Capítulo 6

ESTUDIOS TRIFÁSICOS LINEALES

En el estudio de redes eléctricas reales es necesario utilizar la modelación trifásica para incluir los desbalances propios del sistema. Todos los estudios que tradicionalmente se realizan considerando la red balanceada se pueden realizar representando el sistema en coordenadas de fase. Dentro de las aplicaciones se tienen los estudios de fallas, de flujos de potencia y de estabilidad.

En los Capítulos 4 y 5 se presentaron formulaciones las cuales para obtener el estado del sistema resuelven en forma iterativa ecuaciones nolineales. Algunos estudios se pueden realizar resolviendo ecuaciones lineales; en algunos casos las ecuaciones lineales reproducen adecuadamente el fenómeno, en otros casos la solución que se obtiene es aproximada. Con las formulaciones lineales la solución se obtiene sin iteraciones.

En este capítulo se presentan estudios trifásicos lineales —resolviendo sólo ecuaciones lineales— en redes reales. Para la frecuencia fundamental se realiza un estudio de resonancia en líneas de transmisión acopladas con compensación inductiva paralelo. Para las frecuencias armónicas se presenta un estudio linealizado de penetración de armónicas. Para cada caso se presenta la teoría y resultados de estudios.

6.1 Resonancia en líneas de transmisión compensadas

Se han reportado algunos casos donde aparecen niveles altos de voltajes en líneas desconectadas cuando se tiene compensación inductiva en derivación y además existe una línea cercana energizada. Se considera que este fenómeno se debe a condiciones de resonancia, donde el valor de reactancia de compensación juega un papel importante. Es necesario determinar los valores de reactancia que producen el fenómeno para evitar riesgos al personal de mantenimiento de equipos.

En esta sección se presenta un estudio de resonancia en una línea de transmisión (L.T.) con compensación inductiva en derivación [46, 47]. La formulación trifásica permite encontrar los valores de reactancia que causan resonancia; estos valores son diferentes si se considera que el sistema es balanceado.

6.1.1 Formulación del problema

La compensación reactiva paralelo de líneas de transmisión aéreas es una alternativa económica para controlar las fluctuaciones de voltaje ocasionadas por causas diversas, v.g. cambios de carga, cambios de la topología de la red, etc.

En la Figura 6.1 se presentan en forma esquemática dos líneas de transmisión que tienen conectados reactores en derivación; las L.T. están representadas mediante un circuito π equivalente de parámetros concentrados. La línea $p-q$ se encuentra conectada a la red y la línea $r-s$ está desconectada. Cuando se tienen las condiciones de la Figura 6.1, existe la posibilidad de que en la L.T. desenergizada la inductancia del reactor de compensación entre en resonancia con la impedancia capacitiva de la línea. El circuito resonante es excitado por la línea energizada a través de los acoplamientos mutuos.

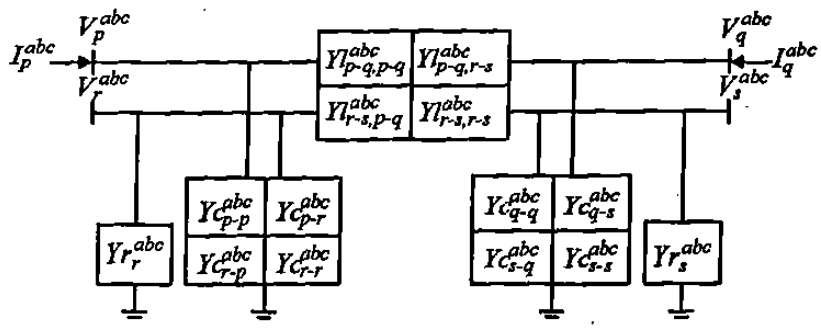

Figura 6.1: Línea de transmisión acoplada con compensación

En esta sección se presentarán dos alternativas para la determinación de los valores de compensación que causan resonancia. La primera alternativa consiste en resolver para cada valor de reactancia de compensación las ecuaciones nodales trifásicas de la línea. La segunda alternativa, llamada método electrostático, obtiene mediante un cálculo simplificado los valores que causan resonancia. La primera alternativa obtiene la respuesta de los voltajes para todos los valores de impedancia del reactor, mientras que la segunda alternativa obtiene sólo aquellos valores que causan resonancia.

6.1.2 Análisis utilizando las ecuaciones nodales

Con esta alternativa se modela la L.T. mediante las ecuaciones nodales, las cuales se solucionan para cada valor de reactancia de compensación. En esta sección se presenta en detalle el proceso de solución. Para este caso se consideran dos alternativas; la primera considera la impedancia inductiva serie de la L.T., la segunda alternativa la desprecia.

6.1.2.1 Formación del sistema de ecuaciones nodales

Las líneas de transmisión se modelan mediante un circuito π equivalente de parámetros concentrados —ver la sección 3.4. El modelo considera una admitancia inductiva serie (6.1) y una admitancia capacitancia paralelo (6.2).

$$\left[\begin{array}{c|c} Yl^{abc}_{p-q,p-q} & Yl^{abc}_{p-q,r-s} \\ \hline Yl^{abc}_{r-s,p-q} & Yl^{abc}_{r-s,r-s} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} v^{abc}_{p-q} \\ \hline v^{abc}_{r-s} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} i^{abc}_{p-q} \\ \hline i^{abc}_{r-s} \end{array}\right] \tag{6.1}$$

La admitancia capacitiva en el extremo q-s, es la misma que en el extremo p-r.

$$\left[\begin{array}{c|c} Yc^{abc}_{q-q} & Yc^{abc}_{q-s} \\ \hline Yc^{abc}_{s-q} & Yc^{abc}_{s-s} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} V^{abc}_{q} \\ \hline V^{abc}_{s} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} I^{abc}_{q} \\ \hline I^{abc}_{s} \end{array}\right] \tag{6.2}$$

El reactor de compensación se modela mediante las ecuaciones nodales en componentes de fase. Las ecuaciones del reactor en el extremo s se presentan en (6.3), tienen la misma estructura —y generalmente también el mismo valor— en los extremos q, p y r.

$$Yr^{abc}_{s} V^{abc}_{s} = I^{abc}_{s} \tag{6.3}$$

Mediante el análisis de circuitos se obtienen las reglas para la formación de la matriz de admitancia nodal [5] que considera L.T. acopladas e incluye los reactores de compensación. En la ecuación (6.4) se presenta la matriz de admitancia nodal para el sistema de la Figura 6.1.

$$\left[\begin{array}{cccc} Yl^{abc}_{p-q,p-q} + Yc^{abc}_{p-p} + Yr^{abc}_{p} & -Yl^{abc}_{p-q,p-q} & Yl^{abc}_{p-q,r-s} & -Yl^{abc}_{p-q,r-s} \\ -Yl^{abc}_{p-q,p-q} & Yl^{abc}_{p-q,p-q} + Yc^{abc}_{q-q} + Yr^{abc}_{q} & -Yl^{abc}_{p-q,r-s} & Yl^{abc}_{p-q,r-s} + Yc^{abc}_{q-s} \\ Yl^{abc}_{r-s,p-q} + Yc^{abc}_{r-p} & -Yl^{abc}_{r-s,p-q} & Yl^{abc}_{r-s,r-s} + Yc^{abc}_{r-r} + Yr^{abc}_{r} & -Yl^{abc}_{r-s,r-s} \\ -Yl^{abc}_{r-s,p-q} & Yl^{abc}_{r-s,p-q} + Yc^{abc}_{s-q} & -Yl^{abc}_{r-s,r-s} & Yl^{abc}_{r-s,r-s} + Yc^{abc}_{s-s} + Yr^{abc}_{s} \end{array}\right] \tag{6.4}$$

Por simplicidad en el ejemplo se ha considerado que la L.T. desenergizada no se

encuentra conectada a otros elementos, por ejemplo, transformadores. Para considerar esas situaciones basta incluir dichos elementos en la matriz de admitancia nodal.

La ventaja principal de la formulación trifásica es que permite simular con facilidad condiciones de operaciones especiales en los elementos del sistema, v.g. desbalances, conexiones, etc.

6.1.2.2 Solución de las ecuaciones nodales completas

En la ecuación (6.5) se muestra en forma abreviada el sistema de ecuaciones de la L.T. y el reactor. Como la línea rs está desconectada las corrientes en los nodos r y s son cero.

$$\left[\begin{array}{c|c} Y_{p-q,p-q} & Y_{p-q,r-s} \\ \hline Y_{r-s,p-q} & Y_{r-s,r-s} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} V_p^{abc} \\ V_q^{abc} \\ \hline V_r^{abc} \\ V_s^{abc} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} I_p^{abc} \\ I_q^{abc} \\ \hline I_r^{abc} \\ I_s^{abc} \end{array}\right] \tag{6.5}$$

De las ecuaciones inferiores de (6.5) se obtiene la ecuación para calcular los voltajes en la línea desenergizada (6.6).

$$\left[\begin{array}{c} V_r^{abc} \\ V_s^{abc} \end{array}\right] = -\left[\begin{array}{c} \\ Y_{r-s,r-s} \\ \\ \end{array}\right]^{-1} \left[\begin{array}{c} \\ Y_{r-s,p-q} \\ \\ \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} V_p^{abc} \\ V_q^{abc} \end{array}\right] \tag{6.6}$$

A continuación se presentan los resultados de un estudio de las líneas de transmisión acopladas conectadas entre los nodos 5 y 6 del sistema de la Figura 4.3; los datos se presentan en el apéndice C.

Se trata de dos líneas desbalanceadas, las cuales se modelan considerando sus acoplamientos. Se considera que el reactor de compensación no tiene acoplamientos entre fases, y que los reactores en cada extremo de la L.T. son idénticos. Se considera infinito el factor de calidad del reactor. El factor de calidad relaciona la reactancia y la resistencia del reactor $Q = x/r$.

En la Figura 6.2 se presentan los voltajes en las tres fases en la línea desenergizada en función del valor de la reactancia del reactor. Se presentan los voltajes del nodo 5, ya que los voltajes del nodo 6 resultan prácticamente iguales —diferencias de diezmilésimas.

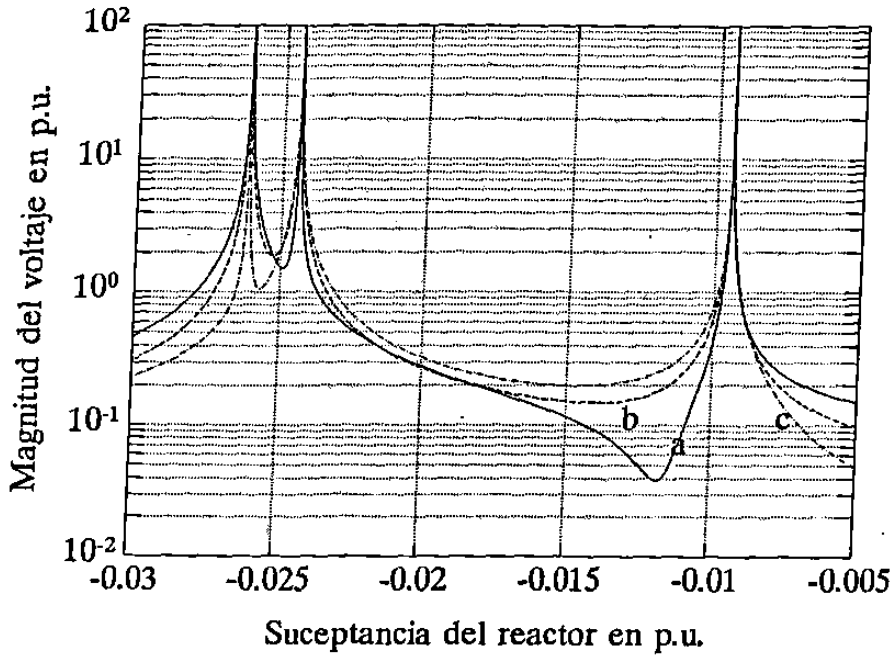

Figura 6.2: Voltajes en el nodo 5, calculados con ecuaciones completas

Los voltajes en ambos extremos de la L.T. desconectada resultaron iguales porque la impedancia del reactor de compensación es relativamente grande y la línea queda aislada del plano de tierra, prácticamente no hay circulación de corrientes y la caída en la impedancia inductiva serie de la L.T. es muy pequeña.

En la Figura 6.2 se observa que existen tres valores de reactancia que causan resonancia. Los valores que producen resonancia lo hacen en las tres fases a la vez, aunque las magnitudes de los voltajes de las tres fases sean diferentes.

El estudio anterior se repitió modificando el factor de calidad del reactor al valor $Q = 400$. En la Figura 6.3 se presentan los voltajes en el nodo 5.

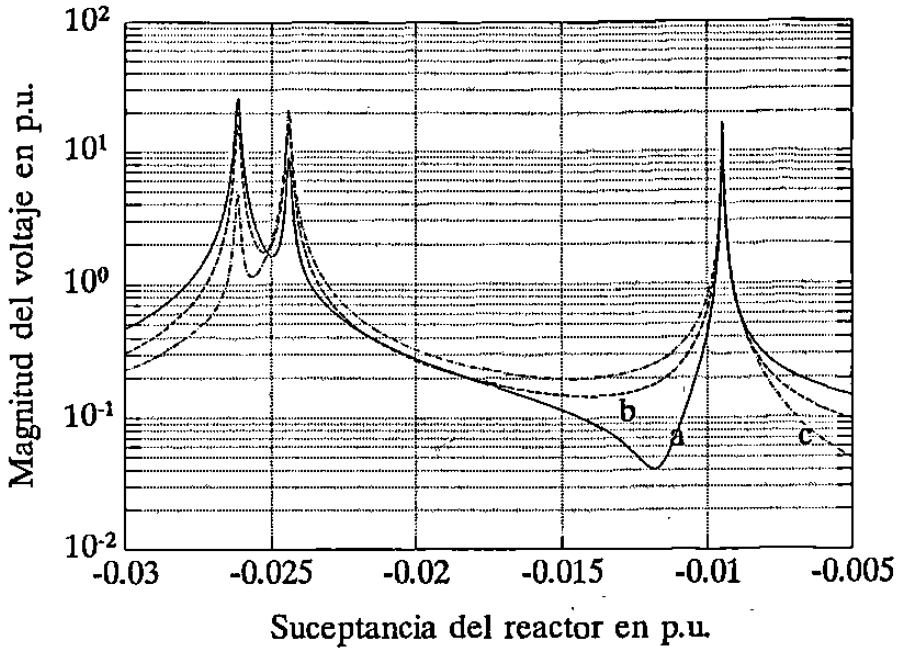

Figura 6.3: Voltajes en el nodo 5 para $Q = 400$

Como se aprecia en la Figura 6.3, el factor de calidad no afecta los puntos resonantes, sólo cambia la magnitud de los voltajes.

6.1.2.3 Solución considerando solo el efecto capacitivo

Como se mencionó en la sección anterior, la línea desenergizada queda prácticamente aislada del plano de tierra, por lo cual la corriente en la inductancia serie es mínima y la caída de voltaje resultante es muy pequeña. La reactancia inductiva se comporta en este caso como un conductor sólido con impedancia cero que une los extremos de la línea. De esta forma, las impedancias capacitivas y las reactancias de compensación de los dos extremos quedan agrupados en un mismo nodo. En la Figura 6.4 se muestra esta situación. Se considera que los parámetros de la L.T. y del reactor en ambos extremos son iguales.

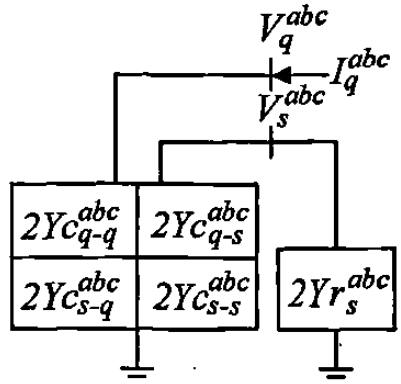

Figura 6.4: Línea de transmisión compensada sin considerar el efecto inductivo

Las ecuaciones nodales del sistema de la Figura 6.4 está dado por (6.7):

$$\left[\begin{array}{c|c} 2Yc_{q-q}^{abc} + 2Yr_q^{abc} & 2Yc_{q-s}^{abc} \\ \hline 2Yc_{s-q}^{abc} & 2Yc_{s-s}^{abc} + 2Yr_s^{abc} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} V_q^{abc} \\ \hline V_s^{abc} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} I_q^{abc} \\ \hline I_s^{abc} \end{array}\right] \tag{6.7}$$

Del renglón inferior del sistema de ecuaciones nodales (6.7), observando que la corriente en el nodo s es cero, se obtiene (6.8):

$$V_s^{abc} = -\left[Yc_{s-s}^{abc} + Yr_s^{abc}\right]^{-1} Yc_{s-q}^{abc} V_q^{abc} \tag{6.8}$$

Para comparar resultados se repitió el estudio en las líneas acopladas conectadas entre los nodos 5 y 6 del sistema de la Figura 4.3, sin considerar el efecto inductivo serie (6.8). Los voltajes se muestran en la Figura 6.5.

Los resultados de las Figuras 6.3 y 6.5 muestran que con las ecuaciones reducidas, las cuales no consideran el efecto inductivo, se obtiene el mismo resultado que con las ecuaciones completas.

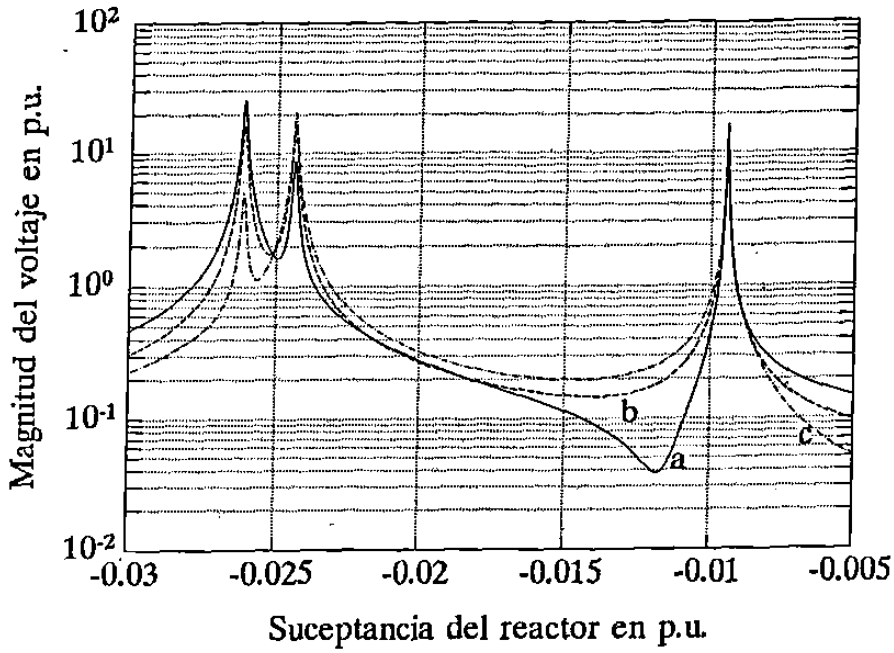

Figura 6.5: Voltajes en el nodo 5, sin considerar el efecto inductivo

6.1.3 Método electrostático

El método electrostático es una alternativa sencilla que permite obtener los valores de reactancia que causan resonancia, sin solucionar el sistema de ecuaciones nodales del sistema.

