

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
PROGRAMA DOCTORAL EN INGENIERIA ELECTRICA



**CONTROL DE SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS EN
SISTEMAS NO LINEALES CON INCERTIDUMBRE,
APLICACION A ROBOT'S MANIPULADORES**

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO
EN CIENCIAS EN INGENIERIA ELECTRICA CON
ESPECIALIDAD EN CONTROL**

PRESENTA:
LUIS ALBERTO RODRIGUEZ GARCIA

CD. UNIVERSITARIA

MARZO DE 1995

TM

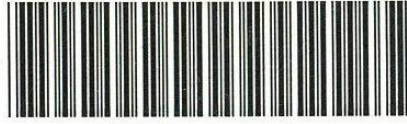
Z5953

.M2

FIME

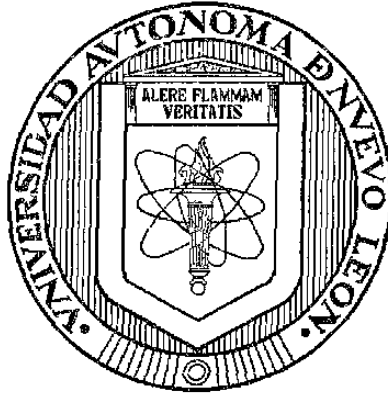
1995

R6



1020091149

**UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
PROGRAMA DOCTORAL EN INGENIERIA ELECTRICA**



**CONTROL DE SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS EN SISTEMAS
NO LINEALES CON INCERTIDUMBRE, APLICACION A
ROBOTS MANIPULADORES**

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERIA ELECTRICA CON
ESPECIALIDAD EN CONTROL**

P R E S E N T A

LUIS ALBERTO RODRIGUEZ GARCIA

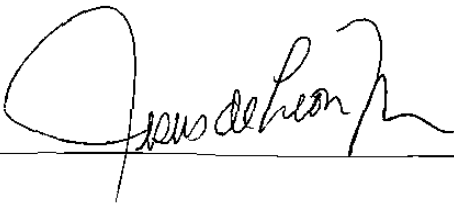
SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L.

MARZO, 1995.

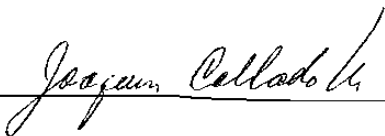
**CONTROL DE SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS EN SISTEMAS NO
LINEALES CON INCERTIDUMBRE, APLICACION A ROBOTS
MANIPULADORES.**

Los miembros del Comité aprueban la Tesis
de Maestría de Luis Alberto Rodríguez García.


Dr. Jesús de León Morales
Asesor



Dr. Joaquín Collado Moctezuma



Dr. José Antonio de la O Serna



7
A. R. U. 2
.M
F. H.
1975
F. 6



FONDO TESIS

167094

Con cariño y respeto:

A mis padres,

Rodrigo Rodríguez y Magdalena García,

Quiénes siempre apoyaron mis desiciones y me motivaron a superarme.

A mis abuelos,

Jesús Rodríguez y Josefina Sanchez,

Que me dieron todo su apoyo durante mis estudios profesionales.

A mi tío *Chuy*, que me ayudó durante mi carrera y fué mi ejemplo de superación y sacrificio.

A mi esposa *Cristina*, por cambiar mi vida al anunciarme una nueva vida.

A mi tía *Martha* y mis primas *Kary* y *Rossina*.

A todos mis amigos y compañeros de estudios, en especial a *Aureliano Esquivel, Victor Vega, Ismael Díaz, Carlos Martínez, Cesar Elizondo, Daniel, Carmén Pacheco* y *Roger Orozco*, quienes me ayudaron e hicieron más agradable esta etapa de mi vida.

**UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
PROGRAMA DOCTORAL EN INGENIERIA ELECTRICA**

**CONTROL DE SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS EN SISTEMAS
NO LINEALES CON INCERTIDUMBRE, APLICACION A ROBOTS
MANIPULADORES**

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERIA ELECTRICA CON
ESPECIALIDAD EN CONTROL**

P R E S E N T A

LUIS ALBERTO RODRIGUEZ GARCIA

San Nicolás de los Garza, N. L., Marzo de 1995.

Agradecimientos.

- ♦ **Al Dr. Jesús de León Morales, por su orientación y ayuda en la realización de este trabajo.**
- ♦ **Al M. en C. Jesús Aureliano Esquivel Cárdenas, que me apoyó con su amistad y valiosos consejos.**
- ♦ **Al Dr. Joaquín Collado Moctezuma, por su valiosa colaboración en la revisión de este trabajo.**
- ♦ **A la Universidad Autónoma de Nuevo León.**
- ♦ **Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.**

Resumen

CONTROL DE SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS EN SISTEMAS NO LINEALES CON INCERTIDUMBRE, APLICACION A ROBOTS MANIPULADORES

Publicación No. _____

Luis Alberto Rodríguez García, M. C. en Ingeniería Eléctrica.
Universidad Autónoma de Nuevo León, Marzo 1995

Profesor Asesor: Dr. Jesús de León Morales

En esta tesis se presenta una solución al problema de seguimiento de trayectorias, para una clase de sistemas no lineales. La ley de control que se propone como solución es muy sencilla, y está compuesta por una parte lineal y una parte no lineal.

Esta ley permite controlar la clase de sistemas en cuestión, utilizando un observador dinámico de estado cuando el estado completo no puede ser medido.

Así mismo, se demuestra que esta ley de control permite seguir trayectorias de referencia, aún cuando es aplicada a sistemas de la clase en cuestión en los que se presenta un tipo de incertidumbres. Es decir, el sistema en lazo cerrado con la ley de control y el observador de estado, es robusto a estas incertidumbres.

El observador y el controlador dependen de un solo parámetro de diseño cada uno, lo que facilita su ajuste al ser implementados.

Los resultados se resumen en los teoremas 1 a 4 del capítulo 4, con los que se construye un algoritmo de control. Las aportaciones más importantes de este algoritmo de control son, la sencillez del mismo en su estructura, el fácil diseño y cálculo de parámetros resolviendo una simple ecuación algebraica, la sencilla implementación, el permitir el uso de un observador dinámico para los estados no medibles, y sobre todo, la robustez del sistema en lazo cerrado.

Indice

CAPITULO 1. INTRODUCCION

1.1. MOTIVACION	1
1.2. OBJETIVOS	4
1.3. ESTRUCTURA DE LA TESIS	4

CAPITULO 2. BASES MATEMATICAS

2.1. INTRODUCCION	5
2.2. DEFINICIONES	6
2.3. LA DERIVADA DE LIE	7
2.4. EL PRODUCTO DE LIE	8
2.5. GRADO RELATIVO DE UN SISTEMA NO LINEAL	9
2.6. DESCOMPOSICION LOCAL DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEALES	10
2.7. ALCANZABILIDAD LOCAL	11
2.8. OBSERVABILIDAD LOCAL	12
2.9. LINEALIZACION EXACTA MEDIANTE RETROALIMENTACION DE ESTADO	13
2.10. DINAMICA CERO	17

CAPITULO 3. CONTROL DE SEGUIMIENTO EN SISTEMAS NO LINEALES

3.1. INTRODUCCION	20
3.2. ANTECEDENTES	20
3.3. SISTEMAS NO LINEALES CON INCERTIDUMBRE	21
3.4. RESULTADOS RECIENTES EN EL AREA DE SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS	24
3.5. EL CONCEPTO DE ACOTAMIENTO FINAL UNIFORME (U. U. B.)	25
3.6. EL PROBLEMA DE SEGUIMIENTO	28

CAPITULO 4. SOLUCION PROPUESTA AL PROBLEMA DE SEGUIMIENTO EN SISTEMAS NO LINEALES CON INCERTIDUMBRE

4.1. INTRODUCCION	30
4.2. CONSIDERACIONES EN EL SISTEMA NO LINEAL	31
4.3. OBSERVADOR	35

4.4. SISTEMAS CON INCERTIDUMBRE Y ACOTAMIENTO FINAL UNIFORME DEL ERROR DE OBSERVACION.....	37
4.5. CONTROLADOR.....	41
4.6. SISTEMAS CON INCERTIDUMBRE Y ACOTAMIENTO FINAL UNIFORME DEL ERROR DE SEGUIMIENTO.....	45
4.7. PRINCIPIO DE SEPARACION.....	48

CAPITULO 5. APLICACIONES Y SIMULACIONES

5.1. MODELO DEL ROBOT MANIPULADOR DE N GRADOS DE LIBERTAD.....	54
5.2. SIMULACION DE UN ROBOT DE 2 GRADOS DE LIBERTAD.....	55
5.3. SIMULACION DE UN ROBOT PUMA 560.....	60
5.4. COMPARACION DE RESULTADOS CON OTROS ALGORITMOS DE CONTROL.....	71
5.5. COMPARACION DE DESEMPEÑO EN UN SISTEMA NO LINEAL.....	76

CAPITULO 6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

6.1. CONCLUSIONES.....	81
6.2. RECOMENDACIONES Y TRABAJOS FUTUROS.....	82

APENDICE RESULTADOS DE GEOMETRIA DIFERENCIAL

A.1. PROPIEDADES DE LA DERIVADA Y EL PRODUCTO DE LIE.....	83
A.2. DIMENSIONES DEL CONJUNTO LOCALMENTE ALCANZABLE.....	83
A.3. CONJUNTO DE PUNTOS LOCALMENTE OBSERVABLE.....	85

REFERENCIAS.....	88
-------------------------	-----------

Lista de figuras

Figura 4.7.1. Diagrama del sistema total: planta no lineal, observador, controlador y control linealizante	48
Figura 5.2.1. Robot de dos grados de libertad	56
Figura 5.2.2. Trayectoria de referencia y trayectoria real seguida por la articulación 1	58
Figura 5.2.3. Error en el seguimiento de la trayectoria de referencia para la articulación 1.....	59
Figura 5.2.4. Trayectoria de referencia y trayectoria real seguida por la articulación 2	59
Figura 5.2.5. Error en el seguimiento de la trayectoria de referencia para la articulación 2.....	60
Figura 5.3.1. Trayectoria de referencia y trayectoria real seguida por la articulación 1	65
Figura 5.3.2. Trayectoria de referencia y trayectoria real seguida por la articulación 2	65
Figura 5.3.3. Trayectoria de referencia y trayectoria real seguida por la articulación 3	65
Figura 5.3.4. Trayectoria de referencia y trayectoria real seguida por la articulación 4	66
Figura 5.3.5. Trayectoria de referencia y trayectoria real seguida por la articulación 5	66
Figura 5.3.6. Trayectoria de referencia y trayectoria real seguida por la articulación 6	66
Figura 5.3.7. Error en el seguimiento de la trayectoria para la articulación 1	67

Figura 5.3.8. Error en el seguimiento de la trayectoria para la articulación 2	67
Figura 5.3.9. Error en el seguimiento de trayectoria para la articulación 3	67
Figura 5.3.10. Error en el seguimiento de trayectoria para la articulación 4	68
Figura 5.3.11. Error en el seguimiento de trayectoria para la articulación 5	68
Figura 5.3.12. Error en el seguimiento de trayectoria para la articulación 6	68
Figura 5.3.13.- Velocidad de referencia y velocidad real para la articulación 1.	69
Figura 5.3.14.- Velocidad de referencia y velocidad real para la articulación 2.	69
Figura 5.3.15.- Velocidad de referencia y velocidad real de la articulación 3.	69
Figura 5.3.16.- Velocidad de referencia y velocidad real para la articulación 4.	70
Figura 5.3.17.- Velocidad de referencia y velocidad real de la articulación 5.	70
Figura 5.3.18.- Velocidad de referencia y velocidad real para la articulación 6.	70
Figura 5.4.1. Trayectoria de referencia y trayectoria real para la articulación 1	72
Figura 5.4.2. Error de seguimiento de posición para la articulación 1	72
Figura 5.4.3. Torque aplicado a la articulación 1	72

Figura 5.4.4. Trayectoria de referencia y trayectoria real para la articulación 2	73
Figura 5.4.5. Error de seguimiento de posición para la articulación 2	73
Figura 5.4.6. Torque aplicado a la articulación 2	73
Figura 5.4.7. Trayectoria de referencia y trayectoria real para la articulación 1	74
Figura 5.4.8. Error de seguimiento de posición para la articulación 1	74
Figura 5.4.9. Torque aplicado a la articulación 1	74
Figura 5.4.10. Trayectoria de referencia y trayectoria real para la articulación 2	75
Figura 5.4.11. Error de seguimiento de posición para la articulación 2	75
Figura 5.4.12. Torque aplicado a la articulación 2	75
Figura 5.5.1. Salida del sistema obtenida por el control propuesto y por el control de Esfandiari-Khalil	78
Figura 5.5.2. Estado 2 obtenido para el control propuesto y para el control de Esfandiari-Khalil	78
Figura 5.5.3. Estado 1 estimado con el observador propuesto y con el observador de Esfandiari-Khalil	79
Figura 5.5.4. Estado 2 estimado con el observador propuesto y con el observador de Esfandiari-Khalil	79
Figura 5.5.5. Error de observación del estado 1 con el observador propuesto y con el observador de Esfandiari-Khalil	80
Figura 5.5.6. Error de observación del estado 2 con el observador propuesto y con el observador de Esfandiari-Khalil	80

CAPITULO 1

INTRODUCCION

1.1. MOTIVACION

Con la eliminación de las fronteras comerciales, que se está dando por todo el mundo, la industria moderna se vé en la necesidad de volverse más competitiva, para que esta manera, sus productos puedan participar con ventaja en los mercados internacionales. Para conseguir este objetivo, las industrias se han visto en la necesidad de reducir sus costos de operación, pero al mismo tiempo necesitan aumentar los niveles de calidad de sus productos.

Este compromiso entre aumentar la calidad y reducir costos de operación, trae como consecuencia el tener que atacar varios problemas a la vez. Por una parte se debe hacer más eficiente el aprovechamiento de la materia prima en los procesos productivos, pero por otro lado también es necesario tanto aumentar y uniformizar la calidad, como reducir los costos de mano de obra. Además es posible también, reducir los costos de mantenimiento y operación, tanto de las herramientas como del equipo que se utiliza en la producción.

Todas estas necesidades de modernización en la industria, hacen pensar en una disciplina que permita estudiar, diseñar y mejorar los procesos industriales, tal es la función del "control automático de procesos industriales".

Esta area de la ingeniería, se aplica a investigar la manera de influir un proceso para conseguir el comportamiento deseado, con la mínima intervención humana posible, y con el máximo aprovechamiento de los recursos disponibles.

De esta manera, el control automático de procesos es un campo multidisciplinario, en el que se combinan las matemáticas, física y modelado de procesos, tecnología y herramientas de computación y experimentación, para lograr el objetivo de controlar un proceso fisico en la forma deseada.

El desarrollo del proyecto de control automático de un proceso puede descomponerse en varias etapas, en cada una de estas etapas se hace uso de distintas herramientas del conocimiento, de entre las cuales puede mencionarse las siguientes:

Matemáticas. Para atacar un problema de control, se deben tener conocimientos del análisis matemático. Este es un lenguaje universal que permite expresar todas las ideas en una forma abstracta, lógica y ordenada.

Modelación. El primer paso es llevar el comportamiento del proceso a un modelo matemático. El modelo obtenido debe describir todos los fenómenos de interés, dentro de un dominio de funcionamiento predeterminado.

Identificación. Utilizando algunas técnicas de medición e identificación de parámetros, en algunos casos, se pueden encontrar los valores correctos de los parámetros del modelo. En otros casos solamente puede hacerse un cálculo aproximado de los mismos, de manera que el modelo describirá el comportamiento del proceso solo en forma aproximada.

Experimentación. Una vez que se tiene un modelo matemático del proceso es necesario validarlo, esto se hace comparando sus respuestas de salida al aplicar ciertas entradas, con las respuestas que se presentan en el proceso real, bajo condiciones especiales.

Teoría de control. En esta etapa se debe determinar cual es el tipo de algoritmo, si existe, que permite obtener el comportamiento deseado del proceso.

Tecnología de control. Para aplicar el algoritmo de control obtenido teóricamente, es necesario tener presente la tecnología de control existente, esto incluye áreas de la ingeniería eléctrica, electrónica, computación y dispositivos especiales usados en el control de procesos.

Cada una de las etapas del desarrollo de un proyecto, involucra una o más disciplinas, y con estas, el control automático de procesos nos permite analizar, sintetizar y mejorar el diseño de sistemas de control automático.

Actualmente existen aún muchos procesos que, debido a su complejidad, no han sido estudiados lo suficiente, entre estos destacan aquellos procesos que involucran modelos matemáticos no lineales, en los que incluso se pudiera tener cierto grado de incertidumbre.

El análisis de sistemas no lineales comenzó su desarrollo más fuerte hace poco más de una década, de manera que es una area relativamente nueva en la ingeniería de control. Estos sistemas requieren de técnicas de control más avanzadas y, en algunos casos, no es posible determinar un algoritmo que haga un control confiable de estos procesos; por esta razón se presenta la necesidad de investigar y desarrollar nuevas técnicas de control, que permitan a los procesos no lineales ser automatizados y cumplir con los requisitos básicos de confiabilidad de los equipos de producción, calidad, eficiencia y bajo costo de mantenimiento.

En esta tesis se presenta una forma de reducir el mantenimiento de equipos automáticos aumentando a la vez su confiabilidad de operación. Es bien sabido que la confiabilidad está en proporción inversa al número de elementos del sistema, es decir, mientras más elementos tiene un sistema, más posibilidad de falla existe, de manera que el disminuir la cantidad de dispositivos que se utilizan en el proceso a controlar, ayudará a reducir esta posibilidad de falla y por lo tanto, el mantenimiento del equipo.

Una forma de reducir el número de elementos de retroalimentación en un sistema, es substituir estos por algoritmos matemáticos conocidos como observadores de estado dinámicos. Estos algoritmos se programan en el controlador y, usando una cantidad mínima de sensores para algunas variables del proceso, pueden obtener un valor estimado del resto de las variables del mismo, eliminando la necesidad de medir todas las variables utilizando sensores.

Desafortunadamente no en todos los procesos es posible el uso de observadores. Además, en algunos sistemas en los que se presentan variaciones en la estructura y parámetros en el modelo del mismo, el uso de observadores podría provocar, la inestabilidad del sistema de control, esto es, en la pérdida de control del proceso. Este último problema ya ha sido extensamente estudiado en el caso de los sistemas que tienen un modelo lineal. Sin embargo, el caso no lineal apenas empieza a ser analizado y existen muy pocos resultados reportados.

En esta tesis se demuestra que el uso de una ley de control muy sencilla, que se propone en este mismo trabajo, permite controlar una clase de sistemas no lineales utilizando observadores. La aportación importante de este algoritmo de control, es tanto la sencillez del mismo en su estructura y metodología para el diseño, como la robustez que presenta ante la presencia de incertidumbres en el modelado del proceso.

1.2. OBJETIVOS

El presente trabajo, tiene como finalidad dar una solución al problema de seguimiento de trayectorias que varían en el tiempo, para una clase de sistemas no lineales, mediante retroalimentación del estado observado. Se consigue además, que el sistema en lazo cerrado sea robusto a cierto tipo de incertidumbres en el modelado de la planta.

La solución que se presenta es muy sencilla en su análisis e implementación. Esto es importante si se pretende que la aplicación de las técnicas de control modernas, resultado de la investigación científica, esté al alcance de ingenieros sin un conocimiento profundo de matemáticas avanzadas.

La ley de control que se presenta está compuesta por un observador y un controlador no lineales, que a su vez están separados cada uno en una parte lineal y una parte no lineal. Ambos algoritmos, controlador y observador, dependen de un solo parámetro de diseño cada uno, lo que también facilita su ajuste final.

1.3. ESTRUCTURA DE LA TESIS

La presente tesis está estructurada como sigue: en el capítulo 2, se dan algunos preliminares matemáticos y se presenta el modelo del sistema no lineal que representa la planta a ser controlada. En el capítulo 3, se presenta un resumen de los trabajos que se han hecho hasta fechas recientes en el mismo tema que aquí se desarrolla, además de algunos conceptos que se aplican en esta tesis.

El capítulo 4 presenta los resultados obtenidos en nuestra investigación y la estructura del sistema en lazo cerrado aplicando el control que se propone.

En el capítulo 5 se muestran algunos ejemplos de aplicación a sistemas no lineales con incertidumbres, en especial a robots manipuladores, junto las correspondientes simulaciones de los modelos. Finalmente en el capítulo 6 se mencionan las aportaciones de este trabajo y se proponen algunos tópicos para futuras investigaciones.

CAPITULO 2

BASES MATEMATICAS

2.1. INTRODUCCION.

En este capítulo se presentan algunos resultados, definiciones y operaciones de la geometría diferencial, que se relacionan con el desarrollo de este trabajo. El objetivo es familiarizar al lector con la terminología utilizada en esta área de las matemáticas, mostrando algunos de los teoremas y lemas, que se aplican a la clase de sistemas posteriormente tratados en esta tesis. No se hace un análisis profundo, sino solamente se presentan las operaciones básicas y los métodos de la geometría diferencial, aplicados a los sistemas no lineales, junto con algunas definiciones y operaciones de gran utilidad para los desarrollos posteriores.

En la sección 2.2 se dan algunas definiciones usadas en la geometría diferencial, así como también se presenta la estructura del sistema no lineal, tal como será estudiado en este trabajo. En las secciones 2.3 y 2.4 se presentan la derivada y el producto de Lie, dos operaciones usadas en la sección 2.5 para definir el grado relativo de un sistema no lineal.

En la sección 2.6, se dan algunas condiciones necesarias para la descomposición local de sistemas no lineales en partes alcanzable-no alcanzable y observable-no observable, análogo a lo que se aplica a los sistemas lineales. En las secciones 2.7 y 2.8, se presentan las definiciones de alcanzabilidad local y observabilidad local respectivamente, junto con las condiciones necesarias para su aplicación en los sistemas no lineales con la estructura presentada.

En la sección 2.9 se presenta el método de linealización exacta mediante retroalimentación de estado, además de las condiciones bajo las cuales este método puede aplicarse a un sistema no lineal. Finalmente, en la sección 2.10 se define la dinámica cero, presentando al mismo tiempo, el procedimiento para su análisis en un sistema no lineal representado en la forma normal, dada en la sección 2.9.

2.2. DEFINICIONES.

Sea \mathfrak{R}^n el conjunto de los números reales de dimensión n , sea U un subconjunto abierto de \mathfrak{R}^n , entonces se tienen las siguientes definiciones:

Campo vectorial: Es un mapeo $f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ que asigna un vector de \mathfrak{R}^n a cada punto x de U , se dice que es un **campo vectorial suave**, cuando existen derivadas de f de todos los órdenes.

Campo covectorial: Son los objetos duales a los campos vectoriales, que asignan a cada punto x de U un elemento del **espacio dual** $(\mathfrak{R}^n)^*$.

Espacio dual: El espacio dual V^* de un espacio vectorial V , es el conjunto de todas las funcionales lineales evaluadas en los reales y definidas sobre V ; ambos espacios son de la misma dimensión.

Distribución suave: Sean d campos vectoriales suaves f_1, \dots, f_d , definidos todos en U , para un punto x en U , se conoce como distribución suave el subespacio vectorial formado por los vectores $f_1(x), \dots, f_d(x)$, y se denota como $\Delta = \text{span}\{f_1, \dots, f_d\}$ como un todo, o se usa $\Delta(x) = \text{span}\{f_1(x), \dots, f_d(x)\}$ para denotar el "valor" de Δ en el punto x .

Distribución no singular: Si existe un entero d tal que $\dim(\Delta(x)) = d \quad \forall x \in U$ se dice que la distribución $\Delta(x)$ es no singular.

Distribución involutiva: Si el producto de Lie (ver sección 2.4) de cualquier par de campos vectoriales que pertenecen a una distribución, genera un campo vectorial contenido en la misma distribución, se dice que la distribución es involutiva.

Codistribución suave: Es el objeto dual a la distribución suave y se define de la siguiente manera: Un campo covectorial suave ω , definido en un conjunto abierto U de \mathfrak{R}^n , puede interpretarse como la asignación suave, a cada punto x de U , de un elemento del espacio dual $(\mathfrak{R}^n)^*$. Con un conjunto $\omega_1, \dots, \omega_d$ de campos covectoriales suaves definidos en el mismo subconjunto U de \mathfrak{R}^n , uno puede asociar la asignación, a cada punto x de U , de un

subespacio de $(\mathfrak{R}^n)^*$, al generado por los covectores $\omega_1, \dots, \omega_d$; debido al hecho de que estos campos covectoriales son campos covectoriales suaves, se puede considerar esta asignación como suave también. El objeto caracterizado de esta manera es lo que se llama una codistribución suave.

Codistribución aniquilador de Δ : Dada una distribución Δ , el conjunto de todos los campos covectoriales que anulen a todos los campos vectoriales de Δ , para cada x en U , se considera el aniquilador de $\Delta(x)$, y se denota por Δ^\perp , es decir, la codistribución aniquilador de Δ , se define como el conjunto de campos covectoriales:

$$\Delta^\perp(x) = \left\{ w^* \in (\mathfrak{R}^n)^* : \langle w^*, v \rangle = 0 \quad \forall v \in \Delta(x) \right\}.$$

Modelo del sistema no lineal: A lo largo de la tesis se estudiarán sistemas no lineales descritos en el espacio de estado por un conjunto de ecuaciones de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

para el caso SISO (una entrada-una salida), o para el caso MIMO (multientrada-multisalida):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i = f(x) + G(x)u \\ y_j &= h_j(x) \quad (j = 1, \dots, m) \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

donde, $f(x)$, $g(x)$, $g_i(x)$ son campos vectoriales suaves; $h(x)$, $h_j(x)$ son funciones escalares no lineales; \dot{x} denota la derivada con respecto al tiempo de x ; las letras mayúsculas indican matrices y las minúsculas vectores y/o escalares.

2.3. LA DERIVADA DE LIE.

Esta operación describe la derivada de una función escalar a lo largo de un campo vectorial y tiene las siguientes notaciones equivalentes:

$$L_f \lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial x} f(x) = \langle d\lambda(x), f(x) \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} f_i(x)$$

La solución es nuevamente una función evaluada en los reales. Note que $\frac{\partial \lambda}{\partial x}$, denotado como $d\lambda(x) = \left[\frac{\partial \lambda}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \lambda}{\partial x_n} \right]$, es un campo covectorial. La misma operación aplicada en forma repetida puede efectuarse de la siguiente manera:

$$L_g L_f \lambda(x) = \frac{\partial (L_f \lambda(x))}{\partial x} g(x)$$

La derivada de Lie de un campo covectorial a lo largo de un campo vectorial se define como:

$$L_f w(x) = f^T(x) \left[\frac{\partial w^T}{\partial x} \right]^T + w(x) \frac{\partial f}{\partial x}$$

La derivada de λ a lo largo de f , k veces se denota como $L_f^k \lambda$, donde:

$$L_f^k \lambda(x) = \frac{\partial (L_f^{k-1} \lambda)}{\partial x} f(x)$$

con $L_f^0 \lambda(x) = \lambda(x)$.

2.4. EL PRODUCTO DE LIE.

Esta operación se efectúa entre campos vectoriales y se define de la siguiente manera:

$$[f, g](x) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x)$$

En el caso de la operación repetida de g con el mismo campo vectorial f , $[f, [f, \dots, [f, g]]]$, se puede escribir por simplicidad:

$$\text{ad}_f^k g(x) = [f, \text{ad}_f^{k-1} g](x) \text{ con } \text{ad}_f^0 g(x) = g(x)$$

El producto de Lie tiene las siguientes propiedades:

- 1) Es bilineal.

$$\begin{aligned} [r_1 f_1 + r_2 f_2, g_1] &= r_1 [f_1, g_1] + r_2 [f_2, g_1] \\ [f_1, r_1 g_1 + r_2 g_2] &= r_1 [f_1, g_1] + r_2 [f_1, g_2] \end{aligned}$$

- 2) Es anticonmutativo.

$$[f, g] = -[g, f]$$

- 3) Satisface la Identidad de Jacobi:

$$[f, [g, p]] + [g, [p, f]] + [p, [f, g]] = 0$$

Distribución invariante bajo un campo vectorial f : Se dice que una distribución suave Δ es invariante bajo el campo vectorial suave f , si

$$\forall f_i \in \Delta \quad [f, f_i] \in \Delta$$

Si $\Delta = \text{span}\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, entonces Δ es invariante bajo f si y solo si $[f, f_i] \in \Delta$ para $i = 1, \dots, n$.

