

**UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON**

**FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA**



**APLICACION DE SISTEMAS CAOTICOS EN  
CONTROL AUTOMATICO**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERIA ELECTRICA  
CON ESPECIALIDAD EN CONTROL**

**P R E S E N T A:**

**DANIEL OLIVARES CABALLERO**

**MONTERREY, N. L.**

**JUNIO DE 1994**

TM

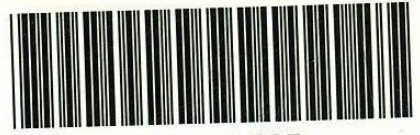
Z5853

.M2

FIME

1994

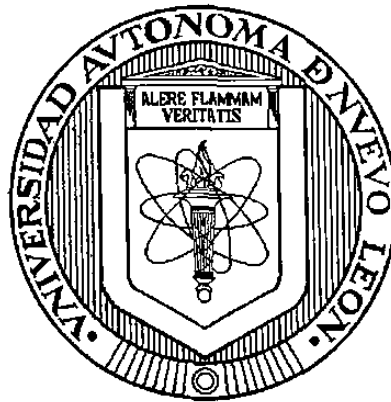
04



1020070685

**UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON**

**FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA**



**APLICACION DE SISTEMAS CAOTICOS EN CONTROL  
AUTOMATICO**

**TESIS**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERIA ELECTRICA  
CON ESPECIALIDAD EN CONTROL**

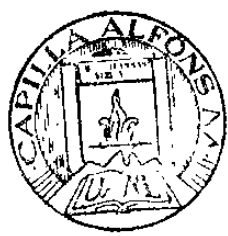
**PRESENTA**

**DANIEL OLIVARES CABALLERO**

**MONTERREY, N.L.**

**JUNIO DE 1994**

TM  
Z58F3  
0M2  
F111C  
1a d  
4



FONDO TESIS

62805

**UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON  
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA  
PROGRAMA DOCTORAL EN INGENIERIA ELECTRICA**

**APLICACION DE SISTEMAS CAOTICOS EN CONTROL  
AUTOMATICO**

**TESIS**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN  
INGENIERIA ELECTRICA CON ESPECIALIDAD EN CONTROL**

**PRESENTA:**

**DANIEL OLIVARES CABALLERO**

Monterrey, N.L., Junio de 1994

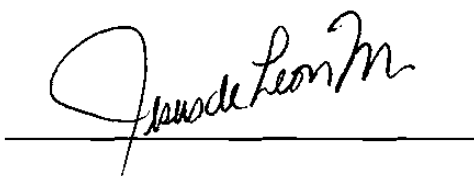
## APLICACION DE SISTEMAS CAOTICOS EN CONTROL AUTOMATICO

Los miembros del comité aprueban la tesis  
de Maestría de Daniel Olivares Caballero

Dr. Joaquín Collado Moctezuma  
Asesor

Handwritten signature of Joaquín Collado Moctezuma in cursive script, written over a horizontal line.

Dr. Jesús de León Morales

Handwritten signature of Jesús de León Morales in cursive script, written over a horizontal line.

Dr. Salvador Acha Daza

Handwritten signature of Salvador Acha Daza in cursive script, written over a horizontal line.

Dedicado a mis padres:

*Ernesto N. Olivares Mihr*

Por su ejemplo de devoción a la familia y por darme una  
pauta para seguir un camino recto.

*Irma Caballero de Olivares*

Porque siempre nos ha ofrecido a sus hijos su gran amor,  
sus palabras de aliento y su acertado consejo.

Porque les debo todo en la vida.



## AGRADECIMIENTOS

A mis hermanos: *Ernesto, Irma, Linda Olivia, Zaida Margarita, Nora Hilda y Eduardo*, por su apoyo incondicional y su confianza en mi.

A *Claudia*: Por su paciencia, comprensión y cariño.

Al *Dr. Joaquín Collado Moctezuma*: Por su asesoría en la realización de este trabajo, por sus enseñanzas, pero principalmente, por su amistad.

Al *Dr. Jesús de León Morales*: Por sus valiosos comentarios y sugerencias acerca de esta tesis.

Al *Dr. Salvador Acha Daza*: Por sus acertadas indicaciones que en buena medida contribuyeron en este trabajo.

Al *Dr. Edgar N. Sánchez Camperos*: Por su interés en cada alumno y por su compañerismo.

A mis amigos: Que siempre me brindan una sonrisa amable y una mano desinteresada.

A la *Universidad Autónoma de Nuevo León*.

Al *Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología*.

## RESUMEN

La investigación matemática de la teoría del caos es uno de los temas que más interés han captado en los últimos años debido, principalmente, a que afecta a una variedad de campos de estudio muy diferentes entre si, como son: sistemas eléctricos y electrónicos, crecimiento poblacional, predicción meteorológica, bolsa de valores, algoritmos computacionales, y otros.

La principal característica de los sistemas con comportamiento caótico es que siendo sistemas completamente determinísticos, exhiben un movimiento completamente errático e impredecible, aparentemente aleatorio. Por supuesto ésta es una característica no deseada en cualquier aplicación, lo cual motiva el estudio del llamado ruido determinista o caos y las causas que lo originan.

En el presente trabajo se aborda el problema de aprovechar las características de los sistemas caóticos en dos aplicaciones prácticas en el área de sistemas de control automático:

a) La propiedad de impredecibilidad de éstos sistemas es utilizada para la obtención de un generador de secuencias pseudoaleatorias con las mejores propiedades probabilísticas que se pueden lograr en una computadora.

b) Este generador de ruido es utilizado como controlador en malla abierta para estabilizar una planta no-lineal.

El inciso b) introduce la idea de aplicar controladores formados por sistemas dinámicos caóticos en la estabilización de sistemas, lo cual será llamado en esta tesis *control caótico*. El alcance de este trabajo es el de obtener un caso para el cual se cumpla lo antes dicho.

# INDICE

<b>Resumen</b> .....	iv
<b>Indice</b> .....	v
<b>Indice de figuras</b> .....	vii

## **CAPITULO 1      INTRODUCCION**

1.1	Breve historia del estudio del caos .....	2
1.2	Motivación y organización de la tesis .....	3

## **CAPITULO 2      UNA VISION GENERAL DE LA TEORIA DEL CAOS**

2.1	Introducción .....	7
2.2	Preliminares .....	8
2.3	Herramientas de análisis .....	17
2.3.1	Análisis gráfico .....	17
2.3.2	Toroides .....	20
2.3.3	Bifurcaciones .....	22
2.3.4	Gráficas estadísticas .....	25
2.4	Geometría fractal .....	27

## **CAPITULO 3      GENERACION POR COMPUTADORA DE NUMEROS ALEATORIOS**

3.1	Introducción .....	31
3.2	Antecedentes .....	32
3.3	Generación de números uniformemente distribuidos .....	34
3.4	Una prueba de correlación .....	36
3.5	Generación de secuencias con distribuciones no uniformes .....	42

## **CAPITULO 4      UN SISTEMA DINAMICO CAOTICO COMO GENERADOR DE RUIDO**

4.1	Introducción .....	44
4.2	Obtención de la fórmula del generador .....	45

## INDICE (Continuación)

4.3	Análisis probabilístico del generador .....	51
4.4	Conclusiones .....	56
 <b>CAPITULO 5            CONTROL VIBRACIONAL</b>		
5.1	Introducción .....	57
5.2	Principios del control vibracional .....	58
5.3	Simulación de un proceso controlado vibracionalmente .....	60
 <b>CAPITULO 6            CONTROL CAOTICO: UN PRIMER INTENTO</b>		
6.1	Introducción .....	65
6.2	Control por ruido .....	66
6.3	Combinación generador caótico-control por ruido .....	68
 <b>CAPITULO 7            CONCLUSIONES .....</b>		
		73
 <b>REFERENCIAS .....</b>		
		75

# INDICE DE FIGURAS

## CAPITULO 2

Fig. 2.1	Puntos de equilibrio para la ecuación de un péndulo . . . . .	10
Fig. 2.2	Ciclo límite que corresponde a las ec. de Van der Pol . . . . .	10
Fig. 2.3	Orbita cuasiperiódica en la ec. de Van der Pol . . . . .	10
Fig. 2.4	Atractor Double Scroll del circuito de Chua . . . . .	10
Fig. 2.5	Atractor correspondiente a las ec. de Rössler . . . . .	11
Fig. 2.6	Atractor de las ec. de Lorenz . . . . .	11
Fig. 2.7	Sensibilidad a las condiciones iniciales en el Double Scroll . . . . .	12
Fig. 2.8	Observación de un proceso dinámico en dos tiempos diferentes . . .	14
Fig. 2.9	Mapeo de contracción . . . . .	15
Fig. 2.10	Mapeo de expansión . . . . .	15
Fig. 2.11	Iteración de la Herradura de Smale . . . . .	16
Fig. 2.12	Trayectoria de dos puntos en la Herradura de Smale . . . . .	16
Fig. 2.13	Espectro de potencia del Double Scroll . . . . .	17
Fig. 2.14	Punto fijo sobreamortiguado . . . . .	18
Fig. 2.15	Punto fijo subamortiguado . . . . .	18
Fig. 2.16	Ciclo límite de período 2 . . . . .	18
Fig. 2.17	Caos en la ecuación logística . . . . .	18
Fig. 2.18	Sensibilidad a las condiciones iniciales . . . . .	19
Fig. 2.19	Orbita periódica . . . . .	19

## INDICE DE FIGURAS (Continuación)

Fig. 2.20	Gráfica de la segunda iteración .....	20
Fig. 2.21	Toroide de dimensión uno .....	20
Fig. 2.22	Toroide de dimensión dos .....	20
Fig. 2.23	Bifurcación tipo duplicación de período .....	24
Fig. 2.24	Diagrama de Feigenbaum para la ecuación logística .....	25
Fig. 2.25	Histograma para la ec. logística con doble precisión .....	26
Fig. 2.26	Histograma para $f(x)=x^2-1.8$ con doble precisión .....	26
Fig. 2.27	Histograma para la ec. logística con simple precisión .....	26
Fig. 2.28	Histograma para $f(x)=x^2-1.8$ con simple precisión .....	26
Fig. 2.29	Triángulo de Sierpinski .....	27
Fig. 2.30	Ejemplo de un Julia set .....	27
Fig. 2.31	Curva de Koch .....	28
Fig. 2.32	Mandelbrot set .....	28
Fig. 2.33	Ampliación de una sección del triángulo de Sierpinski .....	28
Fig. 2.34	Forma de cubrir una línea y un círculo para obtener la dimensión por box counting .....	29
Fig. 2.35	Primeras cuatro iteraciones para la obtención de la curva de Koch .	30

### CAPITULO 3

Fig. 3.1	Procedimiento para formar el Caous game .....	37
Fig. 3.2	Caos game para el generador de Matlab .....	37

## INDICE DE FIGURAS (Continuación)

Fig. 3.3	Caos game para la ecuación logística . . . . .	38
Fig. 3.4	Caos game para el método de cuadrados centrales . . . . .	38
Fig. 3.5	Caos game para el método de Fibonacci . . . . .	38
Fig. 3.6	Caos game para el método congruente . . . . .	38
Fig. 3.7	Histograma para la ecuación logística . . . . .	39
Fig. 3.8	Gráfica de correlación para la ecuación logística . . . . .	39
Fig. 3.9	Histograma para el método de cuadrados centrales . . . . .	39
Fig. 3.10	Gráfica de correlación para el método de cuadrados centrales . . . . .	39
Fig. 3.11	Histograma para el método de Fibonacci . . . . .	39
Fig. 3.12	Gráfica de correlación para el método de Fibonacci . . . . .	39
Fig. 3.13	Histograma para el método congruente . . . . .	40
Fig. 3.14	Gráfica de correlación del método congruente . . . . .	40
Fig. 3.15	Histograma para el generador de Matlab . . . . .	40
Fig. 3.16	Gráfica de correlación para el generador de Matlab . . . . .	40
Fig. 3.17	Espectro de potencias del método de Matlab . . . . .	41
Fig. 3.18	Espectro de potencias de la ecuación logística . . . . .	41
Fig. 3.19	Espectro de potencias del método de cuadrados centrales . . . . .	41
Fig. 3.20	Espectro de potencias del método de Fibonacci . . . . .	41
Fig. 3.21	Espectro de potencias del método congruente . . . . .	41

## INDICE DE FIGURAS (Continuación)

### CAPITULO 4

Fig. 4.1	Mapeo de cuantización del estado $x$ . . . . .	45
Fig. 4.2	Gráfica del método congruente . . . . .	49
Fig. 4.3	Iteración de un intervalo del método congruente . . . . .	49
Fig. 4.4	Primera iteración del método congruente . . . . .	50
Fig. 4.5	Segunda iteración del método congruente . . . . .	50
Fig. 4.6	Tercera iteración del método congruente . . . . .	50
Fig. 4.7	Diag. de Feigenbaum del método congruente . . . . .	50
Fig. 4.8	Mapeo de probabilidades de $\varphi_a$ con $a=2$ . . . . .	52
Fig. 4.9	Comportamiento en el tiempo del generador caótico . . . . .	53
Fig. 4.10	Distribución producida por el generador caótico . . . . .	53
Fig. 4.11	Gráfica de correlación para el generador caótico . . . . .	53
Fig. 4.12	Espectro de potencias para el generador caótico . . . . .	54
Fig. 4.13	Caos game para el generador caótico . . . . .	54
Fig. 4.14	Ciclo de período 3 inestable del generador caótico . . . . .	54
Fig. 4.15	Distribución exponencial del generador caótico . . . . .	55
Fig. 4.16	Distribución normal del generador caótico . . . . .	55
Fig. 4.17	Distribución uniforme para mayor cantidad de puntos . . . . .	55
Fig. 4.18	Distribución exponencial para mayor cantidad de puntos . . . . .	55
Fig. 4.19	Distribución normal para mayor cantidad de puntos . . . . .	55



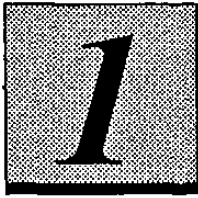
## INDICE DE FIGURAS (Continuación)

### CAPITULO 5

Fig. 5.1	Esquema del péndulo .....	61
Fig. 5.2	Respuesta del sistema linealizado para $\omega_s=15$ .....	62
Fig. 5.3	Respuesta del sistema linealizado para $\omega_s=50$ .....	63
Fig. 5.4	Respuesta del sistema no-lineal para $\omega_s=15$ .....	63
Fig. 5.5	Respuesta del sistema no-lineal para $\omega_s=50$ .....	64

### CAPITULO 6

Fig. 6.1	Esquema de control caótico .....	69
Fig. 6.2	Respuesta del sistema linealizado para $\omega_\eta=15$ .....	70
Fig. 6.3	Respuesta del sistema linealizado para $\omega_\eta=70$ .....	71
Fig. 6.4	Respuesta del sistema no-lineal para $\omega_\eta=15$ .....	71
Fig. 6.5	Respuesta del sistema no-lineal para $\omega_\eta=70$ .....	72



# INTRODUCCION

Una de las creencias más hondamente arraigadas en el siglo pasado fue el determinismo, en el que se consideraba al universo como un reloj increíblemente preciso y en el que si se pudieran conocer las posiciones y velocidades de cada objeto y las fuerzas que actúan sobre ellos, se podrían conocer los detalles acerca del pasado y el futuro por medio de las leyes de causa y efecto. Esta tendencia determinista ha sido grandemente modificada primero por el principio de incertidumbre y más recientemente por el desarrollo de la teoría del caos. Esta última principalmente muestra una paradoja: es posible tener un sistema caótico perfectamente modelado en forma determinística, además de toda la información necesaria en un momento dado, y aún así este sistema, con movimientos completamente desordenados, no acepta ninguna predicción a largo plazo y pareciera tener un comportamiento aleatorio. Esta desconcertante característica ha hecho de los sistemas caóticos uno de los temas de estudio más interesantes en el área de sistemas dinámicos, a tal grado que en la última década se ha detectado caos en prácticamente toda área de conocimiento (Peitgen, *et. al.*, 1992).

## 1.1 BREVE HISTORIA DEL ESTUDIO DEL CAOS

La investigación matemática en caos se remonta por lo menos hasta 1890, cuando Poincaré estudió la estabilidad del sistema solar y revolucionó el estudio de las ecuaciones diferenciales no-lineales introduciendo técnicas cualitativas geométricas en lugar de los estrictos métodos analíticos para discutir las propiedades globales de las soluciones de estos sistemas. Poincaré hizo el primer descubrimiento de caos en el movimiento orbital de tres cuerpos los cuales mutuamente ejercían fuerzas gravitacionales sobre los otros.

Una importante continuación fue el trabajo de los matemáticos franceses Fatou y Julia en los 1920's sobre las dinámicas de los mapeos analíticos complejos. Ellos también vieron conducta caótica, esta vez en lo que llamamos ahora *Julia set*, y se dieron cuenta de que tan tremendamente intrincados pueden ser esos Julia sets, a pesar de que no tenían gráficas por computadora disponibles para ver esos conjuntos.

En los 1960's, el matemático americano Smale había formulado un plan para clasificar todos los tipos típicos de comportamiento dinámico. Dentro de la vista global de Smale, el caos encontró un lugar como un fenómeno completamente natural con conducta tan regular como los ciclos periódicos. La técnica que él utilizó para analizar esto es llamada *dinámica simbólica*. Al mismo tiempo el meteorólogo americano Lorenz, usando una rústica computadora, descubrió que ecuaciones diferenciales muy simples podrían exhibir el tipo de caos que Poincaré descubrió. Lorenz observó que sus modelos meteorológicos simples exhibían lo que ahora es llamado *dependencia sensitiva a las condiciones iniciales*. Para él, esto significaba que la predicción del clima a largo plazo era imposible y mostró que el tópico matemático de caos era importante en otras áreas de la ciencia.

Esto llevó a una gran actividad en dinámicas no-lineales en los 1970's. El ecologista May encontró que en muy simples procesos iterativos que surgen en la biología matemática podrían producirse comportamientos increíblemente complejos y

caóticos. El físico Feigenbaum, trabajando sobre los resultados de Smale, notó que, a pesar de la complejidad de la conducta caótica, había una semejanza de orden en la forma en que los sistemas llegaban a ser caóticos. Los físicos Swinney y Golub mostraron que estos desarrollos matemáticos podrían realmente ser observados en aplicaciones físicas, específicamente en el flujo turbulento de fluidos. Mas recientemente, otros sistemas, tales como el movimiento del planeta Plutón o el latido del corazón humano, han demostrado exhibir similares patrones caóticos.

Un gran impulso al estudio de sistemas dinámicos fue la disponibilidad de computadoras de alta velocidad y, particularmente, gráficas por computadora. Entre los descubrimientos generados por computadora está el de Mandelbrot en 1980 de lo que ahora es llamado el *Mandelbrot set*. Esta imagen inmediatamente revivió el interés en el trabajo de Julia y Fatou. Usando imágenes por computadora como una guía, matemáticos como Douady, Hubbard, y Sullivan avanzaron grandemente la teoría clásica.

El descubrimiento de sistemas caóticos estables tal como el sistema de Lorenz de meteorología ha convencido a los científicos de que hay muchos más tipos estables de conducta dinámica que tan sólo puntos de equilibrio estables y ciclos límites.

Lo anterior motiva a preguntarse ¿qué papel podrían jugar los sistemas caóticos en sistemas de control automático y de qué manera pueden ser aprovechadas sus características en aplicaciones para esta área?

## 1.2 MOTIVACION Y ORGANIZACION DE LA TESIS

Los esfuerzos contemporáneos en el estudio de los sistemas caóticos están principalmente dirigidos a las siguientes áreas:

- 1) *Control de Caos*: Aplicando diversas técnicas de control, se intenta controlar un sistema caótico conocido (Chen & Dong, 1993), (Dong & Chen, 1992),

(Vincent & Yu, 1991).

2) *Identificación del caos*: Se demuestra que un modelo proveniente de una aplicación práctica es caótico bajo determinadas circunstancias (Feng & Loparo, 1992), (Chiang, *et. al.* 1993), (Hemati & Kwatny, 1993).

3) *Implementación de sistemas caóticos*: Es basado en el diseño de circuitos de circuitos electrónicos que presentan caos bajo ciertos ajustes de parámetros, para después analizarlos matemáticamente (Matsumoto, 1987), (Hamill, 1993), (Chua, *et. al.*, 1993).

4) *Aplicación del caos*: Las características de los sistemas caóticos son aprovechadas en alguna utilización práctica (Bradley, 1993).

El presente trabajo pertenece a esta última clase, y su principal intención es hacer un *primer intento* de controlar un proceso dinámico dado utilizando un controlador con características caóticas. La principal razón para pensar que esto es posible, es la extensa dinámica, y con mayor contenido de frecuencias, que poseen los sistemas caóticos, lo cual le permitiría, al menos en principio, contrarrestar un rango más amplio de incertidumbres en el modelo, así como rechazar una familia más grande de perturbaciones. La demostración de esta hipótesis se encuentra fuera del alcance de esta tesis, la cual se concretará a encontrar *un ejemplo* en el cual un sistema caótico funcione como controlador que estabilice un planta inestable. Este ejemplo estará compuesto por 1) un controlador derivado de un sistema lineal con retroalimentación de estado cuantizada el cual demuestra tener comportamiento caótico y que se mostrará es un excelente generador de ruido, 2) una planta no-lineal como es el péndulo invertido y 3) la salida "ruidosa" caótica de 1) la conectamos para variar algunos parámetros de 2) con lo que queda construido un controlador vibracional. Esta configuración no es en malla cerrada, tal vez un siguiente paso sería conectar un controlador de este tipo en retroalimentación y mostrar ciertas ventajas.

La estructura de esta tesis es desarrollada en la forma siguiente:

- En el capítulo 2 son introducidos los principales antecedentes referentes al caos, así como algunas de las herramientas necesarias en el estudio del mismo, que serán utilizadas en los capítulos posteriores. De la misma manera se muestran algunos de los ejemplos de sistemas caóticos más manejados en la literatura especializada, para finalizar con una breve exposición de las figuras fractales.

- Son presentadas, en el capítulo 3, las principales formas de generación de secuencias de números aleatorios con distribución uniforme, sus antecedentes, así como una comparación de la eficiencia de cada una de ellas. Para hacer posible esta comparación, se introduce una sencilla prueba gráfica la cual está directamente relacionada con la teoría del caos. Una vez que se ha obtenido una secuencia con distribución uniforme, se explica una de las metodologías para obtener secuencias con otras distribuciones probabilísticas.

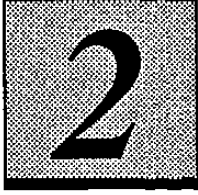
- El capítulo 4 tiene la finalidad de conjugar los dos capítulos anteriores para la obtención de un generador de números uniformemente distribuidos como la salida de un sistema caótico; con las mejores características posibles, tanto en la forma de la distribución, la correlación y el análisis espectral, comparándolo contra los métodos vistos en el capítulo 3. Al generador obtenido así se le denominará en este trabajo como *generador caótico*.

