Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1 Motivación del trabajo

Las técnicas convencionales para el análisis del flujo de potencia en redes eléctricas generalmente modelan sólo la red de secuencia positiva a la frecuencia fundamental. Lo anterior implica dos suposiciones; primero, que todos los componentes de la red eléctrica son balanceados, y segundo, que las formas de onda de corrientes y voltajes en la red son perfectamente sinusoidales.

En los sistemas reales, tanto los componentes de la red como las cargas tienen cierto grado de desbalance, además algunos elementos de la red distorsionan las señales de voltaje y corriente. Por lo anterior, es necesario disponer de herramientas de análisis que consideren las características reales de la red eléctrica; el objetivo de este trabajo es proporcionar dichas herramientas.

En el caso general de sistemas desbalanceados se utilizarán formulaciones trifásicas que permitan considerar directamente todos los desbalances del sistema, incluyendo la generalización de estos estudios al caso multifrecuencia, de manera de incluir las componentes armónicas de voltajes y corrientes.

1.1.1 Justificación de los estudios trifásicos

Los estudios tradicionales en sistemas de potencia consideran que los componentes de la red son balanceados; por lo tanto, al utilizar la transformación de componentes simétricas las redes de secuencia quedan desacopladas. Como los voltajes internos de los generadores son generalmente balanceados, sólo el voltaje de secuencia positiva es distinto de cero y en consecuencia sólo es necesario estudiar la red de secuencia positiva.

En la práctica se encuentra que sólo algunos elementos del sistema son balanceados. A continuación se mencionan algunos elementos y condiciones de operación que ocasionan desbalances en el sistema:

- Cargas desbalanceadas
- Líneas de transmisión sin transposiciones
- Transformadores trifásicos formados por unidades monofásicas distintas y/o con cambiadores de taps independientes para cada fase
- Apertura/Recierre monopolar

Al utilizar únicamente la red de secuencia positiva en sistemas reales se hacen simplificaciones; por lo tanto, los resultados que se obtienen son aproximados. Para lograr una representación más cercana a la realidad es necesario modelar todos los desbalances del sistema.

En el estudio de redes desbalanceadas las transformaciones matemáticas no ofrecen ninguna ventaja; esto se debe a que para desacoplar el modelo matricial de cada elemento se requiere una matriz de transformación distinta. Es por ésto que los estudios de sistemas desbalanceados se realizan en componentes de fase (abc).

A continuación se mencionan algunas de las ventajas que se obtienen de modelar el sistema de potencia en componentes de fase (abc):

- La modelación es más exacta y general.
- Es fácil modelar elementos y conexiones especiales, incluyendo condiciones de operación poco comunes.
- Se utilizan variables reales del sistema y no variables transformadas, permitiendo la visualización directa de resultados.
- Es posible representar cualquier punto del sistema, no exclusivamente nodos trifásicos, por ejemplo, neutros de elementos.
- Es factible implantar restricciones no convencionales, v.g. control de potencia en generadores y líneas de transmisión por fase.

1.1.2 Justificación de los estudios armónicos

En estudios convencionales se considera que el voltaje y la corriente son señales sinusoidales de una sola frecuencia. Sin embargo, en los sistemas eléctricos de potencia (SEP's) existen elementos no-lineales que distorsionan dichas señales produciendo señales armónicas en las ondas de voltaje y corriente. Hasta hace algunos años estas distorsiones eran despreciables, debido a que eran causadas por pequeñas no-linealidades en el diseño o en la condición de operación de algunos elementos del sistema de potencia. Sin embargo, en los últimos años se ha incrementado notablemente la presencia de armónicas debido a algunos factores [1, 2]:

- Uso intensivo de dispositivos que utilizan elementos de estado sólido, las cuales recortan las formas de onda de corriente, v.g. rectificadores, inversores, etc.

- Incremento en el uso de capacitores para compensación de reactivos. Esto introduce la posibilidad de resonancias entre estos elementos y las reactancias inductivas de elementos vecinos, lo cual puede generar la amplificación de las señales armónicas.

- Disminución en los márgenes de diseño de equipos para reducir costos de producción. Esto ocasiona que los equipos actuales sean más sensibles a la presencia de armónicas.

Algunos de los problemas causados por las armónicas son:

- Sobrecarga de capacitores. Las armónicas pueden aumentar o disminuir el valor cresta del voltaje, lo cual impacta en la tensión dieléctrica. Como resultado se producen condiciones de operación críticas que pueden causar la destrucción del elemento.

- Aparición de valores altos de voltaje y corriente debido a resonancias.

- Ruido en señales de control en el rango de audiofrecuencias, por ejemplo, en sistemas de onda portadora para la protección tipo piloto de líneas de transmisión.

- Aumento en el calentamiento y pérdidas en máquinas rotatorias, además de la aparición de pares parásitos.

- Problemas en el aislamiento de cables debido al incremento de la tensión dieléctrica.

- Interferencia en sistemas de comunicación cercanos.

- Errores en equipos de medición, debido a que generalmente los diseños consideran señales sinusoidales puras.

- Operación anormal de sistemas de rectificación de estado sólido, especialmente cuando el funcionamiento se basa en el cruce por cero de la señal de voltaje, el cual puede moverse debido a la presencia de armónicas.

- Fallas en el funcionamiento de dispositivos de protección.

Adicionalmente, las armónicas pueden causar incremento en las pérdidas del sistema, el funcionamiento inadecuado, envejecimiento acelerado y en ocasiones la destrucción de algunos elementos del sistema. Por estos motivos es necesario evaluar la penetración de armónicas en la red eléctrica, de manera de diseñar medidas correctivas, tales como la colocación de filtros, y la modificación del diseño de equipo, entre otras.

1.1.3 Reseña histórica del problema de armónicas

En un sistema eléctrico ideal la energía es generada y suministrada con señales sinusoidales —voltaje y corriente— de una sola frecuencia. En los sistemas reales lo anterior no se cumple, ya que existen elementos internos y externos a la red eléctrica que deforman las señales de voltaje y corriente. Utilizando la transformada de Fourier[3] es posible descomponer estas señales en una serie de componentes de varias frecuencias que son múltiplos de la fundamental, las cuales son llamadas armónicas.

Desde tiempo atrás se ha tenido conocimiento de la presencia de armónicas en las redes eléctricas, sin embargo, al principio sólo eran generadas por causas internas —debidas al diseño y punto de operación del sistema,— lo cual producía niveles de distorsión pequeños que podían ser despreciados.

Con la aparición de rectificadores y convertidores estáticos se originó un incremento en la atención prestada a las armónicas, debido a que se empezó a observar que las señales de voltaje y corriente estaban considerablemente distorsionadas[1]. La atención se centró en los efectos ocasionados a máquinas síncronas y de inducción, en las fallas de capacitores de potencia y en los problemas de interferencia telefónica.

Un estudio realizado en 1920 en una línea de transmisión de 20 kV mostraba[1]:

- Que la presencia de un 7% en la tercera armónica en el nodo de emisión resultaba en un 53% en el nodo de recepción.
- La reducción del contenido de armónicas en el nodo de recepción de 53% a 28% para carga máxima.
- El cambio del factor de potencia —lado del generador— de 0.85 con la presencia de armónicas a 0.96 sin ellas.
- El cambio del factor de potencia —lado de la carga— de 0.75 con armónicas a 0.82 sin considerarlas.

En ese tiempo los problemas de armónicas se resolvieron construyendo equipo más robusto y reduciendo el acoplamiento eléctrico entre circuitos. Por otro lado, la conexión apropiada de elementos redujo notablemente la propagación de armónicas, por ejemplo, transformadores conectados en delta *atrapan* las armónicas de secuencia cero —de orden $3k$, para k entero. Sin embargo, debido a la circulación de corrientes en la delta aumentan las pérdidas.

Las primeras aplicaciones industriales de rectificadores causaron fenómenos no esperados en los sistemas de comunicación [4]. Una de las primeras aplicaciones fue en una refinería de cobre al oeste de los EUA; cuando se energizó la instalación, se interrumpió el sistema telefónico transcontinental. Las líneas que alimentaban los rectificadores estaban en paralelo con los conductores de las líneas telefónicas, y las armónicas generadas por los rectificadores indujeron voltajes muy altos en las líneas telefónicas creando un ruido que interrumpió las conversaciones. Otro caso similar ocurrió en una mina al este de Canadá; cuando se energizó un rectificador de potencia, introdujo ruido en las líneas de comunicación —las cuales estaban en paralelo con la alimentación del rectificador,— lo cual impidió atender las llamadas de auxilio.

Al final de la década de los veinte, un grupo de trabajo formado por representantes de compañías de manufactura, suministro eléctrico y telefónicas, se dedicó a estudiar

los problemas causados por armónicas en los sistemas de comunicación y a establecer estándares para reducir este problema. Se establecieron límites en la distancia entre líneas de potencia y líneas de comunicaciones, y en el nivel del ruido inducido. Los estándares fueron registrados en publicaciones del Instituto Eléctrico Edison y el AIEE.

La aplicación inicial de rectificadores fue principalmente en la industria electroquímica, allí se minimizó el problema introduciendo circuitos de rectificación de mayor número de pulsos, los cuales resolvieron satisfactoriamente el efecto adverso de las armónicas.

Sin embargo, con la introducción de rectificadores de bajo costo y alta eficiencia en la década de los sesentas, se incrementó enormemente la inyección de armónicas en el sistema. Hoy en día estos equipos se encuentran en la mayor parte de los procesos industriales, lo cual ha generado una nueva situación: las armónicas pueden ser generadas, propagadas e inyectadas en todos los nodos de la red eléctrica. Esto ha aumentado notablemente la presencia de armónicas en los sistemas eléctricos, generando mayores problemas a los componentes de la red, a los usuarios del sistema y a los circuitos de comunicación cercanos.

1.2 Estudios de frecuencia fundamental

Los estudios de redes eléctricas se pueden clasificar en estudios de estado estable y de estado transitorio. En los estudios de estado estable se considera que las formas de onda de las señales eléctricas no cambia; esto permite representar a las señales en forma fasorial, lo cual simplifica los cálculos. En los estudios transitorios la forma de onda de las señales cambia, lo cual obliga a trabajar con las señales en el tiempo.

Los estudios de estado estable pueden ser de frecuencia fundamental o armónicos; para el primer caso se considera que las señales eléctricas son sinusoidales puras, en el segundo caso se consideran señales deformadas.

Se presenta una breve descripción de los estudios más comunes en sistemas de potencia, señalando su utilización en el análisis de las redes eléctricas. En cada caso se señalan las diferencias entre los estudios convencionales y los estudios trifásicos, y se enumeran las ventajas más importantes del uso de las formulaciones trifásicas.

1.2.1 Estudios de fallas

Una falla es la conexión no planeada de uno o varios puntos de la red eléctrica, generalmente a través de impedancias. Los estudios de fallas se realizan principalmente para seleccionar las capacidades y tiempos de operación de elementos de protección. También se utilizan para establecer estrategias de operación sin violar límites de corto circuito.

Los estudios de fallas permiten obtener la distribución de corrientes en la red al ocurrir un disturbio en el sistema. Se parte de un estado inicial, definido por inyecciones nodales de corriente, que representan la carga y la generación, o por voltajes nodales para esas condiciones de operación. El estado inicial se toma de una corrida de flujos de potencia, o se considera un perfil plano de voltaje.

Los estudios de fallas modernos consisten básicamente en resolver las ecuaciones nodales del sistema de potencia. La diferencia entre las diversas formulaciones consiste en la modelación de la red eléctrica; la estructura de las ecuaciones para las diversas formulaciones de fallas es la misma, sólo cambian las variables que representa cada elemento de las ecuaciones [5, 6, 7, 8, 9].

En los estudios de redes balanceadas el problema se simplifica porque las ecuaciones de la red en componentes de secuencia ($o+-$) son desacopladas y sólo la red de secuencia positiva está energizada. Cuando se estudian fallas balanceadas en redes balanceadas el problema se reduce al análisis de una red monofásica, la red de secuencia positiva [6, 7].

En el estudio de fallas desbalanceadas en redes balanceadas, las redes de secuencia

($o+-$) del sistema están desacopladas, pero se interconectan a través de la red de falla; en este caso se tienen que incluir en el estudio las tres redes de secuencia. En estos casos se sigue utilizando la transformación de componentes simétricas, debido a que es mejor trabajar con tres redes de secuencia de orden n —n es el número de nodos— que con una red trifásica de orden 3n.

Los estudios de fallas trifásicas son similares a los estudios de redes balanceadas, sólo que en este caso se modelan los elementos en cantidades de fase [5, 9]; la estructura de las ecuaciones es la misma que para las formulaciones tradicionales. Estos estudios permiten visualizar y analizar directamente los resultados, la desventaja es que los recursos computacionales requeridos en la solución se incrementan.

1.2.2 Estudios de flujos de potencia

Los estudios de flujos de potencia permiten obtener los voltajes nodales en estado estable para distintas condiciones de operación: niveles de generación, condiciones de carga, ajuste de controles, etc. Una vez determinados los voltajes nodales es posible evaluar los flujos de potencia en los elementos del sistema [6, 7, 5].

Los estudios de flujos de potencia también se utilizan en la planeación y operación de redes eléctricas para estudiar el efecto de la topología de la red o las condiciones de operación del sistema. En todos los casos interesa conocer si las condiciones de operación propuestas satisfacen los requerimientos de buen servicio a los consumidores, v.g. niveles de voltaje, límites térmicos y de estabilidad en líneas, confiabilidad del suministro, pérdidas de transmisión, etc.

La representación matemática del problema consiste en un conjunto de ecuaciones de forma $f(x) = 0$, donde x son los voltajes nodales y $f(x)$ son en general funciones no lineales que definen las restricciones del sistema, v.g. especificaciones de carga, generación, límites de flujos de potencia, voltajes controlados, etc.

La diferencia entre los estudios en sistemas balanceados y desbalanceados se encuentra en las ecuaciones a resolver y en el modelado de la red eléctrica; en el caso balanceado el análisis se reduce al estudio de una red monofásica, en el caso desbalanceado se debe estudiar la red trifásica.

En el caso balanceado las funciones $f(x)$ definen los valores totales de las cargas y la generación trifásicas y sólo se puede simular el control de la magnitud del voltaje de secuencia positiva. La formulación trifásica permite especificar condiciones de carga y generación por fase; en los nodos de voltaje controlado se puede implantar el control de una variable que es función de los voltajes de fase —el voltaje de secuencia positiva es un caso particular de esta variable. Una de las ventajas de la formulación trifásica es la versatilidad para simular condiciones de operación especiales [6, 7, 5].

1.2.3 Estudios de estabilidad

En condiciones estables todos los generadores se encuentran operando en sincronía; los equipos de control de generadores —sistemas de excitación y gobernadores de velocidad— realizan ajustes mediante cambios pequeños. Al ocurrir un disturbio, los sistemas de control actúan tratando de restablecer el equilibrio en generadores y con esto mantener la operación síncrona del sistema.