2.5. GRADO RELATIVO DE UN SISTEMA NO LINEAL.

Sea el sistema SISO tal como se describe por (2.2.1), esto es:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

Se dice que este sistema tiene **grado relativo r** en un punto x_0 , si se satisfacen las siguientes condiciones:

- i) $L_g L_f^k h(x) = 0 \quad \forall x$ en una vecindad de x_0 y $\forall k < r - 1$
 ii) $L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$

Para el caso MIMO, esto es, los sistemas descritos por la ecuación (2.2.2):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i \\ y_j &= h_j(x) \quad (j = 1, \dots, m) \end{aligned}$$

se puede definir un vector de grado relativo $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$.

2.6. DESCOMPOSICION LOCAL DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEALES.

En esta sección se consideran los sistemas no lineales de la forma dada por (2.2.1) y se analizan las condiciones bajo las cuales se puede aplicar una transformación local, para descomponerlo en sus partes *alcanzable-no alcanzable* y *observable-no observable*.

Descomposición en partes alcanzable-no alcanzable [8]: Sea Δ una distribución involutiva no singular de dimensión d , asumimos que Δ es invariante bajo los campos vectoriales f, g_1, \dots, g_m . Suponga que la distribución $\text{span}\{g_1, \dots, g_m\}$ está contenida en Δ . Entonces para cada x_0 es posible encontrar una vecindad U_0 de x_0 y una transformación de coordenadas local $z = \Phi(x)$ definida en U_0 tal que, en las nuevas coordenadas el sistema (2.2.1) se representa por:

$$\dot{\zeta}_1 = f_a(\zeta_1, \zeta_2) + \sum_{i=1}^m g_{ai}(\zeta_1, \zeta_2) u_i \quad (2.6.1a)$$

$$\dot{\zeta}_2 = f_b(\zeta_2) \quad (2.6.1b)$$

donde $\zeta_1 = (z_1, \dots, z_d)$ y $\zeta_2 = (z_{d+1}, \dots, z_n)$.

Esta descomposición es útil en el análisis del comportamiento entrada-estado del sistema (2.2.1), como puede apreciarse, solo la parte del estado descrita por (2.6.1a) es afectada por la entrada, mientras que las coordenadas ζ_2 no son afectadas, en este caso se dice que las coordenadas ζ_1 forman la parte alcanzable del estado.

Descomposición en partes observable-no observable [8]: Sea Δ una distribución involutiva no singular de dimensión d y suponga que es invariante bajo los campos vectoriales f, g_1, \dots, g_m ; supongase además, que la codistribución $\text{span}\{dh_1, \dots, dh_p\}$ está contenida en la codistribución Δ^\perp . Entonces para cada punto x_0 es posible encontrar una vecindad U_0 de x_0 y una transformación de coordenadas local $z = \Phi(x)$ definida en U_0 tal que (2.2.1) se representa por ecuaciones de la forma:

$$\dot{\zeta}_1 = f_a(\zeta_1, \zeta_2) + \sum_{i=1}^m g_{ai}(\zeta_1, \zeta_2)u_i \quad (2.6.2a)$$

$$\dot{\zeta}_2 = f_b(\zeta_2) + \sum_{i=1}^m g_{bi}(\zeta_2)u_i \quad (2.6.2b)$$

$$y_i = h_i(\zeta_2) \quad (2.6.2c)$$

donde $\zeta_1 = (z_1, \dots, z_d)$ y $\zeta_2 = (z_{d+1}, \dots, z_n)$. Esta segunda descomposición es de gran utilidad para analizar el comportamiento estado-salida del sistema, puede apreciarse que solamente las coordenadas ζ_2 son vistas por la variable de salida y_i , mientras que las coordenadas ζ_1 forman la parte no observable del estado.

2.7. ALCANZABILIDAD LOCAL.

Considerese una distribución Δ no singular, de dimensión d y con las siguientes propiedades:

- (a) Δ es involutiva
- (b) Δ contiene a la distribución $\text{span}\{g_1, \dots, g_m\}$
- (c) Δ es invariante bajo los campos vectoriales f, g_1, \dots, g_m

Entonces, en cada punto $x_0 \in U$ se puede hallar una transformación de coordenadas definida en una vecindad U_0 de x_0 y una partición de U_0 en particiones de dimensión d , tal que los puntos alcanzables en algún tiempo T , empezando en algún estado inicial $x_0 \in U_0$, a lo largo de trayectorias que continúan en U_0 para todo $t \in [0, T]$, caen dentro de una partición de U_0 .

En la sección A.2 del apéndice se analiza el subconjunto de puntos de una partición alcanzada en el tiempo T . La descomposición (2.6.1) obviamente sugiere buscar la mínima distribución, si existe, que está contenida en cualquier distribución que cumple con (a), (b) y (c).

2.8. OBSERVABILIDAD LOCAL.

Considere que existe una distribución no singular Δ de dimensión d con las propiedades de que:

- (a) Δ es involutiva
- (b) Δ está contenida en la distribución : $(\text{span}\{dh_1, \dots, dh_p\})^\perp$
- (c) Δ es invariante bajo los campos vectoriales f, g_1, \dots, g_m .

Entonces, en cada punto $x_0 \in U$ es posible encontrar una transformación de coordenadas definida en una vecindad U_0 de x_0 y una partición de U_0 en particiones de dimensión d , tal que los puntos en cada partición producen la misma salida, bajo cualquier entrada u que mantenga la trayectoria de estado evolucionando en U_0 .

En el apéndice A.3 se presentan las condiciones bajo las cuales los puntos que pertenecen a diferentes particiones de U_0 producen diferentes salidas, es decir, son distinguibles. De la descomposición (2.6.2) puede verse que el objeto a buscar es la distribución más grande que satisface (b) y (c).

La existencia de Δ implica y está implicada por la existencia de una codistribución Ω (llamada Δ^\perp) con las propiedades de que:

- (i) Ω es generada localmente alrededor de cada punto $x \in U$ por $n-d$ campos covectoriales exactos.
- (ii) Ω contiene la codistribución $\text{span}\{dh_1, \dots, dh_p\}$.
- (iii) Ω es invariante bajo los campos vectoriales f, g_1, \dots, g_m .

Entonces también se puede analizar la mas pequeña codistribución que satisface (ii) y (iii).

2.9. LINEALIZACION EXACTA MEDIANTE RETROALIMENTACION DE ESTADO.

A continuación se presentan algunas propiedades adicionales de los sistemas no lineales que se deben tener presentes en el desarrollo de este punto.

Lema 2.9.1 [8]. Los vectores renglón $dh(x^0), dL_f h(x^0), \dots, dL_f^{r-1} h(x^0)$ son linealmente independientes.

Esto significa que las funciones $\phi_1(x) = h(x)$, $\phi_2(x) = L_f h(x)$, ..., $\phi_r(x) = L_f^{r-1} h(x)$ pueden ser utilizadas como los r primeros componentes de un cambio de coordenadas del vector de estado.

Lema 2.9.2 [8]. Sea ϕ una función envaluada en los reales y f, g campos vectoriales, todos definidos en un conjunto abierto U de \mathfrak{R}^n , entonces para cualquier selección de $s, k, r > 0$,

$$\left\langle dL_f^s \phi(x), \text{ad}_f^{k+r} g(x) \right\rangle = \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{r}{i} L_f^{r-i} \left\langle dL_f^{s+i} \phi(x), \text{ad}_f^k g(x) \right\rangle$$

como consecuencia los dos conjuntos de condiciones siguientes son equivalentes:

- (i) $L_g \phi(x) = L_g L_f \phi(x) = \dots = L_g L_f^k \phi(x) = 0 \quad \forall x \in U$
- (ii) $L_g \phi(x) = L_{\text{ad}_f g} \phi(x) = \dots = L_{\text{ad}_f^k g} \phi(x) = 0 \quad \forall x \in U$

Si $r < n$, entonces siempre es posible encontrar $n-r$ funciones $\phi_{r+1}(x), \dots, \phi_n(x)$ tales que el mapeo:

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix} \tag{2.9.1}$$

tenga una matriz Jacobiano no singular en x_0 que por lo tanto, califica como transformación de coordenadas en una vecindad de x_0 . Siempre es posible escoger $\phi_{r+1}(x), \dots, \phi_n(x)$ de tal forma que:

$$L_g \phi_i = 0 \quad \forall r+1 \leq i \leq n \text{ y para toda } x \text{ alrededor de } x_0 \quad (2.9.2)$$

Debe hacerse notar que *no existe una forma constructiva para obtener estas funciones.*

La descripción del sistema SISO en las nuevas coordenadas será como sigue:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r-1} &= z_r \\ \dot{z}_r &= b(z) + a(z)u \\ \dot{z}_{r+1} &= q_{r+1}(z) \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= q_n(z) \end{aligned} \quad (2.9.3)$$

como $y=h(x)$, y puesto que $\phi_1(x) = h(x)$, es claro que $y = z_1$.

Hasta este punto se tiene el mismo sistema no lineal SISO original, pero expresado en un nuevo sistema de coordenadas.

Para lograr el objetivo de linealizar el sistema, se aplica una ley de control por retroalimentación de estado estática de la forma $u = \alpha(x) + \beta(x)v$, donde v es la nueva entrada al sistema.

La aplicación de esta ley de control a un sistema de la forma (2.2.1) da como resultado un sistema en lazo cerrado con la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)\alpha(x) + g(x)\beta(x)v \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

con $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ definidas sobre un subconjunto abierto de \mathfrak{R}^n en el cual es factible la transformación. En este conjunto se debe cumplir que $\beta(x) \neq 0 \forall x$, de no ser así no puede definirse la entrada v . Esto significa que la aplicación de esta técnica de linealización, está condicionada a que $\beta(x)$ sea no singular en el conjunto sobre el cual se define.

Si el grado relativo del sistema en cuestión es n , y es elegida la ley de control anterior en el nuevo sistema de coordenadas como:

$$u = \frac{1}{\alpha(z)}(-b(z) + v)$$

Entonces, el sistema de lazo cerrado resultante queda gobernado por las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n \\ \dot{z}_n &= v\end{aligned}$$

Por lo tanto, se puede concluir que cualquier sistema no lineal con función de salida $h(x)$, para la cual el grado relativo del sistema es igual a n en algún punto x_0 , puede ser transformado en un sistema que es lineal y controlable en una vecindad de $z_0 = \Phi(x_0)$.

El grado relativo es invariante bajo transformación de coordenadas y/o retroalimentación estática de estado.

La retroalimentación de estado que linealiza el sistema puede también expresarse en términos de las funciones $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ originales como:

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(x)}(-L_f^n h(x) + v)$$

Si después es aplicado el mismo cambio de coordenadas que se aplicó anteriormente llegaremos al mismo sistema linealizado, es decir, *las dos transformaciones usadas para obtener la forma lineal conmutan* y el orden en el que se aplican puede intercambiarse.

El siguiente teorema se refiere a las condiciones que debe cumplir un sistema no lineal para que sea factible linealizarlo utilizando retroalimentación de estado estática.

Teorema 2.9.1.[8]- Considerese el sistema $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ con $x \in \mathfrak{R}^n$. El problema de la linealización exacta del espacio de estado en una vecindad del punto x_0 , tiene solución *si y solo si* se satisfacen las siguientes condiciones:

- (i) La matriz $\begin{bmatrix} g(x_0) & \text{ad}_f g(x_0) & \cdots & \text{ad}_f^{n-2} g(x_0) & \text{ad}_f^{n-1} g(x_0) \end{bmatrix}$ tiene rango n .
- (ii) La distribución $\Delta = \text{span}\{g \quad \text{ad}_f g \quad \cdots \quad \text{ad}_f^{n-2} g\}$ es involutiva en una vecindad de x_0 .

Como conclusión se puede resumir el procedimiento que nos lleva a la construcción de una retroalimentación de estado $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ y de una transformación de coordenadas $z = \Phi(x)$, para resolver el problema de linealización exacta.

Procedimiento:

- 1) Comprobar que el grado relativo del sistema es igual a la dimensión del estado, con esto se asegura que:

$$\begin{aligned} L_g h(x) &= L_g L_f h(x) = \dots = L_g L_f^{n-2} h(x) = 0 \\ L_g L_f^{n-1} h(x) &\neq 0 \end{aligned}$$

- 2) De $f(x)$ y $g(x)$, construir los campos vectoriales:

$$g(x), \text{ad}_f g(x), \dots, \text{ad}_f^{n-2} g(x), \text{ad}_f^{n-1} g(x)$$

y posteriormente, comprobar las condiciones (i) y (ii) del teorema 2.9.1.

- 3) Calcular:

$$\alpha(x) = \frac{-L_f^n h(x)}{L_g L_f^{n-1} h(x)} \quad \beta(x) = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(x)} \quad (2.9.4)$$

4) Finalmente, obtener:

$$\Phi(x) = \text{col}(h(x), L_f h(x), \dots, L_f^{n-1} h(x)) \quad (2.9.5)$$

De esta forma, la retroalimentación de estado linealizante queda definida por la ecuación (2.9.4), mientras que el cambio de coordenadas se determina con la ecuación (2.9.5).

2.10. DINAMICA CERO.

Considere un sistema no lineal con grado relativo menor a la dimensión del vector de estado ($r < n$). En (2.9.3) puede hacerse la siguiente separación:

$$\xi = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} z_{r+1} \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

Así pues, la *forma normal* de un sistema SISO que tenga $r < n$, puede ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r-1} &= z_r \\ \dot{z}_r &= b(\xi, \eta) + a(\xi, \eta)u \\ \dot{\eta} &= q(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (2.10.1)$$

Si x_0 es tal que $f(x_0) = 0$ y $h(x_0) = 0$, entonces necesariamente las primeras r nuevas coordenadas z_i son cero en x_0 . Note que siempre es posible escoger arbitrariamente el valor, en x_0 , de las últimas $n-r$ nuevas coordenadas, en particular se pueden elegir como cero en x_0 . Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $\xi = 0$ y $\eta = 0$ en x_0 . Entonces si x_0 es un punto de equilibrio para el sistema en coordenadas originales, su punto correspondiente $(\xi, \eta) = (0, 0)$ en las nuevas coordenadas, es un punto de equilibrio para el nuevo sistema.

En el problema de hacer cero la salida, se requiere encontrar x_0 y $u_0(t)$ definidos para todo tiempo en una vecindad de $t=0$, tal que la salida del sistema sea idénticamente igual a cero. El conjunto de ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento dinámico del sistema cuando la salida es cero es lo que se conoce como **dinámica cero**.

Recordando que $y(t) = z_1(t)$, la restricción $y(t) = 0 \quad \forall t$ trae como consecuencia que $\dot{z}_1 = \dot{z}_2 = \dots = \dot{z}_r = 0$, esto es $\xi(t) = 0$. Además, la entrada debe ser necesariamente una solución de la ecuación $0 = b(0, \eta(t)) + a(0, \eta(t))u(t)$. La variable $\eta(t)$ está caracterizada por la ecuación diferencial:

$$\dot{\eta}(t) = q(0, \eta(t)) \quad (2.10.2)$$

Si la salida es cero, necesariamente el estado inicial debe ser tal que $\xi(0) = 0$, donde $\eta(0) = \eta_0$ puede ser escogido arbitrariamente. De acuerdo al valor de η_0 , la entrada debe ser:

$$u(t) = -\frac{b(0, \eta(t))}{a(0, \eta(t))}$$

En un sistema lineal la dinámica cero es lineal, con valores característicos que coinciden con los ceros de la función de transferencia del sistema original. Si se tomara la aproximación lineal de la dinámica cero del sistema en $\eta = 0$, resultará que esta coincide con la dinámica cero de la aproximación lineal del sistema entero en $x = 0$, esto es, *las operaciones de tomar la aproximación lineal y calcular la dinámica cero conmutan*.

El problema de mantener en cero la salida podría haber sido analizado directamente sobre la forma original de las ecuaciones, sin embargo el resultado es un conjunto de ecuaciones que describen la dinámica cero en un sistema libre de coordenadas (ver [8]).

La dinámica cero $\dot{\eta}(t) = q(0, \eta(t))$ describe el comportamiento interno del sistema cuando este es forzado a mantener su salida en cero. Lo anterior puede extenderse fácilmente al caso en el cual se desea seguir una función arbitraria $y_R(t)$. Para resolver este problema se requiere encontrar un par consistente de un estado inicial y una función de entrada, definidos en una vecindad de $t=0$, tal que la correspondiente salida del sistema coincida exactamente con la función deseada. Encontramos que:

$$y(t) = y_R(t) \Rightarrow z_i(t) = y_R^{(i-1)}(t) \quad \forall t, 1 \leq i \leq r$$

por lo tanto

$$\xi_R(t) = \left(y_R(t), y_R^{(1)}(t), \dots, y_R^{(r-1)}(t) \right)^T$$

entonces la entrada debe satisfacer:

$$y_R^{(r)}(t) = b(\xi_R(t), \eta(t)) + a(\xi_R(t), \eta(t))u(t)$$

donde $\eta(t)$ es una solución de la ecuación diferencial $\dot{\eta}(t) = q(\xi_R(t), \eta(t))$, entonces, si $y(t)$ tiene que seguir exactamente a $y_R(t)$, el estado inicial del sistema necesariamente debe ser tal que $\xi(0) = \xi_R(0)$, mientras que $\eta(0) = \eta_0$ puede ser elegido arbitrariamente. De acuerdo al valor de η_0

$$u(t) = \frac{y_R^{(r)}(t) - b(\xi_R(t), \eta(t))}{a(\xi_R(t), \eta(t))}$$

es la única entrada capaz de mantener $y(t) = y_R(t) \quad \forall t \geq t_0$.

CAPITULO 3

CONTROL DE SEGUIMIENTO EN SISTEMAS NO LINEALES

3.1. INTRODUCCION.

En este capítulo se presenta un panorama general de algunos de los resultados más recientes, que han sido publicados como soluciones al problema de seguimiento robusto de trayectorias, en sistemas no lineales. La sección 3.2 señala algunos antecedentes y tendencias actuales de la investigación en sistemas de control. En la sección 3.3 se presentan las clases de incertidumbres que aparecen en los modelos de sistemas no lineales. En la sección 3.4 se cita brevemente a algunos de los autores que han propuesto diversas soluciones. En la sección 3.5 se presenta el concepto de *acotamiento final uniforme* que se usará en los resultados del siguiente capítulo. Por último, en la sección 3.6 se establece el problema de seguimiento de trayectorias tal como se analizará en el capítulo 4.

3.2. ANTECEDENTES.

Por mucho tiempo la investigación en el area de control estuvo orientada a los sistemas lineales, que son un caso particular de los sistemas no lineales. Durante décadas, el problema que se estudió fué básicamente controlar un sistema lineal, aunque se presentaron varios enfoques de donde a su vez se obtuvieron diversos resultados, como el control LQG y otros, a medida que se avanzó en los resultados y aplicaciones se presentaron nuevos problemas, que desviaron la atención de los investigadores hacia los sistemas con incertidumbre.

En general, la mayor parte de los modelos matemáticos que se utilizan para representar procesos físicos son modelos aproximados, de manera que es preciso considerar la presencia de incertidumbres en los modelos que se utilizan en el diseño de controladores. De esta forma, la investigación de nuevas técnicas de control se ha orientado hacia la robustificación de los sistemas de control, para hacerlos insensibles a la incertidumbre en los modelos que se utilizan para diseñar los controladores.

En la actualidad se sabe que una buena parte de los procesos físicos son representados de manera más precisa por un modelo no lineal, ya sea por que el proceso en sí es altamente no lineal, o por que se logra ampliar el rango de aplicación de una ley de control si usamos su modelo no lineal en lugar de una linealización del mismo alrededor de un punto de operación.

3.3. SISTEMAS NO LINEALES CON INCERTIDUMBRE.

Existen diferentes clasificaciones para los tipos de incertidumbres que pueden presentarse en los sistemas no lineales dependiendo de cómo éstas afectan al estado y a la salida del sistema, las clasificaciones que estudian los problemas de incertidumbre más comunes, o por lo menos las que más desarrollo presentan actualmente son dos, a saber: aquellas incertidumbres que cumplen con la "condición de acoplamiento", y las que no la cumplen. Hay algunas otras clasificaciones, pero estas se presentan con menor frecuencia o se dan como resultado de una adecuación del problema menos natural; como se verá más adelante. Enseguida se presentan varios tipos de incertidumbre y la forma en que aparecen en el sistema no lineal.

Incetidumbres aditivas: Estas se presentan en el espacio de estado o en la salida, en un sistema SISO como (2.2.1) aparecen de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u + p(x) \\ y &= h(x) + q(x)\end{aligned}$$

donde $p(x)$ es la incertidumbre presente en el estado y $q(x)$ es la incertidumbre en la salida, dentro de esta misma clase de incertidumbre se definen las siguientes.

Incetidumbres con la "condición de acoplamiento": Las incertidumbres que satisfacen la condición de acoplamiento son aquellas que aparecen en forma aditiva en el estado y que además pertenecen al espacio rango de la matriz de entrada [10], este tipo de incertidumbres se presentan en varias clases de sistemas no lineales, como por ejemplo en los sistemas que pueden ser exactamente linealizados mediante una retroalimentación estática de estado, su descripción en este tipo de sistemas utilizando (2.9.3) se puede dar como sigue:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), t) + B(x(t), t)u(t) + \delta(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= h(x(t), t)\end{aligned}\tag{3.3.1}$$

donde $\delta(x(t), u(t), t)$ representa la incertidumbre aditiva que cumple con la "condición de acoplamiento", y que en este caso puede ser expresada como el siguiente producto $\delta(x(t), u(t), t) = B(x(t), t)\eta(x(t), u(t), t)$, esto es, la incertidumbre $\eta(x(t), u(t), t)$ está "acoplada" al estado a través de la misma matriz que la entrada $u(t)$, por lo que pertenece al espacio rango de la matriz de entrada. De esta forma puede también definirse el tipo de incertidumbres que no cumplen la condición de acoplamiento o **incertidumbres "no acopladas"**, estas se representan también en la forma de (3.3.1) pero no cumplen la condición antes citada.

Incertidumbres estructurales: Estas aparecen como resultado de no conocer exactamente el modelo de un proceso en su estructura dinámica, por ejemplo, la dimensión del estado puede ser mayor que la del modelo considerado si se toman en cuenta las dinámicas más rápidas que intervienen en un proceso y que por lo general se desprecian para fines de diseño del controlador. La representación de este tipo de incertidumbres en los sistemas no lineales, aún no ha sido definida de forma única como en el caso de los sistemas lineales, precisamente por el hecho de tener funciones no lineales del estado.

Incertidumbres paramétricas: Este tipo de incertidumbres se refiere a aquellas que no afectan la estructura del modelo de la planta, sino que resultan de una diferencia en los valores de los parámetros considerados en el modelo y los valores reales en la planta, de las constantes que afectan a las funciones que describen el comportamiento dinámico del sistema. También pueden ser el resultado de una variación lenta dentro de un cierto rango de los valores de estas constantes.

Un caso de estudio interesante se presenta a continuación, donde no solo se analiza la posibilidad de rechazar las incertidumbres de modelado sino también las perturbaciones externas que cumplen con cierta condición, el problema se conoce como *desacoplamiento de perturbaciones* [8].

Desacoplamiento de perturbaciones: Considerese el sistema SISO siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u + p(x)w \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

en el cual w representa una entrada no deseada o perturbación y $p(x)$ la parte no modelada o incertidumbre de la planta. Se desea saber bajo que condiciones existe una retroalimentación de estado estática $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ que lleve a un sistema en lazo cerrado en el cual la salida y es completamente independiente o está desacoplada de la perturbación w .

Se asume que el sistema tiene grado relativo r en x_0 , y que el campo vectorial $p(x)$ que multiplica a la perturbación en la ecuación de estado es tal que cumple con la siguiente condición:

$$L_p L_f^i h(x) = 0 \quad \text{para toda } 0 \leq i \leq r-1 \quad \text{y toda } x \text{ cercana a } x_0 \quad (3.3.2)$$

Esto significa que el grado relativo con respecto a w , es mayor que el grado relativo con respecto a u .

Con esta condición, si se utiliza el cambio de coordenadas de la sección 2.9 se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r-1} &= z_r \\ \dot{z}_r &= b(\xi, \eta) + a(\xi, \eta)u \\ \dot{\eta} &= q(\xi, \eta) + k(\xi, \eta)w \\ y &= z_1 \end{aligned}$$

donde $\xi = [z_1, z_2, \dots, z_r]^T$ y $\eta = [z_{r+1}, \dots, z_n]^T$. Eligiendo la retroalimentación de estado:

$$u = -\frac{L_f^r h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x)} + \frac{v}{L_g L_f^{r-1} h(x)}$$

se obtiene un sistema descrito por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{z}_{r-1} &= z_r \\ \dot{z}_r &= v \\ \dot{\eta} &= q(\xi, \eta) + k(\xi, \eta)w \\ y &= z_1\end{aligned}$$

donde se puede ver que la salida ha sido completamente desacoplada de la perturbación w . El efecto producido por la entrada aplicada, ha sido el de aislar de la salida aquella parte del sistema que se vé afectada por la perturbación. La condición dada por (3.3.2), es necesaria y suficiente para la existencia de la solución al problema de desacoplar las perturbaciones de la salida de un sistema.

3.4. RESULTADOS RECIENTES EN EL AREA DE SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS.

La aplicación práctica de todas las técnicas de control existentes hoy en día, depende de que éstas tengan la capacidad de mantener el sistema estable aún y cuando el controlador se haya diseñado utilizando un modelo aproximado del sistema. Esto es debido a que resulta muy difícil, especialmente en el caso de los sistemas no lineales, identificar los parámetros exactos de la planta. Pero además de esto, en vista del ambiente industrial en el que deben operar los sistemas de control, también es deseable que los algoritmos de control obtenidos sean capaces de rechazar perturbaciones externas, esto significa que deben tener una baja sensibilidad a la presencia de ruido en las señales de medición que se retroalimentan al controlador.

El problema del control no lineal es muy extenso y presenta muchas variantes, el caso lineal es solo una de ellas, es por esto que el problema se ha subdividido en varias partes, según la clase de sistemas no lineales estudiada. De esta forma la mayor parte de la investigación se ha dirigido hacia un problema en particular. Una solución general al problema de control de sistemas no lineales aún está muy lejos de ser obtenida.

Por otra parte, el seguimiento robusto de trayectorias en sistemas no lineales también ha tenido que ser planteado en varios subproblemas, definido para diferentes casos dependiendo de la clase de sistema no lineal que se desea estudiar y para el tipo de incertidumbre que en él se considera. Incluso una buena parte del trabajo de investigación se ha orientado al problema de control de una planta o modelo específico, como es el caso de [7], [13], [14], [15] y [21], donde los autores plantean el problema de control robusto del modelo del robot con

incertidumbre paramétrica, o en [18] y [19], que tratan el problema de seguimiento de trayectorias robusto del mismo.

Otros autores tratan el problema de control robusto para determinada clase de sistemas no lineales usando diferentes técnicas como en [3], [4] y [20]; ellos atacan el problema de sistemas entrada-salida linealizables utilizando técnicas de control adaptable. Otros consideran que la incertidumbre afecta el sistema en alguna forma muy particular como [5], [10], [16] y [17], donde se asume que las incertidumbres presentes satisfacen la "condición de acoplamiento".

Todas estas técnicas de control desarrolladas recientemente para sistemas no lineales con incertidumbres son en general muy complicadas y en muchos casos se requieren computadoras con capacidades de cálculo que aún no se pueden alcanzar con la tecnología actual, descalificandolas por completo para aplicaciones a procesos físicos en tiempo real.

Nuestro objetivo entonces en el problema de seguimiento de trayectorias en sistemas no lineales, es desarrollar una ley de control robusta, fácil de calcular y que no demande de una capacidad de cálculo demasiado grande, por parte del computador en el cual será programado el algoritmo de control. Para esto requeriremos un concepto importante definido en la siguiente sección.

3.5. EL CONCEPTO DE ACOTAMIENTO FINAL UNIFORME (U. U. B.).

Cuando diseñamos un controlador para una determinada planta, por lo general deseamos obtener como resultado la estabilidad asintótica uniforme de un estado de equilibrio ([1], [2]). Otras veces uno se conforma con tener este estado de equilibrio finalmente acotado en algún conjunto ([5], [12], [16], [17], [19]) en este caso uno puede construir la retroalimentación basándose en cierto estado o salida ([16], [17]). La característica sobresaliente del problema es el hecho de que se considera un tratamiento *determinístico* de la incertidumbre, donde uno requiere *cierta* eficiencia en presencia de información *incierto*. El conocimiento esencial acerca de los elementos inciertos se refiere únicamente a su *posible* tamaño; esto es, solo se asumen conocidas las cotas superiores de los conjuntos, en los cuales los valores de las cantidades inciertas pueden estar contenidos.