- Una técnica de control llamada *control vibracional*, que consiste en hacer "vibrar" periódicamente y con media cero un parámetro de la planta, es resumida en forma breve en el capítulo 5. Son recopilados los resultados necesarios para poder entender la aplicación de este control al ejemplo del péndulo invertido del cual se muestran algunas simulaciones. El interés de este capítulo es que las condiciones necesarias para asegurar un funcionamiento adecuado del control vibracional son muy semejantes a las de la técnica de control utilizada en el capítulo 6, por lo que algunas comparaciones son hechas.

- Es en el capítulo 6 donde el generador caótico es utilizado para estabilizar el péndulo invertido, todo esto basado en un esquema de malla abierta llamado *control por ruido* y para el cual se presentan simulaciones por computadora.

- Para finalizar este trabajo, son establecidas, en el capítulo 7, las conclusiones que del mismo se han obtenido, así como algunas recomendaciones para futuros trabajos que den continuidad al trabajo iniciado en esta tesis.

---



# *UNA VISION GENERAL DE LA TEORIA DEL CAOS*

## **2.1 INTRODUCCION**

Si bien es cierto que la característica más impresionante de los sistemas caóticos es su carácter no predecible, como lo apreció Lorenz, la investigación hecha desde entonces en ésta rama ha puesto a la luz que existe un cierto orden dentro de su comportamiento, tanto para los sistemas continuos como para los discretos.

Este orden se detecta en la forma en que un sistema de ecuaciones pasa de tener un estado estable regular, a tenerlo en forma caótica. Para apreciar esto se han diseñado gráficas y métodos de análisis que muestran claramente la forma organizada en que sucede este fenómeno, el cual es llamado *Ruta al caos* y que forma parte de la llamada *Teoría de bifurcaciones* en ecuaciones diferenciales (Hale & Koçak, 1991).

Dentro de este análisis, surgen en forma natural, objetos geométricos con propiedades especiales, como el perímetro infinito de una curva cerrada que encierra un



área finita. Estas gráficas son llamadas *fractales*<sup>1</sup> y en los últimos años han sido tema de numerosas investigaciones, además del significado que tienen en los sistemas caóticos, por su extraña belleza. Cabe mencionar que gran parte de estas gráficas y análisis es posible llevarlos a cabo apenas desde la década anterior, gracias a la disponibilidad de gran capacidad de cómputo a bajo costo.

La intención de este capítulo es introducir en forma accesible, los principales conceptos necesarios para el entendimiento del caos, así como algunos de las gráficas y procedimientos útiles en el análisis del mismo. Hasta aquí se ha visto a los sistemas dinámicos caóticos sólo como "procesos determinísticos que exhiben comportamiento aleatorio", antes de dar una definición más formal de estos, se requiere de algunos conceptos básicos que se usarán posteriormente.

## 2.2 PRELIMINARES

**Definición:** Cualquier mapeo  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  define un sistema dinámico discreto por la ecuación de estado  $x_{k+1} = f(x_k)$ ,  $k=0,1,2,\dots$  donde  $x_k \in \mathbb{R}^n$ . Comenzando con una condición inicial  $x_0$ , repetidas aplicaciones del mapeo  $f$ , es decir,  $x_1=f(x_0)$ ,  $x_2=f(x_1)=f(f(x_0))$ , ... , da una secuencia de puntos  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  llamada una *órbita*. Este es el equivalente discreto de una *trayectoria* o *flujo*  $\phi_t(x_0)$  que es la solución de la ecuación diferencial  $\dot{x}=f(x)$  con condiciones de frontera  $x(t_0)=x_0$ .

**Definición:** La *órbita hacia adelante* de  $x$  es el conjunto de puntos  $x, f(x), f^2(x), \dots$  y es denotado por  $O^+(x)$ .  $f^2$  se usa para denotar el mapeo iterado  $f(f(x))$ , no la función elevada al cuadrado.

---

<sup>1</sup> *Fractal* significa fraccionario o no entero. *Curva fractal* se refiere a que la dimensión de la curva es fraccionaria, como se verá más adelante.

**Definición:** Un punto  $y$  es un *punto límite- $\omega$*  de  $x$  si, para toda vecindad  $U$  de  $x$ ,  $\phi_t(x)$  entra repetidamente a  $U$  cuando  $t \rightarrow \infty$  (la  $\omega$  significa que el tiempo corre hacia adelante, es decir, hacia  $+\infty$ ). El conjunto  $L(x)$  de todos los puntos límite- $\omega$  de  $x$  es llamado el *conjunto límite- $\omega$*  de  $x$ .

**Definición:** Un conjunto límite- $\omega$   $L$  es *atractor* si existe una vecindad abierta  $U$  de  $L$  tal que  $L(x)=L$  para toda  $x \in U$ .

**Definición:** La *región de atracción*  $B_L$  de un conjunto atractor  $L$  es definida como la unión de tales vecindades  $U$ .  $B_L$  es el conjunto de todas las condiciones iniciales que tienden hacia  $L$  como  $t \rightarrow \infty$ . Es un conjunto abierto.

En un sistema lineal asintóticamente estable sólo hay un conjunto límite y la región de atracción es el espacio de estado completo. Por el contrario, puede haber varios conjuntos límite en un sistema típico no-lineal. En particular se pueden tener varios conjuntos límite atractores con diferentes regiones de atracción. La condición inicial determina cual conjunto límite será eventualmente alcanzado.

Los tipos de conjunto límite actualmente conocidos son:

a) *Puntos de equilibrio:* Es un objeto cero-dimensional en el espacio de estado, relacionado con sistemas que van al reposo después de un transitorio. El punto  $x^*$  es un punto de equilibrio si y sólo si  $f(x^*)=0$ .

b) *Ciclos límite:* Es una órbita cerrada, representada por un objeto unidimensional asociado con un estado estable periódico.

c) *Soluciones cuasi-periódicas:* En donde dos o más periodicidades pueden ser identificadas, relacionadas por números irracionales. Para dos periodicidades el conjunto límite es una superficie toroidal de dos dimensiones.

d) *Atractores extraños*: Es el objeto geométrico en el espacio de estado a el cual las trayectorias caóticas convergen. El atractor de un sistema caótico no es un objeto geométrico simple, como un círculo o un toroide, de hecho, no es incluso una variedad, sino que es un poco más complicado geoméricamente; ellos están relacionados con conjuntos de Cantor<sup>2</sup> y poseen dimensión fraccionaria<sup>3</sup>.

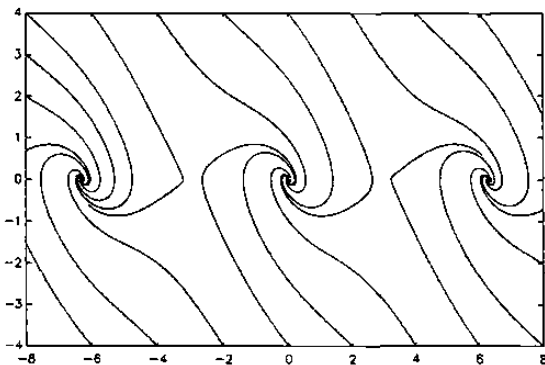


Fig. 2.1 Puntos de equilibrio para la ecuación de un péndulo.

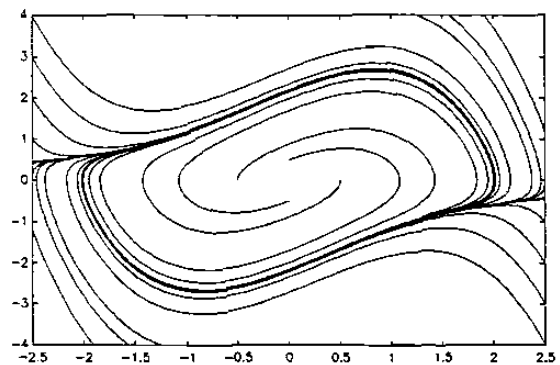


Fig. 2.2 Ciclo límite que corresponde a las ec. de Van der Pol

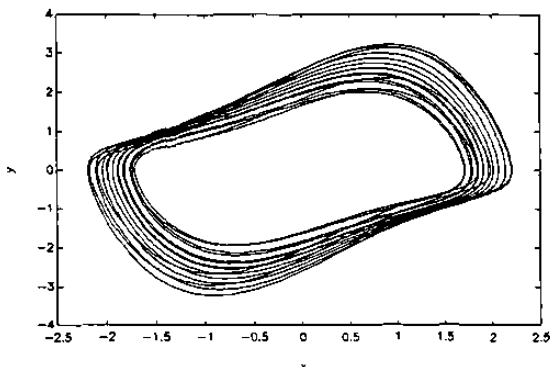


Fig. 2.3 Orbita cuasiperiódica en la ec. de Van der Pol

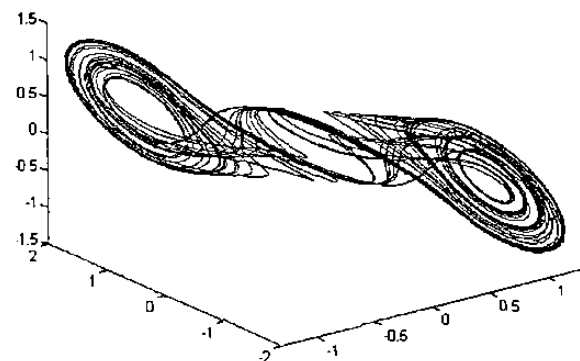


Fig. 2.4 Atractor *Double Scroll* del circuito de Chua

<sup>2</sup> Un *conjunto de Cantor* es un conjunto cerrado, tal que el subconjunto más grande conexo es un punto aislado, y cada punto en el conjunto es un punto límite. Es un conjunto totalmente desconectado.

<sup>3</sup> El tipo de dimensión que se maneja aquí no es el que se maneja en forma común, sino que es la llamada *dimensión fractal*, que será explicada en la sección 2.4.

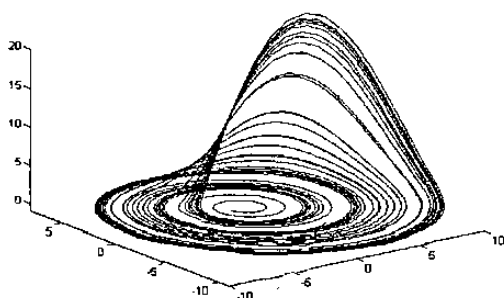


Fig. 2.5 Atractor correspondiente a las ec. de Rössler.

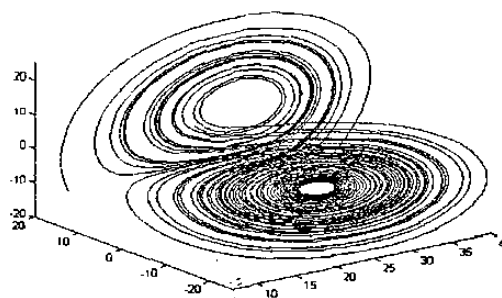


Fig. 2.6 Atractor de las ec. de Lorenz.

Una rápida revisión de las gráficas 2.1-2.6 da la intuición de que, por unicidad en la solución de ecuaciones diferenciales, el caos no puede aparecer en sistemas autónomos de dimensión menor que tres. Sin embargo, esto no es válido para sistemas discretos, en los cuales basta con una sola ecuación para obtener un comportamiento extraño.

**Definición:** El equivalente discreto de los puntos de equilibrio son los llamados *Puntos fijos*, que están definidos para una función  $f$  como los puntos  $x$  que satisfacen  $f(x)=x$ .

**Definición:** Un punto  $x$  es un *punto periódico* de período  $n$  si  $f^n(x)=x$ , donde la notación  $f^n$  significa aplicar iterativamente la función  $n$  veces.

**Definición:** Un punto  $x$  es *eventualmente periódico* de período  $n$  si  $x$  no es periódico pero existe  $m>0$  tal que  $f^{m+i}(x)=f^i(x)$  para todo  $i\geq m$ . Esto es,  $f^i(x)$  es periódico para  $i\geq m$ .

Desde un punto de vista práctico, el caos es un comportamiento de estado estable acotado que *no es* un punto de equilibrio (o punto fijo), no es una órbita periódica, ni una cuasi-periódica. Por supuesto que esta no es una definición concreta, pero da una idea de la dinámica de los sistemas caóticos.

**Definición:** Un conjunto  $\mathbf{D}$  se dice que es *denso* en un espacio normado  $\mathbf{X}$  si para cada elemento  $x \in \mathbf{X}$  y cada  $\epsilon > 0$  existe  $d \in \mathbf{D}$  con  $\|x - d\| < \epsilon$ . Equivalentemente, un subconjunto  $\mathbf{D}$  de  $\mathbf{X}$  es denso en  $\mathbf{X}$  si  $\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{X}$  (la cerradura de  $\mathbf{D}$  es  $\mathbf{X}$ ).

**Definición:**  $f: \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{J}$  se dice que es *topológicamente transitivo* si para cualquier par de conjuntos abiertos  $\mathbf{U}, \mathbf{V} \subset \mathbf{J}$  existe  $k > 0$  tal que  $f^k(\mathbf{U}) \cap \mathbf{V} \neq \emptyset$ . Intuitivamente, un mapeo topológicamente transitivo tiene puntos los cuales eventualmente se mueven bajo iteración desde una vecindad arbitrariamente pequeña a cualquier otra, es decir, tiene órbitas densas en todo o parte del espacio en que están definidas.

**Definición:**  $f: \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{J}$  posee *dependencia sensitiva a las condiciones iniciales* si existe  $\delta > 0$  tal que, para cualquier  $x \in \mathbf{J}$  y cualquier vecindad  $\mathbf{N}$  de  $x$ , existe  $y \in \mathbf{N}$  y  $n \geq 0$  tal que  $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$ .

Intuitivamente, un mapeo posee dependencia sensitiva a las condiciones iniciales si existen puntos arbitrariamente cercanos a  $x$  los cuales eventualmente se separan de  $x$  una distancia de al menos  $\delta$  bajo iteración de  $f$ . Para todos los propósitos prácticos, las órbitas *llegan a ser no correlacionadas*. Hay que remarcar que no todos los puntos cercanos a  $x$  necesitan eventualmente separarse de  $x$  bajo iteración, pero debe de haber al menos uno de tales puntos en cada vecindad de  $x$ .

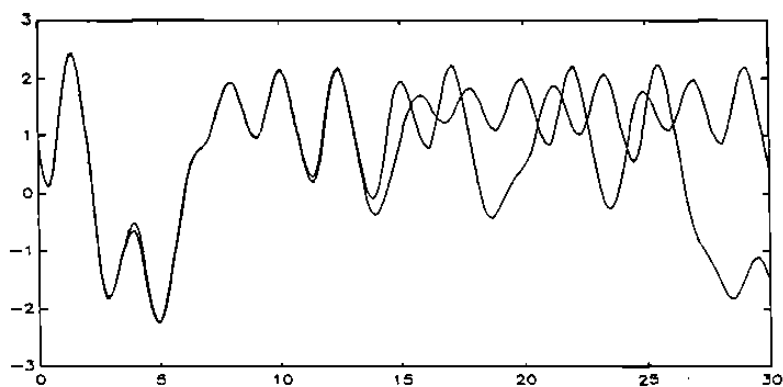


Fig. 2.7 Sensibilidad a las condiciones iniciales en el Double Scroll.

La siguiente definición es dada en (Devaney, 1989):

**Definición:** Sea el  $V$  un conjunto. La función  $f: V \rightarrow V$  se dice que es caótico en  $V$  si:

- 1)  $f$  tiene dependencia sensitiva a las condiciones iniciales.
- 2)  $f$  es topológicamente transitivo.
- 3) El conjunto de puntos periódicos de  $f$  es denso en  $V$ .<sup>4</sup>

Asociado a la función  $f$ , existe un sistema dinámico el cual se dice caótico si la función  $f$  lo es.

La dependencia sensitiva a las condiciones iniciales tiene una importante implicación: En la práctica, siempre hay un error de medición o de especificación del sistema. Además, siempre hay ruido presente, ya sea ruido térmico en un sistema físico o ruido computacional en una simulación. Debido a la dependencia sensitiva, estos errores, aunque sean arbitrariamente pequeños, eventualmente alterarán la conducta macroscópica de un sistema caótico. Así, en un sentido muy real, los sistemas caóticos son impredecibles.

Para ejemplificar esto considere dos espectadores observando un sistema dinámico. El espectador  $A$  observa el sistema el tiempo  $t_1$  y el espectador  $B$  en el tiempo  $t_2 > t_1$ . La incertidumbre de observación es la misma para cada observador. Además, considere que dada una condición inicial en  $t_1$ , el observador  $A$  puede predecir el estado en  $t_2$  con precisión infinita, esto es, el único error es debido a la observación imprecisa de la condición inicial. La pregunta es: ¿Cuál observador conoce más precisamente el estado en  $t_2$ , el observador  $A$  usando observación mas predicción ó el observador  $B$  usando sólo observación?

---

<sup>4</sup> Es demostrado en (Peitgen, *et. al.*, 1992) que la condición 1) es implicada por las condiciones 2) y 3), sin embargo, se utilizará esta definición por ser la más manejada en la literatura.

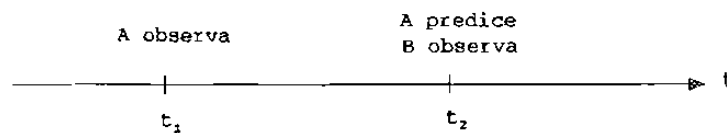


Fig. 2.8 Observación de un proceso dinámico en dos tiempos diferentes.

Si el observador  $A$  conoce más precisamente el estado en  $t_2$ , el sistema se dice que es *predictivo*. Para un sistema predictivo, las observaciones anteriores dan mayor información que las posteriores. En otras palabras las predicciones son más exactas que las observaciones.

Si el observador  $B$  conoce con mayor precisión el estado en  $t_2$ , el sistema es llamado *no predictivo*. En un sistema no predictivo, entre más posterior sea la observación, mayor información es ganada.

Tal vez el más claro de los sistemas no predictivos es la predicción meteorológica, de la cual sólo puede hacerse un pronóstico confiable de unas cuantas horas. Esto es más palpable en el modelo realizado por Lorenz (Vincent & Yu, 1991), el cual mostraba notables diferencias con tan sólo cambiar de computadora al simularlo.

**Definición:**  $f: J \rightarrow J$  es *expansivo* si existe  $\lambda > 0$  tal que, para cualquier  $x, y \in J$ ,  $x \neq y$ , existe  $n$  tal que  $|f^n(x) - f^n(y)| > \lambda$ .

La expansividad difiere de la dependencia sensitiva a las condiciones iniciales en que *todos* los puntos cercanos eventualmente se separan una distancia de al menos  $\lambda$ .

Como un ejemplo de un sistema predictivo, considere un flujo de contracción, esto es, un sistema donde todas las trayectorias se aproximan unas a otras:

$$\|\phi_{t_2}(y) - \phi_{t_2}(x)\| < l \|\phi_{t_1}(y) - \phi_{t_1}(x)\| \quad l < 1$$

$\forall x, y, x \neq y, y \forall t_1 < t_2$ . Llamemos  $x_1$  a la observación del espectador  $A$ . El observador  $A$  sabe que el estado actual en tiempo  $t_1$  cae en algún lugar dentro de la  $\epsilon$ -bola  $B_\epsilon(x_1)$  centrada en  $x_1$  y, por lo tanto, que el estado real en tiempo  $t_2$  está contenido en el conjunto  $\phi_{t_2-t_1}(B_\epsilon(x_1))$ . Si la observación del espectador  $B$  es  $x_2$ , él sabe que el estado real en tiempo  $t_2$  cae dentro de la  $\epsilon$ -bola  $B_\epsilon(x_2)$ . Ya que el flujo es de contracción, el diámetro de  $\phi_{t_2-t_1}(B_\epsilon(x_1))$  es más pequeño que el de  $B_\epsilon(x_2)$  y el observador  $A$  conoce más precisamente la posición del estado real en tiempo  $t_2$ .

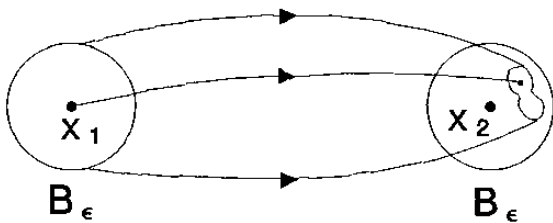


Fig. 2.9 Mapeo de contracción.

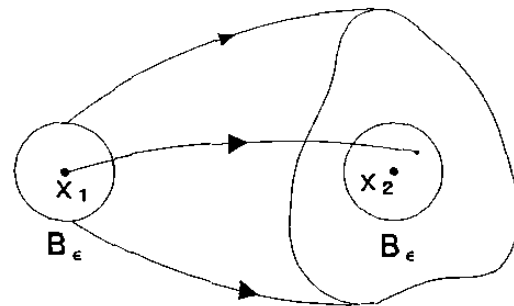


Fig. 2.10 Mapeo de expansión.

Ahora considere un flujo expansivo esto es, uno donde todas las trayectorias divergen:

$$\|\phi_{t_2}(y) - \phi_{t_2}(x)\| > \|\phi_{t_1}(y) - \phi_{t_1}(x)\|$$

$\forall x, y, y \neq x, y \forall t_1, t_2, t_2 > t_1$ . Para un sistema expansivo, el diámetro de  $\phi_{t_2-t_1}(B_\epsilon(x_1))$  es más grande que el de  $B_\epsilon(x_2)$ , y el observador  $B$  conoce más precisamente la posición del estado real en  $t_2$ . Así, un sistema expansivo es no predictivo.

Este ejemplo muestra que un flujo expansivo conduce a un sistema no predictivo; sin embargo, ya que un flujo expansivo es no acotado, éste nunca puede lograr un estado estable. La interrogante de cómo el comportamiento de estado estable de un sistema



dinámico caótico es acotado no se ve en forma clara. Un buen ejemplo para contestar esto es la Herradura de Smale, un sistema discreto no predictivo, uno a uno, que mapea el cuadrado unitario en sí mismo. Como se muestra en la figura 2.11, una iteración de la Herradura de Smale comprende tres acciones:

- 1.- *Alargado*: Esto hace el mapeo impredecitivo.
- 2.- *Estrechado*: Esto es necesario para que el mapeo sea uno a uno y que el área del cuadrado permanezca constante.
- 3.- *Doblado*: Se requiere para regresar al cuadrado unitario.

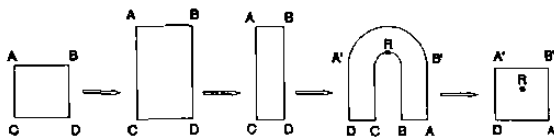


Fig. 2.11 Iteración de la Herradura de Smale.

