

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON  
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA



ANALISIS DE ESTABILIDAD DE SISTEMAS LINEALES  
INVARIANTES EN EL TIEMPO Y REPRESENTADOS  
POR MATRICES INTERVALO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
DOCTOR EN INGENIERIA ELECTRICA

P R E S E N T A :

JUAN JOSE DARIO DELGADO ROMERO

MONTERREY, N. L.

MAYO DE 1995

TD

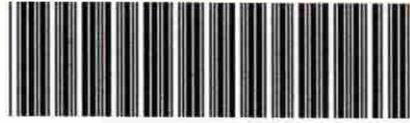
Z5853

.M2

FIME

1995

D4



1020112149



# UANL

---

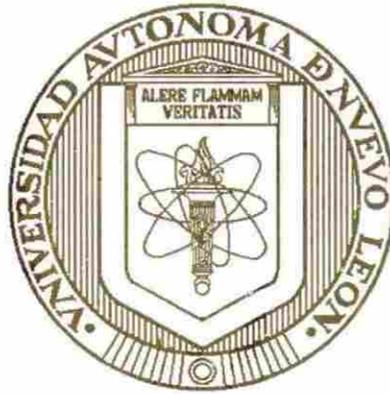
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

**UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON**

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA



**ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE SISTEMAS LINEALES  
INVARIANTES EN EL TIEMPO Y REPRESENTADOS POR  
MATRICES INTERVALO**

UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

TESIS

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS  
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
DOCTOR EN INGENIERIA ELECTRICA

®

PRESENTA

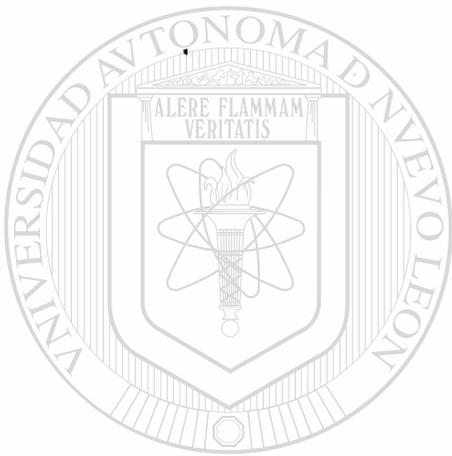
**JUAN JOSE DARIO DELGADO ROMERO**

MONTERREY, N.L.

MAYO, 1995

TD  
Z5853  
.M2  
FINE  
1995  
D4

0117-10460



# UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

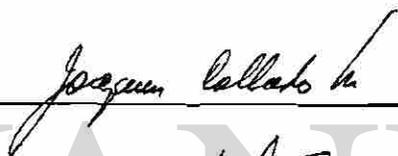
®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

**ANALISIS DE ESTABILIDAD DE SISTEMAS LINEALES  
INVARIANTES EN EL TIEMPO Y REPRESENTADOS POR  
MATICES INTERVALO**

Los miembros del Comité aprueban la Tesis  
Doctoral de Juan José Darío Delgado Romero

Dr. Joaquín Collado Moctezuma  
Asesor



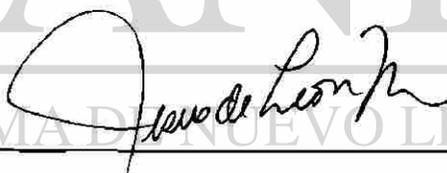
---

Dr. Edgar Nelson Sánchez Camperos



---

Dr. Jesús de León Morales



---

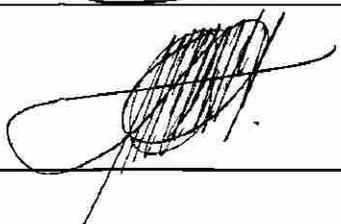
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Dr. Ada Alvarez Socarrás

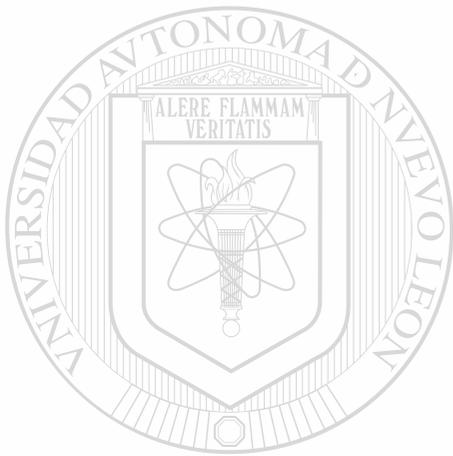


---

Dr. Oscar Leonel Chacón Mondragón



---



# UANL

---

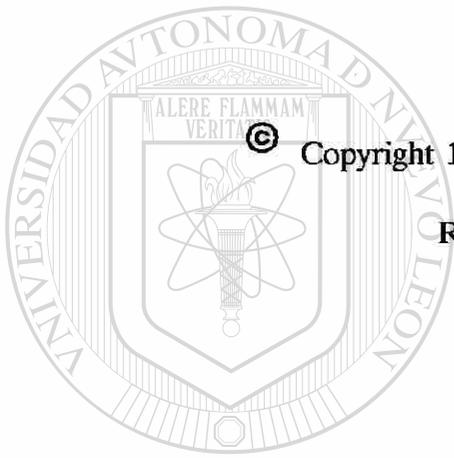
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



FONDO TESIS



© Copyright 1995 por Juan José Darío Delgado Romero

Reservados todos los derechos

# UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

**DEDICO ESTE TRABAJO DE TESIS  
DOCTORAL COMO UN RECUERDO  
A LA MEMORIA:**

**DE MI MADRE**

***María Romero Maciel de Delgado †***

**DE MI HERMANA**

***María de Lourdes Delgado Romero †***

**DEL MEDICO HOMEOPATA**

***José Luis Llanderal Peredo †***

**DE MI EX-CONDISCIPULO**

***Héctor Hernández Aguilera †***

***Réquiem aeterna dona eis, Domine***

***et lux perpetua luce at eis***

***Requiescat in pacem.***

***Amén***

**Deseo agradecer de una manera especial:**

**A MI ESPOSA:**

***Vicky Bucio Mercado de Delgado***

**A MI HIJA:**

***Lourdes Jatziri Delgado Bucio***

**A MI PADRE:**

***Fernando Delgado Estrada***

**A MIS HERMANAS:**

***Lety, Aida, Edith, Sol, Mary y Ruth***

**A MIS HERMANOS:**

***Fernando, Jaime, Mario, Gonzalo, Germán y Antonio***

**A MI EX-PROFESOR:**

***José Calderón Ortíz***

**A MI ASESOR:**

***Joaquín Collado Moctezuma***

**A MIS COMPAÑEROS DEL TECNOLÓGICO DE MORELIA:**

***Rodolfo, Juan Manuel, Alfredo y Edmundo***

**A MIS PROFESORES DEL PROGRAMA:**

***Edgar Sánchez, Oscar Chacón, Juan V. Ginori y Miguel Borroto***

**A MIS COMPAÑEROS DEL PROGRAMA:**

***Juan Antonio, Roger, Rubén, Gerardo, César y Guadalupe***

**AL MÉDICO HOMEOPATA:**

***Pedro Alejandro Freeze Flores***

**AL PROFESOR:**

***Jiří Rohn***

**AL Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología: *CONACyT***

**Y a toda persona que de alguna manera influyó en la realización de este trabajo.**

Finalmente un reconocimiento a las personas que intervinieron en la revisión de este trabajo de Tesis.

1.- Dr. Joaquín Collado Moctezuma (ASESOR)

2.- Dr. Edgar Nelson Sánchez Camperos

3.- Dr. Jesús de León Morales

4.- Dra. Ada Alvarez Socarrás

5.- Dr. Oscar Leonel Chacón Mondragón

Y un reconocimiento especial a los revisores externos, quienes indicaron correcciones tanto de forma como de fondo.

---

1.- Jiří Rohn  
Doctor en métodos numéricos

2.- Fernando Delgado Romero  
Licenciado en Físico Matemáticas

3.- María Delgado Romero  
Licenciada en Literatura Española

**RESUMEN**

**ANALISIS DE ESTABILIDAD DE SISTEMAS LINEALES  
INVARIANTES EN EL TIEMPO Y REPRESENTADOS POR  
MATRICES INTERVALO**

Publicación No. \_\_\_\_\_

Juan José Darío Delgado Romero, Dr. en Ingeniería Eléctrica

Universidad Autónoma de Nuevo León, 1995

Profesor Asesor: Dr. Joaquín Collado Moctezuma

**E**n esta tesis se presentan cinco métodos de análisis de estabilidad de sistemas lineales continuos, invariantes en el tiempo y con incertidumbre paramétrica en la matriz que describe al sistema, y cuatro métodos de análisis de estabilidad de sistemas discretos, invariantes al corrimiento y con incertidumbre paramétrica en la matriz que describe al sistema.

En el análisis de estabilidad de los sistemas físicos es importante incluir las incertidumbres que se tengan del mismo que pueden ser originadas por: tolerancia y/o envejecimiento presente en los elementos, variación en parámetros debido a las condiciones de operación como la temperatura, humedad, etcétera; y se le llama **estabilidad robusta de sistemas**.

En este tipo de análisis se considera que el sistema tiene incertidumbre pero es invariante en el tiempo. Los análisis desarrollados en esta tesis no incluyen a los sistemas que son variantes en el tiempo, esto indica que si el sistema es variante en el

tiempo y estable para todos los puntos pertenecientes a la variación del mismo, *no implica que el sistema variante en el tiempo sea estable.*

La incertidumbre usada en esta disertación es incertidumbre paramétrica, y está representada por una matriz intervalo  $M=[L,U]$ .

Un sistema invariante en el tiempo, con incertidumbre paramétrica y representado por una matriz intervalo  $M=[L,U] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  genera un hipercubo cuyos elementos pertenecen a  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , esto significa que el sistema puede ubicarse en cualquier parte del hipercubo.

Para el análisis de estabilidad del sistema se desarrollan dos métodos para representar las matrices que corresponden a los vértices del hipercubo generado por la matriz intervalo y están basados en el producto Hadamard (elemento a elemento).

Los diferentes métodos de análisis de estabilidad aquí presentados son muy simples y se evalúan usando los valores característicos de:

---

#### **PARA SISTEMAS CONTINUOS:**

- 1.- La parte Hermítica de la matriz inferior (**L**) y la parte Hermítica de la matriz de perturbación (**P**).
- 2.- La parte Hermítica de la matriz centroide ( $A_0$ ) y la parte Hermítica de la matriz de perturbación centralizada (**D**).
- 3.- La matriz **Ms** formada con elementos de **U** (en la diagonal) y el valor absoluto de los elementos de mayor módulo entre **L** y **U** (fuera de la diagonal).

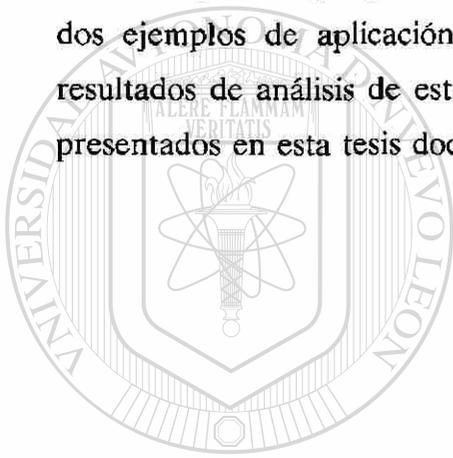
#### **PARA SISTEMAS DISCRETOS:**

- 4.- La parte Hermítica y anti-Hermítica de la matriz inferior (**L**) y la parte Hermítica y anti-Hermítica de la matriz de perturbación (**P**).
- 5.- La parte Hermítica y anti-Hermítica de la matriz centroide ( $A_0$ ) y la parte

Hermítica y anti-Hermítica de la matriz de perturbación centralizada (D).

Los primeros análisis desarrollados en esta disertación se refieren a varios refinamientos realizados a la prueba de estabilidad inicial y son mejores cotas que reducen el conservatismo de la prueba propuesta inicialmente. El quinto resultado es un refinamiento al resultado presentado en [31].

Se incluyen además algunos ejemplos que muestran las características de las cotas obtenidas y otros que presentan una comparación entre las mismas. Finalmente se dan dos ejemplos de aplicación que ayudan a comprender la utilidad práctica de los resultados de análisis de estabilidad robusta de sistemas físicos, continuos y discretos, presentados en esta tesis doctoral.



UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



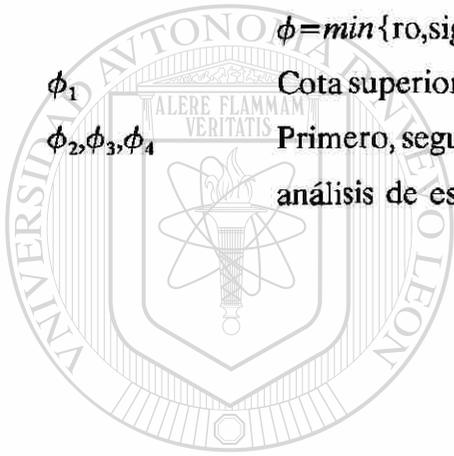
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## NOTACION

$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales
$\mathbb{C}$	Conjunto de los números complejos
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Matrices reales de orden $n \times m$
$\mathbb{C}^{n \times m}$	Matrices complejas de orden $n \times m$
$I$	Matriz identidad de orden $n \times n$
$A^T$	Transpuesta de la matriz $A$
$A^*$	Transpuesta compleja conjugada de la matriz $A$
$\lambda_i(A)$	$i$ -ésimo valor característico de la matriz $A$
$\sigma(A)$	Espectro de la matriz $A$ ; $\sigma(A) = \{\lambda_i(A) \in \mathbb{C} :  \lambda_i I - A  = 0\}$ . Conjunto de valores característicos de la matriz $A$ .
$\lambda_{max}(A)$	$\max\{\text{Re}(\lambda_i(A))\}, i=1,2,\dots,n$
$\lambda_{min}(A)$	$\min\{\text{Re}(\lambda_i(A))\}, i=1,2,\dots,n$
$[A]_{ij} = a_{ij}$	elemento $i, j$ de la matriz $A$
$M = [L, U]$	Familia de matriz intervalo, donde $L$ representa la matriz inferior y $U$ la matriz superior, esto es $l_{ij} \leq m_{ij} \leq u_{ij}, \forall i, j=1,2,\dots,n$
$P$	Matriz de perturbación $P = (U - L)$ , con $p_{ij} \geq 0 : p_{ij} = (u_{ij} - l_{ij}), \forall i, j=1,2,\dots,n$
$A_0$	Matriz centroide $A_0 = \frac{1}{2}(U + L)$ , esto es $[A_0]_{ij} = \frac{1}{2}(u_{ij} + l_{ij}), \forall i, j=1,2,\dots,n$
$D$	Matriz de perturbación centralizada $D = \frac{1}{2}(U - L)$ , con $d_{ij} \geq 0 : d_{ij} = \frac{1}{2}(u_{ij} - l_{ij}), \forall i, j=1,2,\dots,n$
$Y = \text{UNOS}(n)$	Matriz de unos, $Y = \text{UNOS}(n) = \text{unos}_{ij} = 1 \forall i, j=1,2,\dots,n$
$\theta = \text{CEROS}(n)$	Matriz de ceros, $\theta = \text{CEROS}(n) = \text{ceros}_{ij} = 0 \forall i, j=1,2,\dots,n$
$B \geq A$	$B$ es mayor o igual que $A$ elemento a elemento; $b_{ij} \geq a_{ij}, \forall i, j=1,2,\dots,n$
$A \geq \theta$	$A$ es mayor o igual que $\theta$ elemento a elemento; $a_{ij} \geq 0, \forall i, j=1,2,\dots,n$
$A \circ B$	Producto Hadamard (elemento a elemento) de las matrices $A$ y $B$ $[A \circ B]_{ij} = a_{ij} \cdot b_{ij} \forall i, j=1,2,\dots,n$

<b><math>A \otimes B</math></b>	Producto tipo Kronecker entre <b>A</b> y <b>B</b> , esto es $[A \otimes B]_{ij} = a_{ij} \cdot B$ $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$
<b><math>A \oplus B</math></b>	Suma tipo Kronecker entre <b>A</b> y <b>B</b> , $A \oplus B = A \otimes I + I \otimes B$
<b>H(A)</b>	Parte Hermítica de la matriz <b>A</b> , $H(A) = \frac{1}{2}(A + A^*)$
<b>S(A)</b>	Parte Anti-Hermítica de la matriz <b>A</b> , $S(A) = \frac{1}{2}(A - A^*)$
<b><math>\rho(A)</math></b>	Radio espectral de la matriz <b>A</b> , $\rho(A) = \max\{ \lambda_i(A) \}$ $\forall i = 1, 2, \dots, n$
<b><math>r_j</math></b>	Radio del <i>j</i> -ésimo disco Geršgorin por renglones
<b>F(A)</b>	Campo de valores de la matriz <b>A</b> = $\{z \in \mathbb{C} : z = x^*Ax, x^*x = 1\}$
<b><math> x </math></b>	Valor absoluto de <b>x</b>
<b><math>\ A\ </math></b>	Norma de la matriz <b>A</b> , $\ A\ _1$ = norma 1, $\ A\ _2$ = norma 2, $\ A\ _F$ = norma Frobenius y $\ A\ _\infty$ = norma infinito,
<b>TRISUP</b>	Matriz triangular superior con elementos igual a uno de la diagonal hacia arriba y ceros abajo de la diagonal, esto es $\text{trisup}_{ij} = 1$ si $i \leq j$ y $\text{trisup}_{ij} = 0$ si $i > j$ , $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$
<b>TRIINF</b>	Matriz triangular inferior con elementos igual a uno de la diagonal hacia abajo y ceros arriba de la diagonal, esto es $\text{triinf}_{ij} = 1$ si $i \geq j$ y $\text{triinf}_{ij} = 0$ si $i < j$ , $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$
<b><math>B \geq  A  \geq A</math></b>	<b>B</b> es mayor o igual que el valor absoluto de <b>A</b> y es mayor o igual que <b>A</b> elemento a elemento, esto es $b_{ij} \geq  a_{ij}  \geq a_{ij}$ , $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$
<b><math>A &lt; 0</math></b>	Matriz negativa definida, o sea <b>A</b> es Hermítica y $\lambda_i(A) < 0 \forall i = 1, 2, \dots, n$
<b><math>A \leq 0</math></b>	Matriz negativa semidefinida, esto es <b>A</b> es Hermítica y $\lambda_i(A) \leq 0$ $\forall i = 1, 2, \dots, n$
<b><math>\delta</math></b>	Cota superior para sistemas continuos, en la cual se evalúa las partes Hermíticas de las $2^n$ matrices vértice pertenecientes a la matriz intervalo, $\delta = \max\{\lambda_{\max}(H(M_k))\}, \forall k = 0, 1, \dots, (2^n - 1)$
<b><math>\delta_1</math></b>	Cota superior propuesta para análisis de estabilidad de sistemas continuos.
<b><math>\delta_2, \delta_3, \delta_4</math></b>	Primero, segundo y tercer refinamiento a la cota superior propuesta para análisis de estabilidad de sistemas continuos.

$\delta_5$	Quinta cota superior propuesta para análisis de estabilidad de sistemas continuos.
$\sigma_{max}(A)$	Máximo valor singular de la matriz A
$\sigma_{min}(A)$	Mínimo valor singular de la matriz A
ro	Cota superior para análisis de estabilidad de sistemas discretos, $ro = \rho(\max\{ L ,  U \})$ , donde $\max\{ L ,  U \}$ es elemento a elemento
sig	Cota superior para análisis de estabilidad de sistemas discretos, $sig = \sigma_{max}(A_0) + \sigma_{max}(D)$
$\phi$	Cota superior para análisis de estabilidad de sistemas discretos, $\phi = \min\{ro, sig\}$
$\phi_1$	Cota superior propuesta para análisis de estabilidad de sistemas discretos
$\phi_2, \phi_3, \phi_4$	Primero, segundo y tercer refinamiento a la cota superior propuesta para análisis de estabilidad de sistemas discretos.



# UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

# INDICE

<i>Resumen</i> . . . . .	vi
<i>Notación</i> . . . . .	ix
<i>Indice de figuras</i> . . . . .	xv

<b>CAPITULO 1</b> <b>INTRODUCCION</b> . . . . .	1
--	---

<b>CAPITULO 2</b> <b>MARCO TEORICO</b>	
2.1 Generación de las matrices vértice pertenecientes a una matriz intervalo . . . . .	6

2.2 Resultados preliminares . . . . .	12
---------------------------------------	----

<b>DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS</b>	
<b>CAPITULO 3</b>	
<b>ANALISIS DE ESTABILIDAD DE SISTEMAS LINEALES CONTINUOS, EN VARIABLES DE ESTADO, INVARIANTES EN EL TIEMPO Y CON INCERTIDUMBRE PARAMETRICA</b>	
3.1 Demostración de una cota superior para análisis de estabilidad robusta de sistemas continuos . . . . .	21
3.2 Ejemplos numéricos . . . . .	22
3.3 Primer refinamiento de la cota inicial propuesta . . . . .	24
3.4 Ejemplos numéricos . . . . .	25

## INDICE (continuación)

3.5	Segundo refinamiento de la cota inicial propuesta . . . . .	28
3.6	Ejemplos numéricos . . . . .	29
3.7	Tercer refinamiento de la cota inicial propuesta . . . . .	32
3.8	Ejemplos numéricos . . . . .	34
3.9	Nueva cota para análisis de estabilidad de sistemas lineales continuos, invariantes en el tiempo y con incertidumbre paramétrica . . . . .	36
3.10	Ejemplos numéricos . . . . .	37
3.11	Ejemplos comparativos . . . . .	40
3.12	Casos triviales . . . . .	43

### CAPITULO 4

#### **ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE SISTEMAS LINEALES DISCRETOS, EN VARIABLES DE ESTADO, INVARIANTES AL CORRIMIENTO**

#### **Y CON INCERTIDUMBRE PARAMETRICA**

4.1	Demostración de una cota superior para análisis de estabilidad robusta de sistemas discretos . . . . .	45
4.2	Ejemplos numéricos . . . . .	46
4.3	Primer refinamiento de la cota inicial propuesta . . . . .	48
4.4	Ejemplos numéricos . . . . .	51
4.5	Segundo refinamiento de la cota inicial propuesta . . . . .	54
4.6	Ejemplos numéricos . . . . .	55
4.7	Tercer refinamiento de la cota inicial propuesta . . . . .	58
4.8	Ejemplos numéricos . . . . .	63
4.9	Ejemplos comparativos . . . . .	66
4.10	Caso trivial . . . . .	69

## I N D I C E (continuación)

### CAPITULO 5

#### APLICACION DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS AL ANALISIS

#### DE ESTABILIDAD DE SISTEMAS FISICOS

- 5.1 Aplicación a un circuito eléctrico . . . . . 70
- 5.2 Aplicación al ascenso y maniobras de un aeronave . . . . . 78

### CAPITULO 6

**CONCLUSIONES** . . . . . 89

**BIBLIOGRAFIA** . . . . . 92

**APENDICE** . . . . . 99

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

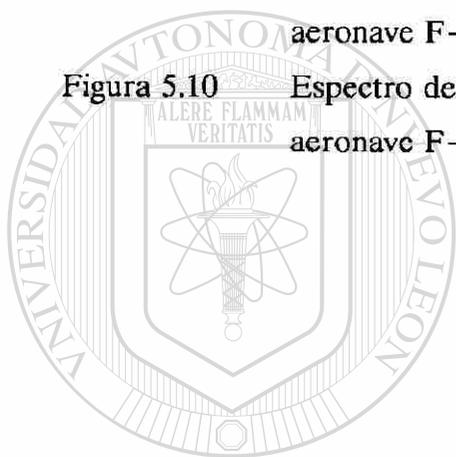
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## INDICE DE FIGURAS

Figura 3.1	Espectro de la matriz intervalo del ejemplo 3.2.1 . . . . .	22
Figura 3.2	Espectro de la matriz intervalo del ejemplo 3.2.2 . . . . .	23
Figura 3.3	Espectro de la matriz intervalo del ejemplo 3.4.1 . . . . .	26
Figura 3.4	Espectro de la matriz intervalo del ejemplo 3.4.2 . . . . .	27
Figura 3.5	Espectro de la matriz intervalo del ejemplo 3.6.1 . . . . .	30
Figura 3.6	Espectro de la matriz intervalo del ejemplo 3.6.2 . . . . .	31
Figura 3.7	Espectro de la matriz intervalo del ejemplo 3.8.1 . . . . .	34
Figura 3.8	Espectro de la matriz intervalo del ejemplo 3.8.2 . . . . .	35
Figura 3.9	Espectro de la matriz intervalo del ejemplo 3.10.1 . . . . .	38
Figura 3.10	Espectro de la matriz intervalo del ejemplo 3.10.2 . . . . .	39
Figura 3.11	Espectro de la matriz intervalo del ejemplo 3.11.1 . . . . .	41
Figura 3.12	Espectro de la matriz intervalo del ejemplo 3.11.2 . . . . .	42
Figura 4.1	Espectro de la matriz intervalo del ejemplo 4.2.1 . . . . .	46
Figura 4.2	Espectro de la matriz intervalo del ejemplo 4.2.2 . . . . .	48
Figura 4.3	Espectro de la matriz intervalo del ejemplo 4.4.1 . . . . .	51
Figura 4.4	Espectro de la matriz intervalo del ejemplo 4.4.2 . . . . .	53
Figura 4.5	Espectro de la matriz intervalo del ejemplo 4.6.1 . . . . .	56
Figura 4.6	Espectro de la matriz intervalo del ejemplo 4.6.2 . . . . .	57
Figura 4.7	Espectro de la matriz intervalo del ejemplo 4.8.1 . . . . .	64
Figura 4.8	Espectro de la matriz intervalo del ejemplo 4.8.2 . . . . .	65
Figura 4.9	Espectro de la matriz intervalo del ejemplo 4.10.1 . . . . .	67
Figura 4.10	Espectro de la matriz intervalo del ejemplo 4.10.2 . . . . .	68
Figura 5.1	Circuito Eléctrico de prueba . . . . .	70
Figura 5.2	Espectro de la matriz intervalo del circuito eléctrico caso 1 . . . . .	74
Figura 5.3	Espectro de la matriz intervalo del circuito eléctrico caso 2 . . . . .	76

## INDICE DE FIGURAS (continuación)

Figura 5.4	Espectro de la matriz intervalo del circuito eléctrico caso 3 . . . . .	77
Figura 5.5	Vista lateral del aeronave F-8 . . . . .	78
Figura 5.6	Vista superior del aeronave F-8 . . . . .	79
Figura 5.7	Vista frontal del aeronave F-8 . . . . .	79
Figura 5.8	Espectro de la matriz intervalo del ascenso del aeronave F-8 caso1 . . . . .	85
Figura 5.9	Espectro de la matriz intervalo del ascenso del aeronave F-8 caso2 . . . . .	86
Figura 5.10	Espectro de la matriz intervalo de la maniobra del aeronave F-8 caso3 . . . . .	88



# UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## CAPITULO 1

### INTRODUCCION

**E**l mundo real difícilmente puede ser modelado con exactitud por lo que se introducen errores en el modelo, estos errores se conocen en la teoría de control automático como *incertidumbres*, que pueden ser: Incertidumbres paramétricas e incertidumbres dinámicas. Recientemente se ha desarrollado un interés en la consideración de estas incertidumbres con la finalidad de realizar análisis de estabilidad de sistemas.

Los problemas físicos pueden clasificarse de la siguiente manera [19],[47]:

- 1.- Problemas clase **P**. Estos problemas se caracterizan por tener solución numérica con un tiempo de evaluación acotado por un polinomio.
- 2.- Problemas clase **NP**. Estos problemas se caracterizan por tener solución numérica con un tiempo de evaluación acotado por un polinomio en una red de  $n$  computadoras donde  $n$  es acotado por otro polinomio; o bien tiene explosión numérica en el tiempo de evaluación en una sola computadora (tiempo de evaluación **no polinomial**).
- 3.- Problemas clase **NP-complicados (NP-hard)**. Un problema es clase **NP-complicado** si todos los otros problemas clase **NP** pueden trasladarse eficientemente a él.
- 4.- Problemas clase **NP-completos**. Un problema es clase **NP-completo** si todos los otros problemas clase **NP** pueden trasladarse eficientemente a él, el cual es clase **NP**.

Se considera que un problema puede trasladarse eficientemente a otro si el número de pasos para realizar dicho traslado está acotado por un polinomio.

El problema que da condiciones **necesarias y suficientes** de Estabilidad Robusta de matrices intervalo es clase **NP-completo** y tiene explosión numérica en el tiempo de evaluación. Ahora bien, el problema de estabilidad robusta que solamente da condiciones **suficientes**, puede ser trasladado a diferentes problemas clase **P** incluyéndole cierto grado de conservatismo a la prueba realizada y por lo tanto es problema clase **NP-complicado (NP-hard)** [38].