Si se satisfacen algunas condiciones -entre las cuales está principalmente la "condición de acoplamiento" ([5], [12], [16], [17], [19])- entonces todos los elementos inciertos pueden ser "agrupados" y el sistema puede describirse como [5]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, t) + B(x, t)u + B(x, t)\eta(x, u, t) \\ y &= h(x, t)\end{aligned}\tag{3.5.1}$$

El **acotamiento final uniforme** establece que, dado un estado inicial determinado por (x_0, t_0) , existe una entrada $u \in \mathfrak{R}^m$ tal que la correspondiente trayectoria $x(\cdot): [t_0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}^n$ existe, y tal trayectoria entra en una vecindad de $x = 0$ en un tiempo finito T y permanece dentro de esta vecindad para todo tiempo posterior $t > T$.

Algunas de las implicaciones del siguiente teorema se tendrán presentes al interpretar los resultados obtenidos en el capítulo 4, cuando se presente la solución propuesta en este trabajo.

Teorema 3.5.1. [5]: Considerese un sistema descrito por (3.5.1) con las siguientes suposiciones (X denota el producto cartesiano):

- i) Las funciones conocidas $f(\cdot): \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}^n$ y $B(\cdot): \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m$ así como también la función desconocida $\eta(\cdot): \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}^m$, son funciones Caratheodory, esto es, para una función de x y t , para todo $t \in \mathfrak{R}$ la función es continua en x y para todo $x \in \mathfrak{R}^n$ la función es Lebesgue medible en t . Y además $f(0, t) = 0$ para todo $t \in \mathfrak{R}$.
- ii) La norma del elemento *incierto* está acotada por una función *conocida*, esto es, para toda $(x, t) \in \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}$, se tiene que $\|\eta(x, t)\| \leq \rho(x, t)$; donde la función conocida $\rho(\cdot): \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}_+$ es una función Caratheodory.
- iii) Dado un conjunto compacto $E \subset \mathfrak{R}^n$ y un intervalo compacto $[a, b] \subset \mathfrak{R}$, existen funciones Lebesgue integrables $m_i(\cdot): [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$, $i = 1, 2$, tales que para todo $(x, t) \in EX[a, b]$

$$\|f(x, t)\| \leq m_1(t)$$

$$\|B(x,t)\|\rho(x,t) \leq m_2(t)$$

iv) El origen, $x=0$, es uniformemente asintóticamente estable para el sistema nominal no controlado $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$. En particular, existen una función $V(\cdot): \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}_+$ que es C^1 y continua, funciones estrictamente crecientes $\gamma_i(\cdot): \mathfrak{R}_+ \rightarrow \mathfrak{R}_+$, $i=1,2,3$, las cuales satisfacen:

$$\gamma_i(0) = 0, \quad i=1,2,3$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \gamma_i(r) = \infty \quad i=1,2$$

de tal forma que para todo $x \in \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}$

$$\gamma_1(\|x\|) \leq V(x,t) \leq \gamma_2(\|x\|)$$

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + \nabla_x^T V(x,t) f(x,t) \leq -\gamma_3(\|x\|)$$

En otras palabras, existe una función de Lyapunov $V(\cdot)$ para el sistema nominal no controlado.

Considere además un control retroalimentado $u = p(x(t), t)$ de tal forma que:

$$p(x,t) = \frac{-\mu(x,t)}{\|\mu(x,t)\|} \rho(x,t) \quad \text{si} \quad \|\mu(x,t)\| > \varepsilon$$

$$\|p(x,t)\| \leq \rho(x,t) \quad \text{si} \quad \|\mu(x,t)\| \leq \varepsilon$$

donde $\mu(x,t) \stackrel{\Delta}{=} B^T(x,t) \nabla_x V(x,t) \rho(x,t)$.

Entonces los siguientes resultados se cumplen:

A. Existencia: Dados cualquier $(x_0, t_0) \in \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}$, existe una solución $x(\cdot): [t_0, t_1] \rightarrow \mathfrak{R}^n$, $x(t_0) = x_0$, de (3.5.1).

B. Acotabilidad uniforme: Si $x(\cdot):[t_0, t_1] \rightarrow \mathfrak{R}^n$, $x(t_0) = x_0$, es una solución de (3.5.1), entonces

$$\|x_0\| \leq r \Rightarrow \|x(t)\| \leq d(r), \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

donde

$$d(r) = \begin{cases} (\gamma_1^{-1} \circ \gamma_2)(R) & \text{si } r \leq R \\ (\gamma_1^{-1} \circ \gamma_2)(r) & \text{si } r > R \end{cases}$$

$$R = \gamma_3^{-1}(2\varepsilon)$$

y el símbolo (\circ) denota la composición de funciones. Más aún, la solución tiene una continuación sobre $[t_0, \infty)$.

C. Acotabilidad final uniforme: Si $x(\cdot):[t_0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}^n$, $x(t_0) = x_0$, es una solución de (3.5.1) con $\|x_0\| \leq r$, entonces para un determinado $\bar{d} > (\gamma_1^{-1} \circ \gamma_2)(R)$ se tiene que

$$\|x(t)\| \leq \bar{d}, \quad \forall t \geq t_0 + T(\bar{d}, r)$$

donde

$$T(\bar{d}, r) = \begin{cases} 0, & \text{si } r \leq \bar{R} \\ \frac{\gamma_2(r) - \gamma_1(\bar{R})}{\gamma_3(\bar{R}) - 2\varepsilon}, & \text{si } r > \bar{R} \end{cases}$$

$$\bar{R} = (\gamma_2^{-1} \circ \gamma_1)(\bar{d})$$

□

3.6. EL PROBLEMA DE SEGUIMIENTO.

El estudio de los sistemas de control no lineales se puede dividir en dos problemas principales: el primero es el de regulación, que consiste en hacer que la salida de un proceso tome un valor deseado determinado, partiendo de cualquier valor inicial, y se mantenga en

este valor. El segundo problema es el de seguimiento, que se puede expresar de manera sencilla como sigue.

Dado un proceso con múltiples entradas y múltiples salidas representado por un sistema de ecuaciones de la forma (2.2.2), esto es:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i = f(x) + G(x)u \\ y_j &= h_j(x) \quad (j = 1, \dots, m) \\ x_0 &= x(t_0)\end{aligned}$$

donde $f(\cdot) \in \mathfrak{R}^n$, $G(\cdot) \in \mathfrak{R}^{n \times m}$, $h(\cdot) \in \mathfrak{R}^p$, $u \in \mathfrak{R}^m$, u es el vector de entradas, y es el vector de salidas y x_0 es la condición inicial del estado en el proceso real. Se desea encontrar, si existe, un vector de entradas u al sistema tal que el vector de salidas del proceso siga una determinada trayectoria deseada en el tiempo. Dicho de otra manera, se desea encontrar u tal que la diferencia entre cada salida real del proceso y_j y cada trayectoria de referencia deseada y_{dj} tienda a cero conforme el tiempo tiende a infinito, sin importar las condiciones iniciales de la planta.

Hoy en día este problema se ha resuelto para algunos tipos de sistemas no lineales, cuando la planta es conocida exactamente en su estructura y sus parámetros. Si además de la definición anterior, consideramos el hecho de tener incertidumbre en el modelo de la planta, el problema se complica. Actualmente aún no se ha dado una solución satisfactoria al problema de seguimiento en plantas con incertidumbre. Aunque se han obtenido muchos resultados como se menciona en la sección 3.4, estos solo resuelven el problema en forma aproximada, con muchas restricciones y para una determinada clase de sistema y/o incertidumbre. Además ofrecen como resultado, una ley de control a veces demasiado compleja para ser implementada.

CAPITULO 4

SOLUCION PROPUESTA AL PROBLEMA DE SEGUIMIENTO EN SISTEMAS NO LINEALES CON INCERTIDUMBRE
--

4.1. INTRODUCCION.

En este capítulo se propone una solución al problema de seguimiento de trayectorias para la clase de sistemas no lineales, que son completamente linealizables y en los que las incertidumbres presentes satisfacen la "condición de acoplamiento", es decir, que las incertidumbres pertenecen al espacio rango de la matriz B de entrada, como es el caso de los sistemas mecánicos.

En la sección 4.2 se presenta la clase de sistemas no lineales que se considera en el desarrollo de este trabajo , y las consideraciones que se hacen en el mismo.

La solución aquí propuesta, se compone de un controlador y un observador para una clase de sistemas no lineales. El observador fué propuesto por J. P. Gauthier en [2] y posteriormente estudiado en otros trabajos por H. Hammouri y K. Busawon en [1]. En la sección 4.3, se presenta una sencilla prueba de convergencia exponencial para este observador si no hay incertidumbres. El observador se incluye en el algoritmo de control, cuando no se dispone del estado completo medible.

Primero se procederá a demostrar en la sección 4.4, que el observador originalmente propuesto para sistemas sin incertidumbre, es robusto a la presencia de estas, al menos en el sentido de *acotabilidad final uniforme del error de seguimiento* [5]. Es decir, que cuando el modelo no es exacto, este observador aún puede seguir al estado real de cerca, por lo menos dentro de una vecindad, cuyo radio dependerá de la ganancia del observador, elegida a través de un solo parámetro de ajuste, y de la magnitud de la incertidumbre presente.

El segundo paso, como se presenta en la sección 4.5, es demostrar la estabilidad del controlador y la convergencia asintótica a cero del error de seguimiento en ausencia de

incertidumbres, para después demostrar, en la sección 4.6, que este también es robusto a la presencia de incertidumbres, en el mismo sentido que el observador.

Por último se demuestra el principio de separación, es decir, que el sistema completo planta-observador-controlador, funciona adecuadamente y cada componente puede ser diseñado independientemente. Al final se demuestra que el sistema completo en el cual se considera la presencia de incertidumbres, será estable en el sentido de *acotabilidad final uniforme* del error de seguimiento, y que la magnitud final de error de seguimiento dependerá de las ganancias elegidas tanto para el controlador como para el observador.

4.2. CONSIDERACIONES EN EL SISTEMA NO LINEAL.

Considérese la clase de sistemas no lineales con grado relativo vector $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ y de dimensión $n = \sum_{i=1}^m r_i$, de la siguiente forma:

$$\Sigma_{NL} \begin{cases} \dot{\xi} = F(\xi) + G(\xi)u \\ y = h(\xi) \end{cases} \quad (4.2.1)$$

donde $h(\xi) = (h_1(\xi), \dots, h_m(\xi))^T$, $F: M \rightarrow R^n$, $G: M \rightarrow R^{n \times m}$, $u \in R^m$, y además los mapeos $h: M \rightarrow R^m$ son suficientemente suaves en un dominio $M \subset R^n$, esto es, son diferenciables un suficiente número de veces. El sistema (4.2.1), como se vio en la sección 2.9, es completamente linealizabile si existe un difeomorfismo $T: M \rightarrow R^n$ tal que $D = T(M)$ contiene al origen y el cambio de variables $x = T(\xi)$ transforma el sistema no lineal (4.2.1) en un sistema de la forma siguiente (ver [8], 243-259):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B\{\alpha(x) + \beta(x)u\} \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

donde se definen los siguientes subsistemas:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= A_i x_i + b_i \{ \alpha_i(x) + \beta_i(x)u_i \} \\ y_i &= c_i x_i \end{aligned} \quad (4.2.2a)$$

para toda $i = 1, \dots, m$.

con $A_i \in R^{r_i \times r_i}$, $b_i \in R^{r_i \times 1}$, $c_i \in R^{1 \times r_i}$, donde:

$$A = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_m)$$

$$B = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_m)$$

$$C = \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_m)$$

$$\alpha(x) = (\alpha_1(x), \dots, \alpha_m(x))^T$$

$$\beta(x) = \text{diag}(\beta_1(x), \dots, \beta_m(x))$$

y A_i , b_i , c_i , $\alpha_i(x)$ y $\beta_i(x)$ son de la forma:

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0^{(r_i-1) \times 1} & I^{(r_i-1) \times (r_i-1)} \\ 0 & 0^{1 \times (r_i-1)} \end{pmatrix}$$

$$b_i = (0, \dots, 0, 1)^T$$

$$c_i = (1 \ 0 \ \dots \ 0)$$

$$\alpha_i(x) = L_F^i H_i(x)$$

$$\beta_i(x) = L_G L_F^{i-1} H_i(x)$$

Además, se asume que el par (A, B) es controlable y $\beta(x)$ es no singular para todo $x \in D$. Si $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ son conocidos exactamente, estos términos pueden ser cancelados por medio de una retroalimentación de estado linealizante de la forma:

$$u = \beta^{-1}(x) \{ v - \alpha(x) \} \quad (4.2.3)$$

para el sistema total (4.2.2). Para cada subsistema (4.2.2a) se tiene:

$$u_i = \beta_i^{-1}(x_i) \{ v_i - \alpha_i(x_i) \} \quad (4.2.3a)$$

para obtener el sistema lineal:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bv \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

donde a su vez se definen los subsistemas:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= A_i x_i + b_i v_i \\ y_i &= c_i x_i \end{aligned} \quad (4.2.4a)$$

con A_i , b_i , c_i y A , B , C , tal como se definieron previamente.

Esta clase de sistemas se conocen como 'completamente linealizables', y son una subclase de la clase más común de sistemas linealizables donde solo la ecuación de estado es linealizada. Este es también un subconjunto de la clase de sistemas entrada-salida linealizables donde el mapeo entrada-salida puede ser hecho lineal, pero la ecuación de estado puede contener dinámicas no lineales inobservables. Para un tratamiento más detallado referirse a [8].

El punto de partida en este trabajo, será un sistema que ya ha sido representado en la forma (4.2.2) (forma canónica de Brunowsky).

Si los términos $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ no se conocen con exactitud, es decir, si éstos presentan cierta incertidumbre al ser modelados, entonces el control resulta en un estimado de la forma:

$$u = \hat{\beta}^{-1}(x) \{ v - \hat{\alpha}(x) \} \quad (4.2.5)$$

donde $\hat{\alpha}(x)$ y $\hat{\beta}(x)$ poseen las mismas propiedades propuestas para $\alpha(x)$ y $\beta(x)$, reemplazando (4.2.5) en (4.2.2) se tiene:

$$\dot{x} = Ax + B \left\{ \alpha(x) + \beta(x) \hat{\beta}^{-1}(x) [v - \hat{\alpha}(x)] \right\}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + B \left\{ \alpha(x) + \beta(x) \hat{\beta}^{-1}(x) [v - \hat{\alpha}(x)] + v - v \right\} \\
&= Ax + B \left\{ \alpha(x) - \beta(x) \hat{\beta}^{-1}(x) \hat{\alpha}(x) + \beta(x) \hat{\beta}^{-1}(x) v - v + v \right\} \\
\dot{x} &= Ax + Bv + B \left\{ \alpha(x) - \beta(x) \hat{\beta}^{-1}(x) \hat{\alpha}(x) + (\beta(x) \hat{\beta}^{-1}(x) - I) v \right\} \quad (4.2.6)
\end{aligned}$$

y llegamos al siguiente sistema linealizado:

$$\Sigma : \{ \dot{x} = Ax + Bv + B\eta \quad (4.2.7)$$

donde la incertidumbre

$$\eta = \alpha(x) - \beta(x) \hat{\beta}^{-1}(x) \hat{\alpha}(x) + (\beta(x) \hat{\beta}^{-1}(x) - I) v$$

es un vector de dimensión m y el producto $B\eta$ es el término de incertidumbre en el sistema que satisfase la condición de acoplamiento.

Puede verse que cuando se conoce exactamente el modelo del sistema, el término de incertidumbre desaparece, esto es $\eta \equiv 0$.

Los componentes del vector de incertidumbres son:

$$\eta_i = \alpha_i(x_i) - \beta_i(x_i) \hat{\beta}_i^{-1}(x_i) \hat{\alpha}_i(x_i) + (\beta_i(x_i) \hat{\beta}_i^{-1}(x_i) - I_{r_i, r_i}) v_i$$

para el i -ésimo subsistema.

En general, en el desarrollo de este trabajo se consideran las siguientes hipótesis:

- H1)** El sistema es completamente linealizabile representado en la forma (4.2.2), donde (A, B) es controlable y (C, A) es observable.
- H2)** Las incertidumbres presentes en el sistema verifican la "condición de acoplamiento".
- H3)** Las incertidumbres son acotadas.

4.3. OBSERVADOR.

El siguiente observador ha sido estudiado previamente por varios autores (ver [1], [2]), y a continuación se propone una prueba de convergencia del error de observación, simplificada al considerar solo el sistema linealizado; a diferencia de las pruebas en [1] y [2] en las que se incluye la parte no lineal del sistema.

TEOREMA 4.3.1 [2]: Considerese un sistema de la forma (4.2.2), donde $\beta(x)$ es no singular para todo $x \in D$, con el control linealizante (4.2.3) aplicado, esto es, un sistema de la forma (4.2.4). Sea el siguiente observador lineal del sistema (4.2.4):

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bv - S_o^{-1} C^T (C\hat{x} - y) \quad (4.3.1)$$

donde S_o satisface la siguiente ecuación:

$$\theta_o S_o + A^T S_o + S_o A = C^T C \quad (4.3.2)$$

$$\theta_o > 0, S_o = S_o^T > 0$$

Entonces, el error de observación de estado, definido como:

$$e_o = x - \hat{x} \quad (4.3.3)$$

converge a cero exponencialmente.

Prueba: Derivando (4.3.3) con respecto al tiempo, se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{e}_o &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bv - A\hat{x} - Bv + S_o^{-1} C^T C (\hat{x} - x) \\ \dot{e}_o &= \left(A - S_o^{-1} C^T C \right) e_o \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Para demostrar estabilidad y convergencia a cero del error de seguimiento se propone la siguiente función de Lyapunov:

$$V(e_o) = e_o^T S_o e_o \quad (4.3.5)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_o) &= e_o^T \left(A^T - C^T C S_o^{-1} \right) S_o e_o + e_o^T S_o \left(A - S_o^{-1} C^T C \right) e_o \\ &= e_o^T \left(A^T S_o - C^T C + S_o A - C^T C \right) e_o \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Aplicando (4.2.6) en (4.3.6) se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_o) &= -\theta_o e_o^T S_o e_o - e_o^T C^T C e_o \\ \dot{V}(e_o) &\leq -\theta_o V(e_o) \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

De donde se obtiene rápidamente:

$$V(e_o) \leq V(e_o(t_0)) e^{-\theta_o(t-t_0)} \quad (4.3.8)$$

Como $V(e_o)$ decrece exponencialmente, pero además, S_o está acotada tanto superior como inferiormente, se pueden definir constantes $\delta_1 = \lambda_{\min}(S_o) > 0$, $\delta_2 = \lambda_{\max}(S_o) > 0$ tales que:

$$\delta_2 \|e_o(t_0)\|^2 \geq V(e_o(t)) = e_o^T(t) S_o e_o(t) \geq \delta_1 \|e_o(t)\|^2, \quad \forall t \geq t_0 \quad (4.3.9)$$

usando este resultado en (4.3.8) se tiene:

$$\begin{aligned} \delta_1 \|e_o(t)\|^2 &\leq \delta_2 \|e_o(t_0)\|^2 e^{-\theta_o(t-t_0)} \\ \|e_o(t)\| &\leq \sqrt{\frac{\delta_2}{\delta_1}} \|e_o(t_0)\| e^{-\frac{\theta_o}{2}(t-t_0)} \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

Por lo tanto, como también se puede concluir usando los teoremas de estabilidad de Lyapunov ya conocidos, deducimos que el error de observación tiende a cero exponencialmente, en el dominio D . \square

Los resultados anteriores pueden encontrarse desglosados en una forma un poco más compleja en la literatura reciente (ver [2]).

4.4. SISTEMAS CON INCERTIDUMBRE Y ACOTAMIENTO FINAL UNIFORME DEL ERROR DE OBSERVACION.

En nuestro problema, en lugar de buscar convergencia asintótica global del error de observación, relajaremos esta exigencia a la de pedir únicamente que el error de observación entre en una vecindad del cero en tiempo finito t_0 y permanezca al interior para todo $t \geq t_0$, esto es, deseamos *acotamiento final uniforme* del error de observación.

TEOREMA 1: Sea el sistema con incertidumbres:

$$\dot{x} = Ax + Bv + B\eta \quad (4.4.1)$$

y considere las hipótesis **H1)**-**H3)**. Si aplicamos el observador de la sección anterior, esto es:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bv - S_o^{-1} C^T (C\hat{x} - y) \quad (4.4.2)$$

donde S_o satisface la ecuación (4.3.2), entonces el error de observación, definido como:

$$e_o = x - \hat{x} \quad (4.4.3)$$

es *finalmente uniformemente acotado*. Más aún, el radio de la región que acota el error final, depende de la norma de la incertidumbre y de la ganancia del observador, dada por la matriz S_o , que a su vez se construye con el parámetro único θ_o . Además, este observador es del tipo de "alta ganancia", de forma que $e_o \rightarrow 0$ como $\theta_o \rightarrow \infty$.

Prueba: Derivando (4.4.3), se tiene:

$$\dot{e}_o = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bv + B\eta - A\hat{x} - Bv + S_o^{-1} C^T C (\hat{x} - x)$$

$$\dot{e}_o = \left(A - S_o^{-1} C^T C \right) e_o + B\eta \quad (4.4.4)$$

Para demostrar la acotabilidad final uniforme del error de seguimiento se aplica la misma función de Lyapunov que se usó para demostrar convergencia asintótica:

$$V(e_o) = e_o^T S_o e_o \quad (4.4.5)$$

entonces:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_o) &= e_o^T \left(A^T - C^T C S_o^{-1} \right) S_o e_o + e_o^T S_o \left(A - S_o^{-1} C^T C \right) e_o + \eta^T B^T S_o e_o \\ &\quad + e_o^T S_o B \eta \end{aligned}$$

$$\dot{V}(e_o) = e_o^T \left(A^T S_o - C^T C + S_o A - C^T C \right) e_o + \eta^T B^T S_o e_o + e_o^T S_o B \eta \quad (4.4.6)$$

Substituyendo (4.3.2) en (4.4.6) se obtiene:

$$\dot{V}(e_o) = -\theta_o e_o^T S_o e_o - e_o^T C^T C e_o + \eta^T B^T S_o e_o + e_o^T S_o B \eta \quad (4.4.7)$$

Aplicando a (4.4.7) la siguiente identidad matricial:

$$XY^T + YX^T \leq a_1 XX^T + \frac{1}{a_1} YY^T, \quad a_1 > 0 \quad (4.4.8)$$

y el hecho de que una matriz positiva definida $P = P^T > 0$ puede descomponerse en sus matrices "raíz" $P = P^{1/2} P^{1/2}$ se tiene que, haciendo:

$$X = e_o^T (S_o)^{1/2}; \quad Y = \eta^T B^T (S_o)^{1/2}$$

entonces:

$$\dot{V}(e_o) \leq -\theta_o e_o^T S_o e_o - (\|C e_o\|)^2 + a_1 e_o^T S_o e_o + \frac{1}{a_1} \eta^T B^T S_o B \eta$$

$$\dot{V}(e_o) \leq -(\theta_o - a_1) e_o^T S_o e_o + \frac{1}{a_1} \eta^T B^T S_o B \eta$$

Reescribiendo en términos de normas se obtiene:

$$\dot{V}(e_o) \leq -(\theta_o - a_1) \|e_o\|_{S_o}^2 + \frac{1}{a_1} \|B\eta\|_{S_o}^2 \quad (4.4.9)$$

donde $\|\cdot\|_{S_o}$ denota la norma ponderada por la matriz S_o . Eligiendo $\theta_o > a_1$ se puede escribir:

$$-(\theta_o - a_1) = -k_1; \quad k_1 > 0 \quad (4.4.10)$$

luego:

$$\dot{V}(e_o) \leq -k_1 \|e_o\|_{S_o}^2 + \frac{1}{a_1} \|B\eta\|_{S_o}^2 \quad (4.4.11)$$

De este último resultado puede verse que:

$$\text{Si } \|e_o\|_{S_o}^2 > \frac{1}{k_1 a_1} \|B\eta\|_{S_o}^2 \text{ entonces } \dot{V}(e_o) < 0. \quad (4.4.12)$$

$$\text{Si } \|e_o\|_{S_o}^2 < \frac{1}{k_1 a_1} \|B\eta\|_{S_o}^2 \text{ entonces } \dot{V}(e_o) > 0. \quad (4.4.13)$$

Proposición 1: El factor $\frac{1}{(\theta_o - a_1)a_1}$, con $\theta_o > 0$ un valor fijo y $0 < a_1 < \theta_o$, tiene un valor

mínimo en $a_1 = \frac{\theta_o}{2}$, es decir, $\min \left[\frac{1}{(\theta_o - a_1)a_1} \right] = \frac{4}{\theta_o^2}$.

Esta proposición se prueba derivando el factor constante

$$\frac{1}{k_1 a_1} = \frac{1}{(\theta_o - a_1)a_1} \quad (4.4.14)$$

con respecto a a_1 , esto es:

$$\frac{d}{da_1} \left(\frac{1}{k_1 a_1} \right) = \frac{-(\theta_o - a_1) - a_1}{(\theta_o - a_1)^2 a_1^2} = 0$$

Despejando a_1 y substituyendo en (4.4.14) podemos ver que el mínimo es:

$$a_1 = \frac{\theta_o}{2}$$

Por lo tanto, si usamos este valor para a_1 , las ecuaciones (4.4.12) y (4.4.13) se pueden reescribir como sigue:

$$\text{Si } \|e_o\|_{S_o}^2 > \frac{4}{\theta_o^2} \|B\eta\|_{S_o}^2 \quad \text{entonces} \quad \dot{V}(e_o) < 0. \quad (4.4.15)$$

$$\text{Si } \|e_o\|_{S_o}^2 < \frac{4}{\theta_o^2} \|B\eta\|_{S_o}^2 \quad \text{entonces} \quad \dot{V}(e_o) > 0. \quad (4.4.16)$$

Con esto queda demostrado que el error de observación es *uniformemente finalmente acotado* tal como se deseaba, y el radio de la hiperesfera o de la región que lo acota depende de la norma de la incertidumbre ponderada por la matriz S_o y de la ganancia del observador; también puede verse, que el máximo error permitido puede reducirse al valor deseado aumentando el valor de θ_o , dicho de otra forma, aplicando el teorema de LaSalle, si $\theta_o \rightarrow \infty$ entonces $\dot{V}(e_o) < 0 \forall e_o \neq 0$ y $\dot{V}(0) = 0$, o sea convergencia asintótica del error de observación.

Si el análisis anterior en vez de hacerse para el sistema (4.2.2) con m -salidas, se efectúa para cada subsistema (4.2.2a) con una entrada y una salida, podremos obtener m -subsistemas separados con m -parámetros θ_{oi} , $i=1, \dots, m$ con los cuales se pueden asignar las razones de convergencia del observador para cada uno de los m -subsistemas independientemente, además se tendrán m -regiones acotadas para las m -incertidumbres η_i de diferentes magnitudes, por lo cual es muy conveniente poder ajustar cada una independientemente. □

4.5. CONTROLADOR.

En esta sección procederemos a analizar la ley de control propuesta, esta ley de control está basada en el observador estudiado en las secciones anteriores, de hecho, la ecuación utilizada para determinar su ganancia se basa en una ecuación de Lyapunov similar a (4.3.2).

Para visualizar mejor la estructura final del sistema de error se procederá inicialmente con el i -ésimo subsistema (4.2.2a) en lugar de tomar todo el sistema (4.2.2), una vez formada la estructura del sistema de error para un subsistema, se considerará el análisis de convergencia asintótica a cero del error del sistema total (4.2.2).

Considérese el sistema (4.2.2a) sin incertidumbre, con el control linealizante (4.2.3a). Sea $y_{di}(t)$ la i -ésima señal de seguimiento deseada, sea $y_{di}^{(k)}$ la k -ésima derivada de la señal deseada $y_{di}(t)$, sea $y_{di} = \begin{bmatrix} y_{di}^{(0)} & \dots & y_{di}^{(r_i-1)} \end{bmatrix}^T \in \mathfrak{R}^{r_i}$ donde r_i es el grado relativo del i -ésimo subsistema.