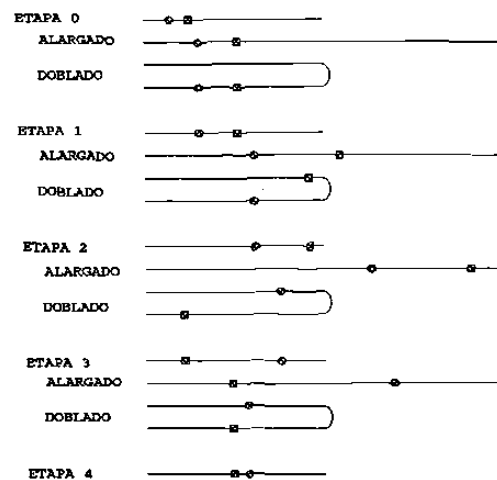


Fig. 2.12 Trayectoria de dos puntos en la Herradura de Smale.

A pesar de que la Herradura de Smale parece ser extremadamente simple, da lugar a flujos muy complicados e incluso puede aparecer en sistemas continuos, es realmente útil en el entendimiento de flujos caóticos. Este ejemplo servirá como referencia posteriormente para detectar caos en ecuaciones usadas en algoritmos de generación de ruido.

De esto se concluye que las trayectorias de un sistema dinámico caótico son acotadas debido a que el mapeo tiene regiones de expansión y regiones de contracción.

Resumiendo, un mapeo caótico posee tres ingredientes: ser no predecible, indescomponibilidad y un elemento de regularidad. Un sistema caótico es impredecible

debido a la dependencia sensitiva a las condiciones iniciales. No puede ser separado o descompuesto en dos subsistemas (dos subconjuntos abiertos invariantes) los cuales no interactúan bajo  $f$  debido a la transitividad topológica. Y, en el centro de su comportamiento aleatorio, se tiene un elemento de regularidad, los puntos periódicos los cuales son densos.

El espectro de potencia de un sistema caótico tiene una naturaleza continua, de banda amplia. Este espectro parecido a ruido es una característica exhibida por todos los sistemas caóticos.

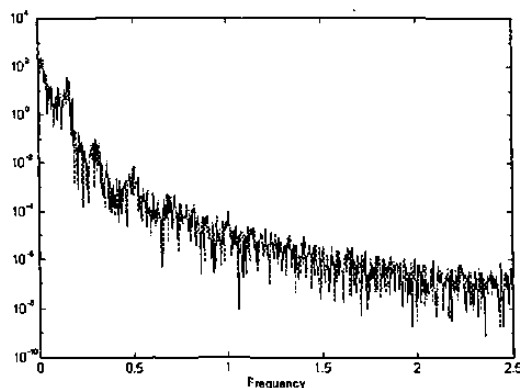


Fig. 2.13 Espectro de potencia del *Double Scroll*.

## 2.3 HERRAMIENTAS DE ANALISIS

### 2.3.1 ANALISIS GRAFICO

En esta sección se introduce un procedimiento geométrico que permite entender la dinámica de mapeos unidimensionales. Este procedimiento llamado *iteración gráfica*, facilita el uso de la gráfica de una función para determinar el comportamiento de sus órbitas en muchos casos.

El procedimiento es el siguiente: considere el sistema discreto  $x_{k+1} = f(x_k)$ , identifique la diagonal  $\Delta = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ . Tomando como condición inicial el punto

$p \in \mathbb{R}$  trácese una línea vertical desde  $(p,0)$  a la gráfica de  $f$  intersectando a la gráfica en  $(p, f(p))$ . Entonces una línea horizontal desde  $(p, f(p))$  a  $\Delta$  intersecta a la diagonal en  $(f(p), f(p))$ . Así una línea vertical a la gráfica seguida por una línea horizontal de regreso a  $\Delta$  lleva a una imagen del punto  $p$  bajo  $f$  sobre la diagonal. Continuando este procedimiento se tiene una figura ilustrativa de la órbita de  $p$ .

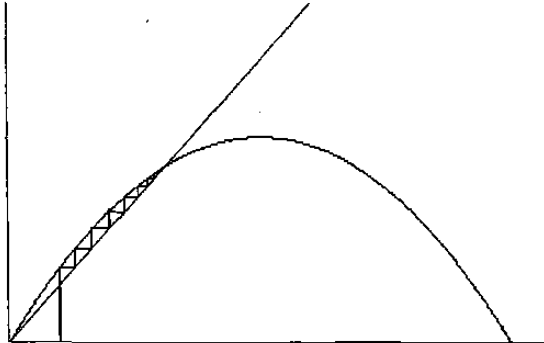


Fig. 2.14 Punto fijo sobreamortiguado.

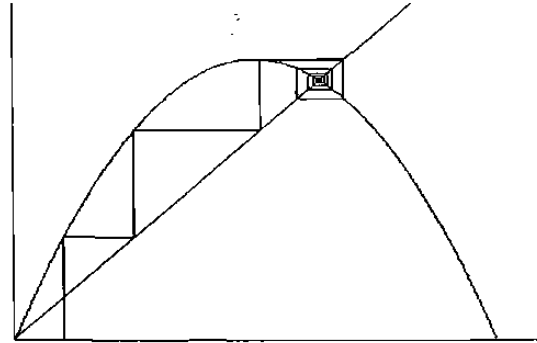


Fig. 2.15 Punto fijo subamortiguado.

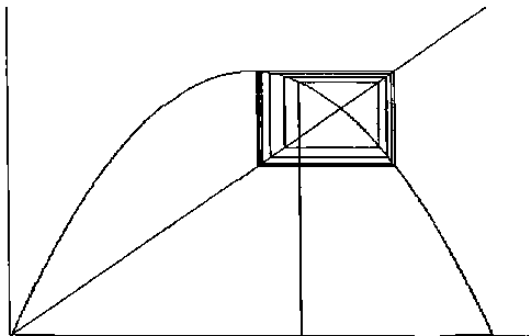


Fig. 2.16 Ciclo límite de período 2.

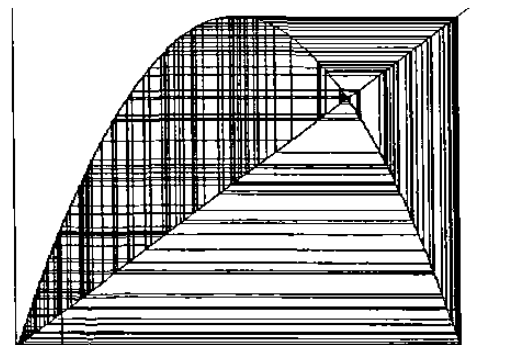


Fig. 2.17 Caos en la ecuación logística.

Ejemplos de este análisis son las figuras 2.14-2.17, y corresponden a la ecuación logística para diferentes valores de parámetros, que será vista con más detalle en la sección siguiente. Fácilmente se puede notar que los puntos donde cruza la línea diagonal con la gráfica de la función corresponden a puntos fijos. Se puede asegurar la existencia de puntos fijos (estables o inestables) de acuerdo al siguiente:

**Teorema 2.1:** (*Teorema del punto fijo*) (Devaney, 1992) Suponga que el mapeo  $f:[a,b] \rightarrow [a,b]$  es continuo. Entonces existe al menos un punto fijo para  $f$  en  $[a,b]$ .

□

Por supuesto, ni el teorema 2.1 ni el método gráfico dan la posición exacta del punto fijo, pero esto se puede saber de su definición  $f(x) = x$ , resolviendo la ecuación  $f(x) - x = 0$ .

Un conocimiento cualitativo de estos puntos fijos se obtiene con los siguientes resultados:

**Teorema 2.2:** (Devaney, 1992) Suponga que  $x_0$  es un punto fijo para  $f$ . Entonces  $x_0$  es un punto fijo atractor si  $|f'(x_0)| < 1$ . El punto  $x_0$  es un punto fijo repulsor si  $|f'(x_0)| > 1$ . Finalmente si  $|f'(x_0)| = 1$ , el punto fijo es llamado neutral o indiferente.

□

Se puede apreciar claramente las características de sensibilidad a las condiciones iniciales y periodicidad del caos utilizando este método, como se aprecia en las siguientes figuras.

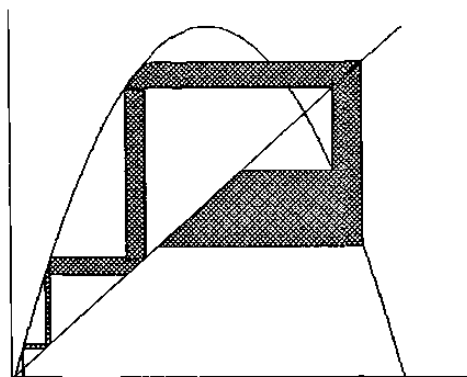


Fig. 2.18 Sensibilidad a las condiciones iniciales.

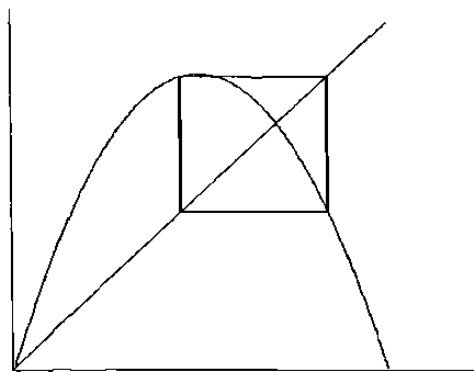


Fig. 2.19 Orbita periódica.

Se puede ver que dando como condición inicial un pequeño intervalo, éste se va ampliando bajo iteración, hasta que eventualmente toma el tamaño del espacio entero.

También es posible obtener gráficamente información acerca de la existencia de puntos periódicos, graficando la función  $f^n(x)$  en lugar de  $f(x)$ , nuevamente la intersección con la línea diagonal, corresponderá a los puntos periódicos de período  $n$ , obviamente la diagonal cruzará también a los puntos fijos. El valor exacto del punto periódico  $x$  lo obtenemos resolviendo la ecuación  $f^n(x) - x = 0$ . La figura 2.20 muestra la

gráfica de la segunda iteración para la ecuación logística.

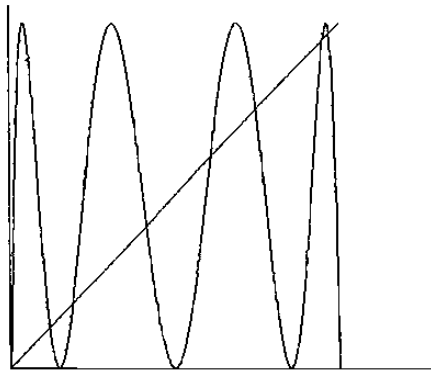


Fig. 2.20 Gráfica de la segunda iteración.

### 2.3.2 TOROIDES

A continuación se muestra una forma de análisis para entender otro tipo de funciones que serán de gran utilidad: Las funciones definidas en un toroide, las cuales tienen la siguiente forma:  $F(x) = G(x) \bmod z$ , donde *mod* es la función módulo, en las que se puede ver que el espacio queda restringido a  $0 \leq x < z$ .

Se puede entender esto gráficamente tomando los valores  $x=0$  y  $x=z$  como si fueran uno sólo, es decir, doblando el espacio sobre sí mismo en forma circular, como se muestra en la gráfica 2.21. En el toroide de dimensión dos, el estado sólo se mueve sobre la superficie de la figura, éste se puede considerar como el producto cartesiano de dos círculos.

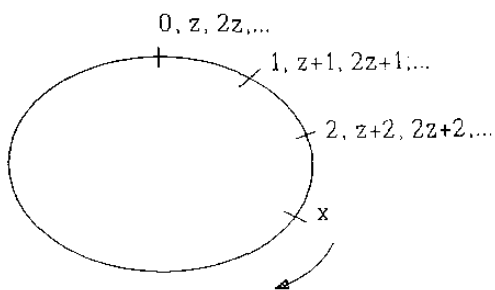


Fig. 2.21 Toroide de dimensión uno.

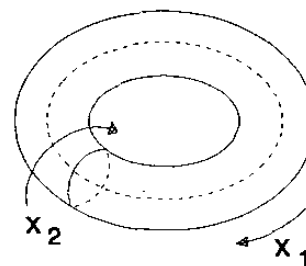


Fig. 2.22 Toroide de dimensión dos.

Denótese por  $T$  el toroide y sea  $\pi$  la proyección natural de  $\mathbb{R}^2$  sobre  $T$ , es decir,  $\pi(x, y) = [x, y] = \pi(x+M, y+N)$ .

Ciertos sistemas dinámicos pueden ser descritos más eficientemente en el plano y entonces proyectados sobre un toroide. Por ejemplo, suponga que  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tiene la propiedad que

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - F \begin{pmatrix} x+M \\ y+N \end{pmatrix}$$

pertenece a los enteros para todos los puntos  $x, y$  en el plano y todos los enteros  $M$  y  $N$ . De aquí sigue que

$$\pi \circ F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \pi \circ F \begin{pmatrix} x+M \\ y+N \end{pmatrix}$$

así que  $F$  induce un mapeo bien definido  $\hat{F}$  sobre el toroide.  $\hat{F}$  es definido por el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^2 \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ T & \xrightarrow{\hat{F}} & T \end{array}$$

Como un ejemplo, si  $L$  es un mapeo lineal cuya representación es una matriz con elementos enteros, entonces  $\hat{L}$  está claramente bien definida sobre  $T$ .  $\hat{L}$  es llamada un *automorfismo toral*<sup>5</sup>.

Sea  $L(x) = Ax$  donde

---

<sup>5</sup> Un automorfismo es una función que mapea un conjunto en si mismo y además es uno a uno y sobre.

- 1.- Todos los elementos de  $A$  son enteros.
- 2.-  $\det(A) = \pm 1$ .
- 3.-  $A$  es hiperbólica.<sup>6</sup>

El mapeo inducido sobre  $T$  por  $A$  es llamado un *automorfismo toral hiperbólico* y es denotado por  $L_A$ .  $L_A$  es claramente diferenciable, ya que su matriz Jacobiana es simplemente la matriz  $A$ . Más aún, ya que  $\det(A) = \pm 1$ , la inversa de  $A$  es también una matriz entera la cual es hiperbólica. Así  $A^{-1}$  también induce un automorfismo toral hiperbólico el cual es, por supuesto, el inverso de  $L_A$ .

### 2.3.3 BIFURCACIONES

En esta sección se analizarán las ecuaciones dinámicas con parámetros, es decir, aquellas en las que el mapeo está definido por funciones del tipo  $f(\lambda, x)$ , donde  $\lambda$  varía dentro de algún espacio de parámetros  $\mathbf{J}$  y  $x \in \mathbf{X}$ , entonces

$$f: \mathbf{J} \times \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$$

**Definición:** Sea  $\dot{x} = f(\lambda, x)$  un campo vectorial que depende del parámetro  $\lambda$ . Para un valor fijo  $\lambda = \lambda_1$ , el campo vectorial  $\dot{x} = f(\lambda_1, x)$  es llamado *estructuralmente estable* si existe un  $\epsilon > 0$  tal que  $\dot{x} = f(\lambda, x)$  es topológicamente equivalente a  $\dot{x} = f(\lambda_1, x)$  para todos los valores de  $\lambda$  que satisfacen  $\|\lambda - \lambda_1\| < \epsilon$ .

Es de interés especial el cómo cambia el flujo (solución de la ecuación diferencial que satisface las condiciones de frontera) de acuerdo a las variaciones de  $\lambda$ .

**Definición:** Un valor  $\lambda_0$  en el que hay un cambio básico estructural en el flujo es

---

<sup>6</sup> Para sistemas discretos, sea  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  el espectro de la matriz  $A$ , esta matriz se dice *hiperbólica* si  $|\lambda_i| \neq 1, i=1, 2, \dots, n$ .

llamado *un punto de bifurcación*. En otras palabras, una *bifurcación* es un cambio cualitativo en el comportamiento del sistema al variar  $\lambda$  y el punto de bifurcación es el valor de  $\lambda$  donde el sistema pierde su estabilidad estructural.

La clase de bifurcaciones con la que se ejemplificará es llamada *bifurcación de duplicación de período* y se define de la siguiente manera:

**Definición:** Una familia de funciones de un parámetro  $F_\lambda$  va a una *bifurcación de duplicación de período* en el valor del parámetro  $\lambda = \lambda_0$  si hay un intervalo abierto  $I$  y un  $\epsilon > 0$  tal que:

- 1.- Para cada  $\lambda$  en el intervalo  $[\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon]$ , hay un único punto fijo  $p_\lambda$  para  $F_\lambda$  en  $I$ .
- 2.- Para  $\lambda_0 - \epsilon < \lambda \leq \lambda_0$ ,  $F_\lambda$  no tiene ciclos de período dos en  $I$  y  $p_\lambda$  es atractor (repulsor).
- 3.- Para  $\lambda_0 < \lambda < \lambda_0 + \epsilon$ , hay un único ciclo de período dos  $q_\lambda^1, q_\lambda^2$  en  $I$  con  $F_\lambda(q_\lambda^1) = q_\lambda^2$  y  $F_\lambda(q_\lambda^2) = q_\lambda^1$ . Este 2-ciclo es atractor (repulsor), mientras tanto, el punto fijo  $p_\lambda$  es repulsor (atractor).
- 4.- Cuando  $\lambda \rightarrow \lambda_0$ , tenemos  $q_\lambda^i \rightarrow p_{\lambda_0}$ .

Esto lo se puede ver en la siguiente gráfica en la que se representan los puntos fijos estables con una línea sólida y los inestables con una línea punteada.



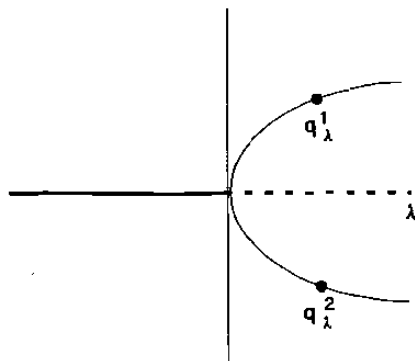


Fig. 2.23 Bifurcación tipo *Duplicación de período*.

La ecuación Logística es un buen ejemplo de este tipo de bifurcaciones, la cual es usada como modelo de crecimiento de población:

$$f(\lambda, x) = \lambda x (1 - x), \quad \lambda > 1$$

Para mostrar las bifurcaciones que se presentan en esta ecuación, se procede graficando el valor de  $x$  en estado estable para cada  $\lambda$ , es decir, los puntos que se alcanzan en estado estable.

Al variar gradualmente  $\lambda$ , obtenemos el diagrama de *estado final* o *diagrama de Feigenbaum*, con el que nos podemos dar cuenta de las múltiples bifurcaciones que se presentan. Nótese que los puntos que se observan en la gráfica 2.24 corresponden a las órbitas periódicas estables solamente, y además, que los períodos se presentan en un perfecto orden:  $1 \triangleright 2 \triangleright 4 \triangleright 8 \triangleright 16 \dots$  al principio, para regresar después a grupos de período 3 y nuevamente bifurcarse al doble cada vez hasta llegar al caos, en donde existen puntos de período  $n$  para  $n=1,2,3,\dots$ . Esto es llamado *ruta al caos de duplicación de período* y concuerda con el *teorema de Sharkovskii* (Drazin, 1992) que asegura que si un mapeo escalar tiene un punto de período 3, entonces tiene puntos periódicos de todos los períodos. Esta no es la única ruta al caos, una mayor información sobre otras rutas puede verse en (Chua & Madan, 1988).

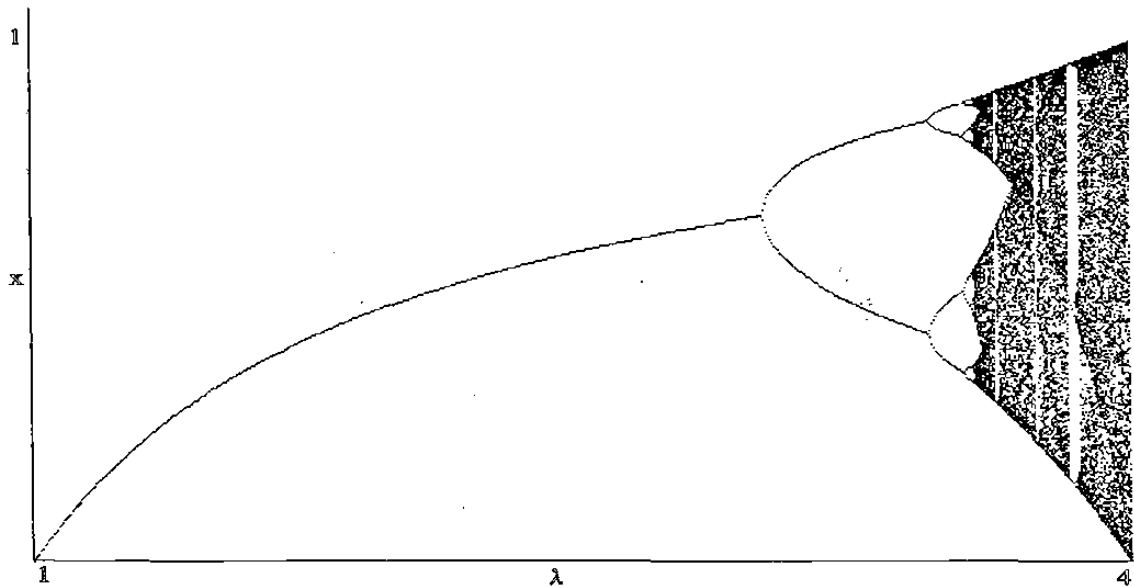


Fig. 2.24 Diagrama de Feigenbaum para la ecuación logística.

Esta figura es *autosimilar*, lo que significa que si amplificamos una pequeña parte de la figura por un escala adecuada, obtenemos una gráfica similar a la original.

### 2.3.4 GRAFICAS ESTADISTICAS

La propiedad de ser topológicamente transitivos hace que las órbitas de los sistemas caóticos eventualmente llenen el intervalo completo en que están definidos, así como cada pequeño subintervalo arbitrario. Tales órbitas son llamadas *ergódicas*. Pero se debe ser cuidadoso, no todos los puntos iniciales de un intervalo producen órbitas ergódicas, por ejemplo puntos periódicos de periodicidad arbitraria y sus preimágenes producen órbitas que no alcanzan todos los subintervalos. Aunque teóricamente cada subintervalo contiene una cantidad infinita de puntos con órbitas ergódicas, la precisión finita de las computadoras hace imposible representar en forma arbitrariamente precisa cualquier número del intervalo.

Para apreciar mejor la ergodicidad de tales trayectorias se usarán histogramas, que

permiten ver la cantidad de veces que un intervalo es visitado, esto es, la distribución probabilística de la órbita. Por lo que se mencionó antes, estas gráficas sufren cambios apreciables al utilizar diferente precisión numérica, sin embargo, la utilización de aritmética de doble precisión parece ser suficiente para superar este problema (Peitgen, 1992). En las gráficas siguientes se aprecia el error provocado por la diferencia de precisión.

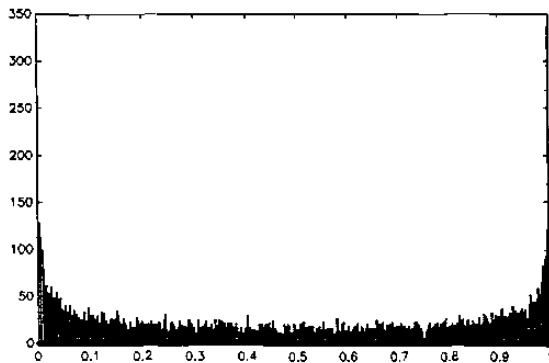


Fig. 2.25 Histograma para la ec. logística con doble precisión.

