

**UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON**  
**FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA**  
**DIVISION DE ESTUDIOS SUPERIORES**



**CALCULO SIMBOLICO PARA**  
**ANALISIS DE SISTEMAS NO LINEALES**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE**  
**MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERIA ELECTRICA**  
**ESPECIALIDAD EN CONTROL**

**PRESENTA:**

**JESUS AURELIANO ESQUIVEL CARDENAS**

**CD. UNIVERSITARIA**

**FEBRERO DE 1995**

TM

Z5853

.M2

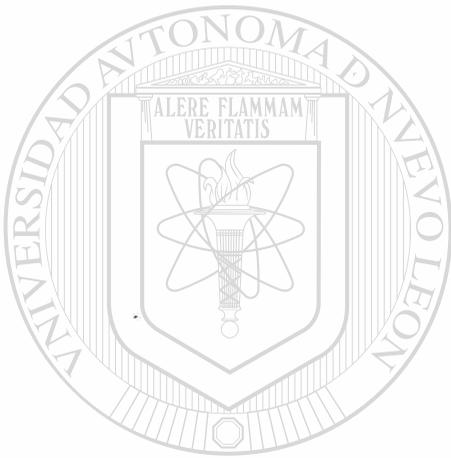
FIME

1995

E8



1020070695



# UANL

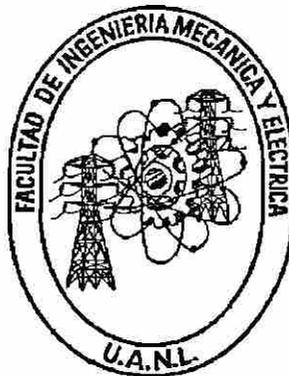
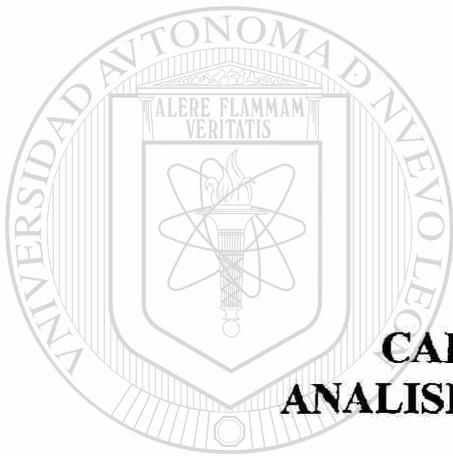
---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN<sup>®</sup>  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA

DIVISION DE ESTUDIOS SUPERIORES



**CALCULO SIMBOLICO PARA  
ANALISIS DE SISTEMAS NO LINEALES**

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS  
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERIA ELECTRICA  
ESPECIALIDAD EN CONTROL

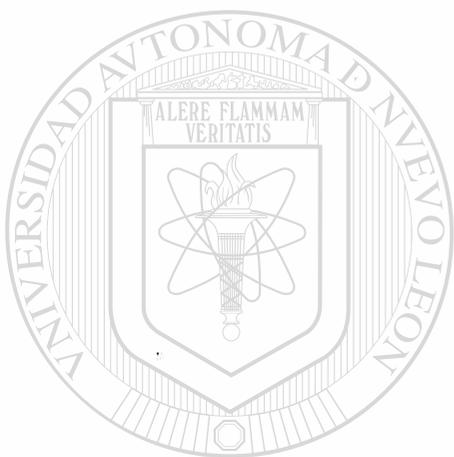
PRESENTA:

**JESUS AURELIANO ESQUIVEL CARDENAS**

CIUDAD UNIVERSITARIA

FEBRERO DE 1995

T.  
Z  
C  
F  
1943  
F8



# UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

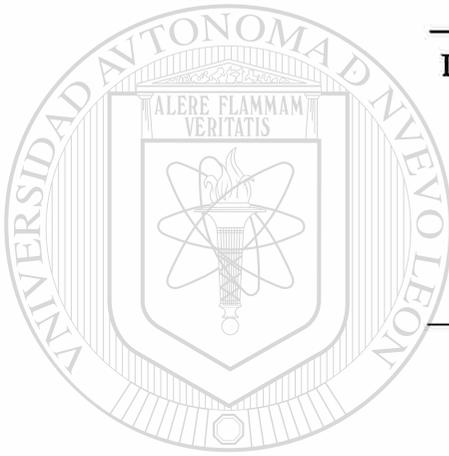


FONDO TESIS

166806

# Cálculo Simbólico para Análisis de Sistemas No Lineales

**APROBARON**





Dr. Joaquín Collado Moctezuma

Presidente y Asesor



Dr. Jesús de León Morales

Secretario

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

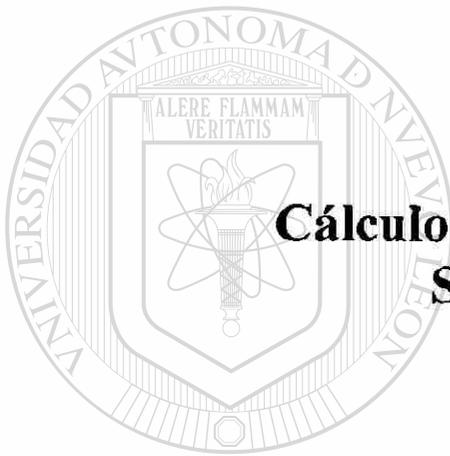
Dr. Edgar N. Sánchez Camperos

Vocal

**U.A.N.L.**

**F.I.M.E.**

**Programa Doctoral en Ingeniería Eléctrica  
Control Automático y Robótica**



**Cálculo Simbólico para Análisis de  
Sistemas No Lineales**

UANL

---

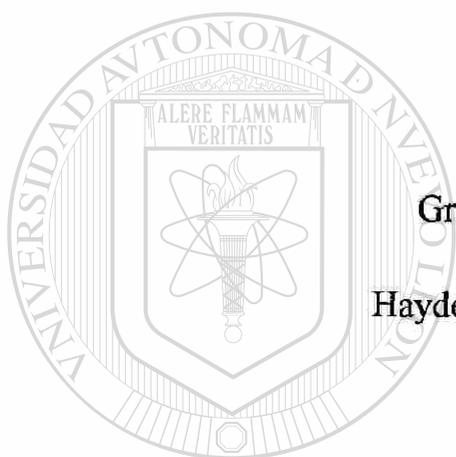
**Autor: Jesús Aureliano Esquivel Cárdenas**

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

**San Nicolás de los Garza**

**Febrero de 1995**

**A MI ESPOSA E HIJA**



**Griselda Sandoval de Esquivel**

**Haydee Estefanía Esquivel Sandoval**

**UANL**

---

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN**



**DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTÉCAS**

**Con Cariño**

**A MIS PADRES**

Martín Esquivel Polendo

Orfa Cárdenas de Esquivel

**Y HERMANOS**



Sergio Antonio

Adela

Martín

Juan Manuel

Víctor Armando

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

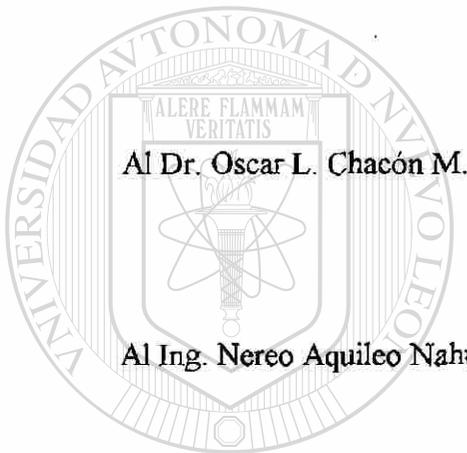


**Con Respeto y Cariño**

## Agradecimientos

Al Dr. Joaquín Collado Moctezuma por su asesoría y comentarios siempre valiosos en la elaboración de esta tesis.

Al Dr. Jesús de León Morales por su buena disposición a ayudarme en el análisis de algunos puntos en la tesis.



Al Dr. Oscar L. Chacón M.

Al Ing. Nereo Aquileo Nahuat Dzib

UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Al Lic. Felipe Morales Rodríguez



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

A mis compañeros y amigos por su apoyo y su amistad

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología y a la Universidad Autónoma de Coahuila por su apoyo económico.

## Contenido

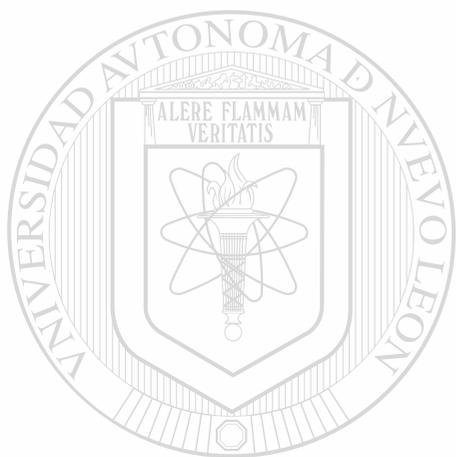
---

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Resumen .....</b>  | <b>1</b>  |
| <b>Introducción .....</b>   | <b>2</b>  |
| <b>Capítulo 1 Antecedentes de sistemas no lineales .....</b>          | <b>5</b>  |
| 1.1. Introducción .....   | 5         |
| 1.2. Cambio de coordenadas en el espacio de estado. ....              | 6         |
| 1.3. Distribuciones .....   | 7         |
| 1.4. Teorema de Frobenius .....                                       | 9         |
| 1.5. Geometría diferencial .....                                      | 10        |
| 1.6. Distribuciones invariantes .....                                 | 11        |
| 1.7. Descomposición local de sistemas de control .....                | 12        |
| 1.8. Alcanzabilidad Local .....                                       | 15        |
| 1.9. Observabilidad Local .....                                       | 17        |
| <b>Capítulo 2 Síntesis para Sistemas No Lineales .....</b>            | <b>20</b> |
| 2.1. Antecedentes .....   | 20        |
| 2.1.1. Grado relativo .....   | 20        |
| 2.1.2. Linealización Exacta via Retroalimentación de Estado .....     | 22        |
| 2.1.3. Dinámica Cero .....  | 25        |
| 2.2. Estabilización asintótica local .....                            | 28        |
| 2.3. Seguimiento asintótico de salida .....                           | 29        |
| 2.4. Rechazo de perturbaciones .....                                  | 32        |
| <b>Capítulo 3 Análisis de sistemas MIMO .....</b>                     | <b>34</b> |
| 3.1. Transformaciones de coordenadas locales .....                    | 34        |
| 3.2. Linealización exacta mediante retroalimentación de estados ..... | 38        |
| 3.3. Control no interactivo .....                                     | 40        |
| <b>Capítulo 4 Introducción al Mathematica .....</b>                   | <b>43</b> |
| <b>Capítulo 5 Programa .....</b>                                      | <b>47</b> |
| <b>Capítulo 6 Un Ejemplo .....</b>                                    | <b>64</b> |
| 6.1. Obtención de la dinámica de un Robot .....                       | 64        |
| 6.2. Utilización del programa para el análisis del sistema .....      | 65        |
| 6.2.1. Extensión al caso MIMO .....                                   | 68        |
| 6.3. Simulación con Simulink de Matlab .....                          | 69        |
| 6.3.1. Caso SISO .....  | 69        |
| 6.3.2. Caso MIMO .....  | 71        |

## Contenido (continuación...)

---

|   |    |
|---|----|
| Conclusiones.....   | 73 |
| Bibliografía.....   | 74 |
| Apéndice.....   | 75 |
| A.1 Álgebra de Lie .....  | 75 |
| A.2 Cálculo Avanzado .....                                      | 76 |
| A.3 Variedades.....   | 79 |
| A.4 El Principio de Estabilidad en la Primera Aproximación..... | 80 |



# UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



## Notación

|  |   |
|--|---|
| $\mathbb{R}$                                     | Campo de los números reales.  |
| $\mathbb{R}^n$                                   | Espacio vectorial de dimensión $n$ con elementos reales.  |
| $ \cdot $  | Valor Absoluto.   |
| $\ x\ _2 = (x^T x)^{1/2}$                        | Norma 2 de $x$ .  |
| $\langle \cdot, \cdot \rangle$                   | Producto interior.  |
| $A^T$ con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$        | Matriz transpuesta.   |
| $C^\infty$                                       | Es el conjunto de funciones con derivadas parciales continuas de todas las ordenes .                                    |
| $C^\infty(p)$                                    | Es el conjunto de funciones que pertenecen al conjunto $C^\infty$ y que estan definidas en el punto $p$ .               |
| $L_f h$  | Derivada de Lie, (A.1).   |
| $[f, g]$   | Producto de Lie, (A.3).   |
| $\Delta$   | Distribución suave, (1.3.1).  |
| $\Delta^\perp$                                   | Codistribución suave "aniquilador" de $\Delta$ , (Def. 2).  |
| $\Omega$   | Codistribución suave.   |
| $\Omega^\perp$                                   | Distribución suave "aniquilador" de $\Omega$ , <b>Lema 12</b> .   |
| $\langle \tau_1, \dots, \tau_q   \Delta \rangle$ | Distribución que contiene a $\Delta$ e invariante bajo los campos vectoriales $\tau_1, \dots, \tau_q$ , (1.8.2).        |
| $\langle \tau_1, \dots, \tau_q   \Omega \rangle$ | Distribución que contiene a $\Omega$ e invariante bajo los campos vectoriales $\tau_1, \dots, \tau_q$ , <b>Lema 9</b> . |
| $L_f^k h$ con $L_f^0 h = h$                      | $\underbrace{L_f L_f \dots L_f}_k h$ , (A.2).   |
| $ad_f^k g$ con $ad_f^0 g = g$                    | $\underbrace{[f, [f, \dots, [f, g]]]}_k$ , (A.4).   |
| $\text{Span}\{f_1, f_2, \dots\}$                 | Expansión de una distribución con los campos vectoriales $f_1, f_2, \dots$  |

## Resumen

Esta tesis trata principalmente del diseño de leyes de retroalimentación estática de estado para sistemas modelados por ecuaciones diferenciales no lineales afines en la entrada, cuyo objetivo es la linealización del sistema. Este procedimiento involucra tediosas y largas manipulaciones algebraicas, por lo que es recomendable automatizarlos mediante un paquete computacional que maneje álgebra simbólica. Se seleccionó el **Mathematica** para lograr este objetivo.

Generalmente la linealización (sistema no lineal + retroalimentación estática de estado) no se aprecia en el sistema de coordenadas original, para esto, es necesario una transformación de coordenadas que cumpla con algunas condiciones.

Existen casos en que la retroalimentación estática de estado no es suficiente para linealizar completamente el sistema; sin embargo puede linealizarse una parte y la otra permanecer no lineal, esta última induce la *Dinámica Cero* la cual nos interesa que sea estable para que el sistema en total sea estabilizable. Nuevamente para poder observar claramente lo anterior se requiere una transformación de coordenadas.

Una vez obtenida la parte lineal y conociendo que la dinámica cero es estable podemos utilizar la teoría de los sistemas lineales para encontrar la solución a problemas de control como: seguimiento asintótico, rechazo a perturbaciones, etc...

## Introducción

En el estudio de los sistemas de control no lineal es natural tratar de extender la teoría de los sistemas lineales. Un tópico es considerar sistemas afines en la entrada, con la **geometría diferencial** como soporte matemático.

La geometría diferencial trata sobre curvas y superficies, las funciones que las definen y transformaciones entre las coordenadas. Las curvas mencionadas están formadas por puntos; para decir que un punto puede ser distinguido de otro, o que hay un punto suficientemente cerca a donde queremos ir, o hablar de vecindades de un punto es necesario hacer consideraciones **topológicas**. La preservación de algunas características topológicas como **compacidad y continuidad** es indispensable para pasar de un espacio a otro.

Uno de los conceptos importantes mostrado en este trabajo es el de la **Linealización Exacta en el Espacio de Estado** y la determinación de **La Dinámica Cero** para los sistemas SISO y MIMO. El objetivo de la tesis es el de implementar en el **Mathematica** funciones necesarias para obtener algunos resultados de esta área de estudio de los sistemas no lineales.

Consideraremos sistemas no lineales caracterizados por la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i(\mathbf{x})u_i \quad (\text{Ia})$$

$$y_j = h_j(\mathbf{x}) \quad (j=1, \dots, m) \quad (\text{Ib})$$

en el cual  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  representa *un vector de estado*,  $u_1, \dots, u_m$  son los componentes del *vector de entrada*  $\mathbf{u}$  y  $(y_1, \dots, y_m)$  son los componentes del *vector de salida*  $\mathbf{y}$ .

Las funciones:

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} ; \quad g_i(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} g_{i1}(\mathbf{x}) \\ g_{i2}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ g_{in}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} ; \quad h_j(\mathbf{x})$$

con  $i,j=1,\dots,m$ , son no lineales en sus argumentos y diferenciables un número cualquiera de veces, cuando esto sucede diremos que son funciones suaves.

Otro de los puntos importantes es **la retroalimentación de estado**; existen 2 tipos básicos:

- <sup>1</sup>*Retroalimentación de estado estática.-*

Este modo de control es tal que el valor del vector de entrada  $\mathbf{u}$  en cada instante de tiempo  $t$  depende del estado  $\mathbf{x}$  y los componentes  $v_1, \dots, v_m$  de algún *vector de entrada de referencia*  $\mathbf{v}$ :

$$u_i = \alpha_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \beta_{ij}(\mathbf{x})v_j$$

- *Retroalimentación de estado dinámica.-*

En este modo de control, el valor del vector de entrada  $\mathbf{u}$  en cada instante de tiempo  $t$  depende del estado  $\mathbf{x}$ , los componentes de algún *vector de referencia*  $\mathbf{v}$  y además del valor de un vector de estado adicional auxiliar  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_k)$ :

$$u_i = \alpha_i(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \sum_{j=1}^m \beta_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{z})v_j$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \gamma_i(\mathbf{y}, \mathbf{z}) + \sum_{j=1}^m \delta_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{z})v_j$$

<sup>1</sup>Es el tipo utilizado en esta tesis

La tesis está organizada de la siguiente manera. En el *Capítulo 1* introduciremos la base matemática, analizaremos las variedades, generalización al caso no lineal de los subespacios en los sistemas lineales, en las que están definidos los sistemas de control, sus transformaciones de estado para obtener las partes *alcanzable/no alcanzable* y *observable/no observable* del sistema transformado.

En el *Capítulo 2* analizaremos algunos de los problemas de control para el caso SISO, utilizaremos dos características importantes de los sistemas dinámicos:

- a) **La Linealización** mediante una retroalimentación estática no lineal de estados y su relación con el **Principio de Estabilidad en la Primera Aproximación**.
- b) **La Dinámica Cero** y su importancia para el análisis de estabilidad.

Posteriormente en el *Capítulo 3* las características (a) y (b) serán extendidas al caso MIMO, y además en este mismo capítulo veremos el desacoplamiento, la forma en que la salida  $h_i$  se ve afectada únicamente por la entrada  $u_i$ , en los sistemas que tienen igual número de entradas y de salidas.

El *Capítulo 4* presenta una breve explicación del entorno del **Mathematica** y el *Capítulo 5* muestra el listado del programa donde se implementaron las funciones. ®

En el *Capítulo 6* se analiza la dinámica de un Robot utilizando el programa desarrollado en el Mathematica y se realiza una simulación con los resultados obtenidos. Posteriormente a este capítulo se encuentra las *Conclusiones*, donde se menciona brevemente lo que se ha logrado hacer en esta tesis.

Y por último, *el Apéndice* contiene algunos conceptos de Álgebra de Lie, Cálculo avanzado, Topología y Variedades.

## Capítulo 1

# Antecedentes de sistemas no lineales

### 1.1. Introducción

El objetivo principal de este capítulo es el de presentar una serie de analogías entre la teoría de los sistemas lineales y la de los no lineales, donde destaca principalmente la transformación de coordenadas para descomponer el sistema en sus partes *alcanzable/no alcanzable* y *observable/no observable*.

Un espacio dual  $V^*$ , de un espacio vectorial  $V$ , es el conjunto de todas las funcionales lineales evaluadas en los reales y definidas sobre  $V$ ; ambos espacios son de la misma dimensión.

Sea el sistema no lineal:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m g_i(\mathbf{x})u_i$$

$$y_j = h_j(\mathbf{x}) \quad (j = 1, \dots, m)$$

llamaremos **campos vectoriales** a los mapeos  $f, g_1, \dots, g_m$ , por el hecho de que asignan un vector de  $\mathbb{R}^n$  a cada punto  $\mathbf{x}$  de  $U$  (subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ ); junto con estos campos vectoriales manipularemos sus *objetos duales* a los cuales llamaremos **campos covectoriales**, estos asignan a cada punto  $\mathbf{x}$  de  $U$  un elemento del **espacio dual**  $(\mathbb{R}^n)^*$ .