Definimos el error de seguimiento en el i -ésimo subsistema (4.2.2a) como:

$$e_k \stackrel{\Delta}{=} x_k - y_{di}^{(k-1)}, \quad \text{para } k = 1, \dots, r_i \quad (4.5.1)$$

Entonces, la representación del sistema en las coordenadas de error, resulta de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{e}_{k_i} &= e_{k_i+1}, \quad \text{para } k_i = 1, \dots, r_i - 1 \\ \dot{e}_{r_i} &= \dot{x}_{r_i} - \dot{y}_{di}^{(r_i-1)} = \dot{x}_{r_i} - y_{di}^{(r_i)} = \alpha_i(x_i) + \beta_i(x_i)u_i - y_{di}^{(r_i)} \end{aligned}$$

Reescribiendo en forma vectorial:

$$\dot{e}_i = A_i x_i + b_i \left[\alpha_i(x_i) + \beta_i(x_i)u_i - y_{di}^{(r_i)} \right] \quad (4.5.2)$$

y usando el control linealizante (4.2.3a) se tiene:

$$\dot{e}_i = A_i x_i + b_i \left[v_i - y_{di}^{(r_i)} \right] \quad (4.5.3)$$

Ahora, sea el control lineal:

$$v_i = -b_i^T S_i^{-1} e_i + y_{di}^{(r_i)} \quad (4.5.4)$$

donde la matriz S_i satisface la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \theta_i S_i + A_i S_i + S_i A_i^T &= b_i b_i^T \\ \theta_i > 0, \quad S_i = S_i^T > 0 \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

Entonces el sistema en coordenadas del error se convierte en:

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= A_i x_i + b_i \left[-b_i^T S_i^{-1} e_i + y_{di}^{(r_i)} - y_{di}^{(r_i)} \right] \\ \dot{e}_i &= \left(A_i - b_i b_i^T S_i^{-1} \right) e_i \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

Ahora ya resulta más sencillo interpretar el control aplicado al sistema (4.2.2), para esto, definimos el vector de dimensión m formado por las r_i -ésimas derivadas de las m señales de seguimiento deseadas:

$$y_d^{(r)} \triangleq \left[y_{d1}^{(r_1)}, y_{d2}^{(r_2)}, \dots, y_{dm}^{(r_m)} \right]^T$$

Sea el sistema (4.2.2) con el control linealizante (4.2.3), esto es, el sistema (4.2.4) linealizado sin incertidumbres, sea el error de seguimiento como se definió en (4.5.1), entonces el sistema total en coordenadas del error de seguimiento es:

$$\dot{e}_x = A e_x + B \left[v - y_d^{(r)} \right] \quad (4.5.7)$$

el subíndice x en e , se agregó para distinguir el error de seguimiento del error de observación. Sea el control lineal:

$$v = -B^T S_c^{-1} e_x + y_d^{(r)} \quad (4.5.8)$$

donde S_c satisface la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \theta_c S_c + A S_c + S_c A^T &= B B^T \\ \theta_c > 0, S_c &= S_c^T > 0 \end{aligned} \quad (4.5.9)$$

entonces se tiene el siguiente:

TEOREMA 2: Considere el sistema (4.2.2) con el control linealizante (4.2.3), sea el error de seguimiento definido como en (4.5.1). Entonces el control (4.5.8), donde S_c satisface la ecuación (4.5.9), hace al sistema que representa la dinámica del error de seguimiento sin incertidumbres (4.5.7), exponencialmente estable.

Prueba: Considere la siguiente función de Lyapunov:

$$V(e_x) = e_x^T S_c^{-1} e_x \quad (4.5.10)$$

Si aplicamos al sistema

$$\dot{e}_x = A e_x + B \left[v - y_d^{(r)} \right] \quad (4.5.11)$$

el control:

$$v = -B^T S_c^{-1} e_x + y_d^{(r)} \quad (4.5.12)$$

Entonces el sistema dinámico de error de seguimiento en lazo cerrado está dado por:

$$\dot{e}_x = \left(A - B B^T S_c^{-1} \right) e_x \quad (4.5.13)$$

donde S_c es solución de la ecuación (4.5.9).

Derivando la función de Lyapunov (4.5.10) con respecto al tiempo a lo largo de las trayectorias del sistema (4.5.13), se obtiene:

$$\dot{V}(e_x) = \dot{e}_x^T S_c^{-1} e_x + e_x^T S_c^{-1} \dot{e}_x$$

$$\dot{V}(e_x) = e_x^T \left(A^T S_c^{-1} - S_c^{-1} B B^T S_c^{-1} + S_c^{-1} A - S_c^{-1} B B^T S_c^{-1} \right) e_x \quad (4.5.14)$$

De (4.5.9), vemos que:

$$A^T S_c^{-1} + S_c^{-1} A - S_c^{-1} B B^T S_c^{-1} = -\theta_c S_c^{-1} \quad (4.5.15)$$

Substituyendo en (4.5.14), resulta que:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_x) &= e_x^T \left(-\theta_c S_c^{-1} - S_c^{-1} B B^T S_c^{-1} \right) e_x = -\theta_c e_x^T S_c^{-1} e_x - e_x^T S_c^{-1} B B^T S_c^{-1} e_x \\ \dot{V}(e_x) &\leq -\theta_c V(e_x) \end{aligned} \quad (4.5.16)$$

entonces:

$$V(e_x) \leq V(e_x(t_0)) e^{-\theta_c(t-t_0)} \quad (4.5.17)$$

Como $V(e_x)$ decrece exponencialmente, pero además, S_c resulta acotada tanto superior como inferiormente, se puede decir que existen constantes $\sigma_1 = \lambda_{\max}^{-1}(S_c) > 0$ y $\sigma_2 = \lambda_{\min}^{-1}(S_c) > 0$, tales que:

$$\sigma_2 \|e_x(t_0)\|^2 \geq V(e_x(t)) = e_x^T(t) S_c^{-1} e_x(t) \geq \sigma_1 \|e_x(t)\|^2, \quad \forall t \geq t_0 \quad (4.5.18)$$

Usando la desigualdad anterior en (4.5.17) se tiene:

$$\begin{aligned} \sigma_1 \|e_x(t)\|^2 &\leq \sigma_2 \|e_x(t_0)\|^2 e^{-\theta_c(t-t_0)} \\ \|e_x(t)\| &\leq \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} \|e_x(t_0)\| e^{-\frac{\theta_c}{2}(t-t_0)} \end{aligned} \quad (4.5.19)$$

Por lo tanto, como también se puede concluir de los teoremas de estabilidad de Lyapunov, deducimos que el error de seguimiento tiende a cero exponencialmente, en el dominio D . \square

4.6. SISTEMAS CON INCERTIDUMBRE Y ACOTAMIENTO FINAL UNIFORME DEL ERROR DE SEGUIMIENTO.

De manera similar al caso del observador, relajaremos las condiciones de nuestro problema y en lugar de buscar convergencia asintótica del error de seguimiento, pediremos únicamente que el error de seguimiento entre en una vecindad del cero en tiempo finito y permanezca al interior de ahí en adelante, esto es, deseamos *acotamiento final uniforme* del error de seguimiento.

Sea el sistema con incertidumbres (4.4.1), con el control linealizante (4.2.3). Sea la trayectoria deseada como se definió en la sección anterior, podemos ver que (4.4.1) difiere de (4.2.4) únicamente en el término $B\eta$, por lo tanto, podemos escribir el sistema dinámico de error de seguimiento (4.5.7) con el término de incertidumbre, como:

$$\dot{e}_x = Ae_x + B(v - y_d^{(r)}) + B\eta \quad (4.6.1)$$

y si aplicamos a este sistema, el control:

$$v = -B^T S_c^{-1} e_x + y_d^{(r)} \quad (4.6.2)$$

entonces resulta el siguiente teorema:

TEOREMA 3: Considere el sistema (4.2.2) y el control linealizante aproximado (4.2.5), sea el error de seguimiento definido como en (4.5.1). Si las hipótesis **H1)**-**H3)** se satisfacen, entonces el control (4.6.2), donde S_c satisface la ecuación (4.5.9) hace al sistema de error de seguimiento con incertidumbres (4.6.1) *uniformemente finalmente acotado*. Además, el radio de la hiperesfera de acotamiento final del error de seguimiento puede hacerse arbitrariamente pequeño con la apropiada selección de un único parámetro de diseño θ_c .

Prueba: Considere la misma función de Lyapunov utilizada para demostrar convergencia del sistema de error sin incertidumbres:

$$V(e_x) = e_x^T S_c^{-1} e_x \quad (4.6.3)$$

Aplicamos al sistema (4.6.1) el control (4.6.2) y se obtiene el sistema de error en lazo cerrado con incertidumbre:

$$\dot{e}_x = \left(A - BB^T S_c^{-1} \right) e_x + B\eta \quad (4.6.4)$$

Derivando la función de Lyapunov con respecto al tiempo a lo largo de las trayectorias del sistema anterior, se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_x) &= \dot{e}_x^T S_c^{-1} e_x + e_x^T S_c^{-1} \dot{e}_x \\ &= e_x^T \left(A^T S_c^{-1} - S_c^{-1} BB^T S_c^{-1} + S_c^{-1} A - S_c^{-1} BB^T S_c^{-1} \right) e_x + \eta^T B^T S_c^{-1} e_x + e_x^T S_c^{-1} B\eta \end{aligned}$$

Substituyendo (4.5.15) en $\dot{V}(e_x)$, resulta que:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_x) &= e_x^T \left(-\theta_c S_c^{-1} - S_c^{-1} BB^T S_c^{-1} \right) e_x + e_x^T S_c^{-1} B\eta + \eta^T B^T S_c^{-1} e_x \\ &\leq -\theta_c e_x^T S_c^{-1} e_x + e_x^T S_c^{-1} B\eta + \eta^T B^T S_c^{-1} e_x \end{aligned} \quad (4.6.5)$$

Aplicando a la desigualdad anterior la identidad matricial (4.4.8), seleccionando:

$$X = e_x^T (S_c^{-1})^{1/2}; \quad Y = \eta^T B^T (S_c^{-1})^{1/2}$$

se tiene:

$$\dot{V}(e_x) \leq -\theta_c e_x^T S_c^{-1} e_x + a_2 e_x^T S_c^{-1} e_x + \frac{1}{a_2} \eta^T B^T S_c^{-1} B\eta \quad (4.6.6)$$

$$\dot{V}(e_x) \leq -(\theta_c - a_2) e_x^T S_c^{-1} e_x + \frac{1}{a_2} \eta^T B^T S_c^{-1} B\eta \quad (4.6.7)$$

Reescribiendo en términos de normas, se obtiene:

$$\dot{V}(e_x) \leq -(\theta_c - a_2) \|e_x\|_{S_c^{-1}}^2 + \frac{1}{a_2} \|B\eta\|_{S_c^{-1}}^2 \quad (4.6.8)$$

donde $\|\cdot\|_{S_c^{-1}}$ denota la norma ponderada por la matriz S_c^{-1} . Eligiendo $\theta_c > a_2$, se puede escribir:

$$-(\theta_c - a_2) = -k_2; \quad k_2 > 0 \quad (4.6.9)$$

luego:

$$\dot{V}(e_x) \leq -k_2 \|e_x\|_{S_c^{-1}}^2 + \frac{1}{a_2} \|B\eta\|_{S_c^{-1}}^2 \quad (4.6.10)$$

De (4.6.10) puede verse que:

$$\text{Si } \|e_x\|_{S_c^{-1}}^2 > \frac{1}{k_2 a_2} \|B\eta\|_{S_c^{-1}}^2, \quad \text{entonces } \dot{V}(e_x) < 0. \quad (4.6.11)$$

$$\text{Si } \|e_x\|_{S_c^{-1}}^2 < \frac{1}{k_2 a_2} \|B\eta\|_{S_c^{-1}}^2, \quad \text{entonces } \dot{V}(e_x) > 0. \quad (4.6.12)$$

Utilizando la proposición 4.4.1, resulta que el factor constante $\frac{1}{k_2 a_2} = \frac{1}{(\theta_c - a_2) a_2}$, que es válido para $0 < a_2 < \theta_c$, tiene un mínimo en $a_2 = \frac{\theta_c}{2}$. Por lo tanto, las ecuaciones (4.6.11) y (4.6.12) se pueden reescribir como sigue:

$$\text{Si } \|e_x\|_{S_c^{-1}}^2 > \frac{4}{\theta_c^2} \|B\eta\|_{S_c^{-1}}^2, \quad \text{entonces } \dot{V}(e_x) < 0. \quad (4.6.13)$$

$$\text{Si } \|e_x\|_{S_c^{-1}}^2 < \frac{4}{\theta_c^2} \|B\eta\|_{S_c^{-1}}^2, \quad \text{entonces } \dot{V}(e_x) > 0. \quad (4.6.14)$$

Con esto queda demostrado que el error de seguimiento es **uniformemente finalmente acotado**, y el radio de la hiperesfera que lo acota depende de la norma de la incertidumbre

TEOREMA 4: Considerese el sistema Σ_{NL} de la figura 4.7.1 como se describe en (4.2.2), con el control linealizante estimado C dado por (4.2.5), en lazo cerrado con el observador O definido por (4.3.1)-(4.3.2) y además la ley de control L dada en (4.5.8)-(4.5.9), pero que depende del estado estimado en lugar del estado real, esto es:

$$v = -B^T S_c^{-1} e_{\hat{x}} + y_d^{(r)} \quad (4.7.1)$$

donde S_c satisface la ecuación:

$$\begin{aligned} \theta_c S_c + A S_c + S_c A^T &= B B^T \\ \theta_c > 0, \quad S_c &= S_c^T > 0 \end{aligned} \quad (4.7.2)$$

y el error de seguimiento estimado $e_{\hat{x}}$, se define para el i -ésimo subsistema y para cada estado en particular, como en (4.5.1) pero usando el estado estimado en lugar del estado real, esto es, en forma escalar:

$$e_{\hat{x}_k} \stackrel{\Delta}{=} \hat{x}_k - y_{di}^{(k-1)}, \quad \text{para } k = 1, \dots, r_i$$

o en forma vectorial:

$$e_{\hat{x}} = \left[e_{\hat{x}_1}, e_{\hat{x}_2}, \dots, e_{\hat{x}_{r_1}}, e_{\hat{x}_{r_1+1}}, \dots, e_{\hat{x}_{r_2}}, \dots, e_{\hat{x}_{r_m}} \right]^T \quad (4.7.3)$$

Si las hipótesis **H1)**-**H3)** se cumplen y la señal de referencia $y_d = \text{ref.}$ es suficientemente suave, entonces el sistema en lazo cerrado descrito por (4.2.2), (4.2.5), (4.3.1)-(4.3.2), (4.7.1)-(4.7.2), tal como se muestra en la figura 1, tiene un error de seguimiento **finalmente uniformemente acotado**. Además el radio de la hiperesfera de acotamiento final del error de seguimiento puede hacerse arbitrariamente pequeño con la apropiada selección de los parámetros de diseño del controlador θ_c y del observador θ_o .

Prueba: Definimos el error de observación de estado $e_o \stackrel{\Delta}{=} x - \hat{x}$ como en (4.3.3), de donde, para toda $k = 1, \dots, r_i$ y toda $i = 1, \dots, m$, se tiene:

$$\hat{x}_k = x_k - e_{o_k} \quad (4.7.4)$$

substituyendo (4.7.4) en (4.7.3) se tiene:

$$e_{\hat{x}_k} = x_k - e_{o_k} - y_{di}^{(k-1)} = e_{x_k} - e_{o_k} \quad (4.7.5)$$

o en forma vectorial simplemente:

$$e_{\hat{x}} = e_x - e_o \quad (4.7.6)$$

Si aplicamos al sistema (4.6.1) el control (4.7.1) se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= Ae_x + B(v - y_d^{(r)}) + B\eta \\ &= Ae_x + B(-B^T S_c^{-1} e_{\hat{x}} + y_d^{(r)} - y_d^{(r)}) + B\eta \\ \dot{e}_x &= Ae_x - BB^T S_c^{-1} e_{\hat{x}} + B\eta \end{aligned} \quad (4.7.7)$$

Substituimos (4.7.6) en la ecuación (4.7.7) para obtener:

$$\dot{e}_x = (A - BB^T S_c^{-1})e_x + BB^T S_c^{-1}e_o + B\eta \quad (4.7.8)$$

y usando (4.4.4) podemos escribir el sistema aumentado:

$$\begin{cases} \dot{e}_x = (A - BB^T S_c^{-1})e_x + BB^T S_c^{-1}e_o + B\eta \\ \dot{e}_o = (A - S_o^{-1} C^T C)e_o + B\eta \end{cases} \quad (4.7.9)$$

Para este sistema, definimos la siguiente función de Lyapunov:

$$V(e_x, e_o) = V_1(e_x) + V_2(e_o) = e_x^T S_c^{-1} e_x + e_o^T S_o e_o$$

En la sección 4.4 se demostró la acotabilidad final uniforme para el error de observación e_o , por lo tanto, para concluir la acotabilidad final uniforme del sistema aumentado, solo resta obtener un resultado similar para el error de seguimiento e_x tal como se define en (4.7.8), es decir, demostrar que el error de seguimiento entra en una vecindad de $e_x = 0$ en tiempo finito y permanece al interior de ahí en adelante, o sea que el error de seguimiento también es *finalmente uniformemente acotado*, para demostrarlo tomamos de la función de Lyapunov, la función positiva semidefinida $V_1(e_x)$:

$$V_1(e_x) = e_x^T S_c^{-1} e_x \quad (4.7.10)$$

Derivando (4.7.10) a lo largo de las trayectorias del sistema se obtiene:

$$\dot{V}_1(e_x) = \dot{e}_x^T S_c^{-1} e_x + e_x^T S_c^{-1} \dot{e}_x \quad (4.7.11)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(e_x) &= \left[(A - BB^T S_c^{-1}) e_x + BB^T S_c^{-1} e_o + B\eta \right]^T S_c^{-1} e_x + \\ &\quad + e_x^T S_c^{-1} \left[(A - BB^T S_c^{-1}) e_x + BB^T S_c^{-1} e_o + B\eta \right] \\ \dot{V}_1(e_x) &= e_x^T (A^T S_c^{-1} - S_c^{-1} BB^T S_c^{-1}) e_x + e_o^T S_c^{-1} BB^T S_c^{-1} e_x + \eta^T B^T S_c^{-1} e_x + \\ &\quad + e_x^T (S_c^{-1} A - S_c^{-1} BB^T S_c^{-1}) e_x + e_x^T S_c^{-1} BB^T S_c^{-1} e_o + e_x^T S_c^{-1} B\eta \end{aligned} \quad (4.7.12)$$

de (4.7.2) se tiene:

$$\begin{aligned} S_c^{-1} \left[\theta_c S_c + A S_c + S_c A^T - BB^T \right] S_c^{-1} \\ - \theta_c S_c^{-1} = S_c^{-1} A + A^T S_c^{-1} - S_c^{-1} BB^T S_c^{-1} \end{aligned} \quad (4.7.13)$$

Substituyendo (4.7.13) en (4.7.12) se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(e_x) &= -\theta_c e_x^T S_c^{-1} e_x - e_x^T S_c^{-1} BB^T S_c^{-1} e_x + e_x^T S_c^{-1} B\eta + \\ &\quad + \eta^T B^T S_c^{-1} e_x + e_o^T S_c^{-1} BB^T S_c^{-1} e_x + e_x^T S_c^{-1} BB^T S_c^{-1} e_o \end{aligned} \quad (4.7.14)$$

Aplicamos a (4.7.14) la identidad matricial (4.4.8), definiendo las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} X_1 &= e_x^T S_c^{-1} B, & Y_1 &= e_o^T S_c^{-1} B \\ X_2 &= e_x^T (S_c^{-1})^{1/2}, & Y_2 &= \eta^T B^T (S_c^{-1})^{1/2} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(e_x) &\leq -(\theta_c - a_2) e_x^T S_c^{-1} e_x - (1 - a_1) e_x^T S_c^{-1} B B^T S_c^{-1} e_x + \\ &+ \frac{1}{a_1} e_o^T S_c^{-1} B B^T S_c^{-1} e_o + \frac{1}{a_2} \eta^T B^T S_c^{-1} B \eta \end{aligned} \quad (4.7.15)$$

donde $a_1 > 0$, $a_2 > 0$.

Si escogemos $a_1 < 1$ en (4.7.15) entonces:

$$\dot{V}_1(e_x) \leq -(\theta_c - a_2) e_x^T S_c^{-1} e_x + \frac{1}{a_1} e_o^T S_c^{-1} B B^T S_c^{-1} e_o + \frac{1}{a_2} \eta^T B^T S_c^{-1} B \eta \quad (4.7.16)$$

Intuitivamente puede verse que si e_o es *uniformemente finalmente acotado*, como ya se demostró en la sección 4.4, entonces e_x es *uniformemente finalmente acotado* puesto que para un determinado tiempo T_o finito $\|e_o\| \leq \sigma$ y el resultado se puede extender directamente de (4.6.13)-(4.6.14), es decir:

$$\frac{1}{a_1} e_o^T S_c^{-1} B B^T S_c^{-1} e_o \leq \sigma, \quad \forall t \geq T_o \quad (4.7.17)$$

entonces se puede decir que para todo $t \geq T_o$:

$$\text{Si } \|e_x\|_{S_c^{-1}}^2 > \frac{1}{a_2(\theta_c - a_2)} \|B\eta\|_{S_c^{-1}}^2 + \frac{\sigma}{(\theta_c - a_2)} \quad \text{entonces } \dot{V}(e_x) < 0 \quad (4.7.18)$$

$$\text{Si } \|e_x\|_{S_c^{-1}}^2 \leq \frac{1}{a_2(\theta_c - a_2)} \|B\eta\|_{S_c^{-1}}^2 + \frac{\sigma}{(\theta_c - a_2)} \quad \text{entonces } \dot{V}(e_x) \geq 0 \quad (4.7.19)$$

Con esto queda demostrado que en el sistema de la figura 4.7.1, con las condiciones dadas por el teorema 4, el error de seguimiento es *uniformemente finalmente acotado* y el radio de la hipersfera o de la región que lo acota depende de la norma de la incertidumbre y de las ganancias del observador y del controlador. De forma similar al resultado del observador, puede verse que el valor final del error de seguimiento puede aproximarse a cero tanto como se desee, aumentando las ganancias tanto del controlador como del observador.

□

CAPITULO 5

APLICACIONES Y SIMULACIONES

5.1. MODELO DEL ROBOT MANIPULADOR DE N GRADOS DE LIBERTAD.

Para los propósitos de diseño de controladores se utiliza el modelo matemático del robot derivado de las ecuaciones de Lagrange del movimiento, para esto se requiere primero obtener las energías cinética y potencial del manipulador.

La *energía cinética* de una masa m moviéndose con una velocidad lineal v es

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

La *energía cinética rotacional* de una masa que se mueve a velocidad angular ω es

$$K_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

donde el momento de inercia I está dado por

$$I = \int_{vol} \rho(r)r^2 dr$$

con $\rho(r)$ la distribución de masa al radio r en un volumen.

La *energía potencial* de una masa m a una altura h en un campo gravitacional con constante g está dada por

$$P = mgh$$

Las *ecuaciones de Lagrange del movimiento* para un sistema conservativo están dadas por

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau$$

donde q es un vector de dimensión n de coordenadas generalizadas q_i , τ es un vector de dimensión n de fuerzas generalizadas τ_i , y el *Lagrangiano* es la diferencia entre las energías cinética y potencial

$$L = K - P$$

En la representación utilizada en los ejemplos siguientes, q será el vector de variables de articulación, consistente de ángulos de articulación θ_i (en grados o radianes). τ es un vector que tiene n_i componentes de torque (newton-metros). Esta forma se conoce como la representación en coordenadas de las articulaciones del robot, y es la manera más común de representar un sistema mecánico para fines de control; otra pudiera ser la representación en coordenadas cartesianas, o en cualesquier otro sistema de coordenadas.

Utilizando las ecuaciones de Lagrange del movimiento, el modelo del robot se puede expresar en la forma estandard

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)$$

donde τ es el vector de fuerzas generalizadas, $M(q)$ es la matriz de inercias positiva definida, $C(q, \dot{q})$ es la matriz que agrupa las fuerzas de Coriolis/Centripetas y $G(q)$ es el vector que agrupa los términos gravitacionales.

El modelo del robot tiene la propiedad de que la matriz $\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$ es antisimétrica (ver [6], [11]).

5.2. SIMULACION DE UN ROBOT DE 2 GRADOS DE LIBERTAD.

En este ejemplo se muestra el desempeño del controlador propuesto cuando se asume que el estado completo es medido. Considérese el modelo de un robot de dos grados de libertad, con la definición del problema como sigue:

q : Vector de posiciones de las articulaciones.

q_d : Trayectoria deseada.

$e_1 = q - q_d$: Error de seguimiento de posición.

$e_2 = \dot{q} - \dot{q}_d$: Error de seguimiento de velocidad.

$M(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) = u$: Modelo real.

$\hat{M}(q)\ddot{q} + \hat{h}(q, \dot{q}) = u$: Modelo estimado.

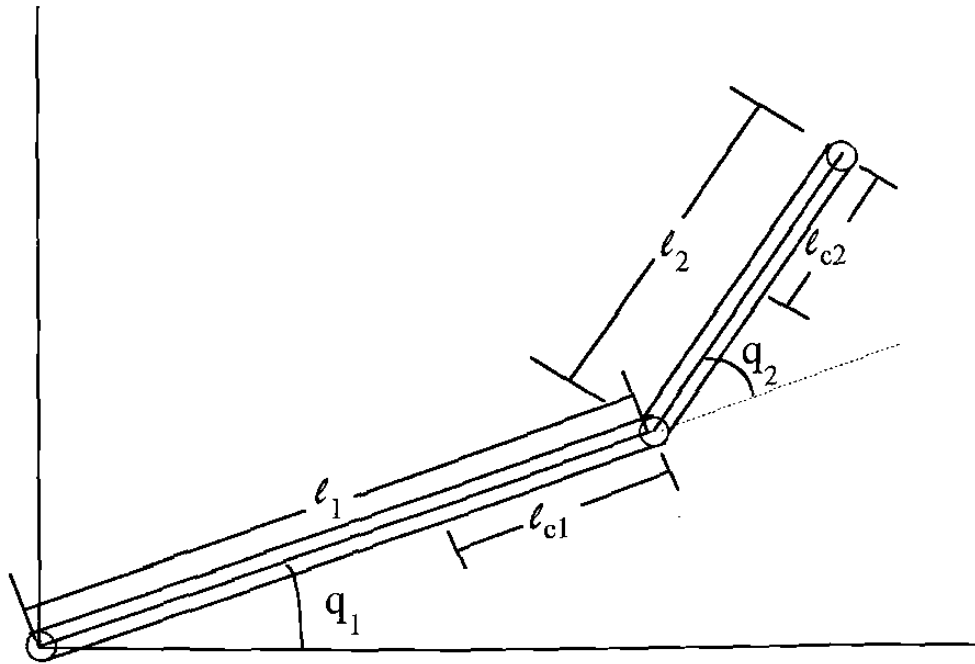


Figura 5.2.1.- Robot de dos grados de libertad.

y con los siguientes valores: $l_1=0.45\text{m}$., $m_1=100\text{kg}$., $l_{c1}=-0.15\text{m}$., $I_1=6.25\text{Kg}\cdot\text{m}^2$, $J_1=4.77\text{Kg}\cdot\text{m}^2$, $l_2=0.45\text{m}$, $m_2=25\text{kg}$, $l_{c2}=-0.10\text{m}$., $I_2=0.61\text{kg}\cdot\text{m}^2$, $J_2=3.58\text{kg}\cdot\text{m}^2$.

