0$. También, en la mayoría de los cultivos continuos, la razón de crecimiento específico es mucho más grande que la razón de muerte ($\mu \gg \alpha$), así la ecuación (1.1) puede ser simplificada como

$$\dot{x} = \mu x - \frac{F}{V}x \quad (1.2)$$

Existen otros tipos de procesos como el llamado alimentación en lote (feed-batch (FB)), el cual es muy parecido al anterior, sólo que opera sin que sea drenado ningún flujo, como se muestra en la figura siguiente:

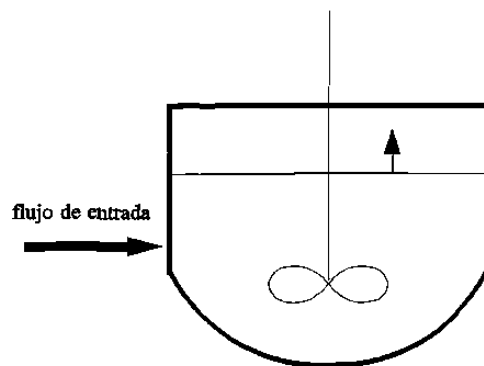


Fig. 1.2 Reactor con alimentación en lotes

El tanque inicialmente contiene una pequeña cantidad de sustratos y microorganismos,

y es progresivamente llenado con el flujo entrante del substrato. Cuando el tanque esta lleno, posiblemente después de un tiempo adicional de reacción, el contenido es extraído.

El balance de masa celular es igual a la ecuación (1.2) solo que $F = \dot{V}$.

En los reactores continuos, Dx representa la razón de remoción del componente x del reactor ($D = \frac{F}{V}$, es usualmente llamada razón de dilución). En los reactores de alimentación en lotes (FB), Dx representa la dilución del componente x en el tanque debido al incremento en el volumen.

Otro proceso es el llamado batch (se desarrolla en un medio cerrado), donde la masa celular esta descrita por:

$$\dot{x} = \mu x$$

En este trabajo se considera que la razón de crecimiento específico (μ) está dada por la ley de Monod [9]:

$$\mu(t) = \mu^* \frac{s(t)}{k + s(t)}$$

por lo que se puede ver que el proceso es no lineal.

1.2 PANORAMA GENERAL DEL CONTROL

En el análisis de los sistemas no lineales existen dos caminos a seguir, el primero es una linearización del sistema no lineal alrededor de un punto de equilibrio, y después aplicar un control lineal; el cual tiene el inconveniente, que sólo en un pequeño rango de operación se puede mantener el sistema estable, puesto que las no linealidades en el sistema original no pueden ser propiamente compensadas. La segunda opción es trabajar con el sistema no lineal, y tratar de encontrar un control no lineal que estabilice al sistema, de esta manera las no linealidades pueden ser manejadas en un rango de operación grande.

La teoría moderna de control basa sus argumentos en una idea cuya paternidad se atribuye generalmente a Kalman: La ley de control es una función del estado del sistema. Por ello resulta una necesidad incuestionable el poseer los valores que las variables de estado van tomando durante la dinámica del sistema, para poder ejercer una acción de control reguladora sobre el mismo.

Las variables de estado no son necesariamente magnitudes físicas medibles y de hecho en los casos prácticos es lo más frecuente. Por tanto se introduce en el sistema una nueva componente cuyo único propósito sea determinar el estado del mismo en cada instante de tiempo. Para lograr un estimado del estado real del sistema, se necesitan dos tipos fundamentales de información que son, por un lado, todo aquello que concierna al conocimiento de la estructura interna de la planta y por otro lado, el régimen entrada-salida a que está sometido. En cuanto al primero, asumiremos que es conocido el modelo matemático del sistema; y en cuanto a lo segundo, se tienen dos alternativas que son las siguientes:

a) Enfoque determinístico: Consiste en suponer que tanto el vector de entrada como las mediciones que se efectúan en la salida están desprovistos de posibles ruidos ambientales. Este punto de vista se conoce como enfoque de Luenberger y conduce a la llamada teoría de observadores.

b) Enfoque estocástico: Al contrario del anterior aquí se toma en consideración el ruido, que en mayor o menor grado, perturba a todo el sistema. Este es el conocido enfoque de Kalman-Bucy ó también Wiener-Kalman, que conduce a la teoría de los filtros llamados también estimadores óptimos.

Existen una gran variedad de métodos para la medición de el crecimiento microbiano, pero no existe un solo procedimiento simple aplicable a todas las situaciones. La elección de el método depende del objetivo de las mediciones y de la utilidad de las técnicas disponibles. En muchos casos, especialmente en los de fermentación comercial, los medios para crecimiento y productos de formación son tan

complejos que los métodos directos para la estimación de la masa celular o el número de células no son muy utilizados, y un medio de estimación indirecta de la masa celular es necesario. Sin embargo, no importa que método sea usado, un considerable esmero es requerido en la *interpretación* de resultados.

En el caso de los *procesos biológicos* queda justificado el uso de un estimador, puesto que como se dijo antes, medir la cantidad de biomasa en un cultivo es, técnicamente, muy difícil y muy costoso.

2. CONTROL Y OBSERVACION DE UN PROCESO DE FERMENTACION

En este capítulo estudiaremos un proceso de fermentación continuo, haciendo uso de técnicas recientes de la teoría de control no lineal, como son los observadores y una ley de control por retroalimentación inversa. Al diseñar un algoritmo de control, que se implementará en una computadora digital, se presentan dificultades, entre las que podemos mencionar:

- Falta de sensores confiables.
- Dificultades para modelizar el proceso.
- Dificultad de tratar problemas no lineales.

El proceso considerado es un cultivo con crecimiento celular limitado por un sólo sustrato. Este se lleva a efecto en un bioreactor completamente agitado, en donde se quiere controlar la concentración de la biomasa, con la sola medición del sustrato; la idea es construir una ley de control, la cual sea capaz de llevar la biomasa a un valor de referencia dado, con la sola medición del sustrato. Pero como la ley de control requiere el conocimiento en línea del valor de la biomasa, este problema se resuelve utilizando un observador que estime las variables no medibles. En este trabajo se ve como, el modelo del proceso pertenece a una clase de sistemas llamados sistemas afines en el estado, para los cuales la construcción de un observador es posible.

A continuación se abordarán los siguientes puntos: A partir del modelo matemático que representa la dinámica del proceso, se propone una ley de control para dicho modelo del tipo retroalimentación inversa, dado que esta ley depende de un estado no medido del proceso, se introducirán los observadores, por último se presentarán algunas simulaciones.

2.1 MODELO DEL PROCESO

A continuación se presenta el modelo matemático que representa a un proceso de fermentación con un sólo sustrato límite, como es descrito en [15]. Las ecuaciones del modelo son las siguientes:

$$\begin{cases} \dot{s} = -\mu(t)\frac{x}{R} + D(s_0 - s) & \forall x, s \in \mathbb{R}^+ \\ \dot{x} = \mu(t)x - Dx \\ y = s \end{cases} \quad (2.1)$$

donde x es la biomasa (gr./l.), s es el sustrato (gr./l.), D la razón de dilución (hr.^{-1}), s_0 es el alimento en el sustrato (gr./l.), R es el rendimiento.

La principal hipótesis para este sistema es que el crecimiento celular está descrito por la ley de Monod:

$$\mu(t) = \mu^* \frac{s(t)}{k + s(t)} \quad (2.2)$$

y además el coeficiente de la razón de muerte, es insignificante en comparación con el crecimiento; también consideraremos que $0 < \mu(t) \leq \mu^*$, donde μ^* es el máximo valor de $\mu(t)$.

En la teoría de control, s y x representan componentes de un vector de estado χ i.e. $\chi = [s, x]^T$, $u = D$ el control, s la salida. Así el sistema (2.1) en forma matricial, puede ser escrito como un sistema de la forma:

$$\dot{\chi} = \begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u & \frac{-\mu(t)}{R} \\ 0 & \mu(t) - u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_0 \\ 0 \end{pmatrix} u \quad (2.3)$$

$y = s$ (medible)

2.2 LEY DE CONTROL

Antes de la obtención de la ley de control, se estudiará la estabilización de sistemas conservativos, y posteriormente, en la sección 2.2.2 se abordaran los llamados controladores por retroalimentación inversa (L/A).

2.2.1 ESTABILIZACIÓN DE SISTEMAS CONSERVATIVOS

Antes se dará una introducción referente a la clase de sistemas conservativos y a la estabilización de estos, ver [13].

Definición 2.1. [13] Considere el siguiente sistema no lineal:

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t) \cdot g_i(x(t)) & x \in \mathbb{R}^n \\ y(t) = h(x(t)) & y \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (2.4)$$

Σ es *disipativo*, si existe $V \in C^\infty$ (ver A1.2)¹ tal que, $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ verifica lo siguiente

- i) $V(0) = 0$
- ii) $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} V(x(t)) = +\infty$
- iii) $L_f V(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

Nota: Si el sistema es disipativo, entonces para $u_i=0$ donde $i=1, \dots, m$, las trayectorias son acotadas. En el caso de que $L_f V(x)=0$ (A1.7), $\forall x \in \mathbb{R}^n$, el sistema se dice *conservativo*.

Teorema 2.1 [13]: Suponiendo que existe una función $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ positiva definida y propia (A1.17), tal que:

- a) $dV(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- b) $f(0) = 0$

¹Cuando se tenga A1.XX ó A2.XX, se refiere al apéndice.

c) el espacio vectorial generado por $\{f(x), \text{ad}_f^k(g_i)(x), k \in \mathbb{N}, i=1, \dots, m\}$ es de dimensión n , para toda x tal que $L_f V(x) = 0, L_{g_i} V(x) = 0$ con $x \neq 0$. (ver: $\text{ad}_f^k(g_i)(x)$ en A1.8).

Entonces la retroalimentación $u(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ \dots \\ \dots \\ u_m(x) \end{pmatrix}$ donde $u_i(x) = -r_i(x)L_{g_i} V(x)$

estabiliza globalmente asintóticamente el sistema (2.4), para toda selección arbitraria de funciones r_i de clase C^r ($r \geq 1$), $r_i(x) > 0; \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Prueba del teorema 2.1:

Primero se probará que el origen es un punto de equilibrio, que es estable en el sentido de Lyapunov (i.s.L., A1.13), para el sistema:

$$\dot{x} = f(x) - \sum_{i=1}^m r_i(x)L_{g_i} V(x).g_i(x) \quad (2.5)$$

y además que el origen es un atractor global. Es claro que el origen es un punto de equilibrio, puesto que $f(0) = 0$ y $dV(0) = 0$. Por construcción

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}(x), \dot{x} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}(x), f(x) - \sum_{i=1}^m r_i(x)L_{g_i} V(x).g_i(x) \right\rangle \\ &= L_f(V)(x) - \sum_{i=1}^m r_i(x)(L_{g_i}(V)(x))^2 \leq 0. \end{aligned}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interior.

Por consecuencia, toda trayectoria que inicia en el conjunto $BV(\epsilon) = \{x \mid V(x) \leq \epsilon\}$, $\epsilon > 0$, permanece en la misma vecindad $BV(\epsilon)$. Entonces el origen es i.s.L.

Haciendo
$$X(x) = f(x) - \sum_{i=1}^m r_i(x) L_{g_i} V(x) \cdot g_i(x)$$

Por el principio de invarianza de LaSalle (A1.15), el conjunto ω -limite de Ω es un atractor global para las trayectorias de (2.5) acotadas, Ω es invariante positivo bajo la acción del campo vectorial X y está incluido dentro de $W = \{x \mid L_X V(x) = 0\}$.

Notando que en nuestro caso, W es también igual a:

$$W = \{x \mid L_f V(x) = 0 \quad y \quad L_{g_i} V(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m\} \quad (2.6)$$

para probar que el origen es un atractor global, es suficiente demostrar que el conjunto Ω se reduce a un solo punto, el origen.

Sea $x(t)$ una trayectoria para el sistema (2.5) para una condición inicial x^0 ; para finalizar la demostración del teorema 2.1, utilizaremos el lema siguiente:

Lema 2.1

Para toda trayectoria $x(t)$ que inicia en Ω , tenemos:

$$L_{\text{ad}^k_{f(g_i)}}(V)(x(t)) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall t \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.7)$$

Prueba del lema 2.1

Sea $x(t)$ una trayectoria de salida de la condición inicial $x^0 \in \Omega$.

Para $k=0$, el lema es verificado debido a (2.6).

Para $k=1$, derivando $V(x(t))$ con respecto al tiempo:

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = L_f(V)(x(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(x) L_{g_i}(V)(x(t))$$

puesto que la trayectoria inicia en Ω , como Ω es invariante positiva bajo la acción

del campo vectorial X , y como $\Omega \subset W$, se obtiene que:

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

Ahora, derivando $L_f(V)(x(t))$ con respecto al tiempo:

$$\frac{d}{dt} L_f V(x(t)) = L_f^2 V(x(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(x) L_{g_i} L_f(V)(x(t))$$

de un modo evidente, esta expresión es igual a cero para toda $t \geq 0$.

$L_f(V)$ es una función negativa no nula, su máximo es necesariamente alcanzado en Ω .

Pues $\forall x \in \Omega$, $dL_f V(x) = 0$. Por consecuencia:

$$L_f^2(V)(x(t)) = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \text{y} \quad L_{g_i} L_f(V)(x(t)) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

Por otra parte, $L_{g_i}(V)(x(t)) = 0$ para toda $x \in \Omega$ y para toda $t \geq 0$, como Ω es invariante positivo bajo la acción del campo X y está incluido en W :

$$\frac{d}{dt} L_{g_i}(V)(x(t)) = L_f L_{g_i}(V)(x(t)) + \sum_{j=1}^m u_j(x(t)) L_{g_j} L_{g_i}(V)(x(t)) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

Por construcción, los $u_j(x)$ son nulos en Ω ; entonces se tiene que:

$$L_f L_{g_i}(V)(x(t)) = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \text{y} \quad \forall x^0 = x(0) \in \Omega$$

donde:

$$L_f L_{g_i}(V)(x(t)) - L_{g_i} L_f(V)(x(t)) = L_{\text{ad}_f(g_i)}(V)(x(t)) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

Por recurrencia simple queda demostrado el lema. □

Finalmente, utilizando el lema anterior, las condiciones a) y c) implican que Ω es reducido al origen, con esto queda demostrado el teorema □

Considerando ahora el modelo del proceso de fermentación, el cual es representado de la siguiente forma :

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= f(\xi) + G(\xi)u \quad \xi \in \mathbb{R}^n \\ y(t) &= h(\xi(t)) \quad y \in \mathbb{R}^p\end{aligned}\tag{2.8}$$

demostraremos que el sistema es conservativo. Representando (2.8) en forma matricial resulta que

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu(t)x \\ \mu(t)x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_0 - s \\ -x \end{pmatrix} \mathbf{D}\tag{2.9}$$

Considere el siguiente cambio de variable

$$\begin{aligned}\xi_1 &= s - s_0 \\ \xi_2 &= x\end{aligned}$$

se tiene que

$$\dot{\xi} = \begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu \xi_2 \\ \mu \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\xi_1 \\ -\xi_2 \end{pmatrix} \mathbf{D}$$

donde un punto de equilibrio de este sistema es el $(\xi_1, \xi_2) = (0, 0)$.

Considerando la siguiente función candidato de Lyapunov:

$$V(\xi) = \frac{1}{2} (\xi_1 + \xi_2)^2\tag{2.10}$$

Derivando con respecto al tiempo se tiene

$$\dot{V}(\xi) = L_{f(\xi)} V(\xi) + L_{G(\xi)} V(\xi) \mathbf{D}$$

donde

$$L_{f(\xi)}V(\xi) = (\xi_1 + \xi_2)(-\mu \xi_2 + \mu \xi_2) = 0$$

$$L_{G(\xi)}V(\xi) = (\xi_1 + \xi_2)(-D \xi_1 - D \xi_2)$$

Entonces, de la definición (2.1), se tiene que el sistema es conservativo. Finalmente

$$\dot{V}(\xi) = -D(\xi_1 + \xi_2)^2$$

$$\dot{V}(\xi) = -2DV(\xi)$$

luego se tiene que

$$V(\xi(t)) = V(\xi(0))e^{-2Dt}$$

Seleccionando el control

$$D = -r(\xi)L_{G(\xi)}V(\xi)$$

$$= r(\xi)(\xi_1 + \xi_2)^2$$

$$D = r(\xi)(x + s - s_0)^2$$

Del teorema (2.1), esta ley estabiliza al sistema global asintóticamente. Se puede ver que si $D > 0$, el sistema es G.A.S. en $(\xi_1, \xi_2) = (0, 0)$.

2.2.2 CONTROL POR RETROALIMENTACIÓN INVERSA L/A:

Primero se abordará la obtención del llamado control por retroalimentación inversa (L/A). Después se demuestra que este tipo de control estabiliza globalmente asintóticamente al sistema (2.3).

Sea el sistema no lineal SISO de la forma:

$$\bar{\Sigma} : \begin{cases} \dot{\chi} = f(\chi, u) & \chi \in \mathbb{R}^{*+} \\ y = \chi & y \in \mathbb{R}^{*+}, u \in \mathbb{R}^{*+} \end{cases}$$

donde \mathbb{R}^{*+} es el conjunto de numeros reales estrictamente positivos; y es la salida; u es la entrada de control; f es una función analítica no lineal.

Considerando el siguiente control:

$$u = \psi(x, x_r)$$

donde ψ es una función analítica no lineal, y x_r es la referencia.