Supongamos que  $\omega_1, \dots, \omega_n$  son funciones suaves evaluadas en los reales de las variables  $x_1, \dots, x_n$ , definidas sobre  $U$ , entonces podemos identificar el siguiente vector renglón:

$$\omega(\mathbf{x}) = [\omega_1(x_1, \dots, x_n) \quad \omega_2(x_1, \dots, x_n) \quad \cdots \quad \omega_n(x_1, \dots, x_n)]$$

como un campo covectorial.

## 1.2. Cambio de coordenadas en el espacio de estado.

La transformación de coordenadas del espacio de estado, es usada para analizar algunas propiedades de interés, por ejemplo controlabilidad y observabilidad, o para mostrar si ciertos problemas de control pueden tener solución.

En el caso de un sistema lineal, se considera normalmente un cambio de coordenadas lineal. Esto corresponde a la sustitución del vector de estado original  $\mathbf{x}$  con un nuevo vector  $\mathbf{z}$  relacionados por una transformación de la forma  $\mathbf{z} = \mathbf{T} \mathbf{x}$ , donde  $\mathbf{T}$  es una matriz no singular.

Si el sistema es no lineal, es más significativo utilizar un cambio de coordenadas no lineal, el cual tiene la forma:

$$\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \Phi_1(\mathbf{x}) \\ \Phi_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \Phi_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

y cumple con las siguientes propiedades:

- (i)  $\Phi(\mathbf{x})$  es invertible, por lo que existe  $\Phi^{-1}(\mathbf{z})$  tal que  $\Phi^{-1}(\Phi(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ .
- (ii)  $\Phi(\mathbf{x})$  y  $\Phi^{-1}(\mathbf{z})$  son mapeos suaves.

La propiedad (i) es necesaria para tener la posibilidad de recuperar el espacio de estado original, mientras que (ii) garantiza que el sistema en las nuevas coordenadas esté caracterizado por funciones suaves (diferenciables un número de veces suficientemente grande) al igual que el sistema original.

Como las propiedades anteriores de la transformación no lineal son difíciles de obtener para todo el espacio de estado, en la mayor parte de los casos se definen únicamente en la vecindad de un punto dado.

Suponga que  $\Phi(\mathbf{x})$  es una función suave definida en algún subconjunto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ , además que la matriz Jacobiana

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

es no singular en un punto  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$ , entonces  $\Phi(\mathbf{x})$  define una transformación local sobre un subconjunto abierto  $U^0$  de  $U$ , que contiene a  $\mathbf{x}^0$ .

### 1.3. Distribuciones

Suponga que los siguientes campos vectoriales  $f_1(\mathbf{x}), \dots, f_d(\mathbf{x})$  están definidos en un subconjunto abierto  $U$  del espacio de estado, por lo tanto al evaluarlos en un punto de  $U$  obtenemos un grupo de  $d$  vectores que asignan un espacio vectorial a este punto, lo mismo sucede con cada uno de los puntos del subconjunto. Este hecho recibe el nombre de **distribución suave** y la denotaremos por:

$$\Delta(\mathbf{x}) = \text{span}\{f_1(\mathbf{x}), \dots, f_d(\mathbf{x})\} \quad (1.3.1)$$

Si  $\Delta_1(\mathbf{x})$  y  $\Delta_2(\mathbf{x})$  son distribuciones suaves,  $\Delta_1(\mathbf{x}) + \Delta_2(\mathbf{x})$  es otra distribución suave; la intersección de ellas puede no serlo.

Suponga dos distribuciones suaves  $\Delta_1, \Delta_2 \subset \Delta$ , entonces  $\Delta_1 + \Delta_2 \subset \Delta$ . La familia de todas las distribuciones suaves contenidas en  $\Delta$  contiene un elemento único maximal, la suma de todos los miembros de la familia el cual será denotado por  $\text{smt}(\Delta)$ . Algunas veces utilizado para sustituir  $\Delta$ .

Una distribución  $\Delta$ , definida en un subconjunto abierto  $U$ , es **no singular** si existe un entero  $d$  tal que  $\dim(\Delta(\mathbf{x})) = d \quad \forall \mathbf{x} \in U$ . Si la condición anterior no se cumple la distribución es singular.

Un punto  $x^0$  de  $U$  es un **punto regular** de  $\Delta$  si la distribución es no singular en una vecindad  $U^0$  de  $x^0$ . Cada punto de  $U$  que no es regular se llama **punto de singularidad**. Sea  $x^0$  un punto regular de  $\Delta$ , suponga que  $\dim(\Delta(x^0)) = d$  entonces existen  $d$  campos vectoriales  $f_1, \dots, f_d$ , todos definidos en una vecindad  $U^0$  de  $x^0$  tal que:

- (i)  $f_1(x), \dots, f_d(x)$  son linealmente independientes  $\forall x \in U^0$
- (ii)  $\Delta(x) = \text{span}\{f_1(x), \dots, f_d(x)\} \forall x \in U^0$

En la vecindad de un punto regular, no puede suceder de que la intersección de dos distribuciones suaves, deje de ser suave.

Cada campo vectorial suave  $\tau$ , que pertenece a  $\Delta$  puede ser expresado sobre  $U^0$  como:

$$\tau(x) = \sum_{i=1}^d c_i(x) f_i(x)$$

donde  $c_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  está definido en  $U$  y  $c_i \in C^\infty$ .

Sean  $\Delta_1(x)$  y  $\Delta_2(x)$  2 distribuciones suaves, definidas en  $U$ , con la propiedad de que  $\Delta_1(x)$  es no singular,  $\Delta_1 \subset \Delta_2$  y  $\Delta_1(x) = \Delta_2(x) \forall x \in U$ , entonces  $\Delta_1 = \Delta_2$ .

Una distribución  $\Delta$  es **involutiva** si el producto de Lie [ver apéndice] de cualquier par de campos vectoriales que pertenecen a la distribución, genera un campo vectorial que pertenece a  $\Delta$ .

$$\tau_1, \tau_2 \in \Delta \Rightarrow [\tau_1, \tau_2] \in \Delta$$

Si  $\Delta$  es no involutiva, es de gran ayuda formar una distribución apropiada que sí lo sea. Suponga que  $\Delta_1, \Delta_2 \supset \Delta$  donde  $\Delta_1, \Delta_2$  son involutivas, por lo tanto  $\Delta_1 \cap \Delta_2 \supset \Delta$  (la intersección es también involutiva). La familia de todas las distribuciones involutivas que contienen a  $\Delta$ , contiene un elemento minimal, intersección de todos los elementos de la familia, el cual es llamado **cerradura involutiva** de  $\Delta$  y denotado por  $\text{inv}(\Delta)$ .

### 1.4. Teorema de Frobenius

**Definición 1.** Sea la distribución (1.3.1) no singular, el campo covectorial aniquilador  $w$  es tal que  $\langle w(x), f_i(x) \rangle = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq d \quad \forall x \in U^0$ .

□

En lugar de aceptar cualquier solución de la ecuación  ${}^2w(x)F(x)=0$ , buscamos soluciones de la forma  $w = \frac{\partial \lambda}{\partial x}$ , donde  $\lambda$  es una función suave evaluada en los reales.

**Ecuación diferencial parcial:**

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} [f_1(x), \dots, f_d(x)] = \frac{\partial \lambda}{\partial x} F(x) = 0 \tag{1.4.1}$$

$\frac{\partial \lambda_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial \lambda_{n-d}}{\partial x}$  son covectores independientes para cada  $x \in U^0$  que satisfacen la ecuación (1.4.1), por lo tanto *el espacio de soluciones* es de dimensión  $n-d$ .

**Definición 2.** Una distribución no singular  $\Delta$  de dimensión  $d$ , definida en un conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$  se dice que es **completamente integrable** si  $\forall x^0 \in U$  existe una vecindad  $U^0$  de  $x^0$  y  $n-d$  funciones suaves evaluadas en los reales  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-d}$ , todas definidas en  $U^0$  y las cuales inducen la siguiente **codistribución aniquiladora** de  $\Delta$ :

$$\Delta^\perp = \text{span}\{d\lambda_1, \dots, d\lambda_{n-d}\}$$

□

**Teorema 1, [5], [8] (Frobenius).** Una distribución no singular es completamente integrable si y solo si es involutiva.

□

---

${}^2F(x)=[f_1(x), \dots, f_d(x)]$

## 1.5. Geometría diferencial

**Definición 3.** Un subconjunto  $N$  de  $\mathbb{R}^n$  es una **variedad** de dimensión  $k$  si para cada  $x \in N$  existen subconjuntos abiertos  $U$  y  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  con  $x \in U$ , y un "difeomorfismo"  $f$  de  $U$  a  $V$  tal que:

$$f(U \cap N) = \{y \in V : y^{k+1} = \dots = y^n = 0\}$$

Entonces, un punto  $y$  en la imagen de  $f$  tiene la siguiente representación:

$$y = (y^1(x), y^2(x), \dots, y^k(x), 0, \dots, 0)$$

□

En otras palabras, una Variedad de dimensión  $k$  puede ser expresada usando  $n$  variables con  $n-k$  restricciones, o solo con  $k$  variables y ninguna restricción.

**Ejemplo:** una esfera de radio unitario centrada en el origen de  $\mathbb{R}^3$  (variedad de dimensión 2) es representada por las 3 coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$  del espacio  $\mathbb{R}^3$  con solo *una* restricción: cumplir con la ecuación  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$ . En cambio, podemos hacer corresponder a cada punto de la esfera un punto del espacio  $\mathbb{R}^2$  (sin restricciones), vía la siguiente función:

$$f = (u_1, u_2, 0) = \left( \frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}, 0 \right)$$

**Definición 4.** Un **vector tangente**  $v$  en  $p$  es un mapeo  $v: C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$  con las siguientes propiedades:

(i) (Linealidad)  $v(a\lambda + b\gamma) = av(\lambda) + bv(\gamma) \quad \forall \lambda, \gamma \in C^\infty(p) \text{ y } a, b \in \mathbb{R}$

(ii) (Leibnitz)  $v(\lambda\gamma) = \gamma(p)v(\lambda) + \lambda(p)v(\gamma) \quad \forall \lambda, \gamma \in C^\infty(p)$

□

**Definición 5.** El **espacio tangente** a la variedad  $N$  en el punto  $p$ , denotado por  $T_p N$ , es el conjunto de todos los vectores tangentes en  $p$ . Si la variedad  $N$  es una hipersuperficie, el objeto previamente definido lo podemos identificar como un hiperplano tangente.

□

En la esfera del ejemplo anterior existe un plano tangente a cada punto, el cual no es un subespacio de  $\mathbb{R}^3$ , pero sí una variedad de dimensión 2, por lo que el espacio tangente  $T_p N$  coincide con  $\mathbb{R}^2$  para cada uno de los puntos de la esfera.

Sea (1a), si los  $m+1$  campos vectoriales que caracterizan el sistema dinámico inducen una distribución  $\Delta(x)$ , y la trayectoria del estado, solución de la dinámica, evoluciona sobre un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  (variedad de dimensión inferior a  $n$ ) entonces el espacio vectorial  $\Delta(p)$ , para cada punto de la variedad, es un subespacio del espacio tangente a esa variedad en el mismo punto.

## 1.6. Distribuciones invariantes

Una distribución  $\Delta$ , se dice ser **invariante** bajo el campo vectorial  $f$  si el paréntesis de Lie  $[f, \tau]$  de  $f$  con cada campo vectorial  $\tau$  de  $\Delta$  es un campo vectorial que pertenece a  $\Delta$ .

$$\tau \in \Delta \Rightarrow [f, \tau] \in \Delta$$

La invariancia de una distribución bajo un campo vectorial, es la generalización al caso no lineal de la invariancia de un subespacio vectorial bajo un mapeo lineal.

Sea  $\Delta$  una distribución involutiva no singular de dimensión  $d$  y suponga que  $\Delta$  es invariante bajo el campo vectorial  $f$ . Entonces para cada  $x^0$  existe una vecindad  $U^0$  de  $x^0$  y una transformación de coordenadas  $z = \Phi(x)$  definida sobre  $U^0$ , en la cual el campo vectorial  $f$  es representado por un vector de la forma:

$$\bar{f}(z) = \begin{bmatrix} f_1(z_1, \dots, z_d, z_{d+1}, \dots, z_n) \\ \vdots \\ f_d(z_1, \dots, z_d, z_{d+1}, \dots, z_n) \\ f_{d+1}(z_{d+1}, \dots, z_n) \\ \vdots \\ f_n(z_{d+1}, \dots, z_n) \end{bmatrix}$$

Sea un sistema dinámico de la forma:

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.6.1}$$

y sea  $\Delta$  una distribución no singular, de dimensión  $d$ , e involutiva, invariante bajo el campo vectorial  $f$ , por lo tanto el sistema en cuestión puede ser transformado a la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1 &= \tilde{f}_a(\zeta_1, \zeta_2) \\ \dot{\zeta}_2 &= \tilde{f}_b(\zeta_2) \end{aligned}$$

donde  $\zeta_1 = (z_1, \dots, z_d)$  y  $\zeta_2 = (z_{d+1}, \dots, z_n)$ .

### 1.7. Descomposición local de sistemas de control

Supongamos el sistema de control no lineal (I), analizaremos bajo que condiciones puede ser transformado localmente para descomponerlo en sus partes *alcanzable/no alcanzable* (Caso 1) y *observable/no observable* (Caso 2); se analizará lo mismo para el caso lineal.

**Caso 1.-** Sea  $\Delta$  una distribución involutiva no singular de dimensión  $d$  y suponga que es invariante bajo los campos vectoriales  $f, g_1, \dots, g_m$ .

Suponga que  $\text{span}\{g_1, \dots, g_m\} \subset \Delta$ . Entonces para cada  $x^0$  es posible encontrar una vecindad  $U^0$  de  $x^0$  y una transformación local de coordenadas  $z = \Phi(x)$  definida en  $U^0$  tal que (Ia) es representado por

$$\dot{\zeta}_1 = \tilde{f}_a(\zeta_1, \zeta_2) + \sum_{i=1}^m \tilde{g}_{ai}(\zeta_1, \zeta_2)u_i \quad (1.7.1a)$$

$$\dot{\zeta}_2 = \tilde{f}_b(\zeta_2) \quad (1.7.1b)$$

donde  $\zeta_1 = (z_1, \dots, z_d)$  y  $\zeta_2 = (z_{d+1}, \dots, z_n)$ .

**Caso 2.-** Sea  $\Delta$  una distribución involutiva no singular de dimensión  $d$  y suponga que es invariante bajo los campos vectoriales  $f, g_1, \dots, g_m$ ; supone además que la codistribución  $\text{span}\{dh_1, \dots, dh_p\}$  está contenida en la codistribución  $\Delta^\perp$ . Entonces para cada punto  $x^0$  es posible encontrar una vecindad  $U^0$  de  $x^0$  y una transformación local de coordenadas  $z = \Phi(x)$  definida en  $U^0$  tal que (I) es representado por

$$\dot{\zeta}_1 = \tilde{f}_a(\zeta_1, \zeta_2) + \sum_{i=1}^m \tilde{g}_{ai}(\zeta_1, \zeta_2)u_i \quad (1.7.2a)$$

$$\dot{\zeta}_2 = \tilde{f}_b(\zeta_2) + \sum_{i=1}^m \tilde{g}_{bi}(\zeta_2)u_i \quad (1.7.2b)$$

$$y_i = h_i(\zeta_2) \quad (1.7.2c)$$

donde  $\zeta_1 = (z_1, \dots, z_d)$  y  $\zeta_2 = (z_{d+1}, \dots, z_n)$ .

<sup>3</sup>Caso 3.- Sea el sistema lineal

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1.7.3a)$$

$$y = Cx \quad (1.7.3b)$$

Si existe un subespacio  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  de dimensión  $d$  con las siguientes propiedades:

- (i)  $V$  es *invariante* bajo  $A$ :  $Ax \in V \quad \forall x \in V$ .
- (ii)  $V$  contiene *la imagen* de la matriz  $B$ :  $Bu \in V \quad \forall u \in \mathbb{R}^m$ .

entonces (1.7.3a) después de un cambio de coordenadas puede descomponerse en la siguiente forma:

<sup>3</sup>Análogo al caso I.

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u$$

$$\dot{x}_2 = A_{22}x_2$$

donde  $x_1$  y  $x_2$  denotan los vectores formados por las primeras  $d$  y, respectivamente, las últimas  $n-d$  nuevas coordenadas. Si además el subespacio  $V$  tiene la siguiente propiedad:

(iii)  $V$  es el subespacio *más pequeño* que satisface (i) y (ii).

la cual se satisface *si y solo si*  $V = \text{Im}(B, AB, \dots, A^{n-1}B)$  entonces el par  $(A_{11}, B_1)$  es *alcanzable*.

<sup>4</sup>Caso 4.- Sea el sistema lineal (1.7 3), considere un subespacio  $W$  de  $\mathbb{R}^n$  caracterizado por las siguientes propiedades:

(i)  $W$  es *invariante* bajo  $A$ .

(ii)  $W$  *está contenido* en el espacio nulo de  $C$ .

(iii)  $W$  es el subespacio *más grande* que satisface (i) y (ii).

Las primeras dos propiedades implican la existencia de un cambio de coordenadas que induce sobre el sistema lineal una descomposición de la forma:

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u$$

$$\dot{x}_2 = A_{22}x_2 + B_2u$$

$$y = C_2x_2$$

la tercera condición se cumple *si y solo si*:

$$W = \ker \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

en este caso el par  $(C_2, A_{22})$  es *observable*.

<sup>4</sup>Análogo al caso 2.

## 1.8. Alcanzabilidad Local

Sea  $\Delta$  una distribución no singular, de dimensión  $d$  con las siguientes propiedades:

- (a)  $\Delta$  es involutiva
- (b)  $\Delta \supset \text{span}\{g_1, \dots, g_m\}$
- (c)  $\Delta$  es invariante bajo los campos vectoriales  $f, g_1, \dots, g_m$

La sugerencia obvia que viene de la descomposición (1.7.1) es analizar la distribución mínima que está contenida en cualquier distribución que cumple con (a),(b) y (c).

**Lema 1,[5].** Sea  $\Delta$  una distribución suave y

$$\{\tau_1, \dots, \tau_q\} \tag{1.8.1}$$

un conjunto de campos vectoriales. La familia de todas las distribuciones invariantes bajo (1.8.1) y que contienen a  $\Delta$ , contiene un elemento minimal, el cual es una distribución suave.  $\square$

**Definición 6.** La distribución mas pequeña que contiene a  $\Delta$  y es invariante bajo los campos vectoriales (1.8.1) es denotada por el símbolo

$$\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle \tag{1.8.2}$$

Dada una distribución  $\Delta$  y un conjunto (1.8.1) de campos vectoriales, definimos la siguiente secuencia no decreciente de distribuciones

$$\Delta_0 = \Delta \tag{1.8.3a}$$

$$\Delta_k = \Delta_{k-1} + \sum_{i=1}^q [\tau_i, \Delta_{k-1}] \tag{1.8.3b}$$

**Lema 2,[5].** Las distribuciones  $\Delta_k$  generadas por (1.8.3) son tales que  $\Delta_k \subset \langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle \quad \forall k$ , si existe  $k^*$  tal que  $\Delta_{k^*} = \Delta_{k^*+1}$ , entonces  $\Delta_{k^*} = \langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle$ .  $\square$

En el sistema lineal (1.7.3) la secuencia (1.8.3) finaliza con el subespacio de alcanzabilidad  $R = \text{Im}(B AB \dots A^{n-1}B)$  mas pequeño que contiene a  $\text{Im}(B)$  y es invariante bajo  $A$ .

La secuencia (1.8.3) converge en un número finito de pasos cuando todas las distribuciones de la secuencia son no singulares, por lo tanto por construcción  $\dim \Delta_k \leq \dim \Delta_{k+1} \leq n$ , pero si las distribuciones son singulares se obtiene un resultado *débil*, el cual se muestra a continuación.