Algunas de las pruebas presentadas en la literatura de control trasladan el problema de estabilidad robusta de la matriz intervalo clase **NP** a otro problema clase **NP** (como es el caso de la prueba de las partes Hermíticas de los vértice pertenecientes a la matriz intervalo y explota numéricamente al aumentar la dimensión del sistema). Sin embargo la mayoría de las pruebas simples de estabilidad robusta de matrices intervalo trasladan el problema clase **NP** a un problema clase **P** como es el caso de los resultados presentados en este trabajo.

Los modelos lineales que representan a los sistemas físicos pueden analizarse de dos formas básicas: En representación entrada/salida o en representación en variables de estado. Para los sistemas en representación entrada/salida existen bastantes resultados entre los que se cuentan:

- 1.- El resultado aportado por Kharitonov, y se realiza análisis de estabilidad robusta de un polinomio intervalo, evaluando solamente cuatro polinomios pertenecientes al polinomio intervalo [51].
- 2.- El teorema de las aristas (edge) de Bartlett [5].
- 3.- La generalización de los polinomios de Kharitonov al caso de coeficientes con dependencia lineal de Barmish [2],[4],[18].
- 4.- El conjunto de valores (value set) de Rantzer [1],[35].

Para el caso de representación en variables de estado existen algunos resultados, entre los que se cuentan:

- 1.- Condiciones necesarias y suficientes de estabilidad de la envolvente convexa de dos matrices arbitrarias estables donde se analiza que el espectro de  $(\mathbf{A} \oplus \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{B} \oplus \mathbf{B})$  no tenga elementos en el eje real negativo,  $\{\sigma((\mathbf{A} \oplus \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{B} \oplus \mathbf{B}))\} \cap (-\infty, 0] = \emptyset$  [18]
- 2.- Estabilidad de la envolvente convexa de  $k$  matrices simétricas estables y se basa en la propiedad de convexidad de las matrices Hermíticas [17],[37].
- 3.- Estabilidad de la envolvente convexa de  $k$  matrices normales estables [8].
- 4.- Estabilidad de la envolvente convexa de  $k$  matrices estables que conmutan [10].

Existen trabajos que presentan condiciones suficientes de estabilidad, entre las que se cuentan:

1.- Campo de valores de  $k$  matrices y se basa en el teorema de Rayleigh-Ritz [36].

2.- Matrices intervalo para los cuales existen diferentes tipos de análisis reportados en los siguientes trabajos [3],[6],[11],[28],[32],[41].

En este trabajo se describen condiciones suficientes para garantizar la estabilidad de sistemas lineales invariantes en el tiempo y con incertidumbre paramétrica en la matriz  $\mathbf{A}$  representada por una matriz intervalo. Las pruebas aquí presentadas son muy simples comparadas con las que existen, ya que solo se necesita conocer los valores característicos de las partes Hermíticas de dos matrices para analizar la estabilidad de sistemas continuos y los valores característicos de las partes Hermíticas y anti-Hermíticas de dos matrices para analizar la estabilidad de sistemas discretos. Algunas de las pruebas aquí presentadas están basadas en las propiedades del producto Hadamard y del

teorema de Perron.

Si se consideran sistemas lineales continuos invariantes en el tiempo y sistemas lineales discretos invariantes al corrimiento y descritos por las ecuaciones siguientes:

$$\begin{array}{ll}
 \text{caso continuo} & \text{caso discreto} \\
 \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) & ; \quad x(k+1) = A x(k) + B u(k) \\
 y(t) = C x(t) & ; \quad y(k) = C x(k)
 \end{array} \quad (1.1)$$

donde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$

La estabilidad de ambos sistemas está determinada exclusivamente por la matriz  $A$ . Cuando existe incertidumbre paramétrica, la matriz  $A$  puede ser representada por un conjunto de matriz intervalo  $A \in M=[L,U]$ .

El problema de estabilidad de una matriz intervalo arbitraria, con  $L$  y  $U$  estables aún esta abierto, tanto para el caso continuo como para el caso discreto.

En la literatura de control existen diversas condiciones suficientes que garantizan la estabilidad de sistemas continuos representados por matrices intervalo, y se basan fundamentalmente en:

- 1.- Uso de discos Gershgorin [21],[39].
- 2.- Uso del teorema de Bauer-Fike [21],[25].
- 3.- Uso de normas matriciales [39].
- 4.- Uso del teorema de Lyapunov [29].

- 5.- Uso de la distancia de la matriz centroide a las matrices inestables [30],[33],[46].
- 6.- Uso de sumas tipo Kronecker [7],[34].
- 7.- Uso de óvalos de Cassinni [53].
- 8.- Uso del teorema de Ky Fan [44].
- 9.- Uso del teorema de Rayleigh-Ritz [42].

Por otro lado, para sistemas discretos existen también algunos resultados, y se basan fundamentalmente en:

- 1.- Uso de discos Gershgorin [21].
  - 2.- Uso de las normas matriciales [25],[28].
- 
- 3.- Uso del teorema de Lyapunov [28].
  - 4.- Uso de la distancia de la matriz centroide a las matrices inestables [33].
  - 5.- Uso de valores singulares.
  - 6.- Uso del radio espectral [4],[53].

## CAPITULO 2

### MARCO TEORICO

**E**n esta sección se muestran los resultados que son necesarios para soportar la demostración de las hipótesis fundamentales de este trabajo de tesis que aseguran estabilidad robusta de sistemas lineales, invariantes en el tiempo y representados por matrices intervalo, tanto para sistemas continuos como para sistemas discretos.

Inicialmente se dan dos formas analíticas para obtener las  $2^{n^2}$  matrices vértice ( $M_k$ ) pertenecientes a una matriz intervalo  $M=[L,U] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  que forman un conjunto de matrices en el espacio al que pertenecen las matrices L y U. Las matrices vértice  $M_k \in M$  no pueden tener elementos  $[M_k]_{ij}$  menores que los elementos correspondientes de L ( $l_{ij}$ ); ni mayores que los elementos correspondientes de U ( $u_{ij}$ )  $\forall i, j=1,2,\dots,n$ . La condición anterior determina por lo tanto un intervalo en cada eje del espacio matricial y significa que cada elemento de  $M=[L,U] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es un intervalo, y se obtienen por lo tanto  $n^2$  intervalos.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

#### 2.1.- GENERACION DE LAS MATRICES VERTICE PERTENECIENTES A UNA MATRIZ INTERVALO

A continuación se dan dos formas analíticas de representar las matrices que corresponden a los vértices de una matriz intervalo  $M=[L,U] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Las matrices que corresponden a los vértices de una matriz intervalo están formadas por elementos de las matrices L o U. La forma analítica para obtener dichas matrices se realiza en función de las matrices L (matriz menor) y P, (matriz de perturbación, teorema 2.1.1) y de las matrices  $A_0$  (matriz centroide) y D (matriz de perturbación centralizada, teorema 2.1.3).

**TEOREMA 2.1.1.** – Sea la matriz intervalo  $M=[L,U] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y la matriz de perturbación  $P=U-L$ , con  $p_{ij} \geq 0$ ; sean  $M_k$  las  $2^n$  matrices vértice pertenecientes a la matriz intervalo, las cuales contienen elementos de  $L$  o  $U$  exclusivamente, y sean  $T_{p_k}$  las  $2^n$  matrices binarias; entonces  $M_k$  puede representarse como:

$$M_k = L + P \circ T_{p_k} \quad (2.1)$$

donde  $\circ$  representa el producto Hadamard y los elementos de  $T_{p_k}$  son ceros o unos ( $[T_{p_k}]_{ij} \in \{0,1\}$   $i, j=1,2,\dots,n$ )

**Prueba:**

Considere que  $M_k$  son las matrices correspondientes a los  $2^n$  vértices de la matriz intervalo, cuyos elementos corresponden a  $L$  o  $U$ .

$M_k = L + P \circ T_{p_k}$  puede representarse por:

$$[M_k]_{ij} = [L]_{ij} + [P]_{ij} \cdot [T_{p_k}]_{ij} \quad \text{donde } [T_{p_k}]_{ij} \in \{0,1\} \quad (2.2)$$

$$\forall i, j=1,2,\dots,n \text{ y } \forall k=0,1,\dots,(2^n-1)$$

entonces

$$[M_k]_{ij} = [L]_{ij} \quad \text{si } [T_{p_k}]_{ij} = 0$$

$$[M_k]_{ij} = [L]_{ij} + [P]_{ij} = [U]_{ij} \quad \text{si } [T_{p_k}]_{ij} = 1 \quad (2.3)$$

$$\forall i, j=1,2,\dots,n \text{ y } \forall k=0,1,\dots,(2^n-1)$$

por lo tanto el conjunto de las  $2^n$  matrices  $M_k$  contiene elementos de  $L$  o de  $U$ , que son las matrices vértice pertenecientes a la matriz intervalo. ■

**COROLARIO 2.1.2.**– Sea la matriz intervalo  $M=[L,U] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y la matriz de perturbación  $P=U-L$ , con  $p_{ij} \geq 0$ ; sean  $M_k$  las  $2^{n^2}$  matrices vértice pertenecientes a la matriz intervalo, y contienen elementos de  $L$  o  $U$  exclusivamente y  $P_k$ ,  $k=0,1,\dots,(2^{n^2}-1)$  las  $2^{n^2}$  combinaciones diferentes de elementos de  $\theta=CEROS(n)$  y  $P$ ; entonces  $M_k$  puede representarse como:

$$M_k = L + P_k \quad \text{donde} \quad [P_k]_{ij} \in \{0, p_{ij}\} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.4)$$

**TEOREMA 2.1.3.**– Sea  $M=[L,U] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la matriz intervalo,  $A_0 = \frac{1}{2}(U+L)$  la matriz centroide y  $D = \frac{1}{2}(U-L)$  la matriz de perturbación centralizada; sean  $M_k$  las  $2^{n^2}$  matrices vértice pertenecientes a la matriz intervalo y sean  $Td_k \in \{-1, 1\}$ ,  $k=0,1,\dots,(2^{n^2}-1)$  las  $2^{n^2}$  matrices binarias, entonces  $M_k$  puede representarse como:

$$M_k = A_0 + D \circ Td_k \quad \text{donde} \quad Td_k \in \{-1, 1\} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.5)$$

**Prueba:**

Considere que  $M_k$  son las  $2^{n^2}$  matrices vértice pertenecientes a la matriz intervalo, cuyos elementos corresponden a  $L$  o  $U$

$M_k = A_0 + D \circ Td_k$  puede representarse por:

$$[M_k]_{ij} = [A_0]_{ij} + [D]_{ij} \cdot [Td_k]_{ij} \quad \text{donde} \quad [Td_k]_{ij} \in \{-1, 1\} \quad (2.6)$$

$$\forall i, j = 1, 2, \dots, n \quad \text{y} \quad \forall k = 0, 1, \dots, (2^{n^2}-1)$$

entonces

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}_k]_{ij} &= [\mathbf{A}_0]_{ij} - [\mathbf{D}]_{ij} = [\mathbf{L}]_{ij} \quad \text{si} \quad [\mathbf{Td}_k]_{ij} = -1 \\ [\mathbf{M}_k]_{ij} &= [\mathbf{A}_0]_{ij} + [\mathbf{D}]_{ij} = [\mathbf{U}]_{ij} \quad \text{si} \quad [\mathbf{Td}_k]_{ij} = 1 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\forall i, j = 1, 2, \dots, n \quad \text{y} \quad \forall k = 0, 1, \dots, (2^n - 1)$$

por lo tanto el conjunto de las  $2^n$  matrices  $\mathbf{M}_k$  contiene elementos de  $\mathbf{L}$  o  $\mathbf{U}$ , que son las matrices vértice pertenecientes a la matriz intervalo. ■

**COROLARIO 2.1.4.** – Sea la matriz intervalo  $\mathbf{M} = [\mathbf{L}, \mathbf{U}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y la matriz de perturbación centralizada  $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{U} - \mathbf{L})$ , con  $d_{ij} \geq 0$ ; sean  $\mathbf{M}_k$  las  $2^n$  matrices vértice pertenecientes a la matriz intervalo, y contienen elementos de  $\mathbf{L}$  o  $\mathbf{U}$  exclusivamente y  $\mathbf{D}_k$  las  $2^n$  combinaciones diferentes de elementos de las matrices  $\mathbf{D}$  y  $-\mathbf{D}$ , esto es  $[\mathbf{D}_k]_{ij} = \{-d_{ij}, d_{ij}\}$ ; entonces  $\mathbf{M}_k$  puede representarse como

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{A}_0 + \mathbf{D}_k \quad \text{donde} \quad [\mathbf{D}_k]_{ij} \in \{-d_{ij}, d_{ij}\} \quad i, j = 1, 2, \dots, n; \quad k = 0, 1, \dots, (2^n - 1) \quad (2.8)$$

## DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

**COMENTARIO 2.1.5.** – Se puede entonces concluir, por los teoremas y corolarios anteriores, que las  $2^n$  matrices vértice pertenecientes a la matriz intervalo pueden ser representadas por alguna de las siguientes formas:

- a).- La matriz  $\mathbf{L}$  más el producto Hadamard de la matriz de perturbación  $\mathbf{P}$  y las  $2^n$  matrices binarias  $\mathbf{Tp}_k$ , donde  $[\mathbf{Tp}_k]_{ij} \in \{0, 1\}$ .
- b).- La matriz  $\mathbf{L}$  más la matriz  $\mathbf{P}_k$ , donde  $[\mathbf{P}_k]_{ij} \in \{0, p_{ij}\}$
- c).- La matriz  $\mathbf{A}_0$  más el producto Hadamard de la matriz de perturbación centralizada  $\mathbf{D}$  y las  $2^n$  matrices binarias  $\mathbf{Td}_k$ , donde  $[\mathbf{Td}_k]_{ij} \in \{-1, 1\}$ .
- d).- La matriz  $\mathbf{A}_0$  más la matriz  $\mathbf{D}_k$ , donde  $[\mathbf{D}_k]_{ij} \in \{-d_{ij}, d_{ij}\}$

### 2.1.6.- Ejemplos de generación de las matrices vértice.

**EJEMPLO 2.1.6.1.-** Sea la siguiente matriz intervalo  $\mathbf{M}=[\mathbf{L},\mathbf{U}]$  con perturbación  $\mathbf{P}=\mathbf{U}-\mathbf{L}$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -2.0 & -1.9 \\ 1.1 & -4.3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 2.5 & -1.0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1.5 & 2.4 \\ 1.4 & 3.3 \end{bmatrix}$$

Entonces las matrices vértice  $\mathbf{M}_k=\mathbf{L}+\mathbf{P}\circ\mathbf{T}p_k$  pertenecientes a la matriz intervalo  $\mathbf{M}=[\mathbf{L},\mathbf{U}]$  son:

$$\mathbf{M}_0 = \begin{bmatrix} -2.0 & -1.9 \\ 1.1 & -4.3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} -0.5 & -1.9 \\ 1.1 & -4.3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} -2.0 & 0.5 \\ 1.1 & -4.3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 1.1 & -4.3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_4 = \begin{bmatrix} -2.0 & -1.9 \\ 2.5 & -4.3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_5 = \begin{bmatrix} -0.5 & -1.9 \\ 2.5 & -4.3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_6 = \begin{bmatrix} -2.0 & 0.5 \\ 2.5 & -4.3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_7 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 2.5 & -4.3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_8 = \begin{bmatrix} -2.0 & -1.9 \\ 1.1 & -1.0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_9 = \begin{bmatrix} -0.5 & -1.9 \\ 1.1 & -1.0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_{10} = \begin{bmatrix} -2.0 & 0.5 \\ 1.1 & -1.0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_{11} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 1.1 & -1.0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{12} = \begin{bmatrix} -2.0 & -1.9 \\ 2.5 & -1.0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_{13} = \begin{bmatrix} -0.5 & -1.9 \\ 2.5 & -1.0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_{14} = \begin{bmatrix} -2.0 & 0.5 \\ 2.5 & -1.0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_{15} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 2.5 & -1.0 \end{bmatrix}$$

**EJEMPLO 2.1.6.2.**– Sea la siguiente matriz intervalo  $\mathbf{M}=[\mathbf{L},\mathbf{U}]$  con matriz centroide  $\mathbf{A}_0=\frac{1}{2}(\mathbf{L}+\mathbf{U})$  y matriz de perturbación centralizada  $\mathbf{D}=\frac{1}{2}(\mathbf{U}-\mathbf{L})$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2.0 & 1.9 \\ 1.1 & 4.3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2.5 & 2.5 \\ 2.5 & 5.0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 \\ 1.4 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 2.25 & 2.20 \\ 1.80 & 4.65 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.30 \\ 0.70 & 0.35 \end{bmatrix}$$

Entonces las matrices vértice  $\mathbf{M}_k=\mathbf{A}_0+\mathbf{D}\circ\mathbf{T}d_k$  pertenecientes a la matriz intervalo  $\mathbf{M}=[\mathbf{L},\mathbf{U}]$  son:

$$\mathbf{M}_0 = \begin{bmatrix} 2.0 & 1.9 \\ 1.1 & 4.3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 2.5 & 1.9 \\ 1.1 & 4.3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 2.0 & 2.5 \\ 1.1 & 4.3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} 2.5 & 2.5 \\ 1.1 & 4.3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_4 = \begin{bmatrix} 2.0 & 1.9 \\ 2.5 & 4.3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_5 = \begin{bmatrix} 2.5 & 1.9 \\ 2.5 & 4.3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_6 = \begin{bmatrix} 2.0 & 2.5 \\ 2.5 & 4.3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_7 = \begin{bmatrix} 2.5 & 2.5 \\ 2.5 & 4.3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_8 = \begin{bmatrix} 2.0 & 1.9 \\ 1.1 & 5.0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_9 = \begin{bmatrix} 2.5 & 1.9 \\ 1.1 & 5.0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_{10} = \begin{bmatrix} 2.0 & 2.5 \\ 1.1 & 5.0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_{11} = \begin{bmatrix} 2.5 & 2.5 \\ 1.1 & 5.0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{12} = \begin{bmatrix} 2.0 & 1.9 \\ 2.5 & 5.0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_{13} = \begin{bmatrix} 2.5 & 1.9 \\ 2.5 & 5.0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_{14} = \begin{bmatrix} 2.0 & 2.5 \\ 2.5 & 5.0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_{15} = \begin{bmatrix} 2.5 & 2.5 \\ 2.5 & 5.0 \end{bmatrix}$$

**2.2.- RESULTADOS PRELIMINARES:** En esta sección de resultados preliminares se incluyen algunos lemas y teoremas, como el teorema de Weyl y el teorema de Perron entre otros, y se usan para realizar las demostraciones de las cotas presentadas en este trabajo.

**Lema 2.2.1.-** Sea la matriz intervalo  $M=[L,U]$  y  $M_k$  las matrices vértice pertenecientes a la matriz intervalo, entonces

$$H(M_k)=H(L)+H(P_k) \quad (2.9)$$

**Prueba:** Usando el corolario 2.1.2  $M_k=L+P_k$

$$M_k=L+P_k \quad (2.10)$$

$$H(M_k)=H(L+P_k) \quad (2.11)$$

$$H(M_k)=\frac{1}{2}(L+P_k)+\frac{1}{2}(L+P_k)^* \quad (2.12)$$

$$H(M_k)=\frac{1}{2}(L+L^*)+\frac{1}{2}(P_k+P_k^*) \quad (2.13)$$

$$H(M_k)=H(L)+H(P_k) \quad (2.14)$$

**Lema 2.2.2.-** Sea la matriz Hermítica  $W_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  donde  $W_k$  está dado como sigue

$$[W_k]_{ij}=[W_k]_{ji} \in \{0,1\} \quad \forall i, j=1,2,\dots,n; \quad \forall k=0,1,\dots,(2^n-1) \quad (2.15)$$

entonces

$$\lambda_{\max}(W_k) \leq n \quad \forall k=0,1,\dots,(2^n-1) \quad (2.16)$$

**Prueba:** Para probar este lema, se emplean los discos Geršgorin [23]. Los discos Geršgorin para una matriz  $\mathbf{W}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  están definidos como los círculos centrados en  $[\mathbf{W}_k]_{ii}$  y con radio  $r_i$ , esto es:

$$r_i = \{z : |z - [\mathbf{W}_k]_{ii}| \leq r_i\} \quad i=1,2,\dots,n \quad (2.17)$$

donde  $r_i$ =radio del  $i$ -ésimo disco Geršgorin por renglón=  $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |[\mathbf{W}_k]_{ij}|$

entonces cada valor característico de  $\mathbf{W}_k$  cae en alguno de los discos, pero por la estructura de  $\mathbf{W}_k : [\mathbf{W}_k]_{ij} = [\mathbf{W}_k]_{ji} \in \{0,1\}$  se tiene que el máximo  $r_i = n-1$  ocurre cuando todos son unos y al centrarlo en  $w_{ii}=1$  se tiene el valor máximo  $n$  y se concluye que los valores característicos  $|\lambda_i| \leq n \quad \forall i=1,2,\dots,n$ . ■

**Lema 2.2.3.**– Sea la matriz intervalo  $\mathbf{M} = [\mathbf{L}, \mathbf{U}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\mathbf{M}_k = \mathbf{L} + \mathbf{P} \circ \mathbf{T}_k$  las matrices correspondientes a los vértices de la matriz intervalo, entonces la parte Hermítica de los vértices puede representarse como

$$H(\mathbf{M}_k) = \begin{cases} \frac{1}{2}([\mathbf{U}]_{ij} + [\mathbf{U}]_{ji}) & \text{si } [\mathbf{T}_k]_{ij} = 1 \text{ y } [\mathbf{T}_k]_{ji} = 1 \\ \frac{1}{2}([\mathbf{U}]_{ij} + [\mathbf{L}]_{ji}) & \text{si } [\mathbf{T}_k]_{ij} = 1 \text{ y } [\mathbf{T}_k]_{ji} = 0 \\ \frac{1}{2}([\mathbf{L}]_{ij} + [\mathbf{U}]_{ji}) & \text{si } [\mathbf{T}_k]_{ij} = 0 \text{ y } [\mathbf{T}_k]_{ji} = 1 \\ \frac{1}{2}([\mathbf{L}]_{ij} + [\mathbf{L}]_{ji}) & \text{si } [\mathbf{T}_k]_{ij} = 0 \text{ y } [\mathbf{T}_k]_{ji} = 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

$$\forall k = 0, 1, \dots, (2^n - 1) \text{ y } \forall i, j = 1, 2, \dots, n$$

y puede ser acotada en términos del producto Hadamard como sigue:

$$H(\mathbf{M}_k) \leq H(\mathbf{L}) + H(\mathbf{P}) \circ \mathbf{W}_k \quad (2.19)$$

esto es

$$[H(\mathbf{M}_k)]_{ij} \leq \frac{1}{2}(l_{ij} + l_{ji}) + \frac{1}{2}(p_{ij} + p_{ji}) \cdot [\mathbf{W}_k]_{ij} \quad (2.20)$$

donde  $\mathbf{W}_k$  esta definida como

$$[\mathbf{W}_k]_{ij} = [\mathbf{W}_k]_{ji} = 1 \text{ si } [\mathbf{T}_k]_{ij} = 1 \text{ ó } [\mathbf{T}_k]_{ji} = 1 \quad (2.21)$$

$$[\mathbf{W}_k]_{ij} = [\mathbf{W}_k]_{ji} = 0 \text{ si } [\mathbf{T}_k]_{ij} = 0 \text{ ó } [\mathbf{T}_k]_{ji} = 0 \quad (2.22)$$

**Prueba:**  $H(\mathbf{M}_k)$  puede representarse también como

$$[H(\mathbf{M}_k)]_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2}([\mathbf{L}]_{ij} + [\mathbf{L}]_{ji}) + \frac{1}{2}([\mathbf{P}]_{ij} + [\mathbf{P}]_{ji}) & \text{si } [\mathbf{T}_k]_{ij} = 1 \text{ y } [\mathbf{T}_k]_{ji} = 1 \\ \frac{1}{2}([\mathbf{L}]_{ij} + [\mathbf{L}]_{ji}) + \frac{1}{2}([\mathbf{P}]_{ij}) & \text{si } [\mathbf{T}_k]_{ij} = 1 \text{ y } [\mathbf{T}_k]_{ji} = 0 \\ \frac{1}{2}([\mathbf{L}]_{ij} + [\mathbf{L}]_{ji}) + \frac{1}{2}([\mathbf{P}]_{ji}) & \text{si } [\mathbf{T}_k]_{ij} = 0 \text{ y } [\mathbf{T}_k]_{ji} = 1 \\ \frac{1}{2}([\mathbf{L}]_{ij} + [\mathbf{L}]_{ji}) & \text{si } [\mathbf{T}_k]_{ij} = 0 \text{ y } [\mathbf{T}_k]_{ji} = 0 \end{cases} \quad (2.23) \quad \text{®}$$

$\forall k=0,1,\dots,(2^n-1) \text{ y } \forall i, j=1,2,\dots,n$

pero  $H(\mathbf{L}) + H(\mathbf{P}) \circ \mathbf{W}_k$  puede expresarse como

$$\frac{1}{2}(l_{ij} + l_{ji}) + \frac{1}{2}(p_{ij} + p_{ji}) \cdot [\mathbf{W}_k]_{ij} = \frac{1}{2}(l_{ij} + l_{ji} + p_{ij} + p_{ji}) = \frac{1}{2}(u_{ij} + u_{ji}) \text{ si } [\mathbf{W}_k]_{ij} = 1 \quad (2.24)$$

$$\frac{1}{2}(l_{ij} + l_{ji}) + \frac{1}{2}(p_{ij} + p_{ji}) \cdot [\mathbf{W}_k]_{ij} = \frac{1}{2}(l_{ij} + l_{ji}) \text{ si } [\mathbf{W}_k]_{ij} = 0 \quad (2.25)$$

$$\text{como } p_{ij} \in \{0,1\} \text{ y } [W_k]_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i, j=1,2,\dots,n \quad (2.26)$$

entonces

$$[H(M_k)]_{ij} = \frac{1}{2}(u_{ij} + u_{ji}) \text{ si } [T_k]_{ij}=1, [T_k]_{ji}=1 \text{ y } [W_k]_{ij}=[W_k]_{ji}=1 \quad (2.27)$$

$$[H(M_k)]_{ij} \leq \frac{1}{2}(u_{ij} + l_{ji}) \text{ si } [T_k]_{ij}=1, [T_k]_{ji}=0 \text{ y } [W_k]_{ij}=[W_k]_{ji}=1 \quad (2.28)$$

$$[H(M_k)]_{ij} \leq \frac{1}{2}(l_{ij} + u_{ji}) \text{ si } [T_k]_{ij}=0, [T_k]_{ji}=1 \text{ y } [W_k]_{ij}=[W_k]_{ji}=1 \quad (2.29)$$

$$[H(M_k)]_{ij} \leq \frac{1}{2}(l_{ij} + l_{ji}) \text{ si } [T_k]_{ij}=0, [T_k]_{ji}=0 \text{ y } [W_k]_{ij}=[W_k]_{ji}=0 \quad (2.30)$$

por lo tanto

$$H(M_k) \leq H(L) + H(P) \circ W_k \quad (2.31)$$

Del lema anterior se deduce el siguiente corolario:

### DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

**Corolario 2.2.4.-** Sea  $P$  la matriz de perturbación,  $P_k$  las  $2^n$  matrices vértice pertenecientes a la matriz intervalo  $M=[\theta, P]$ , donde  $\theta = \text{CEROS}(n)$  y  $W_k$  la matriz binaria definida como en el lema 2.2.3, entonces  $H(P_k)$  puede acotarse en términos del producto Hadamard como sigue

$$H(P_k) \leq H(P) \circ W_k \quad (2.32)$$

$$\text{esto es } [H(P_k)]_{ij} \leq [H(P)]_{ij} \cdot [W_k]_{ij} \quad (2.33)$$

**Hecho 2.2.5.**– (Teorema de Weyl) [23],[27] Sean  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrices Hermíticas cuyos valores característicos están ordenados en forma ascendente:

$$\lambda_{\min}(\mathbf{A}) = \lambda_1(\mathbf{A}) \leq \lambda_2(\mathbf{A}) \leq \dots \leq \lambda_n(\mathbf{A}) = \lambda_{\max}(\mathbf{A}) \quad (2.34)$$

y

$$\lambda_{\min}(\mathbf{B}) = \lambda_1(\mathbf{B}) \leq \lambda_2(\mathbf{B}) \leq \dots \leq \lambda_n(\mathbf{B}) = \lambda_{\max}(\mathbf{B}) \quad (2.35)$$

entonces

$$\lambda_1(\mathbf{A}) + \lambda_k(\mathbf{B}) \leq \lambda_k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq \lambda_n(\mathbf{A}) + \lambda_k(\mathbf{B}) \quad k=1,2,\dots,n \quad (2.36)$$

**Lema 2.2.6.**– Sean  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrices Hermíticas, entonces

$$\lambda_{\min}(\mathbf{A}) + \lambda_{\min}(\mathbf{B}) \leq \lambda_{\min}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \quad (2.37)$$

y

$$\lambda_{\max}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{A}) + \lambda_{\max}(\mathbf{B}) \quad (2.38)$$

**Prueba:** Aplicando el teorema de Weyl (hecho 2.2.5) con  $k=1$  y  $k=n$ , se tiene:

$$\lambda_1(\mathbf{A}) + \lambda_1(\mathbf{B}) = \lambda_{\min}(\mathbf{A}) + \lambda_{\min}(\mathbf{B}) \leq \lambda_{\min}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda_1(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \quad (2.39)$$

y

$$\lambda_{\max}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda_n(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq \lambda_n(\mathbf{A}) + \lambda_n(\mathbf{B}) = \lambda_{\max}(\mathbf{A}) + \lambda_{\max}(\mathbf{B}) \quad (2.40)$$

por lo tanto

$$\lambda_{\min}(\mathbf{A}) + \lambda_{\min}(\mathbf{B}) \leq \lambda_{\min}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \quad (2.41)$$

Esta es una característica de acotamiento del mínimo valor característico de las matrices Hermíticas, y

$$\lambda_{\max}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{A}) + \lambda_{\max}(\mathbf{B}) \quad (2.42)$$

que es una característica de subaditividad del máximo valor característico de las matrices Hermíticas.