Entonces, las matrices del modelo del robot quedan de la siguiente forma:

$$M(q) = \begin{pmatrix} 21.1725 + 2.25 \cos(q_2) & 0.86 + 1.125 \cos(q_2) \\ 0.86 + 1.125 \cos(q_2) & 0.86 \end{pmatrix}$$

$$C(q, \dot{q})\dot{q} = \begin{pmatrix} -1.125 \dot{q}_2 \sin(q_2) [2\dot{q}_1 + \dot{q}_2] \\ 1.125 \dot{q}_1^2 \sin(q_2) \end{pmatrix}$$

$$G(q) = \begin{pmatrix} 404.6625 \cos(q_1) + 24.5 \cos(q_1 + q_2) \\ 24.5 \cos(q_1 + q_2) \end{pmatrix}$$

Un control linealizante para este sistema es:

$$u = \hat{M}(q)[\ddot{q}_d + v] + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \hat{G}(q) = \hat{M}(q)[\ddot{q}_d + v] + \hat{h}(q, \dot{q})$$

Por consiguiente, el sistema con el control linealizante se reduce a:

$$\dot{e} = Ae + Bv + B\eta$$

$$y = Cx, \quad x = [q_1 \quad \dot{q}_1 \quad q_2 \quad \dot{q}_2]^T$$

donde:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y η es la matriz que agrupa los términos de incertidumbre:

$$\eta = M^{-1}(\hat{h} - h) + M^{-1}(\hat{M} - M)(\ddot{q}_d + v)$$

Aplicamos el control dado por (4.5.8)-(4.5.9), esto es:

$$v = -B^T S_c^{-1} e + y_d^{(r)}$$

donde S_c satisface la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \theta_c S_c + A S_c + S_c A^T &= B B^T \\ \theta_c > 0, \quad S_c &= S_c^T > 0 \end{aligned}$$

Entonces el sistema retroalimentado es:

$$\dot{e} = (A - B B^T S_c^{-1}) e + B \eta$$

Resolviendo S_c en la ecuación de Lyapunov (4.5.9) como corresponde tenemos:

$$S_c = \begin{pmatrix} \frac{2}{\theta_c^3} & \frac{-1}{\theta_c^2} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{\theta_c^2} & \frac{1}{\theta_c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\theta_c^3} & \frac{-1}{\theta_c^2} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\theta_c^2} & \frac{1}{\theta_c} \end{pmatrix}$$

Resultados de simulación:

Para la simulación en computadora del sistema compuesto por el controlador más el robot, se consideró que el modelo estimado del robot para el cálculo del control linealizante presentaba un error del 20%, y se obtuvieron los resultados que se muestran en las siguientes gráficas, para un valor de $\theta_c = 50$.

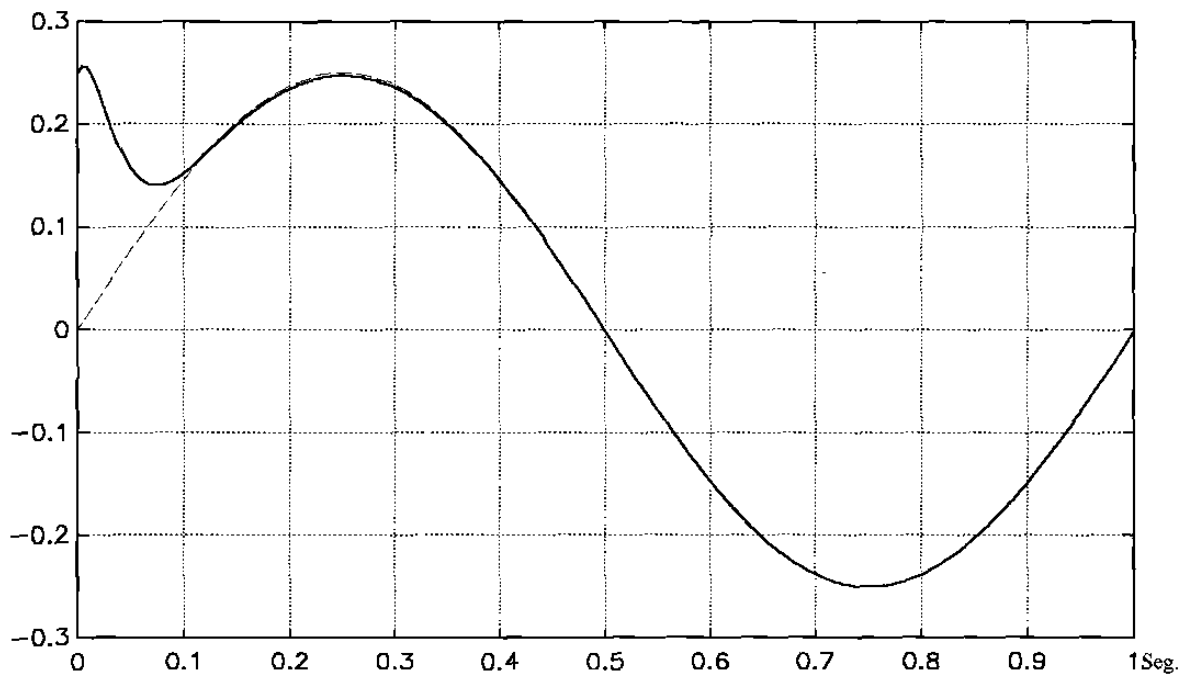


Figura 5.2.2.- Trayectoria de referencia (en trazo punteado) y trayectoria real (trazo continuo) seguida por la articulación 1, a la trayectoria real se le dió una condición inicial de 0.25.

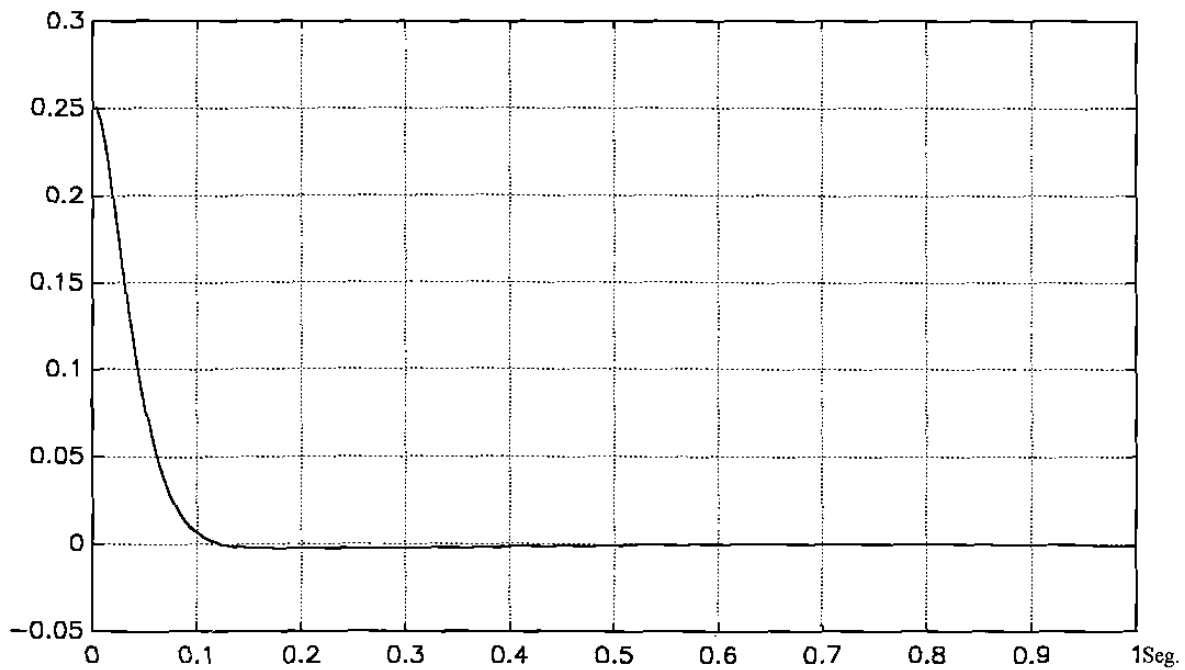


Figura 5.2.3.- Error en el seguimiento de la trayectoria de referencia para la articulación 1, es la diferencia entre la trayectoria deseada y la trayectoria real seguida por la articulación.

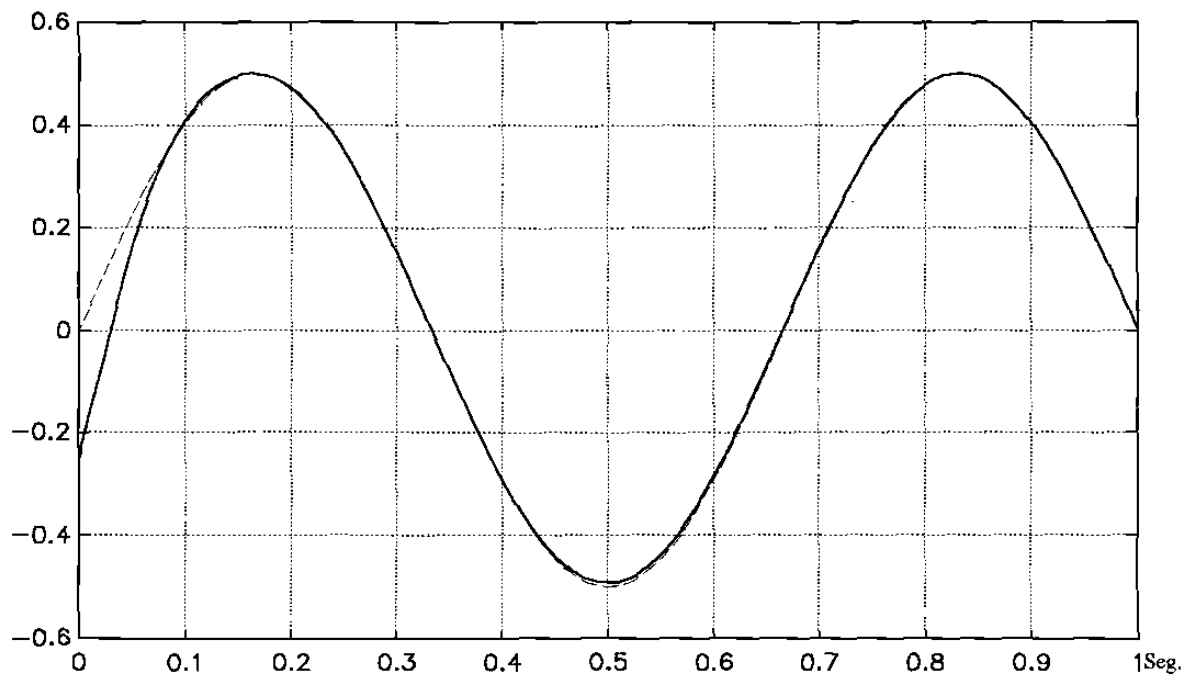


Figura 5.2.4.- Trayectoria de referencia (trazo punteado) y trayectoria real (en trazo continuo) seguida por la articulación 2, a la trayectoria real se le dió una condición inicial de -0.25.

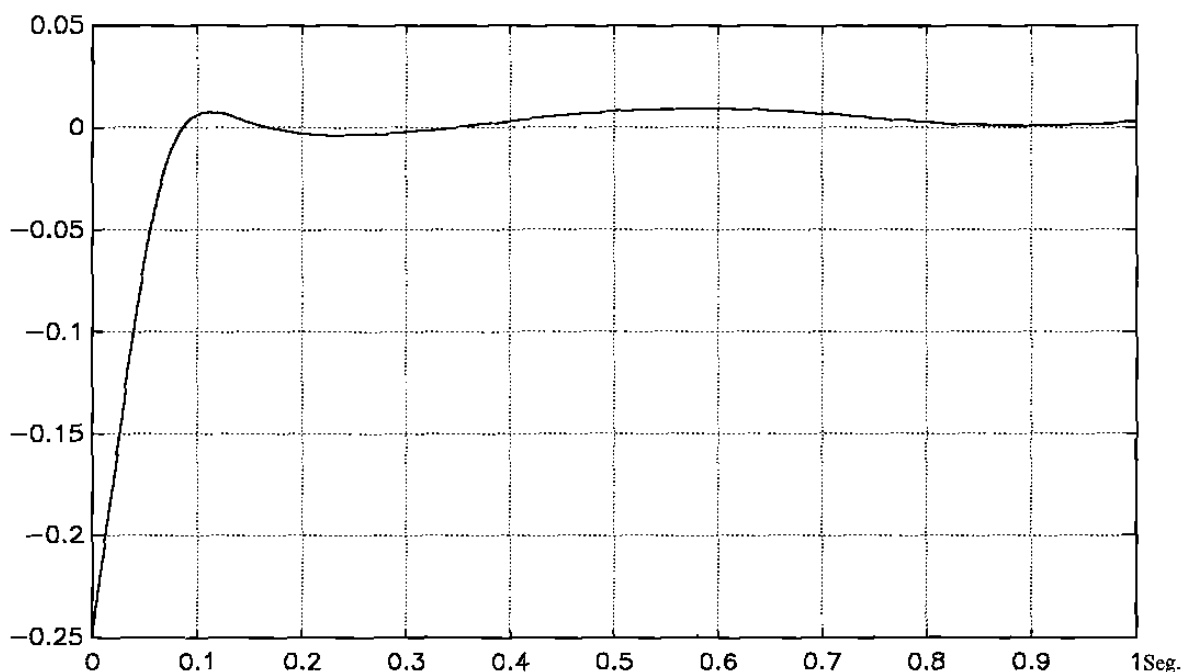


Figura 5.2.5.- Error en el seguimiento de la trayectoria de referencia para la articulación 2.

En todas las gráficas, la escala vertical está en radianes y la escala horizontal está en segundos.

En este ejemplo se aplicó por simplicidad un mismo valor de θ_c a todo el sistema, sin embargo lo más adecuado es separar el modelo en varios subsistemas, y entonces a cada subsistema resultante con una entrada y una salida, aplicar el método de control, como resultado se obtiene un controlador por cada entrada-salida desacoplada la cual tendrá un valor específico de cota superior de la incertidumbre; esto significa que pueden aplicarse ganancias diferentes a cada línea de control para ajustar el efecto total, con esto se logra tener un parámetro de ajuste θ_c para calibrar la precisión de seguimiento de cada entrada-salida desacoplada, o en el caso del robot, de cada articulación.

5.3. SIMULACION DE UN ROBOT PUMA 560.

En este ejemplo de aplicación, se utiliza el modelo del robot manipulador industrial PUMA 560 tal como aparece reproducido en [6], se asume que la dinámica del robot está dada por:

$$\tau = M(q)\ddot{q} + N(q, \dot{q})$$

donde la matriz $M(q)$ es simétrica y positiva definida con elementos $m_{ij}(q)$, esto es,

$$M(q) = [m_{ij}(q)]_{n \times n} \quad i, j = 1, \dots, n$$

$$m_{ij}(q) = m_{ji}(q)$$

y $N(q, \dot{q})$ es un vector $n \times 1$ con elementos n_i , esto es,

$$N(q, \dot{q}) = [n_i(q, \dot{q})]_{n \times 1}$$

Los términos de gravedad son identificados en la expresión de n_i por la constante de gravedad $g = 9.8 \text{ metros/seg}^2$. Además se adoptará la siguiente notación compacta:

L_i Longitud del eslabón i en metros

m_i Masa del eslabón i en kilogramos

I_{uuu} Momento de inercia del eslabón i alrededor del eje u en $kg \cdot m \cdot m$

$S_i = \text{sen}(q_i)$ y $C_i = \text{cos}(q_i)$

$S_{ij} = \text{sen}(q_i + q_j)$ y $C_{ij} = \text{cos}(q_i + q_j)$

$S_{ijk} = \text{sen}(q_i + q_j + q_k)$ y $C_{ijk} = \text{cos}(q_i + q_j + q_k)$

$SS_i = \text{sen}^2(q_i)$, $CC_i = \text{cos}^2(q_i)$ y $CS_i = \text{cos}(q_i)\text{sen}(q_i)$

$SS_{ij} = \text{sen}^2(q_i + q_j)$

Ecuaciones y parámetros del modelo:

$$m_{11} = 2.57 + 1.38CC_2 + 0.3SS_{23} + 0.744C_2S_{23}$$

$$m_{12} = 0.69S_2 - 0.134C_{23} + 0.0238C_2$$

$$m_{13} = -0.134C_{23} - 0.00397S_{23}$$

$$m_{14} = 0$$

$$m_{15} = 0$$

$$m_{16} = 0$$

$$m_{22} = 6.79 + 0.744S_3$$

$$m_{23} = 0.333 + 0.372S_3 - 0.011C_3$$

$$m_{24} = 0$$

$$m_{25} = 0$$

$$m_{26} = 0$$

$$m_{33} = 1.16$$

$$m_{34} = -0.00125S_4S_5$$

$$m_{35} = -0.00125C_4C_5$$

$$m_{36} = 0$$

$$m_{44} = 0.2$$

$$m_{45} = 0$$

$$m_{46} = 0$$

$$m_{55} = 0.18$$

$$m_{56} = 0$$

$$m_{66} = 0.19$$

$$\begin{aligned} n_1 = & [0.69C_2 + 0.134S_{23} - 0.0238S_2] \dot{q}_2^2 + [0.1335S_{23} - 0.00379C_{23}] \dot{q}_3^2 \\ & + [-2.76SC_2 + 0.744C_{223} + 0.6SC_{23} - 0.0213(1 - 2SS_{23})] \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ & + [0.744C_2C_{23} + 0.6SC_{23} + 0.022C_2S_{23} - 0.0213(1 - 2SS_{23})] \dot{q}_1 \dot{q}_3 \\ & + [-0.0025SC_{23}S_4S_5 + 0.00086C_4S_5 - 0.00248C_2C_{23}S_4S_5] \dot{q}_1 \dot{q}_4 \\ & + [-0.0025(SS_{23}S_5 - SC_{23}C_4C_5) - 0.00248C_2(S_{23}S_5 - C_{23}C_4C_5) \\ & \quad + 0.000864S_4C_5] \dot{q}_1 \dot{q}_5 \\ & + [0.267S_{23} - 0.00758C_{23}] \dot{q}_2 \dot{q}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_2 = & -\frac{1}{2} [-2.76SC_2 + 0.744C_{223} + 0.6SC_{23} - 0.0213(1 - 2SS_{23})] \dot{q}_1^2 \\ & + \frac{1}{2} [0.022S_3 + 0.744C_3] \dot{q}_3^2 + [0.00164S_{23} - 0.0025C_{23}C_4S_5 \\ & \quad + 0.00248S_2C_4C_5 + 0.00003S_{23}(1 - 2SS_4)] \dot{q}_1 \dot{q}_4 \\ & + [-0.00215C_{23}S_4C_5 + 0.00248S_2S_4C_5 - 0.000642C_{23}S_4] \dot{q}_1 \dot{q}_5 \\ & + [0.022S_3 + 0.744C_3] \dot{q}_2 \dot{q}_3 - [0.00248C_3S_4S_5] \dot{q}_2 \dot{q}_4 \\ & + [-0.0025S_5 + 0.00248(C_3C_4C_5 - S_3S_5)] \dot{q}_2 \dot{q}_5 - [0.00248C_3S_4S_5] \dot{q}_3 \dot{q}_4 \\ & + [-0.0025S_5 + 0.00248(C_3C_4C_5 - S_3S_5)] \dot{q}_3 \dot{q}_5 - 37.2C_2 - 8.4S_{23} + 1.02S_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_3 = & -\frac{1}{2} [-2.76SC_2 + 0.744C_{223} + 0.6SC_{23} - 0.0213(1 - 2SS_{23})] \dot{q}_1^2 \\ & -\frac{1}{2} [0.022S_3 + 0.744C_3] \dot{q}_2^2 - [0.00125C_4S_5] \dot{q}_5^2 - [0.00125C_4S_5] \dot{q}_4^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [-0.0025C_{23}C_4S_5 + 0.00164S_{23} + 0.0003S_{23}(1 - 2SS_4)]\dot{q}_1\dot{q}_4 \\
& - [0.0025C_{23}S_4C_5 + 0.000642C_{23}S_4]\dot{q}_1\dot{q}_5 - [0.0025S_5]\dot{q}_2\dot{q}_5 \\
& - [0.0025S_5]\dot{q}_3\dot{q}_5 - [0.0025S_4C_5]\dot{q}_4\dot{q}_5 - 8.4S_{23} + 0.25C_{23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_4 = & \frac{1}{2}[0.0025SC_{23}S_4S_5 - 0.00086C_4S_5 + 0.00248C_2C_{23}S_4S_5]\dot{q}_1^2 \\
& - \frac{1}{2}[0.00248C_3S_4S_5]\dot{q}_2^2 + [0.00164S_{23} - 0.0025C_{23}C_4S_5 + 0.00248S_2C_4S_5 \\
& + 0.0003S_{23}(1 - 2SS_4)]\dot{q}_1\dot{q}_2 \\
& + [0.0025C_{23}C_4S_5 - 0.00164S_{23} - 0.003S_{23}(1 - 2SS_4)]\dot{q}_1\dot{q}_3 \\
& - [0.000642S_{23}C_4]\dot{q}_1\dot{q}_5 + [0.000642S_4]\dot{q}_2\dot{q}_5 + [0.000642S_4]\dot{q}_3\dot{q}_5 \\
& + 0.028S_{23}S_4S_5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_5 = & \frac{1}{2}[0.0025(SS_{23}S_5 - SC_{23}C_4C_5) + 0.00248C_2(S_{23}S_5 - C_{23}C_4C_5) \\
& - 0.000864S_4C_5]\dot{q}_1^2 \\
& - \frac{1}{2}[0.0025S_5 - 0.00248(C_3C_4C_5 - S_3S_5)]\dot{q}_2^2 \\
& + [0.0026C_{23}S_4C_5 - 0.00248S_2S_4C_5 + 0.000642C_{23}S_4]\dot{q}_1\dot{q}_2 \\
& + [0.0025C_{23}S_4C_5 + 0.000642C_{23}S_4]\dot{q}_1\dot{q}_3 + [0.000642S_{23}C_4]\dot{q}_1\dot{q}_4 \\
& - [0.000642S_4]\dot{q}_2\dot{q}_4 - [0.000642S_4]\dot{q}_3\dot{q}_4 - 0.028(C_{23}S_5 + S_{23}C_4C_5)
\end{aligned}$$

$$n_6 = 0.$$

En este caso, al igual que en el ejemplo de la sección anterior, se asume que todo el estado está disponible para medición, tal como sucede con el robot real. Por lo tanto no se aplicará el observador y solo se efectuarán los cálculos necesarios para encontrar el controlador.

Resolviendo la ecuación (4.5.9) correspondiente, resulta que la matriz de ganancias del controlador, de dimensión 12 X 12, es una matriz diagonal a bloques formada por 6 bloques muy sencillos de dimensión 2 X 2 que son independientes entre sí, mientras que el resto de los elementos es cero.

Este resultado se debe a la forma particular que tiene el modelo del sistema mecánico al ser llevado a su representación en variables de estado. Entonces, la matriz de ganancias del controlador para un sistema mecánico obtenido a partir de las ecuaciones de Lagrange, se puede obtener, en forma general, como una matriz formada por bloques diagonales de dimensión 2 X 2, cada bloque correspondiendo a las variables de estado de una articulación, como se muestra a continuación:

$$S_c = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\theta_c^3} \\ \frac{-1}{\theta_c^2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{-1}{\theta_c^2} \\ \frac{1}{\theta_c} \end{pmatrix} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \begin{pmatrix} \frac{-1}{\theta_c^2} \\ \frac{1}{\theta_c} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta_c} \\ \theta_c \end{pmatrix} & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & \dots & & & & \\ 0 & 0 & & & \dots & & & & \\ \vdots & \vdots & & & \dots & & & & \\ \vdots & \vdots & & & \dots & & & & \\ 0 & 0 & & & \dots & & & \begin{pmatrix} \frac{2}{\theta_c^3} \\ \frac{-1}{\theta_c^2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{-1}{\theta_c^2} \\ \frac{1}{\theta_c} \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \begin{pmatrix} \frac{-1}{\theta_c^2} \\ \frac{1}{\theta_c} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta_c} \\ \theta_c \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

En las gráficas de simulaciones que se muestran a continuación, se multiplicaron las matrices de inercias, Coriolis y gravedad, por un factor de 0.9, con el fin de introducir una variación paramétrica en el modelo usado para calcular el control linealizante.

El sistema se simuló usando el paquete Simulink™, con un valor de $\theta_c = 30$ para todos los bloques. Las articulaciones 1 y 2 tienen una trayectoria de referencia senoidal, la articulación 3 tiene una referencia constante de 1, mientras que las articulaciones 4 y 5, tienen una referencia cero pero con una condición inicial distinta de cero, igual que las articulaciones 1 y 2, esto es, el vector de posiciones iniciales es $q_0 = [1.5 \ 1 \ 0 \ .05 \ -.05 \ .075]^T$. En las gráficas de seguimiento de trayectoria y error de seguimiento de trayectoria, la escala vertical está en radianes y la escala horizontal esta en segundos. En las gráficas de seguimiento de velocidad, la escala vertical está en radianes/segundo y la escala horizontal esta en segundos.

Gráficas de posiciones de referencia y posiciones de las articulaciones.

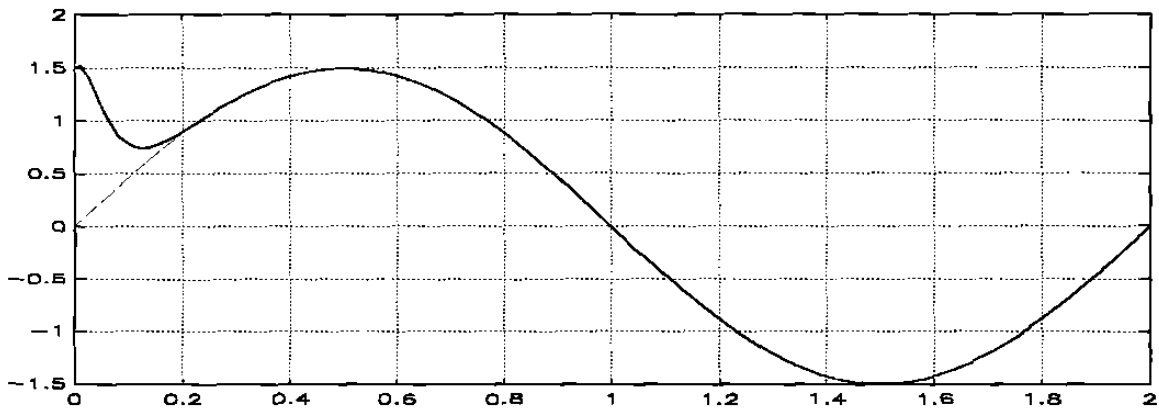


Figura 5.3.1.- Trayectoria de referencia (trazo punteado) y trayectoria real (trazo continuo) seguida por la articulación 1, a la trayectoria real se le dió una condición inicial de 1.5.

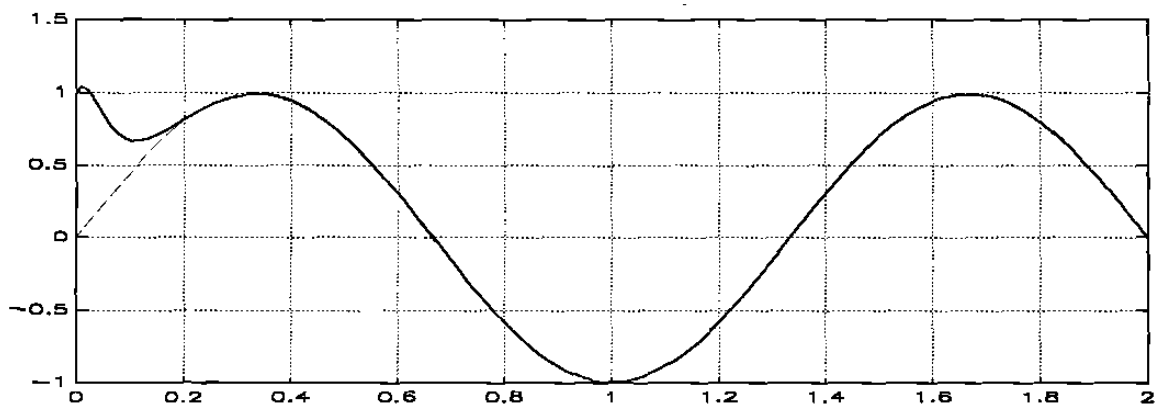


Figura 5.3.2.- Trayectoria de referencia (trazo punteado) y trayectoria real (trazo continuo) seguida por la articulación 2, a la trayectoria real se le dió una condición inicial de 1.