**Lema 3,[5].** Existe un subconjunto abierto y denso  $U^*$  de  $U$  con la propiedad de que en cada punto  $x \in U^*$

$$\Delta_{n-1} = \langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle \quad (1.8.4)$$

□

La propiedad (1.8.4) es indispensable para alcanzar involutividad

**Lema 4,[5].** Supongase que  $\Delta$  es generada por algunos de los campos vectoriales de (1.8.1). Entonces existe una **subvariedad abierta y densa**  $U^*$  de  $U$  con la siguiente propiedad,  $\forall x^0 \in U^*$  existe una vecindad  $V$  de  $x^0$  y  $d$  campos vectoriales  $\theta_1, \dots, \theta_d$  de la forma

$$\theta_i = [v_r, \dots, [v_1, v_0]]$$

donde  $r \leq n-1$  es un entero que puede depender de  $i$  y  $v_0, \dots, v_r$  son campos vectoriales que pertenecen al conjunto (1.8.1) tal que

$$\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle = \text{span}\{\theta_1(x), \dots, \theta_d(x)\} \quad \forall x \in V$$

□

Es posible encontrar condiciones bajo las cuales las distribución (1.8.2) es también involutiva.

**Lema 5,[5].** Supongase  $\Delta$  es generada por algunos de los campos vectoriales  $\{\tau_1, \dots, \tau_q\}$  y que  $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle$  es no singular, por lo tanto  $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle$  es involutiva.

□

**Lema 6,[5].** Suponga  $\Delta$  es generada por algunos de los campos vectoriales  $\{\tau_1, \dots, \tau_q\}$  y que  $\Delta_{n-1}$  es no singular. Entonces  $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle$  es involutiva y obtenemos  $\Delta_{n-1} = \langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle$ .

□

Si  $\langle f, g_1, \dots, g_m | \text{span}\{g_1, \dots, g_m\} \rangle$  es no singular y además es involutiva, la descomposición (1.7.1) puede ser llevada a cabo.

## 1.9. Observabilidad Local

Si existe una distribución  $\Delta$  no singular de dimensión  $d$  con las siguientes propiedades:

- (a)  $\Delta$  es involutiva
- (b)  $\Delta$  está contenida en la distribución :  $(\text{span}\{dh_1, \dots, dh_p\})^\perp$
- (c)  $\Delta$  es invariante bajo los campos vectoriales  $f, g_1, \dots, g_m$ .

Queremos encontrar condiciones bajo las cuales los puntos que pertenecen a diferentes particiones de  $U^0$  produzcan diferentes salidas. Lo correcto es buscar la distribución mas **grande** que satisface (b) y (c).

La existencia de  $\Delta$  implica y está implicada por la existencia de una distribución  $\Omega(\Delta^\perp)$  con las siguientes propiedades:

- (i)  $\Omega$  es generado localmente  $\forall x \in U$  por  $n-d$  campos covectoriales exactos.
- (ii)  $\Omega$  contiene a  $\text{span}\{dh_1, \dots, dh_p\}$ .
- (iii)  $\Omega$  es invariante bajo los campos vectoriales  $f, g_1, \dots, g_m$ .

Podemos buscar la codistribución  $\Omega$  mas **pequeña** que satisface (ii) y (iii).

**Lema 7,[5].** Sea  $\Omega$  una codistribución suave y (1.8.1) un conjunto de campos vectoriales dado. La familia de todas las codistribuciones las cuales son invariantes bajo (1.8.1) y que contienen a  $\Omega$ , tiene un elemento minimal, el cual es una codistribución suave.

□

Dada una codistribución  $\Omega$  y (1.8.1) podemos considerar la versión dual de (1.8.3)

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \Omega \\ \Omega_k &= \Omega_{k-1} + \sum_{i=1}^q L_{\tau_i} \Omega_{k-1} \end{aligned} \tag{1.9.1}$$

**Lema 8,[5].** Las codistribuciones generadas por el algoritmo (1.9.1) son tales que  $\Omega_k \subset \langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Omega \rangle$  para toda  $k$ , si existe un entero  $k^*$  tal que  $\Omega_{k^*} = \Omega_{k^*+1}$  entonces  $\Omega_{k^*} \subset \langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Omega \rangle$ .

□

En el caso de un sistema lineal, la secuencia (1.9.1) puede ser interpretada como una analogía no lineal de una secuencia que conduce al subespacio más grande de  $\mathbb{R}^n$  invariante bajo  $A$  y contenido en el kernel de  $C$ . Suponga

$$\Omega_0 = \text{span}\{c_1, \dots, c_p\}$$

$$\tau(x) = Ax \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

los  $c_i$ 's son los renglones de  $C$ .

Cualquier campo covectorial  $\omega$  en  $\Omega_0$  puede ser expresado localmente como  $\omega = \sum_{i=1}^p c_i \gamma_i(x)$  donde  $\gamma_i$ 's son funciones suaves evaluadas en los reales; es fácil deducir que

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \Omega_0 + L_\tau \Omega_0 \\ &= \text{span}\{c_1, \dots, c_p, L_\tau c_1, \dots, L_\tau c_p\} \\ &= \text{span}\{c_1, \dots, c_p, c_1 A, \dots, c_p A\} \\ &= \text{span}\{C, CA\} \end{aligned}$$

de la misma forma, para cualquier  $k$   $\Omega_k(x) = \text{span}\{C, CA, \dots, CA^k\}$ . El argumento de dimensionalidad prueba que existe  $k^* < n$  con la propiedad  $\Omega_{k^*} = \Omega_{k^*+1}$ .

Por dualidad  $\Omega_{n-1}^\perp$  es la distribución invariante más grande bajo el campo vectorial  $Ax$  y contenida en la distribución  $\Omega_0^\perp$ . Por construcción para cada  $x \in \mathbb{R}^n$

$$\Omega_0^\perp(x) = \text{Ker}(C) \quad \text{y} \quad \Omega_{n-1}^\perp(x) = \text{Ker} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

**Lema 9,[5].** Existe un subconjunto abierto y denso  $U^*$  de  $U$  con la propiedad de que para cada punto  $x \in U^*$

$$\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Omega \rangle(x) = \Omega_{n-1}^\perp(x)$$

□

**Lema 10,[5].** Suponga  $\Omega$  es generado por el conjunto

$$d\lambda_1, \dots, d\lambda_s \quad (1.9.2)$$

de campos covectoriales exactos, entonces existe un subconjunto abierto y denso  $U^*$  de  $U$  con la siguiente propiedad: para cada  $x^0 \in U^*$  existe una vecindad abierta  $U^0$  y  $d$  campos covectoriales exactos (con  $\text{Dim}(\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Omega \rangle(x^0)) = d$ )  $\omega_1, \dots, \omega_d$  los cuales tienen la forma  $\omega_i = dL_{v_r} \dots L_{v_1} \lambda_j$  donde  $r \leq n-1$  y puede depender de  $i$ , y los  $v_i$ 's son campos vectoriales del conjunto (1.8.1) y  $\lambda_j$  es una función del conjunto  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$  tal que  $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Omega \rangle(x) = \text{span}\{\omega_1(x), \dots, \omega_d(x)\}$  para toda  $x \in U^0$ .

□

**Lema 11,[5].** Suponga que  $\Omega$  es generado por el conjunto (1.9.2) de campos covectoriales exactos y que  $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Omega \rangle(x)$  es no singular. Entonces  $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Omega \rangle^\perp$  es involutiva.

□

**Lema 12,[5].** Suponga  $\Omega$  es generado por el conjunto (1.9.2) de campos covectoriales exactos y  $\Omega_{n-1}$  es no singular. Entonces  $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Omega \rangle^\perp$  es involutiva y  $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Omega \rangle = \Omega_{n-1}$ .

□

En el estudio de la interacción *estado-salida* para un sistema de control de la forma (I) consideramos la distribución

$$Q = \langle f, g_1, \dots, g_m | \text{span}\{dh_1, \dots, dh_p\} \rangle^\perp$$

invariante bajo  $f, g_1, \dots, g_m$  y que está contenida en  $Q = \left( \text{span}\{dh_1, \dots, dh_p\} \right)^\perp$ .

Si es no singular, entonces de acuerdo al lema 12 es también involutiva. Esta distribución es usada para encontrar una descomposición de la forma (1.7.2).

## Capítulo 2

# Síntesis para Sistemas No Lineales

### 2.1. Antecedentes

En esta sección se muestra el uso de la Derivada de Lie para transformar el sistema de coordenadas de un sistema no lineal, a un sistema de coordenadas de especial interés, donde algunas de las propiedades del sistema se observan casi directamente.

#### 2.1.1. Grado relativo

**Definición 1.** Sea el siguiente sistema con entrada y salida escalares:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (2.1.1.1)$$

donde  $f(x)$ ,  $g(x)$  y  $h(x)$  están definidos exactamente igual que en el Capítulo 1, se dice tener **grado relativo  $r$**  en un punto  $x^0$  si:

$$a) L_g L_f^k h(x) = 0 \quad \forall x \text{ en una vecindad de } x^0 \text{ y } \forall k < r-1$$

$$b) L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$$

El grado relativo del sistema lineal (1.7.3) está caracterizado por las condiciones:

$$CA^k B = 0 \quad k < r-1$$

$$CA^{r-1} B \neq 0$$

en este caso  $f(x)=Ax$ ,  $g(x)=B$ ,  $h(x)=Cx$ .

El entero  $r$  que satisface estas condiciones es exactamente igual a la diferencia entre el grado del polinomio denominador y el grado del polinomio numerador de:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1} B$$

**Lema 1,[5].** Los vectores renglón  $dh(x^0), dL_f h(x^0), \dots, dL_f^{r-1} h(x^0)$  son linealmente independientes.

□

lo que significa que las funciones  $\phi_1(x) = h(x), \phi_2(x) = L_f h(x), \dots, \phi_r(x) = L_f^{r-1} h(x)$  pueden ser utilizados como los  $r$  primeros componentes de un cambio de coordenadas del estado.

**Lema 2,[5].** Sea  $\phi$  una función envaluada en los reales y  $f, g$  campos vectoriales, todos definidos en un conjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  entonces para cualquier selección de  $s, k, r > 0$ ,

$$\langle dL_f^s \phi(x), ad_f^{k+r} g(x) \rangle = \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{r}{i} L_f^{r-i} \langle dL_f^{s+i} \phi(x), ad_f^k g(x) \rangle$$

como consecuencia los dos conjuntos de condiciones:

- (i)  $L_g \phi(x) = L_g L_f \phi(x) = \dots = L_g L_f^k \phi(x) = 0 \quad \forall x \in U$
- (ii)  $L_g \phi(x) = L_{ad_f g} \phi(x) = \dots = L_{ad_f^k g} \phi(x) = 0 \quad \forall x \in U$

son equivalentes.

□

Si  $r < n$  entonces siempre es posible encontrar  $n-r$  funciones  $\phi_{r+1}(x), \dots, \phi_n(x)$  tal que el mapeo:

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix} \quad (2.1.1.2)$$

tenga una matriz Jacobiano la cual es no singular en  $x^0$  y por lo tanto califica como transformación de coordenadas en una vecindad de  $x^0$ . Siempre es posible escoger  $\phi_{r+1}(x), \dots, \phi_n(x)$  de tal forma que:

$$L_g \phi_i = 0 \quad (2.1.1.3)$$

$\forall r+1 \leq i \leq n$  y para toda  $x$  en una vecindad de  $x^0$ . No obstante no existe forma constructiva para obtener estas funciones. La descripción del sistema en las nuevas coordenadas será como sigue:

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= z_2 \\
 \dot{z}_2 &= z_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{z}_{r-1} &= z_r \\
 \dot{z}_r &= b(z) + a(z)u \\
 \dot{z}_{r+1} &= q_{r+1} \\
 &\vdots \\
 \dot{z}_n &= q_n
 \end{aligned}
 \tag{2.1.1.4}$$

como  $y=h(x)$ , es claro que  $y = z_1$ .

### 2.1.2. Linealización Exacta vía Retroalimentación de Estado

Para un sistema SISO la estructura mas conveniente de una ley de control por retroalimentación de estado estática es  $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ , donde  $v$  es la entrada de referencia externa.

La composición de esta ley de control con un sistema de la forma (2.1.1.1) produce un lazo cerrado caracterizado por la estructura:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= f(x) + g(x)\alpha(x) + g(x)\beta(x)v \\
 y &= h(x)
 \end{aligned}$$

$\alpha(x)$  y  $\beta(x)$  están definidas sobre un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  donde la transformación es factible.  $\beta(x) \neq 0 \forall x$  en este conjunto, si no fuera así no se puede definir la entrada  $v$ .

Cualquier sistema no lineal con grado relativo  $n$  en algún punto  $x^0$  puede ser transformado en un sistema, el cual, en una vecindad de  $z^0 = \Phi(x^0)$  es lineal y controlable.

Sobre el sistema linealizado entonces obtenido, podemos seleccionar la ley de control por retroalimentación de estado  $v = k z$ , donde  $k = (c_0, \dots, c_{n-1})$ , puede ser seleccionado, por ejemplo, para asignar un conjunto específico de valores característicos, o satisfacer un criterio óptimo. Recordemos que las  $z_i^s$  son funciones de  $x$ , la retroalimentación en cuestión puede ser reescrita de la siguiente forma:

$$v = c_0 h(x) + c_1 L_f h(x) + \dots + c_{n-1} L_f^{n-1} h(x)
 \tag{2.1.2.1}$$

con  $v$  definida de esta manera obtenemos la siguiente retroalimentación estática de estado:

$$u = \frac{-L_f^n h(x) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i L_f^i h(x)}{L_g L_f^{n-1} h(x)} \quad (2.1.2.2)$$

La característica básica del sistema que hizo posible transformarlo en uno lineal y controlable, fue la existencia de una función de salida,  $h(x)$ , para la cual el sistema tiene grado relativo igual a  $n$ . El grado relativo es invariante bajo transformación y/o retroalimentación estática de estado.

**Teorema 1, [5].** Suponga el sistema  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ . El problema de la linealización exacta del espacio de estado tiene solución en una vecindad del punto  $x^0$  si y solo si las siguientes condiciones son satisfechas:

- (i) La matriz  $\begin{bmatrix} g(x^0) & \text{ad}_f g(x^0) & \dots & \text{ad}_f^{n-2} g(x^0) & \text{ad}_f^{n-1} g(x^0) \end{bmatrix}$  tiene rango  $n$ .
- (ii) La distribución  $D = \text{span}\{g, \text{ad}_f g, \dots, \text{ad}_f^{n-2} g\}$  es involutiva en una vecindad de  $x^0$ .

□

La condición (i) del Teorema 1 tiene la siguiente interpretación interesante. Suponga que  $f(x^0) = f(0) = 0$  y considere para  $f(x)$  una expansión de la forma

$$f(x) = Ax + f_2(x) \quad \text{con} \quad A = \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x=0} \quad \text{y} \quad \left[ \frac{\partial f_2}{\partial x} \right]_{x=0} = 0.$$

y sea  $g(x)$  una expansión de la forma:

$$g(x) = B + g_1(x) \quad \text{con} \quad B = g(0)$$

Esto caracteriza la aproximación lineal del sistema en  $x=0$ , la cual está definida como  $\dot{x} = Ax + Bu$ . El campo vectorial  $\text{ad}_f^k g(x)$  puede ser expandido de la siguiente forma:

$$\text{ad}_f^k g(x) = (-1)^k A^k B + p_k(x) \quad \text{donde} \quad p_k(x) \quad \text{es una función tal que} \quad p_k(0) = 0.$$

de esto vemos la condición (i) del Teorema 1, es equivalente a la condición:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix} = n$$

concluimos que la controlabilidad de la aproximación lineal del sistema en  $x=x^0$  es una *condición necesaria* para solucionar el problema de la linealización Exacta del Espacio de Estado.

Ahora supongamos que el problema de la linealización Exacta del Espacio de Estado tiene solución, por lo tanto, existe *una salida ficticia*  $\lambda(x)$  tal que:

$$L_g \lambda(x) = L_g L_f \lambda(x) = \dots = L_g L_f^{n-2} \lambda(x) = 0$$

$$L_g L_f^{n-1} \lambda(x) \neq 0$$

para toda  $x$  en una vecindad de  $x^0$ , entonces vía el Lema 2 la primera expresión puede reescribirse como:

$$L_g \lambda(x) = L_{ad_f g} \lambda(x) = \dots = L_{ad_f^{n-2} g} \lambda(x) = 0$$

$$L_{ad_f^{n-1} g} \lambda(x) \neq 0$$

donde la primera expresión nuevamente puede reescribirse como:

$$d\lambda(x) \left[ g(x^0) \quad ad_f g(x^0) \quad \dots \quad ad_f^{n-2} g(x^0) \right] = 0$$

como la codistribución  $\text{span}\{d\lambda(x)\}$  es involutiva, *necesariamente* se requiere la condición (ii) del Teorema 1.

Si  $\Phi(U)$  contiene el origen de  $\mathbb{R}^n$ , en particular,  $\Phi(x^0) = 0$ , podemos usar la teoría de los sistemas lineales para estabilizar asintóticamente en  $z=0$ , lo cual es equivalente a estabilizar el sistema no lineal en el punto de equilibrio  $x=x^0$ . Como un hecho, la condición  $\Phi(x^0) = 0$ , necesariamente produce:

$$\left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} (f(x) + g(x)u) \right]_{x=x^0} = 0$$

Como  $\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=x^0}$  es no singular, lo anterior implica que  $f(x^0) + g(x^0)\alpha(x^0) = 0$ . Este hecho muestra claramente que  $x^0$  es un punto de equilibrio del campo vectorial  $f(x) + g(x)\alpha(x)$  y puede ser obtenido *si y solo si*  $f(x^0) = c g(x^0)$  donde  $c$  es un número real. Si este es el caso, un cálculo fácil muestra que las coordenadas linealizantes son cero en  $x^0$ , porque:

$$L_f^{i-1}\lambda(x^0) = cL_gL_f^{i-2}\lambda(x^0) = 0 \quad \forall 2 \leq i \leq n$$

más aún

$$\alpha(x^0) = \frac{-L_f^n \lambda(x^0)}{L_g L_f^{n-1} \lambda(x^0)} = -c$$

como se esperaba.

Note que el sistema no lineal (2.1.1.1) con  $r < n$ , podría satisfacer el Teorema 1; si este es el caso, será una función de salida diferente, por decir  $\lambda(x)$ , con respecto a la cual el sistema tendrá un grado relativo exactamente igual a  $n$ .

Con esta nueva función será posible construir una retroalimentación  $u = \alpha(x) + \beta(x)v$  y un cambio de coordenadas  $z = \Phi(x)$ , que transformará la ecuación del espacio de estado en uno lineal y controlable, sin embargo, la salida real del sistema, en las nuevas coordenadas  $y = h(\Phi^{-1}(z))$  continuará siendo una función no lineal del estado  $z$ .

### 2.1.3. Dinámica Cero

Consideremos un sistema no lineal con grado relativo menor a la dinámica del espacio de estado ( $r < n$ ). En (2.1.1.4) podemos hacer la siguiente partición:

$$\xi = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{bmatrix}; \quad \eta = \begin{bmatrix} z_{r+1} \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

con la ayuda de estas notaciones, la *forma normal* de un sistema no lineal SISO que tenga  $r < n$ , puede ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r-1} &= z_r \\ \dot{z}_r &= b(\xi, \eta) + a(\xi, \eta)u \\ \dot{\eta} &= q(\xi, \eta) \end{aligned} \tag{2.1.3.1}$$

Si  $x^0$  es tal que  $f(x^0) = 0$  y  $h(x^0) = 0$ , entonces necesariamente las primeras  $r$  nuevas coordenadas  $z_i$  son cero en  $x^0$ . Note también que siempre es posible escoger arbitrariamente el valor, en  $x^0$ , de las últimas  $n-r$  nuevas coordenadas, en particular ser cero en  $x^0$ . Por lo tanto sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $\xi = 0$  y  $\eta = 0$  en  $x^0$ . Entonces si  $x^0$  es un punto de equilibrio para el sistema en coordenadas originales, su punto correspondiente  $(\xi, \eta) = (0, 0)$  es un punto de equilibrio para el nuevo sistema.

En el análisis de aproximar a cero la salida, se requiere encontrar  $x^0$  y  $u^0(t)$  definidos para todo tiempo en una vecindad de  $t=0$ , tal que la salida del sistema sea idénticamente igual a cero.