■

**Definición 2.2.7.-** [23],[27] El radio espectral  $\rho(\mathbf{A})$  de una matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  se define como el radio del menor círculo que contiene a todos los valores característicos de  $\mathbf{A}$ , o sea:

$$\rho(\mathbf{A}) = \max\{|\lambda_i(\mathbf{A})| \mid i=1,2,\dots,n\} \quad (2.43)$$

por lo tanto

$$|\lambda_i(\mathbf{A})| \leq \rho(\mathbf{A}) \quad (2.44)$$

**Hecho 2.2.8.-** [23] (Acotamiento del radio espectral) Sean las matrices  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , si  $\mathbf{B} \geq |\mathbf{A}| \geq \mathbf{A}$ , esto es  $b_{ij} \geq |a_{ij}| \geq a_{ij} \forall i, j=1,2,\dots,n$ , entonces

$$\rho(\mathbf{B}) \geq \rho(|\mathbf{A}|) \geq \rho(\mathbf{A}) \quad (2.45)$$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

**Hecho 2.2.9.-** [23] (Teorema de Perron) Sea la matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , si  $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$ , esto es  $a_{ij} \geq 0 \forall i, j=1,2,\dots,n$ , entonces  $\rho(\mathbf{A})$  es un valor característico de  $\mathbf{A}$ , por lo tanto

$$\rho(\mathbf{A}) = \lambda_{\max}(\mathbf{A}) \quad (2.46)$$

es un valor característico de  $\mathbf{A}$ , por lo tanto

$$\rho(\mathbf{A}) = \lambda_{\max}(\mathbf{A}) \quad (2.47)$$

**Hecho 2.2.10.**– [24] (Expansión del máximo valor característico del producto Hadamard)  
Sean las matrices Hermíticas  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  con  $A \geq \theta$  y  $Y \geq B \geq \theta$ , donde  $Y = \text{UNOS}(n)$  y  $\theta = \text{CEROS}(n)$ ; esto es  $1 \geq b_{ij} \geq 0$  entonces

$$\lambda_{\max}(A \circ B) \leq \lambda_{\max}(A) \cdot \lambda_{\max}(B) \quad (2.48)$$

donde  $\circ$  representa el producto Hadamard

**Hecho 2.2.11.**– (Contención espectral) [24],[36] Sea la matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , entonces

$$\lambda_{\min}(H(A)) \leq \text{Re}(\lambda_i(A)) \leq \lambda_{\max}(H(A)) \quad (2.49)$$

y

$$\lambda_{\min}(j \cdot S(A)) \leq \text{Re}(\lambda_i(j \cdot A)) \leq \lambda_{\max}(j \cdot S(A)) \quad (2.50)$$

$$\forall i=1,2,\dots,n$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

La expresión anterior indica que los valores característicos de una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  están contenidos en el rectángulo  $\lambda_{\min}(H(A)), \lambda_{\max}(H(A)), \lambda_{\min}(j \cdot S(A)), \lambda_{\max}(j \cdot S(A))$ ; más aún, están contenidos en el campo de valores de  $A$ , esto es,  $F(A) = \{x^*Ax : x^*x=1 \ \forall x \in \mathbb{C}\}$  [9]

**Hecho 2.2.12.**– [37],[50] La matriz intervalo  $M=[L,U] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es Hurwitz estable si la parte Hermítica de los  $2^n$  matrices vértice son Hurwitz estable

$$M=[L,U] \text{ es estable si } \lambda_{\max}(H(M_k)) < 0, \forall k=0,1,\dots,(2^n-1) \quad (2.51)$$

**Lema 2.2.13.**– Sean las matrices  $\theta \preceq P$ ,  $\theta \preceq T_k$ , esto implica  $H(P \circ T_k) \preceq H(P) \circ W_k$  donde  $W_k$  esta definido por  $[W_k]_{ij} = [W_k]_{ji} \in \{0,1\}$ ; entonces

$$\lambda_{\max}(H(P \circ T_k)) \leq \lambda_{\max}(H(P) \circ W_k) \quad (2.52)$$

**Prueba:** Usando el teorema 2.1.1 y el corolario 2.1.2 se deduce fácilmente que

$$P_k = P \circ T_k \quad (2.53)$$

con parte Hermítica

$$H(P_k) = H(P \circ T_k) \quad (2.54)$$

y por el corolario 2.2.4

$$H(P_k) = H(P \circ T_k) \preceq H(P) \circ W_k \quad (2.55)$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN esto es

$$[H(P_k)]_{ij} = [H(P \circ T_k)]_{ij} \leq [H(P)]_{ij} \cdot [W_k]_{ij} \quad (2.56)$$

como  $P \succeq \theta$ ,  $T_k \succeq \theta$  y  $W_k \succeq \theta$  puede usarse el lema 2.2.8 y se obtiene

$$\rho(H(P_k)) = \rho(H(P \circ T_k)) \leq \rho(H(P) \circ W_k) \quad (2.57)$$

porque las matrices son positivas puede usarse el teorema de Perron (2.2.9) y cambiarse  $\rho(\cdot)$  por  $\lambda_{\max}(\cdot)$

$$\lambda_{\max}(H(P_k)) = \lambda_{\max}(H(P \circ T_k)) \leq \lambda_{\max}(H(P) \circ W_k) \quad (2.58)$$

**Comentario:** El lema anterior indica que si  $H(\mathbf{P} \circ \mathbf{T}_k)$  es acotado por  $H(\mathbf{P}) \circ \mathbf{W}_k$ , entonces  $\lambda_{\max}(H(\mathbf{P} \circ \mathbf{T}_k))$  es acotado por  $\lambda_{\max}(H(\mathbf{P}) \circ \mathbf{W}_k)$

**Hecho 2.2.15.-** [24] Sea la matriz  $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  y  $b \in \mathbf{R}$ , entonces  $\rho(\mathbf{A} + b \cdot \mathbf{I}) \leq \rho(\mathbf{A}) + |b|$ . Si  $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$  y  $b \geq 0$  entonces

$$\rho(\mathbf{A} + b \cdot \mathbf{I}) = \rho(\mathbf{A}) + b \quad (2.59)$$

**Comentario 2.2.16.-** Los resultados anteriores son fundamentales para realizar las demostraciones de los teoremas principales. Entre estos resultados preliminares se incluyen resultados importantes como el resultado de Weyl. Con este resultado se obtienen dos características importantes para las matrices Hermíticas:

1.- Acotamiento del mínimo valor característico de las matrices Hermíticas.

2.- Subaditividad del máximo valor característico de las matrices Hermíticas. ®

### DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Se incluye además el resultado de Perron con el que se puede cambiar el máximo valor característico de una matriz por su radio espectral si la matriz tiene elementos positivos. Además del teorema de Perron se dan otros resultados para matrices positivas como el hecho 2.2.8 y resultados para el producto Hadamard hecho 2.2.10 y lema 2.2.13. El hecho 2.2.12 da la característica de convexidad de las matrices Hermíticas [8].

## CAPITULO 3

### ANALISIS DE ESTABILIDAD DE SISTEMAS LINEALES CONTINUOS, EN VARIABLES DE ESTADO, INVARIANTES EN EL TIEMPO Y CON INCERTIDUMBRE PARAMETRICA

**E**l problema de estabilidad robusta de sistemas lineales continuos, invariantes en el tiempo y que contienen incertidumbre paramétrica ha sido analizado fuertemente en los últimos años [3],[6],[12], [14],[22],[26],[41],[48]. En la literatura de control existen resultados suficientes y algunos de ellos se basan en: Discos Geršgorin [21],[39]; Teorema de Bauer-Fike [21],[25]; Normas matriciales [21],[25]; Teorema de Lyapunov [29]; Distancia de la matriz centroide a las matrices inestables [32] y Sumas tipo Kronecker [7],[33], entre otros. Existen algunos resultados mas recientes y se basan en: Ovalos de Cassini [53]; Teorema de Ky-Fan [44] y Teorema de Rayleigh Ritz [30].

En este capítulo se demuestran los teoremas fundamentales que soportan los resultados obtenidos en este trabajo y que son usados para el análisis de estabilidad robusta de sistemas lineales continuos invariantes en el tiempo y representados por matrices intervalo. Estos teoremas generan diversas cotas superiores que permiten asegurar estabilidad robusta del sistema en cuestión.

#### 3.1.- Demostración de una cota superior para análisis de estabilidad robusta de sistemas continuos.

**Teorema 3.1.1.-** La matriz intervalo  $M=[L,U] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es Hurwitz estable si

$$\delta_1 = \lambda_{\max}(H(L)) + n \cdot \lambda_{\max}(H(P)) < 0 \quad (3.1)$$

**Prueba:** La demostración del teorema se omite porque  $\lambda_{\max}(M) \leq \lambda_{\max}(H(M)) \leq \delta_4 \leq \delta_1$ ,  $M \in [L,U]$  (como se demuestra más adelante) y solamente se va a demostrar el teorema que garantiza la cota  $\delta_4$  y por lo tanto garantiza la cota  $\delta_1$

■

### 3.2.- Ejemplos numéricos

Los siguientes ejemplos sirven para ilustrar la aplicación de la cota  $\delta_1$  obtenida.

**Ejemplo 3.2.1.**– Sea la matriz intervalo  $M=[L,U]$  donde  $L$  y  $U$  son dados por

$$U = \begin{bmatrix} -8.8 & -3.5 & -2.3 \\ -3.1 & -8.7 & -2.7 \\ -2.7 & -2.8 & -8.9 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} -9.0 & -3.9 & -3.2 \\ -3.1 & -9.3 & -3.0 \\ -3.5 & -3.6 & -9.2 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.9 \\ 0.0 & 0.6 & 0.3 \\ 0.8 & 0.8 & 0.3 \end{bmatrix}$$

evaluando la cota con la prueba propuesta  $\delta_1 = -1.2522$  y  $\delta = -5.0221$ ;  $\delta$  se obtiene al evaluar los valores característicos de las partes Hermíticas de las  $2^{n^2}$  matrices vértice.

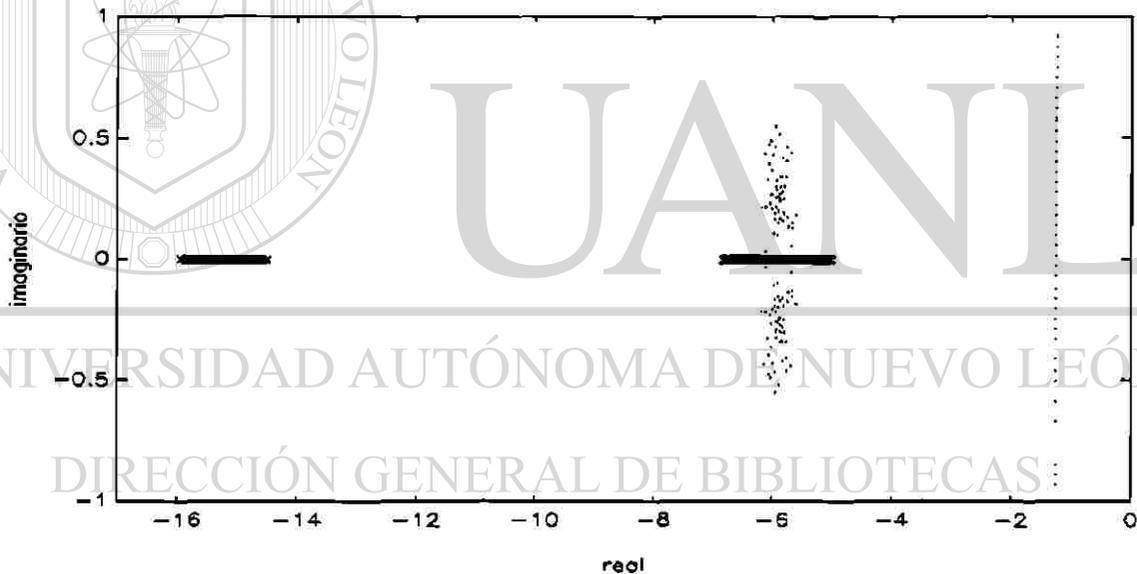


Figura 3.1 Espectro de la matriz intervalo del ejemplo 3.2.1

La figura 3.1 muestra: (·) Los valores característicos de los  $2^{n^2}$  vértices más 500 matrices aleatorias, pertenecientes a la matriz intervalo, (x) los valores característicos de la parte Hermítica de todos los vértices del hipercubo y la línea vertical (····) muestra la cota superior  $\delta_1$ , e indica que la matriz intervalo  $M=[L,U]$  es Hurwitz estable.

**Ejemplo 3.2.2.**– Sea la matriz intervalo  $M=[L,U]$  donde  $L$  y  $U$  son dados por

$$U = \begin{bmatrix} -3.38 & 0.05 & -0.44 \\ -0.71 & -1.77 & -0.27 \\ -1.31 & -0.97 & -1.88 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} -3.39 & -0.01 & -0.63 \\ -0.92 & -2.71 & -0.59 \\ -1.34 & -1.27 & -2.72 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.06 & 0.19 \\ 0.21 & 0.94 & 0.32 \\ 0.03 & 0.30 & 0.84 \end{bmatrix}$$

evaluando la cota usando la prueba propuesta  $\delta_1=2.0142$  y  $\delta=-0.08039$ ;  $\delta$  se obtiene al evaluar los valores característicos de todas las matrices vértice.



Figura 3.2 Espectro de la matriz intervalo del ejemplo 3.2.2

La figura 3.2 muestra: (·) Los valores característicos de todos los  $2^n$  matrices vértice más 500 matrices aleatorias, pertenecientes a la matriz intervalo, (x) los valores característicos de la parte Hermítica de todos los vértices del hipercubo y la línea vertical (···) muestra la cota superior  $\delta_1 > 0$  que no asegura nada acerca de la estabilidad o inestabilidad del sistema debido al conservatismo.

**Comentario 3.2.3.**– En esta parte se muestra el análisis de la cota  $\delta_1 = \lambda_{\max}(H(L)) + n \cdot \lambda_{\max}(H(P))$  y asegura la estabilidad de una matriz intervalo de una manera sencilla y rápida si  $\delta_1 < 0$ . Es importante indicar que este análisis incluye más conservatismo al resultado que el analizar las partes Hermíticas de los  $2^n$  vértices pertenecientes a la matriz intervalo. El ejemplo 3.2.1 es Hurwitz estable porque  $\delta_1 < 0$  como se puede observar en la figura 3.1, sin embargo nada puede decirse acerca de la estabilidad del ejemplo 3.2.2 puesto que  $\delta_1 > 0$  (figura 3.2). Usando el análisis de estabilidad de las partes Hermíticas de las  $2^n$  matrices vértice se comprueba que la matriz intervalo del ejemplo 3.2.2 es Hurwitz estable (representado con x en la gráfica).

### 3.3.- Primer refinamiento de la cota superior propuesta

Este primer refinamiento a la cota inicial propuesta fué presentado en el 10° Congreso Brasileiro de Automática (CBA '94) y 6° Congreso Latinoamericano de Controle Automático en Rio de Janeiro, Brasil [12].

**Teorema 3.3.1.**– Sea la matriz intervalo  $M=[L,U]$ , donde  $L, U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $P=U-L=$

$p \cdot \text{UNOS}(n)$  –igual incertidumbre en todos los elementos– entonces  $M$  es Hurwitz estable

si 
$$\delta_2 = \lambda_{\max}(H(L)) + n \cdot p < 0 \quad (3.2) \quad \textcircled{R}$$

#### DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

**Prueba:** La demostración del teorema se omite porque  $\lambda_{\max}(M) \leq \lambda_{\max}(H(M)) \leq \delta_4 \leq \delta_2$ ,  $M \in [L,U]$  (como se demuestra mas adelante) y solamente se va a probar el teorema que garantiza la cota  $\delta_4$  y por lo tanto garantiza la cota  $\delta_2$

■

**Enunciado 3.3.2.**– La matriz intervalo  $M=[L,U]$  con perturbación no constante  $P \neq p \cdot \text{UNOS}(n)$  es Hurwitz estable si

$$\delta_2 = \lambda_{\max}(H(L)) + n \cdot p_{\max} < 0 \quad (3.3)$$

**Prueba:** La prueba es simple aplicando las siguientes condiciones al teorema 3.3.1

$$\text{Como } \mathbf{P} \leq p_{max} \cdot (\text{UNOS}(n)) \text{ entonces } \rho(\mathbf{P}) \leq \rho(p_{max} \cdot (\text{UNOS}(n)))$$

$$\text{Porque } p_{max} \cdot (\text{UNOS}(n)) \geq \theta \text{ entonces } \rho(p_{max} \cdot (\text{UNOS}(n))) = \lambda_{max}(p_{max} \cdot (\text{UNOS}(n)))$$

■

**Comentario 3.3.3.** - Este primer refinamiento es mejor que la cota inicial propuesta solamente si  $\lambda_{max}(H(\mathbf{P})) > p_{max}$  de otra manera este refinamiento cumple condiciones conservativas mas adversas que la cota inicial.

En el siguiente ejemplo la condición  $p_{max} \leq \lambda_{max}(H(\mathbf{P}))$  no se cumple y por lo tanto este refinamiento es mas conservativo que la cota inicial  $\delta_1$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \text{ con } H(\mathbf{P}) = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.5 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.5 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \text{ y } p_{max} = 1.0$$

$$\lambda_{max}(H(\mathbf{P})) = 0.5 \text{ y } p_{max} = 1.0$$

### 3.4.- Ejemplos numéricos

**Ejemplo 3.4.1.** - Sea la matriz intervalo  $\mathbf{M}=[L,U]$  donde  $L$  y  $U$  están dados por

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -0.678 & -0.394 & 0.317 \\ 0.477 & -0.735 & 0.215 \\ -0.435 & 0.052 & -0.884 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} -0.537 & -0.275 & 0.320 \\ 0.479 & -0.569 & 0.289 \\ -0.337 & 0.078 & -0.785 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.140 & 0.119 & 0.003 \\ 0.002 & 0.166 & 0.073 \\ 0.098 & 0.025 & 0.098 \end{bmatrix}$$

evaluando la cota usando la prueba propuesta  $\delta_2 = -0.1546$ ,  $\delta_1 = 0.0934$  y  $\delta = -0.4068$ ; la cota  $\delta$  se obtiene evaluando los valores característicos de la parte Hermítica de las  $2^n$  matrices vértice.



Figura 3.3 Espectro de la matriz intervalo del ejemplo 3.4.1

La figura 3.3 muestra: (·) Los valores característicos de todas las  $2^n$  matrices vértice más 500 matrices aleatorias, pertenecientes a la matriz intervalo, (x) Los valores característicos de la parte Hermítica de todos los vértices del hipercono y la línea vertical (---) muestra la cota superior  $\delta_2$ .

**Ejemplo 3.4.2.**– Sea la matriz intervalo  $M=[L,U]$  donde  $L$  y  $U$  están dados por

$$L = \begin{bmatrix} -0.435 & -0.398 & 0.190 \\ 0.166 & -0.381 & -0.275 \\ 0.171 & 0.359 & -0.679 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} -0.343 & -0.291 & 0.285 \\ 0.181 & -0.264 & -0.154 \\ 0.206 & 0.381 & -0.640 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.092 & 0.107 & 0.094 \\ 0.014 & 0.116 & 0.120 \\ 0.035 & 0.022 & 0.038 \end{bmatrix}$$

evaluando la cota usando la prueba propuesta  $\delta_2=0.0948$ ,  $\delta_1=0.3885$  y  $\delta=-0.1439$ ; la cota  $\delta$  se obtiene evaluando los valores característicos de las partes Hermíticas de todos los vértices.

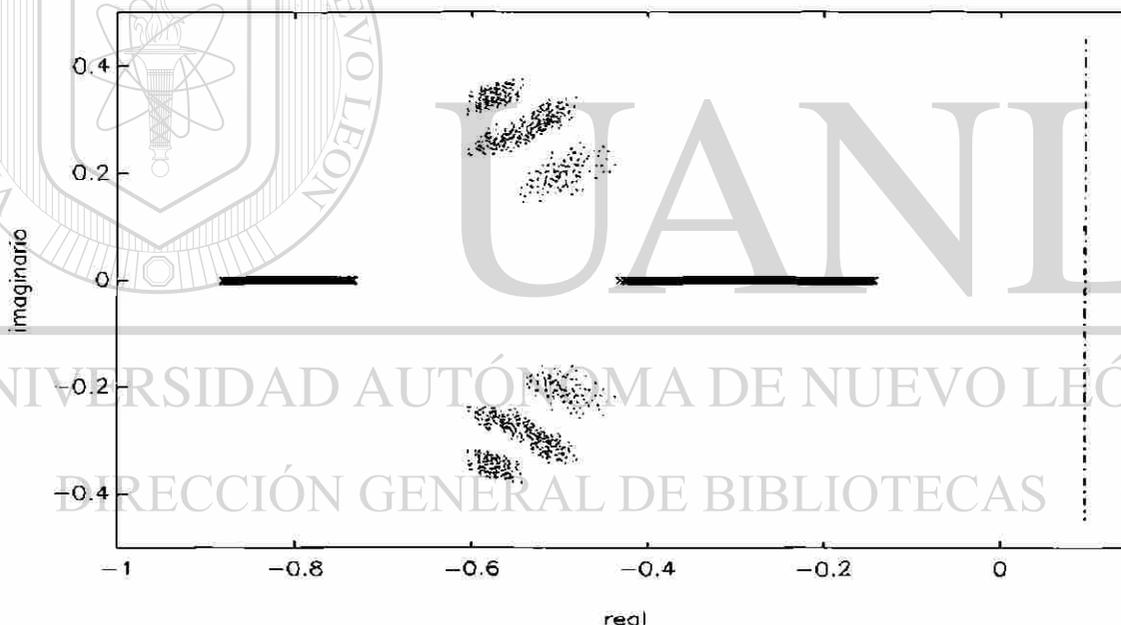


Figura 3.4 Espectro de la matriz intervalo del ejemplo 3.4.2

La figura 3.4 muestra: (·) Los valores característicos de todas las  $2^n$  matrices vértice más 500 matrices aleatorias, pertenecientes a la matriz intervalo, (x) los valores característicos de la parte Hermítica de todos los vértices del hipercubo y la línea vertical (---) muestra la cota superior  $\delta_2$ .

**Comentario 3.4.3.**– En esta parte se muestra el primer refinamiento a la cota inicial propuesta, y representa un resultado menos conservativo que el anterior si  $\lambda_{\max}(H(\mathbf{P})) \geq p_{\max}$  y puede también ser evaluada de una manera sencilla y rápida.

Es importante indicar que ambos análisis mantienen mayor conservatismo que evaluar las partes Hermíticas de las  $2^n$  matrices vértice pertenecientes a la matriz intervalo. Los ejemplos 3.4.1 y 3.4.2 son Hurwitz estable porque  $\delta < 0$  para ambos, como puede verse en las figuras 3.3 y 3.4; pero  $\delta_2$  no asegura estabilidad en el problema 3.4.2.

### 3.5. – Segundo refinamiento de la cota superior propuesta

Este segundo refinamiento a la prueba inicial propuesta fué presentado en el American Control Conference ACC '94 en Baltimore, Maryland [14].

**Teorema 3.5.1.**– Sea la matriz intervalo  $\mathbf{M}=[\mathbf{L},\mathbf{U}]$  donde  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , y  $\mathbf{P}=(\mathbf{U}-\mathbf{L})$ , la matriz intervalo  $\mathbf{M}=[\mathbf{L},\mathbf{U}]$  es Hurwitz estable si:

$$\delta_3 = \lambda_{\max}(H(\mathbf{L})) + \lambda_{\max}(H(\mathbf{P})) < 0 \quad (3.4)$$

**Prueba:** La demostración del teorema se omite porque  $\lambda_{\max}(\mathbf{M}) \leq \lambda_{\max}(H(\mathbf{M})) \leq \delta_4 \leq \delta_3$ ,  $\mathbf{M} \in [\mathbf{L},\mathbf{U}]$  (como se demuestra más adelante) y solamente se va a probar el teorema que garantiza la cota  $\delta_4$  y por lo tanto garantiza la cota  $\delta_3$

■

**Proposición 3.5.2.**– Este segundo refinamiento  $\delta_3$  es una mejor cota respecto de la cota inicial  $\delta_1$  y del primer refinamiento  $\delta_2$ .

**Prueba:** La mejora respecto de la cota inicial es obvia, puesto que

$$\lambda_{\max}(H(\mathbf{P})) \leq n \cdot \lambda_{\max}(H(\mathbf{P})) \quad (3.5)$$

y

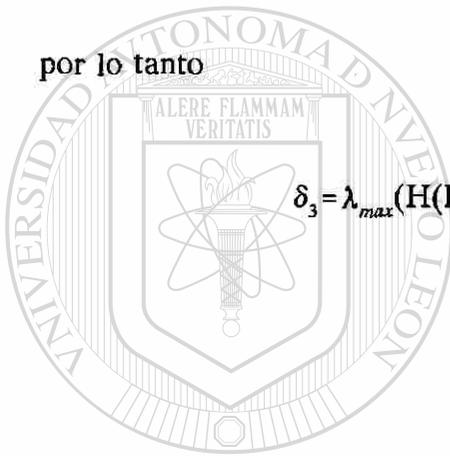
$$\delta_3 = \lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{L})) + \lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{P})) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{L})) + n \cdot \lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{P})) = \delta_1 \quad (3.6)$$

Y la mejora respecto del primer refinamiento ocurre porque  $\theta \leq \mathbf{H}(\mathbf{P}) \leq p_{\max} \cdot (\mathbf{UNOS}(n))$ , entonces

$$\lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{P})) \leq \lambda_{\max}(p_{\max} \cdot \mathbf{UNOS}(n)) = \sum_{i=1}^n p_{\max} = n \cdot p_{\max} \quad (3.7)$$

por lo tanto

$$\delta_3 = \lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{L})) + \lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{P})) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{L})) + n \cdot p_{\max} = \delta_2 \quad (3.8)$$



# UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

### 3.6.- Ejemplos numéricos

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

**Ejemplo 3.6.1.-** Sea la matriz intervalo  $\mathbf{M}=[\mathbf{L},\mathbf{U}]$  donde  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{U}$  están dados por

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -0.527 & -0.334 & -0.028 \\ 0.132 & -0.194 & -0.160 \\ -0.174 & 0.216 & -0.462 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} -0.386 & -0.253 & 0.083 \\ 0.148 & -0.191 & -0.047 \\ -0.160 & 0.266 & -0.383 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.141 & 0.081 & 0.111 \\ 0.016 & 0.003 & 0.113 \\ 0.014 & 0.050 & 0.078 \end{bmatrix}$$

evaluando la cota usando la prueba propuesta  $\delta_3=0.0596$ ,  $\delta_2=0.2678$ ,  $\delta_1=0.4907$  y  $\delta=-0.0815$ . La cota  $\delta$  se evalúa usando los valores característicos de la parte Hermítica de todos los vértices.