El objetivo de los estudios de estabilidad es determinar si ante disturbios algún generador del sistema pierde sincronismo. La forma más completa de determinar la estabilidad de sistemas de potencia requiere representar los generadores y sus controles: sistemas de excitación y gobernadores, mediante ecuaciones diferenciales y algebraicas cuya solución determina la evolución en el tiempo de las variables modeladas.

La varible que se utiliza como parámetro para determinar la estabilidad es el ángulo de carga (δ), el cual mide la posición angular del rotor respecto a una referencia que gira a la velocidad síncrona. Si δ aumenta indefinidamente el sistema es inestable, si δ

alcanza un estado de equilibrio después de un período de oscilación, el sistema es estable.

En los estudios tradicionales las variables del estator de las máquinas síncronas se representan en coordenadas (dqo), ésto resulta en un sistema de ecuaciones invariante en el tiempo, lo cual simplifica notablemente la solución. Sin embargo, este modelo sólo permite realizar estudios bajo condiciones balanceadas.

La representación de las variables del estator en coordenadas de fase (abc) permite simular condiciones de operación desbalanceadas [33]. El modelo de la máquina en coordenadas de fase resulta en un sistema de ecuaciones con parámetros variables en el tiempo, lo cual ocasiona un incremento grande en los requerimientos de cálculo.

En la modelación trifásica la matriz de inductancias cambia con el tiempo, para cada paso de integración es necesario evaluar e invertir la matriz de inductancias, lo cual representa una carga computacional grande.

La ventaja de la formulación trifásica es la versatilidad para simular condiciones de operación desbalanceadas y conexiones poco comunes, las cuales no se pueden realizar con las formulaciones convencionales balanceadas.

1.3 Estudios de armónicas

Considerando el grado de complejidad y exactitud del estudio, los métodos para evaluar la penetración de armónicas se clasifican en tres grupos generales [10]:

- Análisis linealizado
- Análisis no-lineal multifrecuencia
- Simulación no-lineal en el tiempo

La diferencia entre los estudios balanceados y desbalanceados consiste principalmente en la modelación de la red eléctrica, que puede ser a través de las ecuaciones nodales de secuencia positiva o de ecuaciones nodales trifásicas. En general, en estudios de armónicas se recomienda utilizar formulaciones trifásicas, debido a que los desbalances de la red son más notables a medida que la frecuencia aumenta.

Los modelos de la red para cada frecuencia pueden considerarse acoplados o desacoplados. Para los componentes pasivos el acoplamiento entre frecuencias es despreciable, por lo cual se requieren modelos desacoplados de la red para cada frecuencia; de esta forma se tendrá un problema independiente —sistema de ecuaciones nodales— para cada frecuencia.

1.3.1 Análisis linealizado

El análisis linealizado [10, 11] supone una forma de onda de corriente conocida en los elementos no-lineales —fuentes de armónicas— la cual es independiente de los voltajes armónicos en terminales del elemento; generalmente el cálculo de las corrientes armónicas se realiza con modelos simplificados, suponiendo que sólo existe el voltaje de frecuencia fundamental. Es evidente que esta técnica no funciona cuando las corrientes armónicas son dependientes de los voltajes terminales.

El proceso de cálculo consiste en resolver sistemas de ecuaciones simultáneas —ecuaciones nodales del sistema para cada frecuencia— para vectores independientes conocidos —corrientes armónicas. Con esta técnica la solución se obtiene sin iteraciones.

Esta técnica de evaluación de penetración de armónicas es la más sencilla, requiere pocos recursos computacionales y tiempos de evaluación reducidos; sin embargo, la solución que se obtiene es aproximada. El grado de exactitud de la solución depende de la aproximación de las formas de onda utilizadas para las corrientes armónicas.

1.3.2 Análisis no-lineal multifrecuencia

En el análisis no-lineal para diferentes frecuencias existen dos métodos generales. El primero acopla los modelos de elementos no-lineales con la matriz de admitancia del sistema para encontrar una solución iterativa; este método es propiamente una extensión del método de inyección de corrientes. El segundo método es el estudio de flujo de potencia armónico, el cual combina las ecuaciones de los elementos no-lineales con las ecuaciones de un estudio de flujo de potencia con el fin de encontrar la distribución de corrientes armónicas en la red eléctrica para la especificación de carga y generación.

Los estudios de flujos armónicos son los métodos más utilizados para evaluar el estado estable del sistema en presencia de cargas no-lineales, esto se debe a que la solución se obtiene en función de la especificación de potencias en nodos de generación y carga. Los recursos computacionales y el tiempo requerido para llegar a la solución son considerablemente más reducidos que los utilizados por la simulación en el dominio del tiempo.

1.3.3 Simulación no-lineal en el tiempo

La simulación no-lineal en el tiempo resuelve directamente un conjunto de ecuaciones diferenciales no-lineales que representan tanto a los elementos convencionales del sistema de potencia como a las cargas no-lineales. Los convertidores son modelados como un conjunto de interruptores ideales con una carga lineal.

La solución se obtiene especificando un conjunto de condiciones iniciales para las variables de estado del sistema e integrando las ecuaciones en el tiempo. Los resultados muestran el comportamiento del sistema desde el punto inicial hasta el estado estable.

Este método de análisis se ha aplicado utilizando computadoras digitales, analógicas e híbridas, así como el analizador de transitorios de redes (TNA). En las simulaciones

mediante computadora digital, el tiempo de solución y los recursos computacionales requeridos se incrementa con el orden del sistema. Generalmente se requiere un gran número de ciclos antes de alcanzar el estado estable. El tiempo de integración debe ser pequeño debido al número de interruptores ideales que simulan el convertidor. Si el estado transitorio no es de intéres, la elección apropiada de las condiciones iniciales acorta el tiempo para llegar a la solución.

1.4 Fuentes de armónicas

Las fuentes generadoras de armónicas pueden dividirse en dos grupos generales: las internas a la red y las externas. El efecto del primer grupo se ha incrementado en los últimos años. El efecto del segundo grupo empezó prácticamente en los años veintes con la introducción del rectificador estático, y se acentuó a partir de 1965 con su aplicación generalizada.

Las armónicas siempre han existido en las redes eléctricas, pero en los últimos años algunos factores han contribuido a aumentar su efecto en los sistemas eléctricos:

- Uso generalizado de dispositivos basados en elementos de estado sólido, por ejemplo, rectificadores controlados de silicio (SCR).
- Cambios drásticos en los márgenes de diseño de equipos. La filosofía actual es construir equipos en la forma más económica posible, lo cual los hace más sensibles a los efectos de armónicas. Por ejemplo, en el caso de equipos con núcleos electromagnéticos, el punto de operación está ahora más cerca de la característica no lineal, lo cual ocasiona una aumento en la generación de armónicas.

1.4.1 Fuentes de armónicas internas

Entre las causas internas más importantes en la generación de armónicas se tienen las siguientes [1]:

Deformación o rizo en la forma de onda del voltaje de máquinas eléctricas debido a pulsaciones rápidas y oscilaciones del flujo magnético causado por el movimiento de los polos frente a las proyecciones de los dientes de la armadura.

Variación de la reluctancia del entrehierro debido a la inclinación del polo de la máquina síncrona, lo cual genera variaciones en el flujo magnético que afecta la forma de onda y se traduce en generación de armónicas.

Distorsión del flujo magnético en máquinas síncronas debida a efectos de carga. Los cambios grandes de carga provocan cambios súbitos de la velocidad sin cambios en el flujo magnético, lo cual causa una distorsión de la señal.

Generación de fem's no sinusoidales ocasionadas por la distribución no sinusoidal del flujo magnético en el entrehierro de las máquinas síncronas.

Saturación de circuitos magnéticos debida a condiciones de operación.

Conversión de frecuencias en máquinas síncronas.

1.4.2 Fuentes de armónicas externas

La mayor parte de las fuentes externas a la red son ocasionados por dispositivos de estado sólido:

Control de velocidad de motores utilizando semiconductores, que producen formas de onda con alto contenido de armónicas.

Estrategias para la conservación de la energía, uso de semiconductores y microprocesadores para mejorar la eficiencia y el ajuste de carga en motores. Las formas de onda de voltajes y corrientes de estos dispositivos son muy irregulares.

Hornos y molinos eléctricos para usos industriales, que ocasionan desbalances y formas de ondas irregulares de voltajes y corrientes.

Transmisión de corriente directa en alto voltaje, en que la conversión de CA a CD y viceversa produce corrientes armónicas; sin embargo, es norma utilizar filtros en el lado de CA, con lo cual se reduce apreciablemente la inyección de armónicas al sistema.

Interconexión de fuentes alternas de energía al sistema, v.g. generadores solares y eólicos; se requiere utilizar convertidores para hacer el enlace con la red, generando la inyección de armónicas al sistema.

Automóviles eléctricos, actualmente se observa una tendencia a utilizarlos para disminuir problemas de contaminación. Esto representará en el futuro un aumento en el uso de rectificadores para la carga de baterías.

1.5 Revisión histórica de estudios de flujos trifásicos multifrecuencias

El análisis de redes eléctricas se realiza tradicionalmente considerando que el sistema es balanceado y que las señales eléctricas son sinusoidales puras. Lo anterior ha reducido el estudio a la red monofásica de secuencia positiva de frecuencia fundamental.

En años anteriores estas simplificaciones eran necesarias debido a la capacidad reducida de los equipos de cómputo. En nuestros días la capacidad de las computadoras permite realizar estudios trifásicos multifrecuencias, lo que facilita simular las condiciones de operación reales de los sistemas eléctricos.

Las primeras innovaciones a los estudios de flujos tradicionales se enfocaron a modelar los desbalances del sistema considerando sólo la frecuencia fundamental, lo que resultó en los estudios de flujos de potencia trifásicos [12, 13, 14, 15].

Con el transcurso del tiempo se han reportado diversas variantes de estudios de flujos de potencia trifásicos, los algoritmos difieren en la forma de modelar el funcionamiento interno balanceado del generador, en la representación de las variables complejas, ya sea en forma rectangular o polar y en el método para solucionar el conjunto de ecuaciones que definen el problema, v.g. Newton-Raphson, Gauss-Seidel, etc.

El funcionamiento interno balanceado del generador se puede considerar agregando al conjunto de ecuaciones del estudio de flujos, ecuaciones que definan el balance de los voltajes internos [12]. También se puede considerar esta situación sustituyendo en el modelo para las fases b y c el voltaje de la fase a desplazado $-120°$ y $+120°$ respectivamente [13]. En la referencia [14] se definió el funcionamiento interno balanceado del generador agregando al modelo tradicional del generador ecuaciones que expresan esa situación.

También se han desarrollado formulaciones trifásicas representando a las variables en coordenadas rectangulares [12] y polares [13, 15]; las ventajas y desventajas para cada caso son las mismas que en los estudios tradicionales. Las formulaciones rectangulares son más sencillas de derivar, mientras que con las formulaciones polares se tiene un menor número de ecuaciones a resolver; además, las formulaciones polares permiten simplificar el problema mediante las formulaciones desacopladas [15].

Para resolver las ecuaciones de flujos trifásicos se han utilizado los métodos de Gauss [14] y de Newton-Raphson [12, 13, 15]; el método de Gauss es muy sencillo de implementar y requiere pocos recursos computacionales, sin embargo el número de iteraciones requerido para llegar a la solución es grande y aumenta de acuerdo con el número de ecuaciones a resolver. El método de Newton Raphson requiere más trabajo de codificación y mayores recursos computacionales, pero generalmente converge de 2 a 5 iteraciones,

independientemente del número de ecuaciones a resolver.

Una vez generalizado el estudio de flujos de potencia a una formulación trifásica, el siguiente paso fue considerar varias frecuencias. A continuación se revisa la evolución de los estudios armónicos.

Los primeros estudios que consideraban señales con varias frecuencias eran puntuales, esto es, no consideraban toda la red, sólo consideraban el nodo donde se encontraba la fuente de armónicas y en ocasiones algunos nodos vecinos.

En la referencia [4] se presenta un estudio ilustrativo de distribución de armónicas en un sistema industrial. El análisis se realiza obteniendo relaciones de impedancias para definir la trayectoria que siguen las corrientes desde la fuente de armónicas hacia los nodos vecinos y la fuente de alimentación. No se modela con detalle la fuente de armónicas, se asume que las corrientes armónicas dependen de la fundamental $I(h) = I(1)/h$ —donde h es el valor de la armónica— o se utilizan valores típicos para el elemento no-lineal. El sistema de alimentación se representa como una barra infinita atrás de la impedancia de cortocircuito.

El primer algoritmo para evaluar la distribución de corrientes armónicas en redes eléctricas se denominó estudio lineal de armónicas [11, 10]. El método determina la solución del sistema de ecuaciones nodales de la red para cada armónica; una vez calculados los voltajes se aplican a las terminales de cada elemento para evaluar la distribución de corrientes. En estas formulaciones se consideran conocidas las corrientes armónicas inyectadas, obtenidas mediante mediciones, utilizando valores típicos o calculadas en base al valor de frecuencia fundamental $I(h) = I(1)/h$.

Los primeros estudios de flujos de potencia armónicos consideraban al sistema balanceado [16, 17]; las formulaciones se basaron en incluir en las ecuaciones de los estudios de flujos las ecuaciones de los elementos no-lineales.

El trabajo pionero en esta área fue de D. Xia [16, 18], quien desarrolló en detalle las ecuaciones para evaluar las corrientes de un puente rectificador de onda completa y las incluyó en las ecuaciones del estudio de flujos de frecuencia fundamental para satisfacer la especificación de potencia en el nodo del rectificador. El método requiere de grandes desarrollos para modelar cada elemento no-lineal; además, la implementación del estudio de flujos es laboriosa y diferente para cada caso.

Se desarrolló otra formulación de estudios de flujos armónicos en sistemas balanceados [17]; en este trabajo, basado en el principio de superposición, se introdujo el concepto de análisis armónico iterativo (AAI), el cual consiste en resolver en forma alternada las ecuaciones del estudio de flujos y las ecuaciones de los elementos no-lineales. En la solución del estudio de flujos los elementos no-lineales se sustituyen por equivalentes Norton. Esta forma de considerar los elementos no-lineales no requiere reformular el problema de flujos de potencia y pueden incluirse fácilmente elementos no-lineales de naturaleza distinta, v.g. reactores controlados por tiristores (RCT), máquinas síncronas, transformadores, etc.

En el trabajo anterior se modela como fuente de armónicas un RCT; el algoritmo permite calcular el ángulo de conducción de los tiristores para las condiciones de operación especificadas. La convergencia del ángulo de conducción se realiza mediante rectas características —magnitud del voltaje contra corriente reactiva— del sistema y del RCT. La característica del sistema se aproxima con el equivalente de la red en el nodo del RCT o se evalúa mediante puntos sucesivos previamente calculados.