Recordemos que  $y(t) = z_1(t)$ , la restricción  $y(t) = 0 \forall t$  trae consigo  $\dot{z}_1 = \dot{z}_2 = \dots = \dot{z}_r = 0$ , esto es  $\xi(t) = 0$ . Además la entrada debe ser necesariamente una solución de la ecuación  $0 = b(0, \eta(t)) + a(0, \eta(t))u(t)$ . La variable  $\eta(t)$  está caracterizada por la ecuación diferencial:

$$\dot{\eta}(t) = q(0, \eta(t)) \quad (2.1.3.2)$$

Si la salida es cero, necesariamente el estado inicial debe ser tal que  $\xi(0) = 0$ , donde  $\eta(0) = \eta^0$  puede ser escogido arbitrariamente. De acuerdo al valor de  $\eta^0$ , la entrada debe ser:

$$u(t) = \frac{b(0, \eta(t))}{a(0, \eta(t))}$$

En un sistema lineal la dinámica cero es lineal con valores característicos que coinciden con los ceros de la función de transferencia del sistema original.

La aproximación lineal de la dinámica cero del sistema en  $\eta = 0$ , coincide con la dinámica cero de la aproximación lineal del sistema entero en  $x=0$ . (Las operaciones de tomar la aproximación lineal y calcular la dinámica cero conmutan).

El problema de mantener en cero la salida podría haber sido analizado directamente sobre la forma original de las ecuaciones. Deducimos que:

$$y^{(i-1)}(t) = 0 \Rightarrow L_f^{i-1}h(x(t)) = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq r.$$

entonces como es esperado, el sistema evoluciona sobre el conjunto:

$$Z^* = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : h(x) = L_f h(x) = L_f^2 h(x) = \dots = L_f^{r-1} h(x) = 0 \right\}$$

note que como las diferenciales  $dL_f^i h(x)$ ,  $0 \leq i \leq r-1$  son linealmente independientes en  $x^0$ , y mediante el Teorema de la función implícita concluimos que el conjunto  $Z^*$  es una variedad suave de dimensión  $n-r$  cerca de  $x^0$ . La retroalimentación de estado:

$$u^*(x) = -\frac{L_f^r h(x(t))}{L_g L_f^{r-1} h(x(t))}$$

por construcción es tal que:

$$\begin{bmatrix} dh(x) \\ dL_f h(x) \\ \vdots \\ dL_f^{r-1} h(x) \end{bmatrix} (f(x) + g(x)u^*(x)) = 0 \quad \forall x \in Z^*$$

y por lo tanto el campo vectorial  $f^*(x) = f(x) + g(x)u^*(x)$  es tangente a  $Z^*$ . Como una consecuencia, cualquier trayectoria del sistema de lazo cerrado  $\dot{x} = f^*(x)$  comienza en un punto de  $Z^*$  y permanece ahí para valores pequeños de tiempo. La restricción  $f^*(x)|_{Z^*}$  describe, en un sistema libre de coordenadas, la dinámica cero del sistema.

La dinámica  $\dot{\eta}(t) = q(0, \eta(t))$  describe el comportamiento interno del sistema cuando este es forzado a mantener su salida en cero. Lo anterior puede extenderse fácilmente al caso en el cual se desea seguir una función arbitraria  $y_R(t)$ , por lo tanto para resolver este problema se requiere encontrar un par que consiste de un estado inicial y una función de entrada definida en una vecindad de  $t=0$ , tal que la correspondiente salida del sistema coincida exactamente con la función deseada. Encontramos que:

$$y(t) = y_R(t) \Rightarrow z_i(t) = y_R^{(i-1)}(t) \quad \forall t, 1 \leq i \leq r$$

por lo tanto

$$\xi_R(t) = \left( y_R(t), y_R^{(1)}(t), \dots, y_R^{(r-1)}(t) \right)^T$$

vemos entonces que la entrada debe satisfacer:

$$y_R^{(r)}(t) = b(\xi_R(t), \eta(t)) + a(\xi_R(t), \eta(t))u(t)$$

donde  $\eta(t)$  es una solución de la ecuación diferencial  $\dot{\eta}(t) = q(\xi_R(t), \eta(t))$ , entonces, si  $y(t)$  tiene que seguir exactamente a  $y_R(t)$  necesariamente el estado inicial del sistema debe ser tal que  $\xi(0) = \xi_R(0)$ , mientras que  $\eta(0) = \eta^0$  puede ser escogido arbitrariamente. De acuerdo al valor de  $\eta^0$ ,

$$u(t) = \frac{y_R^{(r)}(t) - b(\xi_R(t), \eta(t))}{a(\xi_R(t), \eta(t))}$$

la única entrada capaz de mantener  $y(t) = y_R(t) \quad \forall t \geq t^0$ .

## 2.2. Estabilización asintótica local

La dinámica cero puede ser de gran ayuda en el problema de estabilizar asintóticamente un sistema no lineal en un punto de equilibrio dado  $x^0$  ( sin pérdida de generalidad  $x^0=0$  ).

El problema se soluciona al encontrar una retroalimentación de estado suave  $u = \alpha(x)$  tal que  $\alpha(x^0) = \alpha(0) = 0$ , con la propiedad de que el correspondiente lazo cerrado  $\dot{x} = f(x) + g(x)\alpha(x)$  es localmente asintóticamente estable en  $x^0$ . La posibilidad de resolver el problema depende de las propiedades de *la aproximación lineal* del sistema cerca de  $x^0$ .

Suponga que la aproximación lineal es asintóticamente estabilizable, entonces cualquier retroalimentación lineal que estabiliza asintóticamente la aproximación lineal, puede estabilizar asintóticamente el sistema no lineal original, al menos localmente.

**Problemas críticos de la estabilización asintótica.** Si el par  $(A,B)$  es no controlable y existen modos no controlables asociados con valores característicos sobre el eje imaginario (pero ninguno de ellos está en el semiplano derecho) nada puede decirse de la aproximación lineal, en el sentido de que el sistema no lineal pudiera ser localmente asintóticamente estabilizable, mediante una retroalimentación no lineal, aunque la aproximación lineal no lo sea.

La noción de la dinámica cero es de gran ayuda cuando existen este tipo de problemas críticos de estabilización asintótica local. Una retroalimentación de la forma:

$$u = \frac{1}{a(\xi, \eta)} (-b(\xi, \eta) - c_0 z_1 - c_1 z_2 - \dots - c_{r-1} z_r)$$

produce un sistema de lazo cerrado:

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= A\xi \\ \dot{\eta} &= q(\xi, \eta)\end{aligned}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -c_0 & -c_1 & -c_2 & \cdots & -c_{r-1} \end{bmatrix} \quad (2.2.1)$$

Para diseñar una ley de control estabilizable no hay necesidad de conocer explícitamente la expresión del sistema en forma normal, solo el hecho de que el sistema tiene dinámica cero asintóticamente estable.

Los valores característicos asociados con los modos no controlables de la aproximación lineal del sistema, si existen, corresponden necesariamente con los valores característicos de la aproximación lineal de la dinámica cero.

### 2.3. Seguimiento asintótico de salida

En esta sección analizaremos el problema de obtener una salida que, independientemente del estado inicial del sistema, converga asintóticamente a la función de referencia  $y_R(t)$ .

Considere un sistema en la forma normal (2.1.3.1) y además  $y = z_1$ , seleccione la siguiente acción de control:

$$u = \frac{1}{a(\xi, \eta)} \left( b(\xi, \eta) + y_R^{(r)} - \sum_{i=1}^r c_{i-1} (z_i - y_R^{(i-1)}) \right) \quad (2.3.1)$$

donde  $c_0, \dots, c_{r-1}$  son números reales. Por construcción  $z_i = y^{(i-1)}(t)$  para  $1 \leq i \leq r$ ; si definimos el error  $e(t) = y(t) - y_R(t)$  podemos reescribir la entrada (2.3.1) de la siguiente forma:

$$u = \frac{1}{a(\xi, \eta)} \left( b(\xi, \eta) + y_R^{(r)} - \sum_{i=1}^r c_{i-1} e^{(i-1)} \right)$$

la entrada (2.3.1) induce lo siguiente:

$$e^{(r)} + c_{r-1} e^{(r-1)} + \dots + c_1 e^{(1)} + c_0 e = 0 \quad (2.3.2)$$

Las raíces de la ecuación característica asociada con (2.3.2) pueden ser asignadas arbitrariamente. Por lo tanto bajo el efecto de una entrada de la forma (2.3.1), la salida del sistema sigue a la señal deseada  $y_R(t)$  con un error, el cual puede hacerse converger a cero cuando  $t \rightarrow \infty$  en forma exponencial arbitrariamente rápido.

*Es de gran importancia que las variables que representan el comportamiento del sistema permanezcan acotadas cuando se asigne una ley de control específica.*

Suponga que  $y_R(t), y_R^{(1)}(t), \dots, y_R^{(r-1)}(t)$  están definidas para toda  $t \geq 0$  y acotadas. Sea  $\eta_R(t)$  la solución de (2.1.3.2) que satisface  $\eta_R(0) = 0$ . Suponga que ésta solución está definida para todo  $t \geq 0$  acotada y es uniformemente asintóticamente estable, y que todas las raíces del polinomio:

$$s^r + c_{r-1}s^{r-1} + \dots + c_1s + c_0 = 0$$

tienen parte real negativa. Entonces para  $a > 0$ , suficientemente pequeña, si

$$\left| z_i(t^0) - y_R^{(i-1)}(t^0) \right| < a, \quad 1 \leq i \leq r, \quad \left\| \eta(t^0) - \eta_R(t^0) \right\| < a$$

la respuesta correspondiente  $z_i(t), \eta(t)$  del sistema de lazo cerrado está acotada. Más precisamente para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que:

$$\left| z_i(t^0) - y_R^{(i-1)}(t^0) \right| < \delta \Rightarrow \left| z_i(t) - y_R^{(i-1)}(t) \right| < \varepsilon \quad \forall t \geq t^0 \geq 0$$

$$\left\| \eta(t^0) - \eta_R(t^0) \right\| < \delta \Rightarrow \left\| \eta(t) - \eta_R(t) \right\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t^0 \geq 0$$

Algunas veces la señal de referencia no es una función fija en el tiempo, como lo es la salida de un modelo dinámico sujeto a alguna entrada  $\omega$ , por ejemplo el siguiente modelo lineal:

$$\dot{\zeta} = A\zeta + B\omega$$

$$y_R = C\zeta$$

Si éste es el caso, nuestro problema es el de encontrar una retroalimentación de estado, para la cual, independientemente de los estados iniciales del sistema y del modelo, obtenemos que la salida  $y(t)$  (para cada entrada  $\omega(t)$  del modelo) converge asintóticamente a la salida correspondiente  $y_R(t)$ . Para la solución de este problema, pudiéramos usar la entrada (2.3.1), con  $y_R(t)$  y sus primeras  $r$  derivadas, pero como:

$$y_R^{(i)}(t) = CA^i \zeta(t) + CA^{i-1} B \omega(t) + \dots + CAB \omega^{(i-2)}(t) + CB \omega^{(i-1)}(t)$$

al diferenciar  $\omega(t)$  se amplificaría el efecto del ruido aditivo. Si suponemos el grado relativo del modelo igual o mayor que el grado relativo del sistema, tenemos que:

$$y_R^{(i)}(t) = CA^i \zeta(t) \quad \forall 0 \leq i \leq r-1$$

$$y_R^{(r)}(t) = CA^r \zeta(t) + CA^{r-1} B \omega(t)$$

reemplazando esto en (2.3.1) produce:

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)} \left( -L_f^r h(x) + CA^r \zeta + CA^{r-1} B \omega - \sum_{i=1}^r c_{i-1} \left( L_f^{(i-1)} h(x) - CA^{(i-1)} \zeta \right) \right)$$

si los coeficientes  $c_0, \dots, c_{r-1}$  son escogidos apropiadamente el sistema tendrá una salida la cual convergerá asintóticamente a la salida  $y_R(t)$  del modelo. La salida del sistema de lazo cerrado será de la forma:

$$y(t) = e(t) + Ce^{At}\zeta(0) + \int_0^t Ce^{A(t-s)}B\omega(s)ds$$

El análisis de las propiedades asintóticas de las variables internas del sistema obtenido es similar al desarrollado anteriormente.

## 2.4. Rechazo de perturbaciones

Considere el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u + p(x)\omega \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

en el cual  $\omega$  representa una perturbación. Examinaremos bajo que condiciones existe una ley de control por retroalimentación de estado estática,  $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ , tal que la salida del sistema en lazo cerrado no dependa de  $\omega$ .

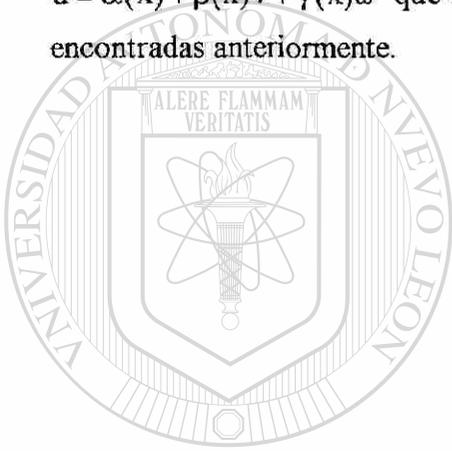
Supongamos que el sistema tiene grado relativo  $r$  en  $x^0$ , y que el campo vectorial  $p(x)$  es tal que  $L_p L_f^i h(x) = 0$ ,  $\forall 0 \leq i \leq r-1$  y  $\forall x \in U^0$ , usando estas condiciones podemos reescribir el sistema (2.4.1) en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r-1} &= z_r \\ \dot{z}_r &= b(\xi, \eta) + a(\xi, \eta)u \\ \dot{\eta} &= q(\xi, \eta) + k(\xi, \eta)\omega \\ y &= z_1 \end{aligned}$$

Supongamos que se escoge la siguiente retroalimentación de estados:

$$u = -\frac{b(\xi, \eta)}{a(\xi, \eta)} + \frac{v}{a(\xi, \eta)}$$

la cual ocasiona que la variable de estado  $z_1$  (salida del sistema) esté completamente desacoplada de la perturbación. Note que sobre el sistema desacoplado podemos escoger una nueva ley de control  $v$  para alcanzar desempeños adicionales. Si la perturbación está disponible para la medición, podemos encontrar una ley de control de la forma  $u = \alpha(x) + \beta(x)v + \gamma(x)\omega$  que resolvería este problema bajo condiciones mas débiles que las encontradas anteriormente.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## Capítulo 3

# Análisis de Sistemas Mimo

### 3.1. Transformaciones de coordenadas locales

Para evitar complicaciones enfocaremos nuestro análisis a sistemas que tengan el mismo número de entradas y de salidas, después especificaremos como los resultados podrán ser adaptados a sistemas que tengan distinto número de entradas y de salidas.

**Definición 1.** El sistema no lineal multivariable

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m g_i(\mathbf{x}) u_i \\ y_j &= h_j(\mathbf{x}) \quad (j=1, \dots, m)\end{aligned}$$

tiene un **vector grado relativo**  $\{r_1, \dots, r_m\}$  en un punto  $\mathbf{x}^0$  si:

- a)  $L_{g_j} L_f^k h_i(\mathbf{x}) = 0$ , para todo  $1 \leq i, j \leq m$ ,  $k < r_i - 1$ , y para toda  $\mathbf{x}$  en una vecindad de  $\mathbf{x}^0$ .
- b) La siguiente matriz:

$$A(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) \\ L_{g_1} L_f^{r_2-1} h_2(\mathbf{x}) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_2-1} h_2(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (3.1.1)$$

es no singular en  $\mathbf{x}=\mathbf{x}^0$ .

□

Cada elemento  $r_i$  del vector grado relativo está asociado con la  $i$ -ésima salida del sistema, además es un entero tal que  $L_{g_j} L_f^k h_i(x) = 0$  para todo  $1 \leq i, j \leq m$ ,  $k < r_i - 1$  y para toda  $x$  en una vecindad de  $x^0$ , y  $L_{g_j} L_f^{r_i-1} h_i(x^0) \neq 0$  para al menos un valor de  $j$  en el intervalo  $1 \leq j \leq m$ .

Finalmente, note que  $r_i$  es exactamente el número de veces que la salida  $i$ -ésima tiene que derivarse (evaluada en  $t=t^0$ ) para que aparezca al menos un componente del vector de entrada explícitamente.

**Lema 1,[5].** Suponga que el sistema tiene un vector grado relativo  $\{r_1, \dots, r_m\}$  en  $x^0$ . Entonces los siguientes vectores renglón:

$$\begin{aligned} & dh_1(x^0), dL_f h_1(x^0), \dots, dL_f^{r_1-1} h_1(x^0) \\ & dh_2(x^0), dL_f h_2(x^0), \dots, dL_f^{r_2-1} h_2(x^0) \\ & \dots \\ & dh_m(x^0), dL_f h_m(x^0), \dots, dL_f^{r_m-1} h_m(x^0) \end{aligned}$$

son linealmente independientes.

Las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} \phi_1^1(x) &= h_1(x) \\ \phi_2^1(x) &= L_f h_1(x) \\ &\vdots \\ \phi_{r_1}^1(x) &= L_f^{r_1-1} h_1(x) \end{aligned}$$

forman parte del cambio de coordenadas. Si  $r = r_1 + \dots + r_m < n$ , siempre es posible encontrar  $n-r$  funciones  $\phi_{r+1}(x), \dots, \phi_n(x)$  tal que el mapeo:

$$\Phi(x) = \left[ \phi_1^1(x), \dots, \phi_{r_1}^1(x), \dots, \phi_1^m(x), \dots, \phi_{r_m}^m(x), \phi_{r+1}(x), \dots, \phi_n(x) \right]^T \quad (3.1.2)$$

tiene una matriz Jacobiano la cual es no singular en  $x^0$  y califica como una transformación de coordenadas en una vecindad de este punto inicial. Además, si la distribución  $G = \text{span}\{g_1, \dots, g_m\}$  es involutiva cerca de  $x^0$ , siempre es posible encontrar las  $n-r$  funciones de tal forma que la derivada de Lie de cada una de ellas a lo largo de  $g_j$  ( $1 \leq j \leq m$ ) en la vecindad de  $x^0$ , es igual a cero.

Los resultados hasta ahora pueden extenderse a sistemas que tengan diferente número de entradas y de salidas, la suposición de no singularidad de la matriz  $A(x)$  es remplazada por la suposición de que esta matriz tiene rango igual al número de sus renglones (número de salidas), lo cual implica que el número de entradas es igual o mayor al número de salidas.

Los cálculos que conducen a la descripción del sistema en las nuevas coordenadas son equivalentes a los desarrollados para los sistemas SISO. El sistema transformado está dividido nuevamente en dos partes: lineal y no lineal. La parte lineal, a su vez, está dividida en dinámicas que tienen el siguiente esquema para cada componente del vector grado relativo:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_1^1}{dt} &= \phi_2^1(t) \\ &\vdots \\ \frac{d\phi_{r-1}^1}{dt} &= \phi_r^1(t) \end{aligned}$$

$$\frac{d\phi_r^1}{dt} = L_f^{r_1} h_1(x(t)) + \sum_{j=1}^m L_{g_j} L_f^{r_1-1} h_1(x(t)) u_j(x)$$

Ahora reescribimos el nuevo sistema con la notación establecida anteriormente, sea:

$$\xi^i = \begin{bmatrix} \xi_1^i \\ \xi_2^i \\ \vdots \\ \xi_{r_i}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1^i(x) \\ \phi_2^i(x) \\ \vdots \\ \phi_{r_i}^i(x) \end{bmatrix} \quad \text{y } \xi = (\xi^1, \dots, \xi^m) \quad \text{para } 1 \leq i \leq m$$

lo cual es un agrupamiento de todos los subsistemas lineales, y

$$\eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{r+1}(x) \\ \phi_{r+2}(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix}$$

representa la dinámica interna no observable, y

$$a_{ij}(\xi, \eta) = L_{g_j} L_f^{r_i-1} h_i(\Phi^{-1}(\xi, \eta)) \quad \forall 1 \leq i, j \leq m \quad (3.1.3a)$$

$$b_i(\xi, \eta) = L_f^{r_i} h_i(\Phi^{-1}(\xi, \eta)) \quad \forall 1 \leq i \leq m \quad (3.1.3b)$$

acompañan en forma lineal al vector de entrada. El nuevo sistema tiene la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1^i &= \xi_2^i \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{r_i-1}^i &= \xi_{r_i}^i \\ \dot{\xi}_{r_i}^i &= b_i(\xi, \eta) + \sum_{j=1}^m a_{ij}(\xi, \eta) u_j \end{aligned}$$

$$y_i = \xi_1^i$$

Observemos ahora lo que sería una extensión apropiada de la dinámica cero a un sistema que tiene vector grado relativo  $\{r_1, \dots, r_m\}$ . La idea es encontrar condiciones iniciales y entradas apropiadas para mantener la función de salida idénticamente cero en una vecindad de  $t=0$ .