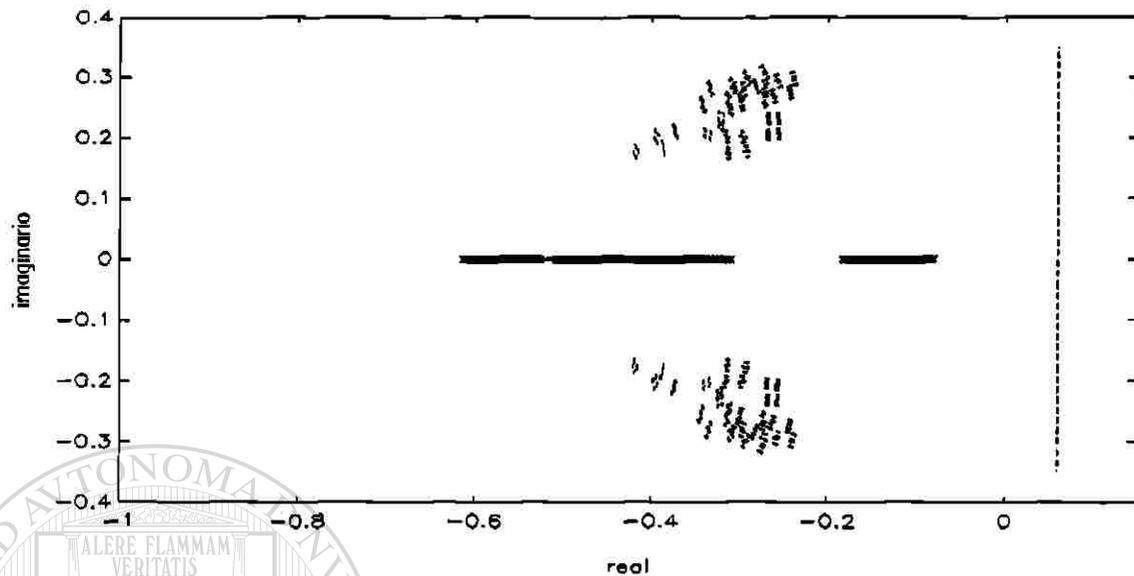


Figura 3.5 Espectro de la matriz intervalo del ejemplo 3.6.1

La figura 3.5 muestra: (·) Los valores característicos de todas las  $2^{n^2}$  matrices vértice más 500 matrices aleatorias, pertenecientes a la matriz intervalo, (x) los valores característicos de la parte Hermítica de todos los vértices del hipercubo y la línea vertical (----) muestra la cota superior  $\delta_3$

## DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

**Ejemplo 3.6.2.**– Sea la matriz intervalo  $M=[L,U]$  donde  $L$  y  $U$  están dados por

$$L = \begin{bmatrix} -0.470 & 0.291 & 0.049 \\ -0.015 & -0.441 & 0.365 \\ -0.439 & -0.082 & -0.576 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} -0.367 & 0.395 & 0.058 \\ 0.136 & -0.403 & 0.373 \\ -0.428 & 0.112 & -0.399 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 0.103 & 0.103 & 0.008 \\ 0.152 & 0.037 & 0.008 \\ 0.011 & 0.195 & 0.176 \end{bmatrix}$$

evaluando la cota usando la prueba propuesta  $\delta_3 = -0.0396$ ,  $\delta_2 = 0.2785$ ,  $\delta_1 = 0.4967$  y  $\delta = -0.1078$ . La cota  $\delta$  se evalúa usando los valores característicos de la parte Hermítica de todos los vértices.

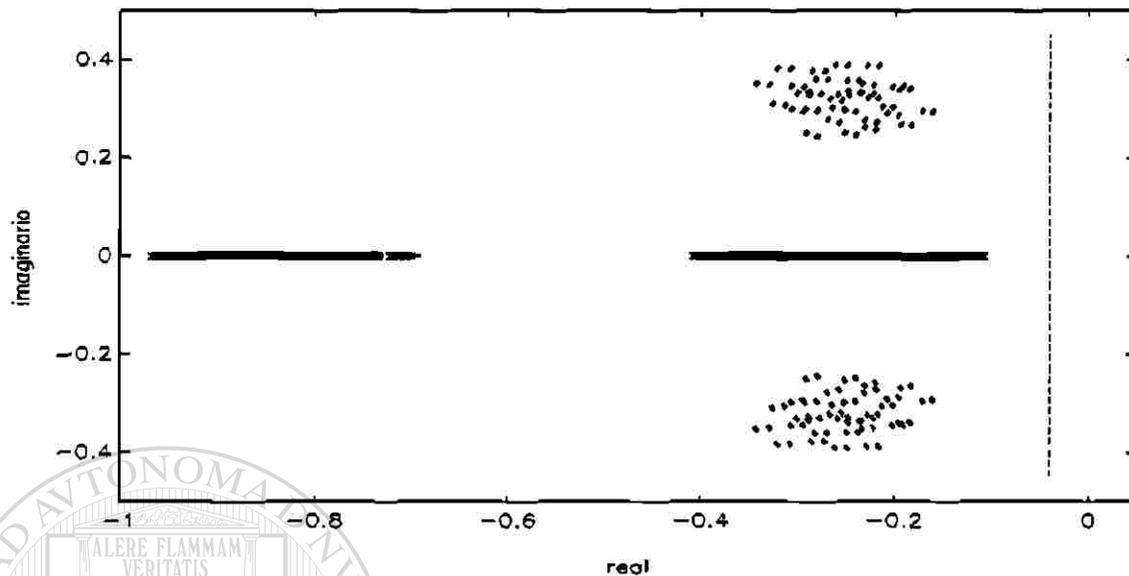


Figura 3.6 Espectro de la matriz intervalo del ejemplo 3.6.2

La figura 3.6 muestra: (·) Los valores característicos de todas las  $2^n$  matrices vértice más 500 matrices aleatorias, pertenecientes a la matriz intervalo, (x) los valores característicos de la parte Hermítica de todos los vértices del hipercubo y la línea vertical (----) muestra la cota superior  $\delta_3$ .

**Comentario 3.6.3.** - En esta parte se muestra el análisis de la cota  $\delta_3$  que reduce más el conservatismo de las cotas  $\delta_1$  y  $\delta_2$ . Es importante indicar que este análisis aun incluye más conservatismo al resultado que el analizar las partes Hermíticas de los  $2^n$  vértices de la matriz intervalo. Los ejemplos 3.6.1 y 3.6.2 son Hurwitz estable porque  $\delta < 0$  para ambos problemas como se puede apreciar en la figura 3.5 y figura 3.6, pero  $\delta_3$  no asegura estabilidad del ejemplo 3.6.1.

Las diferentes pruebas presentadas tienen en común la simplicidad en su evaluación, y  $\delta_3$  reduce bastante el conservatismo respecto de las pruebas  $\delta_1$  y  $\delta_2$  dadas.

### 3.7.- Tercer refinamiento de la cota superior propuesta

Este refinamiento es la mejor cota (basadas en partes Hermíticas) que se obtiene en este trabajo para el análisis de estabilidad de sistemas continuos y que son representados por una matriz intervalo, y ha sido aceptado para su presentación (junto con otros dos análisis de estabilidad de sistemas discretos que incluyen en el capítulo siguiente) en el ECC '95 a presentarse en Roma, Italia [15].

**Teorema 3.7.1.-** La matriz intervalo  $M=[L,U]$  con  $L$  y  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , y  $A_0 = \frac{1}{2}(U+L)$ ,  $D = \frac{1}{2}(U-L)$  es Hurwitz estable si:

$$\delta_4 = \lambda_{\max}(H(A_0)) + \lambda_{\max}(H(D)) < 0 \quad (3.9)$$

**Prueba:** Considerando  $\delta_4 < 0$  y usando la siguiente representación de las matrices vértice pertenecientes a la matriz intervalo (corolario 2.1.4):

$$M_k = A_0 + D_k \quad (3.10)$$

Por consiguiente al analizar la estabilidad de la parte Hermítica de los  $2^n$  matrices vértice pertenecientes a la matriz intervalo  $M=[L,U]$  para asegurar estabilidad (hecho 2.2.12) se tiene que:

$$H(M_k) = H(A_0) + H(D_k) \quad \forall k=0,1,\dots,(2^n-1) \quad (3.11)$$

y evaluando el máximo valor característico de la ecuación anterior

$$\lambda_{\max}(H(M_k)) = \lambda_{\max}(H(A_0) + H(D_k)) \quad (3.12)$$

Aplicando la característica de subaditividad del máximo valor característico de la suma de matrices Hermíticas (lema 2.2.6) se obtiene

$$\lambda_{\max}(H(M_k)) \leq \lambda_{\max}(H(A_0)) + \lambda_{\max}(H(D_k)) \quad (3.13)$$

Como el círculo de radio igual a  $\rho(\mathbf{A})$  (radio espectral) contiene a todos los valores característicos de  $\mathbf{A}$  (hecho 2.2.11), entonces  $\lambda_{max}(\mathbf{H}(\mathbf{D}_k)) \leq \rho(\mathbf{H}(\mathbf{D}_k))$  y se obtiene

$$\lambda_{max}(\mathbf{H}(\mathbf{M}_k)) \leq \lambda_{max}(\mathbf{H}(\mathbf{A}_0)) + \rho(\mathbf{H}(\mathbf{D}_k)) \quad (3.14)$$

Como  $\mathbf{H}(\mathbf{D}_k) \leq |\mathbf{H}(\mathbf{D}_k)| \leq \mathbf{H}(\mathbf{D})$ , entonces el radio espectral puede acotarse (hecho 2.2.8)  $\rho(\mathbf{H}(\mathbf{D}_k)) \leq \rho(|\mathbf{H}(\mathbf{D}_k)|) \leq \rho(\mathbf{H}(\mathbf{D}))$ , y se obtiene

$$\lambda_{max}(\mathbf{H}(\mathbf{M}_k)) \leq \lambda_{max}(\mathbf{H}(\mathbf{A}_0)) + \rho(\mathbf{H}(\mathbf{D})) \quad (3.15)$$

Finalmente como  $\mathbf{H}(\mathbf{D}) \geq \mathbf{0}$ , puede utilizarse el teorema de Perron (hecho 2.2.9)  $\lambda_{max}(\mathbf{H}(\mathbf{D})) = \rho(\mathbf{H}(\mathbf{D}))$  para obtener la condición de estabilidad

$$\lambda_{max}(\mathbf{H}(\mathbf{M}_k)) \leq \lambda_{max}(\mathbf{H}(\mathbf{A}_0)) + \lambda_{max}(\mathbf{H}(\mathbf{D})) = \delta_4 < 0 \quad (3.16)$$

**Proposición 3.7.2.** – Este tercer refinamiento  $\delta_4$  es una mejor cota respecto del segundo refinamiento  $\delta_3$ , del primer refinamiento  $\delta_2$  y de la cota inicial  $\delta_1$ .

**Prueba:**

$$\lambda_{max}(\mathbf{H}(\mathbf{A}_0)) = \lambda_{max}(\mathbf{H}(\mathbf{L}) + \mathbf{H}(\mathbf{D})) \leq \lambda_{max}(\mathbf{H}(\mathbf{L})) + \lambda_{max}(\mathbf{H}(\mathbf{D})) \quad (3.17) \quad \textcircled{R}$$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

La desigualdad anterior se cumple por la característica de subaditividad del máximo valor característico de las matrices Hermíticas (lema 2.2.6); y sumando  $\lambda_{max}(\mathbf{H}(\mathbf{D}))$  en ambos lados de la desigualdad, se tiene finalmente:

$$\delta_4 = \lambda_{max}(\mathbf{H}(\mathbf{A}_0)) + \lambda_{max}(\mathbf{H}(\mathbf{D})) \leq \lambda_{max}(\mathbf{H}(\mathbf{L})) + \lambda_{max}(\mathbf{H}(\mathbf{P})) = \delta_3 \quad (3.18)$$

Por lo tanto  $\lambda_{max}(\mathbf{M}) \leq \lambda_{max}(\mathbf{H}(\mathbf{M})) \leq \delta_4 \leq \delta_3 \leq \delta_1$  y  $\lambda_{max}(\mathbf{M}) \leq \lambda_{max}(\mathbf{H}(\mathbf{M})) \leq \delta_4 \leq \delta_3 \leq \delta_2$

### 3.8.- Ejemplos numéricos

**Ejemplo 3.8.1.-** Sea  $M=[L,U]$  donde  $L$ ,  $U$ ,  $A_0$  y  $D$  son dados por:

$$L = \begin{bmatrix} -0.610 & -0.072 & 0.191 \\ -0.094 & -0.471 & 0.346 \\ -0.451 & -0.337 & -0.520 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} -0.488 & -0.011 & 0.317 \\ -0.052 & -0.395 & 0.384 \\ -0.424 & -0.223 & -0.353 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 0.121 & 0.060 & 0.126 \\ 0.042 & 0.076 & 0.037 \\ 0.027 & 0.114 & 0.166 \end{bmatrix}$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} -0.549 & -0.042 & 0.254 \\ -0.073 & -0.433 & 0.365 \\ -0.438 & -0.280 & -0.437 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0.060 & 0.030 & 0.063 \\ 0.021 & 0.038 & 0.018 \\ 0.013 & 0.057 & 0.083 \end{bmatrix}$$

evaluando la cota usando la prueba propuesta  $\delta_4 = -0.2048$ ,  $\delta_3 = -0.1202$ ,  $\delta_2 = 0.1123$ ,  $\delta_1 = 0.4161$  y  $\delta = -0.2068$ . La cota  $\delta$  se evalúa usando los valores característicos de las partes Hermíticas de todos los vértices del hipercubo.

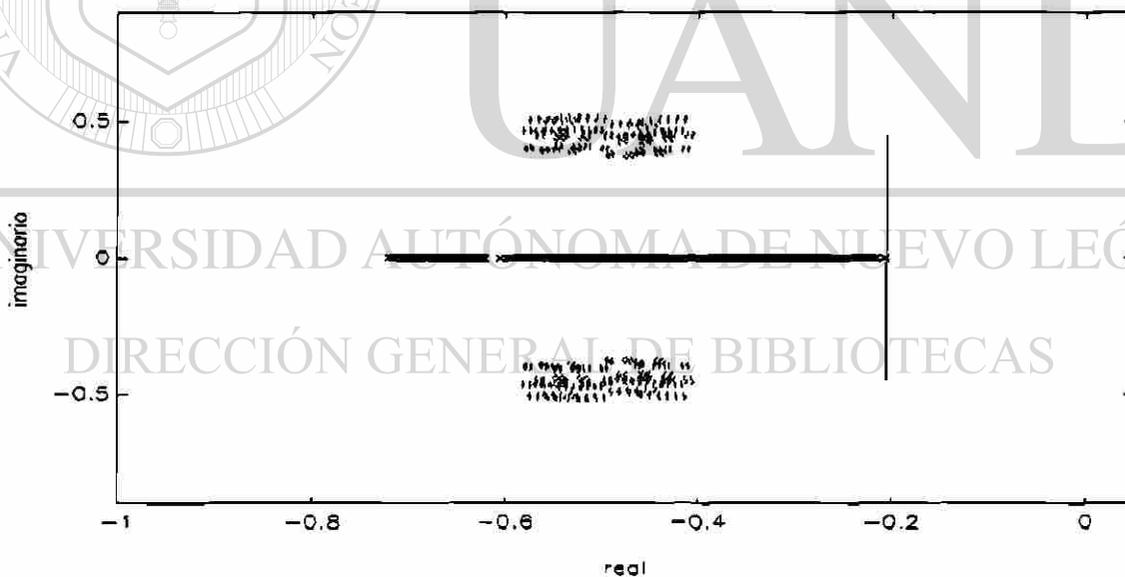


Figura 3.7 Espectro de la matriz intervalo del ejemplo 3.8.1

La figura 3.7 muestra: (·) Los valores característicos de todas las  $2^m$  matrices vértice más 500 matrices aleatorias, pertenecientes a la matriz intervalo, (x) los valores

característicos de la parte Hermítica de todos los vértices del hipercubo y la línea vertical  $(-)$  muestra la cota superior  $\delta_4$

**Ejemplo 3.8.2.**– Sea  $M=[U, L]$  donde  $U, L$  y  $P$  son dados por

$$L = \begin{bmatrix} -0.285 & -0.187 & -0.455 \\ 0.290 & -0.372 & -0.288 \\ 0.228 & 0.144 & -0.377 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} -0.169 & -0.063 & -0.439 \\ 0.308 & -0.234 & 0.142 \\ 0.410 & 0.327 & -0.368 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 0.114 & 0.124 & 0.016 \\ 0.017 & 0.137 & 0.171 \\ 0.182 & 0.182 & 0.009 \end{bmatrix}$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} -0.227 & -0.125 & -0.447 \\ 0.299 & -0.303 & 0.056 \\ 0.319 & 0.236 & -0.372 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0.057 & 0.062 & 0.008 \\ 0.008 & 0.068 & 0.085 \\ 0.091 & 0.091 & 0.004 \end{bmatrix}$$

evaluando la cota usando la prueba propuesta  $\delta_4=0.0005$ ,  $\delta_3=0.1179$ ,  $\delta_2=0.3391$ ,  $\delta_1=0.7690$  y  $\delta=-0.0050$ . La cota  $\delta$  se evalúa usando los valores característicos de las partes Hermíticas de todos los vértices del hipercubo.

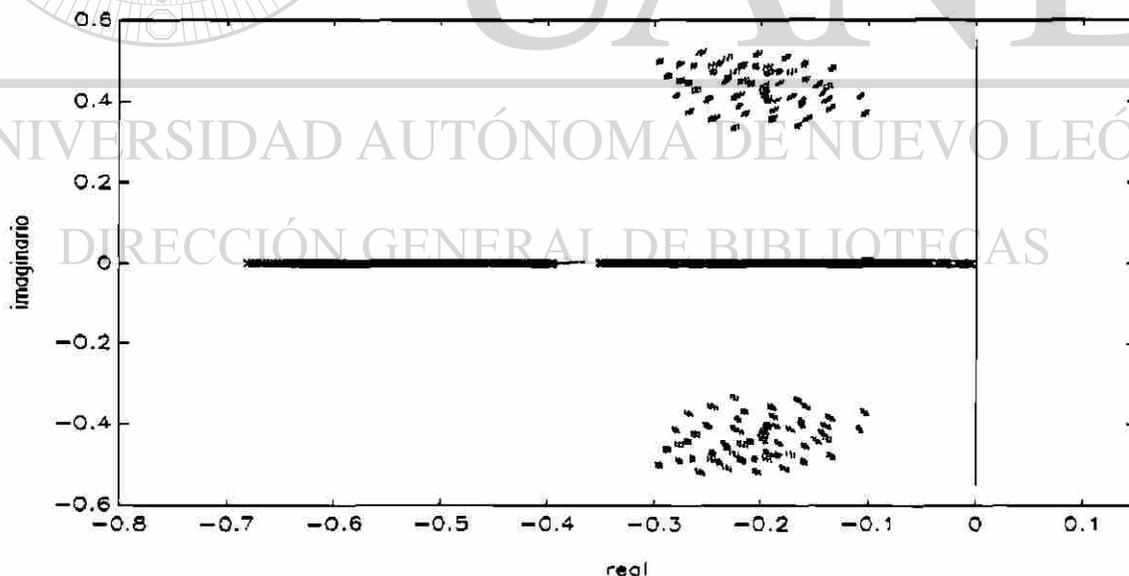


Figura 3.8 Espectro de la matriz intervalo del ejemplo 3.8.2

La figura 3.8 muestra: (·) Los valores característicos de todas las  $2^n$  matrices vértice más 500 matrices aleatorias, pertenecientes a la matriz intervalo, (x) los valores característicos de la parte Hermítica de todos los vértices del hipercubo y la línea vertical (-) muestra la cota superior  $\delta_4$

### 3.9.- Nueva cota para análisis de estabilidad de sistemas lineales continuos invariantes en el tiempo y con incertidumbre paramétrica.

Esta nueva cota para análisis de estabilidad de sistemas representados por matrices intervalo, es un refinamiento a la cota presentada en [31].

**Teorema 3.9.1.-** Sea la matriz intervalo  $M=[L,U]$  donde  $L$  y  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , entonces la matriz intervalo  $M=[L,U]$  es Hurwitz estable si:

$$\delta_s = \lambda_{\max}(Ms) < 0$$

$$\text{donde } Ms = \begin{cases} u_{ij} & \text{si } i=j \\ \max\{|l_{ij}|, |u_{ij}|\} & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (3.19)$$

**Prueba:** Considerando que  $\delta_s < 0$  y como  $M_{ij} \leq |M_{ij}| \leq Ms_{ij}$  para  $i \neq j$ , se puede encontrar una  $a > \max\{|l_{ii}|\} + \max\{|u_{ii}|\}$  tal que cumpla  $A = Ms + aI \geq |M + aI| \geq M + aI$  y aplicando el teorema de acotamiento del radio espectral (hecho 2.2.8) se tiene

$$\rho(M + aI) \leq \rho |M + aI| \leq \rho(A) = \rho(Ms + aI) \quad (3.20)$$

Como  $\theta \leq A$ , entonces por el teorema de Perron (hecho 2.2.9)  $\rho(A) = \lambda_{\max}(A)$  y como  $\text{Re}(\lambda_i(A)) \leq |\lambda_i(A)| \leq \rho(A)$  se tiene

$$\operatorname{Re}(\lambda_i(\mathbf{M}+a\mathbf{I})) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{A}) = \lambda_{\max}(\mathbf{M}\mathbf{s}+a\mathbf{I}) \quad (3.21)$$

Ahora porque  $\lambda_i(\mathbf{A}+a\mathbf{I}) = \lambda_i(\mathbf{A}) + a$  y  $\operatorname{Re}(\lambda_i(\mathbf{A}+a\mathbf{I})) = \operatorname{Re}(\lambda_i(\mathbf{A})) + a$  se tiene

$$\operatorname{Re}(\lambda_i(\mathbf{M})) + a \leq \lambda_{\max}(\mathbf{A}) = \lambda_{\max}(\mathbf{M}\mathbf{s}) + a \quad (3.22)$$

Y finalmente se obtiene la característica de estabilidad

$$\operatorname{Re}(\lambda_i(\mathbf{M})) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{M}\mathbf{s}) = \delta_5 < 0 \quad (3.23)$$

■

**Comentario 3.9.4.** – Esta nueva cota  $\delta_5$  se caracteriza por no hacer uso de las partes Hermíticas de las matrices que conforman la matriz intervalo. La cota  $\delta_5$  presenta características diferentes a las cotas anteriores  $\delta_1$ – $\delta_4$  y algunas veces es mejor que ellas.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

### 3.10. – Ejemplos numéricos

**Ejemplo 3.10.1.** – Sea  $\mathbf{M}=[\mathbf{L},\mathbf{U}]$  donde  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{U}$  son dados por

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -1.4293 & 0.4084 & -.2038 \\ 0.0166 & -0.8819 & 0.1207 \\ -0.1547 & 0.0764 & -1.1003 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} -0.5350 & 0.5626 & 0.0972 \\ 0.1862 & -0.5419 & 0.1275 \\ 0.3588 & 0.4759 & -0.7704 \end{bmatrix}$$

evaluando la cota usando la prueba propuesta  $\delta_5 = -0.0326$ ,  $\delta_4 = 0.1321$ ,  $\delta_3 = 0.3721$ ,  $\delta_2 = 1.8790$ ,  $\delta_1 = 2.7240$  y  $\delta = 0.0151$

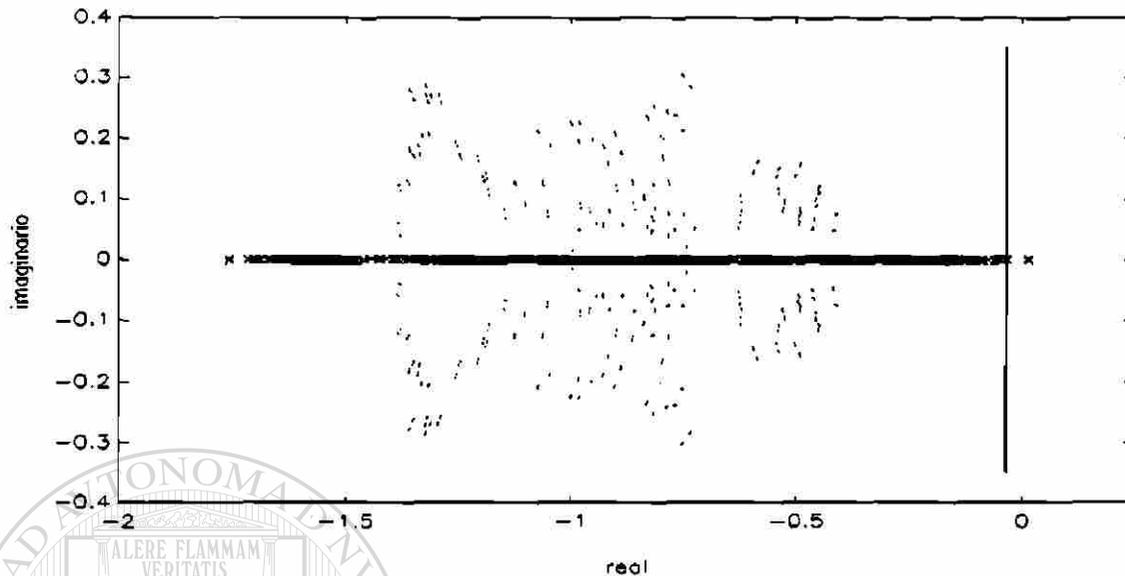


Figura 3.9 Espectro de la matriz intervalo del ejemplo 3.10.1

La figura 3.9 muestra: (·) Los valores característicos de todas las  $2^n$  matrices vértice más 500 matrices aleatorias pertenecientes a la matriz intervalo, (x) los valores característicos de la parte Hermítica de todos los vértices del hipercubo y la línea vertical (—) muestra la cota superior  $\delta_5$ .

## DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

**Ejemplo 3.10.2.-** Sea  $M=[L,U]$  donde  $L$  y  $U$  son dados por

$$L = \begin{bmatrix} -0.4619 & -0.0022 & 0.0100 \\ 0.3323 & -0.4236 & -0.4466 \\ 0.2226 & -0.0068 & -0.4427 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} -0.3974 & 0.0335 & 0.0207 \\ 0.3624 & -0.2300 & -0.3794 \\ 0.3474 & 0.0427 & -0.2978 \end{bmatrix}$$

evaluando la cota usando la prueba propuesta  $\delta_5 = -0.0440$ ,  $\delta_4 = -0.0140$ ,  $\delta_3 = 0.0578$ ,  $\delta_2 = 0.3828$ ,  $\delta_1 = 0.5693$  y  $\delta = -0.0153$ .

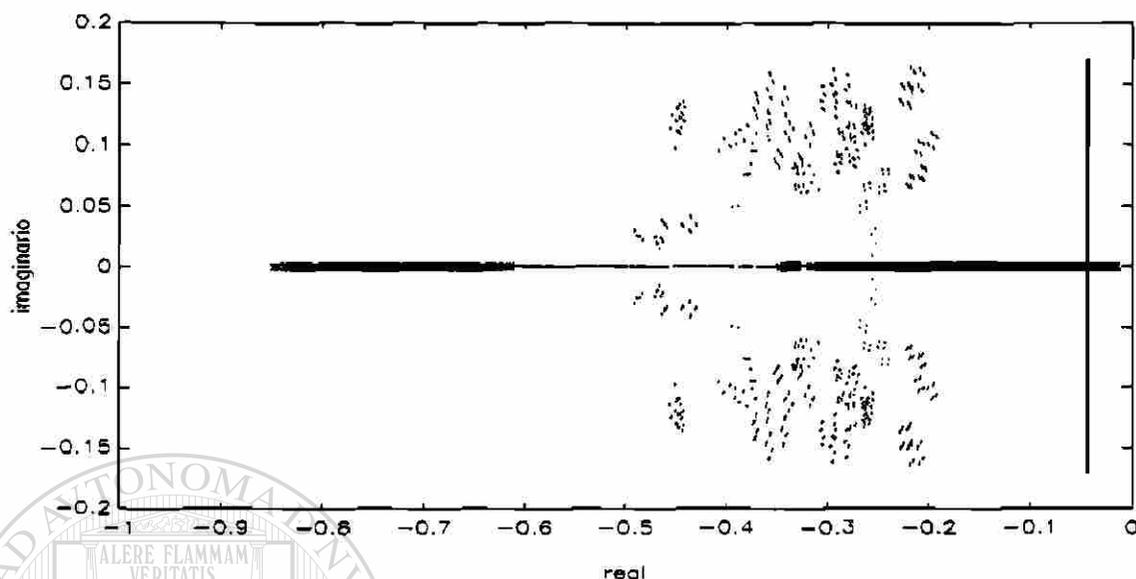


Figura 3.10 Espectro de la matriz intervalo del ejemplo 3.10.2

La figura 3.10 muestra: (·) Los valores característicos de todas las  $2^n$  matrices vértice más 500 matrices aleatorias pertenecientes a la matriz intervalo, (x) los valores característicos de la parte Hermítica de todos los vértices del hipercubo y la línea vertical (—) muestra la cota superior  $\delta_5$

## DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

**Comentario 3.10.3.**— En esta sección de análisis de estabilidad robusta de sistemas continuos invariantes en el tiempo se han realizado varios refinamientos a una cota inicial  $\delta_1$ , propuesta, obteniendo con esto una reducción cada vez mayor del conservatismo y un acercamiento a la cota dada en el análisis de las partes Hermíticas de las  $2^n$  matrices vértice pertenecientes a la matriz intervalo.