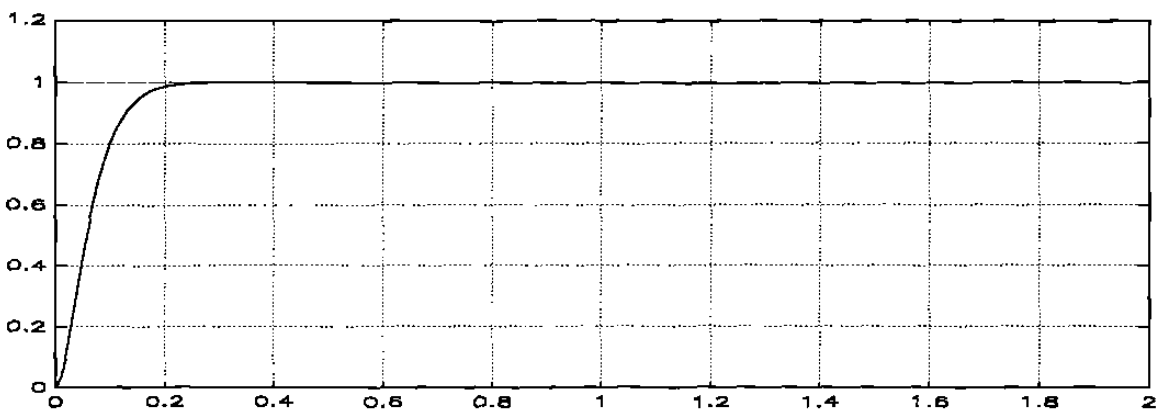


Figura 5.3.3.- Trayectoria de referencia (trazo punteado) y trayectoria real (trazo continuo) seguida por la articulación 3, la condición inicial para la trayectoria real en este caso fué cero.

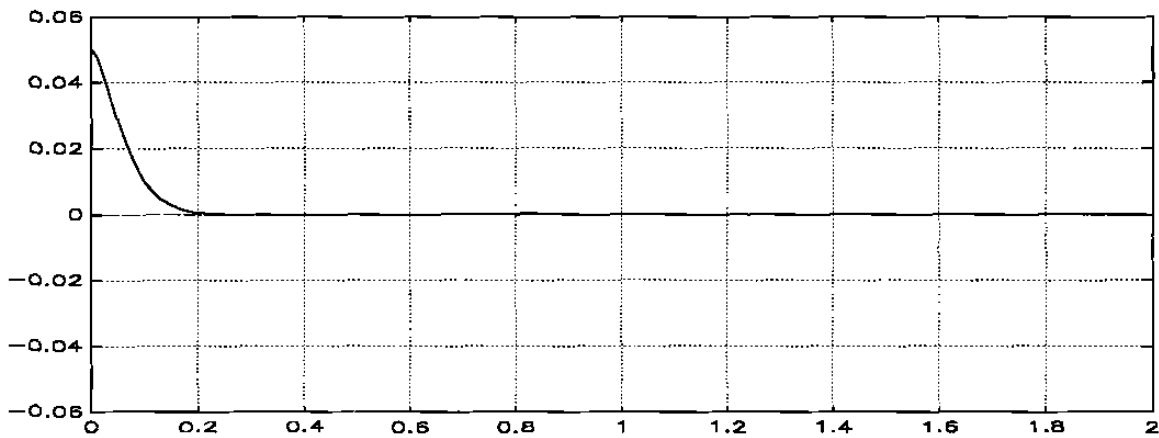


Figura 5.3.4.- Trayectoria de referencia (trazo punteado) y trayectoria real (trazo continuo) seguida por la articulación 4.

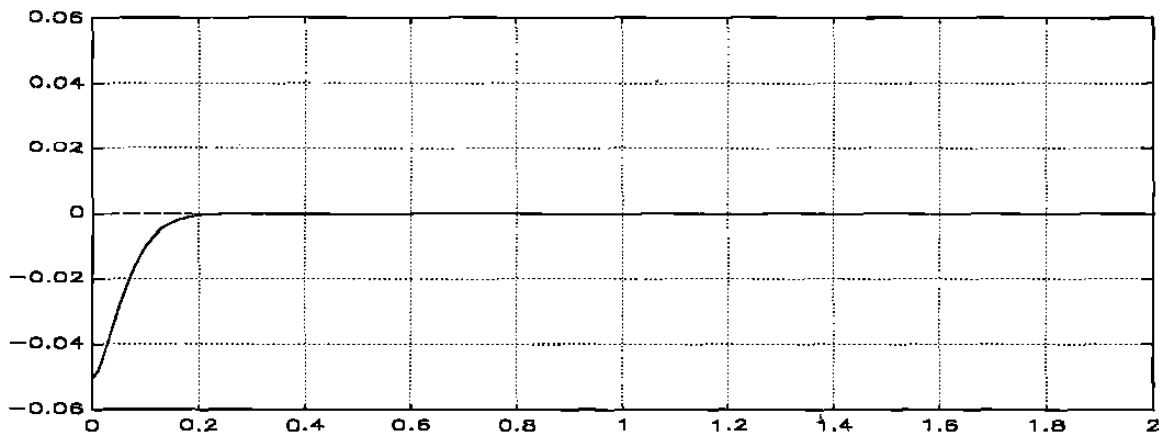


Figura 5.3.5.- Trayectoria de referencia (trazo punteado) y trayectoria real (trazo continuo) seguida por la articulación 5.

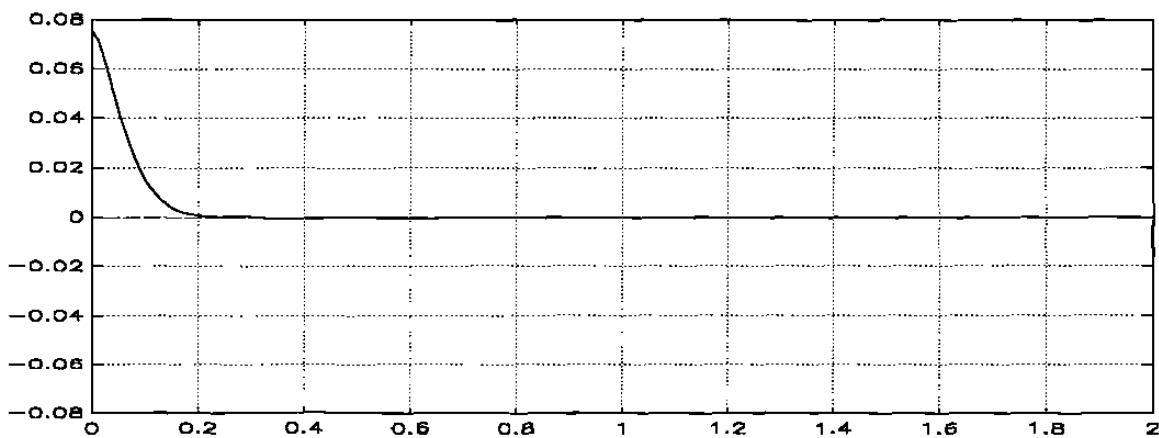


Figura 5.3.6.- Trayectoria de referencia (trazo punteado) y trayectoria real (trazo continuo) seguida por la articulación 6.

Gráficas de error en el seguimiento de las trayectorias de referencia.

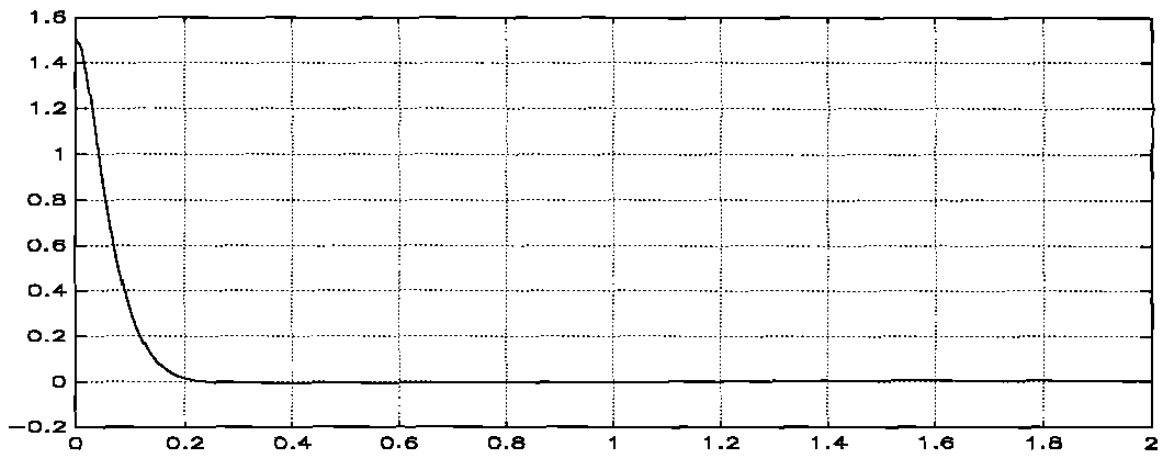


Figura 5.3.7.- Error en el seguimiento de la trayectoria para la articulación 1.

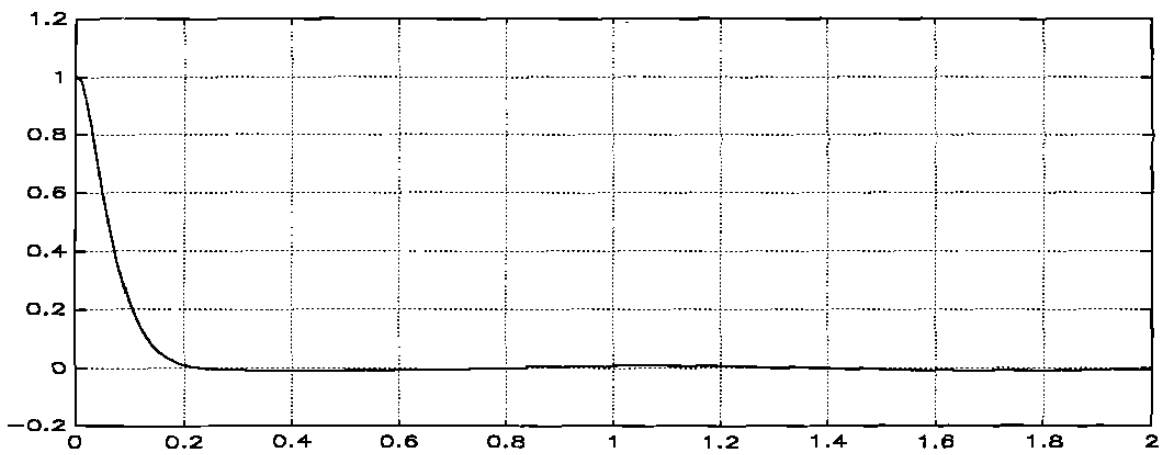


Figura 5.3.8.- Error en el seguimiento de la trayectoria para la articulación 2.

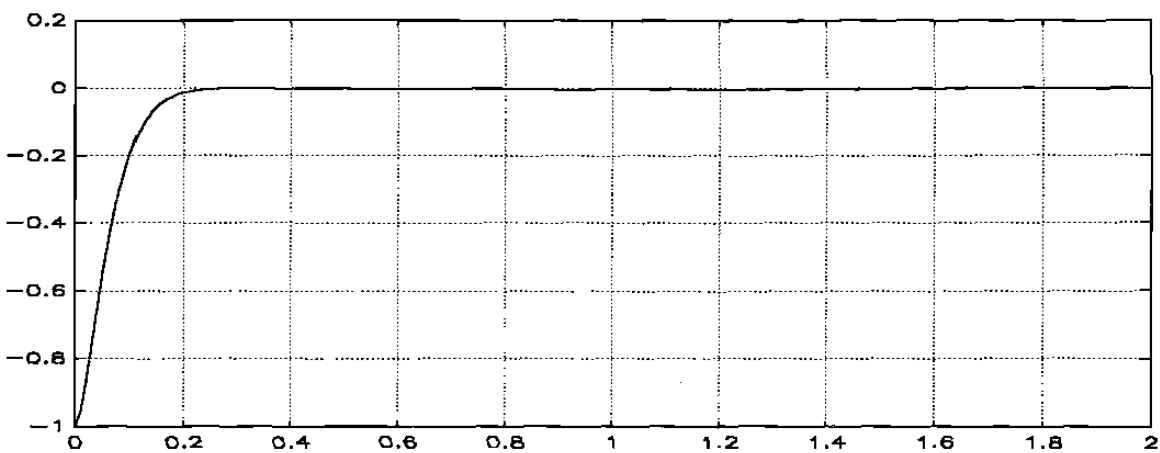


Figura 5.3.9.- Error de seguimiento de trayectoria para la articulación 3.

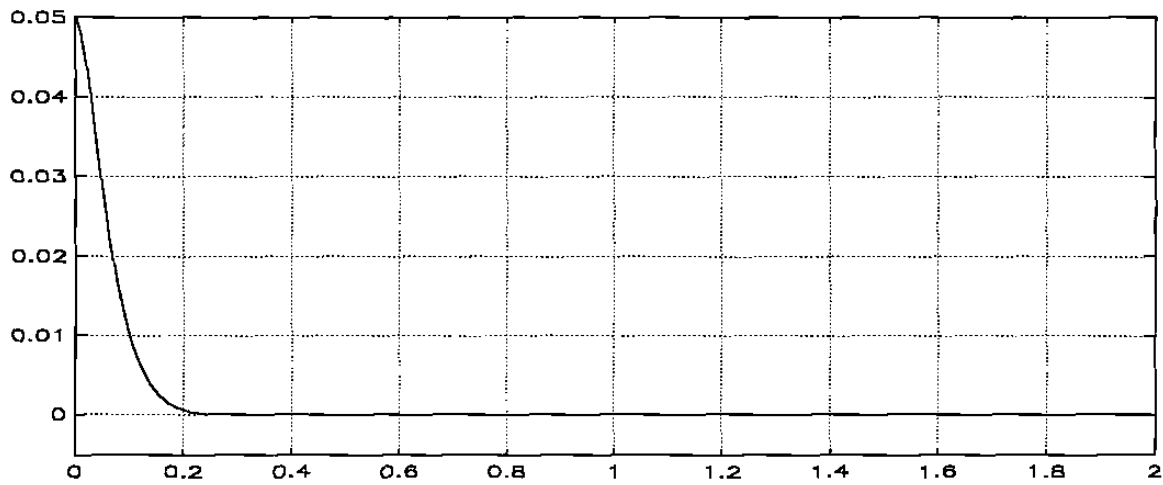


Figura 5.3.10.- Error de seguimiento de trayectoria para la articulación 4.

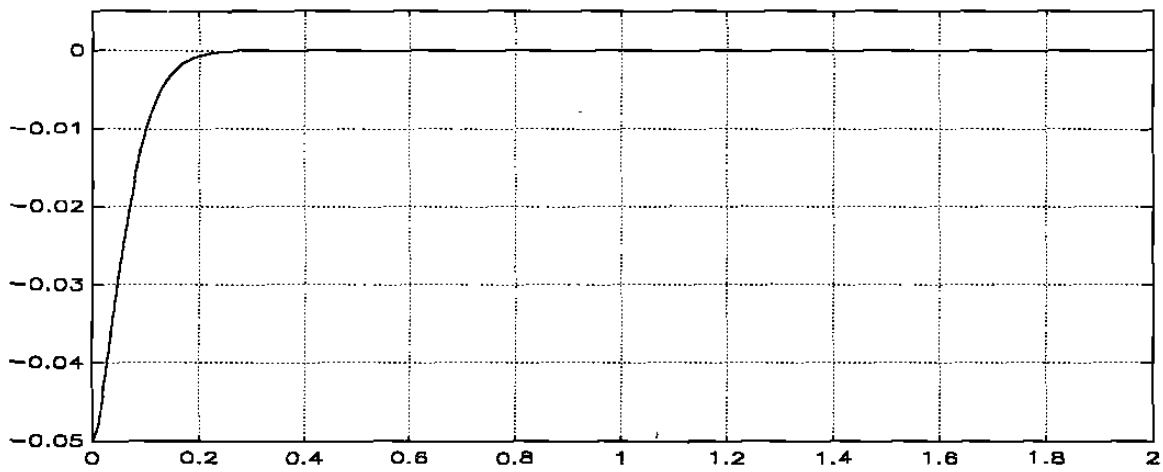


Figura 5.3.11.- Error de seguimiento de trayectoria para la articulación 5.

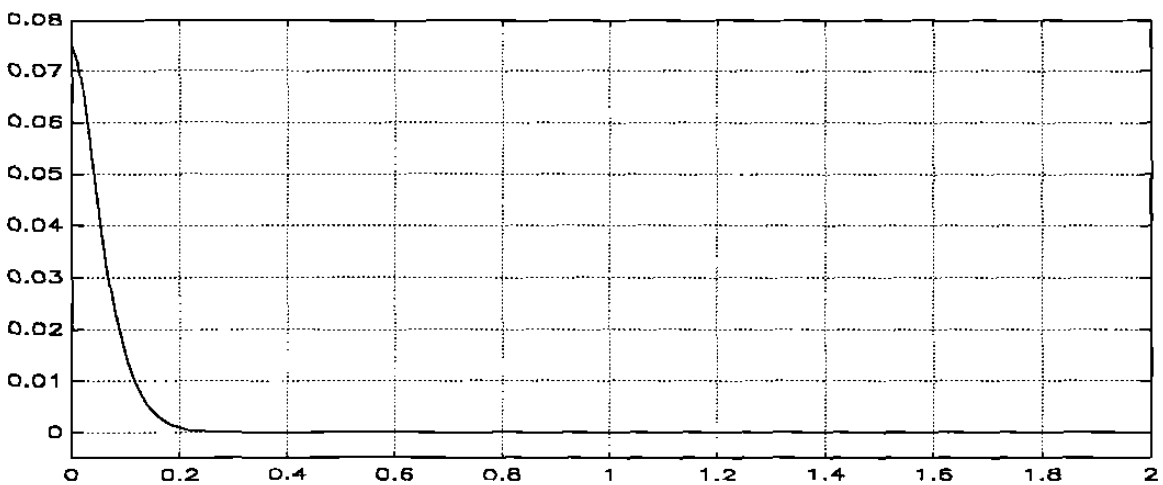


Figura 5.3.12.- Error de seguimiento de trayectoria para la articulación 6.

Gráficas de velocidades de referencia y velocidades de las articulaciones.

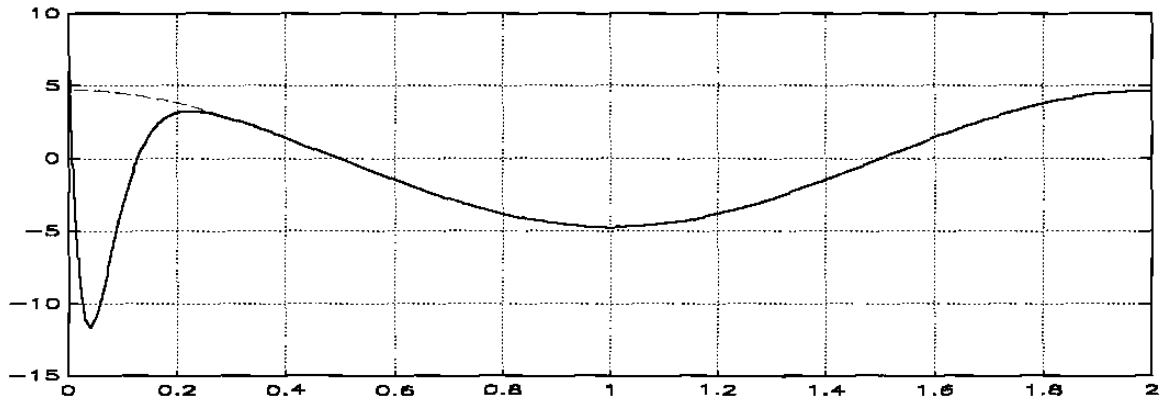


Figura 5.3.13.- Velocidad de referencia (trazo punteado) y velocidad real (trazo continuo) para la articulación 1.

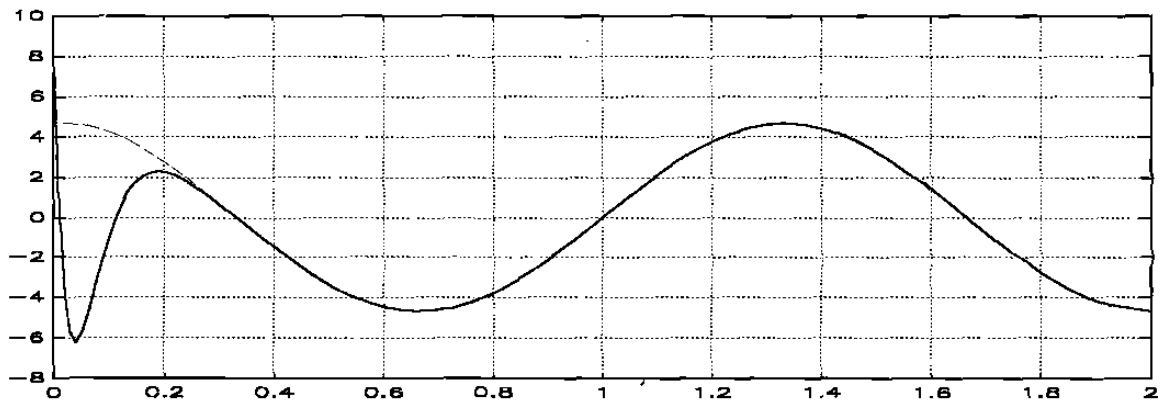


Figura 5.3.14.- Velocidad de referencia (trazo punteado) y velocidad real (trazo continuo) para la articulación 2.

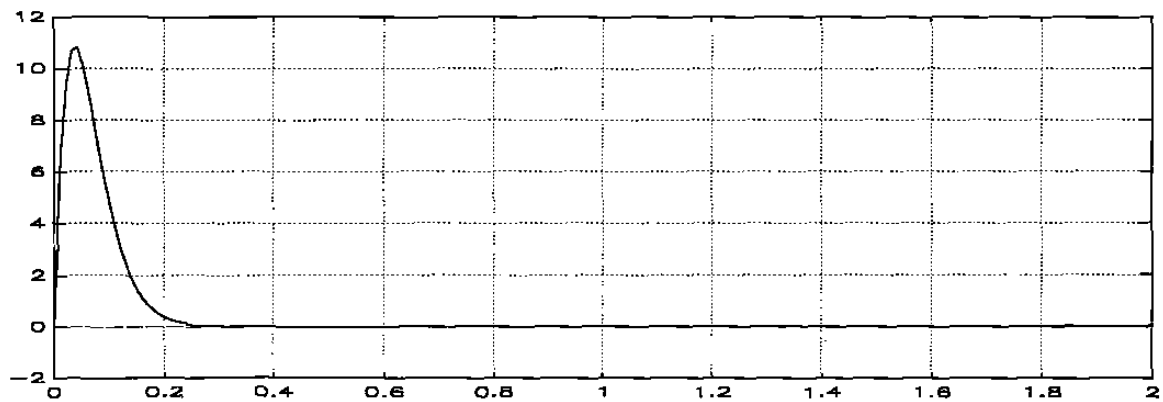


Figura 5.3.15.- Velocidad de referencia (trazo punteado) y velocidad real (trazo continuo) de la articulación 3.

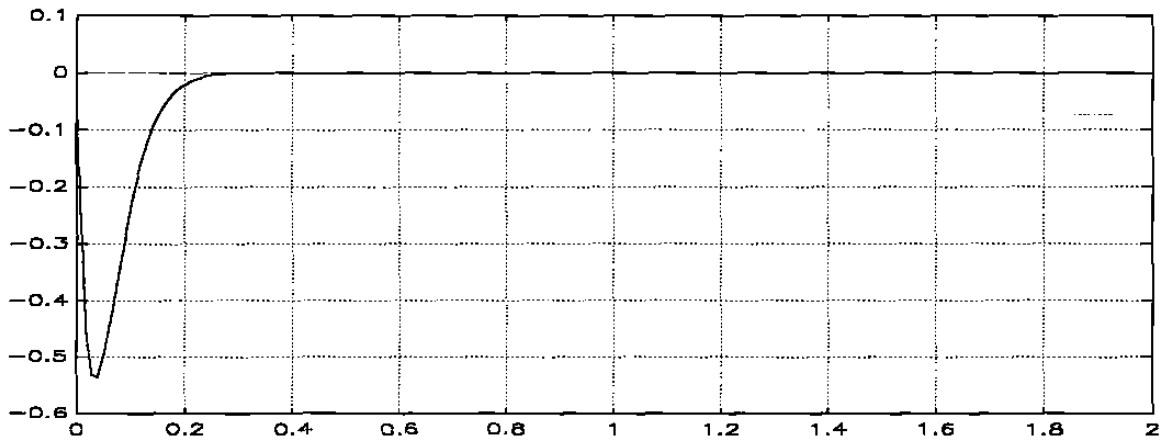


Figura 5.3.16.- Velocidad de referencia (trazo punteado) y velocidad real (trazo continuo) para la articulación 4.

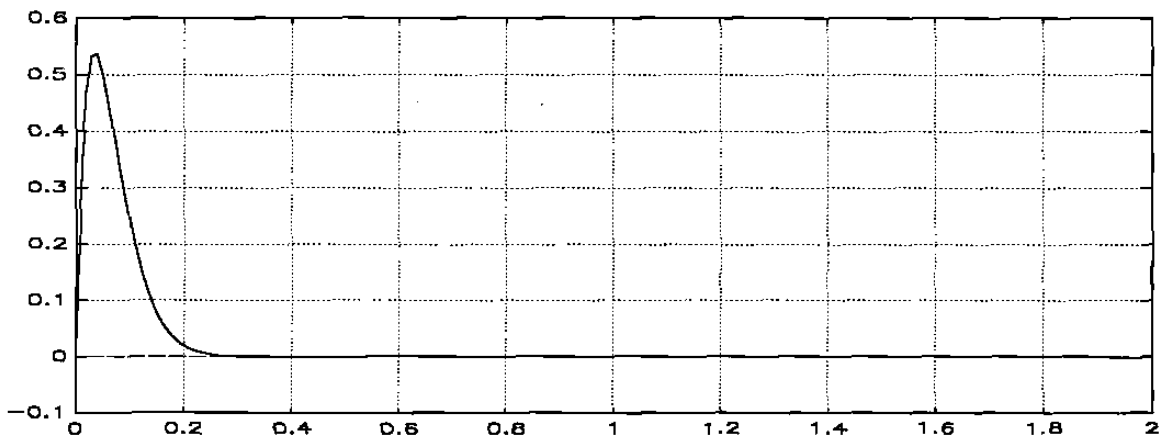


Figura 5.3.17.- Velocidad de referencia (trazo punteado) y velocidad real (trazo continuo) de la articulación 5.

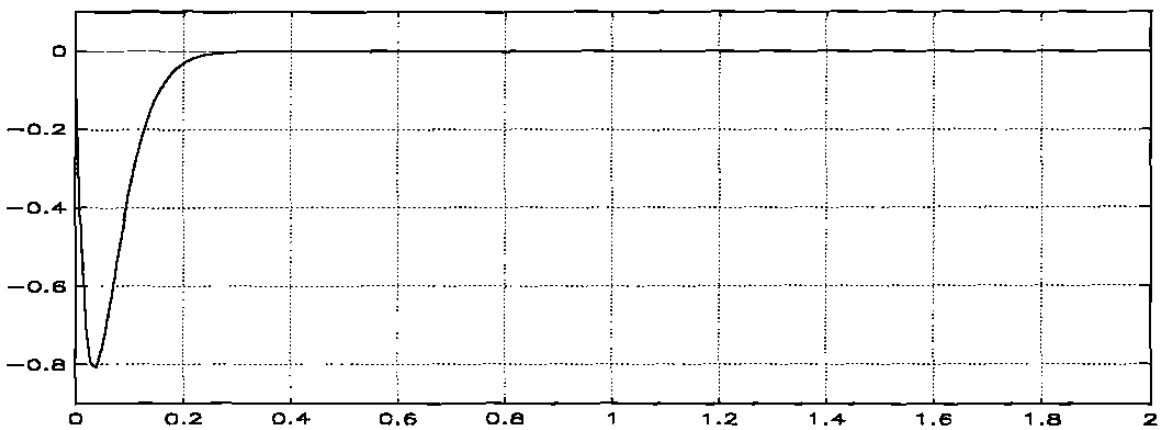


Figura 5.3.18.- Velocidad de referencia (trazo punteado) y velocidad real (trazo continuo) para la articulación 6.