Lo anterior nos indica que como en el caso de los sistemas SISO debemos tener  $\xi(t) = 0$  para todo  $t$  en una vecindad de 0, lo cual nos indica que el vector de entrada debe ser resultado de la ecuación:

$$0 = y_i^{(r_i)}(t) = b_i(0, \eta(t)) + \sum_{j=1}^m a_{ij}(0, \eta(t)) u_j(t) \quad \forall 1 \leq i \leq m$$

en notación vectorial el resultado para  $u(t)$  sería:

$$u(t) = -[A(0, \eta(t))]^{-1} b(0, \eta(t))$$

y como la matriz  $A$  es no singular cerca del origen, el vector  $\eta(t)$  debe permanecer cerca de este para permitir la no singularidad de la matriz,  $\Phi(x^0) = 0$ , y consecuentemente la existencia de la solución. Recuerde que  $\eta(t)$  es solución (única con condiciones iniciales  $\eta^0$ ) de:

$$\dot{\eta}(t) = q(\xi, \eta) - p(\xi, \eta)[A(\xi, \eta)]^{-1} b(\xi, \eta)$$

que es la representación general de la dinámica interna del sistema.

### 3.2. Linealización exacta mediante retroalimentación de estados

La versión apropiada para los sistemas multivariables es que cada entrada  $u_i$  depende del estado del sistema y del nuevo vector de entrada de referencias:

$$u_i = \alpha_i(x) + \sum_{j=1}^m \beta_{ij}(x)v_j \quad (3.2.1)$$

donde  $\alpha_i(x)$  y  $\beta_{ij}(x)$ , para  $1 \leq i, j \leq m$ , son funciones suaves definidas en un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ .

**Formulación del problema:** Dado un conjunto de campos vectoriales  $f(x)$  y  $g_1(x), \dots, g_m(x)$  y un estado inicial  $x^0$ , es posible encontrar en una vecindad  $U$  de  $x^0$ , un par de funciones de retroalimentación  $\alpha(x)$  y  $\beta(x)$  definidas sobre  $U$ , una transformación de coordenadas  $z = \Phi(x)$ , también definida sobre  $U$ , una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y una matriz  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , tal que:

$$\left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} (f(x) + g(x)\alpha(x)) \right]_{x=\Phi^{-1}(z)} = Az \quad \text{y} \quad \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} (g(x)\beta(x)) \right]_{x=\Phi^{-1}(z)} = B$$

Considere un sistema no lineal que tiene un vector grado relativo  $\{r_1, \dots, r_m\}$  en  $x^0$  y suponga que la suma  $r = r_1 + \dots + r_m$  es exactamente igual a  $n$  (la dimensión del espacio de estado), en este caso el sistema transformado está caracterizado totalmente por:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1^i &= \xi_2^i \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\dot{\xi}_{r_i-1}^i = \xi_{r_i}^i$$

$$\dot{\xi}_{r_i}^i = b_i(\xi) + \sum_{j=1}^m a_{ij}(\xi)u_j$$

para  $1 \leq i \leq m$ .

Recordemos que en una vecindad del punto  $\xi^0$  la matriz  $A(\xi)$  es no singular y por lo tanto la ecuación

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = b(\xi) + A(\xi)u$$

puede resolverse para u:

$$u = A^{-1}(\xi)[-b(\xi) + v] \quad (3.2.2)$$

En términos de la descripción original del sistema, las nuevas coordenadas están definidas como  $\xi_k^i(x) = L_f^{k-1}h_i(x) \quad \forall 1 \leq k \leq r_i, 1 \leq i \leq m$ .

**Lema 2,[5].** Suponga que la matriz  $g(x^0)$  tiene rango m. Entonces el problema de la Linealización Exacta por Retroalimentación de Estado admite solución *si y solo si* existe una vecindad U de  $x^0$  y m funciones evaluadas en los reales  $h_1(x), \dots, h_m(x)$  definidas sobre U, tal que el sistema (I) tiene algún vector grado relativo  $\{r_1, \dots, r_m\}$  en  $x^0$  y  $r_1 + r_2 + \dots + r_m = n$ .

□

Análogo al caso SISO, el vector grado relativo es invariante bajo una retroalimentación estática de estados.

Si la matriz  $g(x)$  tiene rango  $\rho < m$  y es constante para toda x en una vecindad U de  $x^0$ , entonces el problema de La Linealización Exacta del Espacio de Estado tiene solución *si y solo si* existen  $\rho$  funciones  $h_1(x), \dots, h_\rho(x)$  definidas sobre U tal que el sistema tiene un vector grado relativo  $\{r_1, \dots, r_\rho\}$  en  $x^0$  y  $r_1 + r_2 + \dots + r_\rho = n$ .

Bajo condiciones convenientes sobre los campos vectoriales  $f(x), g_1(x), \dots, g_m(x)$ , es posible encontrar m funciones  $h_1(x), \dots, h_m(x)$  que satisfagan los requerimientos del lema previo, dichas condiciones pueden ser establecidas en términos de algunas propiedades de distribuciones que tengan la forma  $G_i = \text{span}\{ad_f^k g_j : 0 \leq k \leq i, 1 \leq j \leq m\}$  para  $i=0, \dots, n-1$ .

**Teorema 1,[5].** Suponga la matriz  $g(x^0)$  tiene rango m. Entonces, el problema de La Linealización Exacta del Espacio de Estado tiene solución *si y solo si*:

- (i) para cada  $0 \leq i \leq n-1$ , la distribución  $G_i$  tiene dimensión constante alrededor de  $x^0$ .
- (ii) la distribución  $G_{n-1}$  tiene dimensión n.
- (iii) para cada  $0 \leq i \leq n-2$ , la distribución  $G_i$  es involutiva.

□

### 3.3. Control no interactivo

**Planteamiento del problema.** Dado un sistema no lineal de la forma (I) y un punto inicial  $x^0$ , encontrar una ley de control por retroalimentación estática de estado (3.2.1) definida en una vecindad  $U$  de  $x^0$ , con la propiedad que en el correspondiente lazo cerrado, cada salida  $y_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , es afectada solo por la entrada correspondiente  $v_i$  y no por  $v_j$ , con  $j \neq i$ .

El resultado principal acerca del problema de control no interactivo es que tiene solución *si y solo si* el sistema tiene algún vector grado relativo. La siguiente retroalimentación de estados:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} = -A^{-1}(\xi, \eta)b(\xi, \eta) + A^{-1}(\xi, \eta) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$$

produce el siguiente sistema, caracterizado por un conjunto de  $m$  ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1^i &= \xi_2^i \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{r_i-1}^i &= \xi_{r_i}^i \\ \dot{\xi}_{r_i}^i &= v_i \\ y_i &= \xi_1^i \end{aligned}$$

para  $1 \leq i \leq m$ , junto con un conjunto adicional de la forma:

$$\dot{\eta} = q(\xi, \eta) - p(\xi, \eta)A^{-1}(\xi, \eta)[b(\xi, \eta) + v] \tag{3.3.1}$$

La estructura de estas ecuaciones puede ser representada por el siguiente diagrama de bloques:

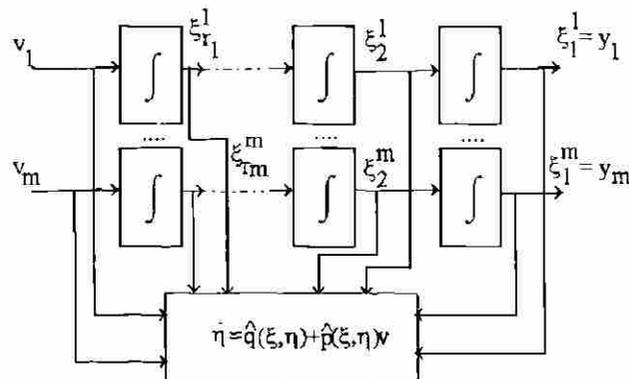


Fig. 1

claramente se observa que el requerimiento de la no interacción ha sido alcanzado.

La conducta del sistema en lazo cerrado es equivalente a la de un sistema lineal caracterizado por una matriz función de transferencia de la forma:

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^{r_1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^{r_2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{s^{r_m}} \end{bmatrix}$$

La solución entonces obtenida está definida solo localmente (vecindad de  $x^0$ ) en el espacio de estado, donde la matriz  $A(x)$  es no singular, lo cual es una condición **necesaria** para la existencia de soluciones a este problema, [5], pag. 262.

A continuación mencionaremos algunas consideraciones sobre la estabilidad de un sistema el cual a sido hecho no interactivo mediante una retroalimentación estática de estado. De la Figura 2, vemos que la estructura interna del lazo cerrado no interactivo obtenido usando retroalimentación estática de estado consiste de  $m$  cadenas de  $r_i$  integradores, cada una alimentando el subsistema (3.3.1). Agregando a este sistema una retroalimentación de la forma:

$$v_i = -c_0^i \xi_1^i - c_1^i \xi_2^i - \dots - c_{r_i-1}^i \xi_{r_i}^i + \bar{v}_i$$

lo cual en coordenadas originales sería:

$$v_i = -c_0^i h_i(x) - c_1^i L_f h_i(x) - \dots - c_{r_i-1}^i L_f^{r_i-1} h_i(x) + \bar{v}_i \quad \forall 1 \leq i \leq m$$

produce un sistema de lazo cerrado total el cual es no interactivo, y caracterizado por ecuaciones de la forma:

$$\dot{\xi}^i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -c_0^i & -c_1^i & -c_2^i & \dots & -c_{r_i-1}^i \end{bmatrix} \xi^i + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{v}_i$$

$$y_i = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \xi^i$$

para  $1 \leq i \leq m$ .

En particular, el sistema obtenido tiene un comportamiento entrada-salida caracterizado por una matriz función de transferencia diagonal:

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1(s)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2(s)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{d_m(s)} \end{bmatrix}$$

con

$$d_i(s) = c_0^i + c_1^i s + \dots + c_{r_i-1}^i s^{r_i-1} + s^{r_i} \quad (3.3.2)$$

Podemos concluir que si las dinámicas cero del sistema son asintóticamente estables, y todos los polinomios (3.3.2) tienen sus raíces en el semiplano izquierdo del plano complejo, el sistema en cuestión es localmente asintóticamente estable en el punto  $(\xi, \eta) = (0, 0)$ .

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

---

## Capítulo 4

# Introducción al Mathematica

---

**Mathematica** es un medio de análisis muy poderoso, aplicable a todas las ramas de la ciencia.

Puede usarse principalmente como:

- Calculador simbólico, numérico y gráfico.
- Lenguaje de programación de alto nivel.
- Plataforma de Software sobre la cual se pueden correr paquetes construidos para aplicaciones específicas.
- Lenguaje de control para programas y procesos externos

El Sistema **Mathematica** está dividido en dos partes: el "**Kernel**", el cual ejecuta los cálculos y el "**Front end**" el cual realiza la interacción con el usuario.

La forma más simple de usarlo es como una calculadora. Se escribe un cálculo e inmediatamente imprime la respuesta. Puede hacer cálculos numéricos no solo con escalares, sino también con matrices.

Una clase de cálculo posible con **Mathematica** es el relacionado con la manipulación de fórmulas algebraicas. Puede expandir, factorizar y simplificar polinomios y expresiones racionales. Puede evaluar derivadas e integrales simbólicamente y encontrar soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias.

**Mathematica** cumple con muchos "standards" de programación, lo que permite el intercambio de información con otros programas; puede leer datos en varios formatos y puede generar salidas para sistemas tales como C, Fortran y  $\text{T}_\text{E}_\text{X}$ . Para realizar esto se usa la vía de comunicación standard **Mathlink**, la cual puede ser usada para crear programas que llaman a Mathematica como si fuera una subrutina, de esta forma se puede instalar nuestro propio "Front end" completo (o sistema de control) para Mathematica.

Las **listas** son los objetos mas poderosos y flexibles con los que se elaboró el programa, podríamos pensar que son como los "arrays" encontrados en los lenguajes de programación numérica; **Mathematica** tiene un número extenso de funciones que hacen operaciones sobre ellas.

Todas las cosas que manipula **Mathematica** (fórmulas matemáticas, listas, gráficas, etc.) son consideradas como **Expresiones**, por ejemplo  $x + y \equiv \text{Plus}[x,y]$ . La noción de expresiones es un principio fundamental para el **Mathematica**, podríamos utilizar las expresiones para crear nuestras propias estructuras, por ejemplo tal vez se quisiera representar puntos en el espacio tridimensional especificados por tres coordenadas. Se podría representar cada punto como **punto**[x,y,z], esta función no ejecuta operación alguna, solamente sirve para mantener las tres coordenadas juntas y etiquetar el objeto resultante como un **punto**. A continuación presentamos 4 formas para escribir expresiones en **Mathematica**:

- `f[x,y]` para  $f(x,y)$
- `f @ x` para  $f(x)$
- `x // f` para  $f(x)$
- `x ~ f ~ y` para  $f(x,y)$

Las **Funciones puras**, son tales que pueden ser aplicadas a argumentos, sin tener que definir explícitamente nombres para las funciones, por ejemplo

`Map[# ^ 2 &, {a,b,c}]` nos da como resultado  $\{a^2, b^2, c^2\}$

Otro componente básico del **Mathematica** son los "**Patterns**", los cuales representan las diversas clases de expresiones, un ejemplo simple es la expresión `f[x_]`, la cual es una función cualquiera de `x` con *identificada* por `f`. Existe un mecanismo general para especificar restricciones sobre los "patterns", todo lo que se necesita hacer es poner `/;` **condición** al final de un "pattern" para indicar que se aplica solo cuando la condición especificada es verdadera.

<sup>1</sup> `Map` es una función del contexto `global en **Mathematica**

Las reglas de Transformación es una asignación instantánea que se hace a un símbolo, subexpresión, etc. con algún valor numérico, símbolo etc. para la evaluación de una expresión, por ejemplo:

$$x + y /. x \rightarrow y \quad \text{da como resultado} \quad 2y$$

Cuando queremos generar una función como la siguiente

$$^2\text{Exp}(g(x)) = x^2$$

**Mathematica** soporta definiciones de "Upvalues" que es algo parecido a los "Patterns", entonces podemos definir la función de la siguiente forma

$$\text{Exp}[g[x\_]] \wedge := x^2$$

En **Mathematica** podemos hacer uso de los **contextos** para organizar los nombres de los símbolos. Los contextos son particularmente importante en los paquetes de **Mathematica** los cuales contienen símbolos cuyos nombres no deben de estar en conflicto con los demás (posiblemente exista nombres de símbolos iguales en contextos distintos). La idea básica es que el nombre completo de cualquier símbolo está compuesto en 2 partes: Un contexto y un nombre. El nombre completo es escrito como *contexto`nombre*.

Se tiene un mecanismo general para manipular mensajes generados durante los cálculos, muchas funciones de **Mathematica** usan este mecanismo para producir mensajes de error y de advertencia; se pueden usar estos mecanismos para asociar mensajes a funciones propias.

---

<sup>2</sup>Exp es una función protegida del **Mathematica**

A continuación se muestra la secuencia, común, de comandos para crear un programa en **Mathematica**:

- a) **BeginPackage[" Paquete`"]**. Coloca *Package`* como el contexto actual y pone solamente el contexto *System`* sobre el *Path* de contextos.
- b) **f::usage="texto"**. Colocación de los objetos a exportar, por ejemplo mensajes de ayuda al usuario, etc...
- c) **Begin["`Private`"]**. Coloca el contexto actual a *Paquete`Private`*.
- d) **f[args]=valor**, Forman el cuerpo principal del paquete.
- e) **End[]** Retorna el contexto previo, en este caso *Paquete`*.
- f) **EndPackage[]** Finaliza *Paquete`* colocandolo en el inicio del *Path* de contextos.

La interacción del usuario con un paquete en **Mathematica** se puede esquematizar de la siguiente forma:

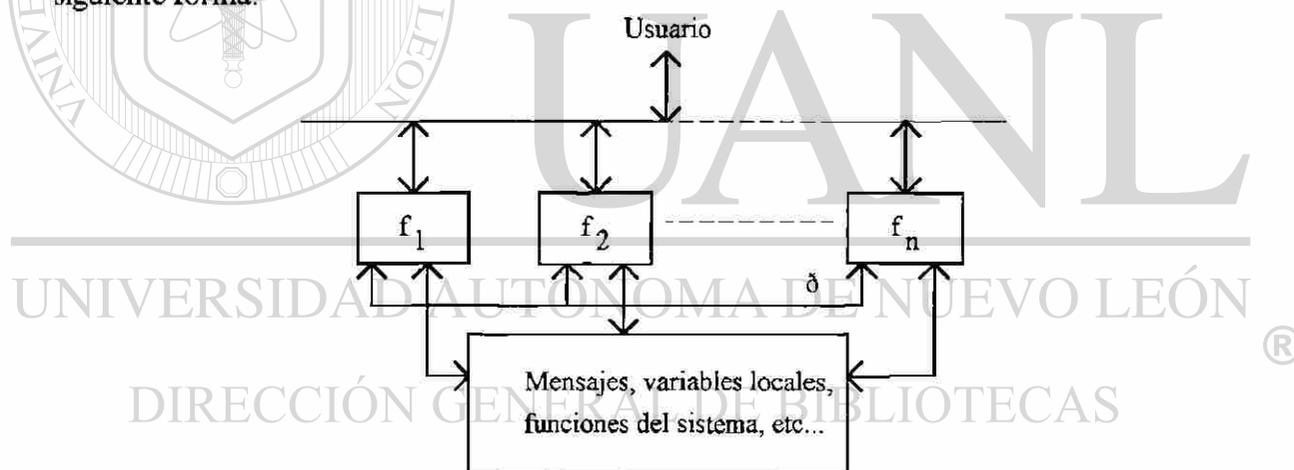


Fig.2

donde  $f_i$ , con  $i=1, \dots, n$  son funciones. Con el esquema anterior y el listado del paquete que se encuentra en el capítulo siguiente, podríamos hacer la siguiente relación:  $f_1 \rightarrow \text{Estado}$ ,  $f_2 \rightarrow \text{DerLie}$ , etc..., donde la primera función es la única que se relaciona con todas las demás vía  $\delta$ .

---

## Capítulo 5

# Programa

---

En la utilización del programa, es importante tener en cuenta la importancia de introducir los datos en la forma correcta, así como la interpretación de los resultados. Los campos vectoriales deben tener la siguiente forma:  $\{a, b, \dots\}$ , y los campos covectoriales:  $\{\{a, b, \dots\}\}$ . En sí, el Mathematica interpreta los campos vectoriales y covectoriales como *listas*. A continuación se muestra el listado del programa.

```
(*****)
```

```
BeginPackage["Nolineal Isidori"];
```

```
(*****)
```

```
(*Mensajes al usuario*)
```

```
funciones::usage=
```

```
"\n\tEste paquete provee de funciones para cálculos en los\n\t sistemas dinámicos no lineales sobre  $R^n$ . Las funciones\n\t definidas en este paquete son:\n\t\n\t
```

```
\n\t
```

```
Nombre de la Función\n\t
```

```
-----\n\t
```

```
Estado\n\t
```

```
DerLie\n\t
```

```
KDerLie\n\t
```

```
ProductoLie\n\t
```

```
KProductoLie\n\t
```

```
GradoRelativo\n\t
```

```
AcciónLinealizante\n\t
```

```
MatrizJacobiano\n\t
```

```
Rank\n\t
```

```
STransf\n\t
```

```
MTransf\n\t
```

```
NuevoSistema\n\t
```

VectorGradoRelativo\n

MatrizA\n

Involutividad\n

InvarianciaVect\n

InvarianciaCovect\n

Alcanzabilidad\n

Covector\n

Observabilidad\n

\n

\n

Para más información sobre alguna función, Teclee:\n

?<Nombre de función>.\n

\n

NOTA IMPORTANTE: Para utilizar el paquete Hacer uso\nde la función Estado."

Estado::usage =

"Estado[x1,x2,...,xn] Mediante esta función introducimos \nel estado del sistema a analizar al programa para poder \nhacer uso de las demás funciones del paquete."

DerLie::usage =

"DerLie[f,h] Calcula (A.1), la derivada de Lie de la función h \nsobre el campo vectorial f."

KDerLie::usage =

"KDerLie[f,h,k] Calcula (A.2), la k-ésima derivada de Lie de la \nfunción h sobre el mismo campo vectorial f. Fórmula (A.2)"

ProductoLie::usage =

"ProductoLie[f,g] Calcula (A.3), el producto de Lie de dos \ncampos vectoriales f y g."