Es importante indicar que aunque  $\delta_4$  se acerca bastante al análisis de las partes

Hermíticas de las  $2^n$  matrices vértice se sigue incluyendo un conservatismo respecto de este análisis, además del conservatismo inherente a la prueba de analizar las partes Hermíticas de las matrices, que es arbitrario y puede tomar valores bastante grandes.

La última cota  $\delta_5$  tiene la característica de no usar la parte Hermítica de la matriz intervalo. Los ejemplos 3.8.1 y 3.8.2 son Hurwitz estable porque  $\delta < 0$  para ambos problemas como puede observarse en la figura 3.10 y 3.11, pero para el ejemplo 3.8.2  $\delta_4$  no asegura estabilidad. Los ejemplos 3.10.1 y 3.10.2 son ambos Hurwitz estables porque  $\delta_5 < 0$  para ambos problemas aunque para el ejemplo 3.10.1 tanto  $\delta$  como  $\delta_4 > 0$  no aseguran estabilidad.

**3.11.- Ejemplos comparativos.** - A continuación se dan dos ejemplos comparativos que muestran los diferentes refinamientos de las pruebas dadas en este capítulo.

**Ejemplo 3.11.1.-** Sea  $M=[L,U]$  donde  $L$  y  $U$  son dados por

$$L = \begin{bmatrix} -0.7654 & 0.4402 & -0.0071 \\ 0.2315 & -1.2451 & -0.2262 \\ 0.4733 & 0.4149 & -1.3025 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} -0.6613 & 0.6367 & 0.0402 \\ 0.4250 & -1.0955 & 0.3296 \\ 0.6361 & 0.4867 & -1.2501 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$P = \begin{bmatrix} .1041 & .1965 & .0473 \\ .1935 & .1496 & .1034 \\ .1628 & .0718 & .0524 \end{bmatrix} \quad A_0 = \begin{bmatrix} -0.7134 & 0.5385 & 0.0166 \\ 0.3283 & -1.1703 & 0.2779 \\ 0.5547 & 0.4508 & -1.2763 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} .0520 & .0983 & .0237 \\ .0967 & .0748 & .0517 \\ .0814 & .0359 & .0262 \end{bmatrix}$$

evaluando las cotas superiores usando la pruebas propuestas  $\delta_5 = -0.1416$ ,  $\delta_4 = -0.0732$ ,  $\delta_3 = -0.0620$ ,  $\delta_2 = 0.1482$ ,  $\delta_1 = 0.6966$  y  $\delta = -0.0808$

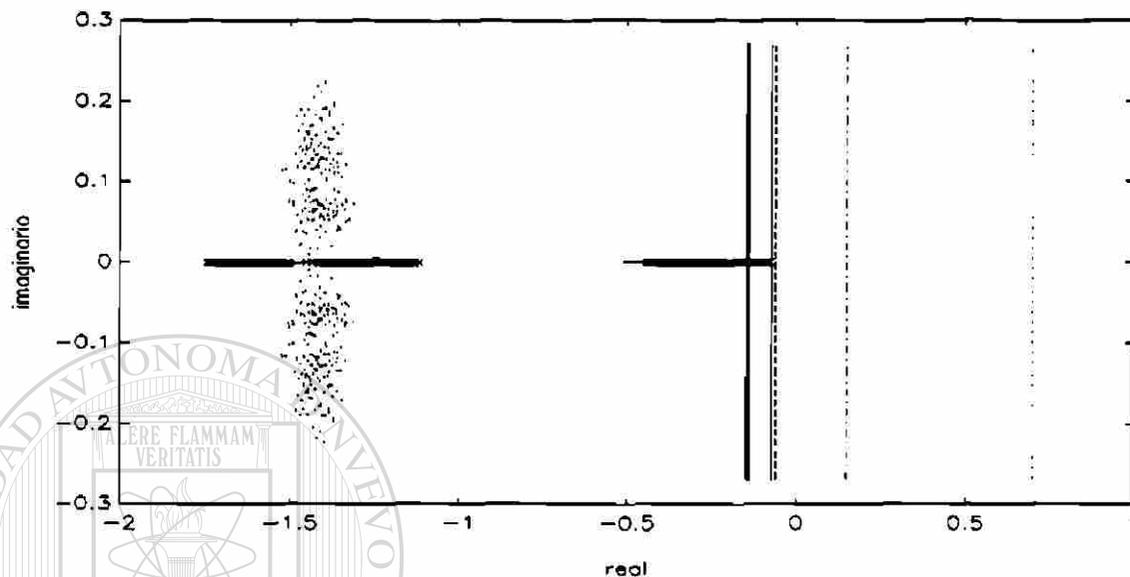


Figura 3.11 Espectro de la matriz intervalo del ejemplo 3.11.1

La figura 3.11 muestra: (·) Los valores característicos de todas las  $2^{n^2}$  matrices vértice más 500 matrices aleatorias, pertenecientes a la matriz intervalo, (x) los valores característicos de la parte Hermítica de todos los vértices del hipercubo.

La línea vertical gruesa (—) muestra la cota superior  $\delta_5$ , la línea vertical delgada (-) muestra la cota superior  $\delta_4$ , la línea vertical (----) muestra la cota superior  $\delta_3$ , la línea vertical (-.-.-) muestra la cota superior  $\delta_2$  y la línea vertical (....) muestra la cota superior  $\delta_1$

**Ejemplo 3.11.2.**– Sea  $M=[L,U]$  donde  $L, U$  son dados por

$$L = \begin{bmatrix} -1.0811 & 0.6624 & 0.4375 \\ 0.2418 & -0.5482 & 0.1295 \\ 0.0213 & 0.4726 & -1.1143 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} -0.9713 & 0.6862 & 0.6355 \\ 0.2695 & -0.5098 & 0.2669 \\ 0.2101 & 0.4729 & -1.0426 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$P = \begin{bmatrix} .1098 & .0238 & .1980 \\ .0277 & .0384 & .1374 \\ .1888 & .0003 & .0717 \end{bmatrix} \quad A_0 = \begin{bmatrix} -1.0262 & 0.6743 & 0.5365 \\ 0.2556 & -0.5290 & 0.1982 \\ 0.1157 & 0.4727 & -1.0784 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} .0549 & .0119 & .0990 \\ .0138 & .0192 & .0687 \\ .0944 & .0001 & .0358 \end{bmatrix}$$

evaluando las cotas superiores usando la pruebas propuestas  $\delta_3 = -0.0085$ ,  $\delta_4 = 0.1033$ ,  $\delta_5 = 0.1571$ ,  $\delta_6 = 0.4496$ ,  $\delta_7 = 0.7600$  y  $\delta_8 = 0.0579$

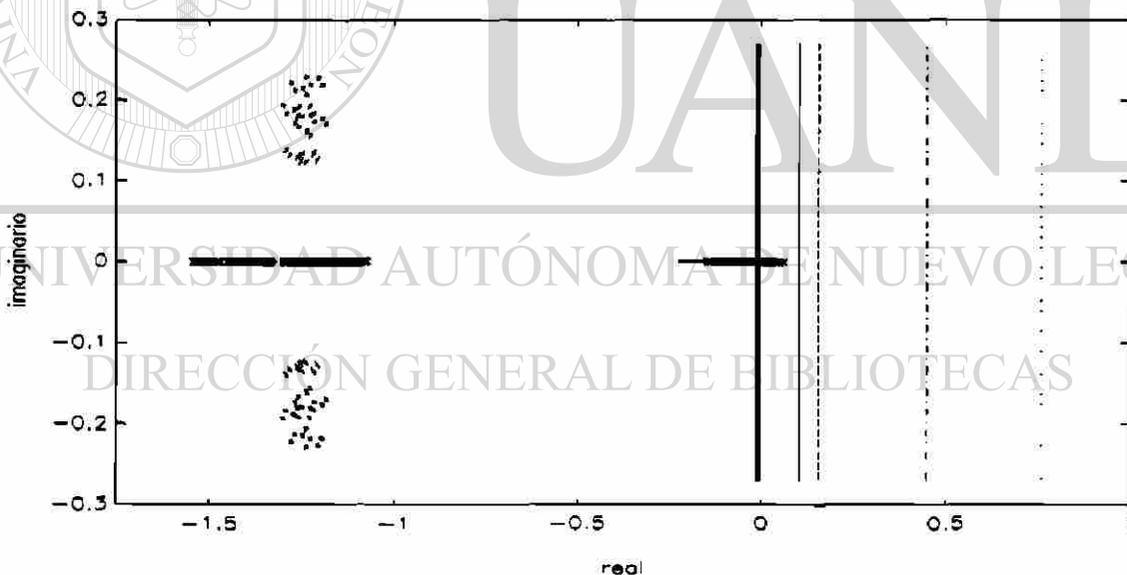


Figura 3.12 Espectro de la matriz intervalo del ejemplo 3.11.2

La figura 12 muestra: (·) Los valores característicos de todas las  $2^{n^2}$  matrices vértice más 500 matrices aleatorias, pertenecientes a la matriz intervalo, (x) los valores

característicos de la parte Hermítica de todos los vértices del hipercubo, la línea vertical gruesa (—) muestra la cota superior  $\delta_5$ , la línea vertical delgada (-) muestra la cota superior  $\delta_4$ , línea vertical (----) muestra la cota superior  $\delta_3$ , la línea vertical (-.-.-) muestra la cota superior  $\delta_2$  y la línea vertical (....) muestra la cota superior  $\delta_1$

**Comentario 3.11.3.** – En esta parte se presentan dos ejemplos comparativos que muestran las diferentes cotas y la reducción obtenida en las mismas. Puede observarse en la figura 3.11 y en la figura 3.12 que la cota  $\delta_4$  se acerca bastante al análisis de las partes Hermíticas de las  $2^n$  matrices vértice, usando las cotas  $\delta_1$  a  $\delta_4$  nada puede decirse acerca de la estabilidad o inestabilidad del sistema del problema 3.11.2, pero usando la cota  $\delta_5$  sí se asegura la estabilidad de los dos sistemas dados en los ejemplos comparativos.

**3.12. – Casos triviales.** – En este apartado se van a mostrar dos casos que son triviales y que cumplen condiciones de estabilidad necesarias y suficientes en algunas de las diferentes pruebas que se dan en esta disertación doctoral.

**Caso trivial 3.12.1.** – Si la dimensión de la matriz intervalo se colapsa a la unidad  $m=[l,u] \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ , entonces el sistema cumple condiciones necesarias y suficientes en las cuatro primeras pruebas de este capítulo.

$$\delta_1 = \lambda_{\max}(H(L)) + n \cdot \lambda_{\max}(H(P)) < 0 \quad (3.24)$$

$$\delta_2 = \lambda_{\max}(H(L)) + n \cdot p_{\max} < 0 \quad (3.25)$$

$$\delta_3 = \lambda_{\max}(H(L)) + \lambda_{\max}(H(P)) < 0 \quad (3.26)$$

$$\delta_4 = \lambda_{\max}(H(A_0)) + \lambda_{\max}(H(D)) < 0 \quad (3.27)$$

como  $n=1$ , entonces  $h(l)=l$ ,  $h(p)=p$ ,  $h(a_0)=\frac{1}{2}(u+l)=a_0$ ,  $h(d)=\frac{1}{2}(u-l)=d$  y  $p_{\max}=p$ , entonces  $\lambda_{\max}(h(l))=l$ ,  $\lambda_{\max}(h(p))=p$ ,  $\lambda_{\max}(h(a_0))=a_0$ ,  $\lambda_{\max}(h(d))=d$

$$\delta_1 = \lambda_{\max}(h(l)) + n \cdot \lambda_{\max}(h(p)) = 1 + 1 \cdot p = u < 0 \quad (3.28)$$

$$\delta_2 = \lambda_{\max}(h(l)) + n \cdot p_{\max} = 1 + 1 \cdot p = u < 0 \quad (3.29)$$

$$\delta_3 = \lambda_{\max}(h(l)) + \lambda_{\max}(h(p)) = 1 + p = u < 0 \quad (3.30)$$

$$\delta_4 = \lambda_{\max}(h(a_0)) + \lambda_{\max}(h(d)) = \frac{1}{2}(u+1) + \frac{1}{2}(u-1) = u < 0 \quad (3.31)$$

**Caso trivial 3.12.2.** – Sea la matriz intervalo  $M=[L,U]$  donde  $L$  y  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $u_{ij} \geq |l_{ij}|$ ,  $i, j=1,2,\dots,n$ . Una condición necesaria y suficiente para la estabilidad de la matriz intervalo  $M=[L,U]$  es que  $\delta_5 < 0$

**Prueba:**

**Suficiencia:** Se tiene de manera inmediata por el teorema 3.9.1

**Necesidad:** Si se considera que la matriz intervalo  $M=[L,U]$  es Hurwitz estable y como  $U$  pertenece a la matriz intervalo, entonces  $U$  es estable. Ahora por la definición de la matriz de prueba  $M_s$  se tiene:

$$M_s = \begin{cases} u_{ij} & \text{si } i=j \\ \max\{|l_{ij}|, |u_{ij}|\} & \text{si } i \neq j \end{cases} = \begin{cases} u_{ij} & \text{si } i=j \\ u_{ij} & \text{si } i \neq j \end{cases} = U \quad (3.32)$$

y como  $U$  es estable entonces  $M_s=U$  también es estable, por lo tanto

$$\delta_5 = \lambda_{\max}(M_s) < 0$$

■

**CAPITULO 4**

**ANALISIS DE ESTABILIDAD DE SISTEMAS LINEALES  
DISCRETOS, EN VARIABLES DE ESTADO, INVARIANTES AL  
CORRIMIENTO Y CON INCERTIDUMBRE PARAMETRICA**

**E**n los sistemas discretos, la incertidumbre paramétrica puede deberse tanto al truncamiento de los datos como al redondeo de los mismos. En la literatura de control existen resultados acerca de la estabilidad de sistemas discretos lineales, invariantes al corrimiento y con incertidumbre paramétrica y usan: Discos Geršgorin [21]; Normas matriciales [25],[28]; Teorema de Lyapunov [28]; Radio espectral [28],[53] y distancia de la matriz centroide a las matrices inestables [33], entre otros.

En este capítulo se demuestran los teoremas que generan las cotas, obtenidas en este trabajo, para el análisis de estabilidad de sistemas lineales discretos invariantes al corrimiento y representados por matrices intervalo.

**4.1.- Demostración de una cota superior para análisis de estabilidad robusta de sistemas discretos**

**Teorema 4.1.1.**– Sea la matriz intervalo  $M=[L,U]$  donde  $L$  y  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $P=(U-L)$ . La matriz intervalo  $M=[L,U]$  es Schur estable si

$$\phi_1 = \sqrt{\frac{[\max\{\lambda_{\max}(H(L)), \lambda_{\max}(-H(L))\} + \lambda_{\max}(H(P))]^2 + [\lambda_{\max}(j \cdot S(L)) + \lambda_{\max}(H(P))]^2}{\lambda_{\max}(H(P))}} < 1 \quad (4.1)$$

**Prueba:** La demostración de este teorema se omite porque  $\rho(M) \leq \phi_4 \leq \phi_1$ ,  $M \in [L,U]$  (como se demuestra posteriormente) y solamente va a ser demostrado el teorema que garantiza la cota  $\phi_4$  y que también garantiza la cota  $\phi_1$

**Comentario 4.1.2.**– Este primer análisis de estabilidad de sistemas discretos, propuesto

en este trabajo doctoral generalmente es más conservativo respecto de las siguientes pruebas  $\rho = \rho(\max\{|\mathbf{L}|, |\mathbf{U}|\}) < 1$  y  $\text{sig} = \sigma_{\max}(\mathbf{A}_0) + \sigma_{\max}(\mathbf{D}) < 1$ , sin embargo es la base de partida de diferentes refinamientos, donde algunos mejoran cualquiera de las pruebas mencionadas ( $\rho$ ,  $\text{sig}$ ).

#### 4.2.- Ejemplos numéricos

**Ejemplo 4.2.1.**– Sea la matriz intervalo  $\mathbf{M}=[\mathbf{L},\mathbf{U}]$ , donde  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{P}$  son dadas como sigue

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -0.31281 & 0.05218 & 0.09247 \\ -0.10695 & -0.11161 & -0.28199 \\ -0.21696 & -0.26934 & -0.13293 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} -0.08614 & 0.11100 & 0.09603 \\ -0.03963 & -0.05463 & -0.02931 \\ -0.07439 & -0.14254 & -0.04783 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.22667 & 0.05882 & 0.00356 \\ 0.06732 & 0.05698 & 0.25268 \\ 0.14257 & 0.12680 & 0.08510 \end{bmatrix}$$

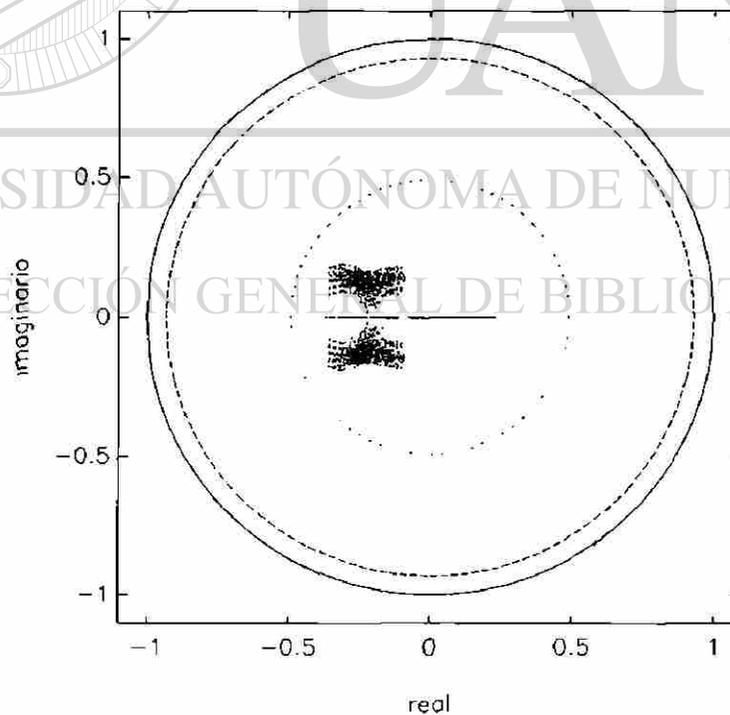


Figura 4.1 Espectro de la matriz intervalo del ejemplo 4.2.1

evaluando la cota superior  $\phi_1=0.93067$ ,  $ro=0.5437$ ,  $sig=0.4906$  y  $\phi=\min\{ro,sig\}=0.4906$ , por lo tanto la matriz  $M=[L,U]$  es Schur estable.

La figura 4.1 muestra: Los puntos ( $\cdot$ ) representan los valores característicos de los  $2^n$  matrices vértice más 500 matrices aleatorias, pertenecientes a la matriz intervalo  $M=[L,U]$ .

La línea continua representa el círculo unitario, la línea (----) representa la cota superior  $\phi_1$  y la línea (....) representa la cota superior  $\phi=\min\{ro,sig\}$

**Ejemplo 4.2.2.**– Sea la matriz intervalo  $M=[L,U]$ , donde  $L$ ,  $U$  y  $P$  son dados como sigue

$$L = \begin{bmatrix} -0.55618 & 0.19077 & -0.41485 \\ -0.29848 & -0.26798 & 0.11851 \\ 0.08625 & 0.07429 & -0.34942 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} -0.26242 & 0.21290 & -0.12185 \\ -0.14937 & -0.01011 & 0.17557 \\ 0.16568 & 0.14457 & -0.08701 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.29375 & 0.02212 & 0.29300 \\ 0.14911 & 0.25787 & 0.05705 \\ 0.07942 & 0.07027 & 0.26240 \end{bmatrix}$$

Evaluando la cota superior  $\phi_1=1.4417$ ,  $ro=0.8854$ ,  $sig=0.7957$  y  $\phi=\min\{ro,sig\}=0.7957$ , por lo tanto la matriz  $M=[L,U]$  es Schur estable porque  $\phi < 1$ , aunque  $\phi_1 > 1$  no garantiza la estabilidad del sistema.

La figura 4.2 muestra: Los puntos ( $\cdot$ ) representan los valores característicos de los  $2^n$  matrices vértice más 500 matrices aleatorias, pertenecientes a la matriz intervalo  $M=[L,U]$ .

La línea continua (–) representa el círculo unitario, la línea (----) representa la cota superior  $\phi_1$  y la línea (....) representa la cota superior  $\phi=\min\{ro,sig\}$

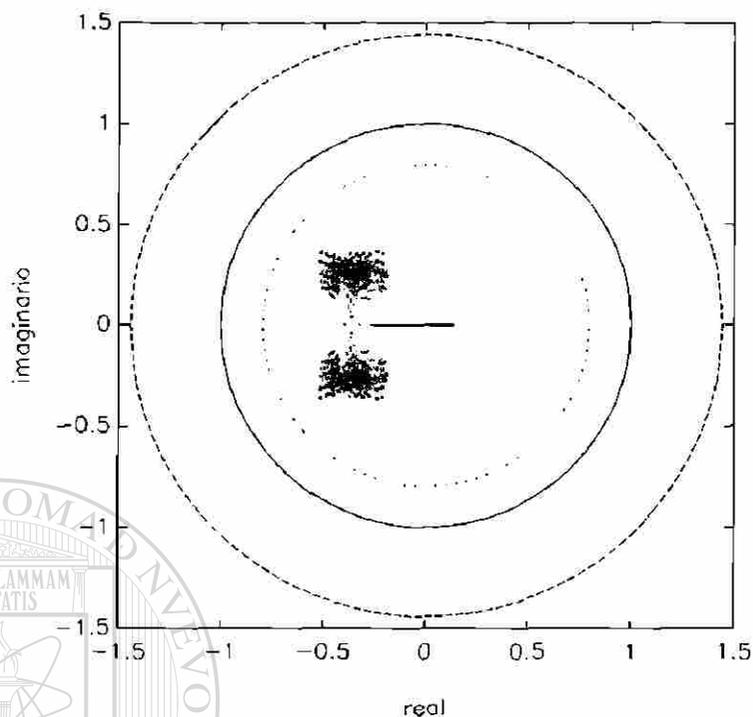


Figura 4.2 Espectro de la matriz intervalo del ejemplo 4.2.2

**Comentario 4.2.3.-** En esta parte se muestra la cota para análisis de estabilidad de sistemas discretos, invariantes en el tiempo y con incertidumbre paramétrica en la matriz  $A$ . Puede verse en los ejemplos anteriores que ambas matrices intervalo son estables puesto que  $\phi < 1$  en ambos casos, pero en el ejemplo 4.2.2  $\phi_1 > 1$  no garantiza la estabilidad del sistema como se muestra en la figura 14. Es importante mencionar que la cota  $\phi_1$  tiene mayor conservatismo que la cota  $\phi = \min\{\rho, \sigma\}$ .

#### 4.3.- Primer refinamiento a la cota inicial propuesta

**Teorema 4.3.1.-** Sea la matriz intervalo  $M=[L,U]$  donde  $L$  y  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A_0 = \frac{1}{2}(U+L)$  y  $D = \frac{1}{2}(U-L)$ . La matriz intervalo  $M=[L,U]$  es Schur estable si

$$\phi_2 = \sqrt{\frac{[\max\{\lambda_{\max}(H(A_0)), \lambda_{\max}(-H(A_0))\} + \lambda_{\max}(H(D))]^2 + [\lambda_{\max}(j \cdot S(A_0)) + \lambda_{\max}(H(D))]^2}{[\lambda_{\max}(j \cdot S(A_0)) + \lambda_{\max}(H(D))]^2}} < 1 \quad (4.2)$$

**Prueba:** La demostración de este teorema se omite porque  $\rho(M) \leq \phi_4 \leq \phi_2$ ,  $M \in [L, U]$  (como se demuestra posteriormente) y solamente va a ser demostrado el teorema que garantiza la cota  $\phi_4$  y que garantiza también la cota  $\phi_2$

■

**Proposición 4.3.2.-** Este primer refinamiento  $\phi_2$  es una mejor cota respecto de la cota inicial  $\phi_1$ .

**Prueba:** Considerando que  $A_0 = L + D$  y evaluando para la parte Hermítica

$$\begin{aligned} & \max\{\lambda_{\max}(H(A_0)), \lambda_{\max}(-H(A_0))\} + \lambda_{\max}(H(D)) = \\ & \max\{\lambda_{\max}(H(L) + H(D)), \lambda_{\max}(-H(L) - H(D))\} + \lambda_{\max}(H(D)) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Aplicando la característica de subaditividad del máximo valor característico de las matrices Hermíticas (lema 2.2.6), se tiene la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} & \max\{\lambda_{\max}(H(A_0)), \lambda_{\max}(-H(A_0))\} + \lambda_{\max}(H(D)) \leq \\ & \max\{\lambda_{\max}(H(L)) + \lambda_{\max}(H(D)), \lambda_{\max}(-H(L)) + \lambda_{\max}(-H(D))\} + \lambda_{\max}(H(D)) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Como  $H(D) \geq \theta$ , entonces  $\rho(H(D)) = \lambda_{\max}(H(D)) \geq \lambda_{\max}(-H(D))$ , por consiguiente

$$\begin{aligned} & \max\{\lambda_{\max}(H(A_0)), \lambda_{\max}(-H(A_0))\} + \lambda_{\max}(H(D)) \leq \\ & \max\{\lambda_{\max}(H(L)) + \lambda_{\max}(H(D)), \lambda_{\max}(-H(L)) + \lambda_{\max}(H(D))\} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Finalmente como ambas partes son positivas:

$$\begin{aligned} & [\max\{\lambda_{\max}(H(\mathbf{A}_0)), \lambda_{\max}(-H(\mathbf{A}_0))\} + \lambda_{\max}(H(\mathbf{D}))]^2 \leq \\ & [\max\{\lambda_{\max}(H(\mathbf{L})) + \lambda_{\max}(H(\mathbf{P})), \lambda_{\max}(-H(\mathbf{L}))\} + \lambda_{\max}(H(\mathbf{P}))]^2 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Analizando ahora la parte anti-Hermítica:

$$\lambda_{\max}(j \cdot S(\mathbf{A}_0)) + \lambda_{\max}(H(\mathbf{D})) = \lambda_{\max}(j \cdot S(\mathbf{L}) + j \cdot S(\mathbf{D})) + \lambda_{\max}(H(\mathbf{D})) \quad (4.7)$$

Aplicando la característica de subaditividad del máximo valor característico de las matrices Hermíticas (lema 2.2.6), se tiene

$$\lambda_{\max}(j \cdot S(\mathbf{A}_0)) + \lambda_{\max}(H(\mathbf{D})) \leq \lambda_{\max}(j \cdot S(\mathbf{L})) + \lambda_{\max}(j \cdot S(\mathbf{D})) + \lambda_{\max}(H(\mathbf{D})) \quad (4.8)$$

Ahora por la característica del radio espectral se tiene  $\lambda_{\max}(j \cdot S(\mathbf{D})) \leq \rho(j \cdot S(\mathbf{D})) = \rho(S(\mathbf{D}))$  y como  $S(\mathbf{D}) \leq |H(\mathbf{D})| \leq H(\mathbf{D})$  se tiene  $\rho(S(\mathbf{D})) \leq \rho(|H(\mathbf{D})|) \leq \rho(H(\mathbf{D}))$  (lema 2.2.8); por lo tanto

$$\lambda_{\max}(j \cdot S(\mathbf{A}_0)) + \lambda_{\max}(H(\mathbf{D})) \leq \lambda_{\max}(j \cdot S(\mathbf{L})) + \lambda_{\max}(H(\mathbf{P})) \quad (4.9)$$

Finalmente como ambas partes son positivas, se tiene

$$[\lambda_{\max}(j \cdot S(\mathbf{A}_0)) + \lambda_{\max}(H(\mathbf{D}))]^2 \leq [\lambda_{\max}(j \cdot S(\mathbf{L})) + \lambda_{\max}(H(\mathbf{P}))]^2 \quad (4.10)$$

Y la condición de desigualdad se obtiene sumando vectorialmente la parte real y la parte imaginaria:

$$\phi_2 = \sqrt{\frac{[\max\{\lambda_{\max}(H(\mathbf{A}_0)), \lambda_{\max}(-H(\mathbf{A}_0))\} + \lambda_{\max}(H(\mathbf{D}))]^2 + [\lambda_{\max}(j \cdot S(\mathbf{A}_0)) + \lambda_{\max}(H(\mathbf{D}))]^2}{[\lambda_{\max}(j \cdot S(\mathbf{L})) + \lambda_{\max}(H(\mathbf{P}))]^2}} \leq \quad (4.11)$$

$$\sqrt{\frac{[\max\{\lambda_{\max}(H(\mathbf{L})), \lambda_{\max}(-H(\mathbf{L}))\} + \lambda_{\max}(H(\mathbf{P}))]^2 + [\lambda_{\max}(j \cdot S(\mathbf{L})) + \lambda_{\max}(H(\mathbf{P}))]^2}{[\lambda_{\max}(j \cdot S(\mathbf{L})) + \lambda_{\max}(H(\mathbf{P}))]^2}} = \phi_1$$

■

#### 4.4.- Ejemplos numéricos

**Ejemplo 4.4.1.-** Sea la matriz intervalo  $M=[L,U]$ , donde  $L$  y  $U$  son dados como sigue

$$L = \begin{bmatrix} 0.10011 & -0.47424 & -0.53443 \\ -0.19398 & -0.33526 & 0.07141 \\ -0.27013 & 0.04897 & -0.51598 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0.29007 & -0.32380 & -0.06635 \\ -0.03548 & -0.19700 & 0.24276 \\ -0.17522 & 0.21406 & 0.05308 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0.19509 & -0.39902 & -0.30039 \\ -0.11473 & -0.26613 & 0.15709 \\ -0.22268 & 0.13151 & -0.23144 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0.09497 & 0.07521 & 0.23404 \\ 0.07924 & 0.06913 & 0.08567 \\ 0.04745 & 0.08254 & 0.28453 \end{bmatrix}$$

Evaluando la cota superior  $\phi_1=1.8269$ ,  $\phi_2=0.9999$ ,  $ro=1.0027$ ,  $sig=0.9642$  y  $\phi=\min\{ro,sig\}=0.9642$

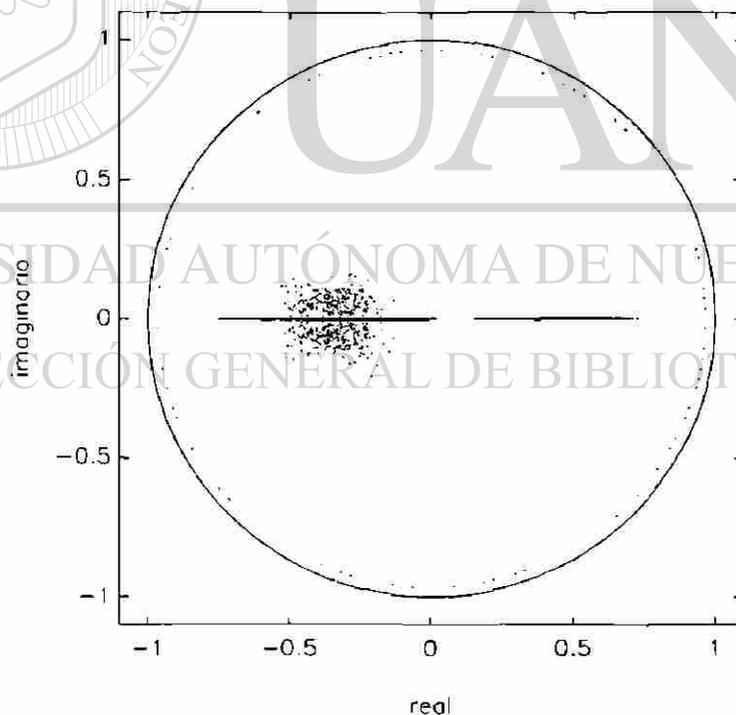


Figura 4.3 Espectro de la matriz intervalo del ejemplo 4.4.1

La figura 4.3 muestra: Los puntos ( $\cdot$ ) representan los valores característicos de los  $2^n$  matrices vértice más 500 matrices aleatorias, pertenecientes a la matriz intervalo  $M=[L,U]$ .