Utilizando el siguiente cambio de coordenadas:

$$\begin{aligned} \chi &= e^{\alpha(t)}, & \chi &> 0 \\ u &= e^{v(t)}, & u &> 0 \end{aligned}$$

entonces, en este sistema de coordenadas, el sistema se transforma en

$$\bar{\Sigma}_T: \{\dot{\alpha} = \tilde{f}(\alpha, v), \quad \forall (\alpha, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$$

donde una referencia para el nuevo sistema es de la forma $\alpha_r = \ln x_r$; y aplicando un control (v) al sistema transformado, dado que la ley de control original es una función no lineal de x (estado), y de x_r , entonces bajo esta transformación, el control se puede escribir como $v = \psi^*(\alpha, \alpha_r)$. Escogiendo $\psi^*(\alpha, \alpha_r)$ como una función de la forma

$$\psi^*(\alpha, \alpha_r) = k(\alpha - \alpha_r) + v_r, \quad k > 0 \text{ cte.},$$

donde v_r está relacionado con parametros del sistema y algunas veces puede ser función de la salida o de la referencia. Entonces el control v en coordenadas u, u_r, x, x_r resulta:

$$\begin{aligned} v &= k(\ln x - \ln x_r) + v_r \\ v &= k \ln \left(\frac{x}{x_r} \right) + \ln u_r \end{aligned}$$

Finalmente, la ley de control original es:

$$\ln u = k \ln \left(\frac{x}{x_r} \right) + \ln u_r$$

$$u = u_r \left(\frac{x}{x_r} \right)^k$$

Aplicando el resultado anterior al proceso de fermentación, resulta que u_r es una función a determinar. Haciendo $x = x_r$, se busca el punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado (x_r es constante), se tiene:

$$\dot{s} = -\mu(t)x_r + (s_0 - s)D = 0$$

$$\dot{x} = \{\mu(t) - D\}x_r = 0$$

dado que el control es de la forma

$$D = u_r \left(\frac{x}{x_r} \right)^k$$

sustituyendo el control y como $x = x_r$, se tiene:

$$0 = (\mu(t) - u_r)x_r = \dot{x}$$

$$0 = -\mu(t)x_r + (s_0 - s)u_r = \dot{s}$$

Esto implica que

$$u_r = \mu(t)$$

$$s = s_0 - x_r$$

De acuerdo con los valores de x , y s , el control D debe ser estrictamente positivo (es un requisito físico). De donde se tiene el siguiente resultado

Teorema 2.2: Considere el sistema (2.3), y sea la ley de seguimiento de la forma:

$$D = \mu(t) \left(\frac{x_r}{x} \right)^v \quad \text{donde } v < 0, \mu(t) > 0 \quad (2.11)$$

Entonces, el error de seguimiento $e_2 = x - x_r$, converge exponencialmente hacia cero.

Demostración:

Seleccionando un cambio de variable adecuado tenemos que:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= s - s_0 + x_r \\ \zeta_2 &= x \end{aligned}$$

Derivando con respecto al tiempo, y reemplazando las nuevas coordenadas, en el sistema original, se tiene

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1 &= -\mu(t)\zeta_2 - D\{\zeta_1 - x_r\} \\ \dot{\zeta}_2 &= \mu(t)\zeta_2 - D\zeta_2 \end{aligned}$$

Ahora, definiendo el error de seguimiento como

$$\begin{aligned} e_1 &= \zeta_1 - x_r = s - s_0 + x_r - x_r \\ e_2 &= \zeta_2 - x_r = x - x_r \end{aligned}$$

Derivando con respecto al tiempo, resulta que

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= -\mu(t)(e_2 + x_r) - D\{e_1 - x_r\} \\ \dot{e}_2 &= \mu(t)(e_2 + x_r) - D\{e_2 + x_r\} \end{aligned}$$

Reemplazando el control

$$D = \mu(t) \left(\frac{e_2 + x_r}{x_r} \right)$$

se obtiene que

$$\dot{e}_1 = -\mu(t)(e_2 + x_r) - \mu(t) \left(\frac{e_2 + x_r}{x_r} \right) \{e_1 - x_r\} = -\mu(t) \frac{e_1}{x_r} (e_2 + x_r)$$

$$\dot{e}_2 = \mu(t)(e_2 + x_r) - \mu(t) \left(\frac{e_2 + x_r}{x_r} \right) \{e_2 + x_r\} = -\mu(t) \frac{e_2}{x_r} (e_2 + x_r)$$

De donde los puntos de equilibrio son:

Si $e_2 = 0$, entonces $e_1 = 0$, luego $(e_1, e_2) = (0, 0)$ es un punto de equilibrio.

Si $e_2 = -x_r$, entonces $e_1 = \mathbb{R}$, luego $(e_1, e_2) = (\mathbb{R}, -x_r)$ es otro punto de equilibrio.

El punto de equilibrio $(\mathbb{R}, -x_r)$, no tiene ningún sentido práctico, puesto que si $e_2 = x - x_r = -x_r \rightarrow x = 0$.

Considerando la siguiente función candidato de Lyapunov

$$W(e) = \frac{1}{2}(e_1 + e_2)^2$$

$$W(e) > 0 \quad \forall e \neq 0; W(e) = 0 \quad e = 0$$

Derivando con respecto al tiempo a lo largo de las trayectorias de 2.3, tenemos:

$$\dot{W}(e) = (e_1 + e_2) [-\mu(t)(e_2 + x_r) - D(e_1 - x_r) + \mu(t)(e_2 + x_r) - D(e_2 + x_r)]$$

$$\dot{W}(e) = -D(e_1 + e_2)^2$$

$$\dot{W}(e) = -\mu(t) \left(\frac{e_2 + x_r}{x_r} \right) (e_1 + e_2)^2 < 0$$

en las variables originales quedaría:

$$\dot{W}(e) = -D(x + s - s_0)^2 < 0$$

De donde D debe ser estrictamente positiva, para que se cumpla la desigualdad. Entonces, el sistema (2.3) es globalmente asintóticamente estabilizable (G.A.S.) en el punto de equilibrio $x = x_r$ y $s = s_0 - x_r$.

□

2.3 OBSERVADOR

Al inicio del capítulo se mencionó, que el vector de estado no está disponible a través de mediciones, debido a las limitaciones tecnológicas, o que los sensores de las variables biológicas, no sean lo suficientemente confiables ó resultan costosos.

Por otra parte, la ley de control depende del estado del sistema, por lo tanto, se requiere del conocimiento del vector de estado en todo tiempo, para implementar la ley de control. Superamos este problema con la construcción de un observador, el cual es un sistema dinámico, que tiene como entradas a (u, y) del sistema original (2.3) y como salida proporciona un estimado \hat{x} del vector de estado.

Note que el sistema (2.3), pertenece a la clase de sistemas no lineales descritos por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= A(u,y)\chi + \phi(u) \\ y &= C\chi \end{aligned} \tag{2.12}$$

Las propiedades concernientes a observabilidad, de estos sistemas, serán estudiadas en la sección 2.3.2.

2.3.1 ANTECEDENTES

La construcción de un observador, para los sistemas no lineales no es tan evidente como en los sistemas lineales. Los sistemas no lineales se pueden clasificar como sigue: Aquellos que son observables para toda entrada y aquellos que poseen entradas singulares (es decir entradas que hacen al sistema inobservable). Para los sistemas que son observables ante toda entrada los primeros resultados obtenidos llevan a el caso de un sistema no lineal que pueda ser transformado en un sistema lineal más una inyección de salida.

Considerando la clase de sistemas de la forma:

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x} = Ax + \phi(u,y), & x \in \mathbb{R}^n, u \in U \subset \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p \\ y = Cx \end{cases}$$

Σ_1 es observable independientemente de el valor de la entrada u si el par (C,A) es observable. En este caso se puede escoger K tal que $(A - KC)$ tenga su espectro con la parte real negativa.

Un observador para Σ_1 es de la forma:

$$(O): \dot{z} = Az + \phi(u,y) - K(Cz - y)$$

En [21] y [22] los autores caracterizaron los sistemas no lineales, que por difeomorfismo, se transforman en la forma descrita arriba. En [23], Williamson mostró que los sistemas bilineales no teniendo entradas singulares, poseen una forma canónica de observabilidad. Esto le permitió definir un observador teniendo en cuenta esta estructura. La generalización de este resultado, a los sistemas no lineales observables para toda entrada, es debido a Gauthier y Bonard [27]. En [20], los autores demostraron, utilizando esta forma canónica que los sistemas poseen un observador de gran ganancia.

Los sistemas lineales más una inyección de salida no presentan entradas singulares, por

lo tanto no son representativos de la dificultad en la síntesis de observadores. Por el contrario, los sistemas afines en el estado más una inyección de salida, en forma genérica, poseen entradas singulares que hacen el sistema inobservable; a pesar de este hecho existen observadores para una cierta clase de entradas, que son una adaptación del filtro de Kalman en su versión determinística.

2.3.2 OBSERVADOR PARA EL PROCESO BIOLÓGICO

Aquí usaremos resultados obtenidos en [29], donde la estructura de un observador no lineal para sistemas de la forma (2.12) es dada. Este observador funciona, para toda entrada aplicada al sistema, que pertenezca a la clase de entradas regularmente persistentes (una subclase de entradas universales, A1.12).

Consideraremos ahora que el modelo del proceso de fermentación tiene la forma (2.12), donde

$$A(u,y) = \begin{pmatrix} -u & -\mu(t) \\ 0 & \mu(t)-u \end{pmatrix} \quad \phi(u,y) = \begin{pmatrix} s_0 u \\ 0 \end{pmatrix}$$

Utilizando esta representación del sistema, vamos a construir un observador que permita estimar el vector de estados. Para ello tenemos el siguiente resultado

Teorema 2.3: El sistema dinámico

$$\begin{cases} \dot{z} = A(u,y)z - R^{-1}C^T(Cz - y) + \phi(u,y) \\ \dot{R} = -\theta R - A^T(u,y)R - RA(u,y) + C^TC \end{cases}$$

es un observador de orden completo para el sistema (2.3) en el sentido que

$$\|z(t) - \chi(t)\| \leq k e^{-\theta t}$$

para θ suficientemente grande, siendo θ una constante positiva.

Demostración:

Donde, $z = [z_1, z_2]$ es el estimado de $\chi = [s, x]$, y $R(t)$ denota matrices simétricas, definidas positivas en $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, con $n = 2$. Definiendo el error de estimación como:

$$\epsilon(t) = z(t) - \chi(t)$$

Derivando, la dinámica del error está dada por

$$\dot{\epsilon}(t) = \dot{z}(t) - \dot{\chi}(t) = \{A(u, y) - R^{-1}(t)C^T C\} \epsilon(t)$$

Escogemos como función candidato de Lyapunov: $V(\epsilon) = \epsilon^T R(t) \epsilon$ donde

$$i) \quad V(\epsilon) > 0 \quad \forall \epsilon \neq 0; \quad V(0) = 0$$

entonces

$$ii) \quad \dot{V}(\epsilon) = \dot{\epsilon}^T R \epsilon + \epsilon^T \dot{R} \epsilon + \epsilon^T R \dot{\epsilon}$$

$$\dot{V}(\epsilon) = -\theta \epsilon^T R \epsilon - \epsilon^T C^T C \epsilon$$

$$\dot{V}(\epsilon) \leq -\theta V(\epsilon)$$

$$V(\epsilon) \leq V(0) e^{-\theta t}$$

Como la entrada (u) , es regularmente persistente (A1.13), entonces dado $t_0 \geq 0$ existe $\alpha > 0$, y $\forall t \geq t_0$ tal que $R(t) \geq \alpha I$, donde, $\lambda_{\min}(R(t)) \geq \alpha > 0$. Entonces tenemos:

$$V(\epsilon) \geq \alpha \|\epsilon\|^2$$

$$\alpha \|\epsilon\|^2 \leq V(0) e^{-\theta t}$$

$$\|\epsilon\| \leq \left(\frac{V(0)}{\alpha} \right)^{1/2} e^{-\frac{\theta t}{2}}$$

Por lo tanto, el error tiende a cero exponencialmente.

□

En el siguiente capítulo se probará que el sistema compuesto del estimador de estado y la ley de control que depende de dicha estimación, es estable.

2.4 RESULTADOS DE LAS SIMULACIONES

En esta sección, se presentaran algunos resultados, que muestran como la ley de control (2.11) lleva la biomasa a un valor de referencia dado.

La ley de control fue implementada, asumiendo que no se conoce el vector de estados, y por lo tanto, un valor estimado de la biomasa es usado en la ley de control. Se presenta el comportamiento del sistema, en dos condiciones diferentes, una con ruido de medición, y la otra sin ruido. El ruido es blanco (media cero) con una desviación estándar del diez por ciento del valor de la señal. Estas simulaciones fueron realizadas utilizando los siguientes valores: $s_0 = 10$, $R = 1$, $\mu^* = 0.31$, $k = 0.5$, $\theta = 1$, $v = -1$.

En la figura 2.1, se muestra como la ley de control lleva a la biomasa a un valor de referencia ($x_r = 3$), y el estimador alcanza sus respectivos estados (figuras 2.1, 2.2).

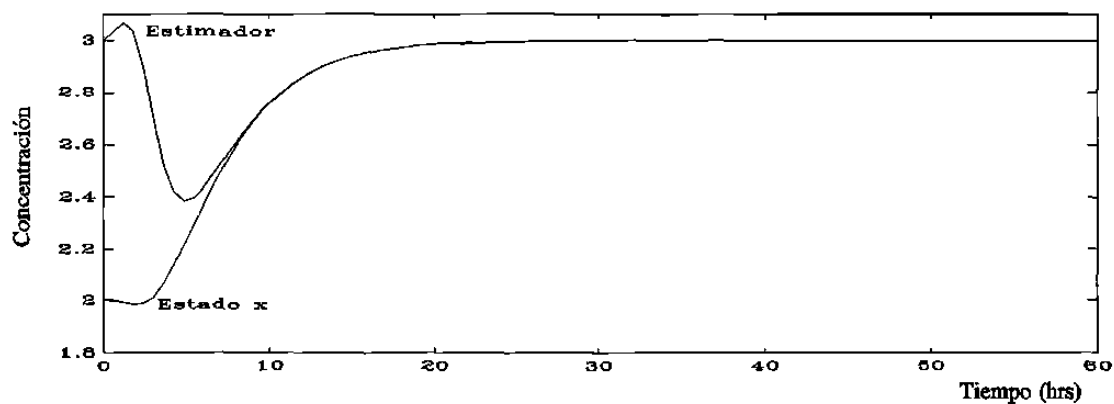


Fig. 2.1 Estimación y control de la biomasa.

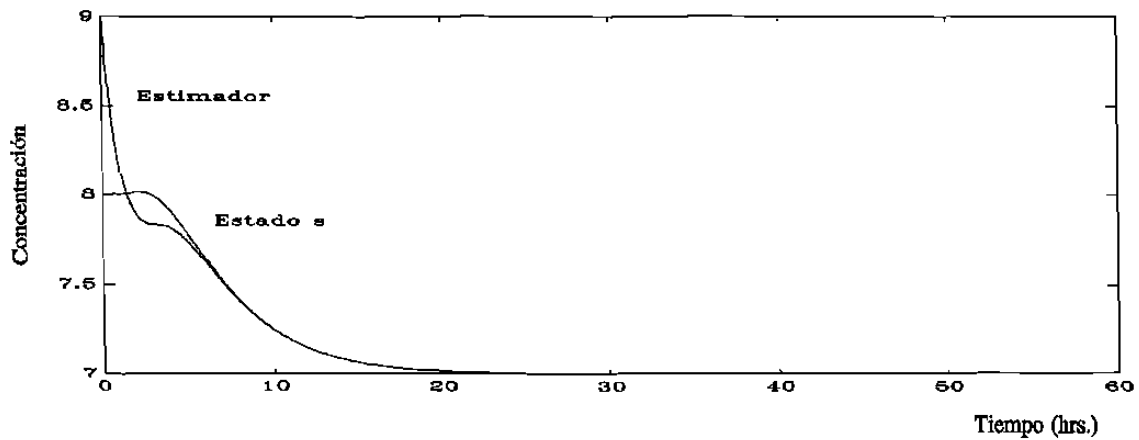


Fig. 2.2 Estimación de el substrato.

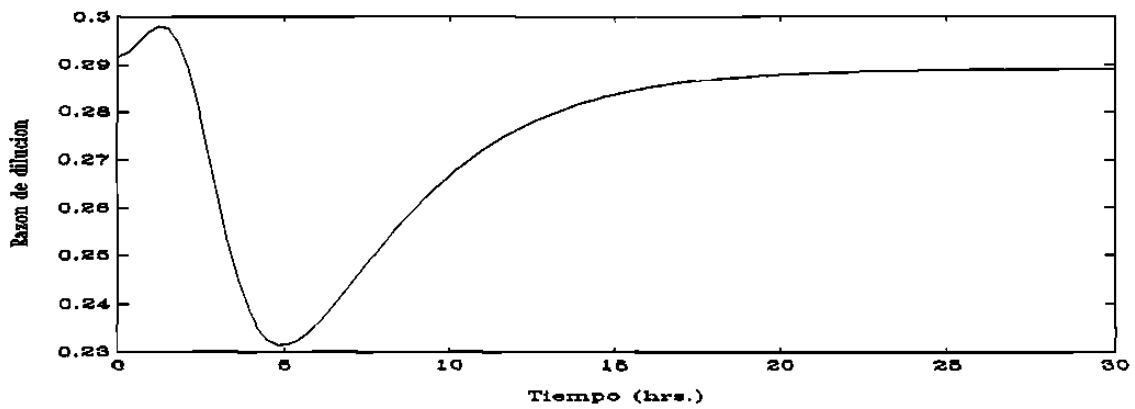


Fig. 2.3 Ley de control (L/A).

A continuación en las figuras 2.3 y 2.4, se muestra el comportamiento del sistema para una referencia igual a la anterior solo que en presencia de ruido de medición. En ambos casos se tienen resultados satisfactorios.

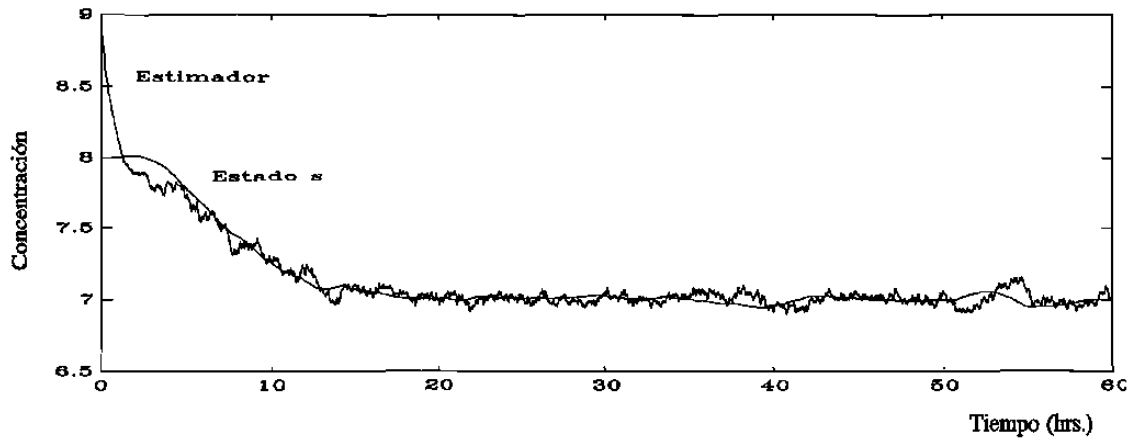


Fig. 2.4 Estimación de el substrato en presencia de ruido.