La ecuación (6.8) se puede expresar como en (6.9), donde DET significa determinante y ADJ significa adjunta.

$$V_s^{abc} = -\frac{1}{\mathrm{DET}\left[Yc_{s-s}^{abc} + Yr_s^{abc}\right]}\mathrm{ADJ}\left[Yc_{s-s}^{abc} + Yr_s^{abc}\right] Yc_{s-q}^{abc} V_q^{abc} \tag{6.9}$$

Si se considera que los reactores de compensación tienen factor de calidad infinito —no se consideran pérdidas en el reactor,— la magnitud de los voltajes en condiciones de resonancia sería infinita. En la ecuación (6.9) se observa que los voltajes tendrían valor infinito si el determinante valiera cero.

En la ecuación (6.9) se observa que los valores de reactancia que causan resonancia son determinados por las capacitancias propias de la L.T. Yc_{s-s}^{abc}; las capacitancias mutuas Y_{q-s}^{abc} sólo son el medio para que la L.T. conectada energize el circuito resonante y por lo tanto sólo afectan la magnitud de los voltajes.

El método electrostático consiste en obtener los valores de reactancia que hacen que el determinante (6.10) sea cero.

$$\text{DET}\left[Yc_{-s}^{abc} + Yr_{s}^{abc}\right] = 0 \tag{6.10}$$

Como las matrices en (6.10) son de dimensión 3x3, el determinante resulta ser un polinomio de grado 3. Por lo tanto, se tendrán tres valores de reactancia que causan resonancia —o menos, si el polinomio tiene raíces repetidas.

Se obtendrán los valores de reactancia que causan resonancia para las líneas 5–6. El determinante resultante se presenta a continuación:

$$\Delta = y_r^3 + .06y_r^2 + 1.1158x10^{-3}y_r + 6.0295x10^{-6}$$

Las raíces del determinante anterior son los valores de reactancia que causan resonancia:

$$\begin{aligned} y_{r1} &= -.00945j \\ y_{r2} &= -.02440j \\ y_{r3} &= -.02615j \end{aligned}$$

Los valores de reactancia que causan resonancia, calculados utilizando el método electrostático, son los mismos que se observan en las Figuras 6.2, 6.3 y 6.5.

En el apéndice H se desarrollan ecuaciones generales para calcular los valores de reactancia que causan resonancia; se consideran diferentes configuraciones de las líneas

de transmisión y de los reactores de compensación. Además, se consideran diferentes fallas en la línea desenergizada.

6.1.4 Conclusiones

1. Cuando una líneas de transmisión con compensación inductiva en derivación está desconectada, pero acoplada a otra energizada, existe la posibilidad de que el reactor de compensación entre en resonancia con la impedancia capacitiva de la línea.

2. Se presentaron dos alternativas para realizar estos estudios. La primera consiste en solucionar las ecuaciones nodales del arreglo de L.T. y reactores, para distintos valores de reactancia. La segunda alternativa obtiene mediante un cálculo simplificado los valores de reactancia que causan resonancia.

3. La solución de las ecuaciones nodales trifásicas resulta ser una formulación generalizada para realizar estos estudios, pues permite obtener los voltajes en la L.T. desenergizada para cualquier arreglo de línea de transmisión y de los reactores de compensación. Además, es posible considerar fácilmente en el estudio si otros elementos permanecen conectados a la L.T. desenergizada, por ejemplo, transformadores.

4. Debido a que la línea desenergizada se encuentra prácticamente aislada del plano de tierra, el efecto inductivo serie de la L.T. se puede despreciar. Lo anterior simplifica notablemente el cálculo.

5. Los valores de reactancia que producen resonancia están definidos por la admitancia capacitiva propia de la línea desenergizada; los acoplamientos con otras líneas solo sirven para energizar el circuito resonante, afectan solamente las magnitudes de los voltajes resonantes.

6. El valor del factor de calidad del reactor no impacta en la ubicación de los puntos resonantes, solo afecta la magnitud de los voltajes.

7. Se demostró que las raíces del polinomio $p(yr) = \mathrm{DET}(Yc_{s-s}^{abc} + Yr_{s}^{abc})$ son los valores de reactancia que producen resonancia.

8. Cuando no existe falla se tienen como máximo tres valores de reactancia que causan resonancia. Considerando las fallas, en una línea con disposición horizontal existen en total 13 valores de reactancia que causan resonancia —ver apéndice H. En una línea completamente desbalanceada, existen en total 19 valores.

6.2 Análisis armónico linealizado

6.2.1 Formulación del estudio

El análisis armónico linealizado [11, 10], llamado también técnica de inyección de corrientes, aproxima los elementos no-lineales del sistema de potencia con un modelo lineal. La linealización más común consiste en considerar que la corriente inyectada tiene forma de onda cuadrada. La corriente de frecuencia fundamental se obtienen mediante las especificaciones de operación; las corrientes armónicas se calculan en base al valor de frecuencia fundamental, considerando conocida la forma de onda de la corriente.

En las ecuaciones (6.11) se muestra la relación que deben tener las corrientes armónicas y la fundamental para una señal con forma de onda cuadrada.

$$\begin{aligned} I(h) &= \frac{|I(1)|}{h} e^{jh\phi(1)} \qquad h = 5, 9, 13... \\ I(h) &= -\frac{|I(1)|}{h} e^{jh\phi(1)} \qquad h = 3, 7, 11, ... \end{aligned} \tag{6.11}$$

En este modelo las corrientes armónicas sólo son función de la corriente fundamental en magnitud y en fase, por lo que son independientes de la forma del voltaje y de la impedancia armónica del sistema.

La respuesta en estado estable del sistema se obtiene resolviendo por separado el sistema de ecuaciones nodales para cada armónica considerada.

$$Y^{abc}(h)V^{abc}(h) = I^{abc}(h)$$

Este método es sencillo y requiere relativamente pocos recursos computacionales, pero sólo obtiene una aproximación a la respuesta real. La exactitud del método puede elevarse utilizando mejores estimados de las corrientes armónicas inyectadas, las cuales pueden obtenerse a través de mediciones [11] o utilizando valores recomendados. En la Tabla 6.1 se presentan valores recomendados para las corrientes armónicas de un convertidor de seis pulsos; los valores se expresan en por ciento de la corriente fundamental.

Tabla 6.1: Valores típicos de corrientes armónicas en por ciento

h	$I(h)$	h	$I(h)$
5	17.5	17	1.5
7	11.1	19	1.0
11	4.5	23	0.9
13	2.4	25	0.8

Este método no es recomendado para estudios con cargas no-lineales donde las corrientes son muy dependientes de los voltajes.

6.2.2 Caso de estudio 1

Se repite el estudio con el sistema de prueba de la sección 5.5.1 mediante el análisis armónico linealizado.

Las corrientes nodales de frecuencia fundamental se obtienen de las especificaciones de potencia de carga y generación. En la Tabla 6.2 se presentan dichas corrientes.

Tabla 6.2: Corrientes nodales de frecuencia fundamental

	I_1	ϕ_1	I_2	ϕ_2	I_3	ϕ_3	I_4	ϕ_4	I_5	ϕ_5
a	.2924	−33.5	.1059	−46.6	.1291	153.3	.1316	152.3	.2381	59.5
b	.5193	−157.6	.2085	−153.9	.4782	29.4	.2744	30.5	.2370	−62.7
c	.3604	70.9	.1458	62.9	.1928	−87.8	.2011	−87.1	.2295	178.6

Las corrientes armónicas sólo tienen valor en el nodo 5, se evalúan con (6.11), utilizando las corrientes de frecuencia fundamental de la Tabla 6.2. Las armónicas modeladas son la 5, 7, 11, 13, 17, 19 y 23.

En la Figura 6.6 se presenta la corriente deformada que se inyecta en la fase a del nodo 5. No tiene la forma de onda cuadrada, porque el estudio no considera las armónicas múltiplos de 3. Para apreciar mejor la deformación se muestra en línea punteada la componente de frecuencia fundamental.

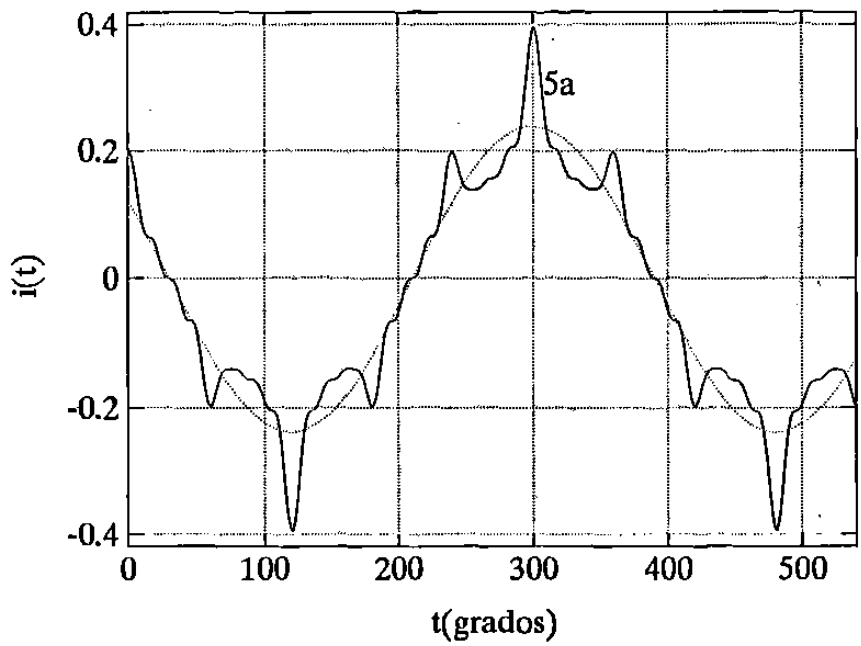

Figura 6.6: Forma de onda de la corriente inyectada

Utilizando los datos del apéndice D, los modelos del capítulo 3 y las corrientes nodales presentadas, se forman los sistemas de ecuaciones nodales y se resuelven.

En la Figura 6.7 se muestran las formas de onda de los voltajes para los nodos 1 y 2. Con respecto al nodo 2, se aprecia mayor deformación en el nodo 1 debido a la cercanía eléctrica con la fuente de armónicas.

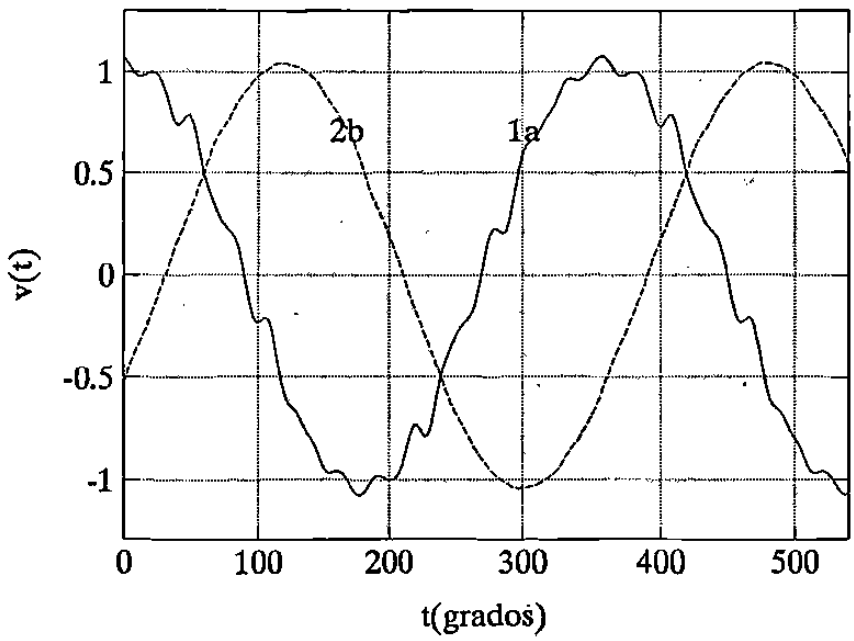

Figura 6.7: Voltajes de los nodos 1 y 2

En la Figura 6.8 se presentan las formas de onda de los voltajes de los nodos 3, 4 y 5, los cuales están bastante deformados. La mayor contaminación de armónicas se tiene en el nodo donde está la fuente de armónicas y en los nodos eléctricamente más cercanos.

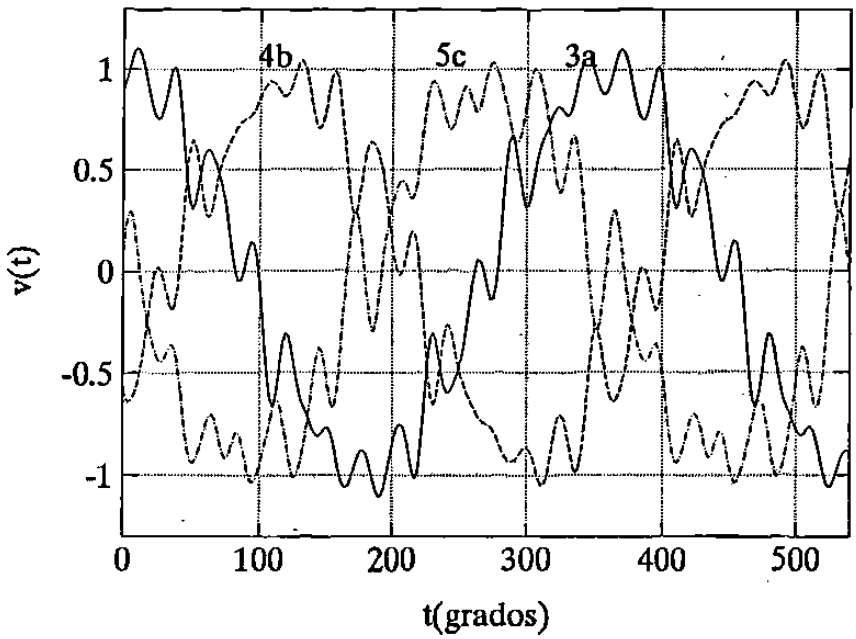

Figura 6.8: Voltajes de los nodos 3, 4 y 5

En la Tabla 6.3 se presentan los factores de distorsión de los voltajes y la corriente de la fase a. Los factores se presentan en por ciento.

Tabla 6.3: Factores de distorsión de voltaje y corriente

FDI5^a	FDV1^a	FDV2^a	FDV3^a	FDV4^a	FDV5^a
28.76	6.08	1.07	19.63	23.41	27.9

Se observa que, con respecto al estudio de la sección 5.5.1, los resultados son notablemente distintos. Lo anterior era de esperarse porque las corrientes armónicas inyectadas son distintas a las utilizadas en aquella sección.

En la Tabla 5.6 de la sección 5.5.1 se pueden observar las diferencias en las corrientes armónicas reales para esa condición de operación del RCT y las utilizadas con el modelo linealizado; estas últimas están bastante más distorsionadas.

Con este ejemplo se concluye que con el análisis linealizado sólo se obtiene una respuesta aproximada de la contaminación de armónicas. La exactitud de los resultados depende de los estimados se tengan de las corrientes armónicas.

Comparando las Tablas 5.4 y 5.7 de la sección 5.5.1 con la Tabla 6.3 de esta sección, se observa que el factor de distorsión de corriente aumentó 3 veces, mientras que los factores de distorsión de voltaje aumentaron 6 veces. El error en la distorsión de las corrientes armónicas estimadas no se refleja en forma proporcional en los voltajes obtenidos.

Este método se recomienda cuando las corrientes armónicas se tienen bien estimadas, ya sea mediante un modelo adecuado o a través de mediciones.

Si se midieran las corrientes armónicas en el sistema de estudio, se obtendrían las calculadas en la sección 5.5.1, presentadas en la Tabla 5.5. Utilizando estas corrientes se realiza el estudio con el análisis armónico linealizado; en la Tabla 6.4 se presenta la magnitud de los voltajes de la fase a.

Tabla 6.4: Magnitudes de voltajes armónicos

Nodo	$V(1)$	$V(5)$	$V(7)$	$V(11)$	$V(13)$	$V(17)$	$V(19)$	$V(23)$
$1a$	1.0443	.0043	.0020	.0033	.0073	.0003	.0016	.0003
$2a$	1.0465	.0015	.0006	.0007	.0011	.0000	.0002	.0001
$3a$	.9851	.0132	.0061	.0102	.0224	.0009	.0045	.0009
$4a$	.9654	.0199	.0088	.0130	.0261	.0008	.0032	.0003
$5a$	.9590	.0320	.0129	.0179	.0284	.0005	.0012	.0010

Comparando los resultados del estudio de flujo armónico —ver Tabla 5.3— con los resultados del análisis linealizado de la Tabla 6.4, se aprecia que son los mismos. Con lo anterior se concluye que el análisis armónico linealizado obtiene la solución real cuando se han estimado correctamente las fuentes de armónicas.

6.2.3 Caso de estudio 2

En esta sección se estudian los resultados que obtiene el análisis armónico linealizado cuando se presenta el fenómeno de resonancia. Se repite el estudio de la sección 5.5.3 considerando que no se conocen las corrientes armónicas inyectadas, por lo cual se aproximan calculándolas a partir de los valores de frecuencia fundamental utilizando (6.11).

En la Tabla 6.5 se presentan las corrientes utilizadas, que se calculan a partir de los resultados de frecuencia fundamental del estudio de la sección 5.5.3.

Tabla 6.5: Corrientes nodales de frecuencia fundamental

	I_1	ϕ_1	I_2	ϕ_2	I_3	ϕ_3	I_4	ϕ_4	I_5	ϕ_5
a	.2406	11.7	.0741	−1.3	.1239	152.5	.1272	151.6	.2496	59.5
b	.4174	−135.7	.1789	−134.1	.4588	28.7	.2650	29.8	.2463	−62.5
c	.2346	105.2	.0921	89.4	.1850	−88.7	.1942	−87.9	.2404	179.2

En la Tabla 6.6 se muestran los voltajes armónicos calculados. También en este caso la solución es diferente de la respuesta real presentada en la Tabla 5.14, debido a que las corrientes inyectadas son valores aproximados.