La línea continua (-) representa el círculo unitario, la línea (-·-) representa la cota superior  $\phi_2$  y la línea (···) representa la cota  $\phi = \min\{ro, sig\}$ .

**Nota:** En la figura 4.3 la cota  $\phi_2$  se traslapa con el círculo unitario.

**Ejemplo 4.4.2.-** Sea la matriz intervalo  $M=[L,U]$ , donde  $L$  y  $U$  son dados como sigue

$$L = \begin{bmatrix} 0.09434 & -0.46497 & 0.15605 \\ -0.50876 & -0.49225 & -0.17397 \\ -0.10575 & -0.28652 & -0.37167 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0.29626 & -0.18511 & 0.31893 \\ -0.21790 & -0.11950 & -0.05152 \\ 0.15159 & 0.04569 & -0.22997 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0.19530 & -0.32504 & 0.23749 \\ -0.36333 & -0.30587 & -0.11275 \\ 0.02292 & -0.12041 & -0.30082 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0.10096 & 0.13992 & 0.08144 \\ 0.14542 & 0.18637 & 0.06122 \\ 0.12867 & 0.16611 & 0.07084 \end{bmatrix}$$

Evaluando la cota superior  $\phi_1=1.8188$ ,  $\phi_2=0.9899$ ,  $ro=1.0486$ ,  $sig=0.8941$  y  $\phi = \min\{ro, sig\} = 0.8941$

La figura 4.4 muestra: Los puntos ( $\cdot$ ) representan los valores característicos de los  $2^n$  matrices vértice más 500 matrices aleatorias, pertenecientes a la matriz intervalo  $M=[L,U]$ .

La línea continua (-) representa el círculo unitario, la línea (-·-) representa la cota superior  $\phi_2$  y la línea (···) representa la cota superior  $\phi = \min\{ro, sig\}$

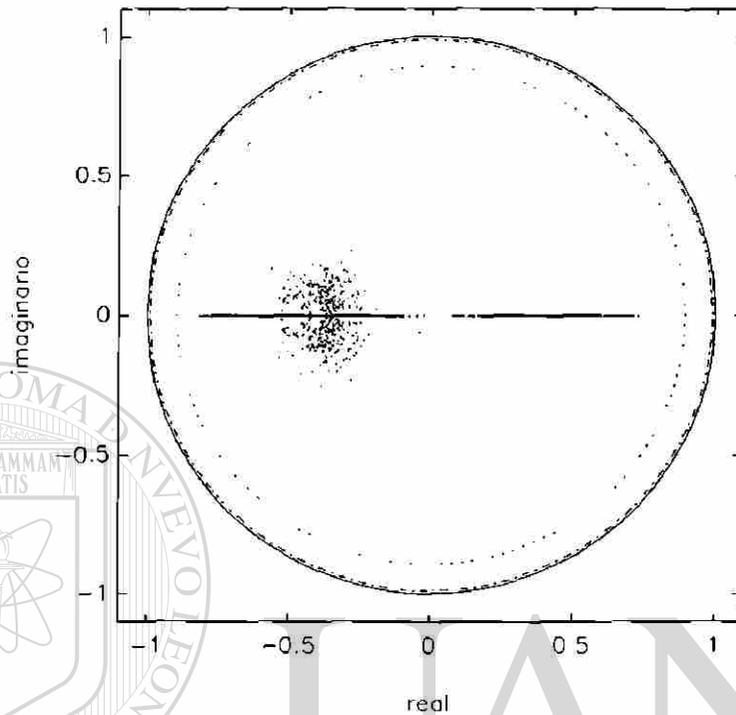


Figura 4.4 Espectro de la matriz intervalo del ejemplo 4.4.2

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN<sup>®</sup>  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

**Comentario 4.4.3.-** En esta parte se muestra el primer refinamiento a la cota para análisis de estabilidad de sistemas discretos y puede verse en los ejemplos anteriores que ambas matrices intervalo son estables puesto que  $\phi_2 < 1$  en ambos casos, como se muestra en la figura 4.3 y figura 4.4, sin embargo el conservatismo de la cota  $\phi_2$  aún se mantiene mayor que el de  $\phi = \min\{\rho, \sigma\}$ .

#### 4.5.- Segundo refinamiento a la cota inicial propuesta

Este segundo refinamiento para análisis de estabilidad de sistemas discretos representados por matrices intervalo ha sido aceptado para ser presentado en el European Control Conference ECC '95 en Roma Italia.

**Teorema 4.5.1.**– Sea la matriz intervalo  $\mathbf{M}=[\mathbf{L},\mathbf{U}]$  donde  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , y  $\mathbf{A}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{U} + \mathbf{L})$  y  $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{U} - \mathbf{L})$ . La matriz intervalo  $\mathbf{M}=[\mathbf{L},\mathbf{U}]$  es Schur estable si

$$\phi_3 = \sqrt{\frac{[\max\{\lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{A}_0)), \lambda_{\max}(-\mathbf{H}(\mathbf{A}_0))\} + \lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{D}))]^2 + [\lambda_{\max}(j \cdot \mathbf{S}(\mathbf{A}_0)) + \lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{D}) \circ (\mathbf{UNOS}(n) - \mathbf{I}))]^2}{\lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{A}_0)) + \lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{D}))}} < 1 \quad (4.12)$$

**Prueba:** La demostración de este teorema se omite porque  $\rho(\mathbf{M}) \leq \phi_4 \leq \phi_3$ ,  $\mathbf{M} \in [\mathbf{L},\mathbf{U}]$  (como se demuestra posteriormente) y solamente va a ser demostrado el teorema que garantiza la cota  $\phi_4$  y garantiza también la cota  $\phi_3$ . ■

**Proposición 4.5.2.**– Este segundo refinamiento  $\phi_3$  es una mejor cota respecto del primer refinamiento  $\phi_2$  y de la cota inicial  $\phi_1$  y su demostración se da a continuación.

Ya que las partes Hermíticas son idénticas en ambas pruebas, solamente se prueba la desigualdad entre las partes anti-Hermíticas.

Como  $\mathbf{H}(\mathbf{D}) \circ (\mathbf{UNOS}(n) - \mathbf{I}) \preceq \mathbf{H}(\mathbf{D})$ , entonces  $\rho(\mathbf{H}(\mathbf{D}) \circ (\mathbf{UNOS}(n) - \mathbf{I})) \leq \rho(\mathbf{H}(\mathbf{D}))$  por el lema 2.2.8, y como ambas matrices tienen elementos positivos, aplicando el teorema de Perron (lema 2.2.9), se obtiene  $\lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{D}) \circ (\mathbf{UNOS}(n) - \mathbf{I})) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{D}))$ .

Por consiguiente:

$$\lambda_{\max}(j \cdot \mathbf{S}(\mathbf{A}_0)) + \lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{D}) \circ (\mathbf{UNOS}(n) - \mathbf{I})) \leq \lambda_{\max}(j \cdot \mathbf{S}(\mathbf{A}_0)) + \lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{D})) \quad (4.13)$$

y

$$[\lambda_{\max}(j \cdot S(A_0)) + \lambda_{\max}(H(D) \circ (\text{UNOS}(n) - I))]^2 \leq [\lambda_{\max}(j \cdot S(A_0)) + \lambda_{\max}(H(D))]^2 \quad (4.14)$$

Finalmente la condición de desigualdad es:

$$\phi_3 = \frac{\sqrt{[\max\{\lambda_{\max}(H(A_0)), \lambda_{\max}(-H(A_0))\} + \lambda_{\max}(H(D))]^2 + [\lambda_{\max}(j \cdot S(A_0)) + \lambda_{\max}(H(D) \circ (\text{UNOS}(n) - I))]^2}}{\sqrt{[\lambda_{\max}(j \cdot S(A_0)) + \lambda_{\max}(H(D))]^2}} \leq \quad (4.15)$$

$$\frac{\sqrt{[\max\{\lambda_{\max}(H(A_0)), \lambda_{\max}(-H(A_0))\} + \lambda_{\max}(H(D))]^2 + [\lambda_{\max}(j \cdot S(A_0)) + \lambda_{\max}(H(D))]^2}}{\sqrt{[\lambda_{\max}(j \cdot S(A_0)) + \lambda_{\max}(H(D))]^2}} = \phi_2 \leq \phi_1$$

#### 4.6.- Ejemplos numéricos

**Ejemplo 4.6.1.** – Sea la matriz intervalo  $M=[L,U]$ , donde  $L$  y  $U$  son dados como sigue

$$L = \begin{bmatrix} -0.39265 & -0.17799 & 0.08037 \\ -0.00270 & -0.06482 & -0.47470 \\ 0.03375 & 0.05995 & -0.35687 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0.48606 & -0.16987 & 0.34717 \\ 0.26681 & 0.53507 & 0.07262 \\ 0.36840 & 0.16254 & 0.01475 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0.04670 & -0.17393 & 0.21377 \\ 0.13205 & 0.23512 & -0.20104 \\ 0.20108 & 0.11125 & -0.17106 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0.43935 & 0.00405 & 0.13339 \\ 0.13475 & 0.29995 & 0.27366 \\ 0.16732 & 0.05129 & 0.18581 \end{bmatrix}$$

Evaluando las cotas superiores  $\phi_1=2.1700$ ,  $\phi_2=1.1851$ ,  $\phi_3=0.9982$ ,  $ro=1.0331$ ,  $sig=1.0828$  y  $\phi = \min\{ro, sig\}=1.0331$ , por lo tanto la matriz intervalo es estable.

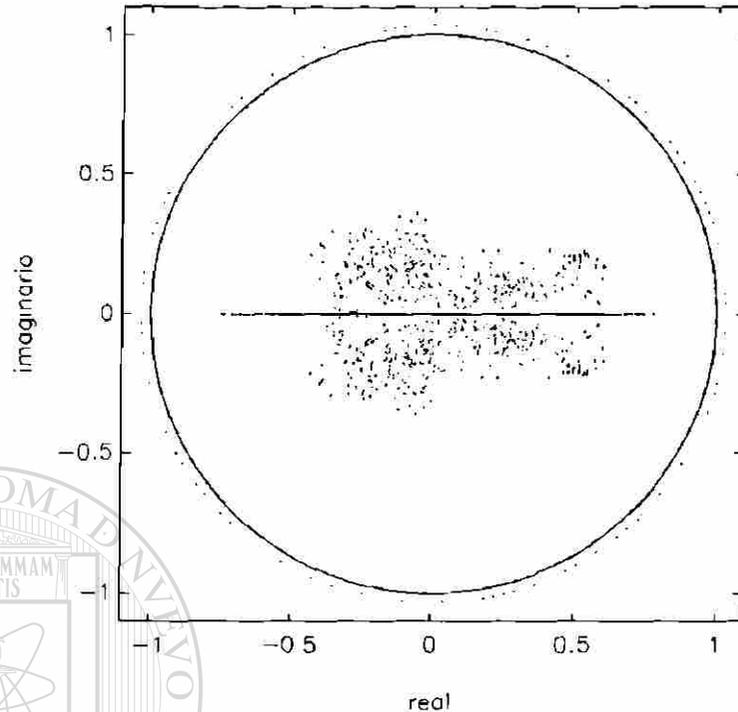


Figura 4.5 Espectro de la matriz intervalo del ejemplo 4.6.1

La figura 4.5 muestra: Los puntos (·) representan los valores característicos de los  $2^m$  matrices vértice más 500 matrices aleatorias, pertenecientes a la matriz intervalo  $M=[L,U]$ .

La línea continua (—) representa el círculo unitario, la línea (---) representa la cota superior  $\phi_3$  y la línea (···) representa la cota superior  $\phi = \min\{ro, sig\}$ .

**Nota:** En la figura 4.5 la cota  $\phi_3$  se traslapa con el círculo unitario.

**Ejemplo 4.6.2.**— Sea la matriz intervalo  $M=[L,U]$ , donde  $L$  y  $U$  son dados como sigue

$$L = \begin{bmatrix} -0.50060 & -0.33613 & 0.17015 \\ 0.04942 & -0.43136 & -0.22695 \\ -0.35930 & 0.09251 & -0.20733 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0.28448 & 0.15817 & 0.27813 \\ 0.32815 & 0.09374 & -0.10516 \\ -0.04480 & 0.22711 & 0.35628 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$A_0 = \begin{bmatrix} -0.10805 & -0.08897 & 0.22414 \\ 0.18878 & -0.16881 & -0.16606 \\ -0.20205 & 0.15981 & 0.07447 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0.39254 & 0.24715 & 0.05399 \\ 0.13936 & 0.26255 & 0.06089 \\ 0.15724 & 0.06729 & 0.28180 \end{bmatrix}$$

Evaluando las cotas superiores  $\phi_1=2.3672$ ,  $\phi_2=1.1784$ ,  $\phi_3=0.9555$ ,  $ro=1.0251$ ,  $sig=1.0118$  y  $\phi=\min\{ro,sig\}=1.0118$ , la matriz intervalo es estable

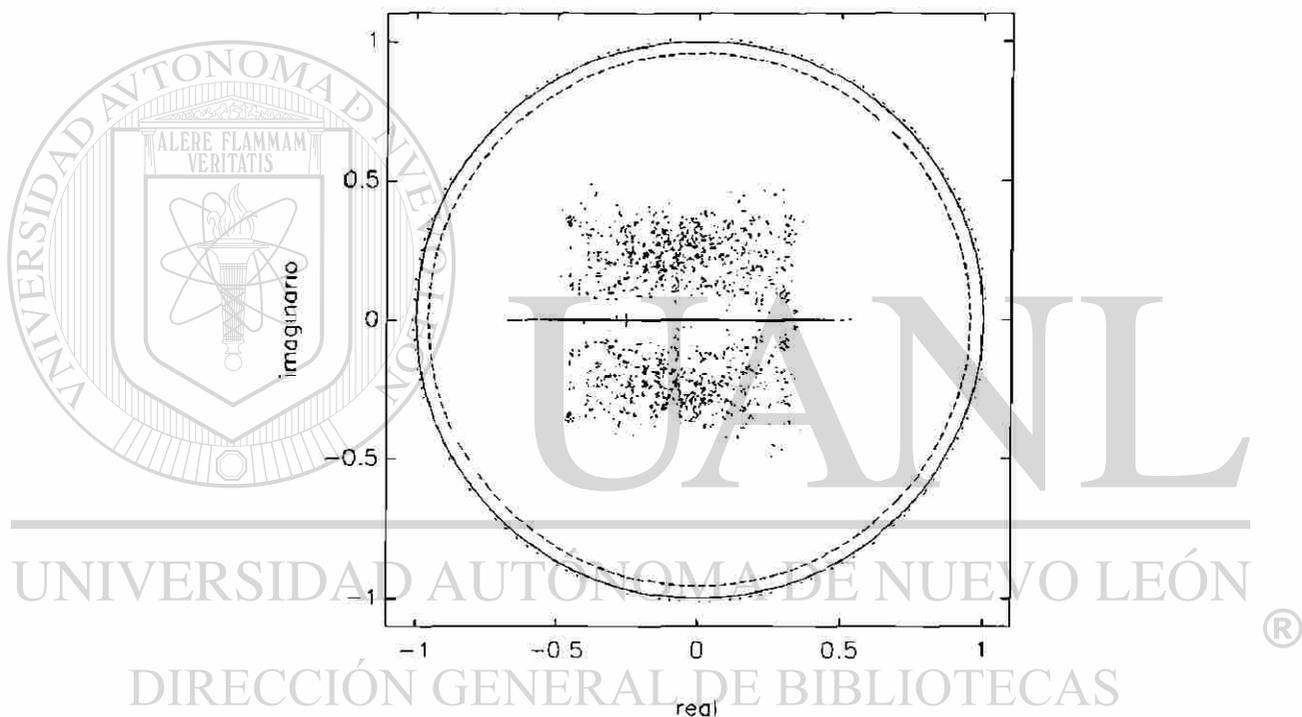


Figura 4.6 Espectro de la matriz intervalo del ejemplo 4.6.2

La figura 4.6

muestra: Los puntos (·) representan los valores característicos de los  $2^n$  matrices vértice más 500 matrices aleatorias, pertenecientes a la matriz intervalo  $M=[L,U]$ .

La línea continua (-) representa el círculo unitario, la línea (----) representa la cota superior  $\phi_3$  y la línea (-·-·) representa la cota superior  $\phi=\min\{ro,sig\}$

**Comentario 4.6.3.-** En esta parte se muestra el segundo refinamiento a la cota para análisis de estabilidad de sistemas discretos y puede verse en los ejemplos anteriores que ambas matrices intervalo son estables puesto que  $\phi_3 < 1$  en ambos casos –figura 4.5 y figura 4.6–, sin embargo la cota  $\phi = \min\{\rho, \sigma\} > 1$  no asegura estabilidad de ambos ejemplos.

#### 4.7.- Tercer refinamiento a la cota inicial propuesta

Este tercer refinamiento para análisis de estabilidad de sistemas discretos representados por matrices intervalo ha sido aceptado para ser presentado en el European Control Conference ECC '95 en Roma Italia.

**Teorema 4.7.1.-** Sea la matriz intervalo  $M=[L,U]$  donde  $L$  y  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , donde  $A_0 = \frac{1}{2}(U+L)$  y  $D = \frac{1}{2}(U-L)$ . La matriz intervalo  $M=[L,U]$  es Schur estable si

$$\phi_4 = \sqrt{\frac{[\max\{\lambda_{\max}(H(A_0)), \lambda_{\max}(-H(A_0))\} + \lambda_{\max}(H(D))]^2 + [\lambda_{\max}(j \cdot S(A_0)) + \lambda_{\max}(j \cdot H(D) \circ (\text{TRISUP} - \text{TRIINF}))]^2}{}}{}} < 1 \quad (4.16)$$

**Prueba:** La prueba se realiza en tres pasos.

Suponga  $\phi_4 < 1$  y aplicando el corolario 2.1.4, la matriz intervalo puede expresarse, como

$$M_k = A_0 + D_k \quad \forall k=0,1,\dots,(2^{n^2}-1) \quad (4.17)$$

**paso 1 (máxima parte real)** Analizando la parte Hermítica de los  $2^{n^2}$  matrices vértice pertenecientes a la matriz intervalo se tiene

$$H(M_k) = H(A_0) + H(D_k) \quad (4.18)$$

Evaluando el máximo valor característico de la ecuación 4.18

$$\lambda_{max}(H(\mathbf{M}_k)) = \lambda_{max}(H(\mathbf{A}_0) + H(\mathbf{D}_k)) \quad (4.19)$$

Aplicando la característica de subaditividad del máximo valor característico de las matrices Hermíticas (lema 2.2.6)

$$\lambda_{max}(H(\mathbf{M}_k)) \leq \lambda_{max}(H(\mathbf{A}_0)) + \lambda_{max}(H(\mathbf{D}_k)) \quad (4.20)$$

Como  $H(\mathbf{D}_k) \succeq \theta$ , entonces por el teorema de Perron (lema 2.2.9)  $\rho(H(\mathbf{D}_k)) = \lambda_{max}(H(\mathbf{D}_k))$

$$\lambda_{max}(H(\mathbf{M}_k)) \leq \lambda_{max}(H(\mathbf{A}_0)) + \rho(H(\mathbf{D}_k)) \quad (4.21)$$

Como  $H(\mathbf{D}_k) \preceq |H(\mathbf{D}_k)| \preceq H(\mathbf{D})$ , aplicando el lema 2.2.8  $\rho(H(\mathbf{D}_k)) \leq \rho(|H(\mathbf{D}_k)|) \leq \rho(H(\mathbf{D}))$

$$\lambda_{max}(H(\mathbf{M}_k)) \leq \lambda_{max}(H(\mathbf{A}_0)) + \rho(H(\mathbf{D})) \quad (4.22)$$

Sustituyendo, por el teorema de Perron 2.2.9,  $\lambda_{max}(H(\mathbf{D}))$  en lugar de  $\rho(H(\mathbf{D}))$ , finalmente se obtiene la primer cota (máxima cota real).

$$\lambda_{max}(H(\mathbf{M}_k)) \leq \lambda_{max}(H(\mathbf{A}_0)) + \lambda_{max}(H(\mathbf{D})) \quad \forall k=0,1,\dots,(2^n-1) \quad (4.23)$$

**paso 2 (mínima cota real)** Analizando la parte Hermítica de los  $2^n$  matrices vértice pertenecientes a la matriz intervalo se tiene

$$\lambda_{min}(H(\mathbf{M}_k)) = \lambda_{min}(H(\mathbf{A}_0) + H(\mathbf{D}_k)) \quad (4.24)$$

Teniendo en cuenta la característica de acotamiento del mínimo valor característico de las matrices Hermíticas (lema 2.2.6):

$$\lambda_{\min}(H(A_0)) + \lambda_{\min}(H(D_k)) \leq \lambda_{\min}(H(M_k)) \quad (4.25)$$

pero  $\lambda_{\min}(A) = -\lambda_{\max}(-A)$  entonces se obtiene

$$-\lambda_{\max}(-H(A_0)) - \lambda_{\max}(-H(D_k)) \leq \lambda_{\min}(H(M_k)) \quad (4.26)$$

Como  $\lambda_{\max}(-H(D_k)) \leq \rho(-H(D_k))$ , esto es los valores característicos están acotados siempre por el radio espectral (lema 2.2.7), entonces  $-\rho(-H(D_k)) \leq -\lambda_{\max}(-H(D_k))$

$$-\lambda_{\max}(-H(A_0)) - \rho(-H(D_k)) \leq \lambda_{\min}(H(M_k)) \quad (4.27)$$

Ahora bien, se sabe que  $-H(D_k) \preceq |H(D_k)| \preceq H(D)$ , entonces por el lema 2.2.8 se obtiene  $\rho(-H(D_k)) \leq \rho(H(D))$  y  $-\rho(H(D)) \leq -\rho(-H(D_k))$

$$-\lambda_{\max}(-H(A_0)) - \rho(H(D)) \leq \lambda_{\min}(H(M_k)) \quad (4.28)$$

Sustituyendo  $\lambda_{\max}(H(D))$  en lugar de  $\rho(H(D))$  (teorema de Perron 2.2.9), se tiene finalmente la segunda cota (mínima cota real).

$$-(\lambda_{\max}(-H(A_0)) + \lambda_{\max}(H(D))) \leq \lambda_{\min}(H(M_k)) \quad \forall k=0,1,\dots,(2^{n^2}-1) \quad (4.29)$$

**paso 3 (máxima cota imaginaria)** Analizando la parte anti-Hermítica de los  $2^{n^2}$  matrices vértice pertenecientes a la matriz intervalo y como la matriz intervalo tiene elementos reales, entonces la mínima cota imaginaria coincide con el negativo de la máxima cota imaginaria

$$-\lambda_{\min}(S(\mathbf{M}_k)) = \lambda_{\max}(S(\mathbf{M}_k)) = \lambda_{\max}(S(\mathbf{A}_0) + S(\mathbf{D}_k)) \quad (4.30)$$

éstas son matrices anti-Hermíticas. Pero si  $\mathbf{A}$  es anti-Hermítica, entonces  $j\mathbf{A}$  es Hermítica y por lo tanto

$$\lambda_{\max}(j\cdot S(\mathbf{M}_k)) = \lambda_{\max}(j\cdot S(\mathbf{A}_0) + j\cdot S(\mathbf{D}_k)) \quad (4.31)$$

Utilizando la característica de subaditividad del máximo valor característico de las matrices Hermíticas (lema 2.2.6):

$$\lambda_{\max}(j\cdot S(\mathbf{M}_k)) \leq \lambda_{\max}(j\cdot S(\mathbf{A}_0)) + \lambda_{\max}(j\cdot S(\mathbf{D}_k)) \quad (4.32)$$

Como los valores característicos  $\lambda_i(\mathbf{A})$  siempre están acotados por el radio espectral  $\rho(\mathbf{A})$  lema 2.2.7

$$\lambda_{\max}(j\cdot S(\mathbf{M}_k)) \leq \lambda_{\max}(j\cdot S(\mathbf{A}_0)) + \rho(j\cdot S(\mathbf{D}_k)) \quad (4.33)$$

En virtud de que  $|S(\mathbf{D}_k)| \leq H(\mathbf{D}) \circ (\text{TRISUP-TRIINF})$ , por el lema 2.2.8 se tiene  $\rho(S(\mathbf{D}_k)) \leq \rho(H(\mathbf{D}) \circ (\text{TRISUP-TRIINF}))$  y  $\rho(j\cdot S(\mathbf{D}_k)) \leq \rho(j\cdot H(\mathbf{D}) \circ (\text{TRISUP-TRIINF}))$  y como  $\rho(\mathbf{A}) = \rho(j\cdot \mathbf{A})$ , sustituyendo

$$\lambda_{\max}(j\cdot S(\mathbf{M}_k)) \leq \lambda_{\max}(j\cdot S(\mathbf{A}_0)) + \rho(j\cdot H(\mathbf{D}) \circ (\text{TRISUP-TRIINF})) \quad (4.34)$$

Sustituyendo ahora  $\lambda_{\max}(j\cdot H(\mathbf{D}) \circ (\text{TRISUP-TRIINF}))$  en lugar de  $\rho(j\cdot H(\mathbf{D}) \circ (\text{TRISUP-TRIINF}))$  ya que toda matriz anti-Hermítica con elementos imaginarios es Hermítica. Por otra parte observando que el radio espectral coincide con el máximo valor característico y con el negativo del mínimo valor característico, se tiene:

$$\lambda_{\max}(j\cdot S(\mathbf{M}_k)) \leq \lambda_{\max}(j\cdot S(\mathbf{A}_0)) + \lambda_{\max}(j\cdot H(\mathbf{D}) \circ (\text{TRISUP-TRIINF}))$$

la cual es la tercer cota (máxima cota imaginaria).