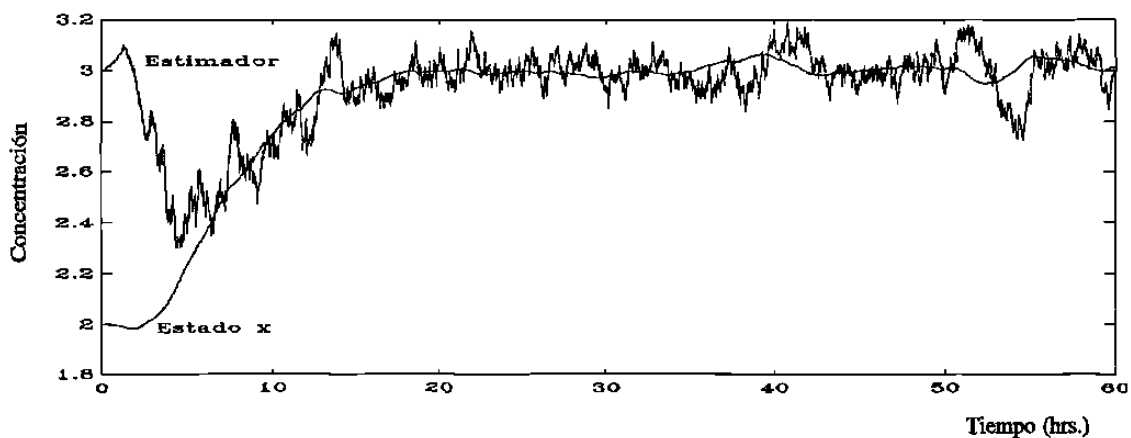


Fig. 2.5 Estimación y control de la biomasa en presencia de ruido.

Como ve en la figura 2.1, el estimador alcanza al estado real en un valor cercano a 10 hrs., esto puede variar de acuerdo con la ganancia del estimador (θ), si se incrementa esta ganancia, se alcanzará antes al valor real, pero con una mayor oscilación.

Las siguientes gráficas muestran el comportamiento del sistema con un control PI ($k_p = 4$, $t_i = 0.5$), las consideraciones y condiciones iniciales fueron las mismas que en el control anterior.

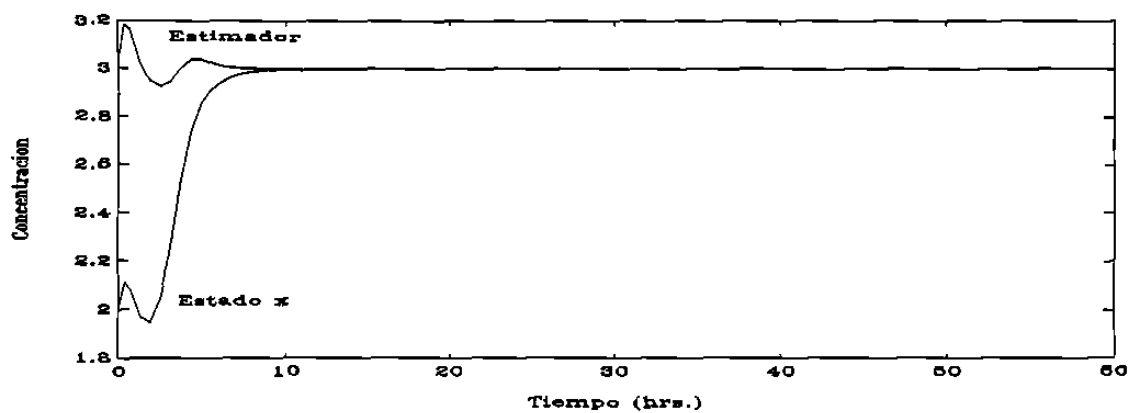


Fig. 2.6 Estimación y control de la biomasa (PI).

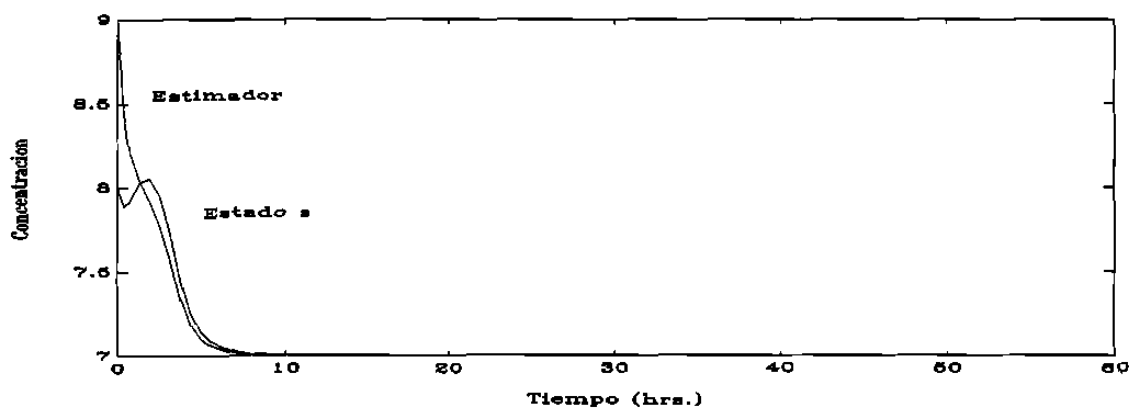


Fig. 2.7 Estimación del substrato (PI).

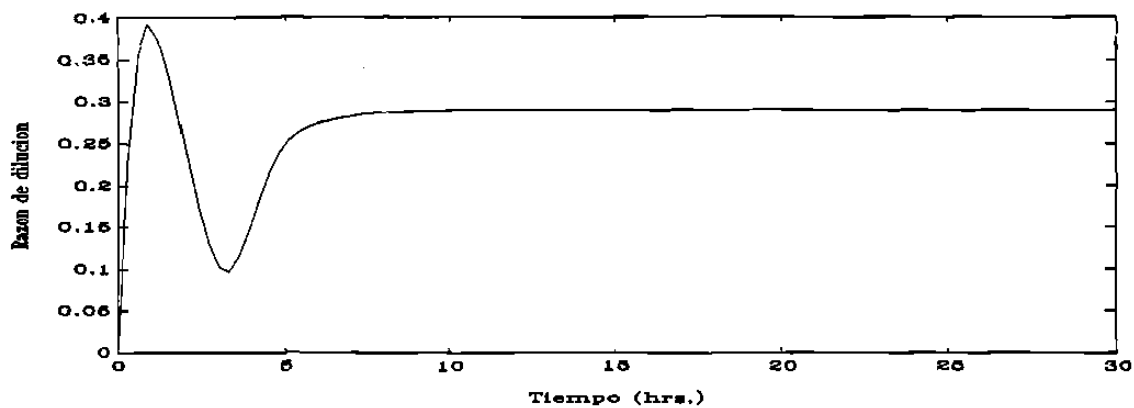


Fig. 2.8 Ley de control (PI).

Los resultados son buenos, solo que este control no garantiza una señal de control positiva, debido a que el error entre el estado y la referencia puede ser negativo, en el siguiente ejemplo se muestra esto mas claramente.

Para una referencia $x_r = 4$, y aplicando el control L/A (2.11) con $v = -3$, bajo las consideraciones y condiciones iniciales anteriores, se tiene:

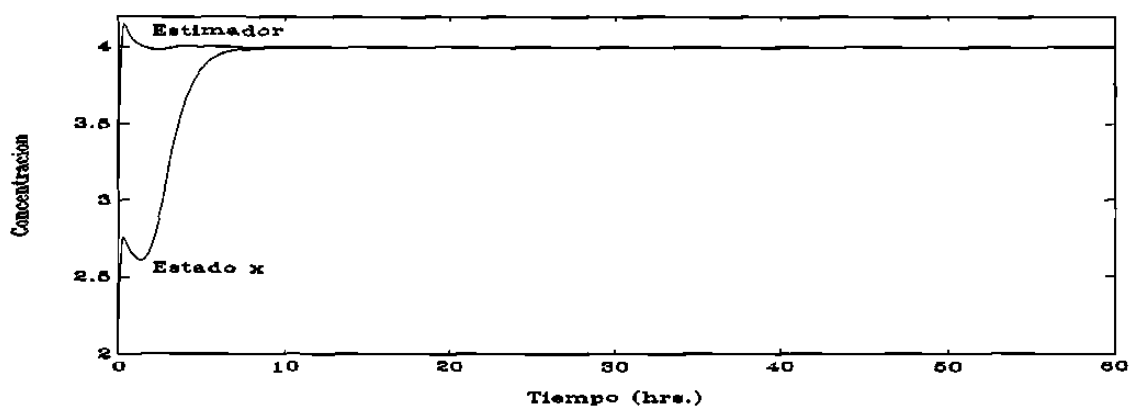


Fig. 2.9 Estimación y control de la biomasa (L/A, $x_r=4$).

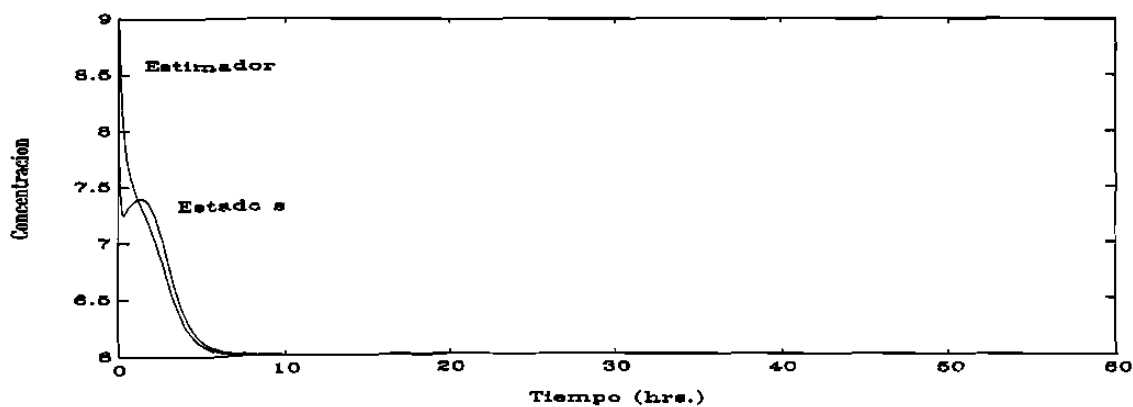


Fig. 2.10 Estimación del sustrato (L/A, $x_r=4$).

Y usando el control PI anterior:

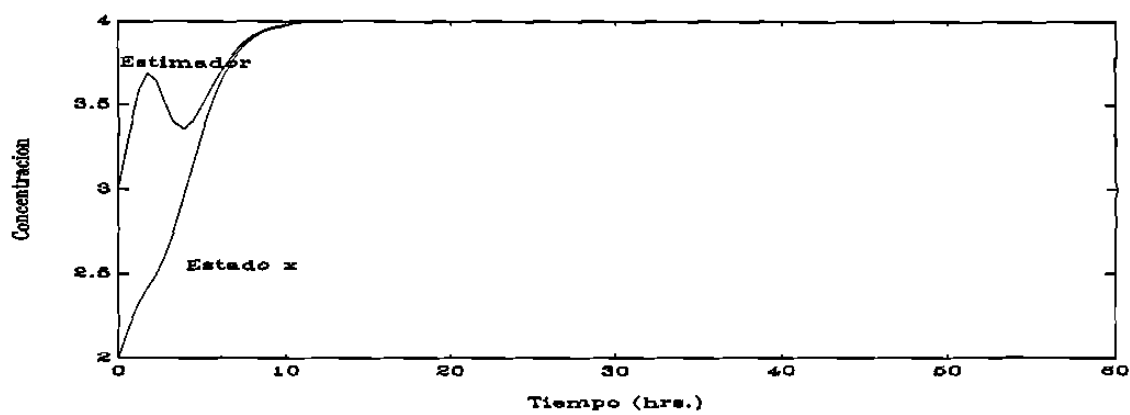


Fig. 2.11 Estimación y control de la biomasa (PI, $x_1=4$).

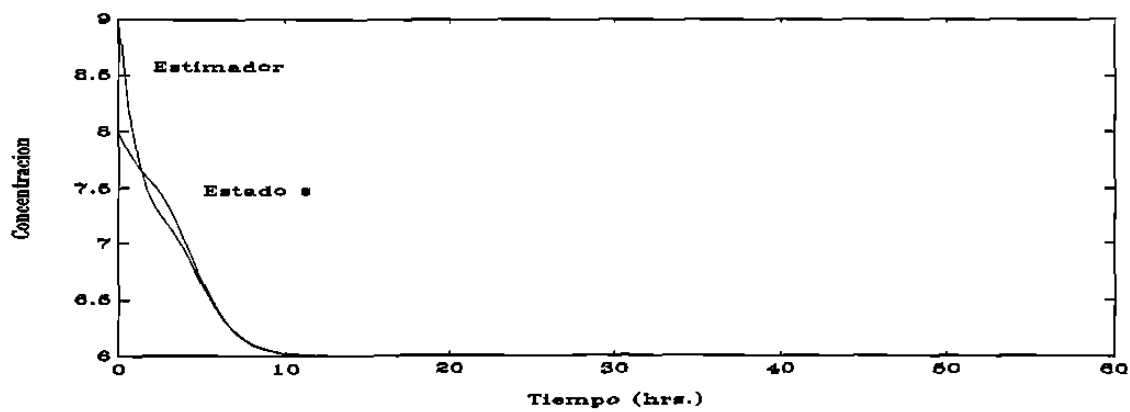


Fig. 2.12 Estimación del sustrato (PI, $x_1=4$).

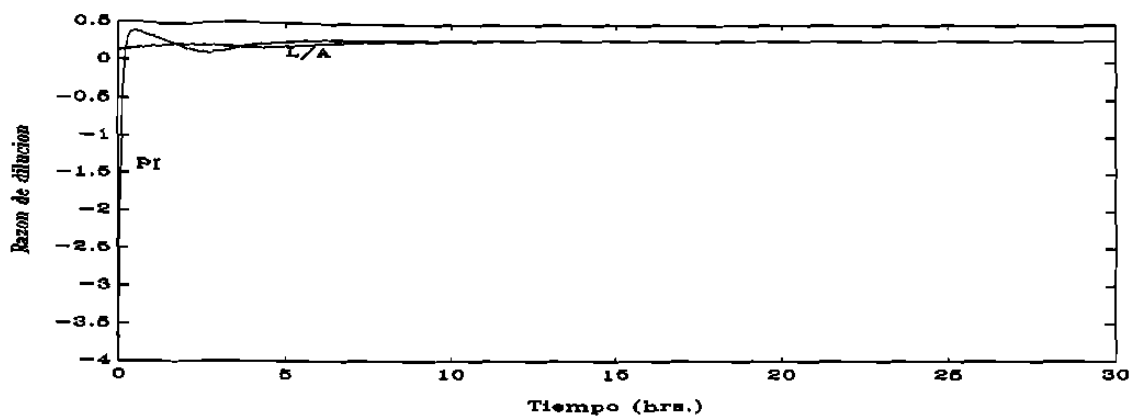


Fig. 2.13 Control L/A vs. PI.

Por lo que se concluye que el control PI no es adecuado (en general) para el proceso, puesto que en un intervalo genera una señal de control negativa. Por otra parte, el controlador L/A es más fácil de sintonizar y su señal de control es más suave que la del PI.

3. PRINCIPIO DE SEPARACION

El principal propósito de construir un observador es el de estimar el vector de estados, el cual no es medible, y emplear este estimado en la ley de control.

$$u(z) = \mu(t) \begin{pmatrix} x_1 \\ z_2 \end{pmatrix}^v \quad v < 0 \quad (\text{control})$$

Por medio del principio de separación, se desea demostrar que el sistema constituido, por el controlador y el observador, resulta estable. Esto se realiza estudiando la estabilidad del siguiente sistema de lazo cerrado ($z_2 = \hat{x}$):

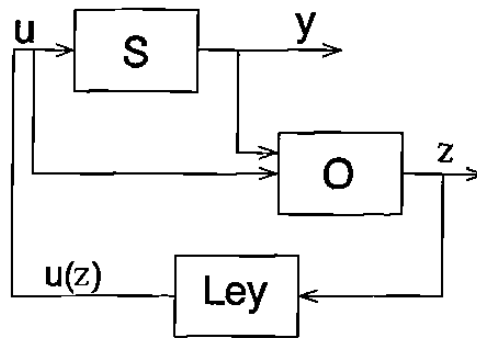


Fig. 3.1 Sistema, observador, ley de control

En otras palabras, se considera el problema de estabilidad del par observador-controlador, representado por el sistema.

$$\Sigma': \begin{cases} \dot{z} = A(u(z),y)z + \phi(u(z),y) - R^{-1}C^T[Cz - y] \\ \dot{\epsilon} = \dot{z} - \dot{\chi} = [A(u(z),y) - R^{-1}C^TC]\epsilon \\ \dot{R} = -\theta R - A^T(u(z),y)R - RA(u(z),y) + C^TC \end{cases}$$

Antes de demostrar la estabilidad del sistema (Σ'), se dará una demostración para un esquema más grande [13]. Considerando el sistema no lineal disipativo (2.4). Suponemos que admite un observador de la forma siguiente:

$$O : \begin{cases} \dot{z}(t) = f(z(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t)g_i(z(t)) + F(k(t),z(t)).(h(z(t)) - y(t)) \\ \dot{k}(t) = P(k(t),u(t),y(t),z(t)) \end{cases}$$

donde $y(t)$ es la salida del sistema (2.4) y la ganancia es una función de k . Todo esto bajo la siguiente hipótesis.

Hipótesis **H1)**

- Existe una $\lambda > 0$ tal que para toda $u \in L_\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m)$:

$$\|z(t) - x(t)\| = \|e(t)\| \leq \mu(k(0), e(0), u) e^{-\lambda t}$$

donde $\mu : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una función continua tal que

$$\lim_{\|e(0)\| \rightarrow 0} \mu(k(0), e(0), u) = 0 \quad \text{donde } \lambda \text{ es una constante estrictamente positiva.}$$

- La ganancia F del término de corrección

$$F: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n \rightarrow M(n, p)$$

$$(k, x) \mapsto F(k, x)$$

es diferenciable y uniformemente acotada en x , localmente uniformemente en k .