Utilizando el AAI es posible generalizar fácilmente un estudio de flujos trifásico [12, 5] a un estudio trifásico multifrecuencias [19]. En la referencia [19] se presenta un estudio de flujos armónico utilizando como fuentes de armónicas un RCT; este trabajo es una continuación del previamente reportado por el mismo autor [17]. Con esta formulación es posible considerar los desbalances del sistema. Además, en un artículo complementario [20] se presenta otra alternativa para evaluar el ángulo de conducción del RCT, se utiliza la historia de los valores previos del ángulo para obtener el valor actual con el método

de la secante.

En la referencia [21] se analizan las causas por las cuales el AAI puede tener problemas de convergencia, proponiendo una solución alterna. Encuentra que el AAI puede diverger si la impedancia del sistema es grande o si el elemento no-lineal es muy sensible a los cambios en los voltajes armónicos.

Uno de los problemas que más se han abordado es el estudio de flujos considerando enlaces de corriente directa [22, 23]. D. Xia reporta una extensión a su trabajo inicial [16] en la cual se incluyen los enlaces de CD [22]. En este trabajo se realiza un estudio de flujos de potencia modelando con detalle los convertidores e inversores del enlace de CA-CD.

En la referencia [23] se evalúa la generación de armónicas no características en un convertidor AC-DC debido a desbalances en la red de CA. Se concluye que la magnitud de las armónicas no características aumenta conforme se incrementa el factor de desbalance (FDB) —relación entre las magnitudes de los voltajes de secuencia positiva y negativa.

1.6 Contenido de la tesis

La tesis consta de siete capítulos, referencias bibliográficas y ocho apéndices, a continuación se describe brevemente su contenido.

En el presente capítulo se expone la motivación que llevó a la realización de este trabajo, y se justifica la necesidad de desarrollar formulaciones para realizar estudios trifásicos y de penetración de armónicas en sistemas eléctricos. Se describe la evolución de las distintas formulaciones que se han desarrollado para realizar estos estudios. Se presenta una descripción de los estudios realizados en sistemas de potencia, tanto de frecuencia fundamental como a las frecuencias armónicas, indicando las diferencias de

las formulaciones balanceadas y trifásicas. Finalmente, se mencionan los elementos y condiciones de operación del sistema que propician la generación de armónicas.

En el capítulo 2 se presentan técnicas para el análisis de señales no sinusoidales. En la primera sección se trabaja con la transformada de Fourier. Se considera tanto el caso continuo como el discreto de esta transformación, y se muestran los casos particulares de simetrías de formas de onda. En la segunda sección se desarrollan expresiones para evaluar en señales con armónicas los valores rms de voltaje y corriente, la potencia promedio, los voltamperes aparentes y reactivos y los índices para medir el grado de contaminación.

En el capítulo 3 se presentan modelos trifásicos dependientes de la frecuencia de los componentes de la red eléctrica. Se incluyen en detalle modelos activos —fuentes de armónicas— del reactor controlado por tiristores y de la máquina síncrona, para esta última se modelan los fenómenos de conversión de frecuencia y de saturación del flujo principal. Se presentan modelos pasivos de los elementos convencionales del sistema eléctrico.

En el capítulo 4 se desarrollan en detalle formulaciones para realizar estudios de flujos de potencia trifásicos de frecuencia fundamental. Se incluyen los algoritmos que permiten implementar estas formulaciones en un programa digital. Se presentan y analizan resultados de casos de estudio.

En el capítulo 5 se desarrolla un formulación para estudios de flujos de potencia armónicos. Se generalizan las formulaciones trifásicas de frecuencia fundamental del capítulo 4 para considerar múltiples frecuencias. Se incluye en forma detallada un algoritmo para realizar estos estudios. Se presentan diversos algoritmos para evaluar el ángulo de conducción del RCT. Se presentan casos de estudio realizados en sistemas de prueba. Mediante casos de estudio se analizan y comparan los algortimos para calcular el ángulo de conducción del RCT.

En el capítulo 6 se realizan estudios trifásicos lineales —resolviendo sólo ecuaciones lineales. Para la frecuencia fundamental se estudia la resonancia en líneas de transmisión acopladas con compensación inductiva paralelo, para frecuencias armónicas se realizan estudios linealizados de penetración de armónicas.

En el capítulo 7 se presentan las conclusiones del trabajo agrupadas por temas. Además, se incluyen recomendaciones para la realización de estudios futuros.

En los apéndices A y B se presentan desarrollos algebraicos para implementar los algoritmos de flujos de potencia. En los apéndices C, D y E se muestran los datos de los sistemas de estudio utilizados. En el apéndice F se presenta una clasificación general de los efectos de las armónicas y se indica cómo afectan a cada componente del sistema. En el apéndice G se presentan estándares de límites de armónicas. En el apéndice H se desarrollan ecuaciones para evaluar los valores del capacitor que causan resonancia en líneas acopladas con compensación en derivación, se consideran condiciones con y sin fallas en la línea desconectada.

Capítulo 2

ANÁLISIS DE SEÑALES ARMÓNICAS

En este capítulo se presentan técnicas para el análisis de señales no-sinusoidales. En la primera sección se considera la transformada de Fourier para los distintos casos. En la siguiente sección se presentan los conceptos para el análisis de señales eléctricas no-sinusoidales.

En el estudio de armónicas la transformada de Fourier es una herramienta indispensable, permite realizar el análisis en el dominio de la frecuencia de una señal no-sinusoidal, si no se dispusiera de esta herramienta se tendría que hacer el estudio en el tiempo con ecuaciones diferenciales.

El estudio de redes eléctricas tradicionalmente sólo considera la frecuencia fundamental; las definiciones de voltaje, corriente y potencia comúnmente sólo se tienen para esas condiciones.

En este capítulo se desarrollan expresiones para evaluar los componentes analíticos de las señales eléctricas no-sinusoidales, v.g. valores rms de voltaje y corriente, potencia promedio o real, voltamperes aparentes y reactivos, etc. También se presentan índices

para medir los grados de contaminación de armónicas en las señales.

2.1 Transformada de Fourier

En esta sección se presentan los conceptos de transformada de Fourier para señales continuas y discretas. Se estudia el caso de señales periódicas y los casos particulares de simetría de formas de onda.

Una señal se puede analizar de dos formas diferentes. La forma más común es en el dominio del tiempo; esta forma es la que se tiene al observar la señal en un osciloscopio, en el eje de las abscisas se tiene al tiempo (t) y en el eje de las ordenadas la magnitud de la señal $f(t)$. La segunda forma es la representación de la señal en el dominio de la frecuencia, la cual se obtiene con un analizador del espectro de frecuencias, la señal $F(w)$ se observa como función de la variable w.

El proceso de pasar una señal del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia se conoce como transformada de Fourier, a su vez, al proceso de pasar del dominio de la frecuencia al dominio del tiempo se denomina transformada inversa de Fourier.

Las ecuaciones (2.1) y (2.2) relacionan las señales en el dominio del tiempo y la frecuencia. La primera representa la transformada de Fourier de $f(t)$, se le llama integral de Fourier o ecuación de análisis. La segunda representa la transformada inversa de Fourier, se le denomina también la ecuación de síntesis.

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-jwt}dt \tag{2.1}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{jwt}dw \tag{2.2}$$

En el caso general de tener una señal no periódica, al aplicar la transformada de Fourier se obtiene una función $F(w)$ que es continua. En el caso de una señal periódica,

la transformada de Fourier $F(w)$ es una señal discreta. Al caso particular de la transformación de Fourier de señales periódicas se le conoce como series de Fourier.

2.1.1 Series de Fourier

Una función periódica se define como una señal que se repite cada cierto tiempo (2.3):

$$f(t) = f(T + t) \qquad \text{para todo } t \tag{2.3}$$

donde T es el período de tiempo con el cual la función se repite.

Las señales periódicas pueden representarse como la suma de una señal constante, una señal de frecuencia fundamental y señales de frecuencia que son múltiplos de la fundamental.

2.1.2 Forma trigonométrica

La serie de Fourier de una señal periódica tiene la forma de (2.4):

$$f(t) = a_o + \sum_{h=1}^{\infty} (a_h \cos(hw_o t) + b_h \text{sen}(hw_o t)) \tag{2.4}$$

Donde: $w_o = 2\pi/T$ es la frecuencia fundamental, T el período de la señal $f(t)$. Las cantidades a_h y b_h se denominan los coeficientes de Fourier.

Cada término de la sumatoria:

$$F(hw_o) = a_h \cos(hw_o t) + b_h \text{sen}(hw_o t) \tag{2.5}$$

define una armónica de la función $f(t)$, la frecuencia de esta armónica es h veces la frecuencia de la señal fundamental. El término a_o representa una componente constante.

Ejemplo:

Dada la representación de una señal en el dominio de la frecuencia expresar dicha señal en el dominio del tiempo:

$$a_o = 1$$
$$b_1 = 4$$
$$a_3 = -.5$$
$$b_3 = 1$$
$$a_5 = .3$$

La función en el dominio del tiempo se obtiene a partir de los coeficientes de Fourier:

$$f(t) = 1 + 4\text{sen}(w_o t) - .5\cos(3w_o t) + \text{sen}(3w_o t) + .3\cos(5w_o t)$$

La ecuación anterior sintetiza la función en el dominio del tiempo a partir de sus componentes de frecuencia. En la Figura 2.1 se tiene la representación gráfica de la señal en el dominio del tiempo y de la frecuencia.

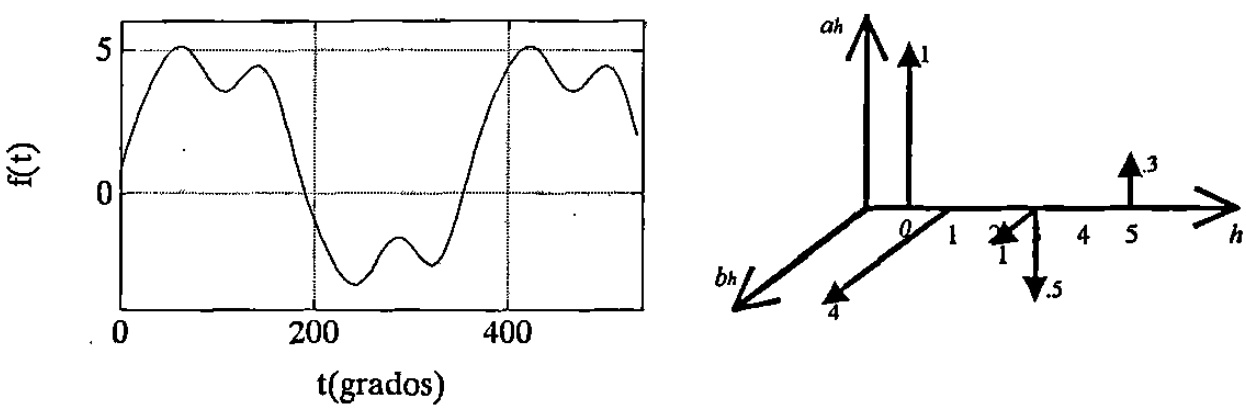

Figura 2.1: Representación de una señal en los dos dominios

2.1.2.1 Cálculo de los coeficientes de Fourier

Las ecuaciones (2.6) a (2.8) se utilizan para calcular los coeficientes de Fourier.

$$a_o = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt \tag{2.6}$$

$$a_h = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(hw_o t)dt \tag{2.7}$$

$$b_h = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\mathrm{sen}(hw_o t)dt \tag{2.8}$$

Las ecuaciones (2.6) a (2.8) equivalen a la ecuación de análisis (2.1) para el caso particular donde $f(t)$ es periódica. La ecuación (2.4) equivale a la ecuación de síntesis (2.2).

2.1.3 Forma compleja de la serie de Fourier

En la ecuación (2.5) se observa que cada armónica está representada por dos cantidades reales. Existe una forma alterna de representar cada armónica a través de dos cantidades que son el módulo y el argumento de un número complejo.

Utilizando la fórmula de Euler en las funciones trigonométricas de (2.5) se obtiene:

$$F(hw_o) = a_h\frac{e^{jhw_o t} + e^{-jhw_o t}}{2} + b_h\frac{e^{jhw_o t} - e^{-jhw_o t}}{2j}$$

Realizando operaciones se obtiene:

$$F(hw_o) = c_h e^{jhw_o t} + c_{-h}e^{-jhw_o t} \tag{2.9}$$

donde:

$$c_h = \frac{a_h - jb_h}{2} \qquad c_{-h} = \frac{a_h + jb_h}{2} \qquad (h > 0)$$

Si $c_o = a_o$, se puede expresar la ecuación trigonométrica de la serie de Fourier (2.4) como:

$$f(t) = c_o + \sum_{h=1}^{\infty} \left\{ c_h e^{jhw_o t} + c_{-h} e^{-jhw_o t} \right\}$$

El segundo término de la sumatoria se puede expresar como:

$$\sum_{h=1}^{\infty} c_{-h} e^{-jhw_o t} = \sum_{h=-1}^{-\infty} c_h e^{jhw_o t}$$

Con esta igualdad se obtiene:

$$f(t) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} c_h e^{jhw_o t} \tag{2.10}$$

La ecuación (2.10) es la ecuación de síntesis de la serie de Fourier en forma exponencial. En forma similar utilizando las ecuaciones de Euler y las ecuaciones (2.7) y (2.8) es posible calcular la ecuación de análisis para la forma compleja (2.11).

$$c_h = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jhw_o t} dt \tag{2.11}$$

También cada armónica puede expresarse en forma de una señal sinusoidal definida por una magnitud y un ángulo. Transformando los coeficientes complejos de (2.9) a forma polar:

$$c_h = \frac{1}{2} |C_h| e^{j\theta_h} \qquad c_{-h} = \frac{1}{2} |C_h| e^{-j\theta_h}$$

donde:

$$|C_h| = \sqrt{a_h^2 + b_h^2}, \qquad \theta_h = \arctan\left(\frac{-b_h}{a_h}\right)$$

Sustituyendo los factores en forma polar en (2.9):

$$F(hw_o) = \frac{1}{2} |C_h| e^{jhw_o t + \theta_h} + \frac{1}{2} |C_h| e^{-(jhw_o t + \theta_h)}$$

Utilizando la forma de Euler se obtiene finalmente la representación de una armónica a través de una magnitud y un ángulo.

$$F(hw_o) = |C_h| \cos(hw_o t + \theta_h)$$

Transformando cada armónica de (2.4) a esta forma se obtiene:

$$f(t) = \sum_{h=0}^{\infty} |C_h| \cos(hw_o t + \theta_h) \tag{2.12}$$

2.1.4 Simetría de formas de onda

Existen algunos casos particulares de formas de onda para los cuales el cálculo de los coeficientes de Fourier se simplifica.