Finalmente la condición de estabilidad se obtiene sumando vectorialmente la parte real y la parte imaginaria:

$$\phi_4 = \sqrt{\frac{[\max\{\lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{A}_0)), \lambda_{\max}(-\mathbf{H}(\mathbf{A}_0))\} + \lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{D}))]^2 + [\lambda_{\max}(j \cdot \mathbf{S}(\mathbf{A}_0)) + \lambda_{\max}(j \cdot \mathbf{H}(\mathbf{D}) \circ (\mathbf{TRISUP} - \mathbf{TRIINF}))]^2}{[\lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{A}_0)) + \lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{D}))]^2 + [\lambda_{\max}(j \cdot \mathbf{S}(\mathbf{A}_0)) + \lambda_{\max}(j \cdot \mathbf{H}(\mathbf{D}) \circ (\mathbf{TRISUP} - \mathbf{TRIINF}))]^2}} < 1 \quad (4.35)$$

**Proposición 4.7.2.** – Este tercer refinamiento  $\phi_4$  es una mejor cota respecto del segundo refinamiento  $\phi_3$ , del primer refinamiento  $\phi_2$  y de la cota inicial  $\phi_1$ :

**Prueba:**

Como las partes Hermíticas son idénticas en ambas cotas, solamente se prueba la desigualdad entre las partes anti-Hermíticas.

Ya que  $\mathbf{H}(\mathbf{D}) \circ (\mathbf{TRISUP} - \mathbf{TRIINF}) \preceq \mathbf{H}(\mathbf{D}) \circ (\mathbf{UNOS}(n) - \mathbf{I})$ , entonces  $\rho(\mathbf{H}(\mathbf{D}) \circ (\mathbf{TRISUP} - \mathbf{TRIINF}) \preceq \mathbf{H}(\mathbf{D})) \leq \rho(\mathbf{H}(\mathbf{D}) \circ (\mathbf{UNOS}(n) - \mathbf{I}))$ .

Ahora por lema 2.2.8, y como ambas matrices tienen elementos positivos, usando el teorema de Perron (lema 2.2.9) se obtiene:  $\lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{D}) \circ (\mathbf{TRISUP} - \mathbf{TRIINF}) \preceq \mathbf{H}(\mathbf{D})) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{D}) \circ (\mathbf{UNOS}(n) - \mathbf{I}))$ .

Se tiene entonces que  $\lambda_{\max}(j \cdot \mathbf{S}(\mathbf{A}_0)) + \lambda_{\max}(j \cdot \mathbf{H}(\mathbf{D}) \circ (\mathbf{TRISUP} - \mathbf{TRIINF})) \leq \lambda_{\max}(j \cdot \mathbf{S}(\mathbf{A}_0)) + \lambda_{\max}(j \cdot \mathbf{H}(\mathbf{D}) \circ (\mathbf{UNOS}(n) - \mathbf{I}))$  y

$$[\lambda_{\max}(j \cdot S(A_0)) + \lambda_{\max}(H(D) \circ (\text{TRISUP} - \text{TRIINF}))]^2 \leq \quad (4.36)$$

$$[\lambda_{\max}(j \cdot S(A_0)) + \lambda_{\max}(H(D) \circ (\text{UNOS}(n) - I))]^2$$

Finalmente la condición de desigualdad es:

$$\phi_4 = \sqrt{[\max\{\lambda_{\max}(H(A_0)), \lambda_{\max}(-H(A_0))\} + \lambda_{\max}(H(D))]^2 + [\lambda_{\max}(j \cdot S(A_0)) + \lambda_{\max}(j \cdot H(D) \circ (\text{TRISUP} - \text{TRIINF}))]^2} \leq \quad (4.37)$$

$$\sqrt{[\max\{\lambda_{\max}(H(A_0)), \lambda_{\max}(-H(A_0))\} + \lambda_{\max}(H(D))]^2 + [\lambda_{\max}(j \cdot S(A_0)) + \lambda_{\max}(H(D) \circ (\text{UNOS}(n) - I))]^2} = \phi_3 \leq \phi_2 \leq \phi_1$$

#### 4.8.- Ejemplos numéricos.

**Ejemplo 4.8.1.-** Sea la matriz intervalo  $M=[L,U]$ , donde  $L$  y  $U$  son dados como sigue

$$L = \begin{bmatrix} -0.42687 & 0.10353 & -0.26673 \\ 0.12330 & -0.01316 & -0.23077 \\ -0.49168 & -0.09526 & -0.19356 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0.11288 & 0.11965 & 0.00193 \\ 0.23767 & 0.18747 & -0.15815 \\ 0.14972 & 0.48476 & 0.57513 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$A_0 = \begin{bmatrix} -0.15699 & 0.11159 & -0.13239 \\ 0.18048 & 0.08715 & -0.19446 \\ -0.17097 & 0.19474 & 0.19078 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0.26987 & 0.00805 & 0.13433 \\ 0.05718 & 0.10031 & 0.03631 \\ 0.32070 & 0.29001 & 0.38434 \end{bmatrix}$$

Evaluando la cota superior  $\phi_4=0.9972$ ,  $\phi_3=1.0041$ ,  $\phi_2=1.1881$ ,  $\phi_1=2.3438$ ,  $ro=1.0345$ ,  $sig=1.0214$  y  $\phi=\min\{ro,sig\}=1.0214$

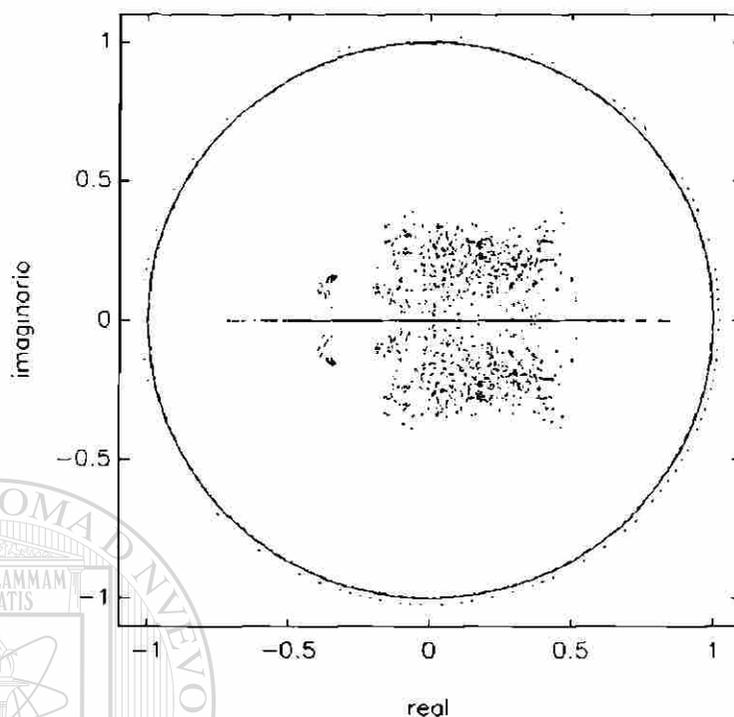


Figura 4.7 Espectro de la matriz intervalo del ejemplo 4.8.1

La figura 4.7 muestra: Los puntos ( $\cdot$ ) representan los valores característicos de los  $2^n$  matrices vértice más 500 matrices aleatorias, pertenecientes a la matriz intervalo  $M=[L,U]$ .

La línea continua (-) representa el círculo unitario, la línea (-·-·) representa la cota superior  $\phi_4$  y la línea (···) representa la cota superior  $\phi = \min\{r_0, \text{sig}\}$ .

**Nota:** En la figura 19 la cota  $\phi_4$  se traslapa con el círculo unitario.

**Ejemplo 4.8.2.-** Sea la matriz intervalo  $M=[L,U]$ , donde  $L$  y  $U$  son dados como sigue

$$L = \begin{bmatrix} -0.32661 & -0.22924 & -0.10775 \\ 0.12877 & -0.18803 & -0.29054 \\ -0.20547 & -0.13443 & -0.53761 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0.49004 & -0.11204 & 0.35981 \\ 0.28352 & 0.03263 & 0.18008 \\ -0.15612 & 0.45012 & 0.23668 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0.08171 & -0.17064 & 0.12602 \\ 0.20614 & -0.07769 & -0.05523 \\ -0.18079 & 0.15784 & -0.15046 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0.40833 & 0.05860 & 0.23378 \\ 0.07737 & 0.11033 & 0.23531 \\ 0.02467 & 0.29228 & 0.38714 \end{bmatrix}$$

Evaluando la cota superior  $\phi_4=0.9967$ ,  $\phi_3=1.0099$ ,  $\phi_2=1.2205$ ,  $\phi_1=2.4759$ ,  $ro=1.0307$ ,  $sig=1.0344$  y  $\phi = \min\{ro, sig\} = 1.0307$

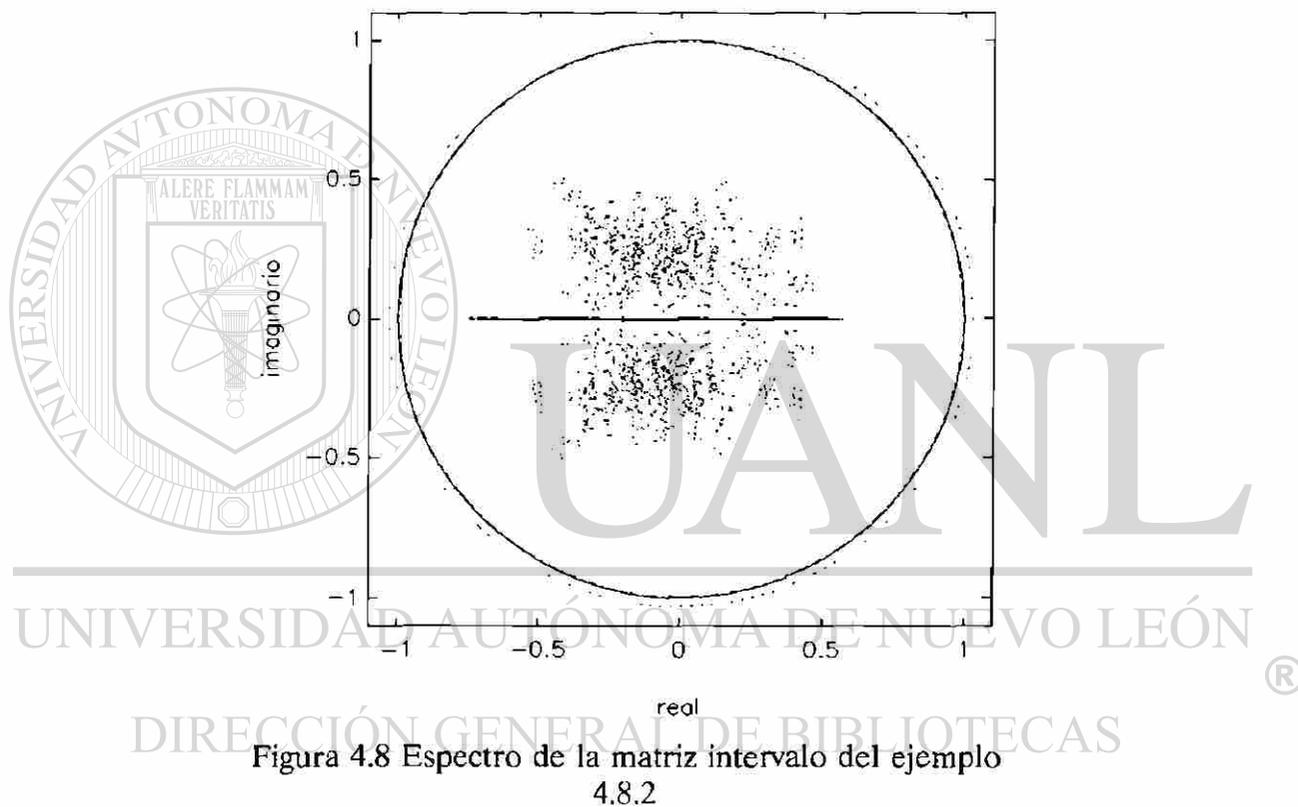


Figura 4.8 Espectro de la matriz intervalo del ejemplo 4.8.2

La figura 4.8 muestra: Los puntos (.) representan los valores característicos de los  $2^n$  matrices vértice más 500 matrices aleatorias, pertenecientes a la matriz intervalo  $M=[L,U]$ .

La línea continua (-) representa el círculo unitario, la línea (-·-) representa la cota superior  $\phi_4$  y la línea (···) representa la cota superior  $\phi = \min\{ro, sig\}$ .

**Nota:** En la figura 20 la cota  $\phi_4$  se traslapa con el círculo unitario.

**Comentario 4.8.3.**– En esta parte se muestra el tercer refinamiento a la cota para análisis de estabilidad de sistemas discretos y puede verse en los ejemplos anteriores que ambas matrices intervalo son estables puesto que  $\phi_4 < 1$  en ambos casos -figura 4.7 y figura 4.8-.

No obstante la cota  $\phi = \min\{\rho, \text{sig}\} > 1$  no asegura la estabilidad de los ejemplos 4.8.1 y 4.8.2 porque  $\phi > 1$  como puede verse en las figuras indicadas.

#### 4.9.- Ejemplos comparativos

A continuación se presenta un par de ejemplos comparativos, que sirven para resaltar las diferencias entre las cotas, para sistemas discretos invariantes al corrimiento que han sido obtenidas en este trabajo.

**Ejemplo 4.9.1.**– Sea la matriz intervalo  $M=[L,U]$ , donde L y U son dados como sigue

$$L = \begin{bmatrix} 0.24260 & -0.29315 & -0.45736 \\ -0.38952 & -0.42949 & -0.24347 \\ -0.28069 & -0.29776 & -0.36964 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0.29760 & -0.13175 & -0.11821 \\ -0.12344 & -0.27669 & 0.16332 \\ -0.27486 & -0.01658 & -0.14973 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$P = \begin{bmatrix} 0.03575 & 0.10491 & 0.22045 \\ 0.17295 & 0.09932 & 0.26442 \\ 0.00379 & 0.18277 & 0.14294 \end{bmatrix}$$

Evaluando las cotas  $\phi_1=1.7243$ ,  $\phi_2=0.9765$ ,  $\rho=1.0186$ ,  $\text{sig}=0.9190$  y  $\phi = \min\{\rho, \text{sig}\} = 0.9190$

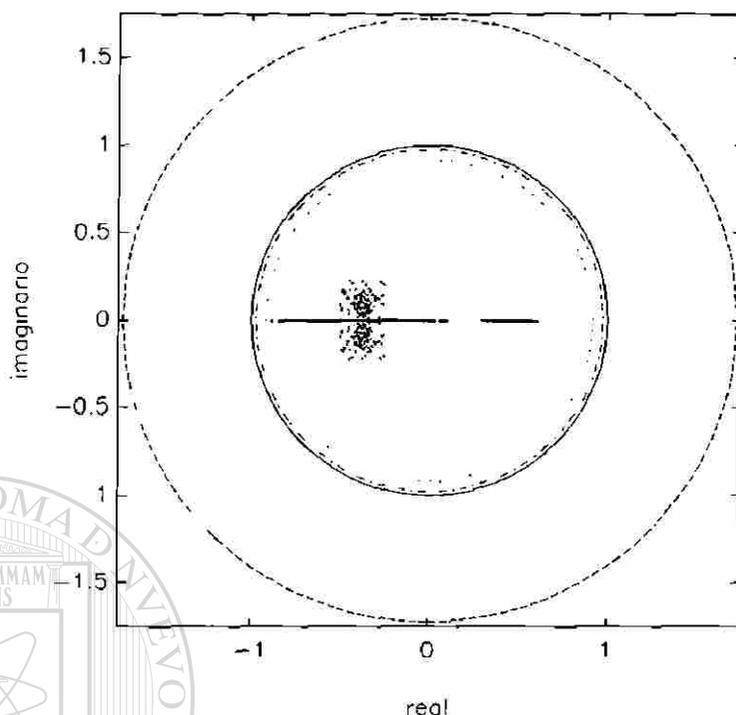


Figura 4.9 Espectro de la matriz intervalo del ejemplo 4.10.1

La figura 4.9 muestra: Los puntos ( $\cdot$ ) representan los valores característicos de los  $2^n$  matrices vértice más 500 matrices aleatorias, pertenecientes a la matriz intervalo  $M=[L,U]$ .

### DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

La línea continua (-) representa al círculo unitario, la línea (----) representa la cota  $\phi_1$ , la línea (-·-·) representa la cota  $\phi_2$  y la línea (····) representa la cota  $\phi = \min\{ro, sig\}$

**Ejemplo 4.9.2.-** Sea la matriz intervalo  $M=[L,U]$ , donde  $L$  y  $U$  son dados como sigue

$$L = \begin{bmatrix} -0.43453 & -0.17791 & 0.16669 \\ 0.05104 & -0.29266 & 0.04539 \\ -0.43322 & -0.47442 & -0.37410 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0.36401 & 0.03175 & 0.17028 \\ 0.24344 & 0.43849 & 0.33989 \\ -0.01249 & 0.28973 & 0.34146 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} -0.03526 & -0.07308 & 0.16849 \\ 0.14724 & 0.07291 & 0.19264 \\ -0.22286 & -0.09234 & -0.01632 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0.39927 & 0.10483 & 0.00179 \\ 0.09620 & 0.36557 & 0.14724 \\ 0.21036 & 0.38208 & 0.35778 \end{bmatrix}$$

Evaluando las cotas  $\phi_3=0.9952$ ,  $\phi_4=0.9792$ ,  $ro=1.0090$ ,  $sig=1.0504$  y  $\phi=\min\{ro,sig\}=1.0090$

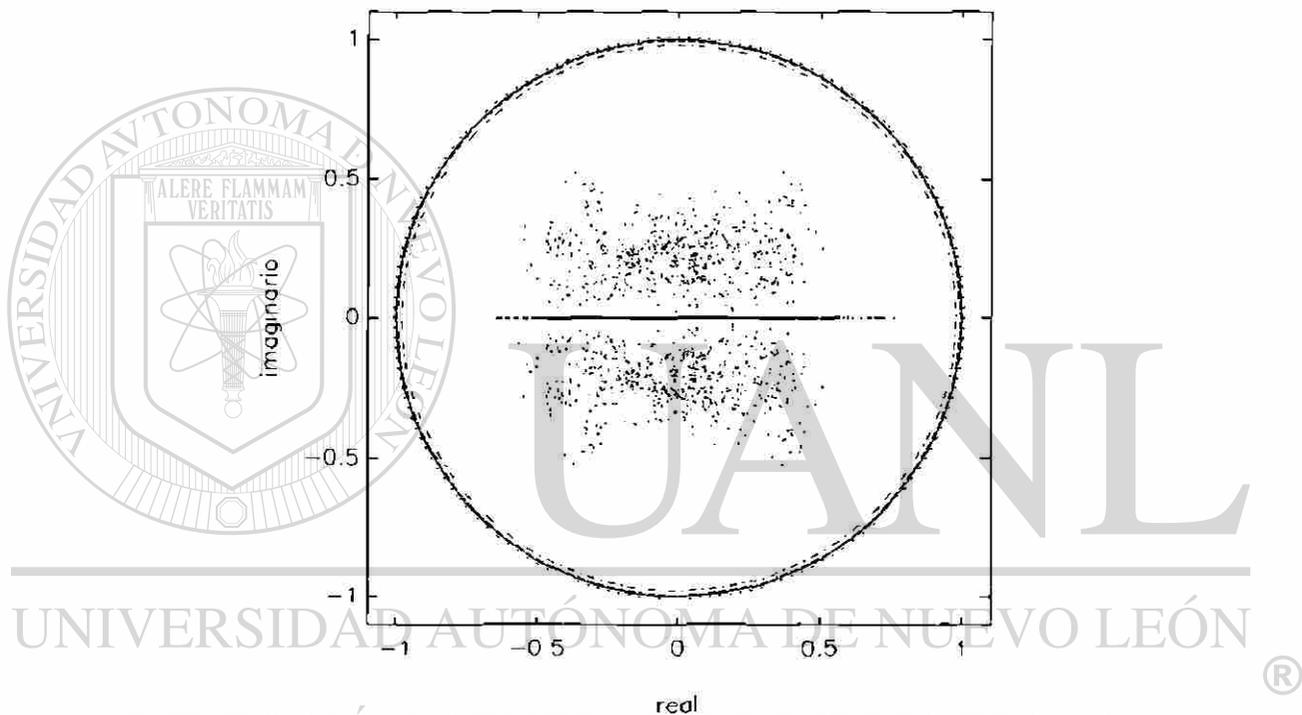


Figura 4.10 Espectro de la matriz intervalo del ejemplo 4.10.2

La figura 4.10 muestra: Los puntos ( $\cdot$ ) representan los valores característicos de los  $2^2$  matrices vértice más 500 matrices aleatorias, pertenecientes a la matriz intervalo  $\mathbf{M}=[\mathbf{L},\mathbf{U}]$ .

La línea continua (-) representa al círculo unitario, la línea (----) representa la cota  $\phi_3$ , la línea (-·-·) representa la cota  $\phi_4$  y la línea (····) representa la cota  $\phi=\min\{ro,sig\}$

**Comentario 4.9.3.-** En esta parte se muestran dos ejemplos comparativos de las diferentes cotas analizadas en este trabajo. Las matrices intervalo de los ejemplos son estables porque  $\phi_2 < 1$  para el ejemplo 4.9.1 y  $\phi_4 < 1$  para el ejemplo 4.9.2; aunque  $\phi = \min\{\rho, \text{sig}\} > 1$  no asegura estabilidad de las matrices intervalo del segundo ejemplo.

**4.10.- Caso trivial.-** En este apartado se va a mostrar un caso que es trivial, y cumple condiciones de estabilidad necesarias y suficientes en las dos última pruebas que se dan, esto es,  $\phi_3$  y  $\phi_4$

**Caso trivial 4.10.1.-** Si la dimensión de la matriz intervalo se colapsa a la unidad  $m = [1, u] \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ , entonces el sistema cumple condiciones necesarias y suficientes en las dos últimas pruebas de este capítulo ( $\phi_3$  y  $\phi_4$ ).

$$\phi_3 = \frac{\sqrt{[\max\{\lambda_{\max}(h(a_0)), \lambda_{\max}(-h(a_0))\} + \lambda_{\max}(h(d))]^2 + [\lambda_{\max}(j \cdot s(a_0)) + \lambda_{\max}(j \cdot h(d) \circ (\text{ones}(1) - 1))]^2}}{< 1} \quad (4.38)$$

$$\phi_4 = \frac{\sqrt{[\max\{\lambda_{\max}(h(a_0)), \lambda_{\max}(-h(a_0))\} + \lambda_{\max}(h(d))]^2 + [\lambda_{\max}(j \cdot h(d) \circ (\text{trisup}(1) - \text{triinf}(1)))]^2}}{< 1} \quad (4.39)$$

pero  $h(a_0) = a_0 = \frac{1}{2}(u+1)$ ,  $h(d) = d = \frac{1}{2}(u-1)$ , y también  $\lambda_{\max}(h(a_0)) = a_0$ ,  $\lambda_{\max}(h(d)) = d$  y finalmente  $s(a_0) = 0$ ,  $h(d) \circ (\text{unos}(1) - 1) = 0$ ,  $h(d) \circ (\text{trisup}(1) - \text{triinf}(1)) = 0$ ; por lo tanto  $\lambda_{\max}(j \cdot s(a_0)) = 0$ ,  $\lambda_{\max}(j \cdot h(d) \circ (\text{unos}(1) - 1)) = 0$  y  $\lambda_{\max}(j \cdot h(d) \circ (\text{trisup}(1) - \text{triinf}(1))) = 0$ ; entonces

$$\phi_4 \leq \phi_3 = \sqrt{[\max\{a_0, -a_0\} + d]^2 + [0]^2} = \sqrt{[a_0 + d]^2} = a_0 + d = u < 1 \quad (4.40)$$

que son condiciones necesarias y suficientes.

## CAPITULO 5

### APLICACION DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS AL ANALISIS DE ESTABILIDAD DE SISTEMAS FISICOS

**E**n esta sección se van a analizar dos problemas de aplicación con el fin de mostrar el uso de los resultados obtenidos en este trabajo. Los problemas de ejemplo y a los cuales se analiza estabilidad robusta son:

- 1.- Aplicación a circuitos eléctricos.
- 2.- Aplicación al ascenso y maniobras de un aeronave.

**Ejemplo 5.1.-** Sea el circuito eléctrico de la figura 5.1 en el que se considera incertidumbre debido a la tolerancia en los elementos.