- Existe $r > 0$ tal que la solución de $k(t)$ es acotada para toda entrada u tal que

$$\|u\|_{L_\infty} \leq r$$

El sistema completo queda como sigue:

$$G: \left\{ \begin{array}{l} 3.1 \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m u_i(z)g_i(x) \\ \dot{z} = f(z) + \sum_{i=1}^m u_i(z)g_i(z) + F(k,z)(h(z) - h(x)) \end{array} \right. \\ \dot{k}(t) = P(k(t),u(t),y(t),z(t)) \end{array} \right.$$

De lo anterior se desprende el siguiente resultado.

Teorema 3.1 Si bajo la hipótesis H1, suponemos que:

H2.- Para todo compacto K de \mathbb{R}^n , existe un compacto K' ($K \subset K'$), tal que, para toda trayectoria de (G) que inicia en $K \times K \times \mathbb{R}^N$ la componente $z(t)$ permanece en K' para todo $t \geq 0$, en tal caso el conjunto $\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}^N$ es un atractor para toda trayectoria de (G) que inicia en $K \times K \times \mathbb{R}^N$. Además $\{0\} \times \{0\}$ es (3.1) estable en el sentido de Lyapunov (A1.13).

El teorema establece el principio de separación cuando las trayectorias $z(t)$ son acotadas, por lo que, estableceremos una condición práctica que permita obtener la cota de $z(t)$. En efecto, del teorema 2.1, el sistema:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(x(t)) \cdot g_i(x(t)) \quad \text{con } u_i(x(t)) = -r_i(x(t)) L_{g_i} V(x(t)) \quad (3.2)$$

$$\dot{x}(t) = X(x(t))$$

es globalmente asintóticamente estable. Ahora, utilizando el teorema de Massera (A1.16), existe una función de Lyapunov W para (3.2).

Establecemos las siguientes hipótesis:

H3.- Supongamos que alguna de las condiciones siguientes se verifica

- (H3a) La función $V(x)$ verifica: $\exists \lambda_1 > 0; \forall x \in \mathbb{R}^n; \left\| \frac{\partial V}{\partial x}(x) \right\| \leq \lambda_1 (1 + V(x))$

- (H3b) Existe una función de Lyapunov W para (3.2) que satisface

$$\exists \lambda_2 > 0; \forall x \in \mathbb{R}^n \left\| \frac{\partial W}{\partial x}(x) \right\| \leq \lambda_2 (1 + W(x))$$

H4.- $h(x)$ es globalmente Lipschitz.

Entonces podemos establecer:

Lema 3.2

Supongamos que (2.4) verifica (H1), (H3) y (H4). Además, para todo compacto K de \mathbb{R}^n , existe un compacto K' de \mathbb{R}^n tal que para toda trayectoria de (G) que inicia en $K \times K \times \mathbb{R}^N$, $z(t)$ permanece en K' (la prueba de este lema se vera más adelante).

Prueba del teorema 3.1:

Puesto que el sistema (3.2) es asintóticamente estable, por Massera, existe una función de Lyapunov W . Por hipótesis el error de estimación del observador converge a cero, en donde por H2 demostraremos que $x(t)$ converge también a cero.

Considerando una serie decreciente $\{\rho_k\}$ donde $k \geq 0, \rho_k > 0$ tal que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \rho_k = 0$

Tenemos: el conjunto $\lim_{k \rightarrow +\infty} W^{-1}([0, \rho_k]) = \{0\}$

Para demostrar el teorema, es suficiente demostrar que existe una secuencia $\{t_k\}$ donde

$k \geq 0$, $t_k > 0$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = +\infty$, tal que $\forall t \geq t_k, x(t) \in W^{-1}([0, \rho_k])$ por esto,

calculamos:

$$\frac{dW}{dt}(x) = \left\langle \frac{\partial W}{\partial x}(x), f(x) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial W}{\partial x}(x), \sum_{i=1}^m u_i(z(t))g_i(x) \right\rangle$$

$$\frac{dW}{dt}(x) = \left\langle \frac{\partial W}{\partial x}(x), X(x) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial W}{\partial x}(x), \sum_{i=1}^m (u_i(z(t)) - u_i(x)) \cdot g_i(x) \right\rangle$$

entonces obtenemos:

$$\frac{dW}{dt}(x) \leq \left\langle \frac{\partial W}{\partial x}(x), X(x) \right\rangle + \sum_{i=1}^m \left\| \frac{\partial W}{\partial x}(x) \right\| \cdot \|u_i(z) - u_i(x)\| \cdot \|g_i(x)\|$$

puesto que x y z pertenecen a el compacto K' , obtenemos que $\|g_i\|$ es acotada.

$\left\| \frac{\partial W}{\partial x}(x) \right\|$ es igualmente acotada puesto W es una función C^1 . Además,

$\|u_i(z) - u_i(x)\| \leq \alpha_i \|x - z\|$ donde α_i es la constante de Lipshitz de u_i en el compacto.

Con H1 tenemos:

$$\frac{dW}{dt}(x) \leq \left\langle \frac{\partial W}{\partial x}(x), X(x) \right\rangle + \gamma \cdot e^{-\lambda t} \quad \text{con } \gamma, \lambda > 0$$

utilizando de nuevo el hecho que W es una función de Lyapunov:

$$\text{Sup} \left\{ \left\langle \frac{\partial W}{\partial x}(x), X(x) \right\rangle, x \in W^{-1}([\rho_{k+1}, \rho_k]) \right\} = \epsilon_k < 0$$

Ahora suponiendo que la trayectoria $x(t)$ inicia en $x(0) \in W^{-1}$. Existe $t_0 > 0$ tal que

$$\text{sup} \left\{ \frac{dW}{dt}(x(t)), t \geq t_0 \text{ y } x(t) \in W^{-1}([\rho_1, \rho_0]) \right\} \leq \frac{\epsilon_0}{2} < 0$$

lo cual significa que existe una $t_1 \geq t_0$ tal que, para toda $t \geq t_1$, $x(t) \in W^{-1}([0, \rho_1])$. Por recurrencia podemos demostrar que existe una serie $\{t_k\}$ con $k \geq 1$, tal que $\forall t \geq t_k$, $x(t) \in W^{-1}[0, \rho_1]$.

□

Prueba del lema 3.2

Suponiendo que H1 y H4 se cumplen:

Caso 1:

V satisface (H3a)

$$\frac{dV}{dt}(z) = \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}(z), X(z) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}(z), F(K(t), z(t))(h(z) - h(x)) \right\rangle$$

donde, al tomar la norma de los terminos del lado derecho de la ecuación

$$\frac{dV}{dt}(z) \leq \left\| \frac{\partial V}{\partial x}(z) \right\| \cdot \|h(z) - h(x)\| \cdot \|F(K(t), z(t))\|$$

puesto que

$$\left\langle \frac{\partial V}{\partial x}(z), X(z) \right\rangle = L_t V(z) - \sum_{i=1}^m r_i(z) \cdot (L_{g_i} V(z))^2 \leq 0$$

Utilizando (H4), (H1) y (H3), obtenemos:

$$\frac{dV}{dt}(z) \leq \gamma \cdot (1 + V(z)) \cdot e^{-\lambda t} \quad \text{con } \gamma > 0$$

Dado que V es propia, es suficiente probar que $V(z(t))$ es acotada superiormente, entonces de la ecuación anterior, tenemos:

$$\ln V(z) \leq \gamma \int_0^t e^{-\lambda \tau} d\tau + \ln V(z(0))$$

La proposición queda demostrada para el caso 1.

Caso 2:

Existe W que satisface (H3b). Utilizando el mismo calculo que en el caso 1 remarcando que una función de Lyapunov es propia, obtenemos el resultado.

□

De lo anterior, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.3: Sea $u(x)$ la retroalimentación en (2.3). Asumimos que:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|u(x)\| < \infty$$

Entonces (Σ') es globalmente estable.

Prueba:

Para demostrar este resultado, sin pérdida de generalidad, consideraremos que el sistema G está representado por las siguientes ecuaciones.

Modelo del sistema:

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\chi} = A(y)\chi + u(\chi)B(y)\chi + \phi(u(\chi)) \\ y = C\chi \end{cases}$$

donde

$$A(y) = \begin{pmatrix} 0 & -\mu(y) \\ 0 & \mu(y) \end{pmatrix} \quad B(y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \phi(u(\chi)) = \begin{pmatrix} s_0 D \\ 0 \end{pmatrix}$$

y el observador para Σ está dado por:

$$O : \begin{cases} \dot{z} = A(y)z + u(z)B(y)z + \phi(u(z)) - k^{-1}C^T(Cz - y) \\ \dot{k} = -\theta k - (A(y) + u(z)B(y))^T k - k(A(y) + u(z)B(y)) + C^T C \end{cases}$$

Donde k es una ecuación diferencial tipo Riccati, y z es el estimado de χ .

Definiendo el error $\epsilon = z - \chi$, el cual satisface la ecuación diferencial

$$\dot{\epsilon} = \{A(y) + u(z)B(y) - k C^T C\}\epsilon$$

Como se demostró anteriormente, la norma del error dada por la expresión

$$\|\epsilon\| \leq M e^{-\frac{\theta}{2}t},$$

converge exponencialmente a cero.

Al reemplazar en la ley de control, el vector de estado por su estimado, resulta que

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\chi} = A(y)\chi + u(z)B(y)\chi + \phi(u(z)) \\ y = C\chi \end{cases}$$

Donde: $f(\chi) = A(y)\chi$; $g(\chi) = B(y)\chi + B_1$. Con $\phi(u(z)) = B_1 u(z)$.

El modelo queda igual a (2.9), sólo que $u(\chi)$ es reemplazando por $u(\hat{x}) = u(z)$, el sistema en lazo cerrado es:

$$\dot{\chi} = f(\chi) + g(\chi)u(z)$$

Reescribiendo el sistema anterior de la forma

$$\dot{\chi} = f(\chi) + g(\chi)u(\chi) + g(\chi)[u(z) - u(\chi)]$$

y considerando la función de Lyapunov (2.10), se tiene que

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -2DV(\chi) + \frac{\partial V}{\partial x}g(\chi)[u(z) - u(\chi)] \\ &= -2DV(\chi) - 2V(\chi)(u(z) - u(\chi))\end{aligned}$$

Tomando valor absoluto y sustituyendo el control (2.11)

$$\dot{V} \leq -2V(\chi)\left\{D + \frac{\mu(t)}{x_{ref}^v} |z_2^v - x^v|\right\}$$

donde

$$|z_2^v - x^v| \leq |z_2 - x| |P(z_2, x)| \leq |\epsilon_x| |P(z_2, x)|$$

Existe $M > 0$, tal que $|P(z_2, x)| < M$. Por tanto

$$|z_2^v - x^v| \leq |\epsilon_x| M \leq \|\epsilon\| M$$

Finalmente

$$\dot{V} \leq -2V(\chi)\left\{D + \frac{\mu(t)}{x_{ref}^v} \|\epsilon\| M\right\}$$

pero, como se demostró en el teorema (2.3). $\|\epsilon\| \rightarrow 0$, como $t \rightarrow \infty$. Por lo que, la expresión anterior se reduce a:

$$\dot{V} \leq -2DV(x) < 0$$

integrando

$$V(x(t)) \leq V(x(0))e^{-2Dt}$$

Existen β_1, β_2 constantes positivas tales que

$$\beta_1 \|x\|^2 \leq V(x) \leq \beta_2 \|x\|^2$$

luego

$$\beta_1 \|x\|^2 \leq V(x(t)) \leq V(x(0))e^{-2Dt} \leq \beta_2 \|x(0)\|^2 e^{-2Dt}$$

$$\|x\|^2 \leq \frac{\beta_2}{\beta_1} \|x(0)\|^2 e^{-2Dt}$$

$$\|x\| \leq \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} \|x(0)\| e^{-Dt}$$

Por lo tanto, la norma 2 de x converge exponencialmente a cero.

□

4. TRANSFORMACION DE COORDENADAS

En este capítulo se mostrará como un sistema no lineal de una sola entrada y una salida (caso particular de nuestro proceso biológico), puede ser representado en una forma de especial interés (forma normal). Algunas importantes propiedades serán dilucidadas, utilizando un cambio de coordenadas apropiado.

Primero se darán algunas nociones que serán utilizadas en la transformación del modelo.

4.1 LINEARIZACION ENTRADA-SALIDA:

Definición 4.1 Grado relativo: El sistema no lineal una entrada una salida (SISO)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u \in \mathbb{R}$ es la entrada, $y \in \mathbb{R}$ es la salida. Asumimos que $f(x), g(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $h(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$. El sistema se dice tener grado relativo r en x^0 si:

- i) $L_g L_f^k h(x) = 0$ para toda x en una vecindad U de x^0 y para toda $k < r-1$
- ii) $L_g L_f^{r-1} h(x^0) \neq 0$

Nota: El grado relativo, es exactamente igual al número de veces que uno tiene que diferenciar la salida $y(t)$ con respecto al tiempo, hasta que aparezca la entrada explícitamente. Su interpretación en sistemas lineales está dada como la diferencia entre el grado del polinomio del numerador y del denominador de la función de transferencia.

Considerando un sistema con grado relativo $r = n$, la representación en las nuevas coordenadas estaría dada por:

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt} = L_f h(x(t)) = \phi_2(x(t)) = z_2(t)$$

....

$$\frac{dz_{r-1}}{dt} = \frac{\partial \phi_{r-1}}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial (L_f^{r-2} h)}{\partial x} \frac{dx}{dt} = L_f^{r-1} h(x(t)) = \phi_r(x(t)) = z_r(t)$$

Finalmente

$$\frac{dz_r}{dt} = L_f^r h(x(t)) + L_g L_f^{r-1} h(x(t)) u(t)$$

Reemplazando $x(t)$ como una función de $z(t)$ ($x(t) = \Phi^{-1}(z(t))$), la última ecuación

resulta ser de la forma:

$$\frac{dz_r}{dt} = b(z(t)) + a(z(t))u(t)$$

donde:

$$a(z) = L_g L_f^{r-1} h(\Phi^{-1}(z))$$

$$b(z) = L_f^r h(\Phi^{-1}(z))$$

A partir de aquí, es fácil ver que la ley de control que lineariza y controla al sistema transformado es:

$$u = \frac{1}{a(z)} (-b(z) + v) \quad \text{con } a(z) \neq 0, v = \text{nuevo control}$$

En función de las coordenadas del sistema no lineal original, la ley de control resultante es:

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)} (-L_f^r h(x) + v)$$

Esta ley de control junto con el cambio de coordenadas usado, producen un sistema lineal y controlable.

Proposición 4.2: Suponiendo que el sistema tiene grado relativo r en x^0 .

Entonces $r \leq n$. Sea el conjunto:

$$\begin{aligned}\phi_1(x) &= h(x) \\ \phi_2(x) &= L_f h(x) \\ &\dots \\ \phi_r(x) &= L_f^{r-1} h(x)\end{aligned}$$

Si r es estrictamente menor que n , es siempre posible encontrar $n-r$ funciones $\phi_{r+1}(x), \dots, \phi_n(x)$ tales que el mapeo:

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \dots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix}$$

cuya matriz jacobiana es no singular en x^0 . Además, $\Phi(x)$ es una transformación local de coordenadas en una vecindad de x^0 . El valor en x^0 de estas funciones adicionales puede ser seleccionado arbitrariamente. Por otra parte, es siempre posible escoger $\phi_{r+1}(x), \dots, \phi_n(x)$ de tal modo que: $L_g \phi_i(x) = 0 \quad \forall r+1 \leq i \leq n, x$ en una vecindad de x^0 .

Si $\phi_{r+1}(x) \dots \phi_n(x)$ han sido escogidas de manera que:

$$L_g \phi_i(x) = 0 \quad \forall r+1 \leq i \leq n, \forall x \text{ en una vecindad de } x^0$$

entonces

$$\frac{dz_i}{dt} = \frac{\partial \phi_i}{\partial x} (f(x(t)) + g(x(t))u(t)) = L_f \phi_i(x(t)) + L_g \phi_i(x(t))u(t) = L_f \phi_i(x(t))$$

Escogiendo

$$q_i(z) = L_f \phi_i(\Phi^{-1}(z)) \quad \forall r+1 \leq i \leq n$$

lo cual puede ser escrito como

$$\frac{dz_i}{dt} = q_i(z(t))$$

Así, la descripción en espacio de estado del sistema, en las nuevas coordenadas, está dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \dots \\ \dot{z}_{r-1} = z_r \\ \dot{z}_r = b(z) + a(z)u \\ \dot{z}_{r+1} = q_{r+1}(z) \\ \dots \\ \dot{z}_n = q_n(z) \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Definición 4.3 Dinámica cero: Considerando un sistema (4.2) donde r es menor que n , y representando los últimos $n - r$ componentes del vector de estados como:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} z_{r+1} \\ z_{r+2} \\ \dots \\ z_n \end{bmatrix}$$

también representando los primeros r componentes como

$$\xi = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_r \end{bmatrix}$$

se tiene

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \dots \\ \dot{z}_{r-1} = z_r \\ \dot{z}_r = b(\xi, \eta) + a(\xi, \eta)u \\ \dot{\eta} = q(\xi, \eta) \end{cases} \quad (4.3)$$

Si aplicamos una entrada (u), tal que la salida ($y = h(x) = z_1(t)$) sea igual a cero, esto implica que $\xi = 0$ y por lo tanto se tiene:

$$\dot{\eta} = q(0, \eta) \quad (4.4)$$

La dinámica de (4.4), corresponde a las dinámicas descritas en el comportamiento interno del sistema, cuando la entrada y las condiciones iniciales han sido escogidas, de tal manera que la salida permanezca igual a cero. Esta dinámica es llamada, la *dinámica cero* del sistema.

4.2 APLICACION AL PROCESO BIOLÓGICO

El sistema de cultivo será llevado a una forma conocida como "forma normal" mediante una transformación de coordenadas

$$\begin{aligned}\dot{s} &= -\mu(t)\frac{x}{R} + D(s_0 - s) \\ \dot{x} &= \mu(t)x - Dx \\ y &= s\end{aligned}\tag{4.5}$$

en forma matricial

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k\mu(t)x \\ \mu(t)x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_0 - s \\ -x \end{pmatrix} D \\ y &= s\end{aligned}\tag{4.6}$$

Aplicando la definición (4.1) al sistema

$$\begin{aligned}L_f h(x) &= \frac{\partial h(x)}{\partial x} f = (1 \ 0) \begin{pmatrix} -k\mu(t)x \\ \mu(t)x \end{pmatrix} = -k\mu(t)x \\ L_g L_f h(x) &= -\frac{\partial k\mu(t)x}{\partial x} g = (0 \ -k\mu(t)) \begin{pmatrix} s_0 - s \\ -x \end{pmatrix} = k\mu(t)x\end{aligned}$$

luego, el grado relativo es uno.