Separando la integral de (2.7) en dos partes se obtiene:

$$a_h = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(hw_o t)dt + \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{0} f(t)\cos(hw_o t)dt \tag{2.13}$$

Mediante un cambio de variable de $-t$ por t en el segundo término de (2.13) se obtiene (2.14):

$$a_h = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} [f(t) + f(-t)]\cos(hw_o t)dt \tag{2.14}$$

En forma similar, con (2.8) resulta:

$$b_h = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} [f(t) - f(-t)]\mathrm{sen}(hw_o t)dt \tag{2.15}$$

2.1.4.1 Simetría impar

Se dice que una función posee simetría impar si para todo t cumple con:

$$f(t) = -f(-t)$$

Para esta forma de onda (2.14) y (2.15) resultan:

$$a_h = 0 \quad \text{para toda } h \tag{2.16}$$

$$b_h = \frac{4}{T}\int_o^{T/2} f(t)\text{sen}(hw_o t)dt \tag{2.17}$$

2.1.4.2 Simetría par

Una función tiene simetría par si para todo t cumple con:

$$f(t) = f(-t)$$

Las ecuaciones (2.14) y (2.15) se reducen a:

$$a_h = \frac{4}{T}\int_o^{T/2} f(t)\cos(hw_o t)dt \tag{2.18}$$

$$b_h = 0 \quad \text{para toda } h \tag{2.19}$$

2.1.4.3 Simetría de media onda

Se dice que una función tiene simetría de media onda si para todo t cumple con:

$$-f(t - T/2) = f(t) = -f(t + T/2)$$

Separando la integral de (2.7) en dos partes como en (2.13) y haciendo un cambio de variable de t por $t - T/2$ se obtiene:

$$a_h = \frac{2}{T}\int_o^{T/2} f(t)\cos(hw_o t)dt + \frac{2}{T}\int_{-T/2+T/2}^{T/2} f(t - T/2)\cos(hw_o(t - T/2))dt \tag{2.20}$$

Para el caso particular de simetría de media onda resulta:

$$a_h = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\left(\cos(hw_o t) - \cos(hw_o t - h\pi)\right)dt \tag{2.21}$$

En forma similar para b_h:

$$b_h = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\left(\text{sen}(hw_o t) - \text{sen}(hw_o t - h\pi)\right) dt \tag{2.22}$$

Para las funciones seno y coseno se tiene:

$$\cos(hw_o t + h\pi) = -\cos(hw_o t) \qquad \text{sen}(hw_o t + h\pi) = -\text{sen}(hw_o t) \qquad \text{para } h \text{ impar}$$

$$\cos(hw_o t + h\pi) = \cos(hw_o t) \qquad \text{sen}(hw_o t + h\pi) = \text{sen}(hw_o t) \qquad \text{para } h \text{ par}$$

Sustituyendo las relaciones trigonométricas en las ecuaciones de a_h y b_h se obtiene:

$$a_h = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(hw_o t)dt \qquad \text{para } h \text{ impar} \tag{2.23}$$

$$b_h = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\text{sen}(hw_o t)dt \qquad \text{para } h \text{ impar} \tag{2.24}$$

$$a_h = b_h = 0 \qquad \text{para } h \text{ par} \tag{2.25}$$

Se observa que una señal con simetría de media onda sólo tiene componentes armónicas de orden impar. En los sistemas eléctricos de potencia la mayoría de los dispositivos son bilaterales —la forma de corriente en las dos direcciones es igual,— por lo que en los estudios no se consideran generalmente las armónicas pares.

2.1.5 Transformada discreta de Fourier

En el caso de representar la función $f(t)$ a través de un conjunto de mediciones es posible aplicar la transformación de Fourier y obtener el espectro de frecuencia de dicha señal también en forma discreta. El par de ecuaciones de transformación es [3, 24]:

$$F(f_h) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(t_n)e^{-j2\pi hn/N} \tag{2.26}$$

$$f(t_n) = \sum_{h=0}^{N-1} F(f_h)e^{j2\pi hn/N} \tag{2.27}$$

Donde N es el número de muestras que se tienen en un ciclo completo de la señal periódica, $f(t_n)$ y $F(f_h)$ son las muestras de las señales en el dominio del tiempo y de la frecuencia.

Las ecuaciones (2.26) y (2.27) son el caso discreto de (2.1) y (2.2) respectivamente. Esta es la forma adecuada de representar las señales para aplicar la transformada de Fourier utilizando computadoras, es por eso que a la par con el desarrollo de los sistemas de cómputo aumentó el uso de estos algoritmos.

Para determinar el número de muestras necesarias de una función que se va a transformar se utiliza el **teorema de Nyquist o de muestreo**, el cual establece que la frecuencia de muestreo debe ser mayor que dos veces la frecuencia de la componente armónica de mayor orden que se quiera recuperar.

2.1.5.1 Transformada rápida de Fourier

Para calcular la transfomada discreta de Fourier de una señal utilizando (2.26) se requieren N^2 operaciones complejas, lo cual hace prohibitivo este proceso conforme aumenta el número de muestras. Para el caso de un número de muestras igual a 2^k, para k entero, existe una versión que realiza en forma eficiente estos cálculos, requiere sólo $(N/2)\log_2(N)$ multiplicaciones. Este algoritmo se conoce como transformada rápida de Fourier (FFT) [3, 24].

El ahorro en el número de operaciones realizadas al hacer la transformación utilizando la versión rápida en lugar del algortimo completo se obtiene de la relación:

$$\frac{N^2}{(N/2)log_2(N)} = \frac{\ln(4)N}{\ln(N)}$$

En la Figura 2.2 se muestra el ahorro en el número de operaciones con respecto al número de muestras. Se observa que para $2^{10} \approx 10^3$ muestras, el número de operaciones

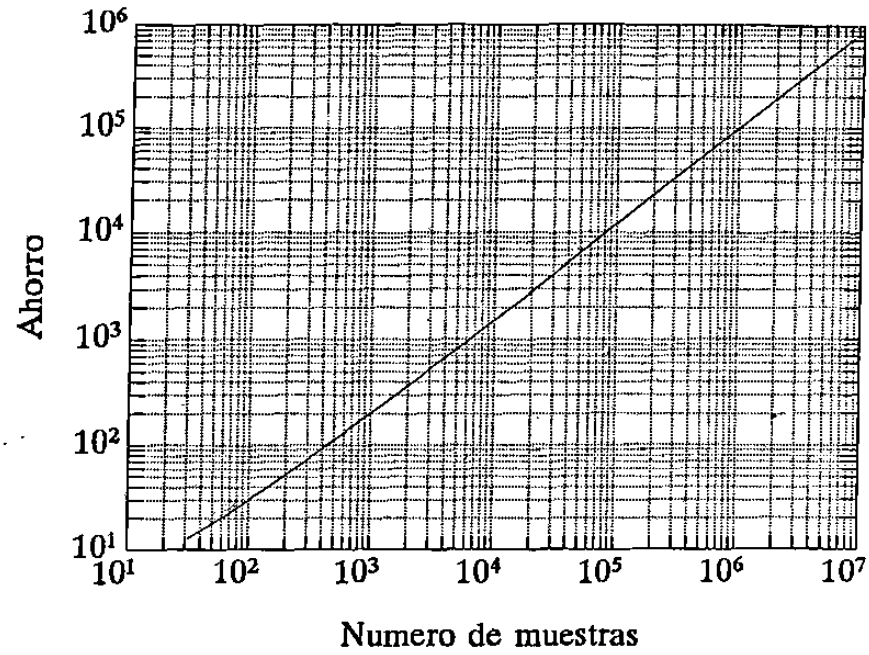

Figura 2.2: Ahorro de operaciones usando FFT

se reduce 205 veces; para $2^{20} \approx 10^6$ muestras se reduce 105,000 veces. El ahorro se incrementa notablemente al aumentar el número de muestras, esto representa mayores ventajas conforme se quieren estudiar armónicas de más alto orden.

2.2 Factores de distorsión

En esta sección se presentan las definiciones de voltaje, corriente y potencia, así como los índices más utilizados para cuantificar la presencia de armónicas en el sistema.

El análisis de armónicas en estado estable se realiza usualmente utilizando una representación en series de Fourier de las señales de voltaje y corriente (2.28) y (2.29) [25, 16, 26, 27]. Debido a lo anterior, la mayoría de las definiciones existentes son función de los términos de estas series.

$$v(wt) = \sum_{h=1}^{N} V_{\max}(h) \cos(hw_o t + \theta(h)) \tag{2.28}$$

$$i(wt) = \sum_{h=1}^{N} I_{\max}(h)\cos(hw_o t + \phi(h)) \tag{2.29}$$

En la representación de las señales de voltaje y corriente es necesario conocer las armónicas que las constituyen. El número máximo de armónicas a considerar (N) depende de la fuente de armónicas. Generalmente las armónicas de menor orden son de mayor magnitud; en el caso de reactores controlados por tiristores la armónica 17 ya es despreciable, en el modelo de conversión de frecuencias de la máquina síncrona basta considerar hasta la séptima armónica.

En general en los sistemas eléctricos se considera que los dispositivos son bilaterales, por lo que las señales resultan con simetría de media onda y no se consideran las armónicas pares. Una excepción a este caso lo constituyen los hornos de arco, donde, debido al carácter aleatorio de la carga, la corriente resulta con armónicas pares e impares.

Como puede observarse en (2.28) y (2.29), generalmente, en las redes eléctricas, las señales no contienen componente constante —frecuencia cero.

El valor rms de una señal en el tiempo, con período 2π, se define por [25]:

$$F_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(wt)dwt} \tag{2.30}$$

Para una señal de una sola frecuencia:

$$f(wt) = F_{\max}(h)\cos(hw_o + \theta(h))$$

El valor rms es igual a:

$$F_{\text{rms}}(h) = \frac{F_{\max}(h)}{\sqrt{2}}$$

Utilizando (2.30) para evaluar el valor rms del voltaje (2.28) y desarrollando la

sumatoria elevada al cuadrado se obtiene:

$$\begin{aligned} V_{\text{rms}}^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{h=1}^{N}[V_{\max}(h)\cos(hw_o t+\theta(h)]^2\,dwt + \\ &\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{h=1}^{N}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq h}}^{N} V_{\max}(h)\cos(hw_o t+\theta(h))V_{\max}(l)\cos(lw_o t+\theta(l))dwt \end{aligned}$$

El primer término de la ecuación anterior es la sumatoria de los valores rms al cuadrado de cada componente armónica de la señal. El segundo término consiste en productos de componentes de distinta frecuencia, de los cuales resultan señales oscilatorias cuya integral es cero.

Por lo anterior, los valores rms de las señales armónicas (2.28) y (2.29) se relacionan con los valores rms de sus componentes armónicas de acuerdo con las siguientes ecuaciones:

$$V_{\text{rms}}^2 = \sum_{h=1}^{N} V_{\text{rms}}^2(h) \tag{2.31}$$

$$I_{\text{rms}}^2 = \sum_{h=1}^{N} I_{\text{rms}}^2(h) \tag{2.32}$$

La potencia real o potencia promedio se obtiene integrando el producto de voltaje y corriente instantáneos durante un ciclo completo de la señal periódica:

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(wt)\,i(wt)dwt$$

Sustituyendo (2.28) y (2.29) en la ecuación anterior y desarrollando el producto de las sumatorias se obtiene:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{h=1}^{N} V_{\max}(h)\cos(hw_o t+\theta(h)I_{\max}(h)\cos(hw_o t+\phi(h)dwt + \\ &\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{h=1}^{N}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq h}}^{N} V_{\max}(h)\cos(hw_o t+\theta(h))I_{\max}(l)\cos(lw_o t+\phi(l))dwt \end{aligned}$$

Utilizando relaciones trigonométricas se obtiene:

$$P = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{h=1}^{N} V_{\max}(h)I_{\max}(h)[\cos(2hw_o t + \theta(h) - \phi(h)) + \cos(\theta(h) - \phi(h))]dwt + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{h=1}^{N}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq h}}^{N} V_{\max}(h)I_{\max}(l)\cos(hw_o t - 2hw_o t - \theta(h) - \phi(h))dwt$$

El primer término del lado derecho de la ecuación anterior tiene una componente oscilatoria cuya integral resulta cero, y un valor constante cuya integral es distinta de cero. El segundo término es el producto de señales de distinta frecuencia, que resulta oscilatorio y su integral es cero.

Finalmente, integrando la ecuación anterior se obtiene la ecuación para evaluar la potencia promedio de una señal con componentes armónicas:

$$P = \sum_{h=1}^{N} V_{\text{rms}}(h)I_{\text{rms}}(h)\cos(\theta(h) - \phi(h)) \tag{2.33}$$

Al tratar con señales nosinusoidales, la potencia instantánea y la potencia promedio son las únicas cantidades que realmente existen en el sistema físico y a las cuales se les puede dar el nombre de potencia [25, 28]. En estas cantidades se cumple el principio de conservación de energía, esto es, la potencia instantánea en terminales de un elemento es igual a la potencia instantánea de cada componente de dicho elemento. Debido a lo anterior a otros productos de voltaje y corriente se les da el nombre de voltamperes [25], v.g. voltamperes aparentes, voltamperes reactivos, etc.

Los voltamperes aparentes se definen como el producto de los valores rms del voltaje y la corriente:

$$S = V_{\text{rms}}I_{\text{rms}} \tag{2.34}$$

$$S^2 = \sum_{h=1}^{N} V_{\text{rms}}^2(h)\sum_{h=1}^{N} I_{\text{rms}}^2(h) \tag{2.35}$$

De la ecuación anterior se observa que, en general, se cumplen la siguientes desigualdades:

$$S \neq \sum_{h=1}^{N} V_{\text{rms}}(h) I_{\text{rms}}(h) \tag{2.36}$$

$$S^2 \neq \sum_{h=1}^{N} (V_{\text{rms}}(h) I_{\text{rms}}(h))^2 \tag{2.37}$$

En general, los voltamperes aparentes de la señal completa no se pueden relacionar con los voltamperes aparentes de cada componente armónica.

Los voltamperes aparentes indican la capacidad máxima de potencia que se puede transmitir. La eficiencia de un circuito se mide por la relación de la potencia promedio y los voltamperes aparentes; esta relación se conoce como *factor de potencia,* cuando tiene valor unitario significa que toda la potencia transmitida se está consumiendo.

$$\text{FP} = \frac{P}{S} \tag{2.38}$$

La definición de factor de potencia es independiente de la forma de onda de las señales de voltaje y corriente.

Los voltamperes reactivos se definen como la componente de los voltamperes aparentes obtenidos por la combinación de las corrientes desplazadas 90° y los voltajes correspondientes [25]. La expresión resultante es:

$$Q = \sum_{h=1}^{N} V_{\text{rms}}(h) I_{\text{rms}}(h) \text{sen}(\theta(h) - \phi(h)) \tag{2.39}$$

El término Q en (2.39) solamente define un componente analítico de los voltamperes aparentes, no tiene existencia independiente en el sistema físico, no se asocia con la disipación de energía y no siempre se puede relacionar con la energía almacenada. La definición de Q se elige por la dualidad con la expresión de la potencia real P (2.33).