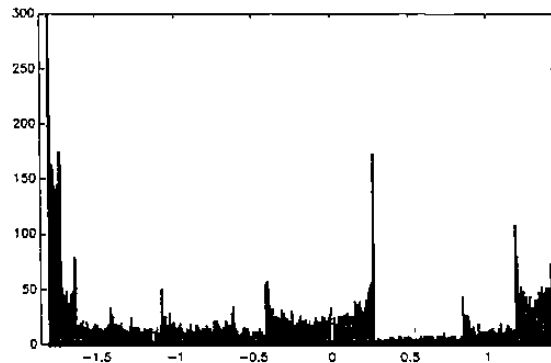


Fig. 2.26 Histograma para  $f(x)=x^2-1.8$  con doble precisión.

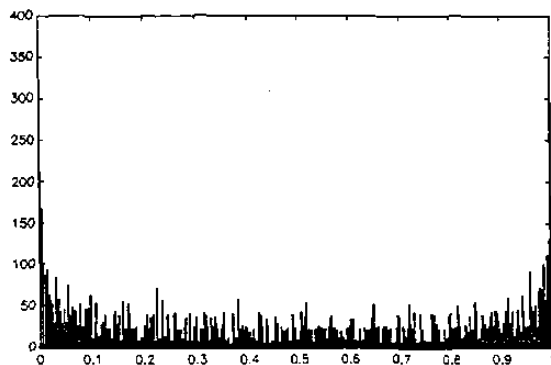


Fig. 2.27 Histograma para la ec. logística con simple precisión.

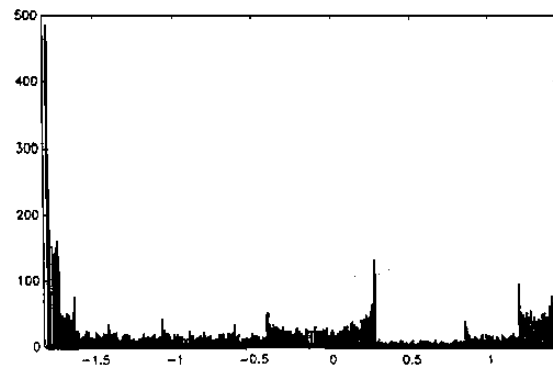


Fig. 2.28 Histograma para  $f(x)=x^2-1.8$  con simple precisión.

Para realizar un análisis estadístico más completo, serán utilizadas también las gráficas de correlación y, como se vio anteriormente, las de espectro de potencias. La gráfica de correlación es obtenida convolucionando el vector correspondiente a la órbita consigo mismo, y para un vector cuyos valores no estén muy correlacionados, la gráfica siempre se mantendrá cercana a cero, excepto en el valor central el cual será muy grande o uno en caso de ser normalizado.

## 2.4 GEOMETRIA FRACTAL

Técnicamente, no hay conexión entre los campos de sistemas dinámicos y geometría fractal. Dinámica es el estudio del movimiento de objetos o procesos, los fractales son objetos geométricos estáticos. Sin embargo, al graficar ciertas regiones correspondientes a estos sistemas, tales como la región de atracción o la gráfica de la trayectoria de estado, estas gráficas resultan ser fractales cuando los sistemas son caóticos.

Los fractales son conjuntos que, al ser ampliados una y otra vez, siempre dan una reproducción de la imagen original (*autosimilar*) (Fig. 2.33). Más aún, los fractales tienen en forma natural una dimensión que no es un número entero, sino un número fraccionario. Para un mejor estudio de estos objetos se puede consultar (Peitgen, *et. al.*, 1992).

Ejemplos de fractales son los *Julia sets*, que indican la región de atracción para determinados atractores; y el *Mandelbrot set*, que da el conjunto de parámetros para los cuales la ecuación  $x_{k+1} = x_k^2 + c$  es estable. Estos ejemplos se ilustran en las figuras 2.29-2.32.

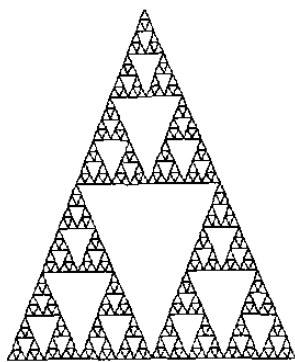


Fig. 2.29 Triángulo de Sierpinski.

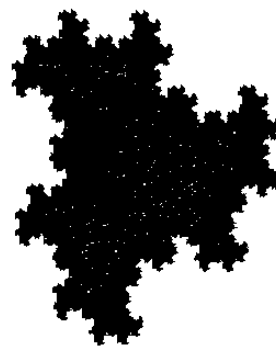


Fig. 2.30 Ejemplo de un Julia set.

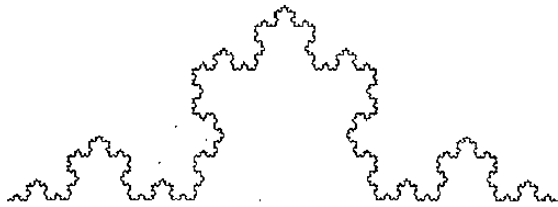


Fig. 2.31 Curva de Koch.

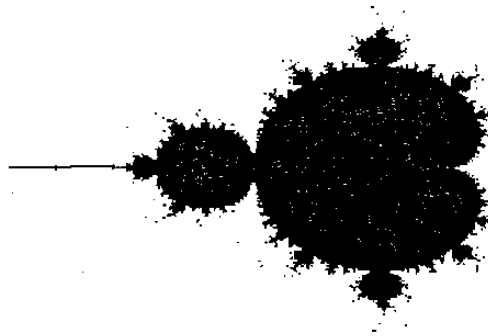


Fig. 2.32 Mandelbrot set.

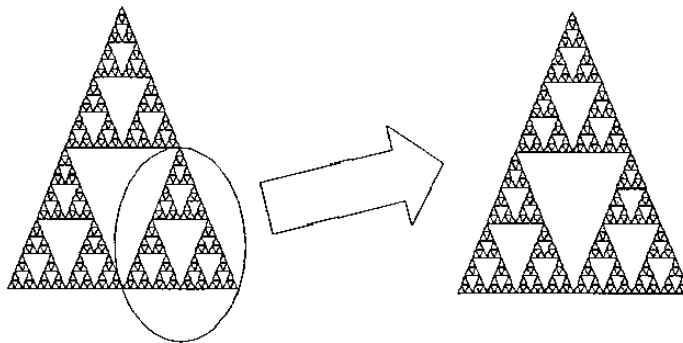


Fig. 2.33 Ampliación de una sección del triángulo de Sierpinski.

En estas figuras la complejidad del perímetro lo hace de longitud infinita, pero el área que encierra es acotada.

El significado de dimensión usado en geometría fractal no es precisamente el mismo que se utiliza en forma cotidiana, sino uno más amplio. Usualmente se define dimensión topológica  $d$  como el número mínimo de coordenadas necesarias para especificar un punto en forma única (dimensión de espacio Euclidiano) y en sistemas dinámicos es el número de variables de estado que son usadas para describir la dinámica del sistema.

A continuación se verá sólo un tipo de la denominada *dimensión fractal*, a la que se llamará  $D$ , que es una definición más general que la topológica. Para un conjunto  $E \subset \mathbb{R}^n$ , se considerará que  $D = d$  si  $E$  es un conjunto "simple" y  $d \leq D \leq n$ , con  $D$  un número no entero y  $D \neq d$ , para conjuntos más complejos.

El concepto de dimensión que se utilizará es el llamado *dimensión por conteo de cajas* (*Box-counting dimension*). Para introducir esta idea, primero se tomará el ejemplo en el cual  $E$  es un segmento de línea recta de longitud  $l$ . Entonces el número  $N$  de líneas iguales con longitud  $\epsilon$  es dado por  $N(\epsilon) \approx l \epsilon^{-1}$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Ahora considérese a  $E$  como el interior de un círculo de radio  $l$ , entonces  $N$ , el número de cuadrados iguales con lado  $\epsilon$  necesarios para cubrir  $E$ , es tal que  $N(\epsilon) \approx \pi l^2 \epsilon^{-2}$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ . De estos ejemplos se llega a una relación de la forma  $N(\epsilon) \approx V \epsilon^{-d}$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  para  $V$  fijo, donde  $d$  es la dimensión topológica de  $E$  en  $\mathbb{R}^m$  y  $E$  es cubierto por hipercubos con longitud de lado  $\epsilon$ . Esta propiedad sugiere la siguiente generalización: Si un conjunto  $E$  es cubierto de tal forma que  $N(\epsilon) \approx V \epsilon^{-D}$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  para algunos números  $D$  y  $V$ , entonces  $D$  es la dimensión de  $E$ , ya sea  $D$  un número entero o no. Así se define

$$D = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left( \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln (\epsilon^{-1})} \right)$$

si el límite existe<sup>7</sup>.

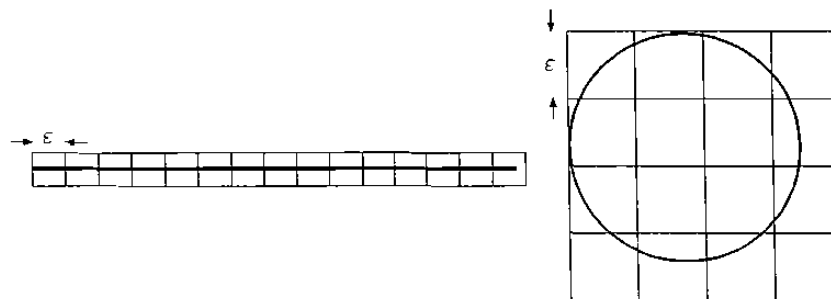


Fig. 2.34 Forma de cubrir una línea y un círculo para obtener la dimensión por *box counting*.

<sup>7</sup>  $\epsilon \downarrow 0$  significa que  $\epsilon \rightarrow 0$  y  $\epsilon > 0$ , es decir,  $\epsilon$  tiende a cero por arriba.

Para entender mejor este concepto se obtendrá la dimensión de la llamada *curva de Koch*, la cual es formada por la siguiente iteración: El punto de partida es una línea  $S_0$  de longitud uno.  $S_1$  es la curva en la cual se reemplazó el tercio intermedio de  $S_0$  por dos lados de un triángulo equilátero cuya base sería la parte eliminada, como se ve en la figura 2.35. La curva  $S_1$  está formada por cuatro segmentos de longitud un tercio.

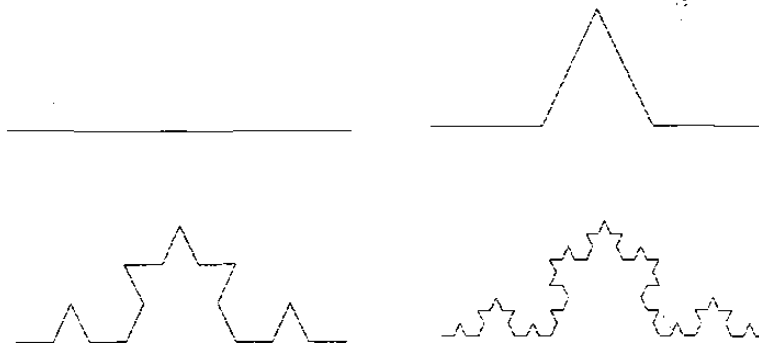


Fig. 2.35 Primeras cuatro iteraciones para la obtención de la curva de Koch.

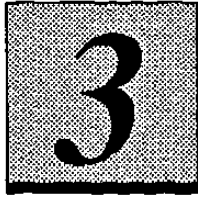
De la misma manera se define  $S_2$  y continuando así se define  $S_n$ , la cual queda formada por  $4^n$  segmentos de línea cada uno de longitud  $3^{-n}$ . Por lo tanto  $S_n$  puede ser cubierta por  $4^n$  cuadrados iguales con lado  $\epsilon = 3^{-n}$ . La curva de Koch  $S$  es la formada cuando  $n \rightarrow \infty$ , por lo que

$$N(\epsilon) \approx 4^n \quad \text{como } n \rightarrow \infty \\ = \epsilon^{-D}$$

de donde  $D = \ln 4 / \ln 3 = 1.26186$ . A pesar de que esta figura es una curva su dimensión es mayor que 1 y por supuesto no llega a ser una superficie. Una de las características que esto produce es que, siendo  $L(\epsilon) = \epsilon N(\epsilon) = \epsilon^{1-D}$  la longitud de  $S_n$ , la longitud total de la curva de Koch  $L(\epsilon) \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , es decir, cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Otras definiciones diferentes de dimensión pueden ser vistas en (Peitgen, *et. al.*, 1992) y (Parker & Chua, 1989).

---



# *GENERACION POR COMPUTADORA DE NUMEROS ALEATORIOS*

## **3.1 INTRODUCCION**

Cuando se usa el término "aleatorio" en la vida diaria es usualmente como un sinónimo de un evento impredecible. Este concepto en el ámbito científico es frecuentemente necesario para representar incertidumbres en modelos matemáticos, ruidos de medición, etc.

Para aplicaciones en una computadora, por ejemplo en simulación de sistemas con ruido, se necesita producir una larga secuencia de números que se comporten como si fueran aleatorios.

Es complicado establecer una definición formal de aleatoriedad debido a que esto significa definir la ausencia de un patrón. Sin embargo, una definición intuitiva es que una secuencia de números es aleatoria si la forma más simple de describir esta secuencia



es escribirla.

En este capítulo se revisarán algunos de los métodos de generación de números aleatorios con distribución uniforme; y se comparará su eficiencia mediante algunas pruebas. Finalmente se mostrará una forma de obtener una secuencia con una distribución probabilística deseada a partir de una con distribución uniforme.

### 3.2 ANTECEDENTES

Los problemas con la definición anterior son 1) no muestra una forma de construir una secuencia aleatoria y 2) la definición es básicamente incorrecta debido a que indica que se puede detectar aleatoriedad analizando una secuencia. Partiendo de lo anterior, un resultado satisfactorio sería una secuencia que pase ciertas pruebas estadísticas de aleatoriedad y que tenga un largo intervalo de números antes de repetirse.

Existen dos métodos bien conocidos para producir números aleatorios:

1) *Métodos basados en fenómenos reales*: Tales como lanzar monedas, dados, etc.,. Estos métodos son lentos y pueden no satisfacer pruebas estadísticas de aleatoriedad.

2) *Métodos basados en algoritmos*: Se puede computar algorítmicamente números aleatorios fuera de línea (por medio de tablas, relaciones de recurrencia, etc.), y usarlos en un programa o proceso conforme se necesite.

Antes de la invención de las computadoras, hubo la necesidad práctica de números aleatorios. Una tabla de 40,000 dígitos fue publicada en 1927 por Tippet, basada en información del censo. Después, máquinas de propósito especial fueron usadas para generar información aleatoria. Incluso la ecuación logística,  $x_{k+1} = \alpha x_k (1 - x_k)$ , fue sugerida por S.M. Ulam y J. Von Newmann.

El método que en la actualidad es utilizado en forma más común es un algoritmo, en línea con el programa que lo necesita, para generar números uno después de otro. Ya que tales números son generados algorítmicamente, ellos son determinísticos, y no aleatorios, por lo que son llamados *pseudoaleatorios* y al programa se le conoce como un *generador*. La mayoría de los generadores algorítmicos son *cíclicos*, o *periódicos*, esto es, eventualmente repiten la secuencia, esto como consecuencia de la limitada longitud de palabra de las computadoras, a final de cuentas, la computadora es un autómata de estados finitos. A pesar de todo, esta aproximación es suficiente para propósitos prácticos.

Una variedad de criterios han sido propuestos para juzgar la calidad de los generadores. Generalmente no es posible para un sólo generador satisfacer todos ellos. Estos criterios incluyen:

- a) *Alta calidad*: El generador deberá pasar las pruebas estadísticas establecidas y tener un período extremadamente largo.
- b) *Eficiencia*: La ejecución debe de ser rápida y los requerimientos de almacenaje deben ser mínimos.
- c) *Repetibilidad*: Especificando las mismas condiciones iniciales se generara una secuencia idéntica.
- d) *Portabilidad*: La misma secuencia de números deberá ser producida en diferentes computadoras habiendo inicializando el generador de la misma manera.
- e) *Simplicidad*: El algoritmo debe ser fácil de implementar y de usar.

### 3.3 GENERACION DE NUMEROS UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDOS

Los números aleatorios más frecuentemente usados son los *uniformemente distribuidos*, ya sea reales o enteros. Un generador de números uniformemente distribuidos producirá valores uniformemente sobre el intervalo  $[0,1]$  con la misma probabilidad.

Los números provenientes de un generador deben ser independientes y uniformes. Esto significa que no deben tener un patrón aparente entre números sucesivos, de lo contrario se dice que la secuencia es *correlacionada*.

El método casi universal de generar números pseudoaleatorios es seleccionar un valor de inicio o semilla, usualmente un entero, y entonces computar  $x_0$  de la semilla de acuerdo a alguna regla. Entonces el  $(k+1)$ -ésimo número,  $x_{k+1}$ , es obtenido de los precedentes. Inicialmente las reglas fueron escogidas por intuición, tan complicadas, confusas y poco entendibles como fuera posible, por ejemplo, el método de *cuadrados centrales*, uno de los primeros propuestos, en el cual se elevaba el número  $x_k$  al cuadrado y se tomaba  $x_{k+1}$  como un número fijo de dígitos del centro del resultado. En este método  $x_k$  se puede hacer cero en un impredecible número de pasos y entonces todas las subsecuentes  $x_i$  son cero también, o bien, rápidamente cae en un ciclo. El método fue propuesto por Von Neumann, a pesar de sus deficiencias.

Una variante de este método es el de los *productos centrales* que se expresa matemáticamente como

$$U_{i+1} = U_i * U_{i-1}$$

donde  $U_0$  y  $U_1$  se escogen arbitrariamente y el número siguiente en la secuencia se forma tomando los dígitos centrales del producto. Este método tiene un período más largo que el de cuadrados centrales y un mejor comportamiento estadístico, pero también degenera en valores constantes.

Uno de los generadores de enteros más comunes, el *generador congruente*, fue propuesto por Lehmer (Park & Miller, 1988). Este usa la forma

$$x_k = (a x_{k-1} + c) \bmod M, \quad x_0, a, c < M$$

con  $x_0$ ,  $a$  y  $c$  dadas como enteros y el número  $M$  es un número grande. Si se desea tener una distribución uniforme con valores entre 0 y 1, sólo se tiene que dividir cada número obtenido entre  $M$ . Algunas opciones de  $a$  y  $c$  producen secuencias aleatorias aceptables y otras conducen a series correlacionadas.

Una clase de estos generadores es

$$x_n = (\rho x_{n-1}) \bmod M$$

llamado *método congruente multiplicativo*. Por años  $M$  se escogió como  $2^k$ , donde  $k$  era la longitud de palabra de la computadora, esto en una máquina binaria significa tomar los últimos  $k$  dígitos del producto, la parte más baja del acumulador, lo cual le daba al algoritmo una gran velocidad como principal característica. El resultado de este énfasis en velocidad fue una familia de generadores computacionalmente eficientes pero altamente no-portables, estadísticamente defectuosos y no siempre tenían un período completo<sup>8</sup>. Posteriormente este error se corrigió tomando  $M$  como un número primo, lo cual dio las siguientes consecuencias: 1) la secuencia nunca se colapsa a cero, 2) en una secuencia normalizada los valores 0 y 1 no son posibles, el intervalo se convierte en  $[1/M, 1-1/M]$  y, 3) la normalización por  $M$  no afecta las características estadísticas del generador. Por último se llega (Park & Miller, 1988) al siguiente

**Hecho:** El generador  $x_n = (\rho x_{n-1}) \bmod M$  es de período completo si y sólo si  $a$  es una raíz primitiva<sup>9</sup> de  $M$ .

□

Con lo que estadísticamente el generador congruente mejoró notablemente.

---

<sup>8</sup> Un generador congruente tiene período completo si genera  $M-1$  números diferentes antes de repetirse, es decir, el intervalo completo.

<sup>9</sup> Si  $M$  es primo, entonces  $a$  es una raíz primitiva de  $M$  (o elemento primitivo módulo  $M$ ) si y sólo si  $a^n \bmod M \neq 1$  para  $n = 1, 2, \dots, M-2$ .

Los últimos generadores que serán mencionados son los *generadores de Fibonacci*, que están caracterizados por computar el nuevo elemento  $x_k$ , como la diferencia, suma o producto de dos elementos precedentes. El índice de estos elementos nos da el *retraso del generador*. Los generadores de alto retraso son extremadamente eficientes y tienen excelentes propiedades estadísticas.

### 3.4 UNA PRUEBA DE CORRELACION

Existen diferentes pruebas para evaluar la correlación en un generador y sus propiedades estadísticas. Algunas de estas pruebas son de tipo gráfico, en las que, en un plano, se grafican pares de números de la secuencia y se trata de detectar algún patrón en la imagen resultante, lo que indicaría la existencia de un comportamiento ordenado. En esta sección se aplicará una de estas pruebas, llamada *Caos game* (Peitgen, *et al.*, 1992), a los diferentes generadores vistos anteriormente. El *Caos game* no es de ninguna manera una prueba exhaustiva ni demostrada matemáticamente en forma completa, pero será la que se use por la relación que tiene con el capítulo anterior.

El procedimiento del *Caos game* es el siguiente: Tómense como base tres puntos fijos en  $\mathbb{R}^2$ :  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$  formando un triángulo; escójase un punto inicial  $p_0$  en forma arbitraria, y aleatoriamente se elige uno de los tres puntos base, digamos  $q_2$ . El siguiente punto  $p_1$  será el que se encuentre exactamente a la mitad de la línea que une  $p_0$  y  $q_2$ . Se continúa de esta manera indefinidamente siempre tomando como nuevo punto  $p_n$  el que se encuentra a la mitad de punto anterior  $p_{n-1}$  y el punto base elegido aleatoriamente de acuerdo con el generador, como se ilustra en la figura 3.1. Este procedimiento aunque tiene un componente aleatorio formará, independientemente de la condición inicial, una figura bien definida: el triángulo de Sierpinski, visto en el capítulo anterior. La calidad de la imagen y su forma dependen en parte de la correlación del generador y de su distribución probabilística.

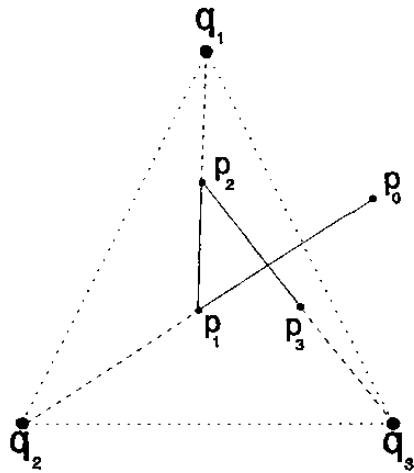


Fig. 3.1 Procedimiento para formar el *Chaos game*.