Si definimos:

$$z_1 = \phi_1(x) = h(x) = s$$

Se buscará una función $\phi_2(x)$ tal que

$$L_g \phi_2 = \frac{\partial \phi_2(x)}{\partial x} g = 0 \quad \text{donde } \frac{\partial \Phi}{\partial x} \text{ sea no singular.}$$

Para esto, se propone la siguiente función:

$$z_2 = \phi_2(x) = \frac{s_0 - s}{x}$$

$$L_g \phi_2 = \frac{\partial \phi_2}{\partial s}(s_0 - s) + \frac{\partial \phi_2}{\partial x}(-x)$$

$$L_g \phi_2 = -\frac{1}{x}(s_0 - s) + \frac{1}{x}(s_0 - s) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{x} & -\frac{(s_0 - s)}{x^2} \end{bmatrix}$$

es no singular para $s_0 \neq s$.

Reescribiendo, en las nuevas coordenadas al sistema, éste resulta ser:

$$\dot{z}_1 = \dot{s} = -k\mu(z_1) \left[\frac{s_0 - z_1}{z_2} \right] + (s_0 - z_1)D$$

$$\dot{z}_2 = \frac{(-\dot{s})}{x} - \frac{(s_0 - s)\dot{x}}{x^2} = k\mu(z_1) - z_2\mu(z_1)$$

Aplicando un control linealizante de la forma

$$D = \frac{k\mu(z_1)}{z_2} + \frac{v}{(s_0 - z_1)} \quad \text{donde } v \text{ es la nueva entrada}$$

Finalmente, el sistema resulta de la forma:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = v \\ \dot{z}_2 = (k - z_2)\mu(z_1) \\ y = z_1 \end{cases}$$

y el control v , del sistema transformado será

$$v = -pz_1$$

De este modo, la variable a controlar es z_1 , z_2 representa la llamada dinámica interna del proceso, la cual se requiere que sea estable. Apartir de la dinámica cero del sistema, se estudia la estabilidad en z_2 .

Por tanto, si

$$y = 0 \Rightarrow z_1 = 0 \Rightarrow \mu(z_1) = 0$$

$$\dot{z}_2 = 0 \Rightarrow z_2 = \text{cte.}$$

\therefore la dinámica cero es estable

El control en coordenadas originales resulta ser:

$$D = \frac{k\mu(t)}{(s_0 - s)x} + \frac{p(s_{\text{ref}} - s)}{s_0 - s} \quad (4.7)$$

Este control es capaz de llevar el substrato a un valor de referencia (s_{ref}) dado, siempre y cuando se conozca el valor de la biomasa.

Si la biomasa es estimada el control es de la forma:

$$D = \frac{k\mu(t)}{(s_0 - s)\hat{x}} + \frac{p(s_{\text{ref}} - s)}{s_0 - s} \quad (4.8)$$

Ahora considerando en (4.6) que y (salida) = x (biomasa), y que la transformación es igual a la anterior solo que $z_1 = x$, se tiene:

$$\dot{z}_1 = \mu(t)z_1 - Dz_1$$

$$\dot{z}_2 = (k - z_2)\mu(t)$$

La dinámica cero resulta estable, y a diferencia de lo anterior se controla la biomasa (z_1).

4.3 RESULTADOS DE LAS SIMULACIONES:

En esta sección se presentan los resultados para una referencia en el sustrato ($s_{ref} = 4$) y una ganancia proporcional ($p = 0.5$).

En estas gráficas, se suponen conocidos los valores de x y s , y por tanto el control aplicado esta dado por la ecuación (4.7).

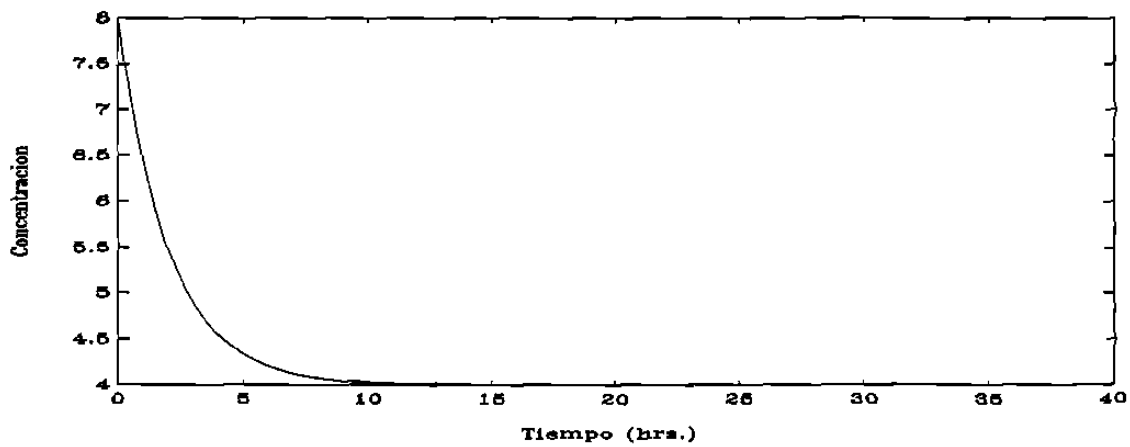


Fig. 4.1 Control de sustrato por (4.7)

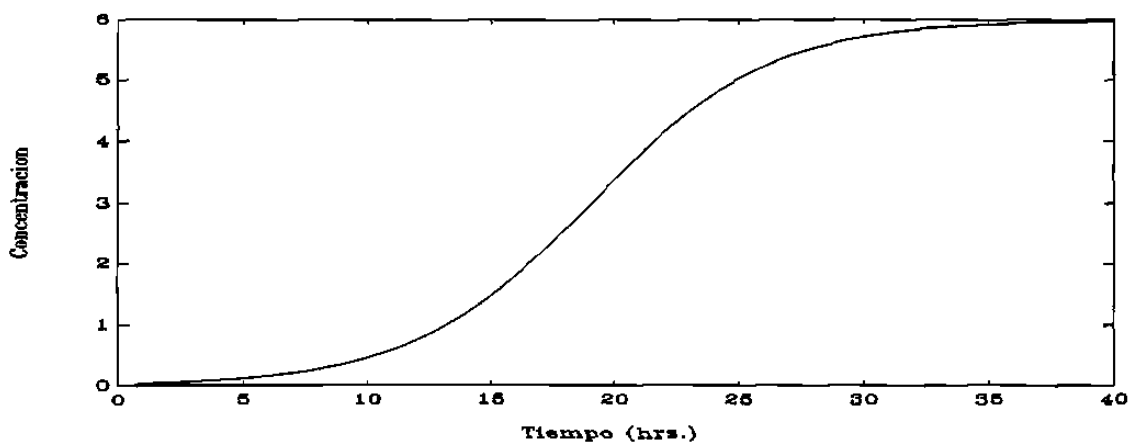


Fig. 4.2 Biomasa medida

Ahora bien, si el valor de la biomasa no es conocido y además se mide el sustrato, se utilizará el control dado por (4.8). De los resultados obtenidos en el capítulo 3, el sistema resultó estable.

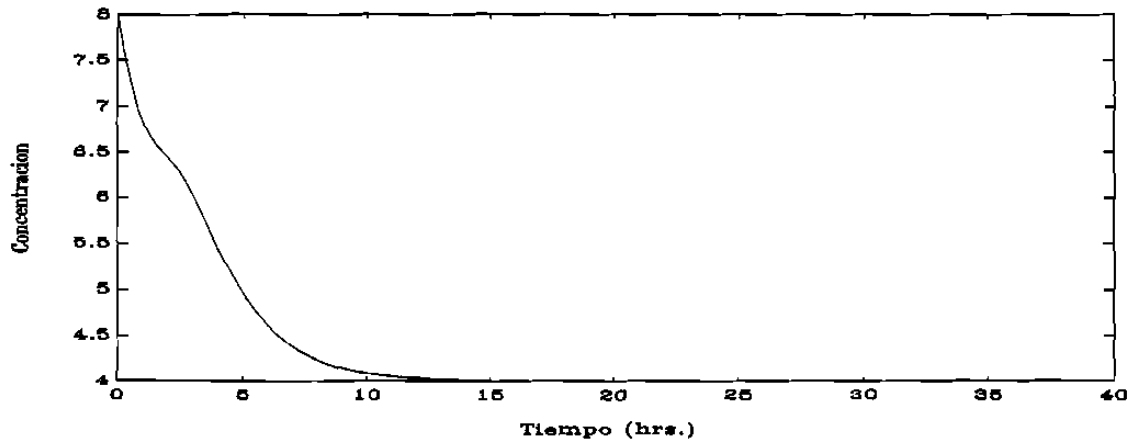


Fig. 4.3 Control del sustrato por (4.8)

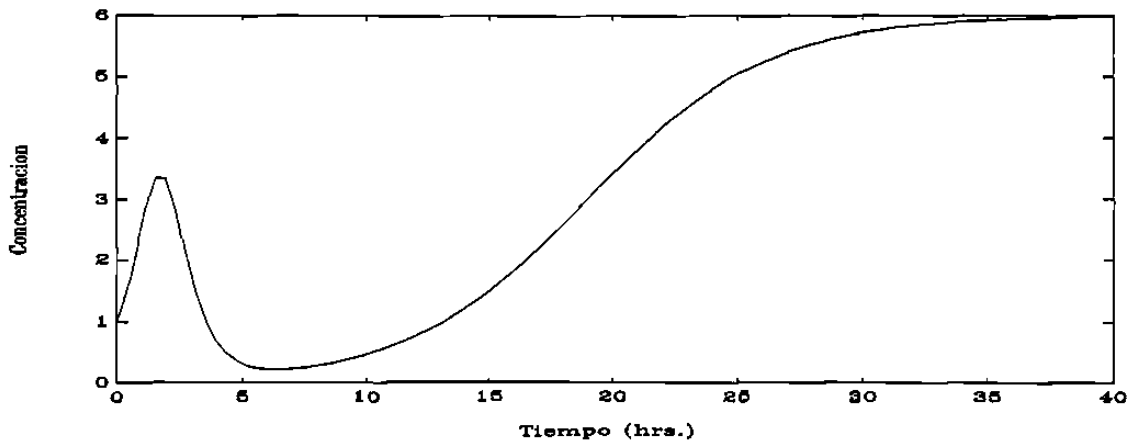


Fig. 4.4 Biomasa estimada

5. IDENTIFICACION

En los capítulos anteriores se supuso que la razón de crecimiento específico ($\mu(t)$), obedecía la ley de Monod, la cual esta en función del substrato y dos constantes:

$$\mu(t) = \mu^* \frac{s(t)}{k_m + s(t)}$$

μ^* la máximo razón de crecimiento y k_m el parámetro Michaelis-Menten, estos términos se suponían conocidos.

Existen registrados más de cincuenta modelos de $\mu(t)$ que toman en cuenta todos los factores que influyen en el crecimiento microbiano. Es sabido que μ es una función compleja de muchos factores químico-físicos y biológicos, como la concentración de biomasa, concentración de substrato, de pH, temperatura, etc.

Así el escoger una adecuada descripción analítica de μ es crítica en representaciones en espacio de estado de aplicaciones específicas.

Aquí se utiliza un algoritmo adaptable para el seguimiento de la razón de crecimiento ($\mu(t)$), a partir de valores de entrada y salida, y se propone una ley de control para la biomasa. Se considera que $\mu(t)$ es un parámetro desconocido variable en el tiempo. Además se asume que solo una de las variables de estado es medible, y que esta medición podría estar contaminada por ruido.

5.1 ESTIMACIÓN EN LINEA DE $\mu(t)$

Suposiciones básicas:

- A1- La razón de crecimiento específica $\mu(t)$ es positiva y acotada, la máxima razón de crecimiento es desconocida:

$$0 \leq \mu(t) \leq \mu^*$$

- A2- Las entradas $D(t)$ (razón de dilución) y s_0 son positivas y acotadas:

$$0 < D(t) \leq D_{\max}, \quad 0 < s_0(t) \leq s_{\max}$$

- A3- No existe crecimiento sin sustrato:

$$\mu(t) = 0 \quad \text{cuando} \quad s(t) = 0$$

- A4- La derivada en el tiempo de $\mu(t)$ es acotada:

$$\left| \frac{d\mu(t)}{dt} \right| \leq M_1$$

5.1.1 A PARTIR DE UNA MEDICIÓN RUIDOSA DE BIOMASA

Aquí se asume que la medición ruidosa $x_m(t)$ de la concentración de la biomasa es medida en línea:

$$x_m(t) = x(t) + \epsilon(t)$$

donde ϵ es el ruido medición. Entonces, el siguiente algoritmo puede ser usado para estimar $\mu(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}(t)}{dt} &= [\hat{\mu}(t) - D(t) + c_1(x_m(t) - \hat{x}(t))]x_m(t) \\ \frac{d\hat{\mu}(t)}{dt} &= c_2 x_m(t)[x_m(t) - \hat{x}(t)] \end{aligned} \tag{5.1}$$

donde $c_1, c_2 > 0$, son los parámetros de diseño .

Resultado de las simulaciones:

La ley de control considerada es semejante a la obtenida en la sección 2.2.2, es decir

$$D = \mu(t) \left(\frac{x}{x_{ref}} \right)^{\gamma} \quad \gamma > 0, \mu(t) > 0$$

$\mu(t)$ tiene el siguiente comportamiento:

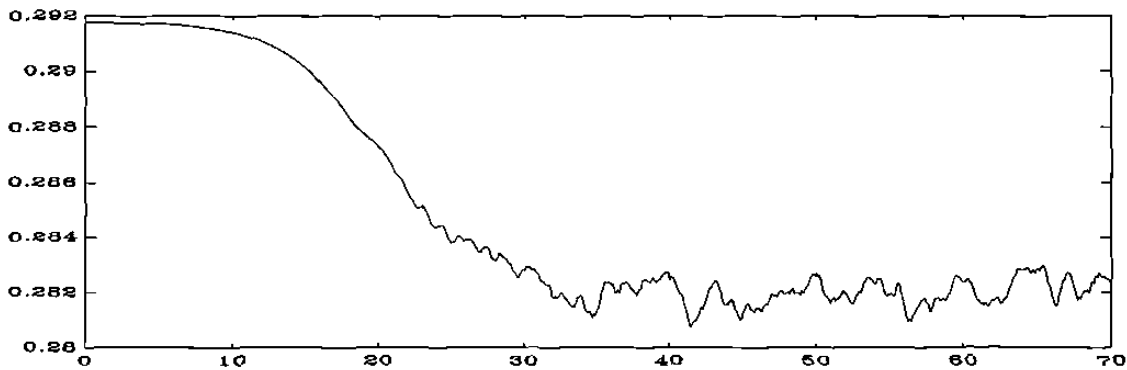


Fig. 5.1 Razón de crecimiento específico

pero, como se mencionó anteriormente, $\mu(t)$ es desconocida, entonces para resolver este problema, μ será estimada usando la ley adaptativa (5.1). Además, la medición de la biomasa contiene un ruido aditivo x_m . La ley de control resulta de la siguiente forma

$$D = \hat{\mu}(t) \left(\frac{x_m}{x_{ref}} \right)^{\gamma} \quad \gamma > 0, \hat{\mu}(t) > 0$$

Para una referencia de $x_{ref} = 5$. Se aprecia en la Fig. 5.3, como la razón de crecimiento específico estimada alcanza su valor real dentro de un cierto margen; en la Fig. 5.2 la biomasa oscila alrededor de la referencia.

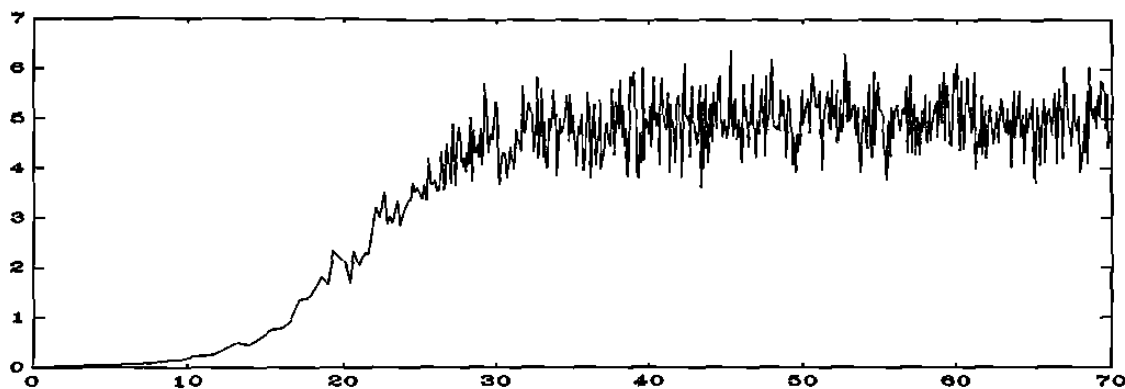


Fig. 5.2 Medición ruidosa de la biomasa

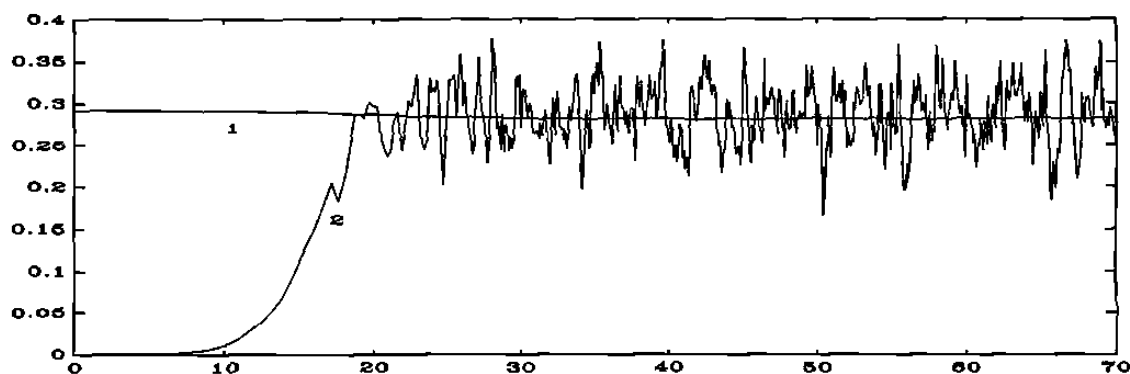


Fig. 5.3 Razón de crecimiento (1) vs. estimada (2)

5.1.2 A PARTIR DE UNA MEDICIÓN RUIDOSA DE SUBSTRATO

Se supone que la medición ruidosa $s_m(t)$ de la concentración del sustrato está disponible en línea:

$$s_m(t) = s(t) + \epsilon$$

La idea básica para la obtención del algoritmo de estimación es que, en el crecimiento microbiano, la razón de producción de biomasa es proporcional al consumo del

substrato. Así, a partir de una medición en línea de $s(t)$ puede ser proporcionado una *seudo* medición de $k_1x(t)$ sin tener conocimiento de $\mu(t)$. Esta *seudo* medición es utilizada para estimar $\mu(t)$ por un algoritmo similar al caso anterior.