Sin embargo, el estudio indica claramente que se ha presentado el fenómeno de resonancia. Lo anterior se puede concluir al observar que las magnitudes de la quinta armónica son muy grandes. Además, se confirma que la resonancia ocurre en el nodo 3, pues se observa que la magnitud del voltaje de quinta armónica es más grande en el nodo 3 que en el nodo 5, que es donde está la fuente de armónicas.

En la Tabla 6.7 se presentan los factores de distorsión de la corriente y los voltajes nodales de la fase a. En los factores de distorsión de voltajes también se puede observar que se ha presentado el fenómeno de resonancia en el nodo 3, pues el factor es mayor en el nodo 3 que en la fuente de armónicas.

Tabla 6.6: Magnitudes de voltajes armónicos

Nodo	$V(1)$	$V(5)$	$V(7)$	$V(11)$	$V(13)$	$V(17)$	$V(19)$	$V(23)$
$1a$	1.0882	.1455	.0130	.0037	.0037	.0021	.0028	.0018
$2a$	1.0904	.0054	.0032	.0030	.0040	.0031	.0046	.0033
$3a$	1.0716	.4023	.0328	.0075	.0067	.0031	.0039	.0021
$4a$	1.0434	.3468	.0064	.0132	.0203	.0182	.0292	.0229
$5a$	1.0423	.3418	.0250	.0406	.0532	.0448	.0633	.0492

Tabla 6.7: Factores de distorsión de voltaje y corriente

FDI5^a	FDV1^a	FDV2^a	FDV3^a	FDV4^a	FDV5^a
28.76	13.77	0.94	37.68	33.56	34.64

6.2.4 Cálculo de equivalentes armónicos

En el estudio de grandes redes eléctricas interconectadas es común separar el sistema en una área de interés —interna— y un área externa. Para el área de interés se mantiene el modelo original, mientras que el área externa se representa mediante un equivalente.

El uso de equivalentes permite realizar estudios en sistemas grandes, utilizando pocos recursos computaciones y en tiempos de cómputo aceptables, sin perder exactitud. La solución se obtiene sólo para el área interna, que es la que interesa.

Los equivalentes se obtienen de la siguiente manera: utilizando los modelos de cada elemento se forma el sistema de ecuaciones nodales para cada armónica; las ecuaciones se separan en las correspondientes a las áreas externa e interna y se expresan en forma de impedancia:

$$\left[\frac{V_E}{V_I}\right] = \left[\frac{Z_{EE}}{Z_{IE}}\middle|\frac{Z_{EI}}{Z_{II}}\right]\left\{\left[\frac{Io_E}{Io_I}\right] + \left[\frac{0}{I_I}\right]\right\} \tag{6.12}$$

En la ecuación (6.12) las corrientes Io son las excitaciones que tiene el sistema original, e I_I son las excitaciones que se aplicarán a la red equivalente.

De los renglones inferiores de (6.12) se obtienen las ecuaciones del circuito equivalente Thevenin:

$$V_I = V_{eq} + Z_{eq} I_I \tag{6.13}$$

En la ecuación (6.13) V_{eq} es el equivalente activo Thevenin, está formado por los voltajes nodales del área interna considerando la excitacion inicial del sistema. Si no existe excitación inicial, su valor es cero. Z_{eq} es el equivalente pasivo Thevenin, y se forma con los elementos correspondientes al área interna de la matriz de impedancias nodales del sistema.

Se presenta el cálculo del equivalente entre los nodos 3 y 5 del sistema de estudio de la Figura 5.9, para la red de quinta armónica.

La matriz de admitancia nodal del sistema de estudio resulta de dimensiones 15x15, debido a que se tienen 5 nodos trifásicos. La matriz de admitancias para la quinta armónica se forma utilizando los modelos de cada componente del sistema evaluados a esa frecuencia. Una vez que se ha formado la matriz, se invierte; no es necesario acomodar las ecuaciones de los nodos 3 y 5 hasta el final, basta tomar los elementos adecuados en la matriz con el orden original.

La matriz original está compuesta por cuatro submatrices de orden 3x3:

$$\begin{bmatrix} Z_{33}^{abc} & Z_{35}^{abc} \\ Z_{53}^{abc} & Z_{55}^{abc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_3^{abc} \\ I_5^{abc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_3^{abc} \\ V_5^{abc} \end{bmatrix} \tag{6.14}$$

En la ecuación (6.14) la matriz Z_{33}^{abc} se toma de los renglones y columnas 7 a 9 de la matriz de admitancia completa; la matriz Z_{35}^{abc} se toma de los renglones 7 a 9 y de las columnas 13 a 15; la matriz Z_{53}^{abc} se toma de los renglones 13 a 15 y de las columnas 7 a 9, la matriz Z_{55}^{abc} se toma de los renglones y columnas 13 a 15.

La matriz de admitancias de la red equivalente se obtiene invirtiendo la matriz de (6.14):

$$\begin{bmatrix} yd1 & ym1 & yd1 & yD & -yD & 0 \\ ym1 & yd1 & ym1 & 0 & yD & -yD \\ ym1 & ym1 & yd1 & -yD & 0 & yD \\ yD & 0 & -yD & yd2 & ym2 & ym2 \\ -yD & yD & 0 & ym2 & yd2 & ym2 \\ 0 & -yD & yD & ym2 & ym2 & yd2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_3^a \\ V_3^b \\ V_3^c \\ V_5^a \\ V_5^b \\ V_5^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3^a \\ I_3^b \\ I_3^c \\ I_5^a \\ I_5^b \\ I_5^c \end{bmatrix} \tag{6.15}$$

En la ecuación (6.15):

$$\begin{aligned} yd1 &= .0480 - 1.5449j \\ ym1 &= -.0516 + .5317j \\ yd2 &= .0210 + 7.3709j \\ ym2 &= -.0105 + 8.3146j \\ yD &= -.0164 + .5033j \end{aligned}$$

En forma similar a la descrita para la armónica 5, es posible obtener un equivalente para cada frecuencia armónica modelada. Una vez que se ha obtenido el equivalente para cada armónica, los voltajes en el nodo 3 debidos a las inyecciones armónicas en el nodo 5 se obtienen resolviendo los sistemas reducidos.

6.2.4.1 Uso de equivalentes para evaluar la penetración de armónicas

Se repite el cálculo de los voltajes de quinta armónica para el sistema de la sección 6.2.3; se utiliza el sistema reducido (6.15) y se agrega el capacitor en el nodo 3, para hacer esto se suma a los elementos de la diagonal $yd1$ el valor de admitancia del capacitor 1.35j.

Se muestran la magnitud y el ángulo de fase de las corrientes armónicas inyectadas:

$$\begin{bmatrix} I_3^a \\ I_3^b \\ I_3^c \\ I_5^a \\ I_5^b \\ I_5^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \\ 0 & \\ 0 & \\ .0499\angle & -62.5^\circ \\ .0493\angle & 47.7^\circ \\ .0481\angle & 176.0^\circ \end{bmatrix}$$

Con las corrientes anteriores se resuelve el sistema de ecuaciones (6.15), los voltajes resultantes son:

$$\begin{bmatrix} V_3^a \\ V_3^b \\ V_3^c \\ V_5^a \\ V_5^b \\ V_5^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .4007\angle & -144.0^\circ \\ .4328\angle & -24.7^\circ \\ .4220\angle & 99.4^\circ \\ .3399\angle & -105.5^\circ \\ .3493\angle & 10.2^\circ \\ .3665\angle & 133.7^\circ \end{bmatrix}$$

La solución que se obtuvo con el sistema reducido de dimensiones 6x6 es la misma obtenida con el sistema completo de la sección 6.2.3, de dimensiones 15x15.

6.2.4.2 Dibujo de circuitos equivalentes

A partir de la matriz de admitancias reducido de (6.15) es posible dibujar la red equivalente. En este caso se observa que resulta bastante complejo dibujar el circuito, debido a que se tienen 6 ecuaciones y a la presencia del transformador con conexión delta-estrella.

En este caso donde la red es balanceada, la transformación del sistema (abc) a componentes simétricas $(o + -)$ simplifica la tarea de dibujar el circuito equivalente. Aplicando la transformación de componentes simétricas al sistema de ecuaciones (6.15) se obtiene (6.16):

$$\begin{bmatrix} .06-.48j & & & 0 & & \\ & .10-2.08j & & & -.46+.74j & \\ & & .10-2.08j & & & .41+.77j \\ 0 & & & 24j & & \\ & .41+.77j & & & -.03-.94j & \\ & & -.46+.74j & & & .03-.94j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_3^o \\ V_3^+ \\ V_3^- \\ V_5^o \\ V_5^+ \\ V_5^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3^o \\ I_3^+ \\ I_3^- \\ I_5^o \\ I_5^+ \\ I_5^- \end{bmatrix} \qquad (6.16)$$

De las ecuaciones anteriores se separan las ecuaciones para cada secuencia; los valores de secuencia positiva y negativa se expresan en forma polar:

$$\begin{bmatrix} -.0553-.4814j & \\ & 24j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_3^o \\ V_5^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3^o \\ I_5^o \end{bmatrix} \tag{6.17}$$

$$\begin{bmatrix} 2.0790\angle -87.3^\circ & .8722\angle 121.9^\circ \\ .8722\angle 61.9^\circ & .9442\angle -88.1^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_3^+ \\ V_5^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3^+ \\ I_5^+ \end{bmatrix} \tag{6.18}$$

$$\begin{bmatrix} 2.0790\angle -87.3^\circ & .8722\angle 61.9^\circ \\ .8722\angle 121.9^\circ & .9442\angle -88.1^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_3^- \\ V_5^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3^- \\ I_5^- \end{bmatrix} \tag{6.19}$$

El circuito de secuencia cero se puede dibujar directamente. Sin embargo, los circuitos de secuencia positiva y negativa no se pueden dibujar, debido a que las impedancias mutuas de 3–5 y 5–3 no son iguales. Para hacer iguales las impedancias mutuas se introducen variables ficticias:

$$\begin{aligned} Vf_5^+ &= V_5^+\angle -30^\circ \\ If_5^+ &= I_5^+\angle -30^\circ \end{aligned}$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores en (6.18) se obtiene (6.20):

$$\begin{bmatrix} 2.0790\angle -87.3^\circ & .8722\angle 91.9^\circ \\ .8722\angle 91.9^\circ & .9442\angle -88.1^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_3^+ \\ Vf_5^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3^+ \\ If_5^+ \end{bmatrix} \tag{6.20}$$

La matriz de admitancias en (6.20) tiene impedancias mutuas iguales y se puede dibujar directamente. En forma similar a como se hizo para la secuencia positiva, se pueden introducir variables ficticias en las ecuaciones de secuencia negativa. En la Figura 6.9 se presentan los circuitos equivalentes. El cambio de fase de 30° se debe a la conexión estrella-delta del transformador.

6.2.5 Conclusiones

1. El análisis armónico linealizado es una alternativa rápida para evaluar el contenido de armónicas en redes eléctricas.

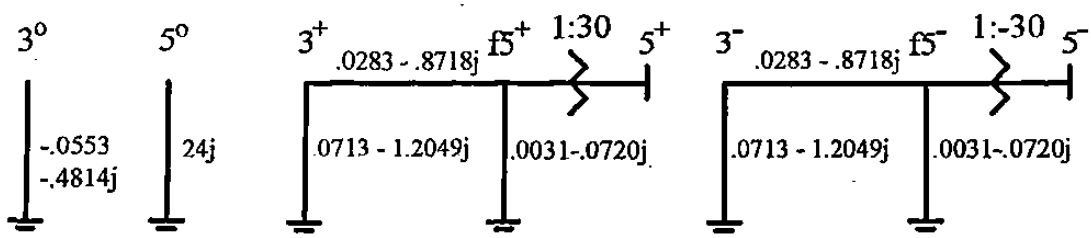

Figura 6.9: Redes equivalentes en componentes $(o + -)$

2. La exactitud de los resultados depende de la estimación que se tenga de las corrientes en las fuentes de armónicas.

3. Aún con una estimación de las corrientes armónicas, mediante el análisis linealizado se puede detectar si existen problemas de resonancia en la red.

4. A través del uso de los equivalentes de las redes para frecuencias armónicas es posible conocer los valores de capacitores de compensación que causan resonancia.

Capítulo 7

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

7.1 Conclusiones

7.1.1 Estudios trifásicos de frecuencia fundamental

En resultados de simulaciones se observa que los desbalances en la red y en las condiciones de carga y generación pueden ser importantes, por lo cual es necesario utilizar formulaciones adecuadas para modelar los desbalances. Las formulaciones convencionales no pueden considerar estas condiciones, debido a que sólo modelan la red de secuencia positiva.

Para considerar en detalle los desbalances del sistema de potencia es necesaria la representación matricial en coordenadas de fase (abc) de cada elemento del sistema. Lo anterior permite simular condiciones de operación especiales, por ejemplo, desconexión monopolar.

Utilizando estudios trifásicos de flujos de potencia fue posible evaluar con más detalle

y precisión los voltajes y corrientes para cada fase de los nodos del sistema, lo cual resulta de gran utilidad en la planeación y operación de redes eléctricas.

Con la modelación trifásica se pueden representar restricciones de operación que son generalmente función de cantidades de fase, por ejemplo, esquemas para el control de voltaje. En los estudios convencionales sólo es posible controlar el voltaje de secuencia positiva.

Los estudios trifásicos ofrecen muchas ventajas: la visualización directa de los resultados; se trabaja con cantidades físicas, no con variables transformadas; se puede modelar cualquier punto de la red, por ejemplo, neutros de conexiones en estrella; se consideran directamente los cambios de fase debidos a la conexión de transformadores.

Los algoritmos para estudios de flujos balanceados pueden generalizarse para sistemas desbalanceados. A diferencia de los estudios balanceados, en las formulaciones trifásicas es necesario representar el comportamiento interno de los generadores.

En los resultados de simulaciones se observaron características no incluidas en los estudios balanceados como son el intercambio de potencia entre fases a través de los acoplamientos en líneas de trasmisión y de la conexión delta en trasformadores —ver Tablas 4.8 y 4.9.

Para observar el grado de desbalance, los resultados de estudios trifásicos pueden transformarse a componentes de secuencia ($o+-$). En el capítulo 4 se utilizaron voltajes y corrientes de generadores para apreciar el desbalance del sistema.

Los estimados iniciales de los voltajes nodales impactan notablemente en el proceso de convergencia del estudio de flujo de potencia. La selección adecuada de los ángulos de los voltajes —considerando el desplazamiento entre fases y los cambios de ángulo por conexión de transformadores— mejora la confiabilidad de la convergencia.

Mediante una formulación lineal es posible evaluar la resonancia en líneas de transmisión con compensación inductiva en derivación. La solución de las ecuaciones nodales trifásicas resulta ser una formulación generalizada para realizar estos estudios.

7.1.2 Estudios trifásicos armónicos

En la actualidad existe una tendencia a aumentar el nivel de contaminación de armónicas en las redes eléctricas, ésto se debe principalmente a dos factores: el primero es el uso generalizado de dispositivos que funcionan en base a elementos de estado sólido, el segundo es la filosofía actual de disminuir los márgenes de diseño en equipos para aumentar la eficiencia de producción.

Los efectos de las armónicas en el sistema de potencia se pueden resumir en: aumento de pérdidas en los componentes del sistema, funcionamiento inadecuado de equipos, envejecimiento acelerado o destrucción de elementos y problemas de interferencia en sistemas de comunicación.

La representación de los elementos no-lineales mediante equivalentes Norton, a las frecuencias consideradas, permitió generalizar el estudio de flujo trifásico de frecuencia fundamental a un estudio de flujo armónico. Esta alternativa permite resolver por separado las ecuaciones de la red para cada frecuencia y a la vez considera intrínsecamente el acoplamiento que existe en los elementos no-lineales. De esta forma se simplifica la implementación del algoritmo y se reduce el tiempo de cálculo para obtener la solución.

El estudio de flujo armónico permite obtener el punto de operación de los elementos no-lineales, los cuales se deben ajustar a las especificaciones de carga y generación del sistema, v.g. el ángulo de conducción del reactor controlado por tiristores.

En el análisis de las alternativas presentadas para evaluar el ángulo de conducción del reactor controlado por tiristores se encontró que:

- El método que utiliza la función error presenta problemas de convergencia para ángulos de conducción pequeños.
- Los métodos que utilizan las rectas características llegan rápidamente a la solución independientemente del valor final del ángulo de conducción.
- La aproximación de la característica del sistema mediante el negativo de la impedancia equivalente del sistema ahorra una iteración en el proceso de solución.

En los casos de estudio se observó que la generación de corrientes armónicas del reactor controlado por tiristores cambia considerablemente para cada condición de operación. Por lo cual resulta difícil encontrar un modelo simplificado de este elemento.

Las máquinas síncronas actúan como convertidores de frecuencias; si se alimenta un voltaje armónico de frecuencia (h), se generan corrientes armónicas de frecuencias $(h-2)$, (h) y $(h+2)$ que, al inyectarse a la red, producen voltajes de las frecuencias correspondientes.

La conversión de frecuencias en la máquina síncrona se produce con las armónicas de una fuente externa o con las armónicas generadas por la misma máquina. En el caso en que no exista una fuente externa, la conversión se realiza a partir de las señales de frecuencia fundamental, las cuales producen una tercera armónica, ésta produce una quinta armónica y así sucesivamente. El factor de conversión disminuye al aumentar la frecuencia, por lo cual es suficiente modelar hasta la séptima armónica.

Las máquinas síncronas también pueden generar armónicas debido a la saturación del flujo magnético principal, el cual se representa mediante inyecciones de corrientes que consideran el punto de operación en la curva de saturación. El efecto combinado de la saturación del flujo y la conversión de frecuencias puede ocasionar valores altos de inyección de armónicas.

Mediante simulación se encontró que, bajo condiciones normales de operación, los

nodos más contaminados por armónicas son aquellos donde están conectadas las fuentes de armónicas y aquellos eléctricamente más cercanos.

La presencia de capacitores en derivación origina la posibilidad de que se forme un circuito resonante para ciertas frecuencias armónicas. En condiciones de resonancia los nodos más contaminados fueron aquellos donde se ocurre la resonancia y sus vecinos.

Las simulaciones realizadas muestran que los estudios de flujo armónicos son una herramienta eficiente para determinar voltajes y corrientes de frecuencia fundamental y frecuencias armónicas en redes eléctricas. El estudio se realiza en el dominio de la frecuencia, sin embargo, con las componentes armónicas de las señales, es posible obtener las formas de onda de voltajes, corrientes y potencias.

En el análisis de señales armónicas la potencia instantánea y la potencia promedio son las únicas cantidades que existen en el sistema físico y a las cuales se les puede dar el nombre de potencia.