Para el caso de señales de una sola frecuencia los voltamperes reactivos se pueden relacionar con la energía almacenada. Por ejemplo, para un circuito RL en paralelo la potencia instantánea total es:

$$P_p = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos(\phi)[1 - \cos(2wt)] - V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \text{sen}(\phi)\text{sen}(2wt)$$

Se puede demostrar [25], que el primer término de la ecuación anterior corresponde a la potencia instantánea del elemento resistivo y el segundo término corresponde a la potencia instantánea del elemento inductivo. Para este caso el valor de los voltamperes reactivos $Q = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \text{sen}(\phi)$ corresponde al valor máximo de la potencia instantánea que fluctúa entre el elemento inductivo y el sistema. En el caso de señales nosinusoidales no es posible relacionar los voltamperes reactivos con la energía almacenada en inductores y capacitores.

En el caso de señales con armónicas, en general se cumple la siguiente desigualdad:

$$S^2 \neq P^2 + Q^2 \tag{2.40}$$

Los voltamperes de distorsión se definen como:

$$D^2 = S^2 - P^2 - Q^2 \tag{2.41}$$

Los voltamperes de distorsión no tienen existencia independiente en el sistema físico, esto es, no se relacionan con ninguna cantidad real. La separación de la diferencia $S^2 - P^2$ en dos componentes —Q y D— no tiene una justificación real; tal separación es sólo matemática y sujeta a interpretaciones particulares [25, 28].

Los factores de distorsión del voltaje y la corriente se definen por [25, 26]:

$$\text{FDV} = \frac{\sqrt{\sum_{h=2}^{N} V_{\text{rms}}^2(h)}}{V_{\text{rms}}(1)} \tag{2.42}$$

$$\text{FDI} = \frac{\sqrt{\sum_{h=2}^{N} I_{\text{rms}}^2(h)}}{I_{\text{rms}}(1)} \tag{2.43}$$

El factor de distorsión de voltaje se puede expresar como:

$$\mathrm{FDV}^2 = \frac{V_{\mathrm{rms}}^2 - V_{\mathrm{rms}}^2(1)}{V_{\mathrm{rms}}^2(1)} \tag{2.44}$$

En la ecuación anterior, el primer término del numerador representa el valor rms de la señal completa, el segundo término es el valor rms de la componente de frecuencia fundamental. Los factores de distorsión son el porcentaje del valor rms de las componentes armónicas con respecto al valor rms de la componente fundamental.

Los factores de distorsión de voltaje y corriente pueden relacionarse con índices del incremento de pérdidas de potencia activa debido a la presencia de armónicas. Por ejemplo, en el caso de una carga resistiva se tiene:

$$\frac{P(h)}{P(1)} = \mathrm{FDV}^2 \tag{2.45}$$

$$\frac{P(h)}{P(1)} = \mathrm{FDI}^2 \tag{2.46}$$

Donde $P(h)$ es la potencia debida a las componentes armónicas y $P(1)$ es la potencia debida a la señal fundamental. FDV es el factor de distorsión del voltaje en terminales de la carga y FDI es el factor de distorsión de la corriente que circula por la carga.

El factor de influencia telefónica está dado por [48]:

$$\mathrm{FIT} = \frac{1}{V(1)} \left(\sum_{h=2}^{N} (W(h)V(h))^2 \right)^{1/2} \tag{2.47}$$

Donde $W(h)$ es un factor de peso que toma en cuenta los efectos de audio y el acoplamiento a la frecuencia de la h-ésima armónica.

El factor de magnitud se define por [48]:

$$\mathrm{FM} = \frac{1}{V(1)} \sum_{h=2}^{N} V(h) \tag{2.48}$$

El factor de magnitud es útil en la estimación de los niveles de voltaje pico, los cuales son de interés en los estudios de aislamiento.

El factor de desviación del voltaje se define como la desviación máxima de la onda de voltaje distorsionada con respecto a la onda de voltaje sinusoidal de valor nominal [48]. Este factor se utiliza para evaluar efectos de las armónicas en equipo electrónico.

Existen otros factores útiles en estudios específicos como son la razón de cambio del voltaje (dv/dt) y el producto voltaje-tiempo [48].

Capítulo 3

MODELADO DE ELEMENTOS PARA ESTUDIOS MULTIFRECUENCIA

3.1 Introducción

El análisis generalizado de redes desbalanceadas se realiza en componentes de fase (abc); a la frecuencia fundamental en ocasiones es posible despreciar el nivel de desbalance; sin embargo, los desbalances pueden ser importantes a las frecuencias armónicas.

Los modelos de elementos se pueden clasificar en pasivos y activos. Los elementos pasivos son sólo impedancias, los elementos activos incluyen, además de la impedancia, una fuente de corriente o voltaje.

Los modelos pasivos se clasifican como modelos lineales, ya que la corriente en terminales del elemento depende linealmente del voltaje de alimentación. Los modelos activos se clasifican como modelos no-lineales, donde la inyección de corriente depende de los voltajes terminales, y éstos a su vez dependen de la fuente activa del elemento.

Los modelos pueden ser acoplados o desacoplados respecto a la frecuencia. Esto es, pueden o no existir conexiones entre los circuitos que representan el elemento a cada frecuencia.

Tabla 3.1: Clasificación de modelos

Modelos de elementos	Pasivos, lineales (impedancia)	acoplados
		desacoplados
	Activos, no-lineales (impedancia y fuente de voltaje o corriente)	acoplados
		desacoplados

En este capítulo se presentarán modelos de elementos del sistema en cantidades de fase en función de la frecuencia. Para los elementos pasivos se obtendrán modelos desacoplados para cada frecuencia armónica. En general los modelos de elementos activos resultan acoplados, sin embargo, para hacer el proceso de solución más sencillo y eficiente, se obtienen equivalentes desacoplados que se van actualizando en forma iterativa.

La estructura de los modelos armónicos de elementos pasivos es similar a la de los modelos para la frecuencia fundamental, que se representan a través de ecuaciones matriciales. Los modelos activos —fuentes de armónicas— se representan a través de circuitos equivalentes Norton, la fuente de corriente modela la inyección de armónicas al sistema.

3.2 Máquinas síncronas

En esta sección se desarrolla y analiza un modelo de la máquina síncrona que considera los fenómenos de conversión de frecuencias y de saturación del flujo del entrehierro [29].

En la Figura 3.1 se presenta este modelo, que al igual que en los modelos tradicionales, se consideran fuentes de voltajes balanceadas atrás de una impedancia; además, este modelo incluye una fuente de corriente que representa la generación de armónicas debida a la conversión de frecuencias y la saturación.

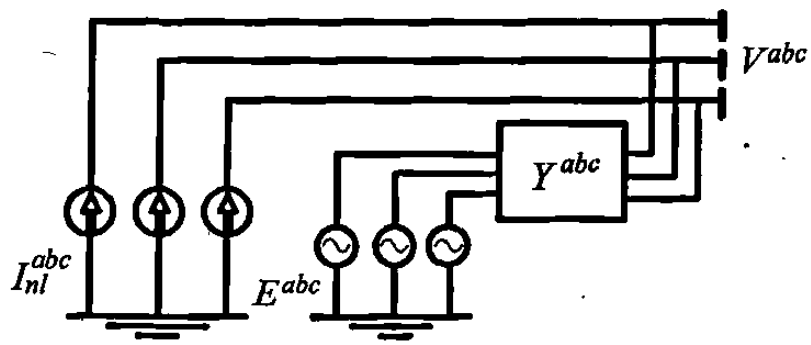

Figura 3.1: Modelo general de máquina síncrona

3.2.1 Modelado de la conversión de frecuencias

El análisis de máquinas síncronas se realiza generalmente en coordenadas (dqo) [30, 31, 32]; la transformación de componentes de fase (abc) a (dqo) se realiza utilizando (3.1).

$$v^{dqo} = P^{-1} v^{abc} \tag{3.1}$$

donde:

$$\begin{aligned} v^{dqo} &= \begin{bmatrix} v^d & v^q & v^o \end{bmatrix}^T \\ v^{abc} &= \begin{bmatrix} v^a & v^b & v^c \end{bmatrix}^T \\ P^{-1} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta - 2\pi/3) & \cos(\theta + 2\pi/3) \\ \mathrm{sen}\theta & \mathrm{sen}(\theta - 2\pi/3) & \mathrm{sen}(\theta + 2\pi/3) \\ \sqrt{1/2} & \sqrt{1/2} & \sqrt{1/2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En la ecuación anterior, θ es la posición angular del rotor con respecto a una referencia fija —generalmente se utiliza el voltaje de la fase a— y se relaciona con la velocidad angular w y el ángulo de carga δ mediante (3.2).

$$\theta = wt + \delta \tag{3.2}$$

La matriz P^{-1} se utiliza para transformar cantidades (abc) a (dqo) en el tiempo —punto a punto. Por simplicidad, el análisis de sistemas en estado estable se realiza en forma fasorial, por lo cual la matriz P^{-1} se debe expresar en una forma apropiada.

Utilizando la fórmula de Euler en las funciones trigonométricas de la matriz de Park inversa P^{-1}, es posible expresarla como en (3.3).

$$P^{-1} = De^{jwt} + D^C e^{-jwt} + D_o \tag{3.3}$$

donde:

$$\begin{aligned} D &= \begin{bmatrix} 1 & a^2 & a \\ -j & -ja^2 & -ja \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{e^{j\delta}}{\sqrt{6}} \\ D_o &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{1/3} & \sqrt{1/3} & \sqrt{1/3} \end{bmatrix} \\ a &= e^{j2\pi/3} \end{aligned}$$

La matriz P^{-1} se ha expresado en (3.3) mediante complexores, lo que permite la transformación de cantidades (abc) a (dqo) expresadas como fasores.

Como P^{-1} es una matriz ortogonal, se cumple: $P = (P^{-1})^T$

$$P = D^T e^{jwt} + D^H e^{-jwt} + D_o^T \tag{3.4}$$

En las ecuaciones (3.3) y (3.4), los superíndices C, T y H significan conjugado, transpuesta y conjugado-transpuesta, respectivamente.

3.2.1.1 Modelo armónico de la máquina síncrona en coordenadas (dqo)

El modelo de la máquina síncrona está formado por el sistema de ecuaciones diferenciales (3.5). El modelo más completo considera tres devanados para el estator, un devanado

de campo alimentado con corriente directa y tres devanados de amortiguamiento. Este modelo corresponde a un máquina con rotor de polos salientes. El modelo para una máquina con rotor de polos lisos no incluye el devanado de amortiguamiento g.

$$v_{park} = -Ri_{park} - \frac{d}{dt}(\lambda_{park}) + F\lambda_{park} \tag{3.5}$$

donde:

$$\lambda_{park} = Li_{park} \tag{3.6}$$

$$v_{park} = [\ v^d \quad v^q \quad v^o \quad v^f \quad 0 \quad 0 \quad 0\ ]^T$$

$$i_{park} = [\ i^d \quad i^q \quad i^o \quad i^f \quad i^g \quad i^D \quad i^Q\ ]^T$$

$$R = \mathrm{Diag}\{\ r^d \quad r^q \quad r^o \quad r^f \quad r^g \quad r^D \quad r^Q\ \}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

$$L = \begin{bmatrix} L_d & 0 & 0 & M_{df} & 0 & M_{dD} & 0 \\ 0 & L_q & 0 & 0 & M_{qg} & 0 & M_{qQ} \\ 0 & 0 & L_o & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{df} & 0 & 0 & L_f & 0 & M_{fD} & 0 \\ 0 & M_{qg} & 0 & 0 & L_g & 0 & M_{gQ} \\ M_{dD} & 0 & 0 & M_{fD} & 0 & L_D & 0 \\ 0 & M_{qQ} & 0 & 0 & M_{gQ} & 0 & M_Q \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

Las ecuaciones de la máquina síncrona en coordenadas de fase requieren grandes recursos computacionales para su solución, esto se debe principalmente a que la matriz de inductancias es variable en el tiempo, por su dependencia de la posición angular. La

ventaja principal de la transformación de Park consiste en hacer constante la matriz de inductancias.

Sustituyendo (3.6) en (3.5) se obtiene (3.9).

$$\begin{aligned} v_{park} &= -Ri_{park} - p(Li_{park}) + FLi_{park} \\ &= (-R - pL + FL)i_{park} \\ &= Z(p)i_{park} \end{aligned} \tag{3.9}$$

donde:

$$Z(p) = -R - pL + FL$$

Para el análisis sinusoidal de estado estable se puede utilizar $pL = jwL = jhw_oL$; de donde se obtiene un sistema de ecuaciones para cada frecuencia armónica hw_o:

$$V_{park}(h) = Z(h)I_{park}(h) \tag{3.10}$$

En forma desarrollada se tiene (3.11), para $h \neq 0$.

$$\begin{bmatrix} V^d(h) \\ V^q(h) \\ V^o(h) \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} Z_1(h) & Z_{12}(h) \\ \hline Z_{21}(h) & Z_2(h) \end{array}\right] \begin{bmatrix} I^d(h) \\ I^q(h) \\ I^o(h) \\ \hline I^f(h) \\ I^g(h) \\ I^D(h) \\ I^Q(h) \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

Usando la reducción de Kron se eliminan las variables del rotor; el modelo resultante relaciona voltajes y corrientes en terminales de la máquina en coordenadas dqo.

$$V^{dqo}(h) = Z^{dqo}(h)I^{dqo}(h) \tag{3.12}$$

donde:

$$Z^{dqo}(h) = Z_1(h) - Z_{12}(h)(Z_2(h))^{-1}Z_{21}(h)$$

La matriz inversa se utiliza para relacionar el voltaje y la corriente en coordenadas (dqo):

$$Y^{dqo}(h) = [Z^{dqo}(h)]^{-1} \tag{3.13}$$

En forma similar, es posible obtener Y^{dqo} para $h = 0$.

El devanado de secuencia cero se localiza en un eje normal al plano formado por los ejes d y q, por lo cual las ecuaciones de secuencia cero en (3.11) resultan desacopladas, la matriz de $Y^{dqo}(h)$ resulta con la estructura de (3.14). Esta condición simplificará posteriormente algunos cálculos.

$$Y^{dqo}(h) = \begin{bmatrix} ydd(h) & ydq(h) & 0 \\ yqd(h) & yqq(h) & 0 \\ 0 & 0 & yoo(h) \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

En el apéndice A se presentan ecuaciones directas para calcular la matriz $Y^{dqo}(h)$.