Definiendo la variable auxiliar $Z(t)$ por:

$$\frac{dZ(t)}{dt} = D(t)[s_0 - Z(t)]$$

con $0 \leq Z(t) \leq \infty$, arbitrarias y para una $Z(0)$ dada se puede calcular $Z(t)$. Entonces una *seudo* medición en línea de $Y(t) \triangleq k_1x(t)$ es dada por:

$$Y_m(t) = Z(t) - s_m(t)$$

Finalmente la estimación adaptativa de $\mu(t)$, se obtiene de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{Y}(t)}{dt} &= \left[\hat{\mu}(t) - D(t) + c_1(Y_m(t) - \hat{Y}(t)) \right] Y_m(t) \\ \frac{d\hat{\mu}(t)}{dt} &= c_2 Y_m(t) [Y_m(t) - \hat{Y}(t)] \end{aligned} \quad (5.2)$$

Un análisis de estabilidad, sobre este resultado se encuentra en [15].

Resultado de las simulaciones:

Tomando en cuenta las consideraciones anteriores, la ley de control resulta de la forma

$$D = \hat{\mu}(t) \left(\frac{\hat{x}}{x_{ref}} \right)^v \quad v > 0, \hat{\mu}(t) > 0$$

donde $\hat{\mu}(t)$ obtenida por una ley adaptable y \hat{x} es una variable estimada.

Para una referencia de $x_{ref} = 5$, los resultados son los siguientes:

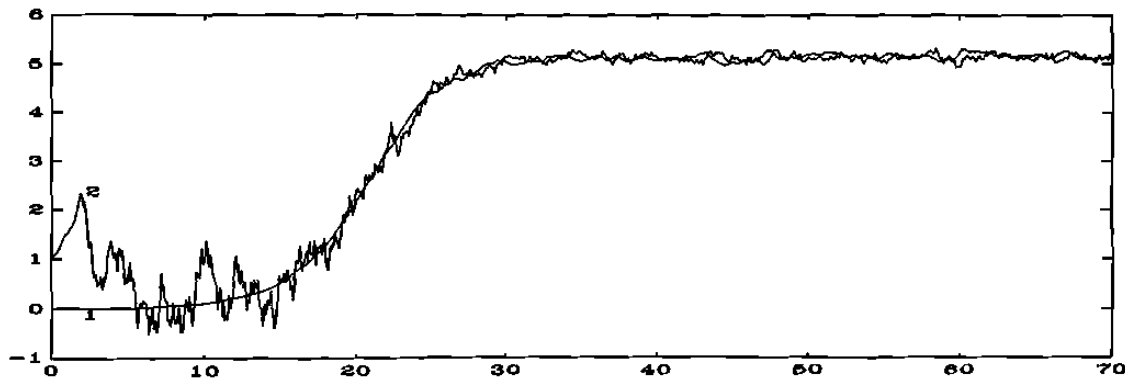


Fig. 5.4 Biomasa x (1) vs. biomasa estimada (2).

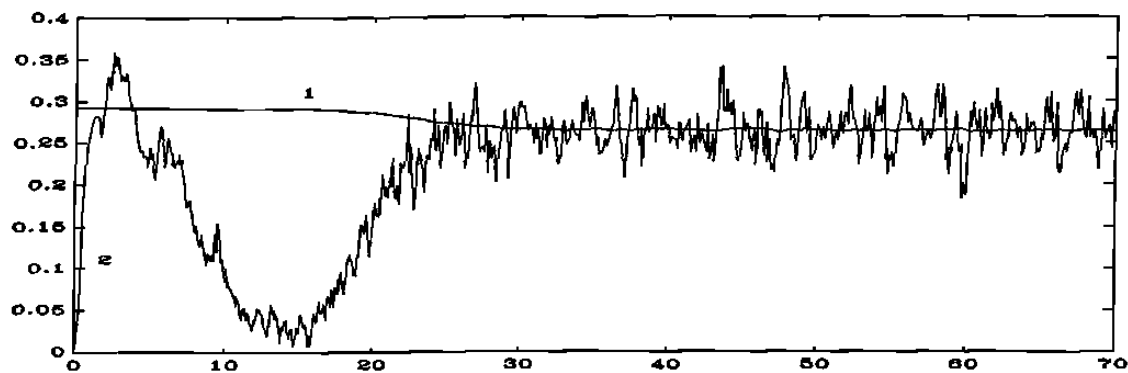


Fig. 5.5 Razón de crecimiento μ (1) vs. estimada (2).

En la figura 5.4, se puede apreciar que, con una medición ruidosa del sustrato, el desarrollo de la biomasa se ve afectado. Puesto que esta medición influye en la estimación de la biomasa, y de la razón de crecimiento, ambos parámetros son usados en la ley de control; en la figura 2.4, la ley de control solo es afectada por la medición ruidosa en la estimación de la biomasa por lo que el resultado es mejor que en la figura 5.4.

5.2 IDENTIFICACIÓN DE PARÁMETROS

Se desea conocer los valores de μ^* , k_m a partir de valores experimentales de $\mu(t)$ y de $s(t)$. La identificación se realiza por medio de mínimos cuadrados.

Sean una matriz $A_{(p \times q)}$, $y_{(p \times 1)}$ un vector, se necesita encontrar un vector $x_{(q \times 1)}$ tal que $Ax \approx y$. Cuando se quiere determinar a x , haciendo $\|Ax - y\|_2$ tan pequeño como sea posible, se tiene un problema de mínimos cuadrados.

Resulta, que el valor de x el cual resuelve el problema de mínimos cuadrados está dado por:

$$x = A^+y$$

En donde A^+ es la pseudoinversa de A , y el calculo se puede realizar mediante la descomposición en valores singulares [4].

La principal hipótesis usada en este desarrollo es que la razón de crecimiento obedece la ley de Monod; a partir de la ley de Monod y el algoritmo de identificación (mínimos cuadrados), se obtendrán los parámetros K_m , μ^* que intervienen.

Ley de Monod:

$$\mu(t) = \mu^* \frac{s(t)}{k_m + s(t)}$$

como $\mu(t)$, $s(t)$ son medibles, se desea estimar μ^* y k_m entonces:

$$\mu(t)s(t) = -\mu(t)k_m + \mu^*s(t)$$

seleccionando

$$t = t_k \quad \text{con } k = 1, \dots, n$$

en forma matricial queda

$$\begin{pmatrix} \mu(t_1)s(t_1) \\ \mu(t_2)s(t_2) \\ \dots \\ \dots \\ \mu(t_n)s(t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu(t_1) & s(t_1) \\ -\mu(t_2) & s(t_2) \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ -\mu(t_n) & s(t_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_m \\ \mu^* \end{pmatrix}$$

Usando en el Matlab la instrucción *pinv*, la cual usa la teoría de mínimos cuadrados y descomposición en valores singulares se obtiene μ^* y k_m .

6. SISTEMA EN CASCADA

En los procesos de fermentación de microorganismos recombinantes (A2.1) a gran escala, la estabilidad de ciertos recombinantes es uno de los problemas más importantes; la presencia de ciertos plasmidos tienen un efecto deteriorante en el crecimiento de la célula huésped, especialmente en el caso de altas expresiones de plasmidos (A2.5). El crecimiento de las células recombinantes en un medio selectivo podría permitir el mantenimiento estable de la población celular con plasmidos, por la inhibición del crecimiento de las células libres de estos, pero con frecuencia el uso de una presión selectiva es impráctica en una producción a escala industrial. Algunos métodos de operación de bioreactores han sido propuestos para maximizar la concentración del producto del gen clonado (A2.2) y/o la productividad de un bioreactor para un cultivo recombinante inestable.

Una estrategia para tratar con las células recombinantes que son inestables, debido a un incremento en la productividad del gen clonado, es separar la etapa de crecimiento de la etapa de producción, controlando los niveles de expresión del gen clonado usando un "switch" genético. Un sistema de fermentación en dos etapas en combinación con un sistema gen "switch" sensible a temperatura, ofrece la posibilidad de minimizar los problemas de inestabilidad debido a las altas expresiones de producto recombinante en producción continua. El uso de un promotor (A2.3) termo inducible facilita la separación de la etapa de crecimiento de la etapa de producción, por un simple ajuste de la temperatura del cultivo.

En este capítulo se abordará, el modelo matemático para las dos etapas, en base al artículo [17]; después se mostrarán las leyes de control usadas en cada etapa, después se hablará del observador para finalmente presentar los resultados de las simulaciones.

6.1 MODELO DEL PROCESO

Considerando el modelo matemático, que representa un proceso constituido por un sistema "gen huésped" en un proceso de cultivo continuo en dos etapas. La primera etapa representa el crecimiento:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1^+ = -D_1 x_1^+ + \mu_1^+ x_1^+ (1 - \theta_1) \\ \dot{x}_1^- = -D_1 x_1^- + \mu_1^+ x_1^+ \theta_1 + \mu_1^- x_1^- \\ \dot{s}_1 = D_1 (s_0 - s_1) - \frac{1}{Y_x} (\mu_1^+ x_1^+ + \mu_1^- x_1^-) - m_1 (x_1^+ + x_1^-) \end{array} \right. \quad (6.1)$$

y la segunda etapa, es la que corresponde a la producción:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_2^+ = -D_2 x_2^+ + D_{12} x_1^+ + \mu_2^+ x_2^+ (1 - \theta_2) \\ \dot{x}_2^- = -D_2 x_2^- + D_{12} x_1^- + \mu_2^+ x_2^+ \theta_2 + \mu_2^- x_2^- \\ \dot{p} = -D_2 p + k_0 \varepsilon G_p (\bar{\mu}_2^+ + b) x_2^+ - k_{-p} p \\ \dot{s}_2 = -D_2 s_2 + D_{12} s_1 + D_{02} s_0 - \frac{1}{Y_x} (\mu_2^+ x_2^+ + \mu_2^- x_2^-) - m_2 (x_2^+ + x_2^-) - \frac{dp}{Y_p dt} \end{array} \right. \quad (6.2)$$

donde:

x_1^+ .- biomasa 1; x_1^- .- biomasa 2; x_2^+ .- biomasa 3; x_2^- .- biomasa 4; s_1, s_2 .- sustrato; D_1, D_2, D_{12} .- razón de dilución; μ^+, μ^- .- razón de crecimiento específico; θ_1, θ_2 .- razón de segregación relativa; p .- razón de producción; s_0 .- alimento en el sustrato; Y_x, Y_p, m .- coeficiente de producción celular; ε, G_p, k_{-p} .- eficiencia de la expresión genética; k_0, b .- constantes.

Si se supone que la salida disponible en cada subsistema es el substrato y que el valor de m se desprecia. En la teoría de control s , x , p representan componentes del vector de estados, D es el control, s la salida; así el sistema 2.1 y 2.2 en forma matricial puede ser escrito como:

$$\dot{\chi}_1 = \begin{pmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{x}_1^+ \\ \dot{x}_1^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D_1 & \frac{-\mu_1^+}{Y_x} & \frac{-\mu_1^-}{Y_x} \\ 0 & -D_1 + \mu_1^+(1 - \theta_1) & 0 \\ 0 & \mu_1^+ \theta_1 & \mu_1^- - D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ x_1^+ \\ x_1^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} D_1 \quad (6.3)$$

$$y_1 = s_1$$

$$\dot{\chi}_2 = \begin{pmatrix} \dot{s}_2 \\ \dot{x}_2^+ \\ \dot{x}_2^- \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D_2 & \frac{-k_0 \epsilon G_p v}{Y_p} - \frac{\mu_2^+}{Y_x} & \frac{-\mu_2^-}{Y_x} & \frac{D_2 + k_{-p}}{Y_p} \\ 0 & -D_2 + \mu_2^+(1 - \theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2^+ \theta_2 & -D_2 + \mu_2^- & 0 \\ 0 & k_0 \epsilon G_p v & 0 & -D_2 - k_{-p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_2 \\ x_2^+ \\ x_2^- \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_{12} s_1 + D_{02} s_0 \\ D_{12} x_1^+ \\ D_{12} x_1^- \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

$$y_2 = s_2$$

Note que el sistema, pertenece a la clase de sistemas no lineales descritos por las siguientes ecuaciones:

$$\Sigma_{11} : \begin{cases} \dot{\chi}_1 = A_1(u_1, y_1) \chi_1 + \phi_1(u_1) \\ y_1 = C_1 \chi_1 \end{cases} \quad (6.5)$$

$$\Sigma_{22} : \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2(u_1, u_2, y_1, y_2)x_2 + B_2(u_1, y_1)x_1 + \phi_2(u_1, y_1, u_2, y_2) \\ y_2 = C_2 x_2 \end{cases} \quad (6.6)$$

Las propiedades concernientes a observabilidad de estos sistemas, se presentaran en la sección 6.3, las cuales fueron utilizadas para diseñar un observador.

6.2 CONTROL

Antes de diseñar la ley de control para el proceso biológico, primero se probará la controlabilidad de éste, para posteriormente en la siguiente sección (6.2.2), proponer la ley de control.

Las consideraciones hechas son: $\theta_1 \approx 0$, $m_{1,2} = 0$.

6.2.1 CONTROLABILIDAD

Para checar controlabilidad se siguen los pasos sugeridos por [24] (sec.7.3.). El sistema (6.3) es representado de la forma siguiente: $\dot{x} = f(x) + g(x)u$.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \mu_1^+ x_1^+ \\ \mu_1^- x_1^- \\ \frac{-1}{Y_{\mu}} (\mu_1^+ x_1^+ + \mu_1^- x_1^-) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1^+ \\ -x_1^- \\ s_0 - s_1 \end{pmatrix} D_1$$

Calculando los corchetes de Lie ($ad_f^0 g = g$, $ad_f^1 g = [f, g]$, $ad_f^2 g = [f, [f, g]]$), se verifica la controlabilidad del sistema.

De este modo, obtenemos que:

$$\Delta_c = \begin{pmatrix} -x_1^+ & \frac{k_1 \mu_+^* (s_0 - s_1) x_1^+}{(k_1 + s_1)^2} & \frac{k_1 \mu_+^* x_1^+ (s_1^2 - 2s_0 s_1 - k_1 s_0) (\mu_+^* x_1^+ + \mu_-^* x_1^-)}{(k_1 + s_1)^4 Y_{x1}} \\ -x_1^- & \frac{k_1 \mu_-^* (s_0 - s_1) x_1^-}{(k_1 + s_1)^2} & \frac{k_1 \mu_-^* x_1^- (s_1^2 - 2s_0 s_1 - k_1 s_0) (\mu_+^* x_1^+ + \mu_-^* x_1^-)}{(k_1 + s_1)^4 Y_{x1}} \\ s_0 - s_1 & \frac{-k_1 (s_0 - s_1) (\mu_+^* x_1^+ + \mu_-^* x_1^-)}{(k_1 + s_1)^2 Y_{x1}} & \frac{-k_1 (s_1^2 - k_1 s_0 - 2s_0 s_1) (\mu_+^* x_1^+ + \mu_-^* x_1^-)^2}{(k_1 + s_1)^4 Y_{x1}^2} \end{pmatrix}$$

Como las columnas dos y tres de Δ_c (Δ_c es la matriz de controlabilidad) son linealmente dependientes, entonces Δ_c es de rango dos. Por lo tanto el sistema (6.3) no es controlable (para el sistema 6.4 el resultado es semejante). Pero se mostrara como las variables x_1^+ , x_2^+ pueden ser llevadas a una referencia.

6.2.2 LEY DE CONTROL

En el capítulo 2, la ley de control usada fué: $u = u_r \left(\frac{x}{x_r} \right)^k$, el valor de u_r fue calculado haciendo $x = x_r$ y buscando el punto de equilibrio del sistema:

$$\dot{x} = (\mu(t) - D)x$$

Como en este proceso, vamos a aplicar la ley de control obtenida en el capítulo 2, teniendo que encontrar el valor de u_r para cada etapa.

Primera etapa:

$$\dot{x}_1^+ = -D_1 x_1^+ + \mu_1^+ x_1^+ (1 - \theta_1)$$

pero como el valor de la segregación (θ_1) es casi cero se tiene que $u_{r1} = \mu_1^+$ para el punto de equilibrio $x_{r1} = x_1^+$. Esto cambia en la segunda etapa, haciendo a $x_{r2} = x_2^+$ se busca el punto de equilibrio del segundo subsistema, se tiene:

$$\dot{x}_2^+ = -D_2 x_2^+ + D_{12} x_1^+ + \mu_2^+ x_2^+ (1 - \theta_2) = 0$$

$$x_{r2} (\mu_2^+ (1 - \theta_2) - D_2) + D_{12} x_1^+ = 0$$

Considerando que $D_2 = D_{02} + D_{12}$, y que el control D_{02} es de la forma

$$D_{02} = u_{r2} \left(\frac{x_2^+}{x_{r2}} \right)^k$$

evaluando en el punto de equilibrio $x_{r2} = x_2^+$ y sustituyendo el control

$$x_{r2} (-u_{r2} - D_{12} + \mu_2^+ (1 - \theta_2)) + D_{12} x_{r1} = 0$$

esto implica

$$u_{r2} = D_{12} \frac{x_{r1}}{x_{r2}} + \mu_2^+ (1 - \theta_2) - D_{12}$$

Proposición 3.1: Considere los sistemas (6.3, 6.4), y las leyes de control siguientes

$$D_1 = \mu_1^+(t) \left(\frac{x_{r1}}{x_1^+} \right)^{v1} \quad \text{donde } v1 < 0, \mu_1^+(t) > 0$$

$$D_2 = u_{r2} \left(\frac{x_{r2}}{x_2^+} \right)^{v2} \quad \text{donde } v2 < 0, u_{r2} > 0$$

Entonces, los errores de seguimiento $e_2^1 = x_1^+ - x_{r1}$ para (6.3), y $e_2^2 = x_2^+ - x_{r2}$ para (6.4), convergen exponencialmente hacia cero.