Los voltamperes aparentes muestran la cantidad de potencia que se está transmitiendo, la potencia promedio es la potencia que se consume, los voltamperes reactivos ya no tienen significado, no se pueden relacionar con la energía almacenada en capacitores e inductores. En el caso de señales con armónicas no se cumple que el cuadrado de los voltamperes aparentes sea igual a la suma de los cuadrados de la potencia real y los voltamperes reactivos, existe un componente adicional llamado voltamperes de distorsión.

El análisis armónico linealizado resultó ser una técnica sencilla para determinar la contaminación de armónicas, la exactitud de los resultados depende del estimado de las corrientes armónicas. Esta formulación permite evaluar con rapidez si se presenta el fenómeno de resonancia.

7.2 Aportaciones de la tesis

Se presentó una formulación detallada para realizar estudios trifásicos de flujo de potencia de frecuencia fundamental. Esta formulación permite estudiar sin simplificaciones características de operación reales de sistemas eléctricos.

Se desarrolló un programa computacional para realizar estudios de flujos de potencia trifásicos. Dicho programa se ha utilizado para realizar estudios especiales en el Sistema Eléctrico Nacional y en cursos avanzados de análisis de redes.

Se presentaron y evaluaron modelos del reactor controlado por tiristores y la máquina síncrona actuando como fuentes de armónicas. Para el reactor se consideró la interrupción de la onda de corriente. Para la máquina se modelaron los fenómenos de conversión de frecuencias y de saturación del flujo principal.

Se presentó con detalle una formulación para realizar estudios de flujos de potencia armónicos. Se efectuaron desarrollos para facilitar y hacer más eficiente la programación del algoritmo de solución.

En base al algoritmo presentado se desarrolló un simulador de redes eléctricas para el análisis de frecuencias armónicas. Dicho simulador permite evaluar el grado de contaminación de armónicas en redes eléctricas desbalanceadas y estudiar estrategias para el control de las armónicas.

Se realizó el análisis de tres alternativas para evaluar el ángulo de conducción del reactor controlado por tiristores en un estudio de flujo armónico. Se concluyó que la mejor alternativa es la que utiliza las rectas características y que aproxima inicialmente la pendiente de la característica del sistema con el negativo de la impedancia equivalente del sistema.

Se presentó una formulación generalizada para realizar estudios de resonancia en

líneas de transmisión con compensación inductiva en derivación. Dicha formulación permite estudiar cualquier arreglo de línea de transmisión y de reactor de compensación. Se desarrollaron ecuaciones generalizadas para calcular los valores del reactor de compensación que causan resonancia, considerando los casos con y sin falla en la línea desenergizada.

7.3 Recomendaciones para estudios futuros

Es necesario evaluar el impacto de los desbalances y la contaminación de armónicas en el funcionamiento de sistemas de protección, con el fin de mejorar la confiabilidad en la operación. En resultados de simulaciones se observó que los desbalances y la contaminación de armónicas pueden resultar altos, ésto puede ser interpretado por los equipos de protección como una falla.

Resulta importante estudiar técnicas para el control de armónicas, por ejemplo, utilización de filtros. En los casos de estudio se encontró que las señales armónicas pueden tener valores altos y afectar la operación del sistema, por lo cual se deben tomar medidas correctivas. Los simuladores desarrollados son una herramienta adecuada para estudiar diversas estrategias.

Se recomienda desarrollar modelos de transformadores actuando como fuentes de armónicas e incorporarlos en el estudio de flujo de potencia. Bajo ciertas condiciones de operación los transformadores son fuentes importantes de armónicas.

Resulta de gran utilidad implementar estudios trifásicos multifrecuencias para redes de distribución, debido a que se tienen condiciones más severas de desbalances y existen más fuentes de armónicas.

Es conveniente validar los resultados de la simulación digital con mediciones de campo y con simulación física a nivel de laboratorio.

Todos los estudios convencionales se pueden generalizar al caso trifásico para considerar condiciones desbalanceadas; un problema importante es el estudio de estabilidad.

Referencias

[1] A.A. Mahmoud, "Power system harmonic: an assessment," *memorias del IEEE Tutorial Course, Power System Harmonics, (PSHTC'84)* 84 EH0221-2-PWR, pp. 1–8.

[2] R.P. Stratford, "Sources of harmonics," *PSHTC'84,* p. 9.

[3] E.O. Brigham, *The Fasf Fourier Transform and its Applications,* New Jersey: Prentice-Hall, 1988.

[4] R.P. Stratford, "Analysis and control of harmonic current in systems with static power converter," *PSHTC'84,* pp. 58–68.

[5] J.M. García, *Análisis Trifásico de Redes Desbalanceadas para el Diseño y Operación de Redes Eléctricas,* Tesis de Maestría, U.A.N.L.-F.I.M.E., 1989.

[6] F. Aboytes, *Análisis de Sistemas de Potencia,* México: Universidad Autónoma de Nuevo León, FIME-DIE, 1990.

[7] P.M. Anderson, *Analysis of Faulted Power Systems,* Iowa: The Iowa State University Press, 1973.

[8] C.A. Gross, *Análisis de Sistemas de Potencia,* México: Interamericana, 1982.

[9] J. Arrillaga and C.P. Arnold, *Computer Analysis of Power Systems,* England: John Wiley & Sons Ltd, 1990.

[10] T.H. Ortmeyer, "Harmonic analysis methodology," *PSHTC'84,* pp. 74–84.

[11] A.A. Mahmoud and R.D. Shultz, "A method for analyzing harmonic distribution in A.C. power systems," *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems,* Vol. PAS-101, No. 6, pp. 1815–1824, June 1982.

[12] R.G. Wasley and M.A. Shlash, "Newton-Raphson algorithm for 3-phase load flow," *Proc. IEE,* Vol. 121, No. 7, 630–638, July 1974.

[13] K.A. Birt, J.J. Graffy and J.D. McDonald, "Three phase load flow program," *IEEE Summer Meeting,* San Francisco, CA, July 20–25, 1975, Paper No. F 75 423–4.

[14] L. Roy, B.H. Rao and M.A. Laughton, "Analysis of unbalanced polyphase networks by the method of phase coordinates – Part III. Load flow analysis," *IEEE Winter Meeting,* New York, N.Y., February 4–9, 1979, Paper No. A 79 026–6.

[15] J. Arrillaga, C.P. Arnold and B.J. Harker, *Computer modelling of electrical power systems.* Great Britain: John Wiley & Sons Ltd, 1983.

[16] D. Xia and G.T. Heydt, "Harmonic power flow studies, Part I-Formulation and solution," *IEEE, Trans. Power Apparatus and Systems,* Vol. PAS-101, No.6, pp. 1257–1265, June 1982.

[17] W. Xu and H.W. Dommel, "Computation of steady-state harmonics of static VAR compensators," *in Proc. of the Third International Conference on Harmonics in Power Systems (ICHPS'III),* Nashville, In., USA, September 28-Octuber 1, 1988, pp. 239–245.

[18] D. Xia and G.T. Heydt, "Harmonic power flow studies, Part II-Implementation and practical application," *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems,* Vol. PAS-101, No.6, pp. 1266–1270, June 1982.

[19] W. Xu, J.R. Marti and H.W. Dommel, "A multiphase harmonic load flow solution technique," *IEEE Trans. on Power Systems,* Vol. 6, No. 1, pp. 174–182, February 1991.

[20] W. Xu, J.R. Marti and H.W. Dommel, "Harmonic analysis of systems with static compensators," *IEEE Trans. on Power Systems,* Vol. 6, No. 1, pp. 183–190, February 1991.

[21] C.D. Callaghan and J. Arrillaga, "Convergence criteria for iterative harmonic analysis and its application to static convertors," *in Proc. of the Fourth International Conference on Harmonics in Power Systems (ICHPS'IV),* Budapest, Hungary, Octuber 4–6, 1990, pp. 38–43.

[22] D. Xia, Z. Shen and Z. Shu, "Unified fundamental frequency and characteristic harmonic load flow solution in AC/DC power systems," *in Proc. of the ICHPS'III,* pp. 15–21.

[23] Y. Yao and A.M. Sheraf, " Uncharacteristic harmonics caused by AC system imbalances and the effects of smoothing reactor," *in Proc. of the ICHPS'III,* pp. 28–33.

[24] P. Kraniauskas, *Transforms in Signals and Systems.* Great Britain: Addison-Wesley, 1992.

[25] W. Shepherd and P. Zand, *Energy flow and Power Factor in Nonsinusoidal Circuits,* Great Britain: Cambridge University Press, 1979.

[26] W.M. Grady, G.T. Heydt, A.A. Mahmoud and R.D. Shultz, "System response to harmonics," *PSHTC'84,* pp. 10–20.

[27] Working group on power system harmonic, A.A. Mahmoud, Chairman, "The effects of power system harmonics on power system equipment and loads," *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems,* Vol. PAS-104, No. 9, pp. 2555–2563, September 1985.

[28] P.S. Filipski, Y. Baghzouz and M.D. Cox, "Discussion of power definitions contained in the IEEE dictionary," *IEEE Trans. on Power Delivery,* Vol. 9, No. 3, pp. 1237–1244, July 1994.

[29] A. Semlyen, J.F. Eggleston and J. Arrillaga, "Admittance matrix model of a synchronous machine for harmonic analysis," *IEEE Trans. on Power Systems,* Vol. PWRS-2, No. 4, pp. 833–840, November 1987.

[30] P.M. Anderson, B.L. Agrawal and G.E. Van Ness, *Subsynchronous Resonance in Power Systems,* New York, N.Y.: IEEE Press, 1990.

[31] D. O'Kelly and S. Simmons, *Introduction to Generalized Electrical Machine Theory.* Great Britain: Mc Graw-Hill, 1968.

[32] C. Concordia, *Synchronous Machines Theory and Performance.* Schenectady, New York, General Electric Company, 1951.

[33] C. Pérez, *Formulación Trifásica de Sistemas Eléctricos en Coordenadas de Fase abc.* Tesis de Maestría, U.A.N.L.-F.I.M.E., 1993.

[34] M.A. Moreno, "Análisis y simulación de compensadores estáticos de VARS de seis y doce pulsos," *Memorias de la Reunión de Verano de Potencia 1990 del IEEE sección México,* Tomo I, pp. 155–161.

[35] T.J.E. Miller, *Reactive Power Control in Electric Systems,* New York: John Willey & Sons Inc., 1982.

[36] J. Arrillaga, D.A. Bradley and P.S. Bodger, *Power System Harmonics,* Great Britain: John Wiley & Sons Ltd., 1989.

[37] A.S. Morched and P. Kundur, "Identification and modelling of load characteristics at high frequencies," *IEEE Trans. on Power Systems,* Vol. 2, no. 1, pp. 153–160, February 1987.

[38] CIGRE Working Group 36–05, "Harmonic characteristic parameters, methods of study, estimates of existing values in the network," *Electra* No. 77, pp. 35–54, July 1982.

[39] W.F. Tinney and C.E. Hart, "Power flow solution by Newton's method," *IEEE Winter Meeting, New York, N.Y.,* January 29–February 3, 1967.

[40] B. Stott, "Decoupled Newton load flow," *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems,* Vol. PAS-91, September/October 1972.

[41] B. Stott and O. Alsac, "Fast decoupled load flow," *IEEE Summer Meeting,* Vancouver, B.C., Canada, July 15–20, 1973.

[42] D.G. Taylor and J.A. Treece, "Load flow analysis by the Gauss-Seidel method," *Symposium on power systems load flow analysis,* University of Manchester, Institute of Science and Technology, Manchester, U.K., 1967.

[43] L.D. Aréchiga, *Modelos Generalizados de Unidades de Transformación para el Análisis de Sistemas Eléctricos de Potencia.* Tesis de maestria, U.A.N.L.-F.I.M.E., 1989.

[44] M.A. Laughton, "Analysis of unbalanced polyphase networks by the method of phase coordinates – Part I. System representation in phase frame of reference," *Proc. IEE,* Vol. 115, No. 8, pp. 1163–1172, August 1968.

[45] A. Semlyen, E. Acha and J. Arrillaga, "Newton-type algorithms for the harmonics phasor analysis of no-linear power circuits in periodical steady state with special reference to magnetic non-linearities," *IEEE Trans. on Power Delivery,* Vol. 3, No. 3, pp. 1090–1098, July 1988.

[46] J.J. LaForest, K.W. Priest, A. Ramírez and H. Nowak, "Resonant voltages on reactor compensated extra-high-voltage lines," *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems,* Vol. PAS-91, pp. 2528–2536, November 1971.

[47] E.E. Colapret and W.E. Reid, "Effect of fault and shunt reactor parameters on parallel resonance," *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems,* Vol. PAS 100, no. 2, pp. 572–584, February 1981.

[48] A.P. Meliopoulus, K.R. Chakravarthi and T.H. Ortmeyer, "Effects of harmonics on power system equipment and loads," *PSHTC'84,* pp. 21–31.

[49] IEEE Std 519-1981, *Guide for harmonic control and reactive compensation of static power converters.* New York, N.Y., IEEE, 1981.

[50] C.K. Duffey and R.P. Stratford, "Update of harmonic standard IEEE-519. IEEE recommended practices and requirements for harmonic control in electric power systems," *IEEE,* Paper No. PCIC-88-7, 1988.

APÉNDICE A

ECUACIONES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA

APÉNDICE A
ECUACIONES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA

El modelo de la máquina síncrona que considera los fenómenos de conversión de frecuencias y saturación, el cual se presentó en el capítulo 3, requiere de cálculos matriciales para evaluar los parámetros de los circuitos Norton equivalentes, por ejemplo, reducción de Kron de las ecuaciones de Park.

En este apéndice se presentan ecuaciones simplificadas para realizar fácilmente los cálculos requeridos. Estas ecuaciones son de gran utilidad en la implementación del modelo presentado, debido a que se requiere menos esfuerzo de programación y menor tiempo de cómputo.

A.1 Cálculo de elementos de la matriz $Y^{dqo}(h)$

Se presentan las ecuaciones desarrolladas para calcular los elementos de la matriz $Y^{dqo}(h)$, de acuerdo con (3.13).

Primero se calcula la matriz de admitancias y posteriormente se invierte. Las ecuaciones de secuencia cero se mantienen sin acoplamiento con otros devanados desde las ecuaciones generales de Park.

$$Z^{dqo}(h) = \begin{bmatrix} z^{dd}(h) & z^{dq}(h) & 0 \\ z^{qd}(h) & z^{qq}(h) & 0 \\ 0 & 0 & z^{oo}(h) \end{bmatrix} \tag{A.1}$$

$$z^{dd}(h) = -r^a - jhx^d + \frac{(hx^{md})^2[h(x^f + x^D - 2x^{md}) - j(r^f + r^D)]}{-h(r^f x^D + r^D x^f) + j[r^f r^D - h^2(x^f x^D - (x^{md})^2)]} \tag{A.2}$$

$$z^{dq}(h) = -hx^q - \frac{(hx^{mq})^2[h(x^g + x^Q - 2x^{mq}) - j(r^g + r^Q)]}{r^g r^Q - h^2(x^g x^Q - (x^{mq})^2) + jh(r^g x^Q + r^Q x^g]} \quad (A.3)$$

$$x^{qd}(h) = hx^d + \frac{(hx^{md})^2[h(x^f + x^D - 2x^{md}) - j(r^f + r^D)]}{r^f r^D - h^2(x^f x^D - (x^{md})^2) + jh(r^f x^D + r^D x^f]} \quad (A.4)$$

$$z^{qq}(h) = -r^a - jhx^q + \frac{(hx^{mq})^2[h(x^g + x^Q - 2x^{mq}) - j(r^g + r^Q)]}{-h(r^g x^Q + r^Q x^g) + j[r^g r^Q - h^2(x^f x^Q - (x^{mq})^2)]} \quad (A.5)$$

$$Z^{oo}(h) = -r^a - jhx^o \quad (A.6)$$

Como se aprecia en las ecuaciones anteriores, las expresiones para calcular los elementos de la matriz de impedancias resultan con muchas variables. Las expresiones de los elementos de la matriz de admitancias resultarían bastante grandes y complicadas. Por lo anterior, es mejor evaluar la matriz de impedancias e invertirla para obtener la matriz de admitancias.

$$Y^{dqo}(h) = \begin{bmatrix} z^{qq}(h)/det & -z^{dq}(h)/det & 0 \\ -z^{qd}(h)/det & z^{dd}(h)/det & 0 \\ 0 & 0 & 1/z^{oo}(h) \end{bmatrix} \quad (A.7)$$

donde:

$$det = z^{dd}(h)z^{qq}(h) - z^{dq}(h)z^{qd}(h)$$

A.2 Cálculo de los parámetros de los equivalentes Norton

Se presentan ecuaciones directas para evaluar los productos matriciales necesarios para calcular los parámetros de los circuitos equivalentes Norton $Y^{abc}(h)$ (3.22) y I_f^{abc} (3.23).

Los productos se realizaron considerando que $Y^{dqo}(h)$ tiene la estructura de (3.14)

—secuencia cero desacoplada.

$$Do^T Y^{dqo} Do = \frac{y^{oo}}{3} A_0 \tag{A.8}$$

$$D^T Y^{dqo} D^C = \frac{y^{dd} + y^{qq} + j(y^{dq} - y^{qd})}{6} A_1 \tag{A.9}$$

$$D^H Y^{dqo} D = \frac{y^{dd} + y^{qq} - j(y^{dq} - y^{qd})}{6} A_1^T \tag{A.10}$$

$$D^H Y^{dqo} D^C = \frac{y^{dd} - y^{qq} + j(y^{dq} + y^{qd})}{6} A_2 e^{-j2\delta} \tag{A.11}$$

$$D^T Y^{dqo} D = \frac{y^{dd} - y^{qq} - j(y^{dq} + y^{qd})}{6} A_2^T e^{j2\delta} \tag{A.12}$$

donde:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ a^2 & 1 & a \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & a^2 & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{bmatrix}$$

En el desarrollo de la ecuación para calcular la corriente Norton que representa la conversión de frecuencia I_f^{abc} (3.18), se indicó que algunos productos matriciales no se consideraban, porque, debido a la estructura de $Y^{dqo}(h)$ —secuencia cero desacoplada,— son nulos. Lo anterior se demuestra a continuación.

Se evalúan los términos agrupados en (3.19). Para el cálculo se consideró llena a la matriz $Y^{dqo}(h)$.

$$D^T Y^{dqo} D_o = \frac{y^{do} - jy^{qo}}{\sqrt{3}} A_3$$

$$D^H Y^{dqo} D_o = \frac{y^{do} + jy^{qo}}{\sqrt{3}} A_3$$

$$
\begin{aligned}
D_o^T Y^{dqo} D &= \frac{y^{do} - jy^{qo}}{\sqrt{3}} A_3^T \\
D_o^T Y^{dqo} D^C &= \frac{y^{do} + jy^{qo}}{\sqrt{3}} A_3^T
\end{aligned}
$$

donde:

$$
A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a^2 & a^2 \\ a & a & a \end{bmatrix}
$$

Se observa en las ecuaciones anteriores que los productos matriciales dependen de los valores do y qo. Como en este caso ambos valores son cero, los productos matriciales siempre resultan iguales a cero.