Como se puede apreciar en las figuras 3.3-3.6, los métodos de generación basados en la ecuación logística, cuadrados centrales y la ecuación de Fibonacci apenas se pueden apreciar puntos que de ninguna manera asemejan al triángulo de Sierpinski. El método congruente, a pesar de que no forma la figura completa, es el que mejor realiza esta prueba. En la figura 3.2 se muestra el *Chaos game* producido a partir del generador de *Matlab*<sup>10</sup>, como una referencia de comparación.

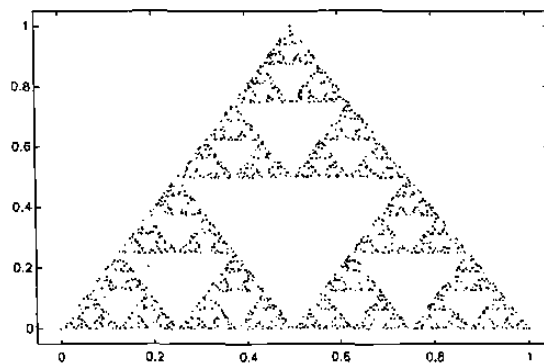


Fig. 3.2 *Chaos game* para el generador de Matlab.

<sup>10</sup> Debido a que la función *Rand* de *Matlab* es de tipo *Built-in* no es posible precisar el método utilizado para la generación.

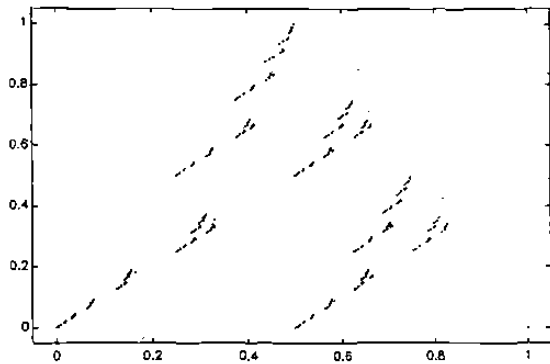


Fig. 3.3 *Chaos game* para la ecuación logística.

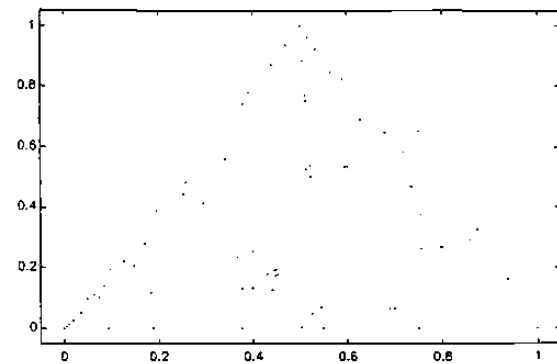


Fig. 3.4 *Chaos game* para el método de cuadrados centrales.

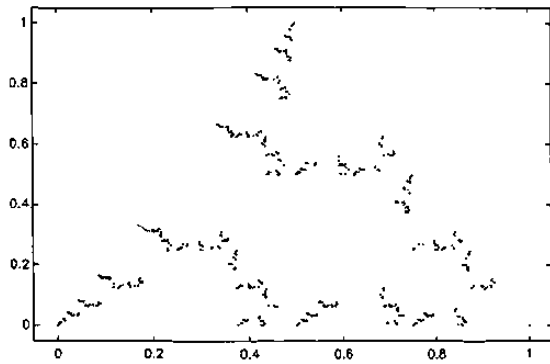


Fig. 3.5 *Chaos game* para el método de Fibonacci.

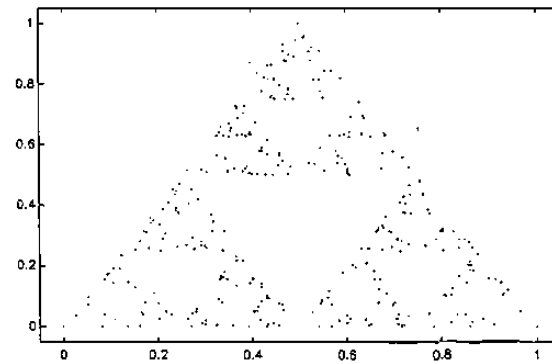


Fig. 3.6 *Chaos game* para el método congruente.

No obstante, en las figuras 3.7-3.16, se puede verificar que el método congruente no posee la mejor distribución ni la mejor gráfica de correlación, correspondiendo esto al método de Fibonacci y a la ecuación logística; ratificando así lo antes mencionado, difícilmente un generador satisface todas las pruebas. Por el contrario, el método de los cuadrados centrales demuestra su alta correlación y corta longitud de período.

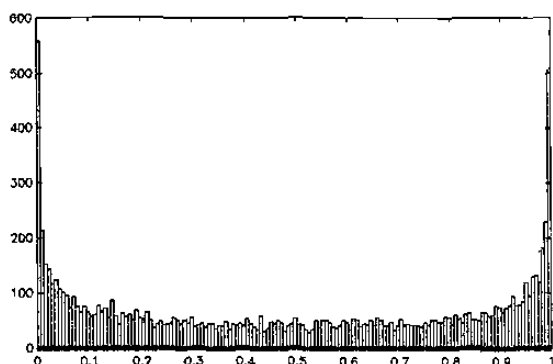


Fig. 3.7 Histograma para la ecuación logística.

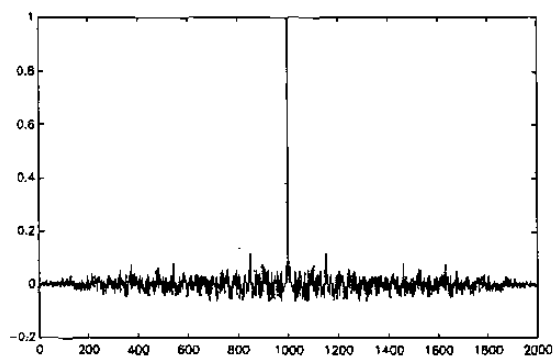


Fig. 3.8 Gráfica de correlación para la ecuación logística.

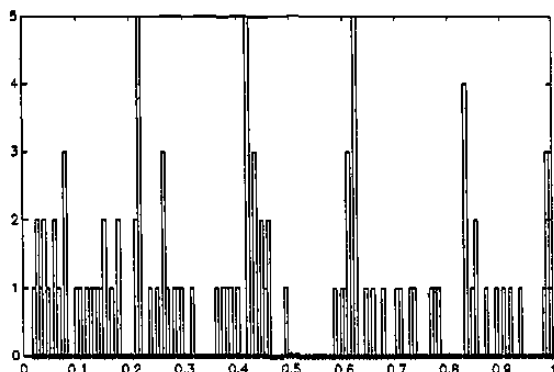


Fig. 3.9 Histograma para el método de cuadrados centrales.

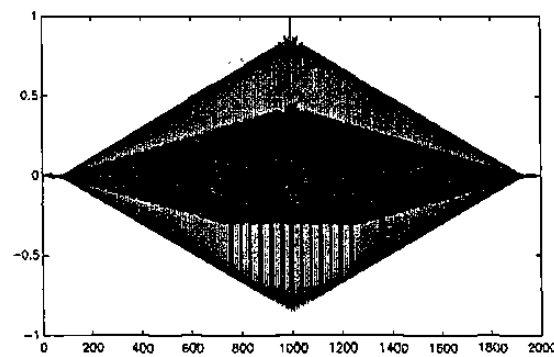


Fig. 3.10 Gráf. de corr. del método de cuadrados centrales.

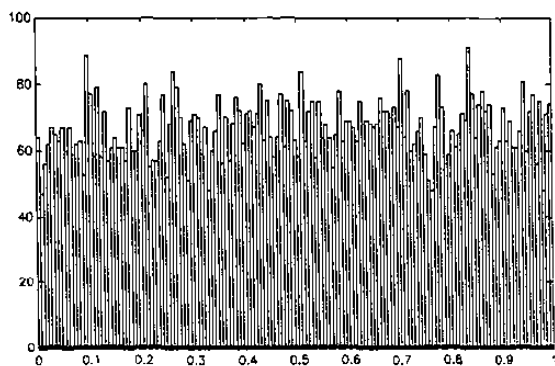


Fig. 3.11 Histograma para el método de Fibonacci.

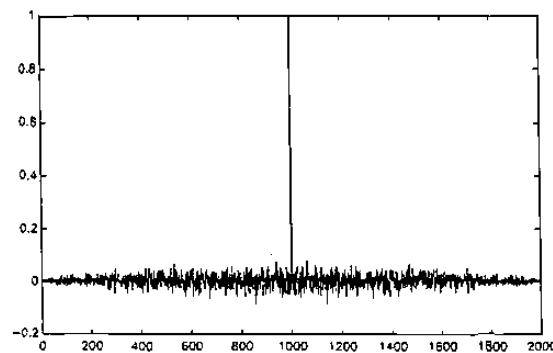


Fig. 3.12 Gráfica de correlación del método de Fibonacci.



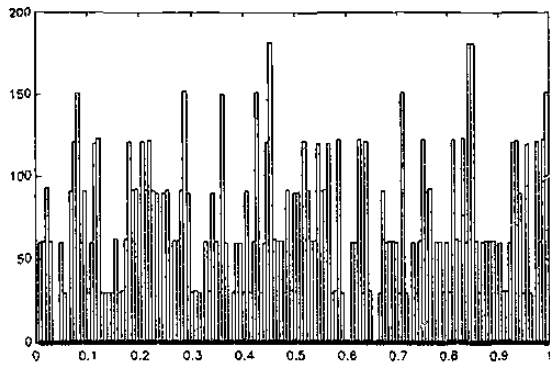


Fig. 3.13 Histograma para el método congruente.

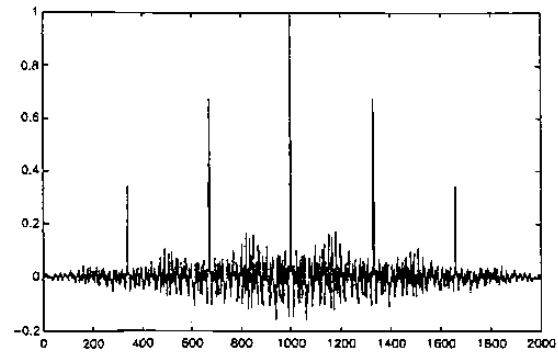


Fig. 3.14 Gráfica de correlación del método congruente.

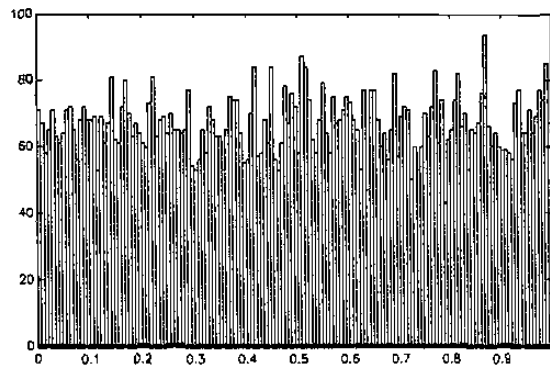


Fig. 3.15 Histograma para el generador de *Matlab*.

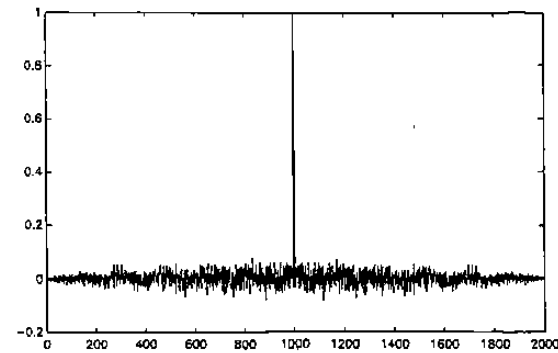


Fig. 3.16 Gráf. de correlación para el generador de *Matlab*.

Al obtener los espectros de potencias para los métodos anteriores, se observa que casi todos son satisfactoriamente uniformes y con un ancho de banda amplio, con excepción del método de cuadrados centrales que muestra una gran componente de una sola frecuencia.

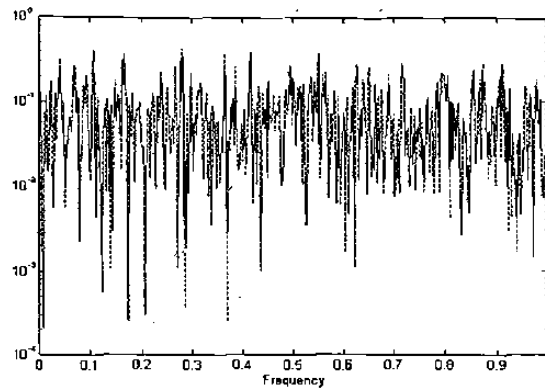


Fig. 3.17 Espectro de potencias del mét. de *Matlab*.

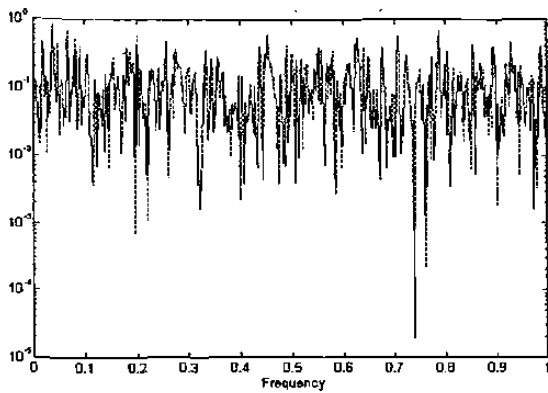


Fig. 3.18 Espectro de Potencias de la ec. logística.

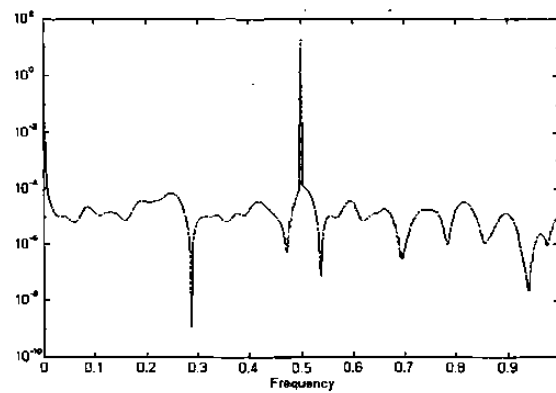


Fig. 3.19 Espectro de potencias del mét. de cuadrados centrales.

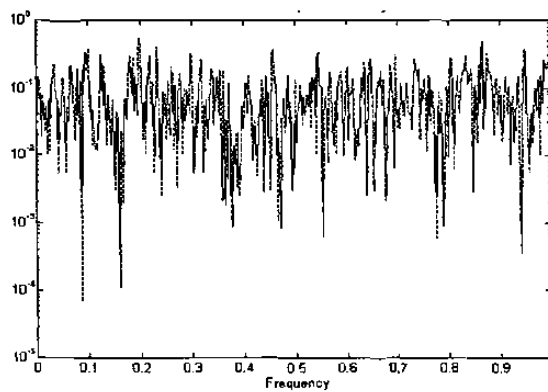


Fig. 3.20 Espectro de potencias del método de Fibonacci.

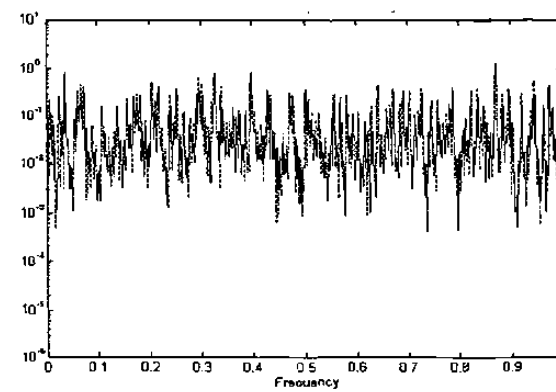


Fig. 3.21 Espectro de potencias del mét. congruente.

### 3.5 GENERACION DE SECUENCIAS CON DISTRIBUCIONES NO UNIFORMES

Después de haber revisado diversas formas para obtener una distribución que es cercana a ser uniforme, es posible que sea necesario generar otros tipos diferentes de distribuciones, por ejemplo: normal, exponencial, etc. Una de las técnicas para conseguir esto es la siguiente (Gillespie, 1992): Se iguala la distribución acumulada  $F(y)$  de la densidad deseada  $f(y)$  a la distribución acumulada  $x$  de la distribución uniforme y se resuelve para  $y$

$$\int_0^x 1 \, dx = x = \int_0^y f(y) \, dy = F(y) \quad (3.1)$$

Aplicando la operación inversa  $F^{-1}$ , se tiene

$$F^{-1}\{F(y)\} = y = F^{-1}(x)$$

Suponiendo que se desea obtener una distribución exponencial  $e^{-y}$ . Entonces

$$f(y) = e^{-y}$$

$$F(y) = \int_0^y e^{-y} \, dy = 1 - e^{-y}$$

Utilizando (3.1) y despejando para  $y$

$$e^{-y} = 1 - x$$

$$y = -\ln(1 - x)$$

por lo que usando la secuencia de números aleatorios  $x_i$  de una distribución uniforme, se logra

$$y_i = -\ln(1 - x_i)$$

o igualmente aceptable

$$y_i = -\ln x_i$$

Existen en la literatura transformaciones similares para la mayoría de las distribuciones. Otro ejemplo es la transformación para obtener una secuencia con distribución normal:

$$s = a [2 \ln(1/r_1)]^{1/2} \quad , \quad \theta = 2 \pi r_2$$

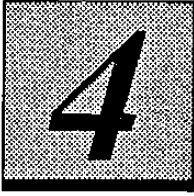
$$x_1 = m + s \cos\theta \quad , \quad x_2 = m + s \sin\theta$$

Donde  $r_1$  y  $r_2$  son números con distribución uniforme,  $a$  es la desviación estándar,  $m$  es la media deseada,  $x_1$  y  $x_2$  son dos números con distribución normal.

Un estudio más extenso de estas transformaciones es llevado a cabo en (Gillespie, 1992).

Obviamente la calidad de la distribución deseada obtenida con la transformación depende de la calidad del generador utilizado para producir la secuencia con distribución uniforme. Los métodos más utilizados para generar esta distribución son el de Fibonacci y el congruente.

---



# *UN SISTEMA DINAMICO CAOTICO COMO GENERADOR DE RUIDO*

## **4.1 INTRODUCCION**

Hasta ahora se han presentado en este trabajo a los sistemas con comportamiento caótico y a los generadores de números aleatorios como temas separados; en este capítulo se utilizarán las características de un sistema dinámico de control, que al ser reducido a una forma simple demuestra tener conducta caótica, para generar números pseudoaleatorios y se verá la relación que tiene éste con los métodos ya mencionados.

El sistema que será utilizado es de tipo lineal con retroalimentación de estado cuantizada (no linealidad que da lugar al caos en este sistema), y se demostrará que el error de cuantización es caótico.

Para finalizar el capítulo se comparará este generador con los vistos en el capítulo 3, utilizando las pruebas descritas en el mismo.

## 4.2 OBTENCION DE LA FORMULA DEL GENERADOR

El sistema dinámico que se utilizará como base pertenece a la familia de sistemas lineales discretos

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= A x_k + B u_k & k \geq 0, & \quad A \in \mathbf{Z}^{n \times n} \\e_k &= x_{k+1} - q_k \\q_k &= Q_h(x_k)\end{aligned}\tag{4.1}$$

Donde  $x_k \in \mathbf{R}^n$ ,  $u_k \in \mathbf{R}$  y  $q_k$  es la medición cuantizada del estado  $x_k$  por medio del cuantizador de truncamiento  $Q_h(\cdot)$ ,  $h$  es el tamaño de cuantización y  $e_k$  es el error de cuantización. Claramente se ve en (4.1) que la ecuación de estado es lineal pero el mapeo de salida es no-lineal.

El operador de cuantización se obtiene aplicando el algoritmo de Euclides de la división

$$\begin{aligned}\text{Sea } x_k &= c_k h + r_k \quad \text{donde } |r_k| < h \\ \text{entonces } q_k &= c_k h \quad c_k \in \mathbf{Z}\end{aligned}$$

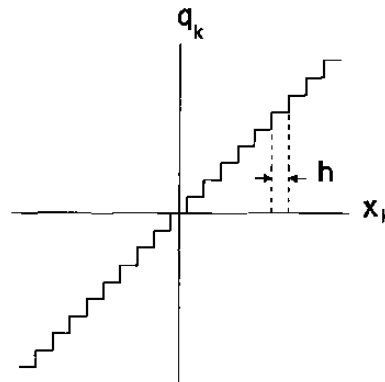


Fig. 4.1 Mapeo de cuantización del estado  $x$ .

Sea  $Q(\cdot)$  el cuantizador con tamaño unitario, entonces  $Q(x)$  es la parte entera de  $x$  y  $\mathcal{E}(x) \triangleq x - Q(x)$  es la parte fraccionaria de  $x$ . Dado  $h > 0$ , el cuantizador  $Q_h(\cdot)$  y el error de cuantización  $\mathcal{E}_h(\cdot)$  pueden ser modelados como

$$\begin{aligned} Q_h(x) &= h Q(x/h) \\ \mathcal{E}_h(x) &= x - Q_h(x) \end{aligned}$$

Además entiéndase que

$$Q_h(x) = ( Q_h(x_1), Q_h(x_2), \dots, Q_h(x_n) )^T$$

Si se considera que el estado cuantizado  $q_k$  es una buena aproximación del estado real  $x_k$ , se puede implementar una retroalimentación lineal de estado  $u_k = -F q_k$ , donde se asume que  $BF \in \mathbf{K}^{n \times n}$ , el conjunto de matrices  $n \times n$  con elementos racionales. Es demostrado en (Feng 1992) el siguiente resultado:

**Lema 4.1:** Para el sistema (4.1) con  $A \in \mathbf{Z}^{n \times n}$ , suponga una retroalimentación lineal de estado  $u_k = -F q_k$  con  $BF \in \mathbf{K}^{n \times n}$ . Sea  $m \in \mathbf{Z}^+$  escogida de tal manera que  $mBF \in \mathbf{Z}^{n \times n}$ ,  $z_k = m h^{-1} x_k = \tilde{q}_k + \tilde{e}_k$  con  $\tilde{q}_k = Q(z_k)$  donde  $z_k$  es el estado normalizado para una cuantización unitaria, de la misma manera  $\tilde{e}_k$  es el error de cuantización normalizado. Entonces, las dinámicas de lazo cerrado son gobernadas por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{k+1} &= A\tilde{q}_k - (mBF)Q(m^{-1}\tilde{q}_k) + Q(A\tilde{e}_k) \\ \tilde{e}_{k+1} &= A\tilde{e}_k - Q(A\tilde{e}_k), \quad k \geq 0 \\ q_k &= Q_h(m^{-1}h\tilde{q}_k) \\ e_k &= m^{-1}h\tilde{e}_k + \mathcal{E}_h(m^{-1}h\tilde{q}_k) \end{aligned} \tag{4.2}$$

□

Nótese que el error cuantizado  $\tilde{e}_k$  depende solamente de la matriz de lazo abierto  $A$ . Además  $\tilde{e}_k \in [0,1)^n$  y así se puede considerar que la ecuación de error para  $\tilde{e}_k$  define un sistema dinámico en un toroide  $n$ -dimensional  $\mathbf{T}^n$ . Para el caso  $A \in \mathbf{Z}^{n \times n}$ , el mapeo  $L_A(\tilde{e}_k) \triangleq A\tilde{e}_k - Q(A\tilde{e}_k)$  es un endomorfismo en  $\mathbf{T}^n$ , según se vió en el capítulo

2. A continuación se obtendrán las condiciones para que el mapeo  $L_A(\cdot): \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  sea caótico.