Prueba: Seleccionando un cambio de variable adecuado para (6.3) tenemos que:

$$\zeta_1 = s_1 - s_0 + \frac{x_n}{Y_n}$$

$$\zeta_2 = x_1^+$$

$$\zeta_3 = x_1^-$$

Derivando con respecto al tiempo

$$\dot{\zeta}_1 = \dot{s}_1 = D_1(s_0 - s_1) - \frac{1}{Y_n}(\mu_1^+ x_1^+ + \mu_1^- x_1^-)$$

$$\dot{\zeta}_2 = \dot{x}_1^+ = -D_1 x_1^+ + \mu_1^+ x_1^+$$

$$\dot{\zeta}_3 = \dot{x}_1^- = -D_1 x_1^- + \mu_1^- x_1^-$$

Definiendo el error de seguimiento como

$$e_1 = \zeta_1 = s_1 - s_0 + \frac{x_n}{Y_n}$$

$$e_2 = \zeta_2 - x_r = x_1^+ - x_r$$

$$e_3 = \zeta_3 = x_1^-$$

Resulta que

$$\dot{e}_1 = -D_1(e_1 - \frac{x_n}{Y_n}) - \frac{1}{Y_n}[\mu_1^+(e_2 + x_{r1}) + \mu_1^- e_3] \quad (6.7a)$$

$$\dot{e}_2 = -D_1(e_2 + x_{r1}) + \mu_1^+(e_2 + x_{r1}) \quad (6.7b)$$

$$\dot{e}_3 = (\mu_1^- - D_1)e_3 \quad (6.7c)$$

De manera que control resulta ser de la forma

$$D_1 = \mu_1^+ \left(\frac{e_2 + x_{r1}}{x_n} \right)$$

Como la variable a controlar es $x_1^+ = x_{r1}$, por tanto $e_2 = 0$, $D_1 = \mu_1^+$, y $\dot{e}_2 = 0$.

Sustituyendo el control D_1 , la ecuación (6.7b), se verifica que

$$0 = -\mu_1^+ x_{r1} + \mu_1^+ x_{r1}$$

Para (6.7c), con $e_2 = 0$ se tiene

$$\dot{e}_3 = (\mu_1^- - \mu_1^+) e_3$$

donde $\mu_1^- > \mu_1^+$. Entonces, $e_3 \rightarrow +\infty$ cuando $t \rightarrow \infty$, esto significa que $x_1 \rightarrow +\infty$.

Para \dot{e}_1 , con $e_2 = 0$ y $e_3 \rightarrow +\infty$.

$$\dot{e}_1 = -\mu_1^+ \left(e_1 - \frac{x_1}{Y_d} \right) - \frac{1}{Y_d} [\mu_1^+ x_{r1} + \mu_1^- e_3] = -\mu_1^+ e_1 - \frac{\mu_1^- e_3}{Y_d}$$

como $e_3 \rightarrow +\infty$, entonces $e_1 \rightarrow -\infty$, esto significa que $s_1 \rightarrow -\infty$.

Seleccionando una función candidato de Lyapunov para la primera etapa

$$W_1 = \frac{1}{2} (e_2)^2$$

$$W_1(e_2) > 0 \quad \forall e_2 \neq 0, \quad W_1(0) = 0$$

Derivando con respecto al tiempo, a lo largo de las trayectorias del sistema (6.3)

$$\dot{W}_1(e_2) = e_2 \dot{e}_2 = e_2 \left[-D_1(e_2 + x_{r1}) + \mu_1^+ (e_2 + x_{r1}) \right]$$

sustituyendo el control D_1 :

$$\begin{aligned} \dot{W}_1(e_2) &= e_2 \left[-\mu_1^+ \left(\frac{e_2 + x_{r1}}{x_1} \right) (e_2 + x_{r1}) + \mu_1^+ (e_2 + x_{r1}) \right] \\ &= e_2 \left[\frac{-\mu_1^+ e_2^2}{x_1} - \mu_1^+ e_2 \right] \end{aligned}$$

como $e_2 = x_1^+ - x_{r1}$

$$\begin{aligned}\dot{W}_1(e_2) &= -\mu_1^+ e_2^2 \left[\frac{x_1^* - x_1}{x_1} + 1 \right] \\ &= -e_2^2 \mu_1^+ \left(\frac{x_1^*}{x_1} \right) = -D_1 e_2^2\end{aligned}$$

como $D_1 > 0$, entonces $\dot{W}_1(e_2)$ es negativa definida y por lo tanto el error e_2^1 va a cero exponencialmente.

Esta prueba es valida para el error en el segundo tanque (e_2^2).

6.3 OBSERVADOR

Como el único parámetro medido (en cada tanque) es el substrato, el problema de la obtención del vector de estados es resuelto como en el capítulo dos, solo que aquí es necesario construir un observador para cada etapa (crecimiento, producción).

Los sistemas de ecuaciones (6.3) y (6.4) son llevados a la forma (6.5) y (6.6) respectivamente:

$$A_1(u_1, y_1) = \begin{pmatrix} -D_1 & \frac{-\mu_1^+}{Y_x} & \frac{-\mu_1^-}{Y_x} \\ 0 & -D_1 + \mu_1^+(1 - \theta_1) & 0 \\ 0 & \mu_1^+ \theta_1 & \mu_1^- - D_1 \end{pmatrix} \quad \phi_1(u_1) = \begin{pmatrix} s_0 D_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

$$A_2(u_2, y_2) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-k_0 \varepsilon G_p v}{Y_p} - \frac{\mu_2^+}{Y_x} & -\frac{\mu_2^-}{Y_x} & \frac{D_2 + k_{-p}}{Y_p} \\ 0 & -D_2 + \mu_2^+(1 - \theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2^+ \theta_2 & -D_2 + \mu_2^- & 0 \\ 0 & k_0 \varepsilon G_p v & 0 & -D_2 - k_{-p} \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

$$B_2(u, y_1) = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \phi_2(u_2, y_2) = \begin{pmatrix} -D_2 s_2 + D_{02} s_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Teorema 6.1: Sean los sistemas dinámicos

$$O_1 : \begin{cases} \dot{z}_1 = A_1(u_1, y_1)z_1 - s_1^{-1}C_1^T(C_1 z_1 - y_1) + \phi_1(u_1, y_1) \\ \dot{s}_1 = -\theta_1 s_1 - A_1^T(u_1, y_1)s_1 - s_1 A_1(u_1, y_1) + C_1^T C_1 \end{cases}$$

$$O_2 : \begin{cases} \dot{z}_2 = A_2(u_1, u_2, y_1, y_2)z_2 + B_2(u_1, y_1)z_1 + \phi_2(u_1, y_1, u_2, y_2) - s_2^{-1}C_2^T(C_2 z_2 - y_2) \\ \dot{s}_2 = -\theta_2 s_2 - A_2^T(u_1, u_2, y_1, y_2)s_2 - s_2 A_2(u_1, u_2, y_1, y_2) + C^T C \end{cases}$$

Entonces O_1 y O_2 , son observadores para los sistema (6.8, 6.9) tales que, los errores de estimación verifican las siguientes desigualdades:

$$\|z_1(t) - \chi_1(t)\| \leq k_1 e^{-\theta_1 t}$$

$$\|z_2(t) - \chi_2(t)\| \leq k_2 e^{-\theta_2 t}$$

para θ_1, θ_2 suficientemente grandes, donde θ es una constante positiva.

La demostración del teorema, para la primera y segunda etapa es idéntica a la presentada en el capítulo 2.

6.4 RESULTADOS DE LAS SIMULACIONES

Para el primer tanque se quiere llevar el valor de las células con plásmidos (x_1^+) a un valor de cuatro, con $s_0 = 10$.

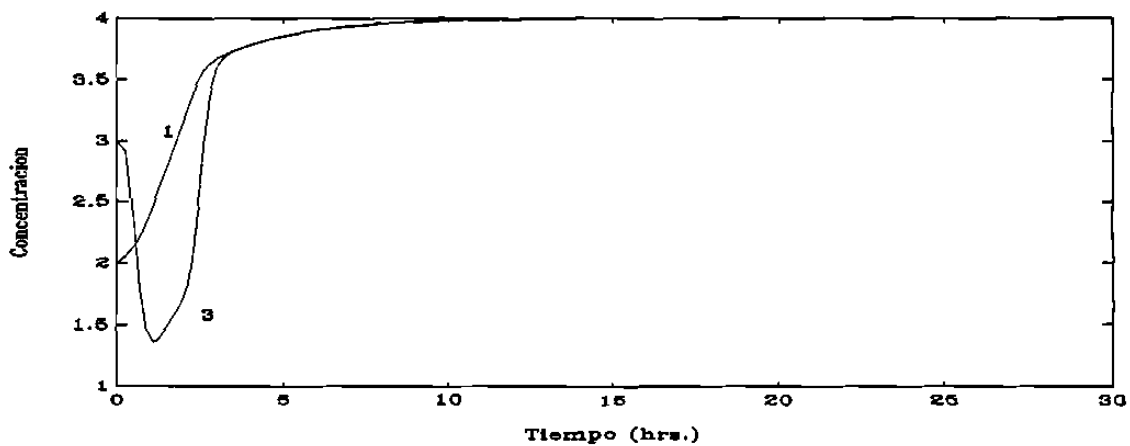


Fig. 6.1 Células con plásmidos x_1^+ (1) vs. estimado (3).

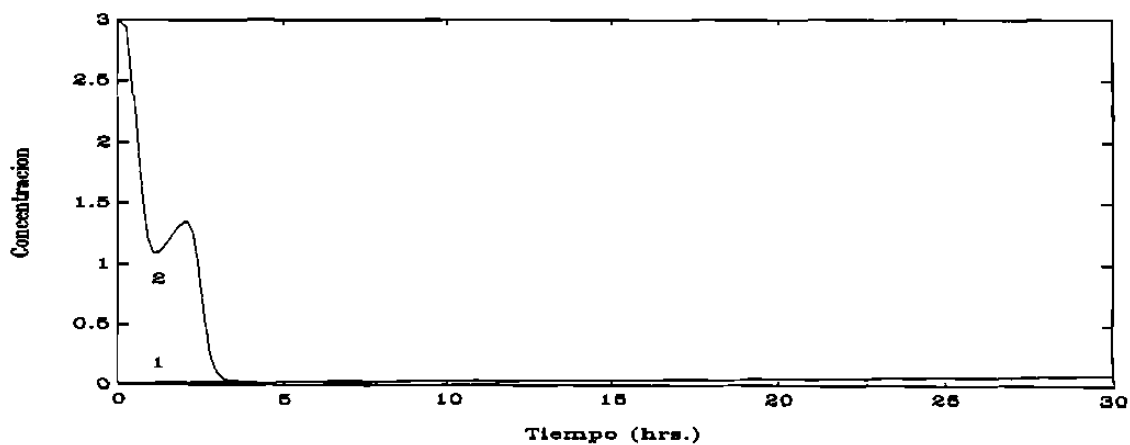


Fig. 6.2 Células libres de plásmidos x_1^- (1) vs. estimado (2).

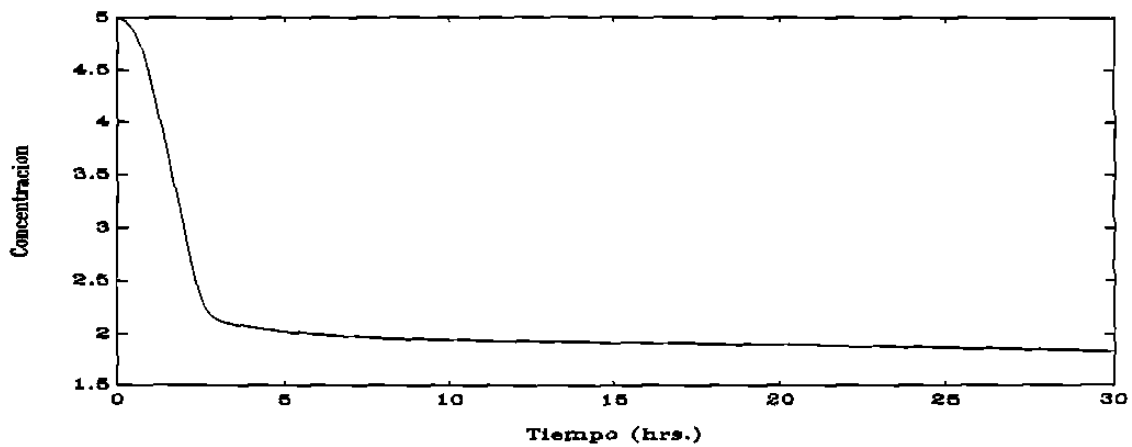


Fig. 6.3 Substrato (s_1).

En el segundo tanque también se desea llevar el valor de las células con plasmido (x_2^+) a cuatro, considerando que $s_0 = 10$, $D_{12} = 0.135$, $Y_p \gg 0$.

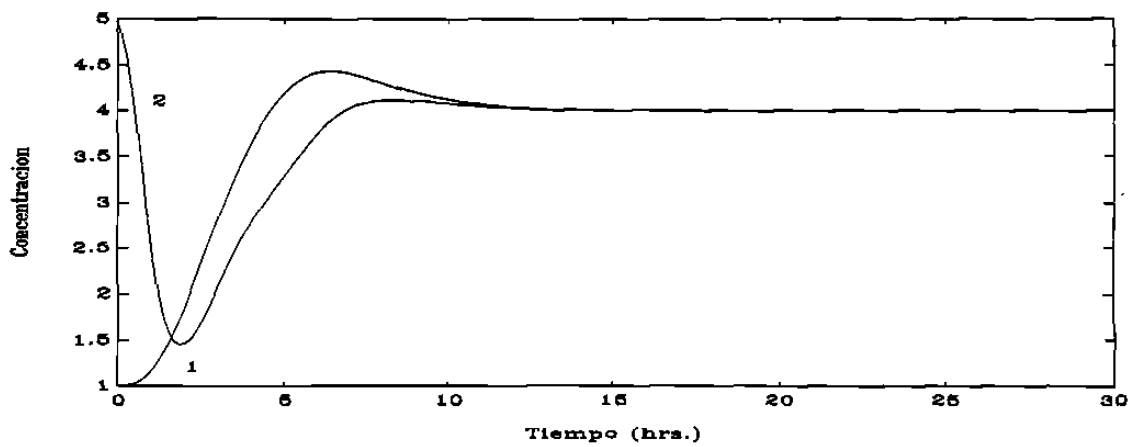


Fig. 6.4 Células con plásmidos en el tanque dos x_2^+ (1) vs. estimado (2).

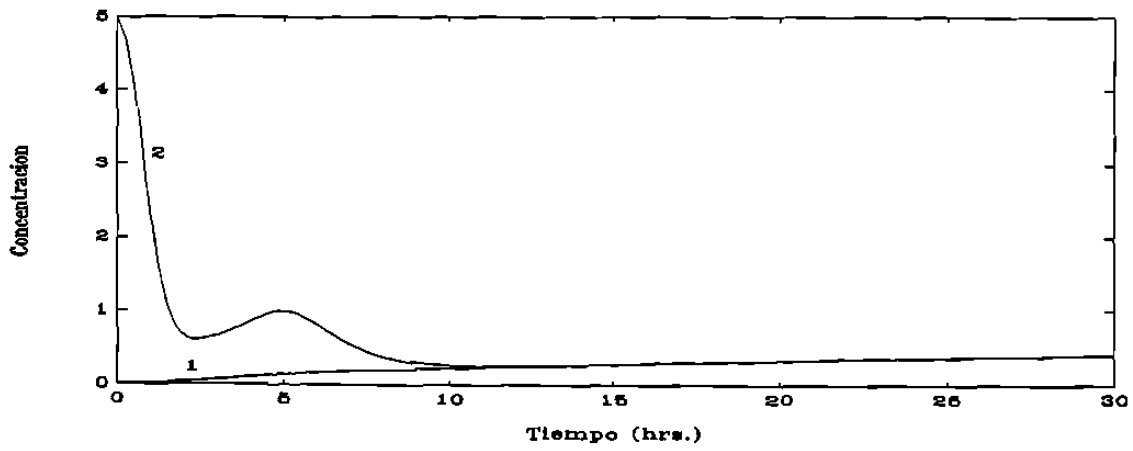


Fig. 6.5 Celulas libres de plasmidos en el tanque dos x_2 (1) vs. estimado (2).

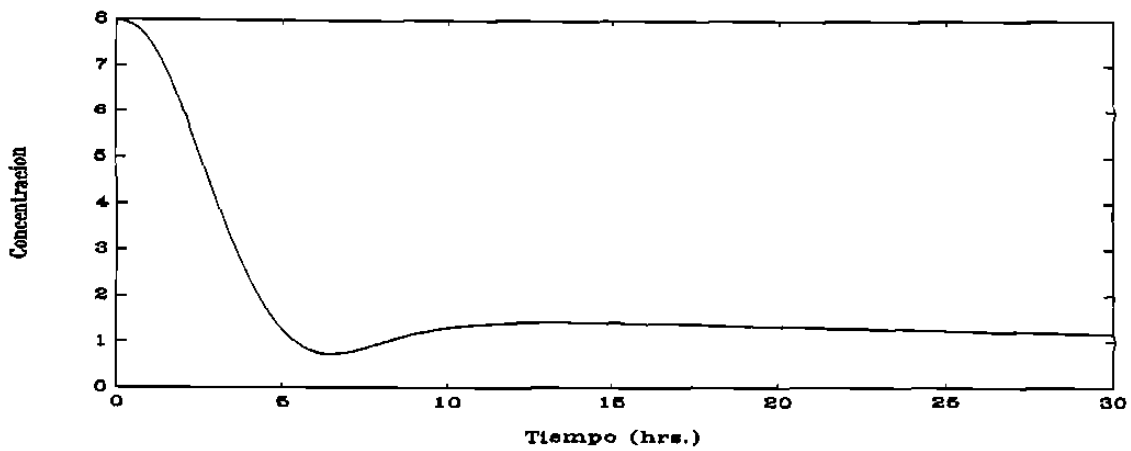


Fig. 6.6 Substrato en el tanque dos (s_2).