A.3 Evaluación de la matriz $Z_{12}(h)z_{22}^{-1}(h)$

En el cálculo de la corriente I_s^{dqo} (3.36), es necesario evaluar el producto $Z_{12}(h)z_{22}^{-1}(h)$; se presentan ecuaciones directas para evaluar la matriz resultante.

La matriz resultante tiene la forma presentada a continuación.

$$
Z_{12}(h)z_{22}^{-1}(h) = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} \\ jz_{11} & jz_{12} & jz_{13} & jz_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{A.13}
$$

Las ecuaciones para evaluar los elementos son:

$$
z_{11} = \frac{hx^{md}[h(x^D - x^{md}) - jr^D]}{-r^f r^D + h^2(x^f x^D - (x^{md})^2) - jh(r^f x^D + r^D x^f)} \tag{A.14}
$$

$$
z_{12} = \frac{-hx^{mq}[r^Q + jh(x^Q - x^{mq})]}{-r^g r^Q + h^2(x^g x^Q - (x^{mq})^2) - jh(r^g x^Q + r^Q x^g)} \tag{A.15}
$$

$$
z_{13} = \frac{hx^{md}[h(x^f - x^{md}) - jr^f]}{-r^f r^D + h^2(x^f x^D - (x^{md})^2) - jh(r^f x^D + r^D x^f)} \tag{A.16}
$$

$$
z_{14} = \frac{-hx^{mq}[r^g + jh(x^g - x^{mq})]}{-r^q r^Q + h^2(x^g x^Q - (x^{mq})^2) - jh(r^g x^Q + r^Q x^g)} \tag{A.17}
$$

Se observa que cuando r^f, r^g, r^D, r^Q son pequeños, la matriz $Z_{12}(h)[z_{22}(h)]^{-1}$ es una función de h casi constante. Si se sustituye r^x/h por r^x_m, desaparece la dependencia de h. Como r^x_h es aún más pequeña que r^x, se puede despreciar, con lo cual la matriz resulta constante.

También se observa que z_{11} y z_{13} son ecuaciones similares, solo cambian algunos elementos del numerador; basta cambiar los subíndices D por f. Lo mismo ocurre con z_{12} y z_{14}, en que sólo se cambian los subíndices Q por g del numerador.

APÉNDICE B

ELEMENTOS DEL JACOBIANO

APÉNDICE B
ELEMENTOS DEL JACOBIANO

B.1 Nodos de carga

B.1.1 Submatrices de la diagonal (j=k)

Derivando (4.5) se obtiene (B.1):

$$\frac{\partial \Delta P_k^f}{\partial e_k^f} = e_k^f \frac{\partial a_k^f}{\partial e_k^f} + \frac{\partial e_k^f}{\partial e_k^f} a_k^f + f_k^f \frac{\partial b_k^f}{\partial e_k^f} + \frac{\partial f_k^f}{\partial e_k^f} b_k^f \tag{B.1}$$

A continuación se presenta el desarrollo para obtener las derivadas parciales de las corrientes nodales con respecto a los voltajes nodales. De las ecuaciones nodales del sistema de potencia se obtiene (B.2):

$$I_k^f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{m=a}^{c} \left(Y_{ki}^{fm} V_i^m \right) \tag{B.2}$$

Expresando los elementos de la sumatoria en sus componentes reales e imaginarias:

$$\begin{aligned} a_k^f + j b_k^f &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{m=a}^{c} \left\{ \left(G_{ki}^{fm} + j B_{ki}^{fm} \right) \left(e_i^m + j f_i^m \right) \right\} \\ a_k^f + j b_k^f &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{m=a}^{c} \left(G_{ki}^{fm} e_i^m - B_{ki}^{fm} f_i^m \right) + j \sum_{i=1}^{n} \sum_{m=a}^{c} \left(G_{ki}^{fm} f_i^m + B_{ki}^{fm} e_i^m \right) \end{aligned}$$

Igualando las partes reales e imaginarias de cada lado de la ecuación anterior se obtienen (B.3) y (B.4).

$$a_k^f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{m=a}^{c} \left(G_{ki}^{fm} e_i^m - B_{ki}^{fm} f_i^m \right) \tag{B.3}$$

$$b_k^f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{m=a}^{c}\left(G_{ki}^{fm} f_i^m + B_{ki}^{fm} e_i^m\right) \tag{B.4}$$

Derivando (B.3) y (B.4) con respecto a las componentes de los voltajes nodales se obtienen (B.5) a (B.8).

$$\frac{\partial a_k^f}{\partial e_j^p} = G_{kj}^{fp} \tag{B.5}$$

$$\frac{\partial a_k^f}{\partial f_j^p} = -B_{kj}^{fp} \tag{B.6}$$

$$\frac{\partial b_k^f}{\partial e_j^p} = B_{kj}^{fp} \tag{B.7}$$

$$\frac{\partial b_k^f}{\partial f_j^p} = G_{kj}^{fp} \tag{B.8}$$

Sustituyendo (B.5) y (B.7) en (B.1) se obtiene (B.9):

$$\frac{\partial \Delta P_k^f}{\partial e_k^f} = e_k^f G_{kk}^{ff} + f_k^f B_{kk}^{ff} + a_k^f \tag{B.9}$$

Utilizando (4.5), (4.6) y (B.5) a (B.8) se obtienen (B.10) a (B.16):

$$\frac{\partial \Delta P_k^f}{\partial e_k^p} = e_k^f G_{kk}^{fp} + f_k^f B_{kk}^{fp} \qquad (p \neq f) \tag{B.10}$$

$$\frac{\partial \Delta P_k^f}{\partial f_k^f} = -e_k^f B_{kk}^{ff} + f_k^f G_{kk}^{ff} + b_k^f \tag{B.11}$$

$$\frac{\partial \Delta P_k^f}{\partial f_k^p} = -e_k^f B_{kk}^{fp} + f_k^f G_{kk}^{fp} \qquad (p \neq f) \tag{B.12}$$

$$\frac{\partial \Delta Q_k^f}{\partial e_k^f} = -e_k^f B_{kk}^{ff} + f_k^f G_{kk}^{ff} - b_k^f \tag{B.13}$$

$$\frac{\partial \Delta Q_k^f}{\partial e_k^p} = -e_k^f B_{kk}^{fp} + f_k^f G_{kk}^{fp} \qquad (p \neq f) \tag{B.14}$$

$$\frac{\partial \Delta Q_k^f}{\partial f_k^f} = -e_k^f G_{kk}^{ff} - f_k^f B_{kk}^{ff} + a_k^f \tag{B.15}$$

$$\frac{\partial \Delta Q_k^f}{\partial f_k^p} = -e_k^f G_{kk}^{fp} - f_k^f B_{kk}^{fp} \qquad (p \neq f) \tag{B.16}$$

B.1.2 Submatrices fuera de la diagonal $(j \neq k)$

Derivando (4.5) y (4.6) se obtienen (B.17) a (B.20).

$$\frac{\partial \Delta P_k^f}{\partial e_j^p} = e_k^f G_{kj}^{fp} + f_k^f B_{kj}^{fp} \qquad (j \neq k) \tag{B.17}$$

$$\frac{\partial \Delta P_k^f}{\partial f_j^p} = -e_k^f B_{kj}^{fp} + f_k^f G_{kj}^{fp} \qquad (j \neq k) \tag{B.18}$$

$$\frac{\partial \Delta Q_k^f}{\partial e_j^p} = -e_k^f B_{kj}^{fp} + f_k^f G_{kj}^{fp} \qquad (j \neq k) \tag{B.19}$$

$$\frac{\partial \Delta Q_k^f}{\partial f_j^p} = -e_k^f G_{kj}^{fp} - f_k^f B_{kj}^{fp} \qquad (j \neq k) \tag{B.20}$$

B.2 Nodos de generación

B.2.1 Submatrices de la diagonal $(j=k)$

Derivando (4.8) se obtienen (B.21) y (B.22).

$$\frac{\partial \Delta P_{gk}}{\partial e_k^p} = -\sum_{m=a}^{c} (e_k^m G_{kk}^{mp} + f_k^m B_{kk}^{mp}) - a_k^p \tag{B.21}$$

$$\frac{\partial \Delta P_{gk}}{\partial f_k^p} = \sum_{m=a}^{c} (e_k^m B_{kk}^{mp} - f_k^m G_{kk}^{mp}) - b_k^p \tag{B.22}$$

Derivando (4.9) se obtienen (B.23) a (B.26).

$$\frac{\partial \Delta V_k^2}{\partial e_k^a} = -2e_k^a \tag{B.23}$$

$$\frac{\partial \Delta V_k^2}{\partial e_k^p} = 0 \qquad (p \neq a) \tag{B.24}$$

$$\frac{\partial \Delta V_k^2}{\partial f_k^a} = -2f_k^a \tag{B.25}$$

$$\frac{\partial \Delta V_k^2}{\partial f_k^p} = 0 \qquad (p \neq a) \tag{B.26}$$

Derivando (4.20) a (4.23) se obtienen (B.27) a (B.34).

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta \mathrm{A1}_k}{\partial e_k^p} &= G_{gk}^{ap} + G_{kk}^{ap} + \frac{1}{2}\left(G_{gk}^{bp} + G_{kk}^{bp}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(B_{gk}^{bp} + B_{kk}^{bp}\right) + \\ &\quad \frac{\partial \mathrm{AL}_k^a}{\partial e_k^p} + \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{AL}_k^b}{\partial e_k^p} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial \mathrm{BL}_k^b}{\partial e_k^p}\end{aligned} \tag{B.27}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta \mathrm{A1}_k}{\partial f_k^p} &= -B_{gk}^{ap} - B_{kk}^{ap} - \frac{1}{2}\left(B_{gk}^{bp} + B_{kk}^{bp}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(G_{gk}^{bp} + G_{kk}^{bp}\right) + \\ &\quad \frac{\partial \mathrm{AL}_k^a}{\partial f_k^p} + \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{AL}_k^b}{\partial f_k^p} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial \mathrm{BL}_k^b}{\partial f_k^p}\end{aligned} \tag{B.28}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta \mathrm{B1}_k}{\partial e_k^p} &= B_{gk}^{ap} + B_{kk}^{ap} + \frac{1}{2}\left(B_{gk}^{bp} + B_{kk}^{bp}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(G_{gk}^{bp} + G_{kk}^{bp}\right) + \\ &\quad \frac{\partial \mathrm{BL}_k^a}{\partial e_k^p} + \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{BL}_k^b}{\partial e_k^p} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial \mathrm{AL}_k^b}{\partial e_k^p}\end{aligned} \tag{B.29}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta \mathrm{B1}_k}{\partial f_k^p} &= G_{gk}^{ap} + G_{kk}^{ap} + \frac{1}{2}\left(G_{gk}^{bp} + G_{kk}^{bp}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(B_{gk}^{bp} + B_{kk}^{bp}\right) + \\ &\quad \frac{\partial \mathrm{BL}_k^a}{\partial f_k^p} + \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{BL}_k^b}{\partial f_k^p} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial \mathrm{AL}_k^b}{\partial f_k^p}\end{aligned} \tag{B.30}$$

$$\frac{\partial \Delta A2_k}{\partial e_k^p} = G_{gk}^{ap} + G_{kk}^{ap} + \frac{1}{2}\left(G_{gk}^{cp} + G_{kk}^{cp}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(B_{gk}^{cp} + B_{kk}^{cp}\right) + \frac{\partial AL_k^a}{\partial e_k^p} + \frac{1}{2}\frac{\partial AL_k^c}{\partial e_k^p} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial BL_k^c}{\partial e_k^p} \tag{B.31}$$

$$\frac{\partial \Delta A2_k}{\partial f_k^p} = -B_{gk}^{ap} - B_{kk}^{ap} - \frac{1}{2}\left(B_{gk}^{cp} + B_{kk}^{cp}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(G_{gk}^{cp} + G_{kk}^{cp}\right) + \frac{\partial AL_k^a}{\partial f_k^p} + \frac{1}{2}\frac{\partial AL_k^c}{\partial f_k^p} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial BL_k^c}{\partial f_k^p} \tag{B.32}$$

$$\frac{\partial \Delta B2_k}{\partial e_k^p} = B_{gk}^{ap} + B_{kk}^{ap} + \frac{1}{2}\left(B_{gk}^{cp} + B_{kk}^{cp}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(G_{gk}^{cp} + G_{kk}^{cp}\right) + \frac{\partial BL_k^a}{\partial e_k^p} + \frac{1}{2}\frac{\partial BL_k^c}{\partial e_k^p} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial AL_k^c}{\partial e_k^p} \tag{B.33}$$

$$\frac{\partial \Delta B2_k}{\partial f_k^p} = G_{gk}^{ap} + G_{kk}^{ap} + \frac{1}{2}\left(G_{gk}^{cp} + G_{kk}^{cp}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(B_{gk}^{cp} + B_{kk}^{cp}\right) + \frac{\partial BL_k^a}{\partial f_k^p} + \frac{1}{2}\frac{\partial BL_k^c}{\partial f_k^p} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial AL_k^c}{\partial f_k^p} \tag{B.34}$$

A continuación se presentan las ecuaciones para evaluar las derivadas de las componentes reales e imaginarias de las corrientes de carga local en un nodo de generación.

$$IL_k^f = \left(\frac{SL_k^f}{V_k^f}\right)^* = \frac{PL_k^f - jQL_k^f}{e_k^f - jf_k^f}$$

$$AL_k^f + jBL_k^f = \frac{1}{\left(e_k^f\right)^2 + \left(f_k^f\right)^2}\left(PL_k^f e_k^f + QL_k^f f_k^f\right) + j\frac{1}{\left(e_k^f\right)^2 + \left(f_k^f\right)^2}\left(PL_k^f f_k^f - QL_k^f e_k^f\right)$$

Igualando las partes reales e imaginarias de la ecuación anterior se obtienen (B.35) y (B.36).

$$AL_k^f = \frac{1}{\left(e_k^f\right)^2 + \left(f_k^f\right)^2}\left(PL_k^f e_k^f + QL_k^f f_k^f\right) \tag{B.35}$$

$$\mathrm{BL}_k^f = \frac{1}{\left(e_k^f\right)^2 + \left(f_k^f\right)^2}\left(\mathrm{PL}_k^f f_k^f - \mathrm{QL}_k^f e_k^f\right) \tag{B.36}$$

Derivando (B.35) y (B.36) se obtienen (B.37) a (B.42).

$$\frac{\partial \mathrm{AL}_k^f}{\partial e_k^f} = \frac{1}{\left[\left(e_k^f\right)^2 + \left(f_k^f\right)^2\right]^2}\left\{-\left[\left(e_k^f\right)^2 - \left(f_k^f\right)^2\right]\mathrm{PL}_k^f - 2e_k^f f_k^f \mathrm{QL}_k^f\right\} \tag{B.37}$$

$$\frac{\partial \mathrm{AL}_k^f}{\partial f_k^f} = \frac{1}{\left[\left(e_k^f\right)^2 + \left(f_k^f\right)^2\right]^2}\left\{\left[\left(e_k^f\right)^2 - \left(f_k^f\right)^2\right]\mathrm{QL}_k^f - 2e_k^f f_k^f \mathrm{PL}_k^f\right\} \tag{B.38}$$

$$\frac{\partial \mathrm{BL}_k^f}{\partial e_k^f} = \frac{\partial \mathrm{AL}_k^f}{\partial f_k^f} \tag{B.39}$$

$$\frac{\partial \mathrm{BL}_k^f}{\partial f_k^f} = -\frac{\partial \mathrm{AL}_k^f}{\partial e_k^f} \tag{B.40}$$

$$\frac{\partial \mathrm{AL}_k^f}{\partial f_k^p} = 0 \qquad (p \neq f) \tag{B.41}$$

$$\frac{\partial \mathrm{BL}_k^f}{\partial e_k^p} = 0 \qquad (p \neq f) \tag{B.42}$$

Las ecuaciones (B.37) a (B.42) son utilizadas para evaluar (B.27) a (B.34).

B.2.2 Submatrices fuera de la diagonal $(j \neq k)$

Derivando (4.8), (4.9) y (4.20) a (4.23) se obtienen (B.43) a (B.54).

$$\frac{\partial \Delta P_{gk}}{\partial e_j^p} = -\sum_{m=a}^{c}\left(e_k^m G_{kj}^{mp} + f_k^m B_{jk}^{mp}\right) \qquad (j \neq k) \tag{B.43}$$

$$\frac{\partial \Delta P_{gk}}{\partial f_j^p} = \sum_{m=a}^{c}\left(e_k^m B_{kj}^{mp} - f_k^m G_{jk}^{mp}\right) \qquad (j \neq k) \tag{B.44}$$

$$\frac{\partial \Delta V_k^2}{\partial e_j^p} = 0 \qquad (j \neq k) \tag{B.45}$$

$$\frac{\partial \Delta V_k^2}{\partial f_j^p} = 0 \qquad (j \neq k) \tag{B.46}$$

$$\frac{\partial \Delta \mathrm{A1}_k}{\partial e_j^p} = G_{kj}^{ap} + \frac{1}{2} G_{kj}^{bp} + \frac{\sqrt{3}}{2} B_{kj}^{bp} \qquad (j \neq k) \tag{B.47}$$

$$\frac{\partial \Delta \mathrm{A1}_k}{\partial f_j^p} = -B_{kj}^{ap} - \frac{1}{2} B_{kj}^{bp} + \frac{\sqrt{3}}{2} G_{kj}^{bp} \qquad (j \neq k) \tag{B.48}$$

$$\frac{\partial \Delta \mathrm{B1}_k}{\partial e_j^p} = B_{kj}^{ap} + \frac{1}{2} B_{kj}^{bp} - \frac{\sqrt{3}}{2} G_{kj}^{bp} \qquad (j \neq k) \tag{B.49}$$

$$\frac{\partial \Delta \mathrm{B1}_k}{\partial f_j^p} = G_{kj}^{ap} + \frac{1}{2} G_{kj}^{bp} + \frac{\sqrt{3}}{2} B_{kj}^{bp} \qquad (j \neq k) \tag{B.50}$$

$$\frac{\partial \Delta \mathrm{A2}_k}{\partial e_j^p} = G_{kj}^{ap} + \frac{1}{2} G_{kj}^{cp} - \frac{\sqrt{3}}{2} B_{kj}^{cp} \qquad (j \neq k) \tag{B.51}$$

$$\frac{\partial \Delta \mathrm{A2}_k}{\partial f_j^p} = -B_{kj}^{ap} - \frac{1}{2} B_{kj}^{cp} - \frac{\sqrt{3}}{2} G_{kj}^{cp} \qquad (j \neq k) \tag{B.52}$$

$$\frac{\partial \Delta \mathrm{B2}_k}{\partial e_j^p} = B_{kj}^{ap} + \frac{1}{2} B_{kj}^{cp} + \frac{\sqrt{3}}{2} G_{kj}^{cp} \qquad (j \neq k) \tag{B.53}$$

$$\frac{\partial \Delta \mathrm{B2}_k}{\partial f_j^p} = G_{kj}^{ap} + \frac{1}{2} G_{kj}^{cp} - \frac{\sqrt{3}}{2} B_{kj}^{cp} \qquad (j \neq k) \tag{B.54}$$

APÉNDICE C

DATOS DEL SISTEMA DE 10 NODOS

APÉNDICE C
DATOS DEL SISTEMA DE 10 NODOS

En este apéndice se presentan los datos de frecuencia fundamental del sistema de 10 nodos de la Figura 4.3. Con excepción de los generadores, los parámetros de todos los elementos se presentan en cantidades de fase. Todas las cantidades se expresan en por unidad, con una potencia base trifásica de 100 MVA.