**Lema 4.2:** El mapeo  $L_A(\cdot): \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  es un endomorfismo<sup>11</sup>.  $L_A$  es surjectivo si y sólo si  $\det(A) \neq 0$ .  $L_A$  es un automorfismo si y sólo si  $\det(A) = \pm 1$ .

□

**Lema 4.3:** Si  $\det(A) \neq 0$ , entonces  $\exists x \in \mathbb{T}^n$  tal que  $\{L_A^k(x)\}_{k=0}^{+\infty}$  es denso en  $\mathbb{T}^n$ , es decir,  $L_A$  es topológicamente transitivo.

□

El lema anterior es equivalente, en términos probabilísticos, a decir que si  $\det(A) \neq 0$ , entonces  $\nu\{x \in \mathbb{T}^n: \{L_A^k(x)\}_{k=0}^{+\infty} \text{ es denso en } \mathbb{T}^n\} = 1$ , donde  $\nu\{\cdot\}$  es una medida probabilística.

**Lema 4.4:** Si  $\det(A) \neq 0$ , entonces  $Per(L_A)$ , el conjunto de puntos periódicos de  $L_A$ , es denso en  $\mathbb{T}^n$ .

□

**Lema 4.5:** Suponga que  $\det(A) \neq 0$ . Entonces,  $L_A: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  tiene dependencia sensitiva a las condiciones iniciales si y sólo si  $\rho(A) \geq 1$  (radio espectral de  $A$ ) y en el caso que  $\rho(A)=1$ , existe un  $\lambda \in \sigma(A)$  con  $|\lambda| = 1$  y la multiplicidad geométrica de  $\lambda$  es más grande que 1.

□

Utilizando estos resultados se llega a una condición necesaria y suficiente para que el mapeo  $L_A(\cdot)$  sea caótico:

**Teorema 4.6:** Suponga que  $\det(A) \neq 0$ . La dinámica del error de cuantización generada por el endomorfismo toral  $L_A(\cdot)$  es caótica si y sólo si:

1)  $\lambda^p \neq 1$  para todo  $\lambda \in \sigma(A)$  y  $p \in \mathbb{Z}$ .

---

<sup>11</sup> Un endomorfismo es una función que mapea un conjunto en si mismo.



2) Si  $\rho(A) = 1$ , entonces existe un  $\lambda \in \sigma(A)$  con  $|\lambda| = 1$  el cual tiene multiplicidad geométrica mayor que uno.

□

Para este tipo de sistemas la suposición  $A \in \mathbf{Z}^{n \times n}$  y la condición  $\det(A) \neq 0$  implica que  $A$  no es una matriz estable y, por lo tanto, se tiene un sistema inestable en lazo abierto. El requerimiento  $-BF \in \mathbf{K}^{n \times n}$  tampoco es una restricción fuerte ya que toda matriz con elementos reales puede ser aproximada por una matriz de  $\mathbf{K}^{n \times n}$ .

Si se utiliza un sistema lineal del tipo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F = (\alpha \ 0 \ 0 \ \dots \ 0) \quad (4.3)$$

donde  $\alpha \in \mathbf{Z}$ ; se puede ver de (4.1) y (4.2) que  $m=1$  y se obtiene que

$$\begin{aligned} \tilde{e}_{k+1}^{(1)} &= \tilde{e}_k^{(2)} \\ \tilde{e}_{k+1}^{(2)} &= \tilde{e}_k^{(3)} \\ &\vdots \\ \tilde{e}_{k+1}^{(n-1)} &= \tilde{e}_k^{(n)} \\ \tilde{e}_{k+1}^{(n)} &= \alpha \tilde{e}_k^{(1)} - Q(\alpha \tilde{e}_k^{(1)}) = L_\alpha(\tilde{e}_k^{(1)}) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Es claro que si  $|\alpha| < 2$  el sistema irá pronto al origen, por lo que se considerará  $|\alpha| \geq 2$ . Para este caso, ya que  $\det(A) = \alpha \neq 0$  y  $\rho(A) = |\alpha|^{1/n} > 1$ , se cumplen las condiciones del teorema 4.6 por lo que la dinámica del error  $\tilde{e}_{k+1} = L_A(\tilde{e}_k)$  es caótica.

En la ecuación (4.4) se distinguen dos operaciones en el vector de error: un corrimiento entre los estados del error, y el mapeo

$L_\alpha(\tilde{e}) = \alpha \tilde{e} - Q(\alpha \tilde{e}) = (\alpha \tilde{e}) \bmod 1$ ; como se puede ver, éste último coincide con el

método congruente visto en el capítulo anterior, y la combinación de ambos equivale a tener  $n$  métodos congruentes funcionando alternadamente.

La figura 4.2 muestra la gráfica de este método y en la figura 4.3 se ve la semejanza con la herradura de Smale en el comportamiento; dando como condición inicial un intervalo pequeño  $I_0$  se nota cómo la función alarga este intervalo por el factor  $\alpha$ , para después doblarlo sobre sí mismo cuando es suficientemente grande ( $I_f$ ) para comprender dos o más rampas.

El intervalo se agranda en cada iteración, es decir, es un mapeo expansivo lo cual es una característica de los sistemas no predictivos, y en los sistemas caóticos causa la sensibilidad a las condiciones iniciales.

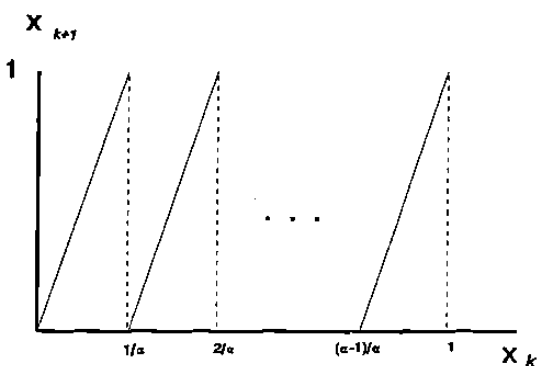


Fig. 4.2 Gráfica del método congruente.

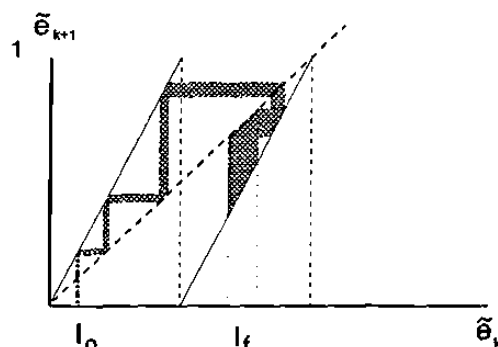


Fig. 4.3 Iteración de un intervalo del método congruente.

Las ilustraciones 4.4-4.6 corresponden a las gráficas de la primera, segunda y tercera iteración del método congruente utilizando  $\alpha=3$ ; se ve como el número de puntos periódicos de período  $n$  es  $3^n$  y además que el conjunto de puntos periódicos es disjunto y denso. La figura 4.7 muestra el diagrama de Feigenbaum y se nota como el sistema pasa inmediatamente de estabilidad a ser caótico.

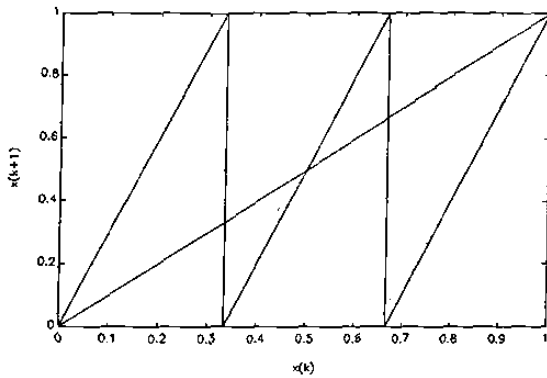


Fig. 4.4 Primera iteración del mét. congruente.

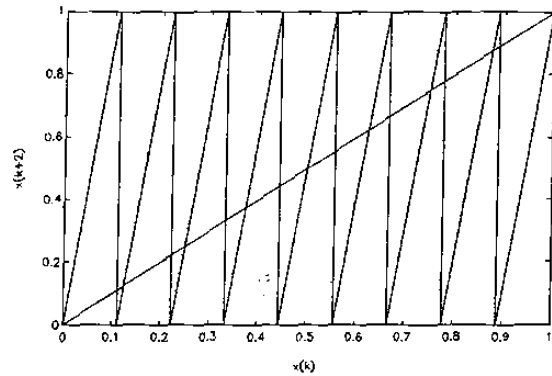


Fig. 4.5 Segunda iteración del mét. congruente.

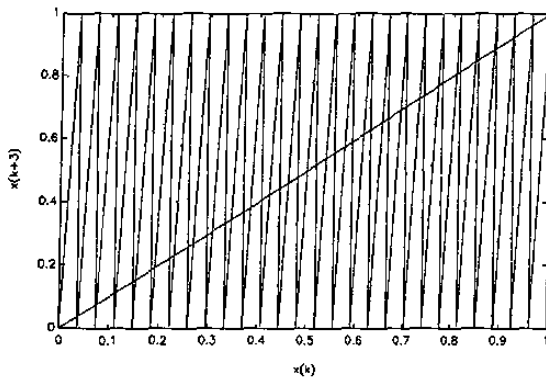


Fig. 4.6 Tercera iteración del mét. congruente.

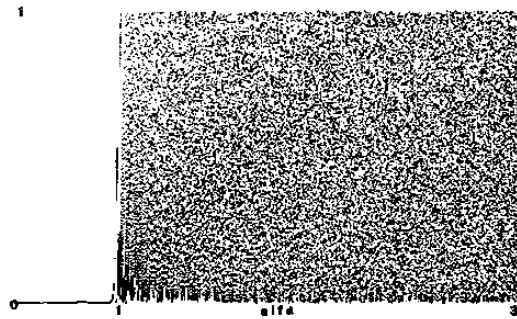


Fig. 4.7 Diag. de Feigenbaum del mét. congruente.

La salida del generador será uno de los estados del vector de estado cuantizado normalizado. Sustituyendo (4.3) en (4.1) se puede llegar a

$$\tilde{q}_k = \begin{pmatrix} \tilde{q}_k^{(1)} \\ \tilde{q}_k^{(2)} \\ \vdots \\ \tilde{q}_k^{(n)} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \alpha \tilde{e}_{k-n}^{(1)} \\ \alpha \tilde{e}_{k-n}^{(2)} \\ \vdots \\ \alpha \tilde{e}_{k-n}^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q(\alpha \tilde{e}_{k-n}^{(1)}) \\ Q(\alpha \tilde{e}_{k-n}^{(2)}) \\ \vdots \\ Q(\alpha \tilde{e}_{k-n}^{(n)}) \end{pmatrix}$$

El estado que se utilizará será el último del vector  $\tilde{q}_k$ , por lo que si se define a la secuencia de salida

$$y = \{\tilde{q}_k^{(n)}\}_{k=0}^{\infty} \text{ entonces} \\ y_k = C \tilde{q}_k \quad \text{donde } C = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]$$

### 4.3 ANALISIS PROBABILISTICO DEL GENERADOR

Una vez que se ha obtenido una fórmula que genera iterativamente una secuencia de números pseudoaleatorios, sus propiedades probabilísticas serán estudiadas. Como se mencionó anteriormente, el generador de la sección anterior es equivalente a una fórmula de Lehmer  $x_k = (a x_{k-1} + c) \bmod M$  con  $M=1$  y  $c=0$ , por cada estado del sistema, funcionando en forma independiente; y debido a que los resultados siguientes son para sistemas unidimensionales, sólo se analizará la fórmula de Lehmer con los parámetros dados.

**Hecho 4.7:** Sea  $\varphi_a = a\xi - Q(a\xi)$ . Suponga que  $\xi_0 \in [0,1)$  es uniformemente distribuido. Sea  $\xi_k = \varphi_a^k(\xi_0) \bmod{a-1}$

$$\eta_k \triangleq \sum_{j=0}^k j \chi_{[j/a, (j+1)/a]}(\xi_k) = Q(a\xi_k)$$

donde  $\chi_B$  es la función indicador<sup>12</sup> de  $B$ . Entonces  $\{\eta_k\}_{k=0}^{+\infty}$  es una secuencia independiente e idénticamente distribuida con  $\eta_k$  uniformemente distribuida en el conjunto  $\Delta = \{0,1,\dots,(a-1)\}$ .

*Prueba:*

Una forma sencilla de obtener este resultado es la siguiente: Debido a que  $\varphi_a$  sólo se ve afectado por el valor inmediato anterior de  $\xi$  y al lema 4.3, la secuencia  $\{\xi_k\}_{k=0}^{+\infty}$  se puede considerar como una cadena de Markov estacionaria<sup>13</sup>. Tomando en cuenta lo anterior, se utilizará un caso simple para llegar al hecho 4.7 por inducción. Sea  $\varphi_a = a\xi - Q(a\xi)$  con  $a=2$  la gráfica de esta ecuación se ve en la figura 4.8

---

<sup>12</sup> Una función indicador  $\chi_I(\Psi)$  en el instante  $k$  toma el valor 1 cuando la función  $\Psi_k$  pertenece al intervalo  $I$ , y toma el valor 0 en cualquier otro caso.

<sup>13</sup> Una cadena de Markov estacionaria es aquella en la que cada valor de la secuencia sólo depende del valor anterior y además el efecto de la distribución de probabilidad de la condición inicial desaparece a medida que el número de pasos aumenta y la distribución de la secuencia se aproxima a una distribución de probabilidad fija.

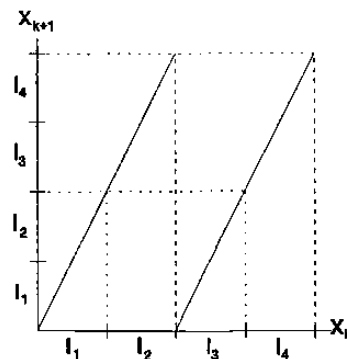


Fig. 4.8 Mapeo de probabilidades de  $\varphi_a$  con  $a=2$ .

se divide el intervalo  $[0,1]$  en cuatro subintervalos exactamente iguales  $I_1, I_2, I_3$  y  $I_4$ . Sean  $p_1, p_2, p_3$  y  $p_4$  las probabilidades de que el estado  $\xi$  se encuentre en cada intervalo  $I_1, I_2, I_3$  y  $I_4$  respectivamente; por lo que si  $\xi_0$  es uniformemente distribuido, se puede formar la siguiente matriz de transición de probabilidad (Bellman, 1965)

$$M = \begin{bmatrix} .5 & .5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .5 & .5 \\ .5 & .5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .5 & .5 \end{bmatrix}$$

si  $P = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4]$ , entonces la ecuación

$$P^{n+1} = P^n M$$

después de varias iteraciones llega al siguiente vector de probabilidades fijo

$$P = [ .25 \ .25 \ .25 \ .25 ]$$

lo cual indica que la probabilidad de que el sistema se encuentre en cualquiera de los subintervalos en cada iteración es la misma para cada uno de ellos. Este resultado se puede generalizar por inducción para un número arbitrario de subintervalos y para cualquier valor de  $a$ .

□

Una implicación importante de este hecho es que, para casi cualquier condición inicial, la frecuencia con la que  $\xi_k$  visita cada uno de los subintervalos  $[j/a, (j+1)/a]$  es asintóticamente la misma, y lo mismo puede ser aplicado a la salida del generador.

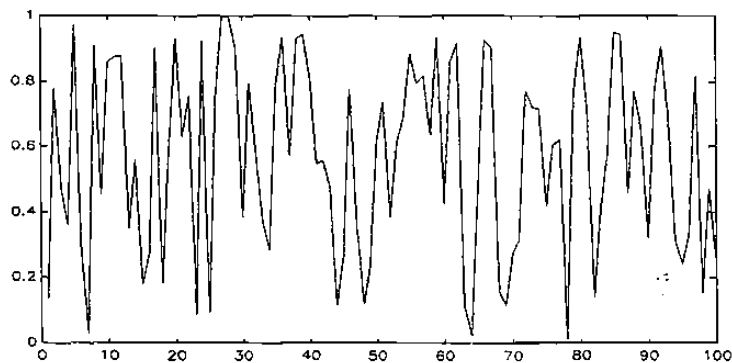


Fig. 4.9 Comportamiento en el tiempo del generador caótico.

En las figuras 4.10-4.11 se aprecia un histograma para una realización producida por un generador caótico de dimensión cinco, así como la gráfica de correlación de la misma. Los valores experimentales de media y desviación estándar son:  $\bar{x} = .4982$  y  $\sigma = .2881$ , los cuales son bastante cercanos a los ideales  $\bar{x} = .5$  y  $\sigma = .2886$ .

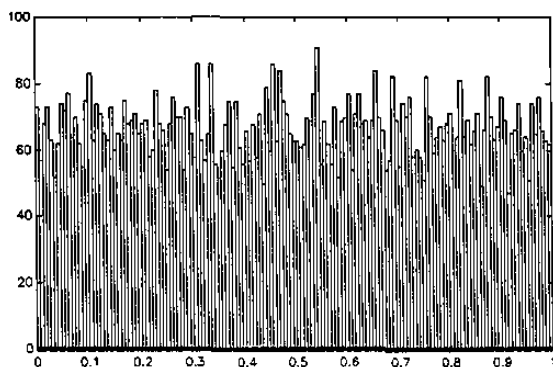


Fig. 4.10 Distribución producida por el generador caótico.

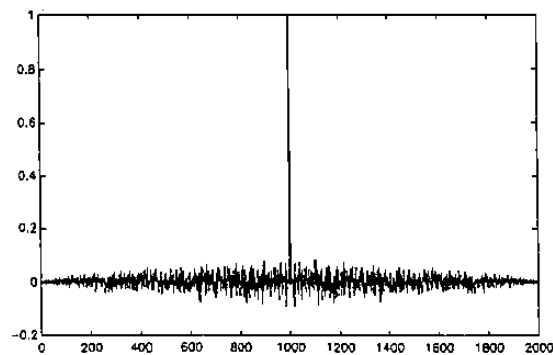


Fig. 4.11 Gráfica de correlación para el generador caótico.

Además se ve que el espectro de potencias es de banda amplia y con forma de ruido (lo que es característico de los sistemas caóticos). El *chaos game* para este generador es, al menos, tan bueno como el producido por *Matlab* en el capítulo anterior.

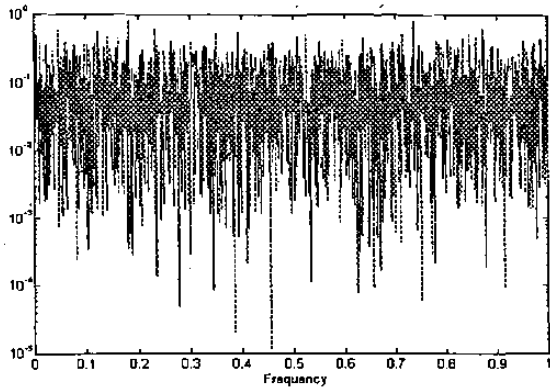


Fig. 4.12 Espectro de potencia para el generador caótico.

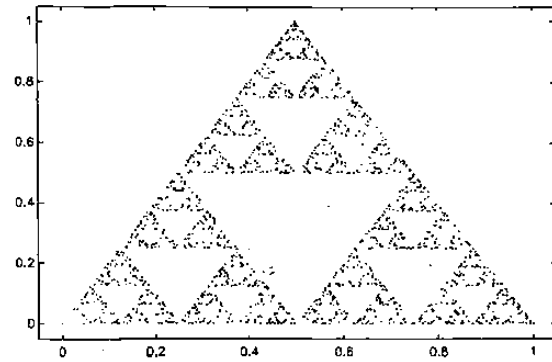


Fig. 4.13 *Chaos game* para el generador caótico.

Aún cuando el conjunto de puntos periódicos es infinito, en este caso el error de redondeo y la precisión finita de la computadora ayuda a que el sistema salga de un punto periódico, y como en un sistema caótico los puntos periódicos son inestables<sup>14</sup>, el sistema no vuelve a él, como se puede apreciar en la figura 4.14. Esta característica incrementa la longitud del período de repetición del generador.

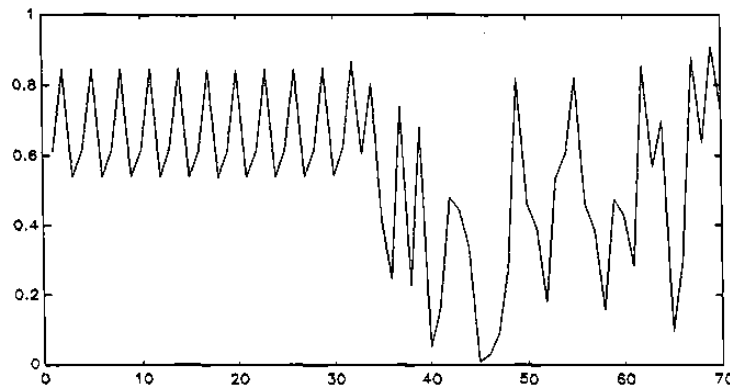


Fig. 4.14 Ciclo de período 3 inestable del generador caótico.

Dos transformaciones, para distribución exponencial y para distribución normal, son mostradas en las figuras 4.15 y 4.16, las cuales son aceptables para cualquier propósito práctico.

<sup>14</sup> Esta característica se obtiene rápidamente de la propiedad de transitividad topológica y de la definición de estabilidad de un punto.

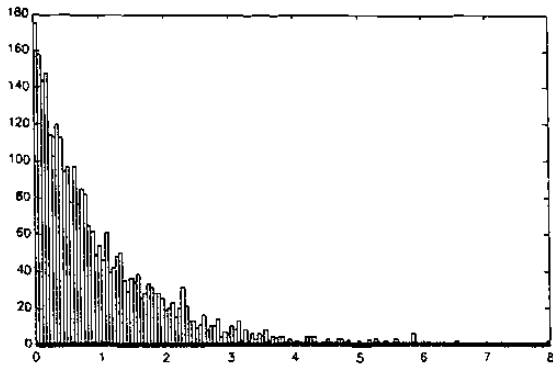


Fig. 4.15 Distribución exponencial del generador caótico.