KProductoLie::usage =

"KProductoLie[f,g,k] Calcula (A.4), k veces el producto de Lie \nsobre el mismo campo vectorial, [[f...[f,g]]]."

GradoRelativo::usage =

"GradoRelativo[f,g,h] calcula el grado relativo del sistema \ndinámico no lineal SISO afín en la entrada."

AcciónLinealizante::usage=  
 "AcciónLinealizante[f,g,h] es la acción de control \ del sistema para linealizarlo. Dentro de la solución se \ muestran coeficientes C[<número>] los cuales son componentes \ del vector K cuyo valor se busca de acuerdo a alguna técnica \ de Sistemas Lineales; tal K formará (2.1.2.2)."

MatrizJacobiano::usage =  
 "MatrizJacobiano[f] para obtener la matriz del campo \ vectorial f de la siguiente forma: \  $\{\{df1/dx1, \dots, df1/dxn\} \dots \{dfn/dx1, \dots, dfn/dxn\}\}$ ."

Rank::usage =  
 "Rank[m] calcula el rango numérico o simbólico \ de una matriz m x n."

STransf::usage =  
 "STransf[f,g,h] Encuentra (2.1.1.2), un vector que representa el \ 'difeomorfismo' entre 2 espacios de estados."

NuevoSistema::usage =  
 "NuevoSistema[f,g,h] obtiene el sistema transformado."

VectorGradoRelativo::usage =  
 "VectorGradoRelativo[f,G,H] Encuentra el vector \ grado relativo del sistema MIMO."

MatrizA::usage =  
 "MatrizA[f,G,H] Encuentra (3.1.1), la matriz asociada al \ vector grado relativo del sistema."

MTransf::usage =  
 "MTransf[f,G,H] Encuentra (3.1.2), el vector de transformación \ de estado."

Involutividad::usage =  
 "Involutividad[f1,f2,...] Nos indica si la distribución generada \ por los campos vectoriales f1,f2,... es involutiva o no."

InvarianciaVect::usage =  
 "InvarianciaVect[f,{g1,g2,...}] Verifica si la distribución generada \ por los campos vectoriales g1,g2,... es invariante bajo el campo \ vectorial f."

InvarianciaCovect::usage =

"InvarianciaCovect[f,{g1,g2,...}] Verifica si la codistribución generada \ por los campos covectoriales g1,g2,... es invariante bajo el campo vectorial \ f. Nota: Los campos covectoriales los identifica el programa como \ {{w1,w2,...}} donde las w's son funciones del Estado, sin embargo en \ esta función {g1,g2,...} tiene la forma de una Matriz para el Mathematica \ o lo que es lo mismo, cada campo covectorial tiene la forma: \ {w1,w2,...}."

Alcanzabilidad::usage =

"Alcanzabilidad[{f1,f2,...,g1,g2,...},{g1,g2,...}] encuentra la dimensión del subespacio de \ alcanzabilidad, la cual es equivalente a la dimensión de la distribución mas pequeña \ que contiene a {g1,g2,...}(campos vectoriales asociados a la entrada) y que es \ invariante bajo {f1,f2,...,g1,g2,...}(todos los campos vectoriales que identifican el sistema)."

Covector::usage =

"Covector[f,w] Realiza la derivada de Lie de el campo covectorial w a lo largo del campo \ vectorial f."

Observabilidad::usage =

"Observabilidad[{f1,f2,...,g1,g2,...},{g1,g2,...}] encuentra la dimensión mas pequeña del \ subespacio de observabilidad, la cual es equivalente a la dimensión de la codistribución \ mas pequeña que contiene al conjunto de campos covectoriales {g1',g2',...}(gradientes \ de las funciones de salida, y que es invariante bajo {f1,f2,...,g1,g2,...}(todos los campos \ vectoriales que identifican la dinámica del sistema)."

No::usage = "Negación a alguna función."

Si::usage = "Afirmación a alguna función."

(\* Fin de los mensajes \*)

(\*\*\*\*\*)

Begin["Nolineal`Isidori`Private`"];

(\* Programa Principal de funciones \*)

Estado[x\_Symbol] :=

Module[{k},k={x};Est=k] (\*asignación del estado a la variable\*)  
(\*local 'Est' \*)

(\*\*\*\*\*)

(\* K - ésima Operación de Lie - Fórmula (A.2) \*)

**KDerLie**[f\_,h\_,k\_Integer] :=

Nest[DerLie[f,#] &, h, k] /; LongitudQ[f]

(\*\*\*\*\*)

(\* Grado Relativo del sistema SISO \*)

GradRel::cer = "\nLa función `1` tiene grado indefinido con el campo \n vectorial g = `2`."

**GradoRelativo**[f\_,g\_,h\_] :=

Module[{k=1,t, t1,n},

( n = Length[Est];

t=Table[DerLie[g,KDerLie[f,h,i]],{i,0,n-1}];

---

Realiza la k-ésima derivada de Lie con k=0,...,n-1 y después investiga donde aparece por primera vez un término diferente de cero que determinará el grado relativo.

---

While[t[[k]]==0,If[Length[t]==k,Message[  
GradRel::cer,h,g];Return[0,k++];

k) ] /;

LongitudQ[f] && LongitudQ[g]

(\*\*\*\*\*)

(\* Acción de control linealizante \*)

Sistema Siso

**AcciónLinealizante**[f1\_List?VectorQ,g1\_List?VectorQ,h1\_] :=

Module[{grado,d,g,n1},

( n1 = Length[Est];

grado = GradoRelativo[f1,g1,h1];

Obtención de (2.1.2.1)

g = SequenceForm @@ Drop[Flatten[  
{ " (",Table[{" + ", " c[" ,i, " ] (",KDerLie[f1,h1,i, " ) " },  
{i,0,n1-1}], " ) " }], {2}];

Obtención de (2.1.2.2)

66306

```
d = Simplify[(-KDerLie[f1,h1,grado]+g)/DerLie[g1,
  KDerLie[f1,h1,grado-1]], Trig->True];
Print[d]
)] /; LongitudQ[f1] && LongitudQ[g1]
```

**AcciónLinealizante[f\_,g\_,h\_] := (\* Sistema Mimo \*)**

```
Module[{v,b,alfa,betta},
  v = VectorGradoRelativo[f,g,h];
```

Obtención de (3.1.3b) en el espacio de estado original

```
b = Table[KDerLie[f,h[[i]],v[[i]]],{i,Length[v]}];
```

Obtención de la inversa de (3.1.1) y posteriormente se encuentra (3.2.2)

```
betta = Inverse[MatrizA[f,g,h]]//Simplify;
alfa = (-betta.b)//Simplify;
SequenceForm["u = ",alfa," + ",betta,"* v"]
];MatrixQ[g]&&(Length[f]==Length[g[[1]]]==Length[Est])
```

(\*\*\*\*\*  
 (\* Matriz Jacobiano de un campo vectorial \*)

Función auxiliar de MatrizJacobiano: vector de ceros y un 1 en la posición n

```
VectorCanónico[n_Integer] :=Table[If[n==i,1,0],{i,Length[Est]}]
```

```
MatrizJacobiano[f_List]:=
```

```
Module[{DerivadaEstado,aux1,aux2,aux3,k=1},
```

La derivada de estado nos es útil en el uso de la función VectorCanónico, para así poder desechar las parciales con respecto a variables ajenas al vector de estado.

```
DerivadaEstado = Dt[Est];
```

Se obtiene la derivada de f con respecto a todas las variables, multiplicando la derivada parcial de respecto cada variable de estado por "su vector canónico" y eliminando las demás.

```
aux1 = Dt[f] /. (Literal[Dt[x_Symbol]] :> VectorCanónico[
  (Plus @@ Flatten[Position[
    DerivadaEstado,Dt[x]])]));
```

```

aux2 = Position[aux1,0,{1},Heads->False];
aux3 = ReplacePart[aux1,Table[0,{i,Length[Est]}],aux2]
] /; VectorQ[f]

(*****)
(* Derivada de Lie *)

DerLie[f_List,h_] := (* función para obtener (A.1) *)

Module [ {argumento1},

Obtención del gradiente de h.

argumento1 = Flatten[MatrizJacobiano[{h}]];

-----
Producto punto con el vector f.
-----
argumento1.f ] /;
LongitudQ[f] && !VectorQ[h]

(*****)
(* Producto de Lie *)

ProductoLie[f1_List,f2_List]:=
Función para obtener (A.3)

Module[{m1,m2},{
m1 = MatrizJacobiano[f1];
m2 = MatrizJacobiano[f2];
m2.f1-m1.f2
}]/;
LongitudQ[f1] && LongitudQ[f2]

(*****)
(* k ésima operación del producto de Lie *)

KProductoLie[f_,g_,k_Integer]:=
Función para obtener (A.4)
Nest[ProductoLie[f,#]&,g,k]/;
LongitudQ[f] && LongitudQ[g]

LongitudQ[f_]:= (Length[f]==Length[Est]) && VectorQ[f]

(*****)

```

(\* Vector de STransf \*)

**PresenciaQ**[f\_comp\_List]:=

```
Module[{E0,E1,var1},{var1=Position[Ettt, comp[[1]]|comp[[2]]];
E0 =Delete[Ettt,var1];
E1 = Table[FreeQ[f,E0[[i]]],{i,Length[E0]}];
FreeQ[E1,False)];
```

**Busqueda**[g\_] :=

Busca funciones que cumplan con (2.1.13).

```
Module[{g1,g2,g3,g4,g5,Total,Salida,B,r,s,s1,s2,s3,s4,flag},
Ettt = Est; Salida = {};
```

El apareamiento nos ayuda a relacionar posteriormente los elementos de g con sus estados correspondientes.

```
g1 = Table[{g[[i]],Ettt[[i]]},{i,Length[g]}];
g2 = Delete[g1,Position[g,0]];
Ettt = Delete[Ettt,Position[g,0]];
```

Checa si g=0, si es Retorna con {}, si no prosigue.

```
If[Flatten[Ettt]== {},Return[{}]];
```

los elementos de g diferentes de cero (c/u con su pareja) se combinan en todas las formas posibles para realizar todas las opciones.

```
g3 = Permutations[g2];
For[k=1,k<=Length[g3],k++,
g4 = Take[g3,{k}];
g5 = Partition[Flatten[g4,1],2];
If[g5!= {}, Total = Table[
```

Se checa si en las 2 parejas las variables de estado que las acompañan no se encuentran presentes en el elemento contrario.

```

If[FreeQ[g5[[j,1,1]],g5[[j,1,2]] ]&&
  FreeQ[g5[[j,2,1]],g5[[j,2,2]] ],
  {{Integrate[g5[[j,1,1]],g5[[j,2,2]] ],g5[[j,2,2]]} ,
  {-Integrate[g5[[j,2,1]],g5[[j,1,2]] ],g5[[j,1,2]]}},
  {{0,0},{0,0}},{j,Length[g5]}],(*Fin Table/Total *)
Return[Delete[Ettt,Position[Ettt,(g4//Flatten)[[2]]] ] ];
Salida = Append[Salida,Flatten[Total,1]];
]; (* Fin de For/k *)

```

Se checa si en las 2 parejas las variables de estado que las acompañan no se encuentran presentes en los elementos restantes de g, de lo contrario no se cumpliría la derivada de la función.

```

B = Table[PresenciaQ[Salida[[i,1,1]],{Salida[[i,1,2]],
  Salida[[i,2,2]]} ] &&
  PresenciaQ[Salida[[i,2,1]],{Salida[[i,1,2]],
  Salida[[i,2,2]]} ],
  {i,Length[Salida]};
r = {Salida,B};s={};
Off[Condition::obsc,Condition::obscf];

```

Checa la posición valida de aquellas parejas que cumplen lo que se mencionó anteriormente para después hacer la suma correspondiente que formaría lo que sería una función válida.

```

For[j=1,i<=Length[Salida],i++,
  If[(B[[i]]===True)&&(Salida[[i]]!=0 ),s=Append[s,Salida[[i]]]];
On[Condition::obsc,Condition::obscf];
s1 = Length[s];
s2 = Union[Table[s[[i,1,1]]+s[[i,2,1]],{i,s1}]];
s3 = Delete[s2,Position[s2,0]];
s4 = Take[s3,Length[s3]/2];
s5 = s4 /. Table[Est[[i]]->0,{i,Length[Est]};];
s6 = Table[If[s5[[i]] > 0, s5[[i]]-s4[[i]], s4[[i]]-s5[[i]] ],{i,Length[s4]}]
]; (* Fin del Modulo/Principal *)
(*****)

```

**Rank[m\_?MatrixQ] :=**

---

Obtención del rango, los elementos de la matriz pueden ser números reales o símbolos.

---

Module[{m1,L},

---

si la matriz es  $m \times n$  hacemos  $L = \min\{m,n\}$ .

---

If[Greater[Length[m],Length[m[[1]]]],  
L = Length[m[[1]]],L=Length[m]];

i=0;m1={{}];

While[m1!={],

i++;m1=Minors[m,i];

m1 = Delete[m1,Position[m1,0]];

---

Si los menores obtenidos son diferentes de cero se incrementa i, de lo contrario se termina el ciclo.

---

If[Length[m1]>=1,m1=Delete[m1,Position[m1,{}],m1];];

i-1 (\* el cual es el grado relativo \*)];

(\*\*\*\*\*)

(\* Encuentra el vector de STransf \*)

STransf[f\_,g\_,h\_] := (\* función para obtener (2.1.1.2) \*)

---

Module[{t0,t1,t2,t3,t4,t5,t6,t7,i,Faltan,a1,a2,a3,a4,b1,  
b2,b3,b4,c1,c2,c3,c4,c5,c6,Indice=0},

t0=GradoRelativo[f,g,h];

t1=Table[KDerLie[f,h,i],{i,0,t0-1}];

t2 = MatrizJacobiano[t1];

Faltan = Length[Est]-t0;

---

Obtenemos 4 puntos aleatoriamente que pertenecen a la vecindad de  $x_0$ .

---

t5 = Table[Est[[i]]->0,{i,Length[Est]}];

a1 = Table[Est[[i]]->(Random[.5),  
{i,Length[Est]}];

a2 = Table[Est[[i]]->(Random[.5),

{i,Length[Est]}];

a3 = Table[Est[[i]]->(Random[.5),

{i,Length[Est]}];

```

a4 = Table[Est[[i]]->(Random[.5),
           {i,Length[Est]}}];

t6 = t2 /. t5;
t3=Busqueda[g];
If[Length[t3]<1,
(*Falla*)Indice=1,
(*Ok*)For[i=1,i<=Length[t3],i++,
  t4 = Append[t1,t3[[i]]];
  t7 = MatrizJacobiano[t4];
  t7 = t7 /. t5;b1 = t7 /. a1;b2 = t7 /. a2;
  b3 = t7 /. a3;b4 = t7 /. a4;

```

---

Se hacen las evaluaciones (del rango) de todos los puntos, los cuales al coincidir agregamos dicha función al vector Phi.

---

```

l1={Rank[t7],Rank[b1],Rank[b2],Rank[b3],Rank[b4]};
l1=Delete[l1,Position[l1,Length[Est]]];
If[Length[l1]<5,
  If[Length[l1]>0,Message[Advertencia::rango]];
  If[Rank[t7]>Rank[t6],t1 = t4,t1 = Delete[t4,Length[t4]]];
(* Fin del For *);(* Fin del If externo *)
c5 = t1;

```

---

Si con las funciones obtenidas con 'Busqueda' no se completa el vector Phi, hacemos todas las combinaciones posibles de vectores de longitud igual al estado, cuyos elementos pertenecen al conjunto  $\{0,1\}$ , después tomamos cada uno de ellos y lo agregamos al jacobiano de Phi de tal manera que aumente el rango ( remedio infalible ), el que cumpla este objetivo lo dejamos para después relacionarlo con las variables de estados de la siguiente forma:

a){0,0,1,1}-> $x^3+x^4$  , b){1,0,1}-> $x^1+x^3$ ; El problema es que no cumple (25).

---

```

If[Rank[MatrizJacobiano[t1]/.t5]==Length[Est],Return[t1],
  t2 = Rank[MatrizJacobiano[t1]/.t5];
  Faltan = Length[Est]-t2];
t3=Flatten[Outer @@ Prepend[Table[{0,1},{Length[Est]}],List]];
t3=Partition[t3,Length[Est]];
i=1;c1 = MatrizJacobiano[t1]/.t5;
While[i<=Length[t3],
  t4 = Append[c1,t3[[i]]];

```

```

If[Rank[t4]>Rank[c1],c1=t4];i++;
c2 = Take[c1,-Faltan];
For[i=1,i<=Faltan,i++,
  Ac=0;For[j=1,j<=Length[Est],j++,
    If[c2[[i,j]]!=0,Ac+=Est[[j]],Ac+=0 ]];
c6[i] = Ac ]; (* Fin del Primer For *)
c4 = Flatten[Append[c5,Table[c6[i],{i,Faltan}]]];
d1 = MatrizJacobiano[c4];

```

En este caso es obvio que el jacobiano de Phi tiene que tener rango completo debido a que este (al menos en los renglones inferiores agregados con el procedimiento inmediato anterior) no depende de alguna variable de estado, y los primeros r renglones son linealmente independientes en  $x_0$ , sin embargo se realiza el siguiente 'if' por si no cumple con algún punto que pertenece a su vecindad.

```

l1 = {Rank[d1/.a1],Rank[d1/.a2],Rank[d1/.a3],Rank[d1/.a4],Rank[d1/.t5]}
l1 = Delete[l1,Position[l1,Length[Est]]];
If[Length[l1]<5,
  If[Length[l1]>0,Message[Advertencia::rango]];
  c4,Abort[]
]; VectorQ[f]&&VectorQ[g]&&(Length[f]==Length[g]==
  Length[Est])
Advertencia::rango = "Existe problema de Rango"
(*****)
(* Nuevo sistema en el nuevo espacio de coordenadas *)

```

**NuevoSistema[f,g,h] :=**

Función para obtener (2.1.1.4)  
 Module[{t,z,trans,fz,gz,hz,u},

Se obtiene el vector Phi y después se resuelve el conjunto de ecuaciones de igualdad para cada una de las variables de estado.

```

If[VectorQ[g],t = STransf[f,g,h],t = MTransf[f,g,h]];
z = Table[SequenceForm["z",i]==t[[i]],{i,Length[t]}];
If[MatrixQ[g],u = Table[SequenceForm["u",i],{i,Length[g]}]];
trans = Solve[z,Est,InverseFunctions->True];
If[trans=={ },Abort[]],

```

Obtención de cada uno de los elementos del nuevo sistema.

```

fz = MatrizJacobiano[t].f /. trans;
gz = g.Transpose[MatrizJacobiano[t]] /. trans;
hz = h /. trans;
fz = Simplify[fz];gz = Simplify[gz];hz = Simplify[hz];
For[i=1,i<=Length[fz],i++,
If[VectorQ[g],

```

Formato de salida.

```

Print["[",i,"]dz/dt= ",fz[[i]]," + ",gz[[i]],"u \n\n\n"],
SequenceForm @@ Flatten[Prepend[Table[
{" + ",gz[[i,j]],u[[j]]}, {j,Length[g]}],
{"[",i,"]dz/dt= ",fz[[i]]},1]]//Print];];
Print["h[z] = ",hz[[1]]]; (* Fin del If *)
];(VectorQ[g]&&(Length[g]==Length[f]==Length[Est])||
MatrixQ[g]&&(Length[g[[1]]]==Length[f]==Length[Est]));
(* Fin del Modulo *)
(*****)
(* Matriz A para los sistemas MIMO *)
cond::nosin = "No existe vector grado relativo debido \
a el rango incompleto de la matriz `` en x0";
VecGrdRel::ind = "\nVector Grado Relativo indefinido."
VectorGradoRelativo[f_List?VectorQ,g_List?MatrixQ,h_List?VectorQ] :=
Module[{a,l,m,m1},
Off[GradRel::cer];

```

Obtención del grado relativo de cada salida con respecto a todos los campos vectoriales.

```

a = Table[GradoRelativo[f,g[[i]],h[[j]]], {j,Length[h]}, {i,Length[g]}];
On[GradRel::cer];

```

Se genera una tabla donde se ubican los conjuntos de grados relativos para después escoger el menor de cada uno de ellos: primera condición.

```

a = Delete[a,Position[a,0]];a = Flatten[Take[#,1]&/@(Sort[#]&/@a)];
If[a==={ },Message[VecGrdRel::ind];Abort[]];

```

Se checa el rango de la matriz (3.1.1): segunda condición.

```

l=Length[a];m=Table[DerLie[g[[j]],KDerLie[f,h[[i]],a[[i]]-1]],
  {i,l},{j,l}];m1 = m /.Table[Est[[i]]->0,{i,Length[Est]}];
If[Rank[m1]==Length[m1][[1]],a,Message[cond:nosin,m];Abort[]]
  ];Length[Est]==Length[ g[[1]] ]==Length[f]

```

(\*\*\*\*\*)

Función para obtener (3.1.1).