En la Tabla C.1 se muestran los datos de generadores; como por diseño este elemento es balanceado, sus parámetros se presentan en cantidades de secuencia. Los valores en cantidades de fase se obtienen fácilmente aplicando la transformación de componentes simétricas.

Tabla C.1: Impedancias de generadores

Nodo	z^o	z^+	z^-
1	.150	.010	.091
4	.080	.010	.021

Los transformadores están formados por tres unidades monofásicas iguales y con conexión delta-estrella sólidamente aterrizada. En la Tabla C.2 se presenta la admitancia de dispersión y el tap del lado del nodo p.

Tabla C.2: Parámetros de las unidades de transformación monofásicas

$p-q$	y	Tap
$3-4$	$2.2278-60.8941j$	1.045
$2-1$	$1.3812-26.2431j$	1.022

Con los valores de la Tabla C.2 se forman las matrices de admitancia nodal de los

transformadores en cantidades de fase. Se utilizan los métodos desarrollados en [43, 5]. Las matrices se muestran a continuación.

$$Yt_{3-4} =$$

$$\begin{bmatrix} 2.0401-55.7626j & 0 & 0 & -1.2309+33.6433j & 1.2309-33.6433j & 0 \\ 0 & 2.0401-55.7626j & 0 & 1.2309-33.6433j & -1.2309+33.6433j & 1.2309-33.6433j \\ 0 & 0 & 2.0401-55.7626j & 0 & 1.2309-33.6433j & -1.2309+33.6433j \\ -1.2309+33.6433j & 0 & 1.2309-33.6433j & 1.4852-40.5961j & -.7426+20.2980j & -.7426+20.2980j \\ 1.2309-33.6433j & -1.2309+33.6433j & 0 & -.7426+20.2980j & 1.4852-40.5961j & -.7426+20.2980j \\ 0 & 1.2309-33.6433j & -1.2309+33.6433j & -.7426+20.2980j & -.7426+20.2980j & 1.4852-40.5961j \end{bmatrix} \quad (C.1)$$

$$Yt_{2-1} =$$

$$\begin{bmatrix} 1.3224-25.1254j & 0 & 0 & -.7803+14.8253j & .7803-14.8253j & 0 \\ 0 & 1.3224-25.1254j & 0 & .7803-14.8253j & -.7803+14.8253j & .7803-14.8253j \\ 0 & 0 & 1.3224-25.1254j & 0 & .7803-14.8253j & -.7803+14.8253j \\ -.7803+14.8253j & 0 & .7803-14.8253j & .9208-17.4954j & -.4604+8.7477j & -.4604+8.7477j \\ .7803-14.8253j & -.7803+14.8253j & 0 & -.4604+8.7477j & .9208-17.4954j & -.4604+8.7477j \\ 0 & .7803-14.8253j & -.7803+14.8253j & -.4604+8.7477j & -.4604+8.7477j & .9208-17.4954j \end{bmatrix} \quad (C.2)$$

Se presentan las matrices de admitancia del efecto inductivo serie y capacitivo paralelo de las líneas de transmisión en componentes de fase. Aparecen en su estado natural desbalanceado y acoplado.

$$Yl_{6-2} = \begin{bmatrix} 4.0201 - 26.3269j & -.3939 + 5.4418j & -2.0724 + 7.3143j \\ -.3939 + 5.4418j & 2.7916 - 23.5701j & -.9519 + 6.5257j \\ -2.0724 + 7.3143j & -.9519 + 6.5257j & 4.4880 - 25.6987j \end{bmatrix} \quad (C.3)$$

$$Y/2_{6-2} = \begin{bmatrix} .1750 & -.0300 & -.0200 \\ -.0300 & .1760 & -.0300 \\ -.0200 & -.0300 & .1700 \end{bmatrix} j \quad (C.4)$$

$$Yl_{6-5,6-5} =$$

$$\begin{bmatrix} 16.5916 - 107.631j & -4.4966 + 34.5147j & -2.5484 + 20.8748j & -1.7740 + 10.4013j & -2.5097 + 9.5747j & -1.0780 + 10.7818j \\ -4.4966 + 34.5147j & 17.2263 - 111.126j & -7.5320 + 34.3866j & -1.7430 + 9.3611j & -1.8172 + 6.7239j & -.0673 + 7.0431j \\ -2.5484 + 20.8748j & -7.5320 + 34.3866j & 18.7889 - 102.530j & -.9111 + 8.7962j & -1.0108 + 6.3232j & -3.0306 + 7.6496j \\ -1.7740 + 10.4013j & -1.7430 + 9.3611j & -.9111 + 8.7962j & 22.8384 - 133.568j & -3.5541 + 36.9009j & -12.2459 + 54.2082j \\ -2.5097 + 9.5747j & -1.8172 + 6.7239j & -1.0108 + 6.3232j & -3.5541 + 36.9009j & 28.8420 - 124.018j & -18.2358 + 49.1629j \\ -1.0780 + 10.7818j & -.0673 + 7.0431j & -3.0306 + 7.6496j & -12.2459 + 54.2082j & -18.2358 + 49.1629j & 37.9109 - 156.128j \end{bmatrix} \quad (C.5)$$

$$Y/2_{6-5,6-5} =$$

$$\begin{bmatrix} .0225 & -.0040 & -.0045 & -.0035 & -.0015 & -.0010 \\ -.0040 & .0200 & -.0055 & -.0015 & -.0025 & -.0010 \\ -.0045 & -.0055 & .0175 & -.0015 & -.0010 & -.0020 \\ -.0035 & -.0015 & -.0015 & .0220 & -.0050 & -.0050 \\ -.0015 & -.0025 & -.0010 & -.0050 & .0200 & -.0055 \\ -.0010 & -.0010 & -.0020 & -.0050 & -.0055 & .0180 \end{bmatrix} j \quad (C.6)$$

$$Yl_{7-5,8-5} =$$

$$\begin{bmatrix} 5.4436 - 41.8288j & .2492 + 8.9600j & .9796 + 3.4236j \\ .2492 + 8.9600j & 4.9820 - 44.8908j & .2076 + 8.3296j \\ .9796 + 3.4236j & .2076 + 8.3296j & 5.5992 - 42.4088j \\ -1.0628 + 4.6668j & -.5656 + 3.3956j & -1.8212 + 3.6648j \\ -1.1172 + 2.5480j & -1.0096 + 5.1952j & -1.1128 + 5.3920j \\ -1.6872 + 4.0248j & -1.0536 + 4.7232j & -.9772 + 5.1856j \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} -1.0628+4.6668j & -1.1172+2.5480j & -1.6872+4.0248j \\ -.5656+3.3956j & -1.0096+5.1952j & -1.0536+4.7232j \\ -1.8212+3.6648j & -1.1128+5.3920j & -.9772+5.1856j \\ 5.5368-43.3824j & .3844+8.1352j & -.1700+7.6768j \\ .3844+8.1352j & 5.0840-44.3180j & .3588+7.6336j \\ -.1700+7.6768j & .3588+7.6336j & 5.7424-43.7092j \end{matrix}\Bigg] \tag{C.7}$$

$Y/2_{7-5,8-5} =$

$$\begin{bmatrix} .0371 & -.0075 & -.0063 & -.0050 & -.0056 & -.0050 \\ -.0075 & .0374 & -.0075 & -.0037 & -.0044 & -.0040 \\ -.0063 & -.0075 & .0388 & -.0044 & -.0040 & -.0035 \\ -.0050 & -.0037 & -.0044 & .0371 & -.0075 & -.0063 \\ -.0056 & -.0044 & -.0040 & -.0075 & .0374 & -.0075 \\ -.0050 & -.0040 & -.0035 & -.0063 & -.0075 & .0375 \end{bmatrix} j \tag{C.8}$$

$Yl_{9-6,10-6} =$

$$\begin{bmatrix} 9.2048-59.6608j & -4.1132+22.3412j & -1.1972+10.5276j & -1.8676+11.2584j & -1.2988+2.6988j & 2.1360-6.3752j \\ -4.1132+22.3412j & 14.7940-75.8224j & -4.7292+24.5600j & -1.2988+2.6988j & -1.4856+9.3216j & -1.2352+2.3636j \\ -1.1972+10.5276j & -4.7292+24.5600j & 10.5780-64.8404j & 2.1360-6.3752j & -1.2352+2.3636j & -2.3632+13.1020j \\ -1.8676+11.2584j & -1.2988+2.6988j & 2.1360-6.3752j & 9.2048-59.6608j & -4.1132+22.3412j & -1.1972+10.5276j \\ -1.2988+2.6988j & -1.4856+9.3216j & -1.2352+2.3636j & -4.1132+22.3412j & 14.7940-75.8224j & -4.7292+24.5600j \\ 2.1360-6.3752j & -1.2352+2.3636j & -2.3632+13.1020j & -1.1972+10.5276j & -4.7292+24.5600j & 10.5780-64.8404j \end{bmatrix} \tag{C.9}$$

$Y/2_{7-5,8-5} =$

$$\begin{bmatrix} .0321 & -.0063 & -.0056 & -.0054 & -.0040 & -.0035 \\ -.0063 & .0325 & -.0052 & -.0050 & -.0047 & -.0040 \\ -.0056 & -.0052 & .0314 & -.0040 & -.0035 & -.0031 \\ -.0054 & -.0050 & -.0040 & .0321 & -.0063 & -.0056 \\ -.0040 & -.0047 & -.0035 & -.0063 & .0325 & -.0051 \\ -.0035 & -.0040 & -.0031 & -.0056 & -.0051 & .0314 \end{bmatrix} j \tag{C.10}$$

$Yl_{3-7,3-8,3-9,3-10} =$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
1.8609 - 14.0831j & .1276 + 2.8862j & .3719 + 1.0276j \\
.1276 + 2.8862j & 1.7246 - 15.1372j & .1133 + 2.6586j \\
.3719 + 1.0276j & .1133 + 2.6586j & 1.9092 - 14.2432j \\
-.3512 + 1.5153j & -.1848 + 1.1006j & -.6007 + 1.1808j \\
-.3740 + .8298j & -.3411 + 1.7174j & -.3740 + 1.7929j \\
-.5613 + 1.3178j & -.3424 + 1.5369j & -.3231 + 1.6997j \\
-.1348 + .8162j & -.0600 - .0427j & -.1971 + .5821j \\
.0648 - .0588j & .0528 + .3992j & .0632 - .0620j \\
-.1808 + .3608j & -.38011.2465j & -.1469 + .6990j \\
-.0715 + .1355j & -.2148 + .7692j & -.1092 + .4411j \\
-.1615 + .5885j & .0239 - .1901j & -.0493 + .0787j \\
-.0828 + .3989j & -.0225 - .0173j & -.1256 + .2544j
\end{array}\right.
$$

$$
\begin{array}{ccc}
-.3512 + 1.5153j & -.3740 + .8298j & -.5613 + 1.3178j \\
-.1848 + 1.1006j & -.3411 + 1.7174j & -.3424 + 1.5369j \\
-.6007 + 1.1808j & -.3740 + 1.7929j & -.3231 + 1.6997j \\
1.8541 - 14.5078j & .1271 + 2.7214j & -.0589 + 2.5642j \\
.1271 + 2.7214j & 1.7122 - 14.8343j & .1172 + 2.5570j \\
-.0589 + 2.5642j & .1172 + 2.5570j & 1.9218 - 14.6123j \\
-.1405 + .7496j & .0711 - .2520j & -.0213 + .1571j \\
.0048 - .1911j & -.2963 + 1.0984j & .0125 - .2236j \\
.0061 + .1097j & .1215 - .4352j & -.1116 + .6344j \\
-.0181 + .3833j & .0989 - .3191j & .0776 - .3751j \\
.0829 - .2179j & -.0612 + .4860j & .0964 - .2352j \\
.0532 - .2681j & .0751 - .1963j & -.0432 + .4763j
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
-.1348 + .8162j & .0648 - .0588j & -.1808 + .3608j \\
-.0600 - .0427j & .0528 + .3992j & -.3801 + 1.2465j \\
-.1971 + .5821j & .0632 - .0620j & -.1469 + .6990j \\
-.1405 + .7496j & .0048 - .1911j & .0061 + .1097j \\
.0711 - .2520j & -.2963 + 1.0984j & .1215 - .4352j \\
-.0213 + .1571j & .0125 - .2236j & -.1116 + .6344j \\
3.0605 - 19.4794j & -1.8198 + 8.5578j & .6439 + .2864j \\
-1.8198 + 8.5578j & 5.3817 - 26.3783j & -2.0246 + 9.2455j \\
.6439 + .2864j & -2.0246 + 9.2455j & 3.5710 - 21.2872j \\
-.4596 + 3.3676j & -.4164 + .7570j & .5733 - 1.6704j \\
-.5072 + .9681j & -.4064 + 2.9682j & -.5028 + .9061j \\
.5228 - 1.5478j & -.3919 + .6607j & -.6095 + 3.9584j
\end{array}
$$

$$
\begin{matrix}
-.0715+.1355j & -.1615+.5885j & -.0828+.3989j \\
-.2148+.7692j & .0239-.1901j & -.0225-.0173j \\
-.1092+.4411j & -.0493+.0787j & -.1256+.2544j \\
-.0181+.3833j & .0829-.2179j & .0532-.2681j \\
.0989-.3191j & -.0612+.4860j & .0751-.1963j \\
.0776-.3751j & .0964-.2352j & -.0432+.4763j \\
-.4596+3.3676j & -.5072+.9681j & .5228-1.5478j \\
-.4164+.7570j & -.4064+2.9682j & -.3919+.6607j \\
.5733-1.6704j & -.5028+.9061j & -.6095+3.9584j \\
3.0506-19.8859j & -1.3645+7.4349j & -.3368+3.3660j \\
-1.3645+7.4349j & 4.9597-25.3272j & -1.5629+8.1563j \\
-.3368+3.3660j & -1.5629+8.1563j & 3.4806-21.5469j
\end{matrix}
\Bigg] \qquad \text{(C.11)}
$$

$$
Y/2_{3-7,3-8,3-9,3-10} =
$$

$$
\left[\begin{matrix}
.1113 & -.0225 & -.0188 & -.0150 & -.0169 & -.0150 \\
-.0225 & .1121 & -.0225 & -.0112 & -.0131 & -.0120 \\
-.0188 & -.0225 & .1163 & -.0131 & -.0120 & -.0105 \\
-.0150 & -.0112 & -.0131 & .1113 & -.0225 & -.0188 \\
-.0169 & -.0131 & -.0120 & -.0225 & .1121 & -.0225 \\
-.0150 & -.0120 & -.0105 & -.0188 & -.0225 & .1125 \\
-.0075 & -.0083 & -.0067 & -.0067 & -.0045 & -.0034 \\
-.0082 & -.0067 & -.0056 & -.0045 & -.0045 & -.0037 \\
-.0067 & -.0056 & -.0067 & -.0034 & -.0037 & -.0053 \\
-.0056 & -.0034 & -.0034 & -.0037 & -.0034 & -.0030 \\
-.0034 & -.0030 & -.0034 & -.0034 & -.0030 & -.0026 \\
-.0034 & -.0030 & -.0030 & -.0030 & -.0026 & -.0022
\end{matrix}\right.
$$

$$
\begin{matrix}
-.0075 & -.0082 & -.0067 & -.0056 & -.0034 & -.0034 \\
-.0083 & -.0067 & -.0056 & -.0034 & -.0030 & -.0030 \\
-.0067 & -.0056 & -.0067 & -.0034 & -.0034 & -.0030 \\
-.0067 & -.0045 & -.0034 & -.0037 & -.0034 & -.0030 \\
-.0045 & -.0045 & -.0037 & -.0034 & -.0030 & -.0026 \\
-.0034 & -.0037 & -.0053 & -.0030 & -.0026 & -.0022 \\
.0963 & -.0188 & -.0169 & -.0161 & -.0120 & -.0105 \\
-.0188 & .0975 & -.0158 & -.0150 & -.0142 & -.0120 \\
-.0169 & -.0158 & .0941 & -.0120 & -.0105 & -.0094 \\
-.0161 & -.0150 & -.0120 & .0963 & -.0188 & -.0169 \\
-.0120 & -.0142 & -.0105 & -.0188 & .0975 & -.0154 \\
-.0105 & -.0120 & -.0094 & -.0169 & -.0154 & .0941
\end{matrix}\Bigg] j \qquad \text{(C.12)}
$$

Con los datos presentados y con el proceso descrito en [5] se forma la matriz de admitancia nodal, con la cual se representa la red eléctrica a la frecuencia fundamental.

Con estos mismos datos y con los modelos presentados en el capítulo 3 se forman las matrices de admitancia para las frecuencias armónicas.

APÉNDICE D

DATOS DEL SISTEMA DE 5 NODOS

APÉNDICE D
DATOS DEL SISTEMA DE 5 NODOS

Se presentan los datos de frecuencia fundamental del sistema de 5 nodos de la Figura 5.9. Con excepción de los generadores, para todos los elementos se presentan las matrices de admitancia en componentes de fase.

En la Tabla D.1 se tienen las impedancias de secuencia de los generadores. Aplicando la transformación de componentes simétricas se obtienen las matrices en cantidades de fase.