3.2.1.2 Modelo armónico de la máquina síncrona en coordenadas (abc)

Considerando que el voltaje aplicado a la máquina está formado sólo por una señal armónica de orden (h), se puede escribir el voltaje mediante un complexor (3.15). En esta ecuación $V^{abc}(h)$ representa los valores rms de los voltajes $v^{abc}(t)$.

$$v^{abc}(t) = \text{Real}\left\{\sqrt{2}V^{abc}(h)e^{jhwt}\right\} \tag{3.15}$$

Transformando (3.15) a componentes (dqo) se obtiene (3.16).

$$\begin{aligned} v^{dqo}(t) &= P^{-1}v^{abc}(t) \\ &= \text{Real}\{P^{-1}\sqrt{2}V^{abc}(h)e^{jhwt}\} \\ &= \sqrt{2}\text{Real}\{DV^{abc}(h)e^{j(h+1)wt} + \\ &\quad D^{C}V^{abc}(h)e^{j(h-1)wt} + \\ &\quad D_{o}V^{abc}(h)e^{jhwt}\}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Con el voltaje de (3.16) se calcula la corriente correspondiente utilizando (3.13)

$$\begin{aligned} i^{dqo}(t) &= Y^{dqo}v^{dqo}(t) \\ &= \sqrt{2}\text{Real}\{Y^{dqo}(h+1)DV^{abc}(h)e^{j(h+1)wt} + \\ &\quad Y^{dqo}(h-1)D^{C}V^{abc}(h)e^{j(h-1)wt} + \\ &\quad Y^{dqo}(h)D_{o}V^{abc}(h)e^{jhwt}\}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

En las ecuaciones (3.16) y (3.17) se observa que un voltaje de frecuencia (h) en componentes (abc), produce tres armónicas en las señales de voltaje y corriente en componentes (dqo). El voltaje de secuencia positiva $D^{C}V^{abc}$ produce señales de frecuencia $(h-1)$, el de secuencia negativa DV^{abc} produce señales de frecuencia $(h+1)$, y el voltaje de secuencia cero $D_{o}V^{abc}$ produce señales de la misma frecuencia (h).

Lo anterior concuerda con el análisis tradicional de la máquina síncrona. La señal de frecuencia fundamental balanceada en componentes (abc) al transformarse a componentes (dqo) resulta en valores constantes $h = 0$. Como la señal balanceada de frecuencia fundamental —$h = 1$— sólo tiene valor para la secuencia positiva, en componentes (dqo) sólo se tienen señales de frecuencia $h - 1 = 0$.

La corriente en (3.17) se transforma a componentes (abc) utilizando (3.4).

$$i^{abc}(t) = Pi^{dqo}(t)$$

$$\begin{aligned} i^{abc}(t) &= \sqrt{2}\text{Real}\{[D_{o}^{T}Y^{dqo}(h)D_{o} + \\ &\quad D^{T}Y^{dqo}(h-1)D^{C} + \\ &\quad D^{H}Y^{dqo}(h+1)D]V^{abc}(h)e^{jhwt} + \\ &\quad D^{H}Y^{dqo}(h-1)D^{C}V^{abc}(h)e^{j(h-2)wt} + \\ &\quad D^{T}Y^{dqo}(h+1)DV^{abc}(h)e^{j(h+2)wt}\}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

En la ecuación (3.18) se han omitido los términos agrupados en (3.19), debido a que resultan nulos cuando Y^{dqo} tiene la estructura de (3.14) —secuencia cero desacoplada.

En el apéndice A se demuestra que efectivamente estos términos resultan cero.

$$\begin{aligned} T &= D^T Y^{dqo}(h) D_o V^{abc}(h) e^{j(h+1)wt} + \\ & D^H Y^{dqo}(h) D_o V^{abc}(h) e^{j(h-1)wt} + \\ & D_o^T Y^{dqo}(h) D V^{abc}(h) e^{j(h+1)wt} + \\ & D_o^T Y^{dqo}(h) D^C V^{abc}(h) e^{j(h-1)wt}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

En la ecuación (3.18) se refleja el fenómeno de conversión de frecuencia en la máquina síncrona; un voltaje (abc) de frecuencia (h) genera corrientes (abc) de frecuencias $(h-2)$, (h) y $(h+2)$. El voltaje de secuencia positiva produce corrientes (abc) de frecuencia (h) y $(h-2)$, el de secuencia negativa produce frecuencias (h) y $(h+2)$, el voltaje de secuencia cero produce corrientes (abc) de la misma frecuencia (h).

El proceso de conversión de frecuencia se ilustra en la Figura 3.2. Un voltaje de frecuencia (h) en el estator, es visto desde el rotor como tres voltajes armónicos de frecuencias $(h-1)$, (h) y $(h+1)$, cada señal de voltaje excita en el rotor corrientes de la misma frecuencia, a su vez, cada una de estas corrientes son vistas desde el estator como tres corrientes armónicas. Algunas de las corrientes en (abc) resultan cero —recuadro punteado— debido a la estructura de la matriz Y^{dqo}.

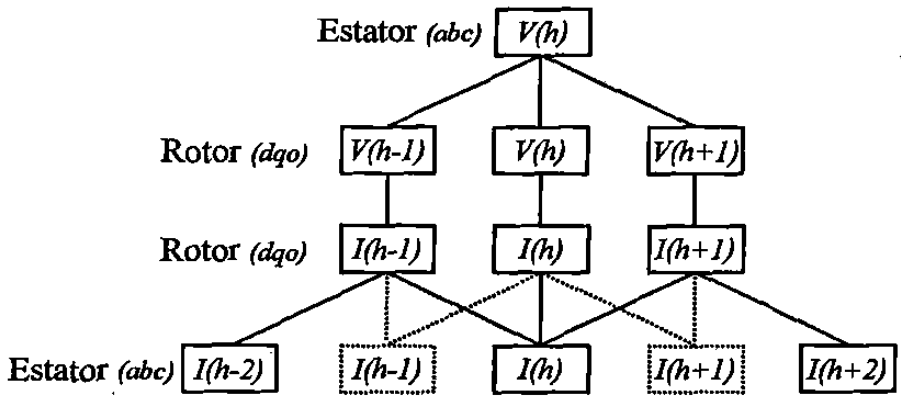

Figura 3.2: Proceso de conversión de frecuencias

En la ecuación (3.18) se observa que existen tres voltajes armónicos que pueden producir corrientes (abc) de frecuencia (h). Asumiendo que existen todas las armónicas en el voltaje (abc), la corriente de frecuencia (h) es (3.20):

$$\begin{aligned} I^{abc}(h) &= [D_o^T Y^{dqo}(h) D_o + \\ &\quad D^T Y^{dqo}(h-1) D^C + \\ &\quad D^H Y^{dqo}(h+1) D] V^{abc}(h) + \\ &\quad D^H Y^{dqo}(h+1) D^C V^{abc}(h+2) + \\ &\quad D^T Y^{dqo}(h-1) D V^{abc}(h-2). \end{aligned} \tag{3.20}$$

La corriente $I^{abc}(h)$ (3.20) se puede expresar como un equivalente Norton (3.21).

$$I^{abc}(h) = Y^{abc}(h) V^{abc}(h) + I_f^{abc}(h) \tag{3.21}$$

donde:

$$\begin{aligned} Y^{abc}(h) &= D_o^T Y^{dqo}(h) D_o + \\ &\quad D^T Y^{dqo}(h-1) D^C + \\ &\quad D^H Y^{dqo}(h+1) D. \end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned} I_f^{abc}(h) &= D^H Y^{dqo}(h+1) D^C V^{abc}(h+2) + \\ &\quad D^T Y^{dqo}(h-1) D V^{abc}(h-2). \end{aligned} \tag{3.23}$$

La ecuación (3.21) es el equivalente Norton de la máquina síncrona que considera el fenómeno de conversión de frecuencia. Y^{abc} es el equivalente pasivo, I_f^{abc} es el equivalente activo. Para considerar en el modelo la saturación es necesario sumarle al equivalente activo otro componente.

En el apéndice A se presentan ecuaciones para evaluar directamente los productos matriciales de (3.22) y (3.23).

3.2.2 Modelado de la saturación

En esta sección se desarrollará un modelo de máquina síncrona que considera el efecto de la saturación del flujo del entrehierro.

3.2.2.1 Saturación en coordenadas (dqo)

Se asumen que todas las ecuaciones se representan en por unidad [32, 33], además se considera que la curva de saturación ha sido escalada para que la recta no-saturada tenga pendiente unitaria. El escalamiento hace que la fuerza magnetomotriz sea igual al flujo no saturado.

La fuerza magnetomotriz (FMM) en un tiempo t se expresa en (3.24).

$$\begin{aligned} f^d(t) &= M_d(i^d + i^f + i^D) \\ f^q(t) &= M_q(i^q + i^g + i^Q) \end{aligned} \tag{3.24}$$

En la ecuación (3.24) $f^d(t)$ y $f^q(t)$ representan la FMM sobre los ejes d y q respectivamente. M_d y M_q son las inductancias mutuas no saturadas. En la ecuación (3.25) se muestra su relación con la matriz de inductancias no saturada.

102112146

$$L = \begin{bmatrix} L_l + M_d & 0 & 0 & M_d & 0 & M_d & 0 \\ 0 & L_l + M_q & 0 & 0 & M_q & 0 & M_q \\ 0 & 0 & L_o & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_d & 0 & 0 & L_{fl} + M_d & 0 & M_d & 0 \\ 0 & M_q & 0 & 0 & L_{gl} + M_q & 0 & M_q \\ M_d & 0 & 0 & M_d & 0 & L_{Dl} + M_d & 0 \\ 0 & M_q & 0 & 0 & M_q & 0 & M_{Ql} + M_q \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

Los encadenamiento de flujo a lo largo de los ejes d y q son función de ambas fuerzas magnetomotrices:

$$\lambda_{md} = \Psi_d(f^d, f^q)$$

$$\lambda_{mq} = \Psi_q(f^d, f^q)$$

Existen diversas teorías para determinar esas funciones; actualmente no se ha definido aún cual se adapta mejor a las mediciones de campo. La metodología que se presenta se puede aplicar independientemente de la función para calcular λ_{md} y λ_{mq}. Se utilizará la teoría que considera la saturación del flujo total.

En la Figura 3.3 se muestra la curva de saturación $S(\lambda_{total})$ como una función del flujo total. La curva no saturada se indica con pendiente unitaria. La función $R(\lambda_{total})$ se obtiene restando a la curva no saturada la curva de saturación $S(\lambda_{total})$.

De la Figura 3.3 se tiene que el flujo total es:

$$\begin{aligned} \lambda_{total}(t) &= S(f_{total}(t)) \\ &= f_{total}(t) - R(f_{total}(t)) \end{aligned} \tag{3.26}$$

La FMM total se calcula con (3.27).

$$f_{total}(t) = \sqrt{f^d(t)^2 + f^q(t)^2} \tag{3.27}$$

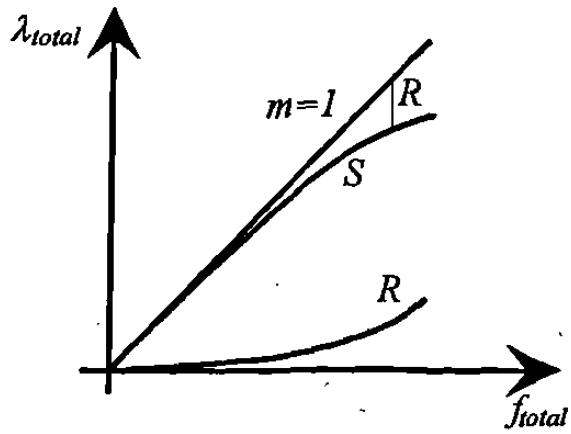

Figura 3.3: Curva de saturación de la máquina

Se considera que los flujos sobre los ejes d y q guardan la misma proporción que sus FMM's correspondientes, se calculan con (3.28).

$$\begin{aligned} \lambda_{md}(t) &= \frac{f^d}{f_{total}}\lambda_{total}(t) \\ \lambda_{mq}(t) &= \frac{f^q}{f_{total}}\lambda_{total}(t) \end{aligned} \tag{3.28}$$

Sustituyendo (3.26) en (3.28) se obtienen (3.29) y (3.30).

$$\begin{aligned} \lambda_{md}(t) &= f^d(t) - w^d(t) \\ \lambda_{mq}(t) &= f^q(t) - w^q(t) \end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned} w^d &= \frac{f^d(t)}{f_{total}}R(f_{total}(t)) \\ w^q &= \frac{f^q(t)}{f_{total}}R(f_{total}(t)) \end{aligned} \tag{3.30}$$

Se observa en (3.29) que debido a la saturación, los encadenamientos de flujo en los ejes d y q se disminuyen por las cantidades w^d y w^q respectivamente; con esta

modificación la ecuación de encadenamientos de flujos será (3.31):

$$
\begin{aligned}
\lambda_{park} &= \begin{bmatrix} L_l i^d + \lambda_{md} \\ L_l i^q + \lambda_{mq} \\ L_o i^o \\ L_{fl} i^f + \lambda_{md} \\ L_{gl} i^g + \lambda_{mq} \\ L_{Dl} i^D + \lambda_{md} \\ L_{Ql} i^Q + \lambda_{mq} \end{bmatrix} \\
\lambda_{park} &= \begin{bmatrix} L_l i^d + f^d \\ L_l i^q + f^q \\ L_o i^o \\ L_{fl} i^f + f^d \\ L_{gl} i^g + f^q \\ L_{Dl} i^D + f^d \\ L_{Ql} i^Q + f^q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w^d \\ w^q \\ 0 \\ w^d \\ w^q \\ w^d \\ w^q \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

Escribiendo (3.31) en forma compacta:

$$\lambda_{park} = L i_{park} - E w_{park} \tag{3.32}$$

donde:

$$
\begin{aligned}
E &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \\
w_{park} &= \begin{bmatrix} w^d & w^q \end{bmatrix}^T
\end{aligned}
$$

La ecuación (3.32) permite obtener los encadenamientos de flujos considerando la saturación.

La ecuación (3.5) no cambia al incluir saturación. Sustituyendo (3.32) en (3.5):

$$
\begin{aligned}
v_{park} &= -R i_{park} - p\lambda_{park} + F\lambda_{park} \\
&= (-R - pL + FL) i_{park} + (pU - F) E w_{park} \\
&= Z(p) i_{park} + G(p) w_{park}
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

Donde U es la matriz identidad, de dimensiones 7x7 y:

$$G(p) = (pU - F)E$$

La ecuación (3.33) es similar a (3.9) sólo con el término adicional $G(p)w_{park}$. Como w_{park} es una función no-lineal de i_{park}, se obtendrá mediante un proceso iterativo. Este proceso se describirá en la siguiente sección.

De las ecuaciones (3.24) y (3.29) se encuentra, que si las corrientes son funciones periódicas, entonces w_{park} en estado estable también es una función periódica, por lo que puede expresarse en el dominio de la frecuencia como:

$$w_{park}(t) = \text{Real}\left\{\sum_{h=0}^{n+1} \sqrt{2}W(h)e^{jhwt}\right\}$$

Utilizando esta expresión en (3.33) se obtiene un sistema lineal con excitación armónica, que puede ser analizado en el dominio de la frecuencia. Para $h \neq 0$ se tiene:

$$\left[\begin{array}{c} V^d(h) \\ V^q(h) \\ V^o(h) \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} Z_1(h) & Z_{12}(h) \\ \hline Z_{21}(h) & Z_2(h) \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} I^d(h) \\ I^q(h) \\ I^o(h) \\ \hline I^f(h) \\ I^g(h) \\ I^D(h) \\ I^Q(h) \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} R^{dqo}(h) \\ \hline R^{fgDQ}(h) \end{array}\right] \tag{3.34}$$

donde:

$$\left[\begin{array}{c} R^{dqo}(h) \\ R^{fgDQ}(h) \end{array}\right] = G(h)W(h) \tag{3.35}$$

Utilizando la reducción de Kron se obtiene el modelo de la máquina con saturación de coordenadas (dqo) (3.36):

$$I^{dqo}(h) = Y^{dqo}(h)V^{dqo}(h) + I_s^{dqo}(h) \tag{3.36}$$

donde:

$$I_s^{dqo} = -Y^{dqo}(h)\left(R^{dqo}(h) - Z_{12}(h)Z_{22}^{-1}(h)R^{fgDQ}(h)\right) \tag{3.37}$$

En el apéndice A se presentan ecuaciones directas para evaluar los elementos de la matriz $Y^{dqo}(h)$ y del producto matricial $Z_{12}(h)Z_{22}^{-1}(h)$.