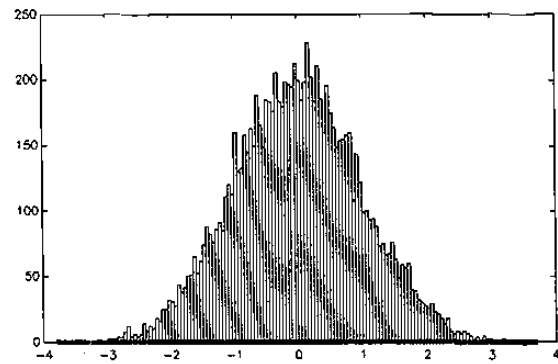


Fig. 4.16 Distribución normal del generador caótico.

Estas distribuciones fueron generadas para la misma cantidad de puntos que las usadas en el capítulo anterior, para así poder hacer una comparación; sin embargo las distribuciones mejoran progresivamente para mayor cantidad de puntos.

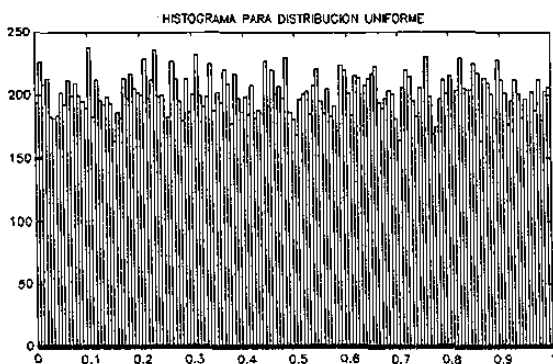


Fig. 4.17 Dist. uniforme para mayor cantidad de puntos.

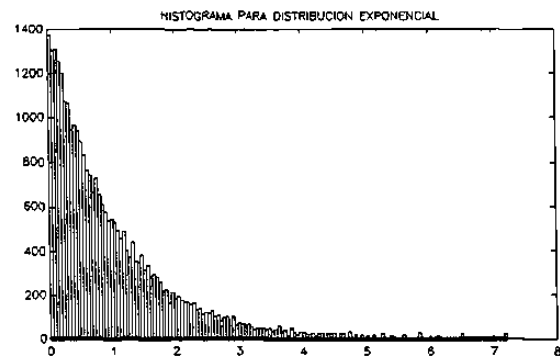


Fig. 4.18 Dist. exponencial para mayor cant. de puntos.

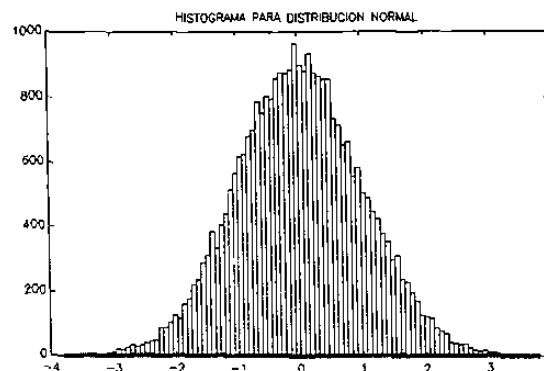


Fig. 4.19 Dist. normal para mayor cantidad de puntos.



#### 4.4 CONCLUSIONES

En este capítulo se demostró que las propiedades de un sistema dinámico con comportamiento caótico pueden ser utilizadas, en forma bastante eficiente, para generar secuencias de números pseudoaleatorios. Los resultados mejoran respecto a los métodos tradicionales y, al menos, igualan a los métodos usados actualmente en forma comercial por los simuladores o paquetes disponibles como *Matlab*, *Mathematica*, etc.

Es claro que las propiedades estadísticas del generador caótico (como distribución y período de repetición) pueden mejorarse aumentando la dimensión del mismo; pero esto lleva al problema de tener que inicializar el generador con un mayor número de condiciones iniciales. A pesar de este problema, el Lema 4.3 asegura tener una buena realización para casi cualquier conjunto de condiciones iniciales.

De estos resultados se obtiene la intuición de que un buen generador de ruido debe tener entre sus características principales un comportamiento caótico (Chua & Madan, 1988).

---

# 5

# CONTROL VIBRACIONAL

## 5.1 INTRODUCCION

En el presente capítulo se revisarán los principales resultados obtenidos para una técnica de control alternativa para cierta clase de sistemas: el control vibracional. El control vibracional nace hace un par de décadas por la necesidad de controlar automáticamente ciertos sistemas los cuales no es posible controlarlos utilizando retroalimentación de estado o control *feedforward* debido principalmente a la incapacidad de hacer mediciones en el estado o en las perturbaciones, respectivamente. Ejemplos de estos sistemas son los aceleradores de partículas y el control de potencia en láseres de CO<sub>2</sub>. El principio de operación del control vibracional es la introducción de señales oscilatorias periódicas de media cero en uno o varios parámetros del sistema a controlar, lo cual cambia las propiedades estructurales dinámicas del sistema. Como se verá más adelante este efecto no siempre ocurre.

La relación que tiene este tema con los anteriores será explicada en el capítulo seis, el cual necesita los resultados de control vibracional como antecedente.

## 5.2 PRINCIPIOS DEL CONTROL VIBRACIONAL

En esta sección sólo se mostrarán resultados obtenidos para plantas lineales, representados por el siguiente sistemas de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = Ax \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (5.1)$$

Se introducen en la matriz  $A$  señales oscilatorias periódicas del tipo

$$B(t) = [b_{ij}(t)]_{i,j=1}^n, \text{ donde } b_{ij}(t) = \sum_{s=1}^{\infty} k_{ij}^s \sin(s\omega_{ij}t + \phi_{ij}^s) \text{ es una función periódica con}$$

media cero; obteniéndose el siguiente sistema

$$\dot{x} = (A + B(t))x \quad (5.2)$$

**Definición:** El sistema (5.1) se dice que es *vibracionalmente estabilizable* si existe una matriz  $B(t)$  (con media cero) tal que la solución trivial  $x=0$  del sistema (5.2) es asintóticamente estable.

**Definición:** El sistema (5.1) se dice que es *observable en principio* si existe un vector  $c \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  tal que el sistema es observable con respecto a la salida ( $c^T x$ ). Es equivalente a decir que la matriz  $A$  es cíclica.

Como se dijo antes, el efecto del control vibracional no se presenta en cualquier clase de sistemas, sino que es una propiedad estructural de algunos de ellos. El siguiente resultado fue publicado en (Meerkov, 1980) y establece en qué clase de sistemas se puede utilizar:

**Teorema 5.1:** Sea el sistema (5.1) observable en principio. Entonces una condición necesaria y suficiente para que este sistema sea vibracionalmente estabilizable es que la traza de la matriz  $A$  sea negativa.

□

Es presentado en (Meerkov, 1980) una revisión más extensa sobre este tipo de

control, incluyendo una forma de llegar a un sistema lineal invariante en el tiempo que describe "en promedio" la dinámica del sistema original controlado por control vibracional, aunque estos resultados sólo son obtenidos para una  $B(t)$  con elementos distintos de cero solamente abajo de la diagonal.

**Definición:** El elemento  $a_{ij}$  de la matriz  $A$  se dice que es *vibracionalmente controlable* si existe una matriz cuasi-periódica  $B(t)$  (con media cero) tal que  $\bar{b}_{ij} \neq 0$ , donde  $\bar{b}_{ij}$  pertenece a la matriz  $\bar{B}$ , que es el efecto promedio de la matriz  $B(t)$  en el sistema (5.2). Esto es, si  $a_{ij}$  es vibracionalmente controlable podemos reasignar su valor "promedio" arbitrariamente.

Considerando el caso de un sistema lineal descrito por la ecuación de orden  $n$

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = u(t)$$

representamos este sistema en la forma  $\dot{x} = Ax + ru$  con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \quad r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

si se introducen vibraciones de la forma

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ b_n(\omega t) & \dots & b_1(\omega t) \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

donde

$$b_i(\omega t) = \sum_{s=1}^{\infty} k_i^s \sin(s \omega t + \phi_i^s), \quad i = 1, \dots, n \quad \omega > \sup_t \left| \frac{du}{dt} \right| \quad (5.5)$$

se puede llegar (Meerkov, 1980) al siguiente resultado:

**Teorema 5.2:** Los elementos  $a_i$  de la matriz  $A$  de la forma (5.3) que son vibracionalmente controlables son aquellos para los cuales  $i \geq 2$ . Existen constantes positivas  $k_0$  y  $\omega_0$  tales que si las vibraciones son de la forma (5.4)-(5.5) con  $k_i^1 \geq k_0$  ( $i=1, \dots, n$ ) y  $\omega \geq \omega_0$ , la matriz  $\bar{B}$  es definida por la fórmula

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\bar{b}_n & \dots & -\bar{b}_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{b}_i = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{k_2^s k_i^s}{2 \omega^2 s^2} \cos(\phi_2^s - \phi_i^s) \quad i = 2, \dots, n$$

□

### 5.3 SIMULACION DE UN PROCESO CONTROLADO VIBRACIONALMENTE

En esta sección se aplicarán los resultados presentados en la anterior a un proceso bien conocido: el control de un péndulo, cuyo modelo es el siguiente

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -\frac{g}{l} \sin \theta - \gamma \omega \end{aligned} \quad (5.6)$$

donde  $\theta$  es el ángulo con respecto a la vertical,  $\omega$  es la velocidad angular,  $m$  y  $l$  son la masa y la longitud del péndulo respectivamente, y  $\gamma$  es el coeficiente de fricción viscosa ( $\gamma > 0$ ); todo esto se ilustra en la siguiente figura

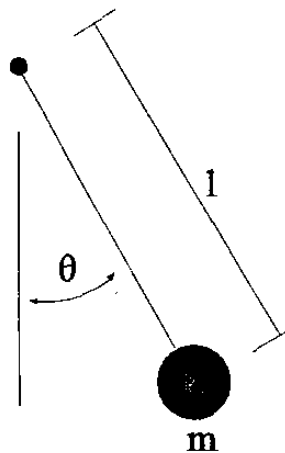


Fig. 5.1 Esquema del péndulo.

La intención de este control es hacer estable el péndulo en la posición vertical superior, una vez linealizado alrededor de este punto de equilibrio el modelo queda como sigue

$$\dot{x} = A x$$

$$x = \begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \tilde{\omega} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\gamma \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Este modelo linealizado es observable en principio y además es claro que su traza es negativa, por lo que según el teorema 5.1 es vibracionalmente estabilizable. Para estabilizar este sistema se introducirá una señal oscilatoria de la forma  $\mu \text{sen}(\omega_s t)$  en el punto de suspensión vibrando a lo largo de la vertical, o lo que es equivalente

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\mu \omega_s^2 \text{sen}(\omega_s t)}{l} & 0 \end{bmatrix}$$

de aquí, según el teorema 5.2, el elemento  $a_{2,1}$  de la matriz  $A$  es vibracionalmente controlable. Finalmente el sistema linealizado es

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\theta}} \\ \dot{\tilde{\omega}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g - \mu \omega_s^2 \text{sen}(\omega_s t)}{l} & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \tilde{\omega} \end{bmatrix}$$

Las siguientes simulaciones son hechas para  $l=1$  m,  $B=0.7$  1/s,  $\mu=0.15$  m y  $g=9.81$  m/s<sup>2</sup>, con condiciones iniciales  $\theta=-0.1416$  rads y  $\omega=0.1$  rad/s.

En las figuras 5.2-3 se observa que el sistema linealizado es inestable para una frecuencia  $\omega_s$  pequeña, pero se vuelve estable para  $\omega_s$  suficientemente grande.

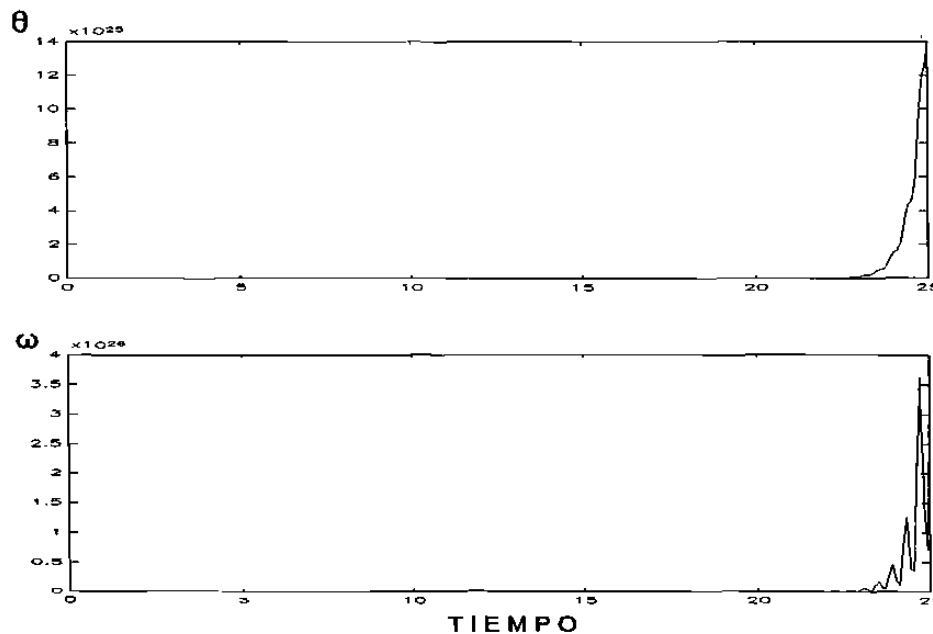


Fig. 5.2 Respuesta del sistema linealizado para  $\omega_s=15$ .

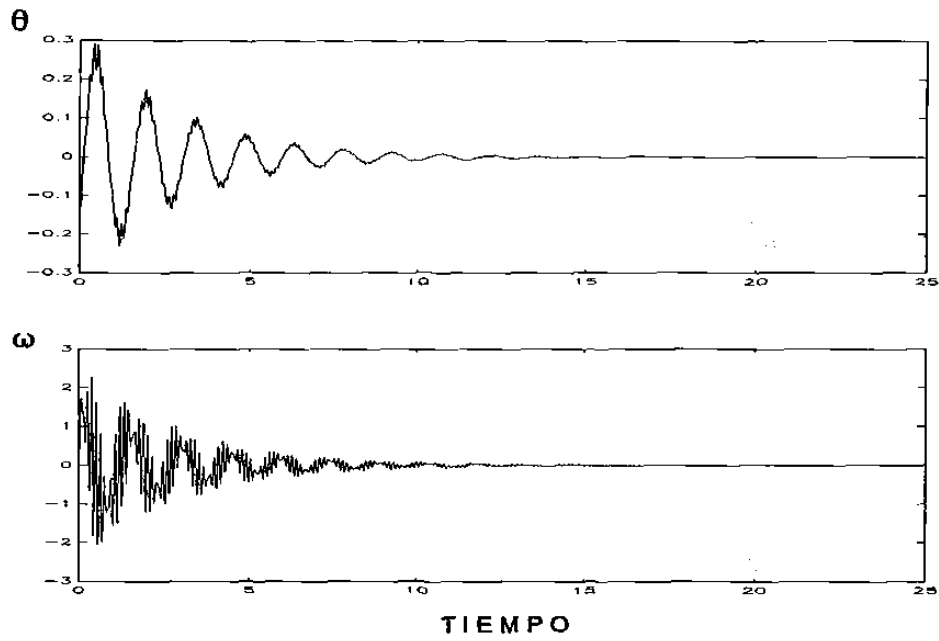


Fig. 5.3 Respuesta del sistema linealizado para  $\omega_s=50$ .

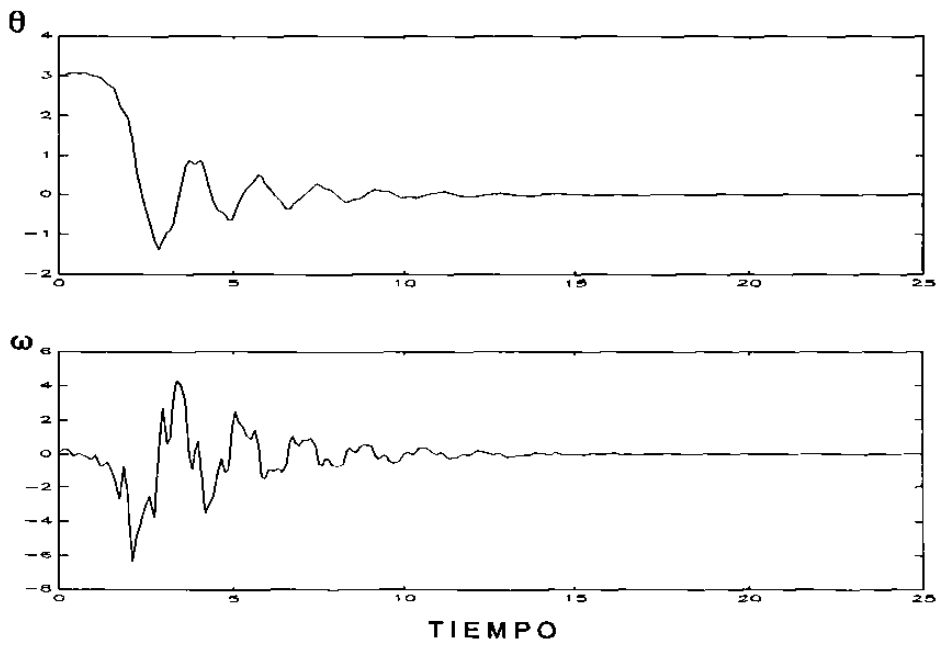


Fig. 5.4 Respuesta del sistema no-lineal para  $\omega_s=15$ .



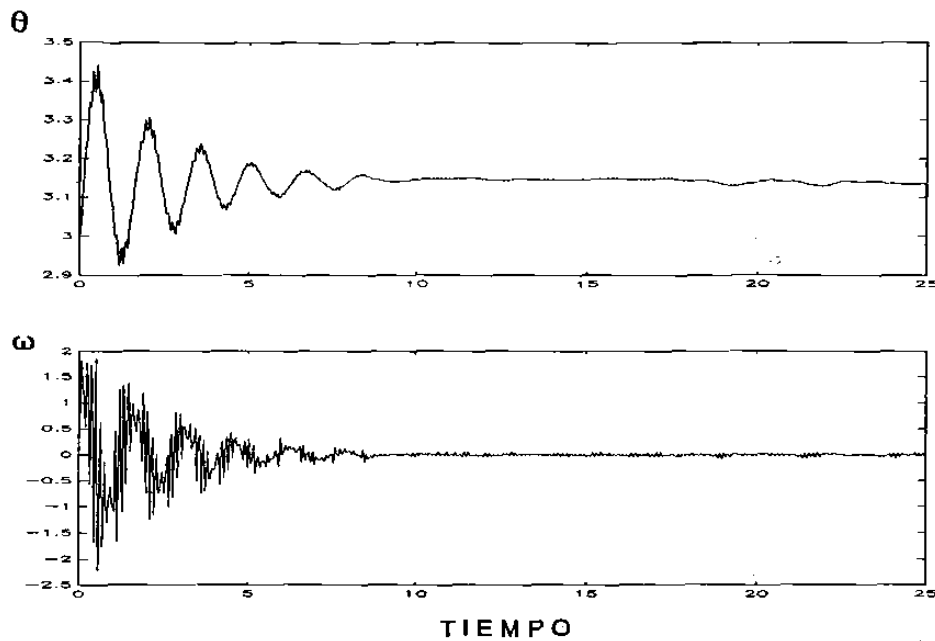



Fig. 5.5 Respuesta del sistema no-lineal para  $\omega_s=50$ .

Se aprecia el mismo resultado en las figuras 5.4-5.5, pero esta vez simulado para el sistema no-lineal (5.6), con las condiciones iniciales equivalentes  $\theta = 3$  rads y  $\omega = .1$  rad/seg.

Se han presentado otras aplicaciones del control vibracional, tal como localización de polos y ceros de bloqueo (Lee, 1987) y aumento de robustez en cuanto a la estabilidad del sistema (Lee,1991), pero vale la pena recordar que estas aplicaciones son un recurso alternativo cuando no es posible aplicar técnicas tradicionales de retroalimentación o precompensación.

---



# *CONTROL CAOTICO: UN PRIMER INTENTO*

## **6.1 INTRODUCCION**

En este capítulo se implementa la idea de controlar un proceso no-lineal teniendo como controlador un sistema caótico. Es importante no perder de vista que la importancia del ejemplo que se presenta reside en el concepto del controlador caótico más que en la naturaleza del controlador mismo.

El esquema de control que se presentará es nuevamente en malla abierta y aplicando resultados de estabilización de sistemas inyectando ruido, al igual que en el control vibracional, en algunos parámetros del modelo a controlar. El sistema que se usará como controlador es, por supuesto, el generador de ruido obtenido en el capítulo 4 y la planta a controlar será la misma utilizada en el capítulo anterior. La dinámica del par controlador-planta obtenido será observada mediante algunas simulaciones por computadora.

## 6.2 CONTROL POR RUIDO

En esta sección se explicará un método de control que también basa su operación en la adición de una matriz de perturbaciones  $F$  a la matriz  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$  del sistema

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x(0) = x_0 \quad (6.1)$$

pero en este caso los elementos de  $F$  son procesos estocásticos estacionarios de media cero, es decir, se obtiene el sistema

$$\dot{x} = (A(t) + F(t))x \quad (6.2)$$

donde la matriz  $(A(t) + F(t))$  mantiene su media fija e igual a la matriz  $A(t)$ . Se busca encontrar la matriz  $F(t)$  tal que el sistema (6.2) sea estable. La restricción de que los elementos de  $F$  sean de media cero es para evitar un desplazamiento de los polos del sistema por otro medio diferente al control por ruido.

Sea  $\dot{x} = f(x, \xi)$  tal que  $f(x, \xi)$  es continua y Lipschitz (Sastry & Bodson, 1989), con respecto a los dos argumentos. También  $\dot{x} = f(x, 0)$  corresponde a una ecuación diferencial ordinaria.  $x(\cdot) \in \mathbb{R}^d$ ;  $\xi(\cdot) \in \mathbb{R}^p$  es una variable aleatoria continua y acotada. La ecuación  $\dot{x} = f(x, \xi)$  se llama una *ecuación diferencial estocástica* y  $\xi(\cdot)$  se puede interpretar como un parámetro estocástico que afecta a la ecuación diferencial ordinaria  $\dot{x} = f(x, 0)$ .

**Definición:** Se dice que  $\dot{x} = f(x, \xi)$  es a) estable, b) asintóticamente estable, c) exponencialmente estable o d) globalmente exponencialmente estable si  $m(t) \triangleq E(x(t))$ , donde  $E$  es el operador esperanza matemática,  $\dot{m} = E(f(x, \xi))$  es una ecuación diferencial ordinaria que es a) estable, b) asintóticamente estable, c) exponencialmente estable o d) globalmente exponencialmente estable.

Cuando la distribución de probabilidad de  $\xi$  es un impulso unitario, esta definición se reduce al caso determinístico y coincide con la definición de estabilidad de ecuaciones diferenciales ordinarias.