Tabla D.1: Impedancias de generadores

Nodo	z^o	z^+	z^-
1	$.06j$	$.01j$	$.01j$
2	$.06j$	$.01j$	$.01j$

Se presenta la matriz de admitancia nodal del transformador en componentes de fase. La unidad está formada por unidades monofásicas idénticas en conexión estrella-delta. La admitancia de estas unidades es 8.333 y el tap en el lado del nodo 4 es 0.97.

$$Yt_{4-5} = \begin{bmatrix} -8.8567 & 0 & 0 & 4.9600 & -4.9600 & 0 \\ 0 & -8.8567 & 0 & 0 & 4.9600 & -4.9600 \\ 0 & 0 & -8.8567 & -4.9600 & 0 & 4.9600 \\ 4.9600 & 0 & -4.9600 & -5.5555 & 2.7778 & 2.7778 \\ -4.9600 & 4.9600 & 0 & 2.7778 & -5.5555 & 2.7778 \\ 0 & -4.9600 & 4.9600 & 2.7778 & 2.7778 & -5.5555 \end{bmatrix} j \qquad \text{(D.1)}$$

Se presentan las matrices de admitancia de los efecto inductivo serie y capacitivo paralelo.

$$Yl_{1-2} = \begin{bmatrix} 1.1061 - 3.4886j & -0.3999 + 1.0069j & -0.3999 + 1.0069j \\ -0.3999 + 1.0069j & 1.1061 - 3.4886j & -0.3999 + 1.0069j \\ -0.3999 + 1.0069j & -0.3999 + 1.0069j & 1.1061 - 3.4886j \end{bmatrix} \quad \text{(D.2)}$$

$$Y/2_{1-2} = \begin{bmatrix} 0.0175 & -0.0035 & -0.0035 \\ -0.0035 & 0.0175 & -0.0035 \\ -0.0035 & -0.0035 & 0.0175 \end{bmatrix} j \quad \text{(D.3)}$$

$$Yl_{1-3} = \begin{bmatrix} 1.1222 - 3.5262j & -0.3838 + 0.9693j & -0.3838 + 0.9693j \\ -0.3838 + 0.9693j & 1.1222 - 3.5262j & -0.3838 + 0.9693j \\ -0.3838 + 0.9693j & -0.3838 + 0.9693j & 1.1222 - 3.5262j \end{bmatrix} \quad \text{(D.4)}$$

$$Y/2_{1-3} = \begin{bmatrix} 0.0175 & -0.0035 & -0.0035 \\ -0.0035 & 0.0175 & -0.0035 \\ -0.0035 & -0.0035 & 0.0175 \end{bmatrix} j \quad \text{(D.5)}$$

$$Yl_{2-4} = \begin{bmatrix} 0.8988 - 1.4659j & -0.2721 - 0.0608j & -0.2721 - 0.0608j \\ -0.2721 - 0.0608j & 0.8988 - 1.4659j & -0.2721 - 0.0608j \\ -0.2721 - 0.0608j & -0.2721 - 0.0608j & 0.8988 - 1.4659j \end{bmatrix} \quad \text{(D.6)}$$

$$Y/2_{2-4} = \begin{bmatrix} 0.0029 & -0.0006 & -0.0006 \\ -0.0006 & 0.0029 & -0.0006 \\ -0.0006 & -0.0006 & 0.0029 \end{bmatrix} j \quad \text{(D.7)}$$

$$Yl_{3-4} = \begin{bmatrix} 2.2502 - 6.8752j & -0.7975 + 2.0886j & -0.7975 + 2.0886j \\ -0.7975 + 2.0886j & 2.2502 - 6.8752j & -0.7975 + 2.0886j \\ -0.7975 + 2.0886j & -0.7975 + 2.0886j & 2.2502 - 6.8752j \end{bmatrix} \quad \text{(D.8)}$$

$$Y/2_{3-4} = \begin{bmatrix} 0.0087 & -0.0017 & -0.0017 \\ -0.0017 & 0.0087 & -0.0017 \\ -0.0017 & -0.0017 & 0.0087 \end{bmatrix} j \quad \text{(D.9)}$$

Con los datos presentados y con el proceso descrito en [5] se forma la matriz de admitancia nodal, con la cual se representa la red eléctrica a la frecuencia fundamental.

Con estos mismos datos y con los modelos presentados en el capítulo 3 se forman las matrices de admitancia para las frecuencias armónicas.

APÉNDICE E

DATOS DEL SISTEMA DE 3 NODOS

APÉNDICE E
DATOS DEL SISTEMA DE 3 NODOS

Se presentan los datos del sistema de 3 nodos de la Figura 5.23.

En la Tabla E.1 se tienen los parámetros de la máquina síncrona en por unidad.

Tabla E.1: Parámetros de la máquina síncrona

$L_d = 1.00$	$M_d = 0.80$
$L_q = 0.80$	$M_q = 0.60$
$L_o = 0.08$	$r^a = 0.05$
$L_f = 1.10$	$r^f = 0.02$
$L_g = 1.00$	$r^g = 0.01$
$L_D = 0.90$	$r^D = 0.01$
$L_Q = 0.90$	$r^Q = 0.01$

El enlace entre los nodos 1–2 se representa mediante un circuito inductivo desacoplado. Se presenta la matriz de admitancia nodal de frecuencia fundamental. Para las frecuencias armónicas las admitancias disminuyen con la frecuencia.

$$Y_{1-2}^{abc} = \begin{bmatrix} -20j & & \\ & -20j & \\ & & -20j \end{bmatrix} \tag{E.1}$$

En el nodo 2 se tiene una carga pasiva, las admitancias de las fases b y c cambian monotónicamente con la frecuencia; el valor resistivo de la fase a se considera constante.

$$Y_2^{abc} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -j & \\ & & j \end{bmatrix} \tag{E.2}$$

Se presenta la matriz de admitancias de frecuencia fundamental del transformador, que para las frecuencias armónicas, cambia inversamente con la frecuencia.

$$Yt_{2-3} = \begin{bmatrix} -8.8567 & 0 & 0 & 4.9600 & -4.9600 & 0 \\ 0 & -8.8567 & 0 & 0 & 4.9600 & -4.9600 \\ 0 & 0 & -8.8567 & -4.9600 & 0 & 4.9600 \\ 4.9600 & 0 & -4.9600 & -5.5555 & 2.7778 & 2.7778 \\ -4.9600 & 4.9600 & 0 & 2.7778 & -5.5555 & 2.7778 \\ 0 & -4.9600 & 4.9600 & 2.7778 & 2.7778 & -5.5555 \end{bmatrix} j \tag{E.3}$$

En la Tabla E.2 se presentan los datos del RCT.

Tabla E.2: Datos del RCT

Nodo	Conexión	L^{ll}	Vr	mr
5	Δ	0.01768	1.0086	0.1111

APÉNDICE F

EFECTOS DE LAS ARMÓNICAS

APÉNDICE F
EFECTOS DE LAS ARMÓNICAS

En este apéndice se clasifican los efectos de las armónicas de acuerdo con la forma en que se altera la operación de los elementos. Se indica cómo afectan las armónicas a cada elemento del sistema eléctrico.

Los efectos de las armónicas en los sistemas de potencia pueden dividirse en tres grupos generales [48, 27]:

1. Efecto en la tensión térmica.
2. Efecto en la tensión dieléctrica.
3. Funcionamiento anormal.

F.1 Efecto en la tensión térmica

La circulación de corrientes armónicas provoca aumento en el calentamiento de todos los elementos del SEP, lo cual, además de disminuir la vida del sistema de aislamiento de todos los componentes, incrementa las pérdidas en el sistema. Se presentan efectos particularmente importantes en algunos elementos del sistema de potencia [27].

F.1.1 Clasificación de las pérdidas

Las pérdidas en la tensión térmica se clasifican [48] en:

- Pérdidas en el cobre
- Pérdidas en el hierro
- Pérdidas en el dieléctrico

F.1.1.1 Pérdidas en el cobre

Las pérdidas en el cobre se calculan con la ecuación:

$$P_c = \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{\infty} R(h)I(h)^2 \tag{F.1}$$

Donde:

$I(h)$ Es el valor pico de la corriente de h-ésima armónica.
$R(h)$ Es la resistencia del elemento a la h-ésima armónica.

En el caso en que la resistencia del aparato no dependa de la frecuencia, la ecuación resultante es:

$$P_c = \frac{1}{2}R\sum_{h=1}^{\infty} I(h)^2 \tag{F.2}$$

$$P_c = \frac{1}{2}R\left(1+\mathrm{FDC}^2\right)I(1)^2 \tag{F.3}$$

En el caso particular de resistencia constante, las pérdidas en el cobre quedan determinadas por el factor de distorsión de corriente. Sin embargo, generalmente la resistencia es función de la frecuencia.

F.1.1.2 Pérdidas en el hierro

Las pérdidas en el hierro se dividen en dos grupos:

1. Pérdidas de histéresis
2. Pérdidas por corrientes de Eddy

Las pérdidas de histéresis se calculan utilizando la ecuación:

$$P(h) = a(h) f B_m^v \tag{F.4}$$

Donde:

$a(h)$	Constante que depende de las dimensiones del núcleo magnético.
f	Frecuencia de la corriente.
B_m	Valor máximo de la densidad de flujo magnético.
v	Constante que depende del material del núcleo magnético (generalmente en el intervalo de 1.5 a 2.5).

Las pérdidas por corrientes de Eddy se calculan con la ecuación:

$$P_e = a_e f^2 B_m^2 \tag{F.5}$$

Donde a_e es una constante que depende del material y del espesor de la laminación.

Las pérdidas totales en el hierro se obtienen sumando las dos ecuaciones anteriores:

$$P_{he} = a(h) f B_m^v + a_e f^2 B_m^2 \tag{F.6}$$

La ecuación anterior puede utilizarse para calcular las pérdidas en el hierro en un circuito magnético alimentado con una fuente puramente sinusoidal de frecuencia f. En

el caso de un circuito alimentado con una señal que contiene armónicas, las pérdidas pueden calcularse por separado para cada armónica y posteriormente sumar cada contribución. Lo anterior es válido solo en el caso de elementos lineales, lo cual no ocurre cuando se presenta la saturación magnética o el fenómeno de histéresis. Sin embargo, generalmente los dispositivos funcionan en zonas de operación lineales lejos de la saturación, por lo cual casi siempre es posible utilizar el método de superposición para calcular la contribución de cada armónica a las pérdidas totales en el hierro.

F.1.1.3 Pérdidas en el dieléctrico

Las pérdidas en el dieléctrico para una frecuencia dada se calculan con la ecuación:

$$P_d = \frac{1}{2}\left(\tan\delta\right)_h V(h)^2 h\omega C \tag{F.7}$$

Donde:

ω	Frecuencia angular fundamental.
$V(h)$	Valor pico del voltaje de la h-ésima armónica.
C	Capacitancia del aparato.
$(\tan\delta)_h$	El factor dieléctrico a la h-ésima armónica.

F.1.2 Efecto en elementos del sistema

Se presentan los efectos más importantes ocasionados en los elementos del sistema de potencia debido al aumento de la tensión térmica.

F.1.2.1 Motores y generadores

Los efectos más conocidos de las armónicas en las máquinas rotatorias son el aumento en las pérdidas y en el calentamiento —generalmente atribuidos a armónicas de bajo orden y alta magnitud— y la aparición de pares parásitos.

La magnitud de la corriente de la h-ésima armónica de un motor de inducción trifásico se puede aproximar con (F.8).

$$I(h) = \frac{V(h)}{h\omega_o L_{ln}} \tag{F.8}$$

Donde L_{ln} es la suma de las reactancias de dispersión efectivas del estator y del rotor referidas al estator. Esta reactancia tiende a disminuir al aumentar la frecuencia, debido al efecto piel.

Las pérdidas ocasionadas por estas corrientes son del tipo I^2R y pueden dividirse en pérdidas en el estator, pérdidas en el rotor y pérdidas adicionales. El valor de la resistencia tiende a disminuir al aumentar la frecuencia. Otros tipos de pérdidas debidas a la distorsión del voltaje son pequeñas y pueden despreciarse.

Para las máquinas síncronas generalmente se considera que la impedancia armónica es igual a la reactancia subtransitoria multiplicada por el orden de la armónica.

Las corrientes armónicas pueden interactuar con el campo magnético fundamental y dar lugar a pares oscilatorios. Estas oscilaciones pueden estimular modos acoplados complejos que pueden producir oscilaciones torsionales en los elementos del rotor y flexiones en los álabes de la turbina. Si la frecuencia de tales modos torsionales de vibración mecánica está cerca de la frecuencia armónica, pueden desarrollarse respuestas resonantes que pueden causar ciclos de fatiga en la flecha y los álabes de la turbina.

F.1.2.2 Transformadores

El efecto de las armónicas en los transformadores es en dos formas: por un lado aumentan las pérdidas en el cobre, las pérdidas debidas al flujo de dispersión y la tensión dieléctrica; por otro lado, establecen la posibilidad de resonancias entre los devanados del transformador y las capacitancias de las líneas de transmisión.

Las pérdidas en los conductores por corrientes de Eddy pueden obtenerse con (F.9):

$$P_E = P(1)\sum_{h=1}^{N}\left(\frac{hI(h)}{I_R}\right)^2 \tag{F.9}$$

Donde I_R es la corriente nominal a la frecuencia fundamental.

Las pérdidas aumentan con la frecuencia, por lo que las altas frecuencias pueden resultar más impactantes en el calentamiento de transformadores.

La norma C57.12.00–1980 de IEEE propone un límite para las armónicas en la corriente de la carga que alimenta el transformador. Este límite es de .05 para el factor de distorsión por corriente. También establece un límite para el sobrevoltaje rms, este límite es 5% con carga nominal y 10% sin carga.

F.1.2.3 Bancos de capacitores

La presencia de armónicas origina un aumento de las pérdidas en capacitores. El incremento de pérdidas puede calcularse con (F.10):

$$\Delta P_c = \sum_{h=2}^{N} C(\tan\delta)h\omega_o V(h)^2 \tag{F.10}$$

Donde $\tan\delta$ es un factor de pérdidas.

La norma C55.1–1980 del IEEE para capacitores de potencia en derivación, establece que los capacitores pueden continuar operando con armónicas en el voltaje de alimentación, siempre que:

- La potencia reactiva total no sea mayor del 135% de su valor nominal.
- La corriente rms total no exceda al 180% del valor nominal.
- El voltaje rms total no exceda el 110%, y el valor cresta el 120% del valor nominal.

La presencia de un capacitor puede afectar notablemente el contenido de armónicas del nodo donde se encuentra conectado, debido a la posibilidad de resonancia con la impedancia equivalente del sistema vista desde ese nodo.

F.1.2.4 Cargas

Para cargas de tipo resistivo, el incremento en la potencia debido a las armónicas es función del cuadrado del factor de distorsión del voltaje. La lámpara incandescente es uno de los dispositivos de este grupo más afectado por el incremento en el calentamiento. La vida de una lámpara incandescente se calcula con (F.11):

$$\mathrm{VL} = \frac{1}{V^n} = \frac{1}{\left[V(1)^2 + (1 + \mathrm{FDV}^2)\right]^{n/2}} \tag{F.11}$$

Un valor típico para n es 13. Se observa que altos factores de distorsión acortan notablemente la vida de la lámpara; sin embargo, son más impactantes los cambios en el voltaje fundamental.

F.2 Efecto en la tensión dieléctrica

La tensión dieléctrica depende en primer término del valor pico de la señal de voltaje y en segundo término de su razón de cambio. La presencia de armónicas puede ocasionar el aumento del valor pico del voltaje, aumentando la tensión dieléctrica. Generalmente los aparatos están diseñados para soportar tensiones superiores a las generadas por las armónicas, por lo cual este efecto generalmente no es de importancia. Sin embargo, los bancos de capacitores son muy sensibles a sobrevoltajes por lo cual deben protegerse contra estas desviaciones.

F.3 Funcionamiento anormal

Dentro de funcionamiento anormal se agrupa la operación anormal o la falla de los elementos del sistema de potencia ocasionada por armónicas. Se enumeran algunos de los efectos clasificados en esta sección.

1. Existe equipo electrónico muy susceptible a la distorsión de la señal de voltaje, debido a que basan su operación en la suposición de una señal de voltaje sinusoidal pura.

2. Decremento del par electromagnético útil en máquinas eléctricas. La presencia de componentes armónicas circulando en la armadura de una máquina eléctrica puede generar pares electromagnéticos pulsantes, los cuales acortan la vida del equipo, además de reducir su eficiencia.

3. La presencia de armónicas puede afectar la capacidad de interrupción de elementos de protección. El problema se debe a incrementos en la razón de cambio de la corriente (di/dt), lo cual hace más difícil la interrupción.

4. Un nivel significativo de armónicas en la corriente ocasiona incremento en el calentamiento de fusibles, lo cual resulta en cambios en su característica tiempo-corriente.

5. La presencia de armónicas en las señales de voltaje y corriente afecta el funcionamiento de relevadores de protección electromecánicos, estáticos y, en menor medida digitales. Cada tipo de relevador tiene un comportamiento particular ante señales distorsionadas. De ello pueden derivarse operaciones incorrectas, fallos de operación y pérdidas de coordinación de relevadores.

6. Los dispositivos de medición son generalmente diseñados para medir señales sinusoidales puras; por lo tanto la presencia de armónicas da lugar a mediciones erróneas. Para que el error sea significativo se requieren distorsiones mayores del 20%.

APÉNDICE G

LÍMITES DE ARMÓNICAS RECOMENDADOS

APÉNDICE G
LÍMITES DE ARMÓNICAS RECOMENDADOS

En este apéndice se definen las condiciones máximas de contaminación de armónicas que se pueden permitir para que los elementos del sistema operen con seguridad y sin riesgo de daño.

Las primeras recomendaciones sobre límites de armónicas aparecieron en 1981 [49]. En esta recomendación solo se limitaba el contenido total de armónicas del sistema; se consideraba el caso de sistemas con dispositivos muy sensibles a armónicas y el caso de sistemas en general. Los sistemas se dividían de acuerdo con el nivel de voltaje en sólo dos grupos. Estas recomendaciones se presentan en la Tabla G.1.

Tabla G.1: Límites de distorsión de voltaje

Nivel de de voltaje	Convertidor específico†	Sistema de potencia gral.
2.4 - 69 kV	8.0%	5.0%
115 kV y mayor	1.5%	1.5%

†Su funcionamiento no se afecta por las armónicas

Todos los estándares de IEEE se revisan cada cinco años; a partir de 1986 un grupo de trabajo comenzó a trabajar en ese tema, en 1988 apareció una propuesta de actualización de los estándares [50].

En la Tabla G.2 se presentan las nuevas recomendaciones sobre límites de armónicas en las señales de voltaje. En esta recomendación los sistemas se separan en tres grupos de acuerdo con el nivel de voltaje. Además del factor de distorsión de voltaje total, se recomiendan límites para cada componente armónica.

Tabla G.2: Actualización de límites de distorsión de voltaje

Nivel de de voltaje	Armónica individual	FDV
2.3 - 68 kV	3.0%	5.0%
69 - 138 kV	1.5%	2.5%
mayor de 138 kV	1.0%	1.5%

En la Tabla G.3 se muestran las recomendaciones para los valores máximos permitidos de los corrientes armónicas inyectadas a la red.