3.2.2.2 Saturación en coordenadas (abc)

En la sección anterior se presentó el modelo de la máquina en coordenadas (dqo) considerando la saturación; el modelo en (abc) se obtiene aplicando la transformación. El primer término de la ecuación (3.36) es el efecto de conversión de armónicas ya considerado, por lo que sólo falta considerar el efecto de la corriente en el segundo término.

Aplicando la transformación de Park al segundo término de (3.36):

$$\begin{aligned} I_s^{abc}(t) &= \text{Real}\{P\sqrt{2}I_s^{dqo}(h)e^{jhwt}\} \\ &= \text{Real}\{\sqrt{2}[D^T e^{j(h+1)wt} + D^H e^{j(h-1)wt} + D_o^T e^{jhwt}]I_s^{dqo}(h)\}. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Se observa que una corriente armónica (dqo) de frecuencia (h) produce tres armónicas en (abc): $(h-1)$, (h) y $(h+1)$. Por lo tanto, existen tres corrientes armónicas en (dqo) que producen corrientes (abc) de frecuencia (h); considerando que existen todas las armónicas en la corriente $I_s^{dqo}(t)$, la corriente (abc) de frecuencia (h) resultante es:

$$I_s^{abc}(h) = D^T I_s^{dqo}(h-1) + D^H I_s^{dqo}(h+1) + D_o^T I_s^{dqo}(h) \tag{3.39}$$

La corriente $I_s^{abc}(h)$ junto con I_f^{abc} de (3.23) forman el equivalente Norton activo de la máquina síncrona.

$$I_{nl}^{abc} = I_s^{abc}(h) + I_f^{abc} \tag{3.40}$$

El equivalente pasivo (3.22) y el activo (3.40) constituyen el circuito equivalente Norton que considera los fenómenos de conversión de frecuencia y saturación.

3.2.2.3 Proceso iterativo para calcular $W(h)$

En el cálculo de I_s^{dq0} descrito en la sección anterior se consideró conocido el vector $W(h)$; para su evaluación se presenta el siguiente algoritmo.

1. Inicializar los valores de $W(h)$ en cero.
2. Evaluar $v_{park}(h)$ a partir de $v_{abc}(h)$ utilizando la transformación de Park (3.1). Los voltajes (abc) se obtienen de un estudio de flujos para $h = 1$ y de un estudio de penetración de armónicas para $h \neq 1$
3. Calcular I_{park} utilizando (3.33) en forma fasorial:

$$I_{park} = [Z(h)]^{-1}(V_{park} - G(h)W_{park})$$

4. Evaluar punto a punto f^d, f^q, f_t, w^d y w^q. Utilizar las ecuaciones desarrolladas en la sección anterior.
5. Con los valores evaluados punto a punto de w^d y w^q, transformar utilizando FFT para obtener $W(h)$.

   Si el cambio del vector $W(h)$ con respecto a la iteración anterior está dentro de una tolerancia, ya se tiene el valor buscado. Si no es así, regresar al paso 2.

3.2.3 Modelo pasivo de máquina síncrona

Cuando no interesa observar los fenómenos de conversión de frecuencias y saturación, la máquina se modela a la frecuencia fundamental con el modelo conocido de una fuente de voltaje atrás de una impedancia. Para las frecuencias armónicas se modela como una impedancia pasiva.

Los parámetros para las frecuencias armónicas se calculan en función de los valores de frecuencia fundamental, considerando que las impedancias varian monotónicamente

con la frecuencia [9, 19].

$$X^{+}(h) = X^{-}(h) = hX^{-}(1) \tag{3.41}$$

$$X^{o}(h) = hX^{o}(1) \tag{3.42}$$

Para las frecuencias armónicas, los valores de secuencia positiva y negativa se calculan en función del valor de secuencia negativa. Esto se debe a que, cuando las corrientes armónicas circulan por los devanados del estator de la máquina síncrona, establecen un flujo rotatorio a una velocidad mayor que la velocidad del rotor, por lo que reaccionan tanto en el eje directo como en el de cuadratura. Esto es muy similar a lo que ocurre con las corrientes de secuencia negativa.

La reactancia de secuencia negativa se puede calcular utilizando las reactancias subtransitorias [19]:

$$X^{-}(1) = jw_o \frac{L_d'' + L_q''}{2} \tag{3.43}$$

3.3 Reactor controlado por tiristores

3.3.1 Equivalente Norton del RCT

El reactor controlado por tiristores (RCT) es básicamente un reactor en serie con dos tiristores en antiparalelo [34]. Cada tiristor conduce una mitad del ciclo de la frecuencia fundamental, durante períodos σ que dependen del ángulo de disparo α (3.44), ajustando con ello la inyección de potencia reactiva al sistema.

$$\sigma = 2(180^{\circ} - \alpha) \tag{3.44}$$

El ángulo de disparo puede variar entre 90° y 180°, y es función del punto de operación del sistema, definido por las condiciones de carga y generación.

En la Figura 3.4 se presentan las formas de onda de voltaje y corriente de un RCT, y se indican los ángulos de disparo y conducción, así como los tiempos de encendido y apagado del tiristor. Las formas de onda que se presentan consideran que el voltaje en terminales está libre de armónicas.

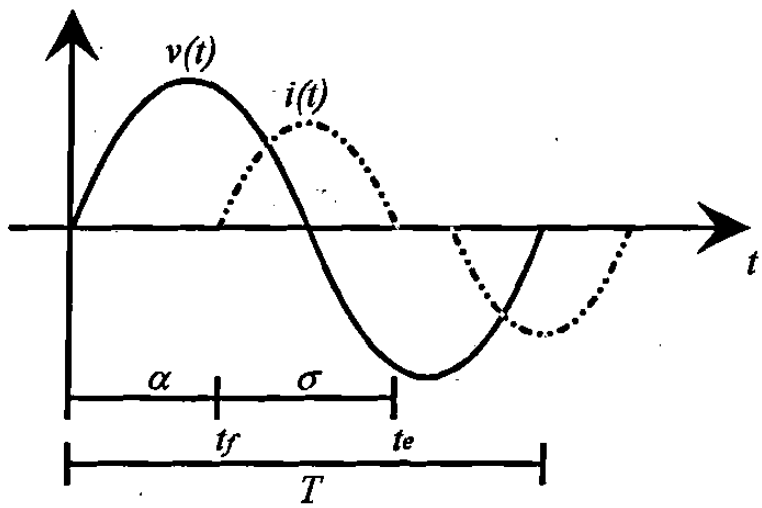

Figura 3.4: Formas de onda de voltaje y corriente en un RCT

Para un ángulo de conducción fijo, la corriente del RCT depende de los voltajes en terminales, y estos a su vez dependen de la inyección de corrientes del RCT, por lo que se tiene un modelo no-lineal. Del modelo no-lineal se obtendrá un circuito Norton lineal para cada frecuencia armónica, con el cual se representará el RCT para los diversos estudios. En la Figura 3.5 se muestra una rama del RCT y su correspondiente circuito Norton equivalente.

La corriente que fluye por el RCT se determina mediante (3.45)

$$L\frac{di}{dt} = v(t), \qquad i(t_f) = 0 \tag{3.45}$$

Donde L es la inductancia del RCT y t_f es el tiempo de disparo del tiristor —ver Figura 3.4.

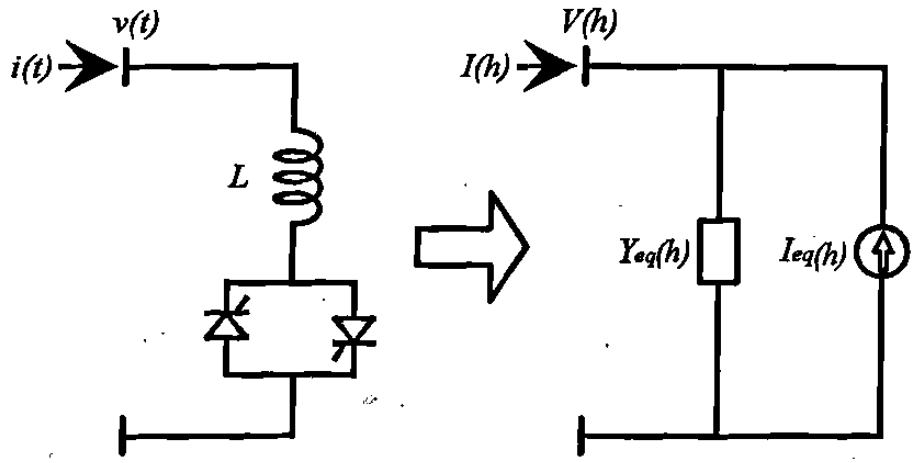

Figura 3.5: Equivalente Norton de un RCT

Considerando que el voltaje de alimentación del RCT contiene una serie de armónicas, como en (2.28), se sustituye este voltaje en (3.45) y se procede a integrar, resultando (3.46).

$$\int_{t_f}^{t} di = \int_{t_f}^{t} \frac{1}{L} \sum_{h=1}^{N} V(h) \cos(h\omega_o t + \theta(h)) dwt \tag{3.46}$$

Integrando (3.46) se obtiene la corriente del RCT (3.47) para el período de conducción de uno de los tiristores; para el otro medio ciclo la corriente sólo cambia de signo.

$$i(wt) = \sum_{h=1}^{N} \frac{V(h)}{h\omega_o L} \{\text{sen}[h\omega_o t + \theta(h)] - \text{sen}[h\omega_o t_f + \theta(h)]\} \tag{3.47}$$

La ecuación (3.47) es válida para $t_f \leq t \leq t_e$; la corriente es cero para $0 < t < t_f$ y $t_e < t < \pi/2 + T/2$; t_e es el tiempo de extinción de la corriente y T es el período de la frecuencia fundamental.

La ecuación (3.47) se evalúa punto a punto y se le aplica la transformada rápida de Fourier [3], para obtener una representación de la forma de (3.48):

$$i(wt) = \sum_{h=1}^{N} I(h) \cos(h\omega_o t + \phi(h)) \tag{3.48}$$

Se puede demostrar que la inductancia equivalente del RCT para una onda de voltaje sinusoidal pura a la frecuencia fundamental está dada por (3.49) [35].

$$L_{eq} = \frac{\pi L}{\sigma - \text{sen}\sigma} \tag{3.49}$$

Este valor de inductancia modela adecuadamente al RCT a la frecuencia fundamental y es una buena aproximación para las otras frecuencias, por lo cual se utiliza para calcular la parte pasiva del equivalente Norton (3.50).

$$Y_{eq}(h) = \frac{1}{jh\omega_o L_{eq}} \tag{3.50}$$

La parte activa del equivalente Norton se obtiene de la diferencia de la corriente total (3.48) y la corriente que absorbe la parte pasiva del equivalente (3.51).

$$I_{eq}(h) = \frac{1}{jh\omega_o L_{eq}} V(h) - I(h) \tag{3.51}$$

Las ecuaciones (3.50) y (3.51) forman el equivalente Norton del convertidor para cada frecuencia armónica.

El valor del ángulo de conducción σ depende de las condiciones de carga y generación del sistema y se determina, como se verá más adelante, durante el proceso de solución del estudio de flujo de potencia.

Para incorporar otros elementos no-lineales en estudios armónicos, siempre es posible obtener equivalentes Norton. La forma de las ecuaciones para calcular los parámetros del equivalente Norton cambia de elemento a elemento.

3.3.2 Conexión real de compensadores

En la sección anterior se desarrollaron ecuaciones para calcular el equivalente Norton de una rama de un RCT; los arreglos trifásicos de RCT se forman sustituyendo cada rama

por su circuito equivalente.

Los compensadores estáticos de VAR (CEV) están constituidos por arreglos trifásicos de RCT y capacitores conmutados por tiristores (CCT); además, generalmente incluyen filtros para controlar las armónicas más significativas.

En los CCT's —a diferencia de los RCT's,— los capacitores se conmutan durante ciclos completos de la señal de voltaje, por lo cual no son fuentes de armónicas. Estos elementos se modelan como impedancias pasivas que se conectan o desconectan según un esquema de control de voltaje.

En la Figura 3.6 se presenta el diagrama unifilar de un CEV de 6 pulsos; el nombre lo recibe del número de tiristores utilizado en cada arreglo trifásico de RCT y CCT. Para evitar las armónicas múltiplos de 3 las ramas del RCT se conectan en delta; generalmente el compensador se conecta al sistema a través de un transformador de dos devanados con conexión estrella–estrella.

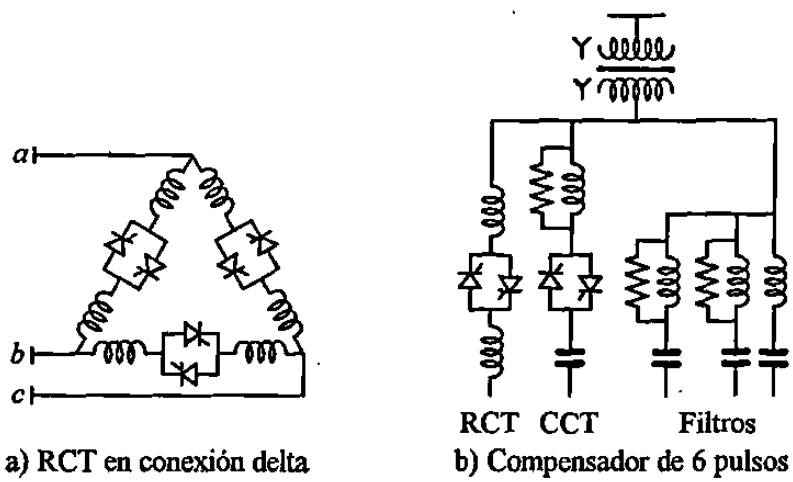

Figura 3.6: Diagrama unifilar de un compensador de 6 pulsos

Para el compensador de 6 pulsos las armónicas características —las armónicas que se generan bajo condiciones balanceadas— son $6k \pm 1$, $k = 1, 2$, etc.