En (Arnold, *et. al.*, 1983) se presentan los siguientes resultados:

**Hecho 6.1:** Para el más grande número de Lyapunov<sup>15</sup>  $\sigma_{\max}$  de (6.1) se tiene siempre que

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{d} \text{traza}(A) \leq \sigma_{\max}$$

□

Por supuesto, (6.1) es exponencialmente estable si y sólo si  $\sigma_{\max} < 0$ . Esta es una generalización del caso  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$  conocido, en el que

$$\text{Re}[\sigma_{\max}(A)] \geq \frac{1}{d} \text{traza}(A)$$

con igualdad si y sólo si  $\text{Re}[\sigma_i(A)] = \text{Re}[\sigma_j(A)]$ ,  $\forall i \neq j$ .

**Teorema 6.2:** Dado el sistema  $\dot{x} = Ax$ , donde  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$  es una matriz fija, y el sistema  $\dot{x} = (A+F(t))x$  paraméricamente perturbado por una matriz estocástica estacionaria  $d \times d$  con media finita:

1) Para cualquier  $F(t)$  con  $\text{traza}(E(F(t)))=0$ , siempre se tiene para el más grande número de Lyapunov  $\sigma_{\max}(A+F)$  del sistema perturbado

$$\frac{1}{d} \text{traza} A \leq \sigma_{\max}(A+F)$$

2) Para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe una matriz  $F(t)$  con  $E(F(t))=0$  tal que

$$\frac{1}{d} \text{traza} A \leq \sigma_{\max}(A+F) \leq \frac{1}{d} \text{traza} A + \varepsilon \quad (6.3)$$

---

<sup>15</sup> Para una matriz determinística  $M$ , los números de Lyapunov correspondientes son las partes reales de los eigenvalores de  $M$ .

En particular, un sistema invariante en el tiempo  $\dot{x} = Ax$  puede ser estabilizado por un ruido de media cero en los parámetros si y sólo si *traza*  $A < 0$ .

□

Como se puede observar, este resultado es similar al obtenido en el Teorema 5.1, esto era de esperarse ya que ambos métodos se basan en el mismo principio de perturbación de parámetros.

Es deducida también en (Arnold, 1983) una manera de escoger la forma de  $F(t)$  que asegure la estabilidad del sistema (6.2).

### 6.3 COMBINACION GENERADOR CAOTICO-CONTROL POR RUIDO

Finalmente en esta sección se llega al establecimiento de un problema de estabilización de un proceso utilizando un controlador con comportamiento caótico, para hacer esto, serán aplicados los resultados de la sección anterior utilizando el ruido producido por el generador obtenido en el capítulo 4. Nuevamente como planta a controlar se tomará el péndulo invertido

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -\frac{g}{l} \text{sen } \theta - \gamma \omega\end{aligned}\tag{6.4}$$

linealizado alrededor de el punto de equilibrio  $(\pi, 0)$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax \\ x &= \begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \tilde{\omega} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\gamma \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{6.5}$$

dado que *traza*  $A = -\gamma < 0$  se cumplen las condiciones del teorema 6.2 y el sistema (6.3) puede ser perturbado por una matriz  $F(t)$  de media cero para obtener

$$-\frac{1}{2}\gamma \leq \sigma_{\max}(A+F) \leq -\frac{1}{2}\gamma + \epsilon$$

para cualquier  $\epsilon > 0$ .

La matriz de perturbación será tomada como sigue

$$F(t) = \begin{bmatrix} 0 & \eta(t) \\ -\eta(t) & 0 \end{bmatrix}$$

donde  $\eta$  es de una frecuencia suficientemente alta,  $E(\eta) = 0$  y una gran variancia.

El esquema de control se encuentra ahora completo, y se muestra en la figura 6.1.

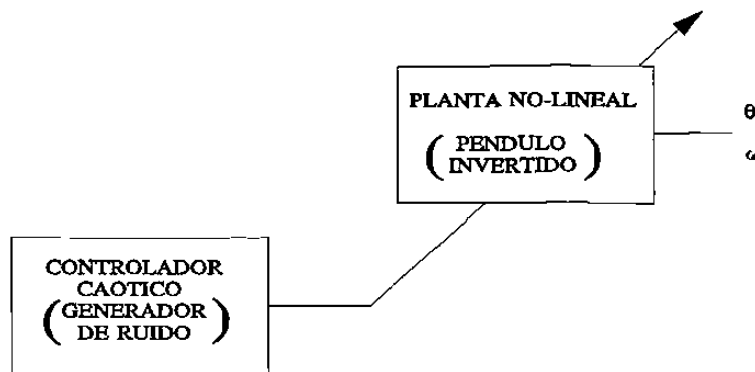


Fig. 6.1 Esquema de control caótico.

La matriz de parámetros perturbados queda de la siguiente manera

$$A(t)+F(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1+\eta(t) \\ \frac{g}{l}-\eta(t) & -\gamma \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Si son utilizados los mismos valores que en el ejemplo de la sección 5.3:  $l=1\text{m}$ ,  $g=9.81\text{ m/s}^2$  y  $\gamma=0.7\text{ 1/s}$ , se tiene que  $\sigma_{\max}(A)=2.8$ , mientras que, del teorema 6.2,  $\sigma_{\max}(A+F)\approx-0.35$ , lo que significa que el sistema perturbado es exponencialmente estable.

Entre este ejemplo de utilización del control por ruido y el de control vibracional se presenta una desafortunada diferencia; la necesaria presencia de ruido en el elemento superior derecho de la ecuación (6.6) provoca la pérdida del sentido físico del problema, convirtiéndolo en un problema de estabilización de ecuaciones diferenciales. Este inconveniente, sin embargo, no altera la esencia global ilustrada en la figura 6.1.

Las figuras 6.2-6.3 corresponden a una simulación para el sistema linealizado, en las que se ve la necesidad de que  $\eta$  tenga una frecuencia  $\omega_\eta$  suficientemente grande para estabilizar al sistema. Las condiciones iniciales son  $\theta=-0.1416\text{ rads}$  y  $\omega=0.1\text{ rad/seg}$ .

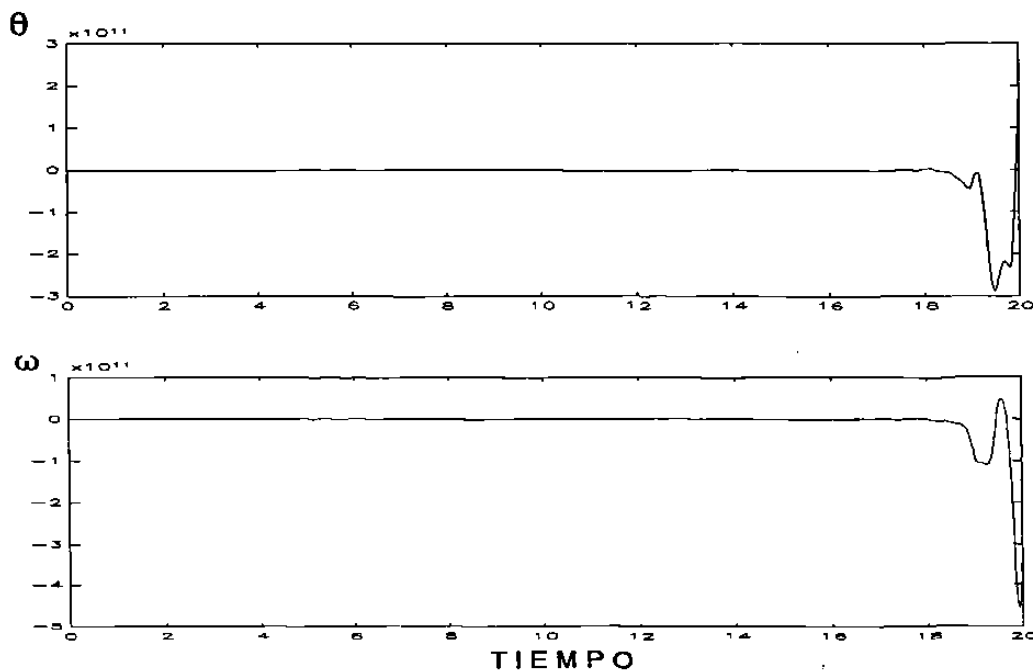


Fig. 6.2 Respuesta del sistema linealizado para  $\omega_\eta=15$ .

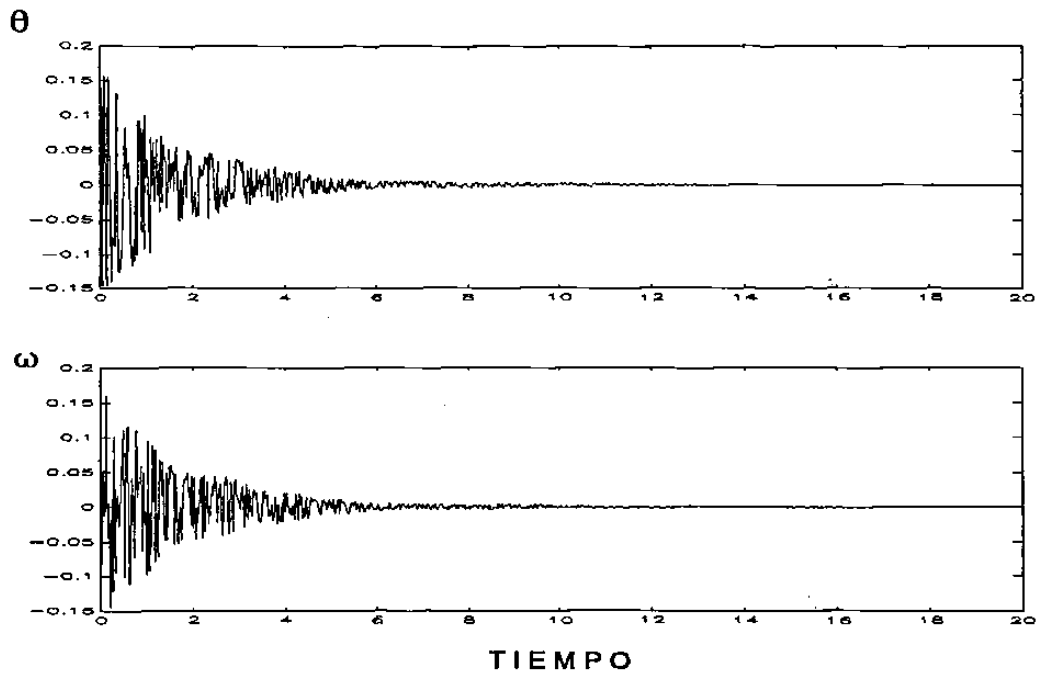


Fig. 6.3 Respuesta del sistema linealizado para  $\omega_\eta = 70$ .

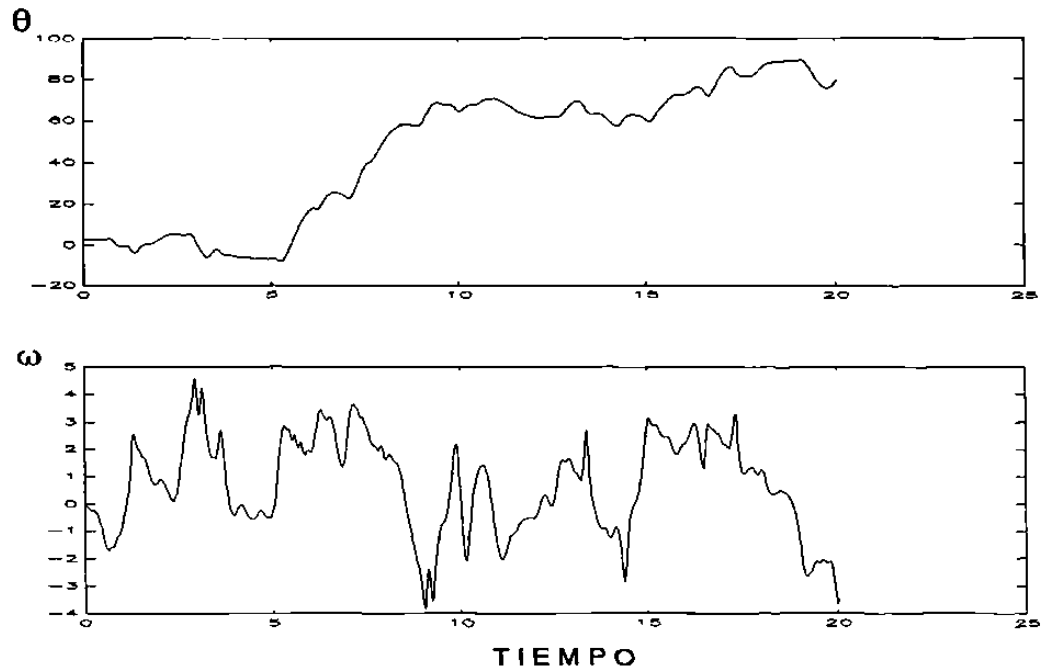


Fig. 6.4 Respuesta del sistema no-lineal para  $\omega_\eta = 15$ .



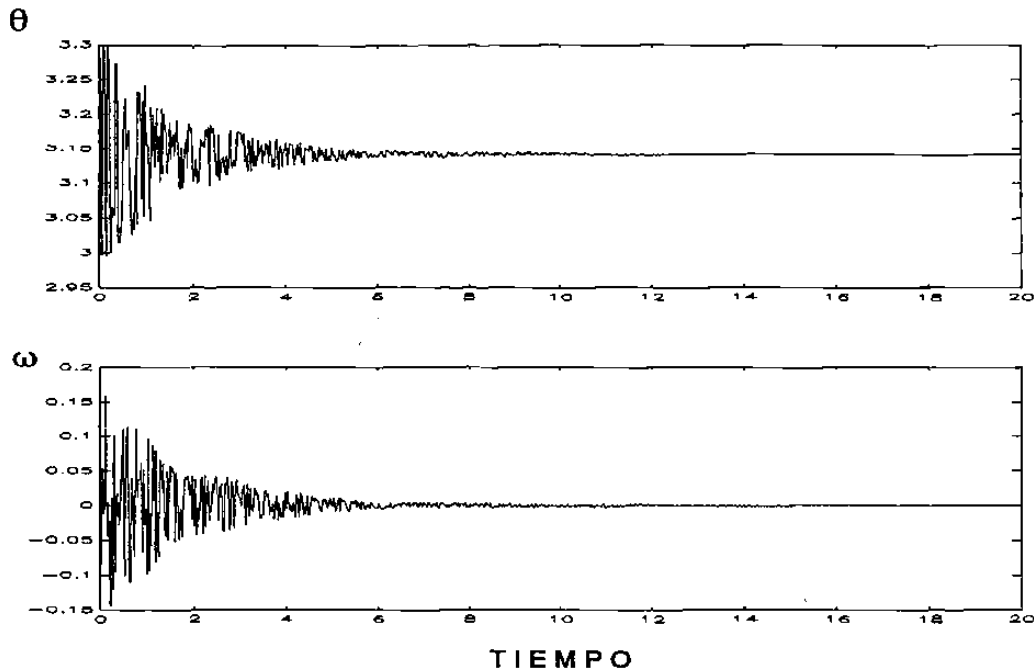
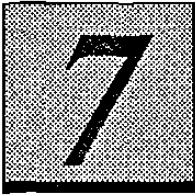


Fig. 6.5 Respuesta del sistema no-lineal para  $\omega_{\eta}=70$ .

Las gráficas 6.4-6.5 pertenecen a la simulación del sistema no-lineal con condiciones iniciales  $\theta=3$  rads y  $\omega=0.1$  rad/seg.

Las simulaciones de la aplicación del control por ruido entregaron resultados tan buenos como los del control vibracional, al ser aplicado tanto al sistema linealizado como al sistema no-lineal original; con la excepción de que fue necesaria una señal inyectada con una frecuencia ligeramente mayor.



## *CONCLUSIONES*

La motivación principal del presente trabajo fue la de empezar a construir una ruta hacia la utilización de los sistemas caóticos en ingeniería eléctrica en general, lo cual se logró parcialmente al proponer un generador de ruido basado en un sistema caótico; y una utilización en control, particularmente, lo cual se logró proponiendo un novedoso sistema de control caótico capaz de estabilizar una planta.

Primero fue dado un panorama general acerca de los sistemas caóticos, sus antecedentes, sus propiedades, métodos de análisis y algunas de las líneas de investigación en las que se está trabajando actualmente a este respecto.

Posteriormente se llevó a cabo la deducción de un generador de secuencias aleatorias con las mejores propiedades estadísticas posibles, utilizando como estructura un sistema retroalimentado el cual se probó tener comportamiento caótico. Por los resultados obtenidos en el capítulo 3 se puede inferir que, a pesar de que la mayoría de los generadores de ruido propuestos han sido creados en forma heurística, para tener un generador con características probabilísticas aceptables, las ecuaciones de éste debe tener, entre otras propiedades, un comportamiento caótico.

Este generador de ruido hizo las veces de controlador para la planta no-lineal inestable que es el péndulo invertido. El tipo de control realizado fue en lazo abierto mediante la introducción de ruido en algunos de los parámetros de la planta. Al ser comparados los resultados contra los obtenidos con el control vibracional se observó que, a pesar de perderse el sentido físico del ejemplo, estos fueron bastante satisfactorios tanto en las simulaciones para el sistema linealizado como para el sistema no-lineal.

Algunas recomendaciones para futuros trabajos que continúen esta línea de investigación son:

1) Demostración del hecho de que los sistemas lineales, observables en principio, con  $\text{traza}(A) < 0$  pueden ser estabilizados con la variación caótica de sus parámetros.

2) Encontrar condiciones bajo las cuales el presente esquema de control mejore sus características, ya sea en las propiedades estadísticas del controlador o en la dinámica global del par controlador-planta.

3) Desarrollar un ejemplo en el cual se obtenga rechazo a perturbaciones mediante un controlador caótico vibracional.

4) Desarrollar ejemplos y posteriormente teoremas que creen un verdadero control retroalimentado caótico, así como determinar condiciones bajo las cuales esto es posible.

## REFERENCIAS

- [1] Abed, E. H., Wang, H. O. and Chen, R. C., "Stabilization of period doubling bifurcations and implications for control of chaos", *Proc. of the 31st. IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 2119-2124, Tucson, Arizona, 1992.
- [2] Arnold, Crauel and Wihstutz, "Stabilization of linear systems by noise", *SIAM J. Control and Optimization*, Vol. 21, No. 3, pp. 451-461, 1983.
- [3] Bellman R., "Introducción al análisis matricial", Ed. Reverté, 1965.
- [4] Bellman, R., Bentsman, J. and Meerkov, S. M., "Stability of fast periodic systems", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-30, No. 3, pp. 289-291, 1985.
- [5] Bradley, E., "Using chaos to broaden the capture range of a phase-locked loop", *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, Vol. 40, No. 11, pp. 808-818, 1993.
- [6] Chen, G. and Dong, X., 1993, "Control of Chaos - A survey", *Proc. of the 32nd. IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 469-474, San Antonio, Texas.
- [7] Chiang, H., Liu, C., Varaiya, P. P., Wu, F. F. and Lauby, M. G., "Chaos in a simple power system", *IEEE Trans. on Power Systems*, Vol. 8, No. 4, pp. 1407-1417, 1993.
- [8] Chua, L. O., Brown, R. and Hamilton, N., "Fractals in the twist-and-flip circuit", *Proc. of the IEEE*, Vol. 81, No. 10, pp. 1466-1491, 1993.
- [9] Chua, L. O. and Madan, R. N., "Sights and sounds of chaos", *IEEE Circuits and Devices Magazine*, January, 1988.
- [10] Devaney, R. L., "An introduction to chaotic dynamical systems", Addison-Wesley, 1989.
- [11] Devaney, R. L., "A first course in chaotic dynamical systems", Addison-Wesley, 1992.
- [12] Dong, X. and Chen, G., "Controlling chaotic continuous-time systems via feedback", *Proc. of the 31st. IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 2502-2503, Tucson, Arizona, 1992.
- [13] Drazin, P. G., "Nonlinear Systems", Cambridge University Press, 1992.

- [14] Feng, X. and Loparo, K. A., "A study of chaos in discrete time linear systems with quantized state feedback", *Proc. of the 31st. IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 2107-2112, Tucson, Arizona, 1992.
- [15] Genesio, R., Tesi, A., Wang, H. O. and Abed, E. H., " Control of period doubling bifurcations using harmonic balance", *Proc. of the 32nd. IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 492-497, San Antonio, Texas, 1993.
- [16] Gillespie, D. T., "Markov processes, an introduction for physical scientist", Academic Press, 1992.
- [17] Hale, J. and Koçak, H., "Dynamics and bifurcations", Springer-Verlag, New York, 1991.
- [18] Hamill, D. C., "Learning About chaotic circuits with SPICE", *IEEE Trans. on Education*, Vol. 36, No. 1, pp. 28-35, 1993.
- [19] Hamming, R. W., "Numerical methods for scientist and engineers", Dover Publications, New York, 1973.
- [20] Hemati, N. and Kwatny, H., "Bifurcation of equilibria and chaos in permanent-magnet machines", *Proc. of the 32nd. Conf. on Decision and Control*, pp. 475-479, San Antonio, Texas, 1993.
- [21] Kahaner, Moler and Nash, 1977, "Numerical Methods and software", Prentice-Hall, New Jersey.
- [22] Lee, S. and Meerkov, S. M., "Vibrational feedback control in the problem of absolute stability", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-36, No. 4, pp. 482-485, 1991.
- [23] Leon, A. G., "Probability and random processes for electrical engineering", Addison-Wesley, 1989.
- [24] Luthe, Olivera and Schutz, "Métodos Numéricos", Limusa, 1988.
- [25] Matsumoto, T., "Chaos in electronic circuit", *Proc. of the IEEE*, Vol. 75, No. 8, pp. 1033-1057, 1987.
- [26] Meerkov, S. M., "Principle of Vibrational Control: Theory and Applications", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol AC-25, No. 4, pp. 755-762, 1980.

- [27] Park, S. K. and Miller, K. W., "Random Number Generators: Good ones are hard to find", *Communications of the ACM*, Vol. 31, No. 10, pp. 1192-1201, 1988.
- [28] Parker, T. S. and Chua, L. O., "Chaos: A tutorial for engineers", *Proc. of the IEEE*, Vol. 75, No. 8, pp. 982-1008, 1987.
- [29] Parker, T. S. and Chua, L. O., "Practical numerical algorithms for chaotic systems", Springer-Verlag, New York, 1989.
- [30] Peitgen, Jürgens and Saupe, "Chaos and fractals, new frontiers of science", Springer-Verlag, New York, 1992.
- [31] Picci, G. and Taylor, T. J., "Generation of Gaussian Processes and linear chaos", *Proc. of the 31st. IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 2125-2131, Tucson, Arizona, 1992.
- [32] Saito, T. and Oikawa, M., "Chaos and fractals from a forced artificial neural cell", *IEEE Trans. on Neural Networks*, Vol. 4, No. 1, pp. 43-52, 1993.
- [33] Sastry, S. and Bodson, M., "Adaptive control: stability, convergence, and robustness", Prentice-Hall, New Jersey, 1989.
- [34] Taylor, T. J., "A tutorial on chaos in control theory", *Proc. of the 31st. IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 2102-2106, Tucson, Arizona, 1992.
- [35] Vincent T. L. and Yu, J., "Control of a chaotic system", *Dynamics and Control*, Vol. 1, pp. 35-52, 1991.