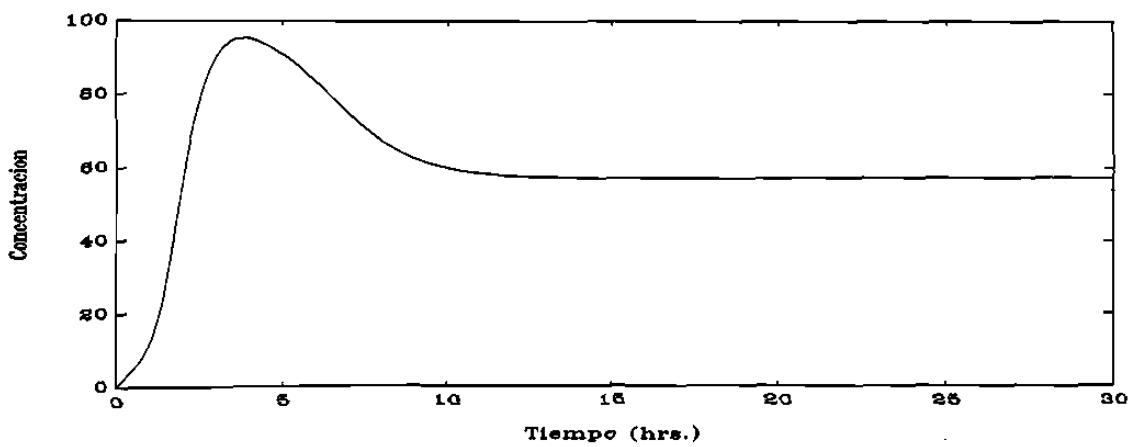


Fig. 6.7 Producción (p).

CONCLUSIONES

Este trabajo se desarrolló a partir del modelo matemático de un proceso de fermentación continuo (CST), éste fue representado en forma afín en el control, y se comprobó que pertenece a la clase de sistemas conservativos. Por lo que se concluyó que es posible construir una ley de control que estabiliza globalmente asintóticamente el sistema. El control debe estar sujeto a restricciones físicas tales que, el valor del vector de estados y de la señal de control siempre deberán ser positivas, por lo que se usó un control tipo L/A, el cual siempre genera señales de control positivas.

Como se deseaba controlar la concentración de la biomasa, debido a que la ley de control requiere de esta medición en línea, se utilizó un estimador tipo Kalman para el proceso. Se comprobó su buen funcionamiento en simulaciones.

Con el principio de separación se probó que el par observador-controlador es estable, demostrando que el error de estimación tiende a cero exponencialmente y que el estado tiende a cero cuando el tiempo tiende a infinito. Garantizando con ello que, el control que hace uso del estimado, también estabiliza al sistema.

Se obtuvo una ley de control linealizante con la cual se controló el sustrato, y se demostró que la dinámica cero era estable. Desafortunadamente su aplicación se restringe, ya que es necesario el conocimiento exacto de la planta.

Se hizo uso de un algoritmo adaptable [15], para la estimación de la razón de crecimiento (μ), en combinación con la estimación de la biomasa y la medición con ruido del sustrato. En las simulaciones se obtuvieron resultados bastante satisfactorios.

Finalmente, se extendió el problema hacia un sistema en cascada; aquí se mostró que solo se podía controlar una variable ya que el sistema es no controlable.

Como resultado de lo anterior, los trabajos posteriores deberán estar enfocados hacia una implementación, la cual es preferible hacerla sobre un proceso de fermentación simple, donde el modelo matemático surge de un sencillo balance de masa y de nutrientes. En los procesos de fermentación, la única diferencia en el modelo matemático entre diferentes aplicaciones (como pueden ser la de laboratorio, planta piloto o de un proceso a gran escala) son el dimensionamiento de estos procesos, y las consideraciones que se tomen (por ejemplo, en la ley de crecimiento específico).

Otra cuestión interesante sería aplicar un control sobre s_0 (alimento), para hacer que la concentración del sustrato (s) siga una trayectoria óptima ($S^*(t)$), con el fin de maximizar la cantidad del producto final.

APENDICE

A1 Definiciones matemáticas

Teorema A1.1 [12]: (Estabilidad asintótica de Lyapunov)

Sea $x = 0$ un punto de equilibrio para $\dot{x} = f(x)$. Sea $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable sobre una vecindad D de $x = 0$, tal que:

$$V(0) = 0 \text{ y } V(x) > 0 \text{ en } D - \{0\}$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad \text{en } D$$

entonces, $x = 0$ es estable. Además, si

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \text{en } D - \{0\}$$

entonces $x = 0$ es asintóticamente estable.

Función clase C^∞ A1.2 [1]: Teniendo que A es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. El valor de f en x es denotado $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$. La función f se dice que es de la clase C^∞ (función suave) si sus derivadas parciales de cualquier orden con respecto a x_1, \dots, x_n existen y son continuas. Una función f se dice que es *analítica* (C^ω) si es C^∞ y para cada punto $x^0 \in A$ existe una vecindad U de x^0 , tal que la expansión en serie de Taylor de f en x^0 converge a $f(x)$ para toda $x \in U$.

Difeomorfismo A1.3 [1]: Sean U, V son conjuntos abiertos en \mathbb{R}^n . Un mapeo $F: U \rightarrow V$ es un difeomorfismo, si F es biyectivo (uno a uno y sobre) y F, F^{-1} son de la clase C^∞ .

Teorema A1.4 [1]: (de la función inversa)

Teniendo que A es un conjunto abierto de \mathbb{R}^n y $F: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ un mapeo C^∞ . Si

$\left[\frac{\partial F}{\partial x} \right]_{x^0}$ (matriz Jacobiana) es no singular en $x^0 \in A$, entonces existe una vecindad abierta

U de x^0 en A tal que $V = F(U)$ es un conjunto abierto en \mathbb{R}^n y la restricción de F a U es un difeomorfismo sobre V .

Condición de Lipschitz A1.5 [11]: Si la función $f(x, t)$ en la ecuación $\dot{x} = f(x, t)$ es continua en t , y para alguna $r > 0$, existe $L \geq 0$, tal que

$$\|f(x_2, t) - f(x_1, t)\| \leq L \|x_2 - x_1\| \quad \forall x_1, x_2 \in B_r \quad \forall t \geq t_0$$

para toda x_1 y x_2 en una vecindad B_r de el origen y todo t en el intervalo $[t_0, t_0+T]$ (T es un numero positivo), entonces la ecuación diferencial tiene una única solución $x(t)$ para condiciones iniciales suficientemente pequeñas y en un período de tiempo pequeño.

Gradiente o diferencial A1.6 [1]: Es un campo covectorial de una función realmente valuada (λ) definida sobre un subconjunto abierto U de \mathbb{R}^n . Este campo covectorial es

denotado por $d\lambda$. El valor en un punto x es: $d\lambda(x) = \left[\frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x_n} \right]$

Derivada de Lie A1.7 [1]: Sea λ una función realmente valuada y f un campo vectorial, ambos definidos sobre un subconjunto U de \mathbb{R}^n . De lo anterior, una nueva función suave realmente valuada es definida, cuyo valor (en cada x en U) es igual al producto interno

$$\langle d\lambda(x), f(x) \rangle = \frac{\partial \lambda}{\partial x} f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} f_i(x)$$

Esta función es llamada la derivada de λ a lo largo de f , y es con frecuencia denotada

como $L_f \lambda$. Ahora si se deriva a lo largo de un nuevo campo (por ej. g), la nueva función

$$\text{sería } L_g L_f \lambda(x) = \frac{\partial (L_f \lambda)}{\partial x} g(x).$$

Si λ es diferenciable k veces a lo largo de f , la notación es $L_f^k \lambda$, con $L_f^0 \lambda(x) = \lambda(x)$.

Producto de Lie (corchete) A1.8 [1]: Sean dos campos vectoriales f y g , ambos definidos sobre un subconjunto abierto U de \mathbb{R}^n . De éstos un nuevo campo vectorial suave es construido, el cual es llamado producto de Lie; se expresa como $[f, g]$ y está definido para cada x de U como:

$$[f, g](x) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x)$$

Repetiendo el corchete del campo vectorial g con respecto al mismo campo vectorial f , $[f, [f, \dots, [f, g]]]$ esta operación recursiva es definida como

$$\text{ad}_f^k g(x) = [f, \text{ad}_f^{k-1} g](x) \quad \text{para } k \geq 0, \text{ad}_f^0 g(x) = g(x)$$

Proposición A1.9 [1]: El producto de Lie de campos vectoriales tiene las siguientes propiedades:

i) es bilineal sobre \mathbb{R} , por ejemplo si f_1, f_2, g_1, g_2 son campos vectoriales y r_1, r_2 son números reales entonces:

$$[r_1 f_1 + r_2 f_2, g_1] = r_1 [f_1, g_1] + r_2 [f_2, g_1]$$

$$[f_1, r_1 g_1 + r_2 g_2] = r_1 [f_1, g_1] + r_2 [f_1, g_2]$$

ii) es anti conmutativo: $[f, g] = -[g, f]$

iii) satisface la identidad de Jacobi, es decir si f, g, p son campos vectoriales, entonces

$$[f, [g, p]] + [g, [p, f]] + [p, [f, g]] = 0$$

Definición A1.10 [26]: Considere el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) & x \in M, u \in U \\ y &= \phi(x) & y \in N \end{aligned}$$

Donde

- El espacio de estado $M \subset \mathbb{R}^n$.
- $U \subset \mathbb{R}^p$.
- $f: M \times U \rightarrow TM$ tal que $f(x, u) \in T_x M$ para cada $x \in M, u \in U$.
- La función de observación ϕ es un mapeo de M a una variedad N

Nosotros decimos que una entrada u *distingue* entre dos estados x_i ($i=1,2$), si existe una t para la cual $\pi(u, x_i; t)$ está definida para $i = 1,2$ y satisface

$$y_1 = \phi(\pi(u, x_1; t)) \neq \phi(\pi(u, x_2; t)) = y_2$$

Si no existe una entrada que distinga entre x_1 y x_2 , entonces x_1 y x_2 se dice que son *indistinguibles*. Si no existen dos estados x_1 y x_2 que sean diferentes pero indistinguibles, entonces el sistema $\Sigma = (M, U, f, N, \phi)$ se dice que es *observable*.

Una entrada $u: [0, T] \rightarrow U$ se dice que es *universal* para el sistema Σ si ésta tiene la propiedad que, siempre y cuando dos estados x_1, x_2 sean distinguibles por alguna entrada, entonces x_1 y x_2 son distinguibles por u .

Definición A1.11 [19]: $U(t) \in L_\infty[t_0, +\infty)$ (espacio de funciones medibles esencialmente acotadas [7]) es una entrada *persistente* si existe $T > t_0$ y una secuencia $\delta_n, \delta \rightarrow +\infty$ tal que $U\delta_n(t)$ converge debilmente a U^* , U^* sería una entrada universal en $[t_0, T]$. Nota: Es una entrada que contiene suficiente información y la cual no se aproxima a una entrada no universal.

Definición A1.12 [19]: $U(t)$ es *regularmente persistente* si es persistente en términos de la definición anterior, con la secuencia δ_n tal que $|\delta_{n+1} - \delta_n| \leq T_1$ con $T_1 > 0$.

Definición A1.13 [13]: Considere el siguiente sistema

$$(S) = \begin{cases} \dot{\xi} = X(\xi, \zeta) & (s_1) \\ \dot{\zeta} = Y(\xi, \zeta) & (s_2) \\ \xi \in \mathbb{R}^n \quad \zeta \in \mathbb{R}^p \end{cases}$$

Suponiendo que $X(\xi_0, \zeta) = 0; \forall \zeta \in \mathbb{R}^p$. Nosotros decimos que $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ es s_1 estable en el sentido de Lyapunov si, para toda $\zeta \in \mathbb{R}^p$, existe una vecindad V_0 de ξ_0 tal que: Para toda vecindad $W_0 \subset V_0$ de ξ_0 , existe una vecindad $W'_0 \subset V_0$ tal que para toda trayectoria $(\xi(t), \zeta(t))$ de (S) que inicia en $(\xi, \zeta); \xi \in W_0$ la componente $\xi(t)$ permanece en W'_0 para toda $t \geq 0$.

Definición A1.14 [12]: A conjunto M se dice que es un conjunto invariante con respecto a $\dot{x} = f(x)$ si: $x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M, \forall t \in \mathbb{R}$.

El conjunto M se dice que es un conjunto invariante positivo si:

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M, \forall t \geq \mathbf{R}.$$

Teorema A1.15 (LaSalle's) [12]

Considerando el siguiente sistema:

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.1)$$

Donde $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un mapeo localmente Lipschitz, de un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ a \mathbb{R}^n . Siendo, Ω un conjunto compacto (cerrado y acotado) con la propiedad que cada solución de (1.1) que inicia en Ω , permanece para todo tiempo futuro en Ω . Siendo $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que $\dot{V}(x) \leq 0$ en Ω . Siendo E el conjunto de todos los puntos en Ω donde $\dot{V}(x) = 0$. Sea M el conjunto invariante más grande en E . Entonces M es un *atractor*, pues cada solución que inicia en Ω se aproxima a M cuando $t \rightarrow \infty$ (prueba en [12]).

Teorema A1.16 (Massera) [13]

Si el campo f es C^1 y si x_0 es un punto de equilibrio local (global) asintóticamente estable, entonces existe una función de Lyapunov local (global) para (1.1).

Definición A1.17 [28]: Sea V una función no negativa, $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, V es *propia*, si para cada $a > 0$. El conjunto $V^{-1}([0, a])$ es un compacto de \mathbb{R}^n .

A2 Definiciones biológicas

Microorganismo recombinante A2.1: Es un microorganismo que ha sido transformado con un DNA extraño.

Gen clonado A2.2: Traen un fragmento de DNA de otro organismo, es clonado en el plasmido.

Promotor A2.3: Segmento de DNA necesario para la expresión de un gen

Alta expresión A2.4: Alta producción

Plasmido A2.5: Elemento genico extra cromosomal circular cerrado covalentemente y se replica de manera independiente del cromosoma.

Plasmido mono y multi copia A2.6

mono copia.- Un plasmido por cromosoma.

multi copia.- Más de un plasmido por cromosoma.

REFERENCIAS

- [1] A. Isidori, "Nonlinear Control Systems", Second Edition, Springer-Verlag.
- [2] J. J. E. Slotine, W. Li, "Applied Nonlinear Control", Prentice-Hall, 1991.
- [3] J. J. D'Azzo, C. H. Houpis, "Linear Control System Analysis and Design", 3er Edition, McGraw-Hill, 1988.
- [4] B. Noble, J. W. Daniel, "Algebra Lineal Aplicada", Tercera Edicion, Prentice-Hall Hispanoamericana.
- [5] J. P. Gauthier, G. Bonard, "Stabilization of nonlinear systems", Outils Et Modèles Mathématiques pour L'Automatique L'Analyse de Systèmes et le Traitement du Signal, CNRS, Volume 1, 1981, pp. 307-324.
- [6] A. Aguado, J. Enríquez, J. M. Pascual, "Teoria Moderna del Control", Editorial Academia, 1980.
- [7] D. G. Luenberger, "Optimization by Vector Space Methods", John Wiley & Sons, 1969.
- [8] G. Fevotte, D. Canpont, M. Lakrori, "Non linear control of a batch evaporative crystallization using an algorithm of L/A type", Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, pp. 37-46.
- [9] D. I. C. Wang, C. L. Cooney, A. L. Demain, P. Dunnill, A. E. Humphrey, M. D. Lilly, "Fermentation and Enzyme Technology", John Wiley & Sons, 1979.
- [10] J. Hale, H. Koçak, "Dynamics and Bifurcations", Springer-Verlag, 1991.
- [11] S. Sastry, M. Bodson, "Adaptive Control", Prentice Hall, 1989.
- [12] H. K. Khalil, "Nonlinear Systems", Macmillan, 1992.
- [13] J. C. Marquès, "A separation principle for dissipative control affine systems", Ph. D. Tesis, L'Universite Claude Bernard-Lyon I, 1993.

- [14] A. Montano, R. Kelly, G. Silva, "Control por retroalimentación inversa aplicada a sistemas no lineales", IV Congreso Latinoamericano de Control Automático, Puebla, México, 1990, pp. 577-582.
- [15] G. Bastin, D. Dochain, "On-line Estimation of Microbial Specific Growth Rates", 7th IFAC/IFORS, York, U. K., 1985, pp. 705-709.
- [16] D. Dochain, G. Bastin, "Adaptive Control of Fedbatch Bioreactors", Chem. Eng. Comm., 1990, Vol. 87, pp. 67-85.
- [17] S. B. Lee, D. D. Ryu, R. Seigel, S. H. Park, "Performance of Recombinant Fermentation and Evaluation of Gene Expression Efficiency for Gene Product in Two-Stage Continuous Culture System", Biotechnology and Bioengineering, Vol. 31, 1988, pp. 805-820.
- [18] S. B. Lee, A. Seressiotis, J. E. Bailey, "A Kinetic Model for Product Formation in Unstable Recombinant Populations", Biotechnology and Bioengineering, Vol. 27, 1985, pp. 1699-1709.
- [19] G. Bornard, N. Couenne, F. Celle, "Regularly Persistent Observers for Bilinear Systems", Proceedings of the 29 international conference on nonlinear system, Vol. 122, Springer-Verlag, 1988.
- [20] J. P. Gauthier, H. Hammouri, S. Othman, "Simple Observer for Nonlinear Systems Applications to Bioreactors", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 37, 1992, pp. 875-880.
- [21] A. J. Krener, A. Isidori, "Linearization by Output Injection and Nonlinear Observers", Systems and Control Let. 3, 1985, pp. 47-52.
- [22] A. J. Krener, W. Respondek, "Nonlinear Observers with Linear Error Dynamics", SIAM J. Control Optim., 23, 1985, pp. 197-216.
- [23] D. Williamson, "Observability of Bilinear Systems with Applications to Biological Control", Automatica 13, 1977, pp. 243-254.
- [24] M. Vidyasagar, "Nonlinear Systems Analysis", Prentice Hall, 1993.
- [25] G. Bastin, "Nonlinear and Adaptive Control in Biotechnology: A Tutorial", ECC 91, Grenoble, 1991, Francia, pp. 2001-2012.
- [26] H. J. Sussmann, "Single-Input Observability of Continuous-Time Systems", Math. Systems Theory 12, 1979, pp. 371-393.

- [27] J. P. Gauthier, G. Bornard, "Observability for any $u(t)$ of a Class of Nonlinear Systems", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-26, No. 4, 1981.
- [28] C. I. Byrnes, W. Lin, "Losslessness, Feedback Equivalence, and the Global Stabilization of Discrete-Time Nonlinear Systems", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 39, No. 1, 1994.
- [29] H. Hammouri, J. De León Morales, "Observer Synthesis for State-Affine System". IEEE Proc. Conference on Decision and Control. Honolulu, Hawaii, 1990.