5.4. COMPARACION DE RESULTADOS CON OTROS ALGORITMOS DE CONTROL.

En el siguiente ejemplo se compara el desempeño del algoritmo de control propuesto por Berghuis-Nijmeijer en [22] con el del algoritmo propuesto en este trabajo. En ambos casos se supone que solo puede medirse la posición de las articulaciones, de modo que se requiere la construcción de un observador de estado para estimar la velocidad. El modelo de robot es el siguiente:

$$M(q) = \begin{pmatrix} 9.77 + 2.02 \cos(q_2) & 1.26 + 1.01 \cos(q_2) \\ 1.26 + 1.01 \cos(q_2) & 1.12 \end{pmatrix}$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} -1.01 \dot{q}_2 \sin(q_2) [2\dot{q}_1 + \dot{q}_2] \\ 1.01 \dot{q}_1^2 \sin(q_2) \end{pmatrix}$$

$$G(q) = 9.8 * \begin{pmatrix} 8.1 \sin(q_1) + 1.13 \sin(q_1 + q_2) \\ 1.13 \sin(q_1 + q_2) \end{pmatrix}$$

De la misma forma en la sección 5.2, diseñamos un control linealizante y un control lineal para seguir las trayectorias deseadas, que de hecho resultan ser de la misma forma, es decir:

$$u = M(q)[\ddot{q}_d + v] + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q)$$

donde:

$$v = -B^T S_c^{-1} e + y_d^{(r)}$$

A continuación se muestran los resultados de simulación obtenidos asumiendo un error del 20% en los parámetros finales del modelo, y usando un valor de $\theta_{c1} = 25$ para el controlador de la articulación 1, $\theta_{c2} = 30$ para el controlador de la articulación 2, y un valor de $\theta_{o1} = \theta_{o2} = 79$. Estos valores dan por resultado matrices de ganancia de control y observación con elementos similares a los que se utilizan en las matrices de control para el algoritmo de Berguis-Nijmeijer. Las gráficas de trayectorias y errores de seguimiento tienen una escala vertical en radianes, mientras que en las gráficas de torque la escala vertical está en Newtons-metro, en todas las gráficas la escala horizontal está en segundos.

Resultados del algoritmo propuesto:

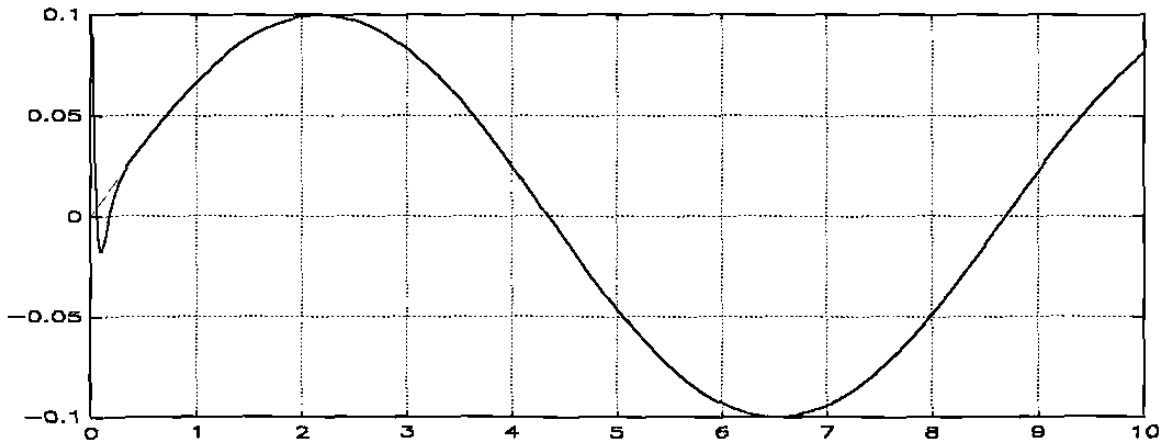


Figura 5.4.1.- Trayectoria de referencia (trazo punteado) y trayectoria real (trazo continuo) con un estado inicial de 0.1 para la articulación 1.

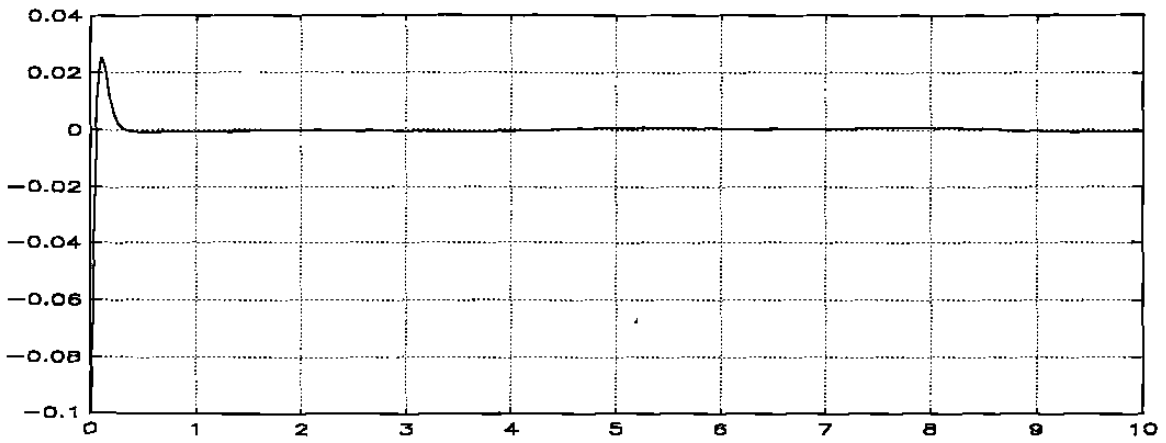


Figura 5.4.2.- Error de seguimiento de posición para la articulación 1.

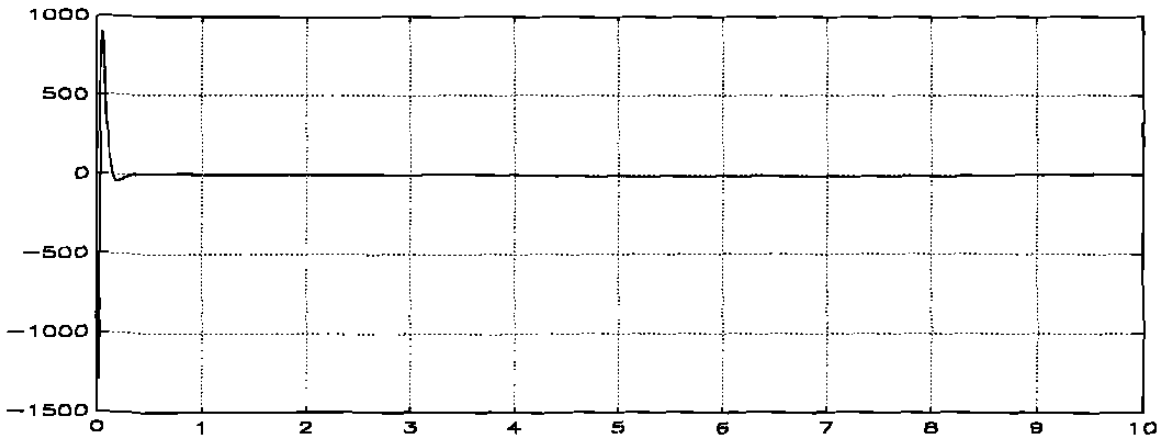


Figura 5.4.3.- Torque aplicado a la articulación 1.

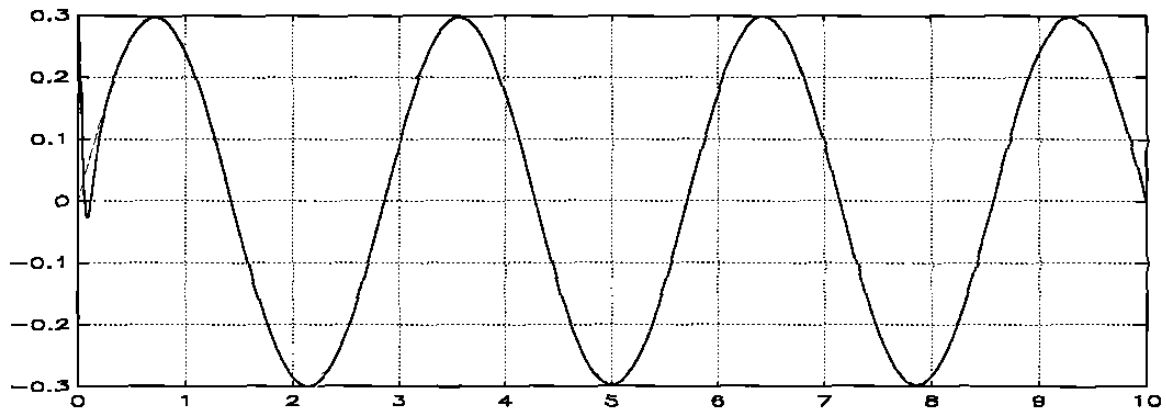


Figura 5.4.4.- Trayectoria de referencia (trazo punteado) y trayectoria real (trazo continuo) con un estado inicial de 0.3 para la articulación 2.

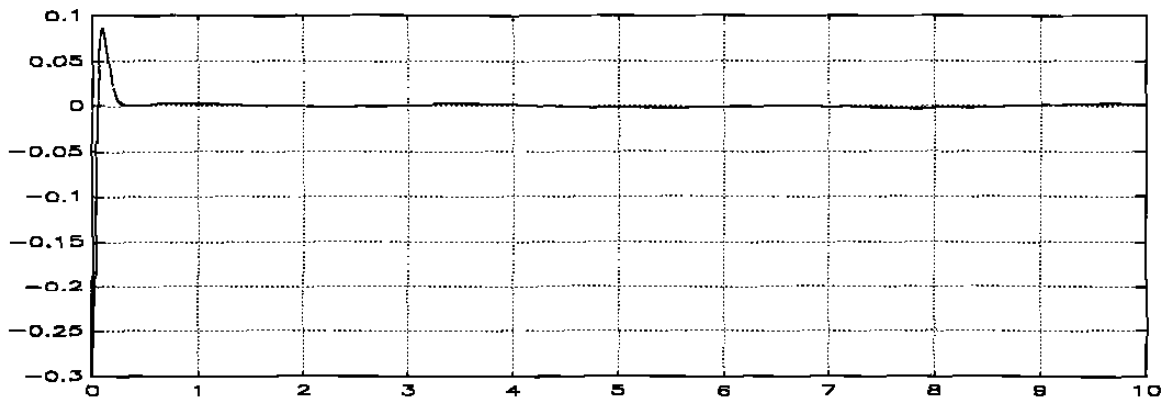


Figura 5.4.5.- Error de seguimiento de posición para la articulación 2.

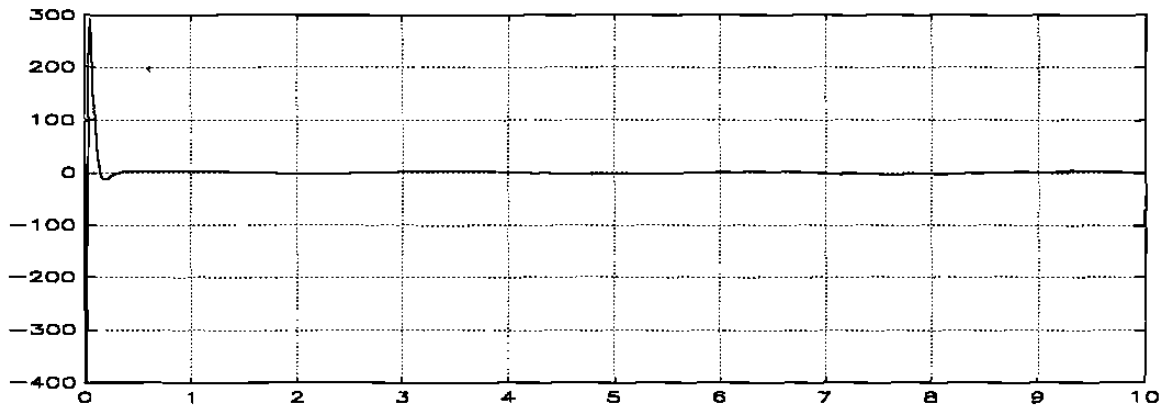


Figura 5.4.6.- Torque aplicado a la articulación 2.

A continuación se muestran las respuestas obtenidas en la simulación del mismo modelo, bajo las mismas condiciones e incertidumbres afectando la planta, pero utilizando el control y el observador propuestos por Berghuis-Nijmeijer en [22].

Resultados del algoritmo Berghuis-Nijmeijer:

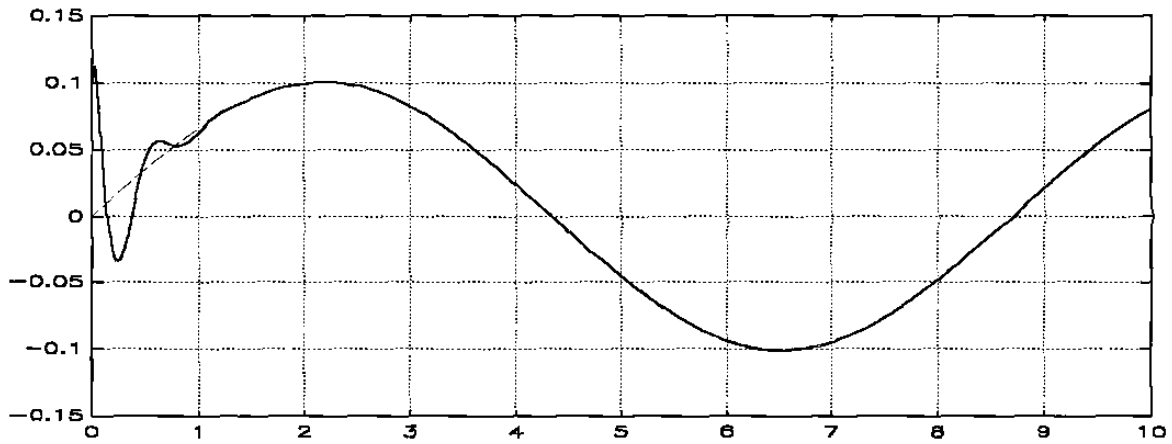


Figura 5.4.7.- Trayectoria de referencia (trazo punteado) y trayectoria real (trazo continuo) con un estado inicial de 0.1 para la articulación 1.

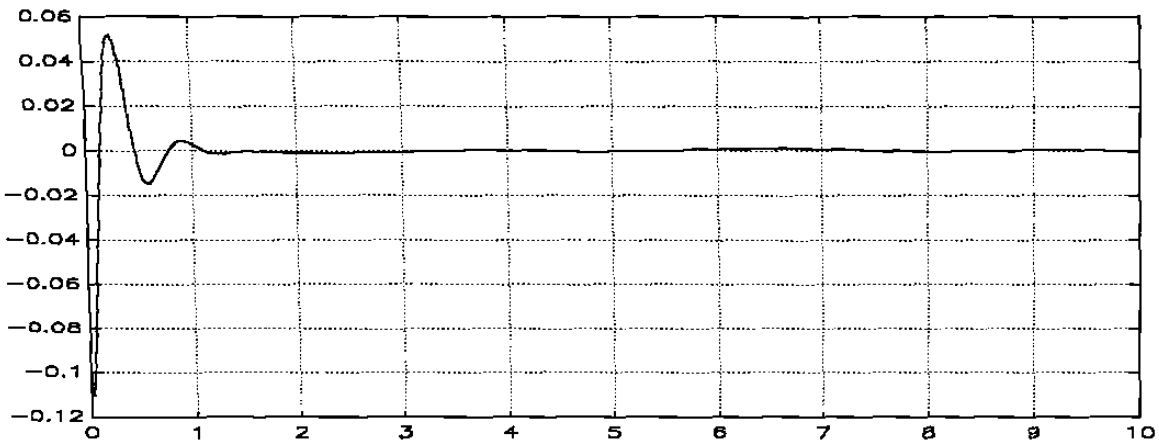


Figura 5.4.8.- Error de seguimiento de posición para la articulación 1.

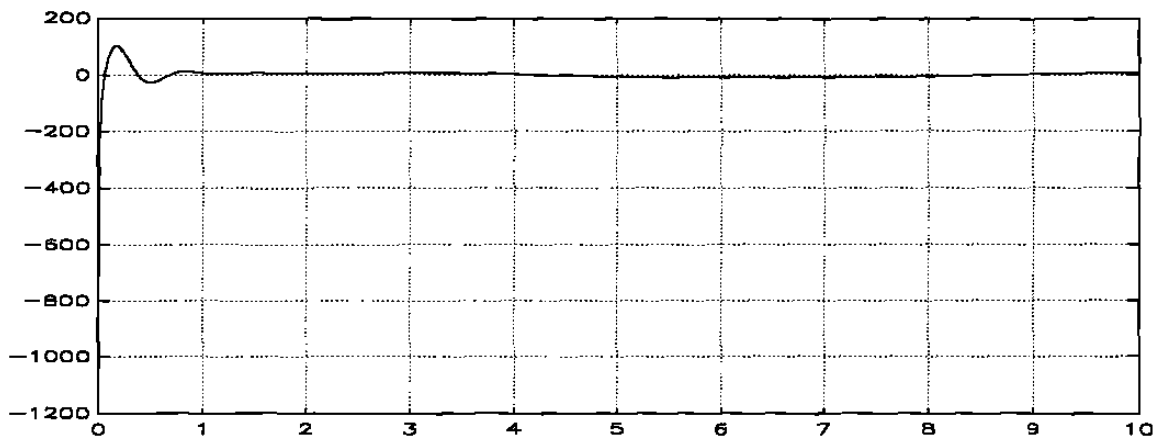


Figura 5.4.9.- Torque aplicado a la articulación 1.

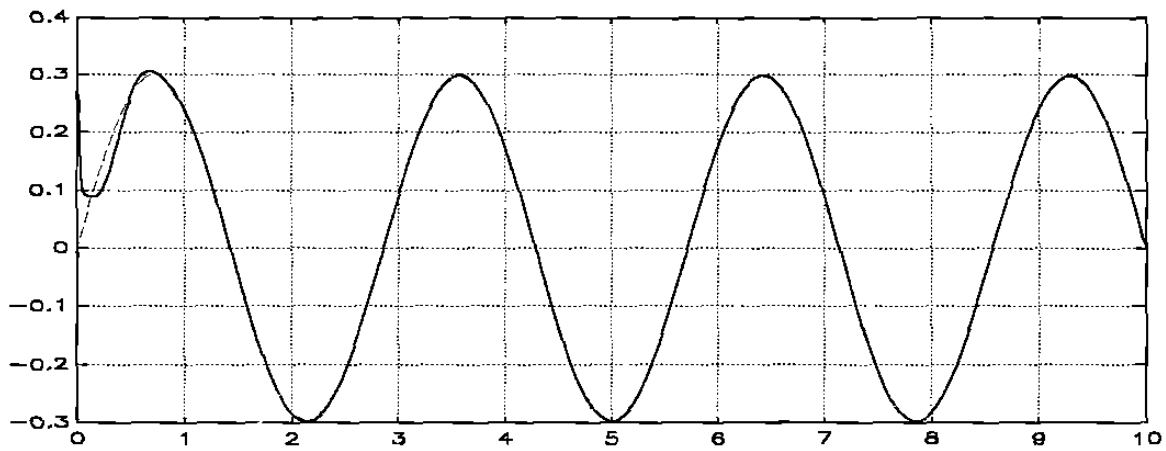


Figura 5.4.10.- Trayectoria de referencia (trazo punteado) y trayectoria real (trazo continuo) con un estado inicial de 0.3 para la articulación 2.

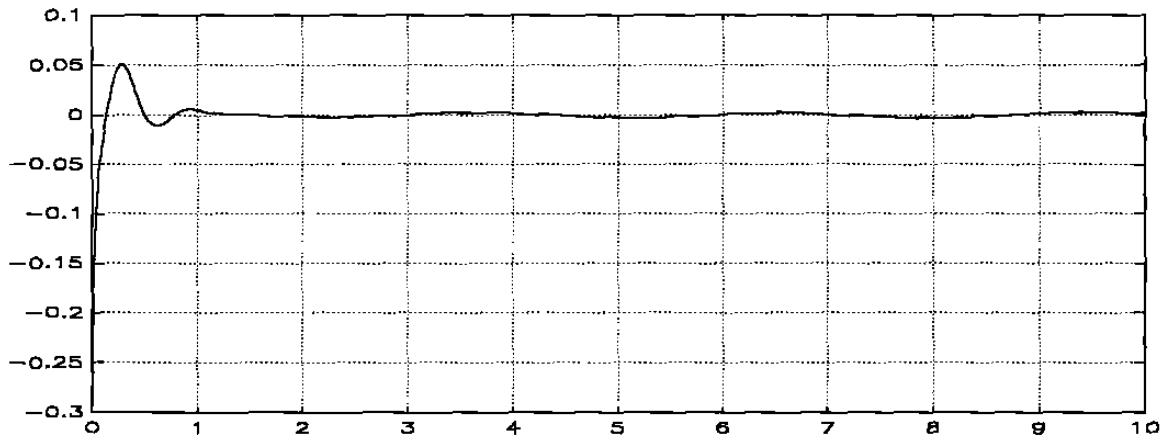


Figura 5.4.11.- Error de seguimiento de posición para la articulación 2.

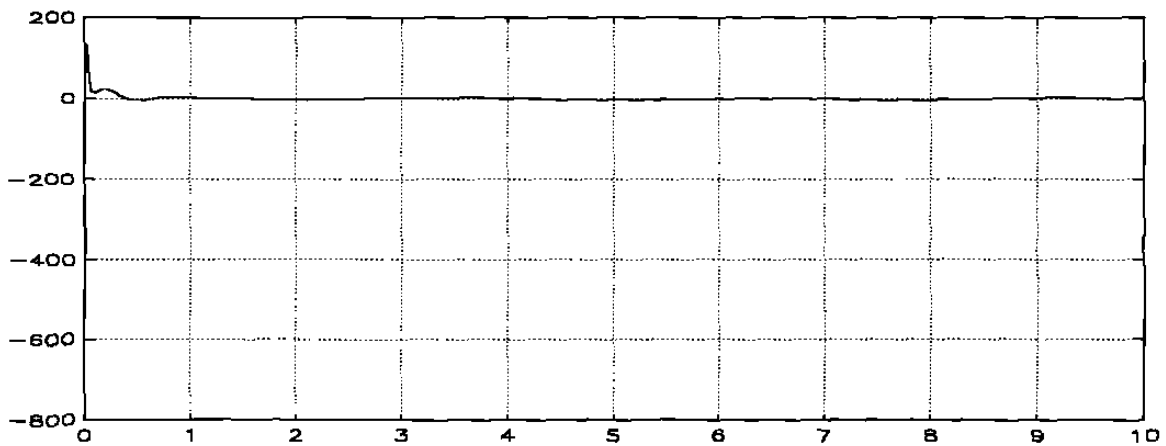


Figura 5.4.12.- Torque aplicado a la articulación 2.

Como puede apreciarse en las gráficas, en ambos casos se tiene un error de seguimiento muy pequeño, sin embargo, las respuestas obtenidas usando el control de Berghuis-Nijmeijer son más suaves, que las obtenidas usando el control propuesto en esta tesis. Por otro lado, las respuestas obtenidas con el control de B.-N. presentan una oscilación indeseable de 1.5 ciclos, que en el caso de el control que se propone, se reduce a un sobrepaso, es decir 0.5 ciclos.

5.5. COMPARACION DE DESEMPEÑO EN UN SISTEMA NO LINEAL.

En esta sección se muestra un sistema no lineal sencillo en el cual se resuelve el problema de estabilización asintótica exacta a cero, en lugar de seguimiento aproximado de trayectorias, usando el observador y el controlador que se propone en esta tesis. En el sistema, tal como aparece en [10], se asume que solo el estado 1 es medible mientras que el estado 2 debe ser estimado por un observador.

El modelo del sistema no lineal del artículo de Esfandiari-Khalil [10] es el siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2(1 + \gamma)x_2^3 + u \\ y &= x_1\end{aligned}$$

Se asume que el sistema es completamente linealizabile, y se supone el parámetro γ desconocido pero con $|\gamma| \leq 0.4$ como cota.

Control propuesto en el artículo de Esfandiari-Khalil [10].

El observador que se propone en [10] es el siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + \frac{1}{\varepsilon}(y - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -\hat{x}_1 - \hat{x}_2 - 0.1(1 + 6\|\hat{x}\|)\eta(\hat{x}_1 + 2\hat{x}_2) + \frac{1}{\varepsilon^2}(y - \hat{x}_1)\end{aligned}$$

con:

$$\eta(w) = \begin{cases} \frac{w}{\|w\|} & \text{si } \|w\| \geq \frac{1}{2} \\ 2w & \text{si } \|w\| < \frac{1}{2} \end{cases}$$

y el control que se aplica es:

$$u = -2\hat{x}_2^3 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2 - 0.1(1 + 6\|\hat{x}\|)\eta(\hat{x}_1 + 2\hat{x}_2)$$

Cabe mencionar que este control genera ruido debido a la conmutación de los valores de η , es decir, debido a que no es un control continuo.

Control propuesto.

Se incluye el siguiente observador:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu - S_o^{-1}C^T(C\hat{x} - y)$$

y la ley de control que se propone es, como ya se ha visto:

$$\begin{aligned} u_l &= -2\hat{x}_2^3 \\ u_c &= -B^T S_c^{-1} \hat{x} \\ u &= u_l + u_c = -2\hat{x}_2^3 - \theta_c (\theta_c \hat{x}_1 + 2\hat{x}_2) \end{aligned}$$

Los valores para las ganancias del observador y del controlador fueron $\theta_c = 1.1$ y $\theta_o = 25$ respectivamente, para obtener ganancias equivalentes en ambos controles.

En el control de Esfandiari-Khalil se usaron $|\gamma| \leq 0.4$, $\varepsilon = 0.04 \rightarrow \frac{1}{\varepsilon^2} = 625$. Las gráficas de simulaciones se obtuvieron para las mismas condiciones iniciales, en ambos casos $x_0^T = [0 \ 0.2]$.

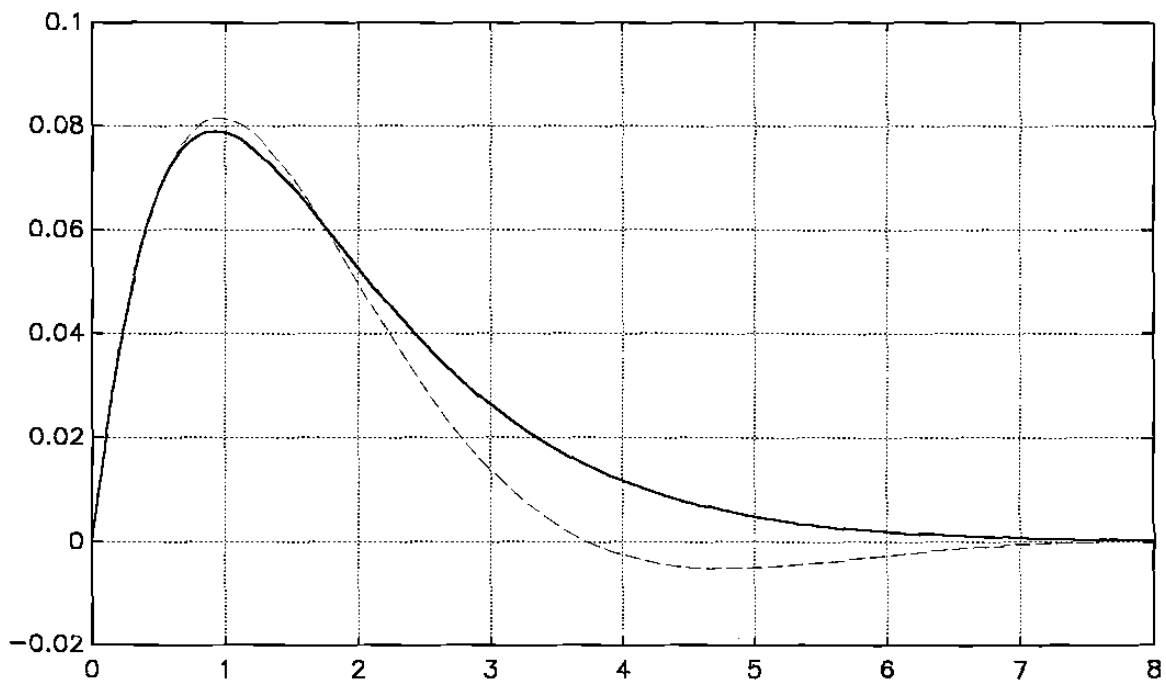


Figura 5.5.1.- Salida del sistema obtenida por el control propuesto (en trazo continuo), y salida obtenida por el control de Esfandiari-Khalil (en trazo punteado).