Tabla G.3: Límites de las corrientes armónicas

	Máxima corriente armónica en % de la fundamental					
I_{sc}/I_L	$h < 11$	$11 < h < 17$	$17 < h < 23$	$23 < h < 35$	$35 < h$	FDI
< 20	4.0	2.0	1.5	0.6	0.3	5.0
20-50	7.0	3.5	2.5	1.0	0.5	8.0
50-100	10.0	4.5	4.0	1.5	0.7	12.0
100-1000	12.0	5.5	5.0	2.0	1.0	15.0
> 1000	15.0	7.0	6.0	2.5	1.4	20.0

En la Tabla G.3 I_{sc} es la corriente de corto circuito en el punto de conexión común. I_L es la corriente de carga máxima de frecuencia fundamental en el punto de conexión común. Para las unidades de generación se recomienda utilizar los valores del primer renglón de la tabla, independientemente de la relación I_{sc}/I_L.

Los límites en la Tabla G.3 son para armónicas impares y para niveles de voltaje de 2.4 a 68 kV. Para las armónicas pares se recomienda utilizar el 25% de los valores presentados. Para niveles de voltaje de 69 a 138 kV, los límites son el 50% de los presentados en la Tabla G.3. Para niveles de voltaje mayores de 138 kV se requiere hacer una evaluación particular para cada caso.

APÉNDICE H

RESONANCIA EN LÍNEAS COMPENSADAS

APÉNDICE H
RESONANCIA EN LÍNEAS COMPENSADAS

En este apéndice se desarrollan ecuaciones generales para calcular los valores de reactancia que causan resonancia, se estudian condiciones con y sin fallas para diferentes configuraciones de la línea desconectada y del reactor de compensación. Además, se presenta un ejemplo numérico en un sistema de estudio.

H.1 Condiciones sin falla

Utilizando el método electrostático se obtienen ecuaciones generales para calcular los valores de reactancia que causan resonancia. Se estudian diferentes condiciones de operación.

H.1.1 Línea balanceada, reactor sin acoplamientos

Se estudia una línea de transmisión balanceada que está compensada con un reactor con núcleos independientes para cada fase. La matriz de admitancia del efecto capacitivo de la L.T. se presenta en (H.1), la matriz del reactor se muestra en (H.2).

$$Yc_{-s}^{abc} = \begin{bmatrix} y_d & y_m & y_m \\ y_m & y_d & y_m \\ y_m & y_m & y_d \end{bmatrix} \tag{H.1}$$

$$Yr_{s}^{abc} = \begin{bmatrix} y_r & 0 & 0 \\ 0 & y_r & 0 \\ 0 & 0 & y_r \end{bmatrix} \tag{H.2}$$

El determinante (6.10) resultante de las matrices (H.1) y (H.2) se muestra a continuación:

$$\Delta = y_r^3 + 3y_d y_r^2 + 3(y_d^2 - y_m^2)y_r + y_d^3 - 3y_d y_m^2 + 2y_m^2$$

Las raíces de la ecuación anterior son:

$$y_{r1,2} = -y_d + y_m \tag{H.3}$$

$$y_{r3} = -y_d - 2y_m \tag{H.4}$$

Para este caso el polinomio tiene una raíz repetida, por lo cual solo existen dos valores de reactancia que causan resonancia.

H.1.2 Línea con disposición horizontal, reactor sin acoplamientos

Se considera el caso particular de una línea con las tres fases en disposición horizontal. La matriz de admitancias del efecto capacitivo se muestra en (H.5). La matriz de admitancias del reactor es la misma del caso anterior (H.2).

$$Yc_{-s}^{abc} = \begin{bmatrix} y_{aa} & y_{ab} & y_{ac} \\ y_{ab} & y_{aa} & y_{ab} \\ y_{ac} & y_{ab} & y_{aa} \end{bmatrix} \tag{H.5}$$

El determinate (6.10) que resulta de las matrices (H.5) y (H.2) se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \Delta = {} & y_r^3 + 3y_{aa}y_r^2 + (3y_{ab}^2 - 2y_{ab}^2 - y_{ac}^2)y_r \\ & + y_{ab}^3 - 2y_{ab}y_{ab}^2 + 2y_{ab}^2 y_{ac} - y_{ab}y_{ac}^2 \end{aligned}$$

Las raíces para este caso son:

$$y_{r1} = -y_{aa} + y_{ac} \tag{H.6}$$

$$y_{r2,3} = \frac{-2y_{aa} - y_{ac} \pm \sqrt{8y_{ab}^2 + y_{ac}^2}}{2} \tag{H.7}$$

H.1.3 Línea desbalanceada, reactor sin acoplamientos

La matriz de admitancias de la L.T. se presenta en (H.8), la matriz de admitancias del reactor se presentó en (H.2).

$$Yc_{-s}^{abc} = \begin{bmatrix} y_{aa} & y_{ab} & y_{ac} \\ y_{ab} & y_{aa} & y_{bc} \\ y_{ac} & y_{bc} & y_{aa} \end{bmatrix} \tag{H.8}$$

El determinante (6.10) de las matrices (H.8) y (H.2) se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \Delta = y_r^3 + 3y_{aa}y_r^2 + (3y_{aa}^2 - y_{ab}^2 - y_{ac}^2 - y_{bc}^2)y_r \\ + y_{aa}(y_{aa}^2 - y_{ab}^2 - y_{ac}^2 - y_{bc}^2) + 2y_{ab}y_{ac}y_{bc} \end{aligned}$$

Las raíces para el polinomio anterior aunque se pudieron calcular, resultan ecuaciones demasiado complejas y, por lo tanto, imprácticas para calcular los valores de reactancia que causan resonancia.

En los casos en que las matrices Yc_{-s}^{abc} y Yr^{abc} ocasionen que el determinante (6.10) resulte un polinomio muy complejo se recomienda sustituir los valores numéricos de los elementos de las matrices y evaluar las raíces.

H.1.4 Línea balanceada, reactor con acoplamientos

La matriz de admitancias de la línea se presentó en (H.1) la matriz de admitancia del reactor se muestra en (H.9).

$$Yr_s^{abc} = \begin{bmatrix} y_r & y_{mr} & y_{mr} \\ y_{mr} & y_r & y_{mr} \\ y_{mr} & y_{mr} & y_r \end{bmatrix} \tag{H.9}$$

Los valores de reactancia que causan resonancia con las matrices (H.1) y (H.9) son:

$$y_{r1,2} = -y_d + y_m + y_{mr} \tag{H.10}$$

$$y_{r3} = -y_d - 2(y_m + y_{mr}) \tag{H.11}$$

H.1.5 Línea con disposición horizontal, reactor con acoplamientos

Para este caso se utilizan las matrices (H.5) y (H.9). Los valores de reactancia que causan resonancia son:

$$y_{r1} = -y_{aa} + y_{ac} + y_{mr} \tag{H.12}$$

$$y_{r2,3} = \frac{-2y_{aa} - y_{ac} - y_{mr} \pm \sqrt{8y_{ab}^2 + y_{ac}^2 + (y_{ab} + 2y_{ac} + 9y_{mr})y_{mr}}}{2} \tag{H.13}$$

H.2 Fallas en la línea desconectada

En la sección anterior se demostró que, bajo condiciones normales, existen como máximo tres valores de reactancia que causan resonancia. En esta sección se demuestra que, cuando existen fallas en la línea desconectada, otros valores del reactor también ocasionan resonancia [47].

Se obtendrán las ecuaciones generales para determinar el valor del reactor que causa resonancia para las fallas más comunes. En todos los casos se considera que la L.T. está en posición horizontal (H.5) y que existe acoplamiento entre las tres fases del reactor (H.9).

Se utiliza el método electrostático. Para cada caso se presentan las matrices de admitancia de la L.T. y del reactor que se utilizan en el cálculo del determinante (6.10).

H.2.1 Falla de fase a tierra

Cuando una fase se va a tierra el voltaje se hace cero; por lo tanto, en el sistema de ecuaciones nodales el producto del voltaje de esa fase con la columna correspondiente en la matriz de admitancia nodal resulta cero y pueden eliminarse esos elementos. Además, como ya se sabe que el voltaje en esa fase es cero, no interesa calcularlo y el renglón correspondiente de la matriz de admitancia nodal puede eliminarse.

A continuación se presentan las matrices (H.5) y (H.9) para una falla en la fase a. Se tendrían las mismas ecuaciones para una falla en la fase c.

$$Yc_{-s}^{abc} = \begin{bmatrix} y_{aa} & y_{ab} \\ y_{ab} & y_{aa} \end{bmatrix} \tag{H.14}$$

$$Yr_{s}^{abc} = \begin{bmatrix} y_{r} & y_{mr} \\ y_{mr} & y_{r} \end{bmatrix} \tag{H.15}$$

Los valores de reactancia que causan resonancia con estas condiciones son las raíces del polinomio (6.10) utilizando las matrices anteriores, las cuales se presentan a continuación.

$$y_{r1,2} = -y_{aa} \pm y_{ab} \pm y_{mr} \tag{H.16}$$

Para una falla en la fase b las raíces serían:

$$y_{r1,2} = -y_{aa} \pm y_{ac} \pm y_{mr} \tag{H.17}$$

H.2.2 Falla doble de fase a tierra

De acuerdo con la explicación que se dio en el caso anterior, para esta falla se eliminan los renglones y las columnas de las fases falladas de la matriz de admitancias del sistema. Para cualquier combinación de fases falladas las ecuaciones son:

$$Yc_{-s}^{abc} = [y_{aa}] \tag{H.18}$$

$$Yr_{s}^{abc} = [y_r] \tag{H.19}$$

El valor de reactancia que causa resonancia es:

$$y_{r1} = -y_{aa} \tag{H.20}$$

H.2.3 Falla de línea a línea

Cuando las dos fases se unen los voltajes se hacen iguales, por lo cual los elementos de la matriz de admitancia nodal en las columnas correspondientes a las fases falladas se pueden factorizar. Además, como las corrientes nodales se suman, los renglones correspondientes también se suman.

A continuación se presentan las matrices correspondientes para falla entre las fases b y c.

$$Yc_{-s}^{abc} = \begin{bmatrix} y_{aa} & y_{ab} + y_{ac} \\ y_{ab} + y_{ac} & 2(y_{aa} + y_{ab}) \end{bmatrix} \tag{H.21}$$

$$Yr_{s}^{abc} = \begin{bmatrix} y_r & 2y_{mr} \\ 2y_{mr} & 2(y_r + y_{mr}) \end{bmatrix} \tag{H.22}$$

Los valores de reactancia que causan resonancia para este caso son:

$$y_{r1,2} = \frac{-2y_{aa} - y_{ab} - y_{mr} \pm \sqrt{3y_{ab}^2 + 4y_{ab}y_{ac} + 2y_{ac}^2 + 10y_{ab}y_{mr} + 8y_{ac}y_{mr} + 9y_{mr}^2}}{2} \tag{H.23}$$

El mismo resultado se obtiene si la falla es entre las fases a y b. Si la falla ocurre entre las fases a y c, los valores del reactor serían:

$$y_{r1,2} = \frac{-2y_{aa} - y_{ac} - y_{mr} \pm \sqrt{8y_{ab}^2 + y_{ac}^2 + 16y_{ab}y_{mr} + 2y_{ac}y_{mr} + 9y_{mr}^2}}{2} \tag{H.24}$$

H.2.4 Falla trifásica

Cuando las tres fases se unen, los renglones y las columnas de la matriz de admitancia nodal se suman. A continuación se presentan las matrices correspondientes a esta falla.

$$Yc_{-s}^{abc} = [3y_{aa} + 4y_{ab} + 2y_{ac}] \tag{H.25}$$

$$Yr_{s}^{abc} = [3y_r + 6y_{mr}] \tag{H.26}$$

El valor de reactancia que causa resonancia es:

$$y_{r1} = -\frac{3y_{aa} + 4y_{ab} + 2y_{ac} + 6y_{mr}}{3} \tag{H.27}$$

En el caso de que la falla trifásica sea a tierra, los voltajes en las tres fases son iguales a cero y no puede existir la resonancia.

Considerando a la L.T. con disposición horizontal se encontró que existen 3 valores de reactancia que causan resonancia para la línea sin falla; cuando ocurren fallas existen otros 10 valores que causan resonancia. Si la L.T. está completamente desbalanceada, se puede demostrar que existen en total 19 valores de reactancia que causan resonancia.

H.3 Ejemplo numérico

Se realiza un estudio de los valores de reactancia de compensación que causan resonancia en las líneas acopladas 5-6 del sistema del la Figura 4.3 bajo diversas condiciones de falla.

Los datos de la línea se presentan en el apéndice C. La submatriz de admitancias propia de la línea desconectada es:

$$Y/2^{abc}_{5-6} = \begin{bmatrix} .0220 & -.0050 & -.0050 \\ -.0050 & .0200 & -.0055 \\ -.0050 & -.0055 & .0180 \end{bmatrix} j$$

Para utilizar las ecuaciones desarrolladas en la sección anterior se consideran iguales los elementos de la diagonal.

$$Y/2^{abc}_{5-6} = \begin{bmatrix} .0200 & -.0050 & -.0050 \\ -.0050 & .0200 & -.0055 \\ -.0050 & -.0055 & .0200 \end{bmatrix} j$$

La matriz anterior corresponde a una línea con disposición horizontal, donde la fase a se encuentra entre las fases b y c, las admitancias mutuas de a con b y a con c son iguales. Las ecuaciones desarrolladas en la sección anterior consideraban que la fase b se encontraba entre las fase a y c. Por tanto, cuando ocurre una falla en la fase a hay que utilizar la ecuación correspondiente a una falla en b y viceversa.

Utilizando la matriz de admitancias anterior y las ecuaciones desarrolladas en las secciones anteriores se evalúan los valores de reactancia que causan resonancia. No se consideran los acoplamientos entre las fases del reactor.

Condición sin falla:

$$\begin{aligned} y_{r1} &= -.00965j \\ y_{r2} &= -.0248j \\ y_{r3} &= -.0255j \end{aligned}$$

Comparando estos resultados con los obtenidos en el ejemplo numérico de la sección 6.1.3 para la línea original, se observan diferencias, lo cual indica la importancia considerar los desbalances de las líneas.

Falla de fase a tierra, fase b o c:

$$y_{r1} = -.015j$$
$$y_{r2} = -.025j$$

Falla de fase a tierra, fase a:

$$y_{r1} = -.0145j$$
$$y_{r2} = -.0255j$$

Falla de doble fase a tierra, para cualquier par de fases:

$$y_{r1} = -.02j$$

Falla de línea a línea, fases ab o ac:

$$y_{r1} = -.0097j$$
$$y_{r2} = -.0253j$$

Falla de línea a línea, fases bc:

$$y_{r1} = -.0097j$$
$$y_{r2} = -.0248j$$

Falla trifásica:

$$y_{r1} = -.00967j$$

En la Figura H.1 se presentan en forma esquemática los valores de reactancia para las distintas condiciones de falla; se aprecia que los valores de reactancia de compensación que produce resonancia para las diversas condiciones de falla, están comprendidos entre los valores mínimo y máximo de reactancia cuando no se tiene falla.

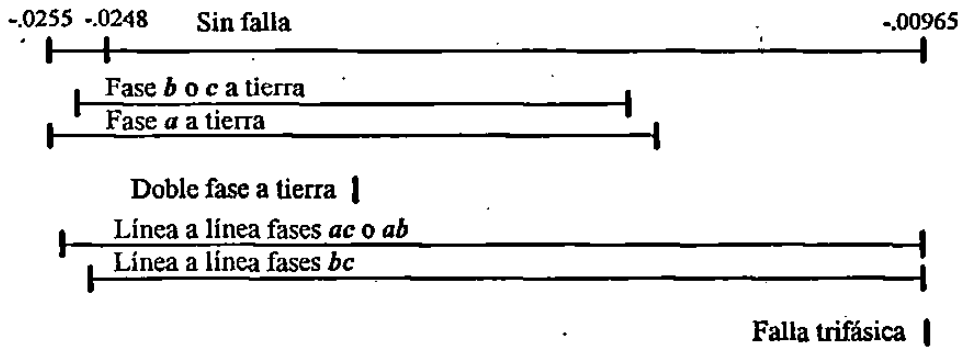

Figura H.1: Reactancia de compensación para condiciones de falla

Los valores de reactancia también se calcularon resolviendo las ecuaciones nodales para distintos valores de reactancia de compensación y se comprobó que se obtienen los mismos resultados.

En la Figura H.2 se presentan los voltajes resonantes en función del valor de reactancia de compensación para una falla de fase a tierra, fase b. Se considera la impedancia de falla igual a 100 p.u.

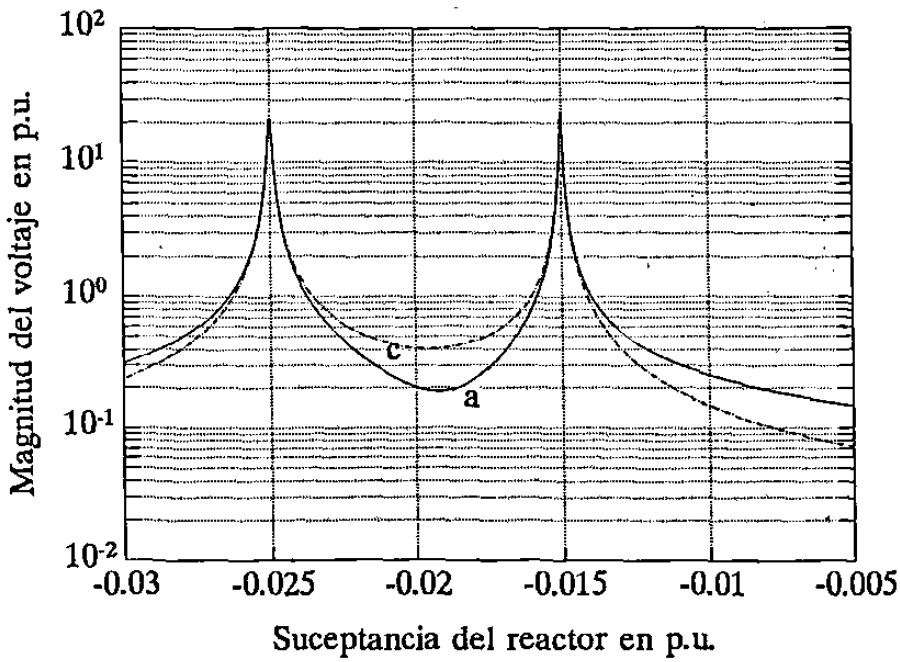

Figura H.2: Valores de reactancia para falla de fase a tierra

Se observa que sólo se tienen dos valores de reactancia que causan resonancia, dichos valores concuerdan con los obtenidos utilizando las ecuaciones desarrolladas en la sección anterior.