**MatrizA**[f\_List?VectorQ,g\_List?MatrixQ,h\_List?VectorQ] :=

```

Module[{v,l,m},
v = VectorGradoRelativo[f,g,h];
l = Length[v];
m = Table[DerLie[g[[j]],
  KDerLie[f,h[[i]],v[[i]]-1]],
  {i,l},{j,l}
  ];Length[Est]==Length[ g[[1]] ]==Length[f]

```

(\*\*\*\*\*)

(\* Vector de transformacion MIMO \*)

**MTransf**[f\_List?VectorQ,g\_List?MatrixQ,h\_List?VectorQ] :=

```

Module[{v,a,b,c,d,r1,r2,r3,r4,r5,t1,t2,t3,t4},

```

Primero la localización del grado relativo.

```

v = VectorGradoRelativo[f,g,h];

```

Se instalan las primeras funciones del cambio de coordenadas.

```

a = {};For[i=1,i<=Length[v],i++,
  a = Append[a,Table[KDerLie[f,h[[i]],j],{j,0,v[[i]]-1}]];
a = Flatten[a];If[(Plus @@ v)==Length[Est],Goto[Completo]];

```

A continuación se buscan las funciones que cumplan la segunda condición (exclusivamente para un campo vectorial g), si se desea para todos los campos vectoriales g es mucho mas complicado (fuera del alcance de esta tesis. La parte que sigue es equivalente a la parte correspondiente en la función 'STransf'.

```

b = {};
For[i=1,i<=Length[g],i++,b= Append[b,Busqueda[g[[i]] ]]];
b = Flatten[b];
r0= Table[Est[[i]]->0,{i,Length[Est]};
r1= Table[Est[[i]]->(Random[]-.5),{i,Length[Est]};
r2= Table[Est[[i]]->(Random[]-.5),{i,Length[Est]};
r3= Table[Est[[i]]->(Random[]-.5),{i,Length[Est]};

r4= Table[Est[[i]]->(Random[]-.5),{i,Length[Est]};
r5= Table[Est[[i]]->(Random[]-.5),{i,Length[Est]};
For[i=1,i<=Length[b],i++,
  aux = i;
  c = Append[a,b[[i]]]/Flatten;
  d = MatrizJacobiano[c];
  l1={Rank[d/.r0],Rank[d/.r1],Rank[d/.r2],Rank[d/.r3],Rank[d/.r4],Rank[d/.r5]};
  l1 = Delete[l1,Position[l1,Length[Est]]];
If[Length[l1]<6,
  If[Length[l1]>0,Message[Advertencia::rango];
  If[Rank[d/.r1]>Rank[MatrizJacobiano[a]], a = c ] ;
  i = aux ];
If[Length[a]==Length[Est],Return[a]];
t1 =Partition[(Outer @@ Prepend[Table[{0,1},{Length[Est]}],List])/Flatten,Length[Est]];
t2 = MatrizJacobiano[a]/.r0;t3 = Rank[t2];
For[i=1,i<=Length[t1],i++,aux = i;t4 = Append[t2,t1[[aux]]];
  If[Rank[t4]>Rank[t2],t2=t4];If[Rank[t2]==Length[Est],Break[];i=aux];
t2 =Partition[(Take[t2,-Length[Est]+t3])/Flatten,Length[Est]];
For[i=1,i<=(Length[Est]-t3),i++,
  Ac=0;For[j=Length[Est],j>=1,j--,
    If[t2[[i,j]]!=0,Ac+=Est[[j]] ]>(*if*);(*For-j-*)
  a =Append[a,Ac], ];(*For-i-*)
Return[a];Label[Completo];a
  ]/;Length[f]==Length[g[[1]]]==Length[Est]

```

(\*\*\*\*\*)

**Involutividad[g\_]:=**

```

Module[{t},If[Length[{g}]==1,Si];
t=Table[ProductoLie[{g}[[i]],[g][[j]],{i,Length[{g}]-1},
  {j,i+1,Length[{g}]}];
t = Append[t,{g}];t = Flatten[t,1];
If[Rank[{g}]==Rank[t],Si,No]/;MatrixQ[{g}]

```

(\*\*\*\*\*)

**InvarianciaVect[f\_,g\_]:=**

```
Module[{t},t = Table[ProductoLie[f,g[[i]]],{i,Length[g]}];
t = Append[{t},g];t=Flatten[t,1];
If[Rank[g]==Rank[t],Si,No]/;MatrixQ[g]&&VectorQ[f]&&
(Length[g[[1]]]==Length[f])
```

(\*\*\*\*\*)

**InvarianciaCovect[f\_,g\_]:=**

```
Module[{t},t = Table[Covector[f,{g[[i]]}],{i,Length[g]}];
t=Flatten[t,1];t = Append[{g},t];t=Flatten[t,1];
If[Rank[g]==Rank[t],Si,No]/;MatrixQ[g]&&VectorQ[f]&&
(Length[g[[1]]]==Length[f])
```

(\*\*\*\*\*)

**Alcanzabilidad[f:{{\_}..},g:{{\_}..}]:=**

```
Module[{l1,total,parcial,t,p},l1=Length[f];total=g;
Label[Ok];
t=Table[InvarianciaVect[f[[i]],total],{i,l1}];
p = Position[t,No];If[p=={ },total//Rank//Return];
For[i=1,i<=Length[f],i++,
If[!FreeQ[p,{i}],For[j=1,j<=Length[total],j++,
parcial = Append[total,ProductoLie[f[[i]],total[[i]]];
];(* 1er. For *)];(* Fin de If *)total=parcial];(* 2o. For *)Goto[Ok];
Rank[total ]/;VectorQ[f[[1]]]&&VectorQ[g[[1]]]&&
(Length[f[[1]]]==Length[g[[1]]]==Length[Est])
```

(\*\*\*\*\*)

**Covector[f\_,w\_]:=**

```
Module[{f1,f2},f1=MatrizJacobiano;f2=Transpose;
{(f1[w[[1]]].f)//f2}+w.(f/f1)
]/;VectorQ[f]&&MatrixQ[w]&&(Rank[w]==1)&&
(Length[f]==Length[w[[1]]]==Length[Est])
```

(\*\*\*\*\*)

**Observabilidad[f:{{\_}..},g:{{\_}..}]:=**

```
Module[{l1,total,parcial,t,p,aux1,i,j},l1=Length[f];
total=g//MatrizJacobiano;
total=Delete[total,Position[total,Table[0,{Est//Length}]]];
If[total=={ },Return[0,Null];
Label[Ok];
t=Table[InvarianciaCovect[f[[i]],total],{i,l1}];
p = Position[t,No];If[p=={ },Return[Rank[total]]];
```

```

parcial=total;
For[i=1,i<=Length[f],i++,
  If[!FreeQ[p,{i}],
    For[j=1,j<=Length[total],j++,
      aux1 = Flatten[Covector[f[[i]],{total[[j]]}]]//Expand;
      If[FreeQ[parcial,aux1],
        parcial =Append[{parcial},{aux1}]];
      parcial=Flatten[parcial];
      parcial=Partition[parcial,Length[Est]]//Expand;
    ];(* 1er. For *);(* Fin de If *)
total=parcial];(* 2o. For *)
Goto[Ok];
(* Fin *) ]/;VectorQ[f[[1]]]&&VectorQ[g]

(*****)

(*Símbolos protegidos definidos en este paquete*)

Protect[Estado, DerLie, KDerLie, GradoRelativo, AcciónLinealizante,
MatrizJacobiano, ProductoLie, KProductoLie, Rank,
STransf, NuevoSistema, VectorGradoRelativo, MatrizA, MTransf,
Involutividad, InvarianciaVect, InvarianciaCovect, Alcanzabilidad,
Covector, Observabilidad, No, Si]

End[];
EndPackage[];
Print[""]
Print[" Paquete : Sistemas No Lineales "]
Print[" Autor   : Jesús Aureliano Esquivel Cárdenas "]
Print[" Para ver el contenido, Teclee: ?funciones" ]

```

## Capítulo 6

### Un Ejemplo

#### 6.1. Obtención de la dinámica de un Robot

Considere el manipulador de eslabón simple con unión flexible como se muestra en la Figura siguiente:

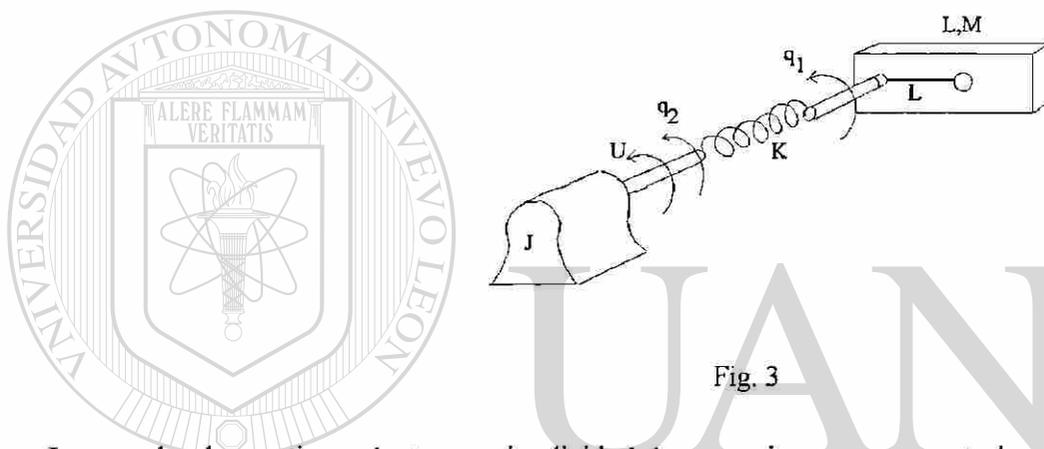


Fig. 3

Ignorando el amortiguamiento por simplicidad, las ecuaciones que caracterizan el manipulador son: [8]

$$I\ddot{q}_1 + MgL \sin(q_1) + k(q_1 - q_2) = 0$$

$$J\ddot{q}_2 - k(q_1 - q_2) = u$$

y en el espacio de estado, con la siguiente asignación a las variables

$$x_1 = q_1$$

$$x_2 = \dot{q}_1$$

$$x_3 = q_2$$

$$x_4 = \dot{q}_2$$

tenemos la siguiente ecuación dinámica:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{MgL}{I} \sin(x_1) - \frac{k}{I}(x_1 - x_3) \\ x_4 \\ \frac{k}{J}(x_1 - x_3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} u; \quad \mathbf{y} = x_1$$

donde fácilmente identificamos los campos vectoriales  $f$  y  $g$ .

El problema de la linealización exacta mediante retroalimentación de estados puede resolverse perfectamente debido a que el sistema tiene grado relativo 4 y el vector que representa el "difeomorfismo" tiene un Jacobiano no singular para todo  $\mathbb{R}^n$ , bajo ciertas condiciones. Recordemos que el sistema linealizado y transformado debe tener la siguiente estructura:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -c[0] & -c[1] & -c[2] & -c[3] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v; \quad y = z_1$$

## 6.2. Utilización del programa para el análisis del sistema

Instalemos el programa en el **Mathematica** para estudiar este sistema dinámico. Cada vez que se haga referencia al programa se utilizará una barra horizontal para dividir la entrada (parte superior) y la salida (parte inferior).

1) Instalación.

```
<<packages`nonlinear`isidori`
```

---

Paquete : Sistemas No Lineales

Autor : Jesús Aureliano Esquivel Cárdenas

Para ver el contenido, Teclee: ?funciones

2) Introducir la información que tenemos.

```
Est = Estado[x1,x2,x3,x4];
```

```
ff={x2,-M*g*L*Sin[x1]/i-k*(x1-x3)/i,x4,k*(x1-x3)/J};
```

```
gg = {0,0,0,1/J};
```

```
h=x1;
```

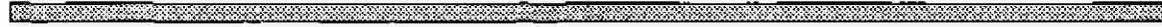
3) Obtención del grado relativo.

```
GradoRelativo[ff,gg,h]
```

Esto implica que el subespacio de Observabilidad tiene dimensión igual al orden del sistema; lo cual podemos verificar con la función *Alcanzabilidad*.

4) Obtención de la dimensión del subespacio de Alcanzabilidad.

Alcanzabilidad[{ff, gg}, {gg}]



4

5) Obtención de la acción de control que linealiza el sistema.

AcciónLinealizante[ff, gg, h]



$$\begin{aligned}
 & \left( i \int \frac{k (-x_1 + x_3)}{i \int} - (c[0] (x_1) + c[1] (x_2) + c[2] ( \right. \\
 & \quad \left. -(k x_1) + k x_3 - g L M \sin[x_1] \right. \\
 & \quad \left. - (k x_2) + k x_4 - g L M x_2 \cos[x_1] \right) + c[3] ( \\
 & \quad \left. \frac{g L M x_2^2 \sin[x_1]}{i} + \right. \\
 & \quad \left. (k + g L M \cos[x_1]) (-(k x_1) + k x_3 - g L M \sin[x_1]) \right) \backslash \\
 & \quad \frac{2}{i} \\
 & / k
 \end{aligned}$$

6) Obtengamos ahora el vector que representa el "difeomorfismo".

STransf[ff, gg, h]



$$\{x_1, x_2, -\frac{k (x_1 - x_3)}{i} - \frac{g L M \sin[x_1]}{i}, \dots\}$$

```

k x4      k      g L M Cos [x1]
---- + x2 (-(-) - -----) }
i         i         i

```

7) Inmediatamente después de haber obtenido este vector, hagamos lo siguiente:

```
MatrizJacobiano[%]
```

```
-----
```

```
{ {1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0},
```

```

k      g L M Cos [x1]      k
{-(-) - -----, 0, -, 0},
i         i         i

```

```

g L M x2 Sin [x1]      k      g L M Cos [x1]      k
{- -----, (-(-) - -----, 0, -}}
i         i         i         i

```

al tener  $i, k \neq 0$  y  $|k|, |i| < \infty$  la matriz es no singular para toda  $x \in \mathbb{R}^n$ .

8) La dimensión del subespacio de Observabilidad:

```
Observabilidad[{ff, gg}, {h}]
```

```
-----
```

```
4
```

9) Tratemos de Encontrar el Sistema Transformado.

```
NuevoSistema [ff, gg, h]
```

```
-----
```

```
$Aborted
```

El éxito en la obtención del resultado de NuevoSistema depende del resultado de la función Solve, la cual es función del contexto 'Global en **Mathematica**; ésta resuelve ecuaciones simultaneas en forma genérica.

### 6.2.1. Extensión al caso MIMO

En esta sección agregaremos al sistema anterior dos entradas, por consiguiente dos campos vectoriales, y dos salidas (tomando en cuenta que se realizaron los pasos anteriores), obtenemos de esta manera un sistema ficticio de tres entradas y tres salidas el cual utilizaremos en las siguientes funciones del paquete para el caso MIMO.

10) Declaración de los 2 campos vectoriales.

```
gg1={0,k,0,L M x2};
```

```
gg2={0,0,i,0};
```

```
h1=x4;h2=x3;
```

11) Encontrar el vector grado relativo.

```
VectorGradoRelativo [ff, {gg,gg1,gg2}, {gg,gg1,gg2}]
```

```
{2,1,1}
```

12) Obtención de la acción de control que linealiza el sistema.

```
AcciónLinealizante [ff, {gg,gg1,gg2}, {h,h1,h2}]
```

```
u = {k (-x1 + x3) +
```

```
J L M x2 ((-k x1) + k x3 -g L M Sin[x1])
```

```
-----,
```

```

k x1 - k x3 + g L M Sin[x1]    x4
-----, - (--) } +
      i k                      i
```

```

J L M x2          1          1
{{-(-----), J, 0}, {-, 0, 0}, {0, 0, -}}* v
      k           k          i
```

13) Obtención de la dimensión del subespacio de Alcanzabilidad.

Alcanzabilidad[ $\{ff, gg, gg1, gg2\}, \{gg, gg1, gg2\}$ ]

4

14) Obtención de la dimensión del subespacio de Observabilidad.

Observabilidad[ $\{ff, gg, gg1, gg2\}, \{h, h1, h2\}$ ]

4

15) Obtención del sistema transformado.

NuevoSistema[ $ff, \{gg, gg1, gg2\}, \{h, h1, h2\}$ ]

$$[1] \frac{dz}{dt} = \begin{Bmatrix} z2 \\ z3 \\ z4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} u1 + \begin{Bmatrix} 0 \\ k \\ L \\ M \\ z2 \\ 0 \end{Bmatrix} u2 + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{Bmatrix} u3$$

$$h[z] = \{z1, z3, z4\}$$

16) Obtención del vector que representa el "difeomorfismo".

MTransf[ $ff, \{gg, gg1, gg2\}, \{h, h1, h2\}$ ]

$\{x1, x2, x4, x3\}$

### 6.3. Simulación con Simulink de Matlab

Hasta este momento ya se tiene la información suficiente para hacer una simulación del sistema linealizado, en los 2 casos: SISO y MIMO, utilicemos Simulink de Matlab para hacerlo.

#### 6.3.1. Caso SISO

El diagrama de bloques de la linealización es el siguiente:

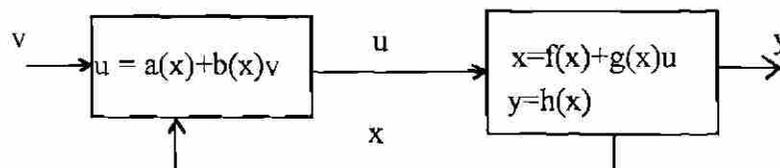


Fig. 4

Se diseñó la linealización para que tuviera los siguientes valores característicos:

- E-1) -1
- E-2) -0.5
- E-3)  $-0.3 + 1.2i$
- E-4)  $-0.3 - 1.2i$

los cuales inducen los valores de las constantes  $-c[i]$ ,  $i=1,\dots,4$ , que forman parte de la acción de retroalimentación y que formarán los elementos del renglón inferior de la matriz  $A$  del sistema transformado. Los valores son los siguientes:

- $c[0] = 0.765$
- $c[1] = 2.595$
- $c[2] = 2.93$
- $c[3] = 2.1$

Las siguientes gráficas (6a y 6b) (resultado de la simulación) muestran las respuestas de:

- ♦ El Sistema Lineal que se desea obtener (Caso Ideal).
- ♦ Sistema Linealizado vía Retroalimentación de Estado.
- ♦ La Aproximación Lineal vía la Serie de Taylor.

a una entrada escalón de 0.035 (Fig.5a) y 0.07 (Fig.5b), ambas en condiciones iniciales igual a cero.

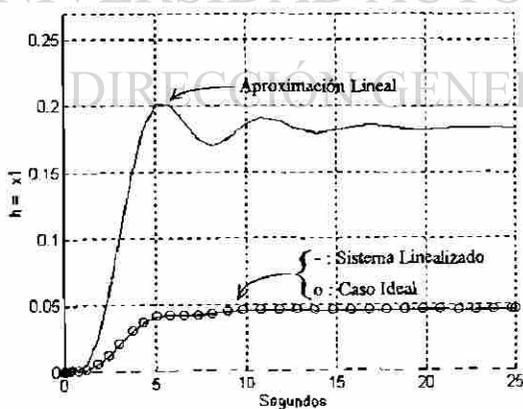


Fig.5a

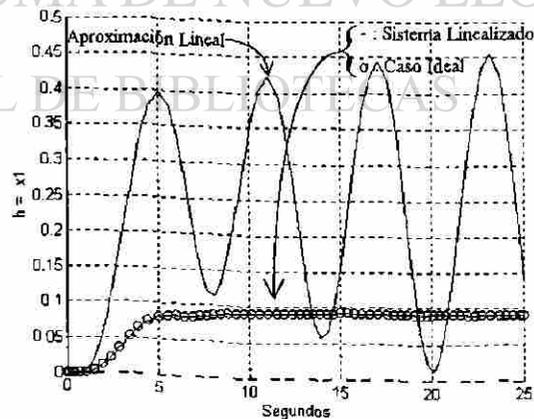


Fig.5b

### 6.3.2. Caso MIMO

El diagrama de bloques de la linealización es semejante al de la Fig.5 con la diferencia de que  $a(x), h(x)$  y  $u$  son un vectores y  $b(x), g(x)$  son matrices. Como la suma de los elementos del vector grado relativo que se obtuvo fue exactamente igual al orden del sistema, esto quiere decir que no existe dinámica interna, entonces la linealización que se obtiene es exacta. En base al *control no interactivo* de la sección 3.3 veamos lo siguiente: el primer elemento del vector grado relativo es 2, esto quiere decir que existe en el sistema linealizado un subsistema lineal de orden 2 que relaciona<sup>1</sup> una entrada  $w1$  con la salida  $h$ ; el segundo elemento es 1 por lo que existe un subsistema lineal de orden 1 que relaciona una entrada  $w2$  con la salida  $h1$ , y de la misma manera existe el tercer subsistema lineal de orden 1 que relaciona una entrada  $w3$  con la salida  $h2$ .