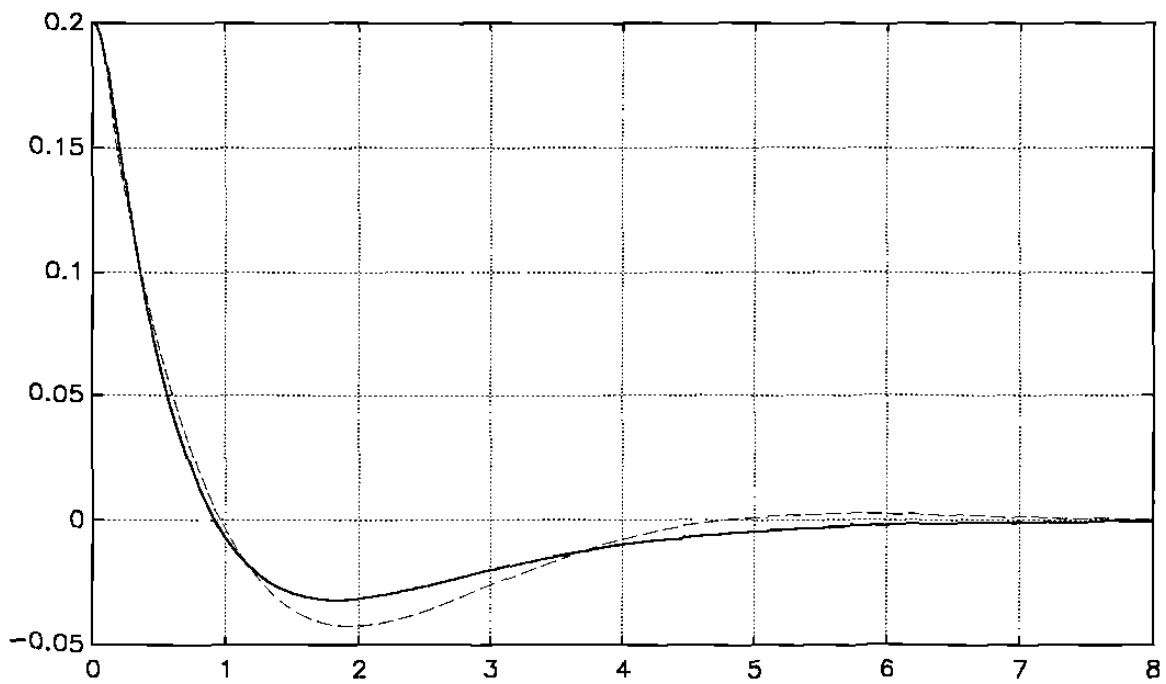


Figura 5.5.2.- Estado 2 obtenido para el control propuesto (continuo) y para el control de K.-E. (punteado).

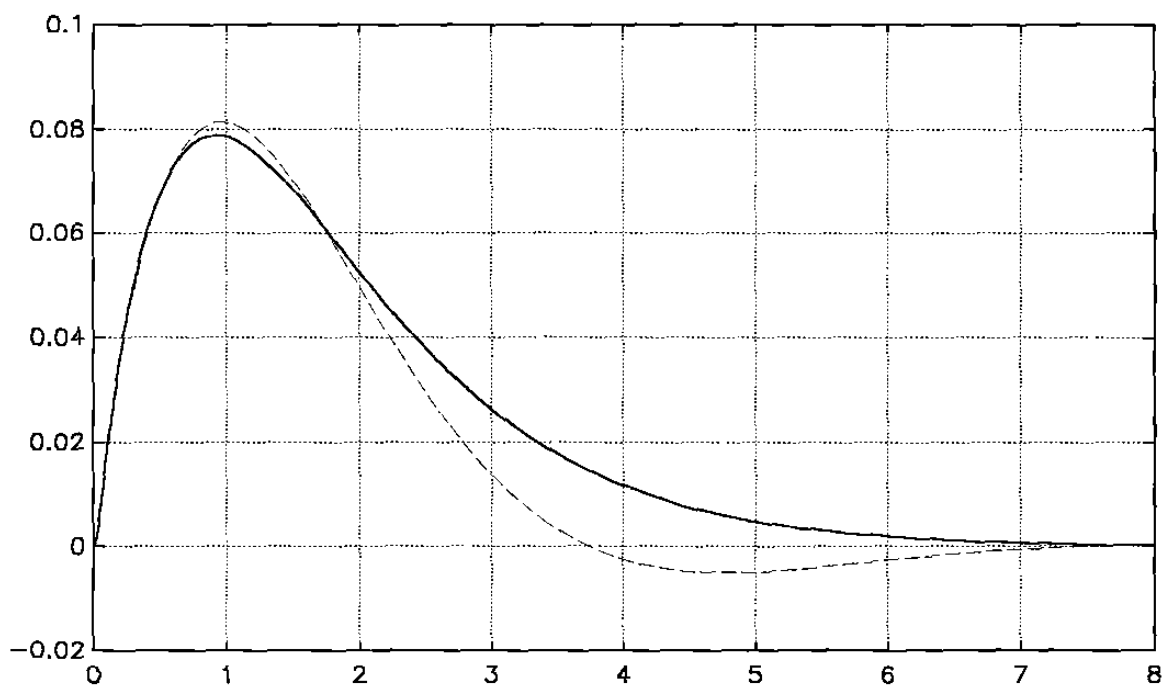


Figura 5.5.3.- Estado 1 estimado con el observador propuesto (trazo continuo) y con el observador de K.-E. (trazo punteado).

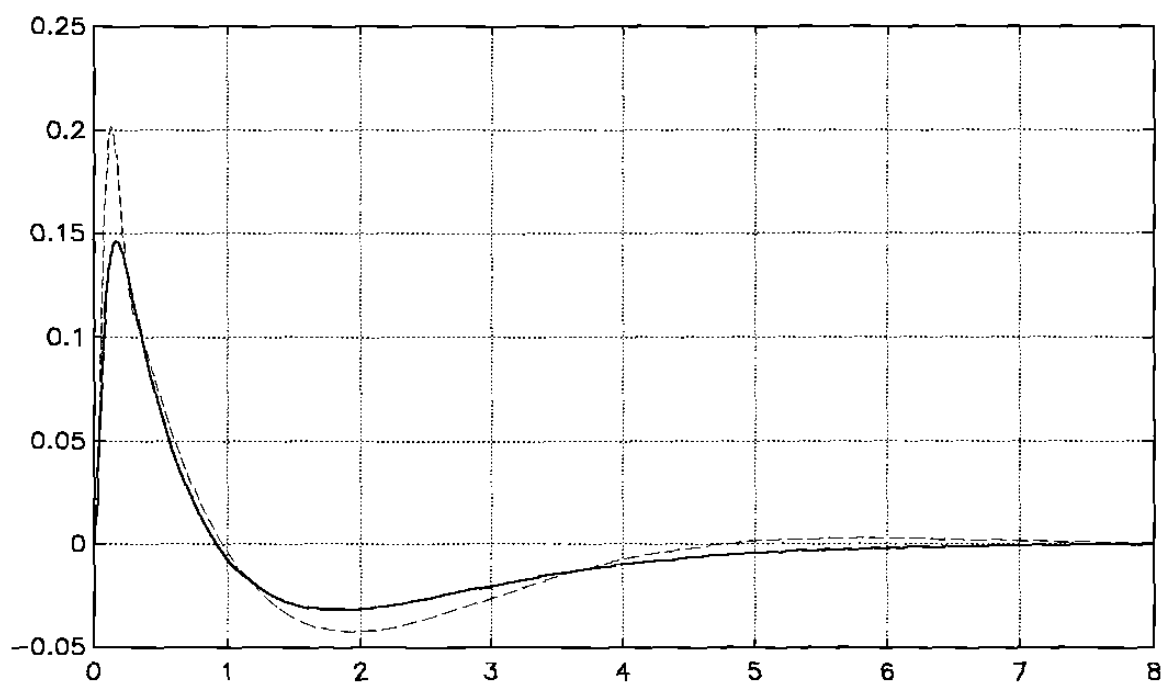


Figura 5.5.4.- Estado 2 estimado con el observador propuesto (trazo continuo) y con el observador de K.-E. (trazo punteado).

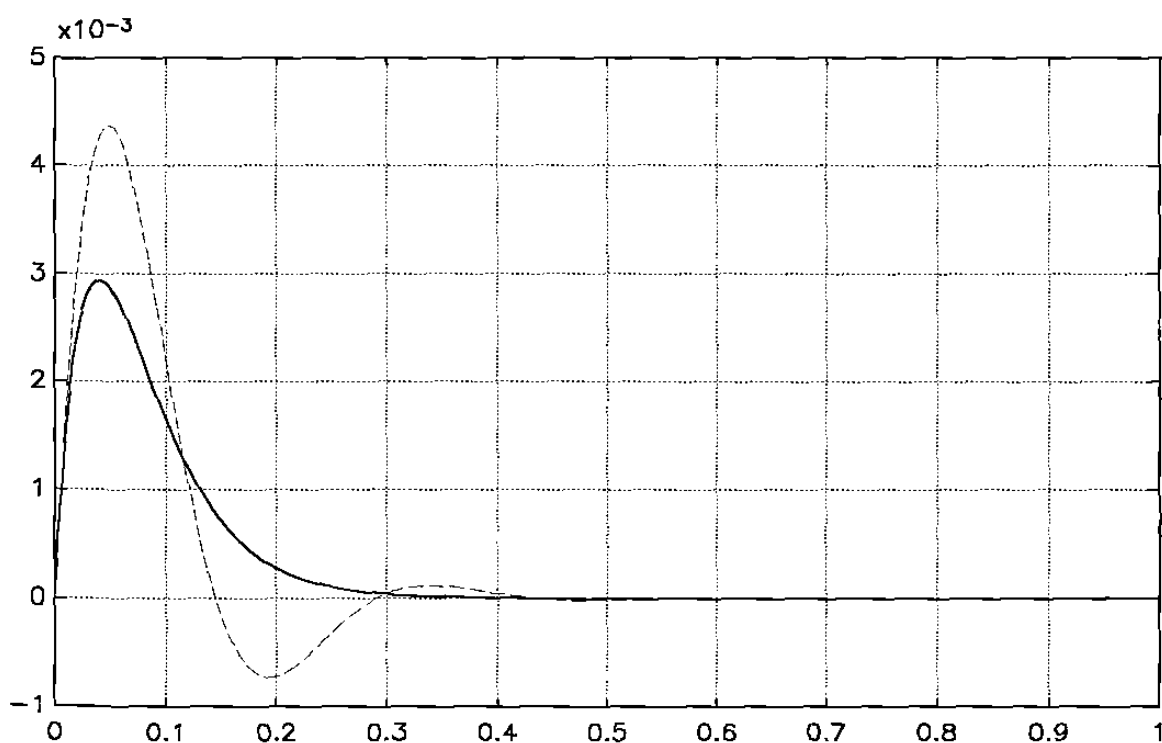


Figura 5.5.5.- Error de observación del estado 1 con el observador propuesto (continuo) y con el observador de K.-H. (punteado).

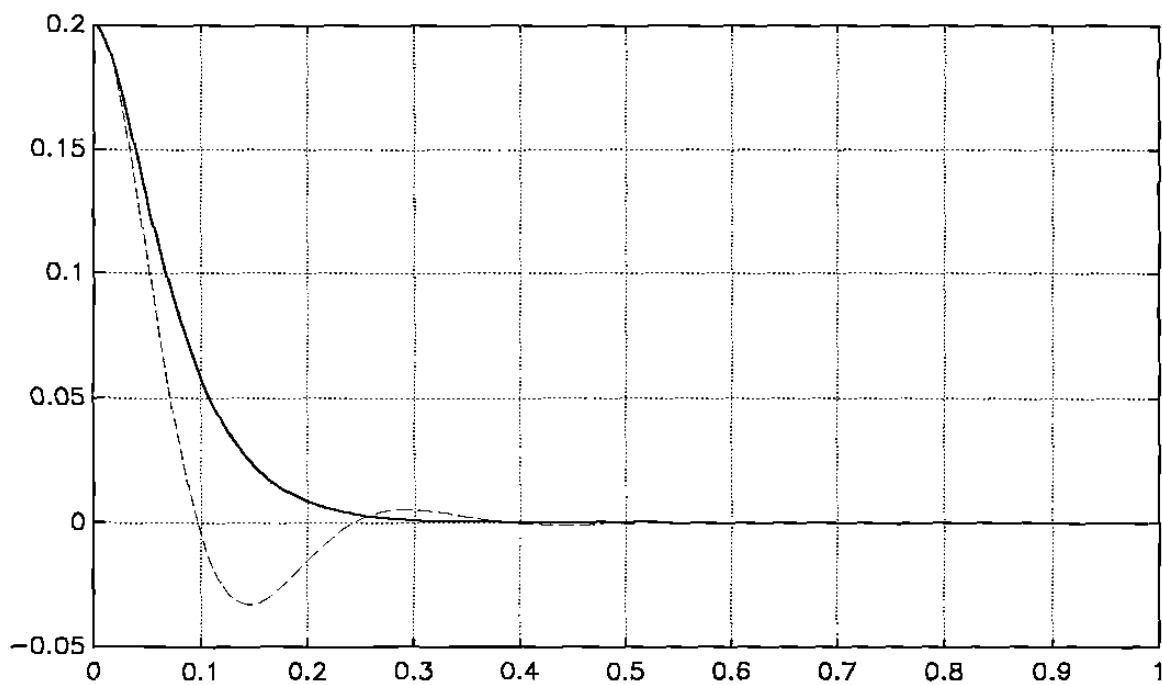


Figura 5.5.6.- Error de observación del estado 2 con el observador propuesto (continuo) y con el observador de K.-H. (punteado).

CAPITULO 6

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

6.1. CONCLUSIONES.

En esta tesis se propone una solución al problema de seguimiento de trayectorias, en una clase de sistemas no lineales con incertidumbres, cuando estas últimas satisfacen la "condición de acoplamiento" y están acotadas. Además, se presentan las condiciones necesarias y suficientes para garantizar la estabilidad del sistema controlado con la ley propuesta.

La clase de sistemas que se consideran, son completamente linealizables cuando se conoce con exactitud el modelo de la planta.

La solución que se propone, está compuesta por una ley de control y un observador no lineales, cuyos algoritmos dependen, en el caso SISO, de un solo parámetro cada uno. El resultado de aplicar estos algoritmos para el control de un proceso no lineal de la clase considerada, es robusto en presencia de las incertidumbres, al menos en el sentido de acotamiento final uniforme del error de seguimiento.

Las matrices de ganancias del controlador y del observador, son calculadas independientemente una de la otra, como la solución de una ecuación matricial algebraica. Estas matrices de ganancia pueden ser fácilmente ajustadas precisamente por que dependen de un solo parámetro de diseño cada una.

La aportación de este trabajo radica tanto en la robustez, como en la sencillez de la ley de control que se propone, puesto que resulta muy fácil efectuar ajustes en línea variando el valor de su único parámetro de diseño.

Los resultados obtenidos se aplicaron a diferentes modelos de robots, y a un sistema no lineal sencillo. La simplicidad por una parte, y la robustez ante incertidumbres por la otra, mostraron sus beneficios en las simulaciones que se implementaron.

6.2. RECOMENDACIONES Y TRABAJOS FUTUROS

Como se puede pensar, por el énfasis que en ello se ha hecho, la clase de sistemas no lineales a los que pueden aplicarse las técnicas de control aquí presentadas, está aún muy restringida. Existen otras clases de sistemas no lineales, en los que, a diferencia de los sistemas que se consideraron en el capítulo 5, las incertidumbres que se presentan no satisfacen la "condición de acoplamiento".

Como trabajos futuros, se puede investigar la aplicación de esta clase de controles a sistemas que, al ser linealizados, las incertidumbres que se tenían en el modelo resultan no estar acopladas. También se puede considerar, el extender esta ley de control a la clase de sistemas en los que existe una dinámica cero en el modelo de la planta, y estudiarse el efecto de esta dinámica interna en el seguimiento de trayectorias.

Por otra parte, puede estudiarse la aplicación de esta ley de control a otro tipo de sistemas, que no sean linealizables, pero en los que las no linealidades pueden ser "agrupadas" en una serie de términos, de manera que se tenga una parte de control lineal donde intervenga el control aquí presentado, más una parte de control no lineal utilizando una técnica distinta.

Se puede considerar el análisis de esta sencilla ley de control en combinación con algunas otras técnicas, como puede ser el control adaptable, o técnicas de rediseño de Lyapunov con histéresis en la conmutación de las leyes de control.

Apéndice

RESULTADOS DE GEOMETRIA DIFERENCIAL

A.1. PROPIEDADES DE LA DERIVADA Y EL PRODUCTO DE LIE.

Las propiedades de las operaciones definidas en el capítulo 2, pueden resumirse en las siguientes ecuaciones:

$$L_{\alpha f} \lambda(x) = (L_f \lambda(x)) \alpha(x)$$

$$L_f d\lambda(x) = dL_f \lambda(x)$$

$$L_{[f, g]} \lambda(x) = L_f L_g \lambda(x) - L_g L_f \lambda(x)$$

$$L_f \langle w, g \rangle(x) = \langle L_f w(x), g(x) \rangle + \langle w(x), [f, g](x) \rangle$$

$$[\alpha f, \beta g](x) = \alpha(x) \beta(x) [f, g](x) + (L_f \beta(x)) \alpha(x) g(x) - (L_g \alpha(x)) \beta(x) f(x)$$

$$L_{\alpha f} \beta w(x) = \alpha(x) \beta(x) (L_f w(x)) + \beta(x) \langle w(x), f(x) \rangle d\alpha(x) + (L_f \beta(x)) \alpha(x) w(x)$$

A.2. DIMENSIONES DEL CONJUNTO LOCALMENTE ALCANZABLE.

Para determinar las dimensiones del conjunto de puntos localmente alcanzables, en un sistema descrito por (2.2.1) se debe encontrar, si existe, la mínima distribución que cumple con las propiedades (a), (b) y (c) de la sección 2.7, para lograrlo se utilizan a los siguientes lemas.

Lema A.2.1 [8]. Sea Δ una distribución suave y $\{\tau_1, \dots, \tau_q\}$ un conjunto de campos vectoriales dados. La familia de todas las distribuciones que son invariantes bajo $\{\tau_1, \dots, \tau_q\}$ y que contienen a Δ , tiene un elemento minimal que es una distribución suave.

Definición La distribución más pequeña que contiene a Δ y que es invariante bajo los campos vectoriales $\{\tau_1, \dots, \tau_q\}$ se denotará por el símbolo

$$\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle$$

Dada una distribución Δ y un conjunto $\{\tau_1, \dots, \tau_q\}$ de campos vectoriales, definimos la secuencia no decreciente de distribuciones:

$$\Delta_0 = \Delta \tag{A.2.1a}$$

$$\Delta_k = \Delta_{k-1} + \sum_{i=1}^q [\tau_i, \Delta_{k-1}] \tag{A.2.1b}$$

esta secuencia de distribuciones tiene la siguiente propiedad:

Lema A.2.2 [8]. Las distribuciones Δ_k generadas con el algoritmo (A.2.1) son tales que:

$$\Delta_k \subset \langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle \quad \forall k$$

Si existe un entero k^* tal que $\Delta_{k^*} = \Delta_{k^*+1}$, entonces

$$\Delta_{k^*} = \langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle.$$

La situación práctica más simple en la cual el algoritmo (A.2.1) converge en un número finito de pasos es cuando todas las distribuciones de la secuencia son no singulares, en ese caso, por construcción se tiene que $\dim \Delta_k \leq \dim \Delta_{k+1} \leq n$ y puede verse que existe un entero $k^* < n$ tal que $\Delta_{k^*} = \Delta_{k^*+1}$. Si las distribuciones son singulares tenemos el siguiente resultado *débil*.

Lema A.2.3 [8]. Existe un subconjunto abierto y denso U^* de U con la propiedad de que en cada punto $x \in U^*$

$$\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle = \Delta_{n-1}(x) \tag{A.2.2}$$

Es posible encontrar condiciones bajo las cuales la distribución (A.2.2) es también involutiva.

Lema A.2.4 [8]. Suponga que Δ es generada por algunos de los campos vectoriales $\{\tau_1, \dots, \tau_q\}$ y que $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle$ es no singular, por lo tanto $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle$ es involutiva.

Lema A.2.5 [8]. Suponga Δ es generada por algunos de los campos vectoriales $\{\tau_1, \dots, \tau_q\}$ y que Δ_{n-1} es no singular. Entonces $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle$ es involutiva y obtenemos $\Delta_{n-1} = \langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle$.

De los lemas anteriores puede verse que si $\langle f, g_1, \dots, g_m | \text{span}\{g_1, \dots, g_m\} \rangle$ es no singular, entonces también es involutiva, y por lo tanto la descomposición (2.6.1) puede ser realizada.

A.3. CONJUNTO DE PUNTOS LOCALMENTE OBSERVABLE.

De forma similar a la sección A.2, para determinar las dimensiones del conjunto de puntos localmente observables en un sistema no lineal descrito por (2.2.1), se debe encontrar la distribución más grande que cumple con las propiedades (a), (b) y (c) de la sección 2.8, esto es equivalente a analizar la más pequeña codistribución que satisface las propiedades (i), (ii) y (iii), dadas en la misma sección, esto se consigue de la siguiente forma.

Lema A.3.1 [8]. Sea Ω una codistribución suave y $\{\tau_1, \dots, \tau_q\}$ un conjunto de campos vectoriales dado. La familia de todas las codistribuciones las cuales son invariantes bajo $\{\tau_1, \dots, \tau_q\}$ y que contienen a Ω , tiene un elemento minimal, que es una codistribución suave.

Dada una codistribución Ω y $\{\tau_1, \dots, \tau_q\}$ podemos considerar la versión dual de (A.2.1)

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \Omega \\ \Omega_k &= \Omega_{k-1} + \sum_{i=1}^q L_{\tau_i} \Omega_{k-1} \end{aligned} \tag{A.3.1}$$

Lema A.3.2 [8]. Las codistribuciones generadas por el algoritmo (A.3.1) son tales que $\Omega_k \subset \langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Omega \rangle$ para toda k , si existe un entero k^* tal que $\Omega_{k^*} = \Omega_{k^*+1}$ entonces

$$\Omega_{k^*} \subset \langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Omega \rangle$$

Lema A.3.3 ,[8]. Existe un subconjunto abierto y denso U^* de U con la propiedad de que para cada punto $x \in U^*$

$$\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Omega \rangle(x) = \Omega_{n-1}(x)$$

Lema A.3.4,[8]. Suponga Ω es generado por el conjunto de campos covectoriales exactos:

$$d\lambda_1, \dots, d\lambda_s \tag{A.3.2}$$

entonces existe un subconjunto abierto y denso U^* de U con la siguiente propiedad: para cada $x_0 \in U^*$ existe una vecindad abierta U_0 y d campos covectoriales exactos (con $\text{Dim}(\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Omega \rangle(x_0)) = d$), $\omega_1, \dots, \omega_d$ los cuales tienen la forma $\omega_i = dL_{v_r} \dots L_{v_1} \lambda_j$ donde $r \leq n-1$ y puede depender de i , y los v_i 's son campos vectoriales del conjunto $\{\tau_1, \dots, \tau_q\}$ y λ_j es una función del conjunto $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ tal que $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Omega \rangle(x) = \text{span}\{\omega_1(x), \dots, \omega_d(x)\}$ para toda $x \in U_0$.

Lema A.3.5 [8]. Suponga que Ω es generado por el conjunto (A.3.2) de campos covectoriales exactos y que $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Omega \rangle(x)$ es no singular. Entonces $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Omega \rangle^\perp$ es involutiva.

Lema A.3.6 [8]. Suponga Ω es generado por el conjunto (A.3.2) de campos covectoriales exactos y Ω_{n-1} es no singular. Entonces $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Omega \rangle^\perp$ es involutiva y $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Omega \rangle = \Omega_{n-1}$.

En el estudio de la interacción *estado-salida* para un sistema de control de la forma (2.2.1) se considera la distribución

$$Q = \langle f, g_1, \dots, g_m | \text{span}\{dh_1, \dots, dh_p\} \rangle^\perp$$

invariante bajo f, g_1, \dots, g_m y que está contenida en $\tilde{Q} = (\text{span}\{dh_1, \dots, dh_p\})^\perp$. Si esta distribución es no singular, entonces de acuerdo al lema A.3.6 es también involutiva. Esta distribución es usada para encontrar una descomposición de la forma (2.6.2).

Referencias

- [1] H. Hammouri, K. Busawon, "A Global Stabilization of a Class of Non-Linear Systems by Means of an Observer", *Appl. Math. Lett.*, 1993, Vol. 6, No. 1, pp. 31-34.
- [2] J. P. Gauthier, H. Hammouri, S. Othman, "A Simple Observer for Non-Linear Systems - Applications to Bioreactors-", *Laboratoire d'Automatique et Génie des Procédés, Université Claude Bernard, LION I, URA CNRS D 1328.*
- [3] S. S. Sastry, A. Isidori, "Adaptive Control of Linearizable Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, No. 11, November 1989, 1123-1131.
- [4] Z. H. Li, T. Y. Chai, "Adaptive Robust Tracking for Nonlinear Uncertain Systems", *Proceedings of the 32nd Conference on Decision and Control, TA1-11:40, San Antonio, Texas, December 1993, 1519-1524.*
- [5] M. J. Corless, G. Leitmann, "Continuous State Feedback Guaranteeing Uniform Ultimate Boundedness for Uncertain Dynamic Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-26, No. 5, October 1981, 1139-1144.
- [6] F. L. Lewis, C. T. Abdallah, D. M. Dawson, "Control of Robot Manipulators", *Maxwell Macmillan International.*
- [7] S. Nicosia, P. Tomei, A. Tornambè, "Non-linear control and observation algorithms for a single-link flexible robot arm", *Int. J. Control*, 1989, Vol. 49, No. 3, 827-840.
- [8] A. Isidori, "Nonlinear Control Systems an introduction", 2nd edition, *Springer-Verlag*, 1989.
- [9] S. Nicosia, P. Tomei, A. Tornambè, "Observer-based control law for a class of non-linear systems", *Int. J. Control*, 1990, Vol. 51, No. 3, 553-556.
- [10] F. Esfandiari, H. K. Khalil, "Output Feedback Stabilization of Fully Linearizable Systems", *Int. J. Control*, 1992, Vol. 56, No. 5, 1007-1037.

-
- [11] M. W. Spong, M. Vidyasagar, "Robot Dynamics and Control", John Wiley & Sons, 1989.
- [12] Y. H. Chen, "Robust Control Design for a Class of Mismatched Uncertain Nonlinear Systems", Proceedings of the American Control Conference, WM15-3:10, Baltimore, Maryland, June 1994, 796-800.
- [13] M. S. Mahmoud, "Robust Control of Robot Arms Including Motor Dynamics", Int. J. Control, 1993, Vol. 58, No. 4, 853-873.
- [14] K. M. Koo, J. H. Kim, "Robust Control of Robot Manipulators with Parametric Uncertainty", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 39, No. 6, June 1994, 1230-1233.
- [15] M. W. Spong, M. Vidyasagar, "Robust Linear Compensator Design for Nonlinear Robotic Control", IEEE Journal of Robotics and Automation, Vol. RA-3, No. 4, August 1987, 345-350.
- [16] F. Jabbari, W. E. Schmitendorf, "Robust Linear Controllers Using Observers", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 36, No. 12, December 1991, 1509-1514.
- [17] S. Behtash, "Robust Output Tracking for Non-Linear Systems", Int. J. Control, 1990, Vol. 51, No. 6, 1381-1407.
- [18] M. Zhihong, M. Palaniswami, "Robust Tracking Control for Rigid Robotic Manipulators", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 39, No. 1, January 1994, 154-159.
- [19] Z. Qu, J. Dorsey, "Robust Tracking Control of Robots by a Linear Feedback Law", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 36, No. 9, September 1991, 1081-1084.
- [20] X. Y. Yu and Z. J. Chen, "Robustness Analysis of Adaptive Linearizable Nonlinear Systems with Unmodeled Dynamics", Proceedings of the 32nd Conference on Decision and Control, WM4-3:10, San Antonio, Texas, December 1993, 600-604.

- [21] M. Hached, S. M. Madani-Esfahani, S. H. Zak, "Stabilization of Uncertain systems Subject to Hard Bounds on Control with Application to a Robot Manipulator", *IEEE Journal of Robotics and Automation*, Vol. 4, No. 3, June 1988, 310-323.
- [22] H. Berghuis, H. Nijmeijer, "A Pasivity Approach to Controller-Observer Design for Robots", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 9, No. 6 Dec. 1993, 740-754.