En la Figura 3.7 se presenta un compensador de 12 pulsos, está constituido por un transformador de 3 devanados, el primario conectado en estrella aterrizada, el secundario en estrella y el terciario en delta, en el secundario y terciario se conectan arreglos de compensación de 6 pulsos. Las armónicas características para este arreglo son $12k \pm 1$, $k = 1, 2$, etc. Con respecto al compensador de 6 pulsos se eliminan, entre otras, las armónicas 5 y 7, que son las más significativas.

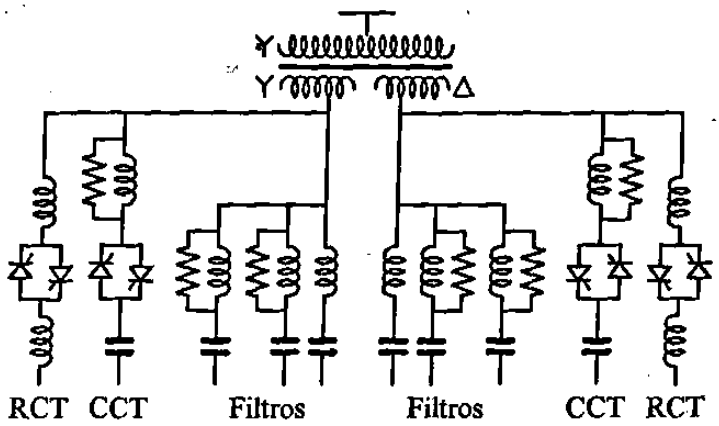

Figura 3.7: Diagrama unifilar de un compensador de 12 pulsos

Para condiciones balanceadas las armónicas no características se eliminan, y aparecen cuando existen desbalances, aunque con valores poco significativos.

En la modelación trifásica la simulación de los arreglos de 6 ó 12 pulsos, no implica mayor diferencia; se incluye para cada caso el modelo del transformador correspondiente y cada rama de la delta del RCT se sustituye por su equivalente Norton.

3.4 Líneas de transmisión

Las ecuaciones (3.52) y (3.53) modelan un elemento de longitud diferencial de una línea de transmisión con parámetros distribuidos [8, 9].

$$\Delta V_{pq}^{abc} = Z^{abc} I_{pq}^{abc} \tag{3.52}$$

$$I_p^{abc} = Y^{abc} V_p^{abc} \tag{3.53}$$

Z^{abc} y Y^{abc} son matrices de orden igual a tres veces el número de líneas acopladas; la primera contiene las impedancias serie de la línea en por unidad de longitud y la segunda las admitancias paralelo. El cálculo de estos parámetros se presenta en [8, 9] y son función de la frecuencia.

Aplicando las leyes de Kirchhoff en el elemento diferencial se obtienen (3.54) y (3.55)[8]:

$$\frac{d^2 V^{abc}}{dx^2} = Z^{abc} Y^{abc} V^{abc} \tag{3.54}$$

$$\frac{d^2 I^{abc}}{dx^2} = Y^{abc} Z^{abc} I^{abc} \tag{3.55}$$

Las ecuaciones (3.54) y (3.55) definen el estado estable de la línea de transmisión utilizando parámetros distribuidos.

Con las ecuaciones de parámetros distribuidos de la línea trifásica acoplada se obtiene la representación de parámetros concentrados en forma similar a como se hace para una línea monofásica[8]. Sin embargo, como el proceso requiere calcular funciones hiperbólicas de la matrices y no existe una forma directa de hacerlo, se utiliza la técnica de análisis modal[9].

El análisis modal consiste en la diagonalización de (3.54) y (3.55) utilizando los vectores propios de la matrices $Z^{abc}Y^{abc}$ y $Y^{abc}Z^{abc}$ respectivamente; esto resulta en un equivalente de $3a$ líneas monofásicas (a es el número de líneas acopladas).

De cada línea monofásica se obtiene un equivalente π utilizando (3.56) y (3.57)[8].

$$z = z_c \operatorname{senh}(\gamma l) \tag{3.56}$$

$$y/2 = \frac{1}{z_c} \tanh(\frac{\gamma l}{2}) \tag{3.57}$$

Una vez calculado cada circuito π equivalente se realiza la transformación inversa para obtener el circuito π de la línea trifásica.

En la Figura 3.8 se presenta las impedancias de secuencia positiva serie y paralelo del circuito π equivalente de una línea de transmisión de 75 km de longitud operando a 69 kV y 60 Hz —no se considera el efecto piel.

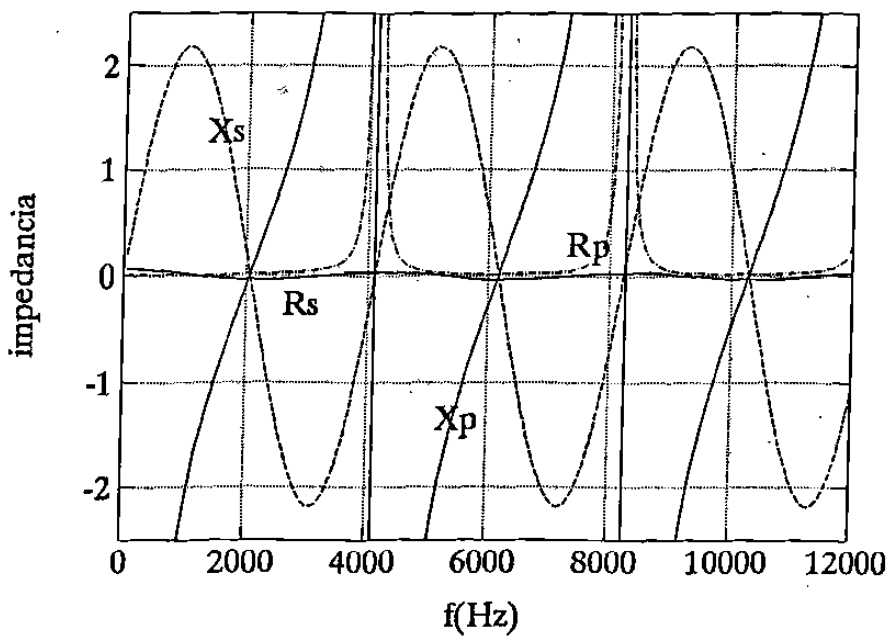

Figura 3.8: Parámetros de una línea de transmisión en función de la frecuencia

Algunas observaciones importantes en la Figura 3.8 son:

1. Los componentes mayores son las reactancias serie y paralelo —la impedancia paralelo se obtiene invirtiendo el valor calculado de admitancia.

2. La variación de parámetros en función de la frecuencia es periódica. El período corresponde con la frecuencia cuya longitud de onda corresponde con la longitud de la línea.

3. La reactancia serie varía sinusoidalmente con la frecuencia; la primera mitad del ciclo es inductiva y la segunda capacitiva. La reactancia paralelo varía en forma

de una función tangente; a la frecuencia fundamental es grande y capacitiva, es cero a la mitad del ciclo y se hace inductiva durante la segunda mitad.

4. La resistencia serie siempre es muy pequeña, lo que es de esperarse porque el diseño de la línea está orientado a lograr que las pérdidas sean pequeñas. Sin embargo, el valor pequeño de resistencia serie impide que la línea pueda amortiguar las corrientes armónicas que se inyectan al sistema. Los valores de resistencia serie negativos no tienen interpretación física, son resultado del equivalente matemático utilizado.

5. La resistencia paralelo no se considera a la frecuencia fundamental, pero su valor se incrementa con la frecuencia, y es máximo al final del ciclo.

6. A un cuarto del ciclo las impedancia serie y paralelo son iguales, pero de signos distintos, lo que resulta en una resonancia serie con impedancia puramente resistiva.

7. A la mitad del ciclo las reactancias serie y paralelo tienen valores pequeños, sin embargo resulta en una alta impedancia equivalente de la línea.

3.5 Transformadores

Los transformadores de potencia a la frecuencia fundamental se modelan mediante la admitancia de dispersión [15, 9, 5]. Para estudios de armónicas se han desarrollado modelos donde la admitancia de dispersión se sustituye por impedancias que toman en cuenta el efecto de la frecuencia [9, 36].

En la Figura 3.9 se presentan tres alternativas para modelar un transformador para las frecuencias armónicas. Los parámetros de dichos modelos se evalúan utilizando (3.58) a (3.65) [9].

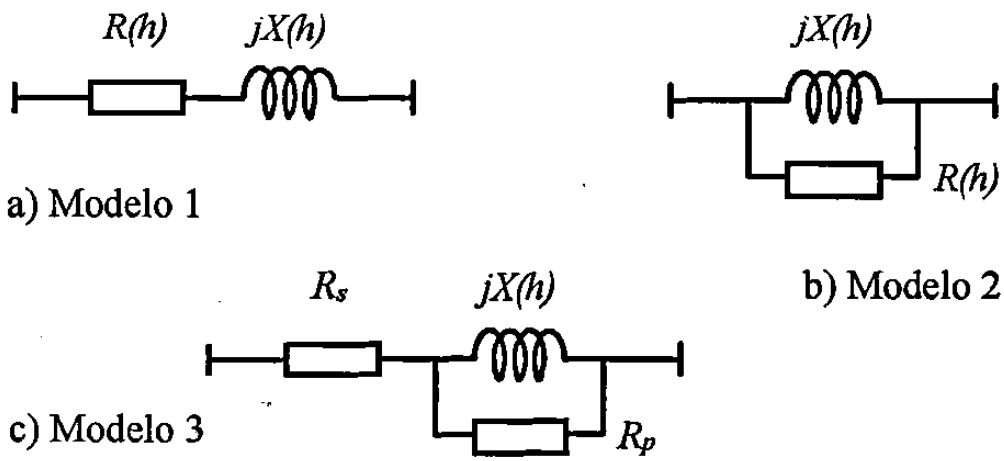

Figura 3.9: Modelos amónicos de transformadores

a) Modelo 1:

$$R(h) = .1026\frac{J+h}{J+1}hX(1) \tag{3.58}$$

$$X(h) = hX(1) \tag{3.59}$$

$$J = \frac{P_H}{P_E} \tag{3.60}$$

b) Modelo 2:

$$R(h) = 80X(1) \tag{3.61}$$

$$X(h) = hX(1) \tag{3.62}$$

c) Modelo 3:

$$90 < \frac{V^2}{SR_s} < 100 \tag{3.63}$$

$$13 < \frac{SR_p}{V^2} < 30 \tag{3.64}$$

$$X(h) = hX(1) \tag{3.65}$$

En las ecuaciones (3.58) a (3.65), $X(1)$ es la admitancia de dispersión de frecuencia fundamental. En la ecuación (3.60) P_H son las pérdidas por corrientes de histéresis y

P_E son las pérdidas por corrientes de Eddy. En las ecuaciones (3.63) y (3.64), S y V son la potencia y el voltaje nominal del transformador, respectivamente. Valores típicos en por unidad de R_s y R_p son 0.04 y 60 para un transformador de 30 MVA y de 0.01 y 20 para un transformador de 100 MVA [9].

El transformador actúa como fuente de armónicas cuando su circuito magnético opera en la región no lineal; este efecto se toma en cuenta calculando corrientes armónicas e inyectándolas en el punto de conexión. En la Figura 3.10 se ilustra el proceso de deformación de la corriente de magnetización del transformador.

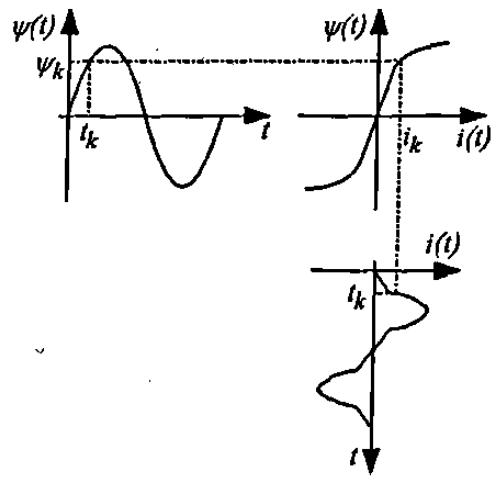

Figura 3.10: Obtención punto a punto de la corriente de magnetización

Como las frecuencias de resonancias internas de los transformadores de potencia ocurren para armónicas de orden mayor que las consideradas en los estudios de penetración de armónicas, las capacitancias entre devanados y de los devanados a tierra tienen poco efecto en los resultados, por lo cual no se toman en cuenta.

3.6 Cargas

Existen diferentes tipos de cargas de muy variadas naturalezas, cuyos modelos se obtienen generalmente en base a mediciones. Es posible representar cualquier carga mediante combinación de elementos RLC; en la referencia [37] se presenta un método que utiliza técnicas de procesamiento de señales.

En caso de que no se disponga de mediciones, se ha reportado otra alternativa que produce resultados satisfactorios; se trata de un modelo obtenido mediante mediciones en niveles de voltajes medios, utilizando un generador de señales en el rango de audiofrecuencias [38].

Una carga monofásica $P + jQ$ se puede representar a las frecuencias armónicas mediante el circuito de la Figura 3.11, los parámetros del circuito se calculan con (3.66) a (3.68).

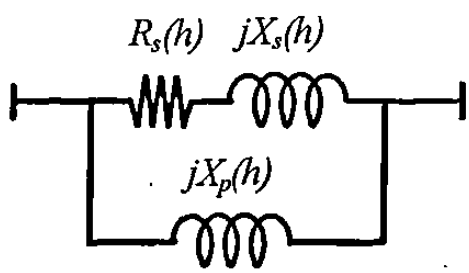

Figura 3.11: Modelo de la carga para las frecuencias armónicas

$$R_s(h) = \frac{|V(1)|^2}{P} \tag{3.66}$$

$$X_s(h) = .073hR_s(h) \tag{3.67}$$

$$X_p(h) = \frac{hR_s(h)}{6.7(P/Q) - .74} \tag{3.68}$$

En las ecuaciones (3.66) y (3.68), $V(1)$ es el voltaje nominal de frecuencia fundamental, y P y Q son la potencia activa y reactiva de la carga, respectivamente.

Para modelar una carga trifásica se utilizan además (3.69) y (3.70).

$$Z^{+}(h) = Z^{-}(h) = Z_l(h) \tag{3.69}$$

$$Z^{o}(h) = \frac{Z^{+}(h)}{r(h)} \tag{3.70}$$

En las ecuaciones (3.69) y (3.70) $Z_l(h) = (R_s(h) + jX_s(h))\|jX_p(h)$ es la impedancia resultante del circuito equivalente de la Figura 3.11, $r(h)$ es la razón de la impedancia de secuencia positiva a secuencia cero de la carga para cada armónica. En este caso los parámetros del circuito equivalente se calculan utilizando la potencia trifásica. Los parámetros de secuencia $(o + -)$ se transforman a componentes (abc) para poder incluirlos en las ecuaciones de la red trifásica.

3.7 Inductores y Capacitores

Como aproximación la impedancia de estos elementos se supone que varía monotónicamente con la frecuencia [11, 36]:

$$Xl(h) = hX(1) \tag{3.71}$$

$$Xc(h) = X(1)/h \tag{3.72}$$