La acción de control  $v$  que se obtuvo en el paso 10 de la sección anterior se seleccionó de la siguiente forma:

$$v = \begin{bmatrix} -2.4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z1 \\ z2 \\ z3 \\ z4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w1 \\ w2 \\ w3 \end{bmatrix}$$

de tal manera que el subsistema lineal de 2o. orden tiene una relación de amortiguamiento de 0.3 y una *Frecuencia Natural* de 1.55, y los 2 subsistemas de primer orden restantes tienen el polo de ambas funciones de transferencia en -1.

Las gráficas siguientes (6a y 6b) muestran los resultados de la simulación del sistema linealizado con las siguientes características:

- ◆  $u1$  es una entrada escalón unitario aplicada en  $t=0$ .
- ◆  $u2$  es una entrada escalón unitario aplicada en  $t=5$ .
- ◆  $u3$  es una entrada escalón unitario aplicada en  $t=10$ .
- ◆ La respuesta del Caso Ideal es exactamente la misma del sistema linealizado.
- ◆ La Fig.7a es con estado inicial  $x0=(0,0,0,0)$ .
- ◆ La Fig.7b es con estado inicial  $x0=(1,4,4,4)$ .

<sup>1</sup>La relación es *exclusivamente* con la salida mencionada.

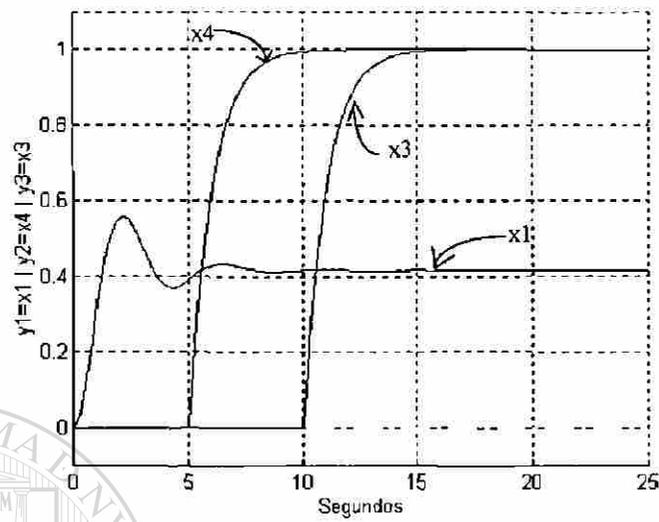


Fig. 6a

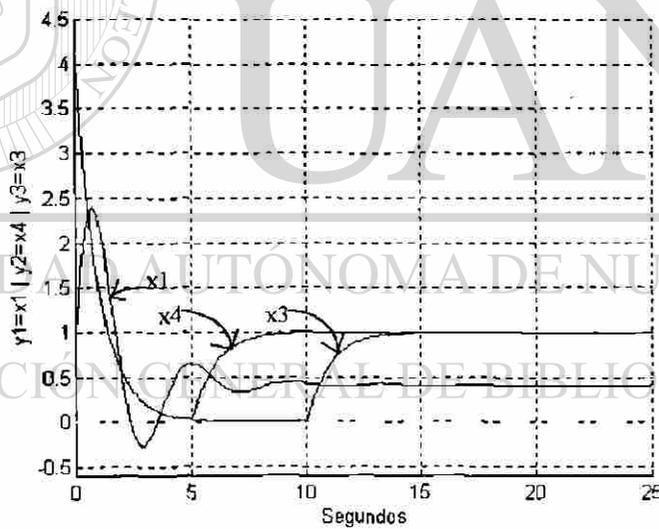


Fig. 6b

## Conclusiones

Se logró la automatización del cálculo involucrado en los procedimientos para la obtención de algunas propiedades de los sistemas no lineales, utilizando como base la geometría diferencial, donde destacan principalmente: la dimensión de los espacios de observabilidad y de alcanzabilidad, la transformación de coordenadas y la ley de control linealizante.

Es importante mencionar que algunos de los conceptos que se analizaron solo demuestran la existencia de soluciones, utilizando conceptos de un nivel de abstracción alto y aún así se logró su implementación, sin embargo los resultados de las funciones que se implementaron en el paquete depende de los resultados de las funciones internas del Mathematica.

Indudablemente el paquete elaborado puede ser desarrollado mucho más, sin embargo podemos verlo, en principio, como un buen auxiliar del investigador de esta área de control, el cual puede realizar el trabajo más eficientemente, sin la posibilidad de cometer errores y sobre todo con una rapidez mucho mayor. Podemos mencionar para trabajos futuros: realizar una mejor interacción con el usuario, mejorar los algoritmos de las funciones **STansf** y **MTransf**, desarrollar nuevas funciones en base a las ya elaboradas, etc...

Por último, la capacidad de la computadora es importante para la rapidez de respuesta, por lo que, cuando se trabaja con cierta función del programa, el tiempo que tarda el Mathematica en mostrar el resultado cambia de una computadora a otra. El intervalo máximo de tiempo que se registró en *las pruebas* del programa fue de 20 minutos para un sistema no lineal de orden 6, y en una computadora con Microprocesador 486 DX, 4 Mb de RAM y 66 MHz.

## Bibliografía

---

- [1] R. E. Crandall, "Mathematica for the Sciences", Addison-Wesley Publishing Company, 1993.
- [2] B. F. Doolin, C. F. Martin, "Introduction to Differential Geometry for Engineers", Marcel Dekker, Inc., 1990
- [3] K. Forsman, "Constructive Commutative Algebra in Nonlinear Control Theory", Ph.D. Thesis, Linköping University, Suecia, 1991
- [4] A. Isidori, "Lectures on nonlinear control", Notes prepared for a course at the Carl Czanz Gesellschaft (3-6 August, 1987), July 1987.
- [5] A. Isidori "Nonlinear Control Systems", 2a. Edición, Springer Verlag, 1989
- [6] H. Nijmeijer, A. J. Vander Schaft, "Nonlinear Dynamical Control Systems", Springer-Verlag, 1991.
- 
- [7] M. Spivak, "Cálculo en Variedades", Ed. Reverté, 1988.
- [8] M. Vidyasagar, "Nonlinear systems analysis", 2a. Edición, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.
- [9] S. Wolfram, "Mathematica: A System for doing Mathematics by computer", 2a. Edición. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1993.

## § Apéndice

### A.1 Algebra de Lie

Tres tipos de Operaciones sobre *campos vectoriales* ( $f, g$ ), *campos covectoriales* ( $w$ ) y *funciones evaluadas en los reales* ( $\lambda, \beta$ ):

a) *Derivada de Lie de una función escalar a lo largo de un campo vectorial:*

$$\langle d\lambda(x), f(x) \rangle = \frac{\partial \lambda}{\partial x} f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} f_i(x) = L_f \lambda. \quad (\text{A.1})$$

La solución es nuevamente una función evaluada en los reales. Es posible la misma operación en forma repetida:

$$L_g L_f \lambda(x) = \frac{\partial (L_f \lambda(x))}{\partial x} g(x)$$

$\lambda$  derivada  $k$  veces a lo largo de  $f$  obtenemos  $L_f^k \lambda$ , donde:

$$L_f^k \lambda(x) = \frac{\partial (L_f^{k-1} \lambda)}{\partial x} f(x) \quad (\text{A.2})$$

con  $L_f^0 \lambda(x) = \lambda(x)$ .

b) *Producto de Lie:*

$$[f, g](x) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x) \quad (\text{A.3})$$

En el caso de operación repetida de  $g$  con el mismo campo vectorial  $f$ ,  $[f, [f, \dots, [f, g]]]$ , podemos definir:

$$\text{ad}_f^k g(x) = [f, \text{ad}_f^{k-1} g](x) \text{ con } \text{ad}_f^0 g(x) = g(x). \quad (\text{A.4})$$

*El producto de Lie tiene las siguientes propiedades, [5][8]:*

- ♦ Es bilineal.

$$\begin{aligned} [r_1 f_1 + r_2 f_2, g_1] &= r_1 [f_1, g_1] + r_2 [f_2, g_1] \\ [f_1, r_1 g_1 + r_2 g_2] &= r_1 [f_1, g_1] + r_2 [f_1, g_2] \end{aligned}$$

- ♦ Es anticonmutativa.

$$[f, g] = -[g, f]$$

- ♦ Satisface la Identidad de Jacobi:

$$[f, [g, p]] + [g, [p, f]] + [p, [f, g]] = 0$$

*c) La derivada de Lie de un campo covectorial a lo largo de un campo vectorial:*

$$L_f w(x) = f^T(x) \left[ \frac{\partial w^T}{\partial x} \right]^T + w(x) \frac{\partial f}{\partial x}$$

**Los 3 tipos de operaciones anteriores son tales que:**

- $L_{\alpha f} \lambda(x) = (L_f \lambda(x)) \alpha(x)$
- $L_f d\lambda(x) = dL_f \lambda(x)$
- $L_{[f, g]} \lambda(x) = L_f L_g \lambda(x) - L_g L_f \lambda(x)$
- $L_f \langle w, g \rangle(x) = \langle L_f w(x), g(x) \rangle + \langle w(x), [f, g](x) \rangle$
- $[\alpha f, \beta g](x) = \alpha(x) \beta(x) [f, g](x) + (L_f \beta(x)) \alpha(x) g(x) - (L_g \alpha(x)) \beta(x) f(x)$
- $L_{\alpha f} \beta w(x) = \alpha(x) \beta(x) (L_f w(x)) + \beta(x) \langle w(x), f(x) \rangle d\alpha(x) + (L_f \beta(x)) \alpha(x) w(x)$

## A.2 Cálculo Avanzado

**Teorema 1, [5][6][7][8] (de la Función Inversa).** Sea A un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  y  $F: A \rightarrow \mathbb{R}^n$  un mapeo  $C^\infty$ . Si  $\left[ \frac{\partial F}{\partial x} \right]_{x^0}$  es no singular en alguna  $x^0 \in A$ , entonces existe una vecindad U de  $x^0$  en A tal que  $V = F(U)$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$  y la restricción de F en U es un "difeomorfismo" sobre V.

□

**Teorema 2,[5](del Rango).** Sean  $A \subset \mathbb{R}^n$  y  $B \subset \mathbb{R}^m$  dos conjuntos abiertos,  $F: A \rightarrow B$  un mapeo  $C^\infty$ . Suponga que  $\left[ \frac{\partial F}{\partial x} \right]_{x^0}$  tiene rango igual a  $k$  para cada  $x$  que pertenece a  $A$ . Para cada  $x^0 \in A$  existe una vecindad  $A_0$  de  $x^0$  en  $A$  y una vecindad  $B_0$  de  $F(x^0)$  en  $B$ , 2 conjuntos abiertos  $U \subset \mathbb{R}^n$  y  $V \subset \mathbb{R}^m$  y dos "difeomorfismos"  $G: U \rightarrow A_0$  y  $H: B_0 \rightarrow V$  tal que  $H \circ F \circ G(U) \subset V$  y:

$$(H \circ F \circ G)(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in U$$

□

Sea  $P_k$  denote el mapeo  $P_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  definido por  $P_k(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$  como  $H$  y  $G$  en el Teorema 8 son invertibles, podemos modificar la expresión previa de la forma:

$$F = H^{-1} \circ P_k \circ G^{-1} \quad \forall x \in A$$

**Teorema 3,[5][6][7][8](de la Función Implícita).** Sean  $A \subset \mathbb{R}^m$  y  $B \subset \mathbb{R}^n$  dos conjuntos abiertos y  $F: A \times B \rightarrow \mathbb{R}^n$  un mapeo  $C^\infty$ . Sea  $(x, y) = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$  denote un punto de  $A \times B$ . suponga que para algún  $(x^0, y^0) \in A \times B$ ,  $F(x^0, y^0) = 0$  y la matriz:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{bmatrix}$$

es no singular en  $(x^0, y^0)$ .

Entonces existe una vecindad abierta  $A_0$  de  $x^0$  en  $A$  y  $B_0$  de  $y^0$  en  $B$  y un único mapeo  $C^\infty$   $G: A_0 \rightarrow B_0$  tal que:

$$F(x, G(x)) = 0 \quad \forall x \in A_0$$

□

Sea  $S$  un conjunto, **Una Estructura Topológica** o **Una Topología** sobre  $S$  es una colección de subconjuntos de  $S$  llamados conjuntos abiertos, que satisfacen los siguientes axiomas:

- (i) La unión de cualquier número de conjuntos abiertos es abierto.
- (ii) La intersección de cualquier número finito de conjuntos abiertos es abierto.
- (iii) El conjunto  $S$  y el conjunto vacío  $\phi$  son abiertos.

**Una vecindad** de un punto  $p$  que pertenece a un espacio topológico, es cualquier conjunto abierto el cual contiene a  $p$ .

Sean  $S_1$  y  $S_2$  espacios topológicos y  $F$  un mapeo  $F: S_1 \rightarrow S_2$ . El mapeo es **continuo** si la imagen inversa de cada conjunto abierto de  $S_2$  es un conjunto abierto de  $S_1$ . El mapeo  $F$  es **abierto** si la imagen de un conjunto abierto de  $S_1$  es un conjunto abierto de  $S_2$ . El mapeo  $F$  es un **homeomorfismo** si es biyectivo, y ambos continuos y abiertos. Si  $F$  es un homeomorfismo, el mapeo inverso  $F^{-1}$  también lo es.

Dos espacios topológicos en los cuales existe un homeomorfismo se dicen ser homeomorficos.

Si  $S_0$  es un subconjunto de un espacio topológico  $S$ , existe un conjunto abierto único, denotado por  $\text{int}(S_0)$  y llamado **interior** de  $S_0$ , el cual está contenido en  $S_0$  y contiene cualquier otro conjunto abierto contenido en  $S_0$ .  $\text{int}(S_0)$  es la unión de todos los conjuntos abiertos en  $S$ .

De igual forma, hay un conjunto cerrado único, denotado por  $\text{cl}(S_0)$ , llamado la **cerradura** de  $S_0$ , el cual contiene  $S_0$  y está contenido en cualquier otro conjunto cerrado que contiene  $S_0$ .  $\text{cl}(S_0)$  es la intersección de todos los conjuntos cerrados los cuales contienen a  $S_0$ .

Un subconjunto de  $S$  se dice ser **denso** en  $S$  si su cerradura coincide con  $S$ .

Un Espacio topológico  $S$  se dice satisfacer **El Axioma de Separación de Hausdorff**, si para cualquier dos puntos diferentes del espacio, sus vecindades no se intersectan.

### A.3 Variedades

**Definición 1.** Un Espacio  $X$  **Localmente Euclidiano** de dimensión  $n$  es un espacio topológico tal que, para cada  $p \in X$  existe un mapeo homeomórfico  $\phi$  de una vecindad abierta de  $p$  a algún conjunto abierto en  $\mathbb{R}^n$ .

□

A continuación se define nuevamente el concepto de variedad, pero ahora desde el punto de vista topológico.

**Definición 2.** Una **Variedad  $N$**  de dimensión  $n$  es un espacio topológico el cual es localmente Euclidiano de dimensión  $n$ , es Hausdorff y tiene una base contable. Las variedades son la abstracción de la idea de una superficie suave.

□

Una **carta de coordenadas** sobre una variedad  $N$  es un par  $(U, \Phi)$ , donde  $U$  es un conjunto abierto de  $N$  y  $\Phi$  un homeomorfismo de  $U$  sobre un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Algunas veces  $\Phi$  es representado como un conjunto  $(\phi_1, \dots, \phi_n)$  y  $\phi_i: U \rightarrow \mathbb{R}$  es llamado la  **$i$ -ésima función de coordenada**. Si  $p \in U$ , entonces  $(\phi_1(p), \dots, \phi_n(p))$  es llamado el conjunto de **coordenadas locales** de  $p$  en la carta de coordenadas  $(U, \Phi)$ .

Sea  $(U, \Phi)$  y  $(V, \Psi)$  dos cartas de coordenadas sobre una variedad  $N$ , con  $U \cap V \neq \emptyset$ , y  $(\psi_1, \dots, \psi_n)$  el conjunto de funciones de coordenadas asociado con el mapeo  $\Psi$ . El homeomorfismo  $\Psi \circ \Phi^{-1}: \Phi(U \cap V) \rightarrow \Psi(U \cap V)$  tomando para cada  $p \in U \cap V$ , el conjunto de coordenadas locales  $(\phi_1(p), \dots, \phi_n(p))$  dentro del conjunto de coordenadas locales  $(\psi_1(p), \dots, \psi_n(p))$ , es llamado **una transformación de coordenadas** sobre  $U \cap V$ .

Dos cartas de coordenadas  $(U, \Phi)$  y  $(V, \Psi)$  son  $C^\infty$  compatibles si, al existir  $U \cap V \neq \emptyset$ , la transformación de coordenadas  $\Psi \circ \Phi^{-1}$  es un "difeomorfismo".

Una subvariedad es el análogo no lineal de un subespacio en el espacio lineal. De igual forma el producto de dos variedades produce una nueva variedad, que es el análogo de un producto de espacios vectoriales.

Si  $N$  y  $M$  son variedades, de dimensión  $n$  y  $m$  respectivamente,  $F: N \rightarrow M$  es un mapeo,  $(U, \Phi)$  una carta de coordenadas sobre  $N$  y  $(V, \Psi)$  una carta de coordenadas sobre  $M$ , el mapeo compuesto  $\hat{F} = \Psi \circ F \circ \Phi^{-1}$  es llamado una expresión de  $F$  en coordenadas locales. Esta definición tiene sentido solo si  $F(U) \cap V \neq \emptyset$ .

**Definición 3.** Sean  $N$  y  $M$  variedades suaves. Un mapeo  $F: N \rightarrow M$  es un **mapeo suave** si para cada  $p \in N$  existe una carta de coordenadas  $(U, \Phi)$  de  $N$  y  $(V, \Psi)$ , con  $p \in U$  y  $F(p) \in V$ , tal que la expresión de  $F$  en coordenadas locales es  $C^\infty$ .

□

El **rango** de un mapeo  $F: N \rightarrow M$  en un punto  $p \in N$  es el rango de la matriz Jacobiano:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_l}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_l}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

en  $x = \Phi(p)$ .

Sea  $N$  una variedad suave de dimensión  $n$ . Una función evaluada en los reales  $\lambda$  se dice ser **suave en una vecindad de  $p$** , si el dominio de  $\lambda$  incluye un conjunto abierto de  $U$  de  $N$ , el cual incluye a  $p$  y la restricción de  $\lambda$  a  $U$  es una función suave.

#### A.4 El Principio de Estabilidad en la Primera Aproximación.

Considere el sistema (1.5.1) donde  $f \in C^r$ , con  $r \geq 2$ , definido sobre un subconjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ , y sea  $x^0 \in U$  un punto de equilibrio para  $f$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $x^0 = 0$ . Es bien sabido que la estabilidad asintótica local a este punto puede ser determinada, con algunas extensiones, por el comportamiento de *la aproximación lineal* de  $f$

en  $x=0$ [5]. Para esto, sea  $F = \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x=0}$  denote la matriz Jacobiano de  $f$  en  $x=0$ . Entonces:

(i)

Si todos los valores característicos de  $F$  están en el semiplano izquierdo abierto del plano complejo, entonces  $x=0$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable de (1.5.1).

(ii)

si uno o más eigenvalores de  $F$  están en el semiplano complejo derecho, entonces  $x=0$  es un punto de equilibrio inestable de (1.5.1).

El caso de algún sistema cuya matriz  $F$  tenga algún valor característico con parte real igual a cero y los demás con parte real negativa se le identifica comunmente como un **caso crítico**.