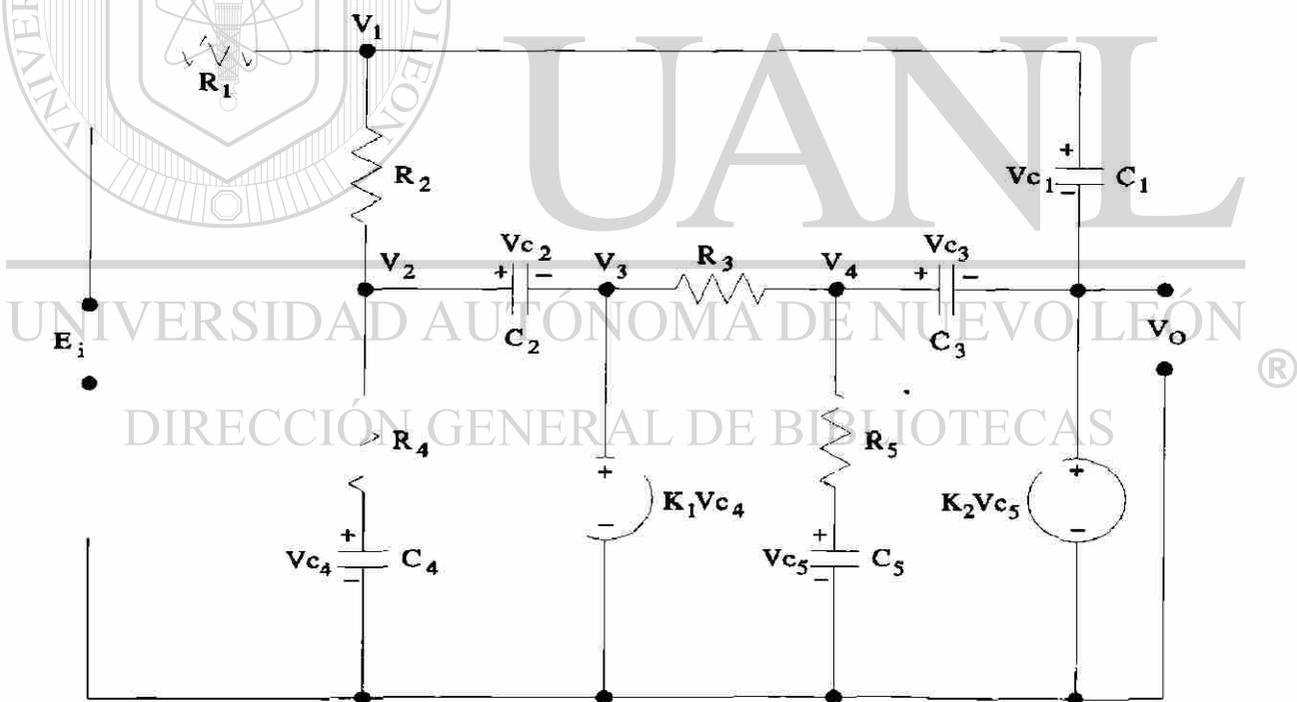


Figura 5.1 Circuito eléctrico de prueba

Las variables de estado a usar son:

$$V_{c_1}, V_{c_2}, V_{c_3}, V_{c_4} \text{ y } V_{c_5} \quad (5.1)$$

Del circuito se obtienen las siguientes ecuaciones de voltaje que sirven de apoyo:

$$V_1 = V_{c_1} + K_2 V_{c_5}; \quad V_2 = V_{c_2} + K_1 V_{c_4}; \quad V_3 = K_1 V_{c_4}; \quad V_4 = V_{c_3} + K_2 V_{c_5}; \quad V_0 = K_2 V_{c_5} \quad (5.2)$$

Y las ecuaciones en variables de estado son:

$$\begin{aligned} sV_{c_1} &= -\frac{V_{c_1}}{R_1 C_1} - \frac{V_{c_1}}{R_2 C_1} + \frac{V_{c_2}}{R_2 C_1} + \frac{K_1 V_{c_4}}{R_2 C_1} - \frac{k_2 V_{c_5}}{R_1 C_1} - \frac{K_2 V_{c_5}}{R_2 C_1} + \frac{E_1}{R_1 C_1} \\ sV_{c_2} &= \frac{V_{c_1}}{R_2 C_2} - \frac{V_{c_2}}{R_2 C_2} - \frac{V_{c_2}}{R_4 C_2} - \frac{K_1 V_{c_4}}{R_2 C_2} + \frac{(1-K_1)V_{c_4}}{R_4 C_2} + \frac{K_2 V_{c_5}}{R_2 C_2} \\ sV_{c_3} &= -\frac{V_{c_3}}{R_3 C_3} - \frac{V_{c_3}}{R_5 C_3} + \frac{K_1 V_{c_4}}{R_3 C_3} - \frac{K_2 V_{c_5}}{R_3 C_3} + \frac{(1-K_2)V_{c_5}}{R_5 C_3} \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$sV_{c_4} = \frac{V_{c_2}}{R_4 C_4} + \frac{(K_1 - 1)V_{c_4}}{R_4 C_4}$$

$$sV_{c_5} = \frac{V_{c_3}}{R_5 C_5} + \frac{(K_2 - 1)V_{c_5}}{R_5 C_5}$$

Por lo tanto el sistema en variables de estado es:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{c} &= A V_{c} + B E_i \\ V_0 &= C V_{c} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Donde **A**, **B** y **C** están dadas como sigue:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} - \frac{1}{R_2 C_1} & \frac{1}{R_2 C_1} & 0 & \frac{K_1}{R_2 C_1} & -\frac{K_2}{R_1 C_1} - \frac{K_2}{R_2 C_1} \\ \frac{1}{R_2 C_2} & -\frac{1}{R_2 C_2} - \frac{1}{R_4 C_2} & 0 & \frac{1-K_1}{R_4 C_2} - \frac{K_1}{R_2 C_2} & \frac{K_2}{R_2 C_2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_3 C_3} - \frac{1}{R_5 C_3} & \frac{K_1}{R_3 C_3} & \frac{1-K_2}{R_5 C_3} - \frac{K_2}{R_3 C_3} \\ 0 & \frac{1}{R_4 C_4} & 0 & \frac{K_1-1}{R_4 C_4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_5 C_5} & 0 & \frac{K_2-1}{R_5 C_5} \end{bmatrix}$$

$$V_c = [V_{c_1} \ V_{c_2} \ V_{c_3} \ V_{c_4} \ V_{c_5}]^T; \quad B = \left[ \frac{1}{R_1 C_1} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right]^T; \quad C = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ K_2]$$

La estabilidad del sistema está determinada por la matriz  $A$ , o sea que está determinada tanto por los valores de los resistores y capacitores (con sus tolerancias) como por los valores de las ganancias. Se van a realizar varias pruebas a un caso de estudio, donde  $R_1=R_2=R_3=R_4=R_5=R_{nom}$ ,  $C_1=C_2=C_3=C_4=C_5=C_{nom}$  y  $K_1=K_2=K_{nom}$ . Al incluir las tolerancias de 1% y 5% en resistores, capacitores y ganancias, entonces la matriz  $A$  puede ser representada por una matriz intervalo  $M=[L,U]$ , donde la matriz  $L$  se obtiene con los elementos de mínimo valor y la matriz  $U$  se obtiene con los elementos de máximo valor, al evaluar las siguientes condiciones:

$$\left. \frac{1}{RC} \right|_{min} = \frac{1}{R_{max} C_{max}}; \quad \left. \frac{1}{RC} \right|_{max} = \frac{1}{R_{min} C_{min}} \quad (5.5)$$

$$-\left. \frac{2}{RC} \right|_{min} = -2 \cdot \left. \frac{1}{RC} \right|_{max}; \quad -\left. \frac{2}{RC} \right|_{max} = -2 \cdot \left. \frac{1}{RC} \right|_{min}$$

$$\left. \frac{K_1}{RC} \right|_{min} = [K_1]_{min} \cdot \left. \frac{1}{RC} \right|_{min} ; \quad \left. \frac{K_1}{RC} \right|_{max} = [K_1]_{max} \cdot \left. \frac{1}{RC} \right|_{max}$$

$$\left. \frac{-2K_2}{RC} \right|_{min} = -2[K_2]_{max} \cdot \left. \frac{1}{RC} \right|_{max} ; \quad \left. \frac{-2K_2}{RC} \right|_{max} = -2[K_2]_{min} \cdot \left. \frac{1}{RC} \right|_{min}$$

(5.6)

$$\left. \frac{1-2K_1}{RC} \right|_{max} = (1-2[K_1]_{max}) \cdot \left. \frac{1}{RC} \right|_{min} ; \quad \left. \frac{1-2K_1}{RC} \right|_{min} = (1-2[K_1]_{min}) \cdot \left. \frac{1}{RC} \right|_{max}$$

$$\left. \frac{K_1-1}{RC} \right|_{min} = ([K_1]_{min}-1) \cdot \left. \frac{1}{RC} \right|_{max} ; \quad \left. \frac{K_1-1}{RC} \right|_{max} = ([K_1]_{max}-1) \cdot \left. \frac{1}{RC} \right|_{min}$$

1.- Para el caso cuando las tolerancias de los resistores son 1%, esto es  $R_{min}=0.99 \cdot R_{nom}$ ,  $R_{max}=1.01 \cdot R_{nom}$ ,  $C_{min}=0.99 \cdot C_{nom}$ ,  $C_{max}=1.01 \cdot C_{nom}$ ; y las ganancias se consideran fijas en  $K_1=0.1$  y  $K_2=0.1$ ; por lo tanto la matriz  $M=[L,U]$  esta dada por:

$$L = \frac{1}{R_{nom} C_{nom}} \begin{bmatrix} -2.0406 & 0.9803 & 0 & 0.0980 & -0.2041 \\ 0.9803 & -2.0406 & 0 & 0.7842 & 0.0980 \\ 0 & 0 & -2.0406 & 0.0980 & 0.7842 \\ 0 & 0.9803 & 0 & -0.9183 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9803 & 0 & -0.9183 \end{bmatrix}$$

$$U = \frac{1}{R_{nom} C_{nom}} \begin{bmatrix} -1.9606 & 1.0203 & 0 & 0.1020 & -0.1961 \\ 1.0203 & -1.9606 & 0 & 0.8162 & 0.1020 \\ 0 & 0 & -1.9606 & 0.1020 & 0.8162 \\ 0 & 1.0203 & 0 & -0.8823 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0203 & 0 & -0.8823 \end{bmatrix}$$

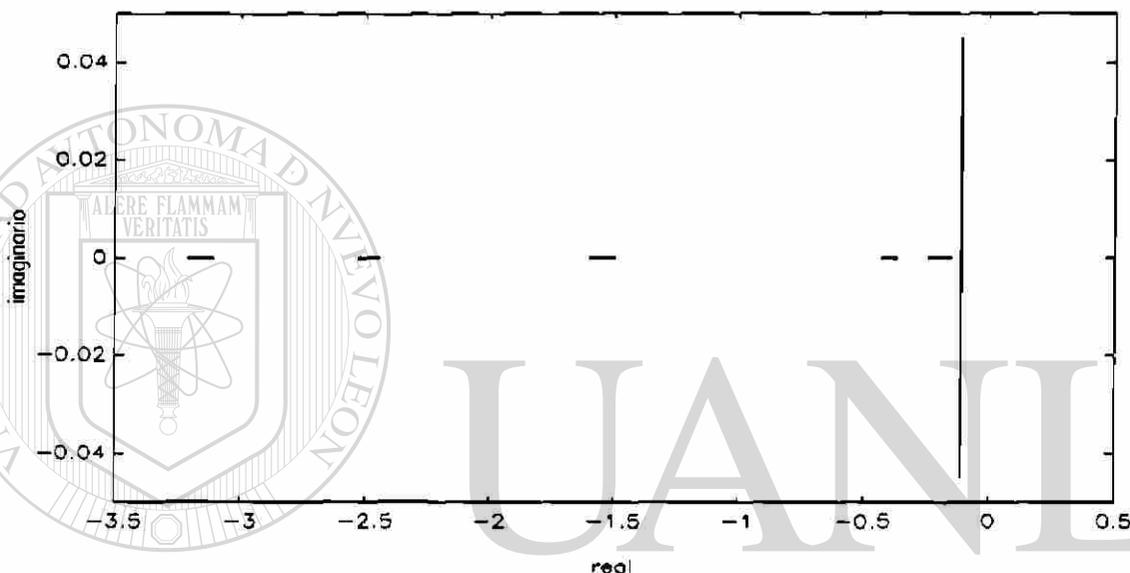


Figura 5.2 Espectro de la matriz intervalo del circuito eléctrico caso 1

## DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Evaluando las cotas  $\delta_4 = -\frac{0.1381}{R_{nom} C_{nom}}$  y  $\delta_5 = -\frac{0.1366}{R_{nom} C_{nom}}$ , se asegura estabilidad de la

matriz intervalo puesto que  $R_{nom} > 0$  y  $C_{nom} > 0$  para elementos físicos y por lo tanto  $\delta_4 < 0$ ,  $\delta_5 < 0$ .

La figura 5.2 muestra: (·) los valores característicos de 1000 matrices aleatorias pertenecientes a la matriz intervalo, la línea vertical (-) muestra la cota  $\delta_4$  y la línea vertical (—) muestra la cota  $\delta_5$ .

**Nota:** En la figura 5.2 la cota  $\delta_4$  se traslapa con la cota  $\delta_5$ .

2.- Para el caso cuando se consideran tolerancias del 1% en los resistores, los capacitores y las ganancias, entonces  $R_{min}=0.99 \cdot R_{nom}$ ,  $R_{max}=1.01 \cdot R_{nom}$ ,  $C_{min}=0.99 \cdot C_{nom}$ ,  $C_{max}=1.01 \cdot C_{nom}$ ,  $[K_1]_{min}=0.099$ ,  $[K_1]_{max}=0.101$ ,  $[K_2]_{min}=0.099$  y  $[K_2]_{max}=0.101$ ; y la matriz  $M=[L,U]$  esta dada por:

$$L = \frac{1}{R_{nom} C_{nom}} \begin{bmatrix} -2.0406 & 0.9803 & 0 & 0.0970 & -0.2061 \\ 0.9803 & -2.0406 & 0 & 0.7823 & 0.0970 \\ 0 & 0 & -2.0406 & 0.0970 & 0.7823 \\ 0 & 0.9803 & 0 & -0.9193 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9803 & 0 & -0.9193 \end{bmatrix}$$

$$U = \frac{1}{R_{nom} C_{nom}} \begin{bmatrix} -1.9606 & 1.0203 & 0 & 0.1031 & -0.1941 \\ 1.0203 & -1.9606 & 0 & 0.8183 & 0.1031 \\ 0 & 0 & -1.9606 & 0.1031 & 0.8183 \\ 0 & 1.0203 & 0 & -0.8813 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0203 & 0 & -0.8813 \end{bmatrix}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Evaluando las cotas  $\delta_4 = -\frac{0.1371}{R_{nom} C_{nom}}$  y  $\delta_5 = -\frac{0.1345}{R_{nom} C_{nom}}$  se asegura la estabilidad del

sistema puesto que  $R_{nom} > 0$  y  $C_{nom} > 0$  para elementos físicos y por lo tanto  $\delta_4 < 0$  y  $\delta_5 < 0$ .

La figura 5.3 muestra: (·) los valores característicos de 1000 matrices aleatorias pertenecientes a la matriz intervalo, la línea vertical (-) muestra la cota  $\delta_4$  y la línea vertical (—) muestra la cota  $\delta_5$ .

**Nota:** En la figura 5.3 la cota  $\delta_4$  se traslapa con la cota  $\delta_5$ .

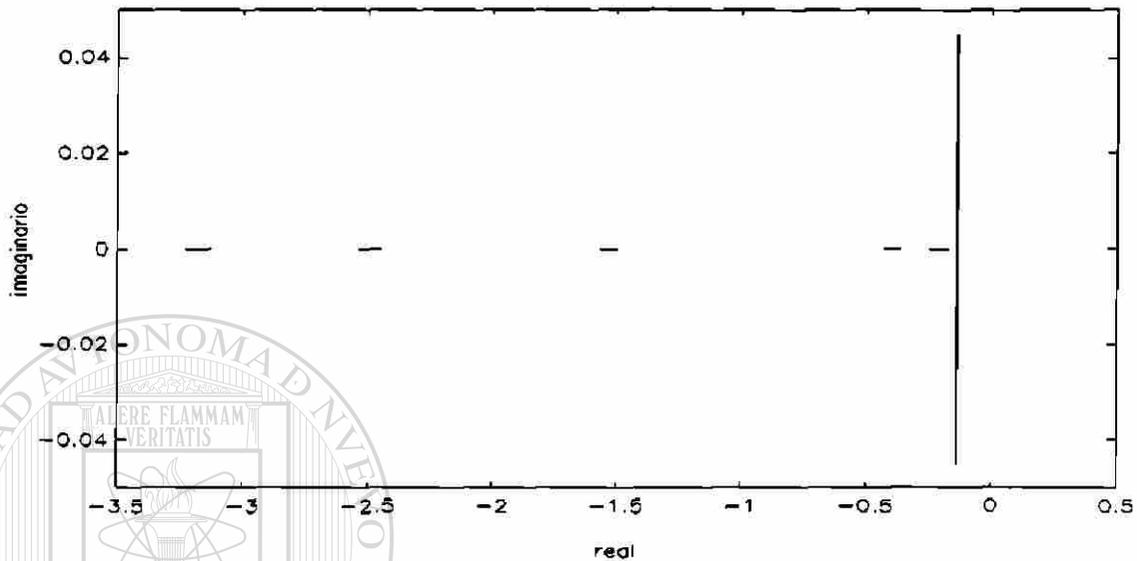


Figura 5.3 Espectro de la matriz intervalo del circuito eléctrico caso 2

3.- Finalmente para el caso cuando las tolerancias de los resistores es 5%, entonces  $R_{min}=0.95 \cdot R_{nom}$ ,  $R_{max}=1.05 \cdot R_{nom}$ ,  $C_{min}=0.95 \cdot C_{nom}$ ,  $C_{max}=1.05 \cdot C_{nom}$ ; y las ganancias se consideran fijas en  $K_1=0.1$  y  $K_2=0.1$ ; y por lo tanto la matriz  $M=[L,U]$  esta dada por:

$$L = \frac{1}{R_{nom} C_{nom}} \begin{bmatrix} -2.2160 & 0.9070 & 0 & 0.09070 & -0.2216 \\ 0.9070 & -2.2160 & 0 & 0.7256 & 0.09070 \\ 0 & 0 & -2.2160 & 0.09070 & 0.7256 \\ 0 & 0.9070 & 0 & -0.9972 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9070 & 0 & -0.9972 \end{bmatrix}$$

$$U = \frac{1}{R_{nom} C_{nom}} \begin{bmatrix} -1.8140 & 1.1080 & 0 & 0.1108 & -0.1814 \\ 1.1080 & -1.8140 & 0 & 0.8864 & 0.1108 \\ 0 & 0 & -1.8140 & 0.1108 & 0.8864 \\ 0 & 1.1080 & 0 & -0.8163 & 0 \\ 0 & 0 & 1.1080 & 0 & -0.8163 \end{bmatrix}$$

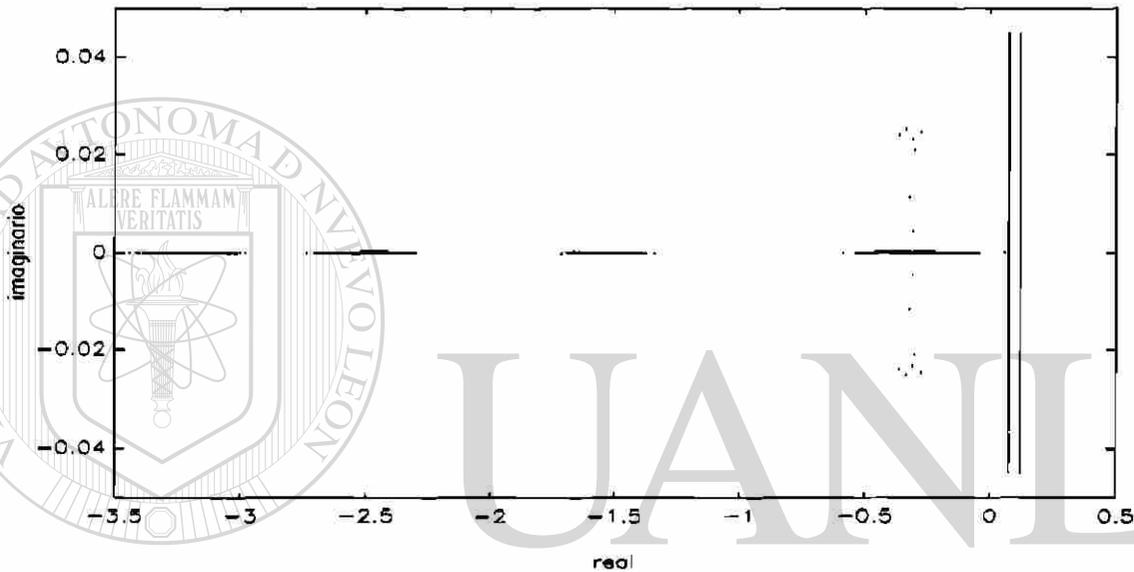


Figura 5.4 Espectro de la matriz intervalo del circuito eléctrico caso 3

Evaluando las cotas  $\delta_4 = \frac{0.1195}{R_{nom} C_{nom}}$  y  $\delta_5 = \frac{0.0737}{R_{nom} C_{nom}}$ , no se asegura la estabilidad del

sistema puesto que  $\delta_4 > 0$  y  $\delta_5 > 0$  (haciendo pruebas al sistema se encuentra que la matriz

U es inestable  $\lambda_{max}(U) = \frac{0.0548}{R_{nom} C_{nom}}$

La figura 5.4 muestra: (·) los valores característicos de 1000 matrices aleatorias pertenecientes a la matriz intervalo, la línea vertical (—) muestra la cota  $\delta_4$  y la línea vertical (—) muestra la cota  $\delta_5$ ,

**Ejemplo 5.2.**– En el problema del ascenso y maniobras de aeronaves, existen dos dinámicas [16],[45]: dinámica longitudinal y dinámica lateral. Aquí se presenta un caso de estudio que consiste en el análisis de estabilidad robusta del ascenso y maniobras del aeronave de investigación de vuelo F-8. Sea la aeronave representada en las figuras 5.5, 5.6 y 5.7.

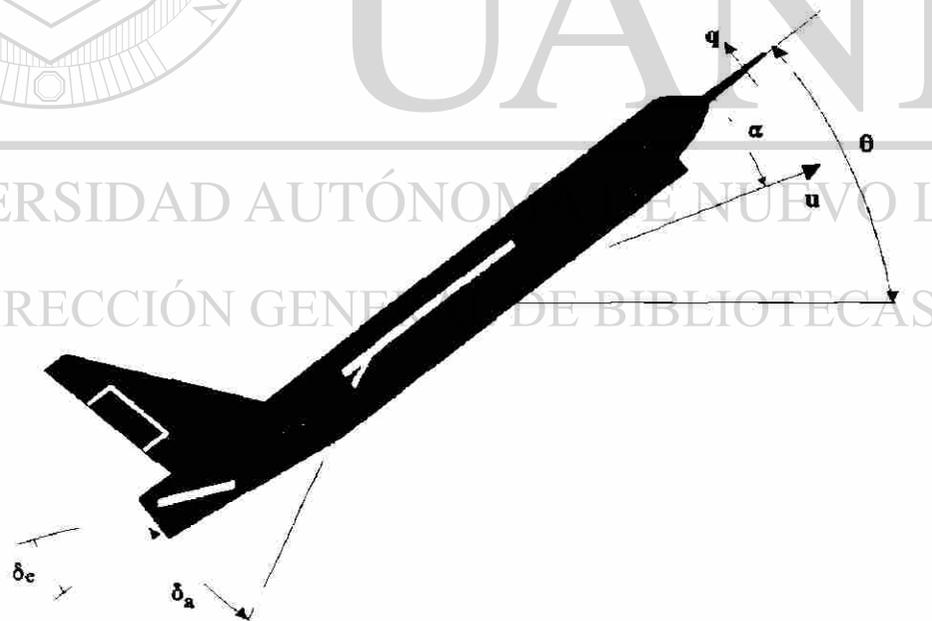


Figura 5.5 Vista lateral del aeronave F-8

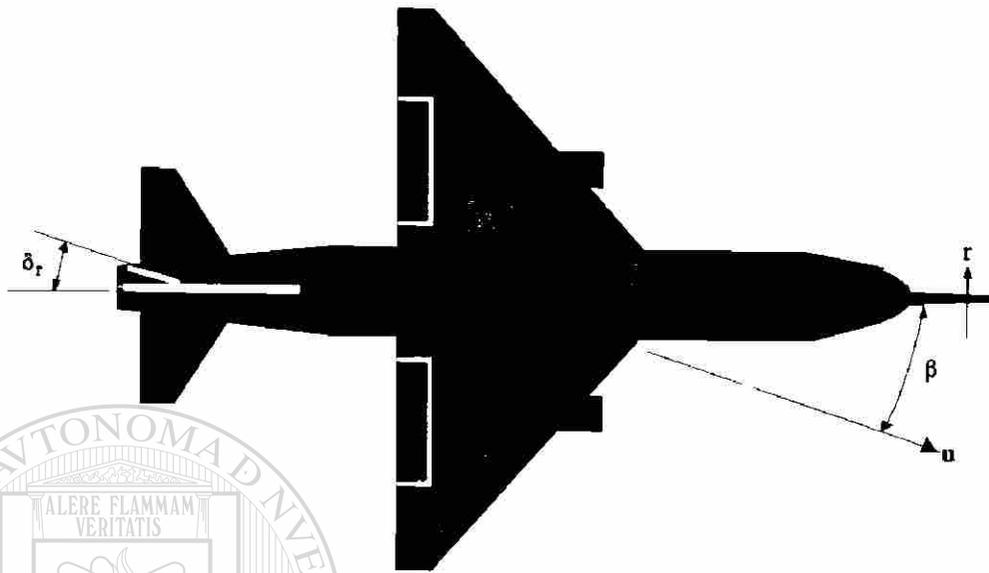
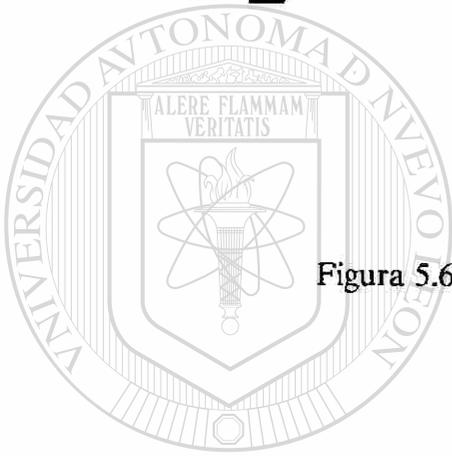


Figura 5.6 Vista superior del aeronave F-8



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

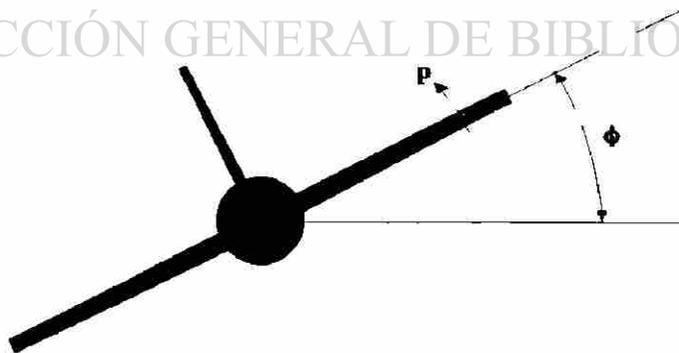


Figura 5.7 Vista frontal del aeronave F-8

El movimiento longitudinal de la aeronave está representado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{u} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.49 & 0.00005 & -4.8 & 0 \\ 0 & -0.015 & -14 & -32.2 \\ 1 & -0.00019 & -0.84 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ u \\ \alpha \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8.7 & 0 \\ -1.1 & 8.9 \\ -0.11 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_e \\ \delta_r \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Y el movimiento lateral de la aeronave está representado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{r} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.6 & 0.25 & -38 & 0 \\ -0.075 & -0.27 & 4.4 & 0 \\ 0.078 & -0.99 & -0.23 & 0.052 \\ 1 & 0.078 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ r \\ \beta \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 17 & 7 \\ 0.82 & -3.2 \\ 0 & 0.046 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

donde las variables son:

$q$  = Variación en el ángulo de la cabeza (rad/seg)

$u$  = Velocidad (pies/seg)

$\alpha$  = Ángulo de ataque (rad)

$\theta$  = Ángulo de la cabeza (rad)

$\delta_e$  = Ángulo del elevador -alerón de cola- (rad)

$\delta_r$  = Incremento de la posición de la válvula de admisión

$p$  = Variación del ángulo de balanceo (rad/seg)

$r$  = Variación del ángulo de deslizamiento lateral (rad/seg)

$\beta$  = Ángulo de deslizamiento lateral (rad)

$\phi$  = Ángulo lateral (rad)

$\delta_a$  = Ángulo del alerón (rad)

$\delta_r$  = Ángulo de posición del timón (rad)

Se van a analizar tres casos de estudio y las incertidumbres van a ser representadas como una matriz intervalo  $\mathbf{M}=[\mathbf{L},\mathbf{U}]$  con el modelo nominal como matriz centroide:

1.- Incertidumbre paramétrica en el modelo longitudinal del sistema, con una matriz de perturbación centralizada

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0.0002 & 0 & 0.0015 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0043 & 0.0057 \\ 0.0003 & 0 & 0.0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.- Incertidumbre paramétrica en el modelo longitudinal del sistema usando incertidumbres reales tomadas de [51] y se obtiene una matriz de perturbación centralizada

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0.0325 & 0 & 0.0675 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.- Incertidumbre paramétrica en el modelo lateral del sistema, con una matriz de perturbación centralizada

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0.0019 & 0.0023 & 0.0190 & 0 \\ 0.0004 & 0.0014 & 0.0335 & 0 \\ 0.0003 & 0.0046 & 0.0018 & 0.0004 \\ 0.0028 & 0.0007 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para todos los casos aquí tratados, la matriz nominal (centroide) del sistema es estable, tanto para la dinámica longitudinal como para la dinámica lateral; pero sus partes Hermíticas son inestables, por lo tanto no pueden usarse directamente los

resultados obtenidos en este trabajo, en los que se consideran que las partes Hermíticas de las matrices  $L$ ,  $U$  y  $A_0$  son estables. Es posible obtener otra matriz  $MA_0$ , usando una transformación de similitud, de tal forma que tanto la matriz nominal  $MA_0$ , como la parte Hermítica de la matriz  $\frac{1}{2}(MA_0+MA_0^*)$  sean estables. Se van a mencionar en este trabajo dos matrices de transformación:

a.- La raíz cuadrada de la matriz solución de la ecuación de Lyapunov  $P^{\frac{1}{2}}$ , donde  $P$  es solución de la ecuación  $P \cdot A_0 + A_0^* \cdot P = -I$  y  $P > 0$  positiva definida, de tal forma que la matriz transformada  $MA_0 = P^{\frac{1}{2}} \cdot A_0 \cdot P^{-\frac{1}{2}}$  es estable y su parte Hermítica

$$H(MA_0) = \frac{1}{2}(MA_0 + MA_0^*) = \frac{1}{2}(P^{\frac{1}{2}} \cdot A_0 \cdot P^{-\frac{1}{2}} + (P^{\frac{1}{2}} \cdot A_0 \cdot P^{-\frac{1}{2}})^*) = \frac{1}{2}(P^{\frac{1}{2}} \cdot A_0 \cdot P^{-\frac{1}{2}} + P^{-\frac{1}{2}} \cdot A_0^* \cdot P^{\frac{1}{2}}) = \quad (5.9)$$

$$\frac{1}{2}(P^{-\frac{1}{2}} \cdot (P \cdot A_0 \cdot P^{-\frac{1}{2}} + A_0^* \cdot P^{\frac{1}{2}})) = \frac{1}{2}(P^{-\frac{1}{2}} \cdot (P \cdot A_0 + A_0^* \cdot P) \cdot P^{-\frac{1}{2}})$$

como  $P \cdot A_0 + A_0^* \cdot P = -I$ , entonces  $\frac{1}{2}(P^{-\frac{1}{2}} \cdot (-I) \cdot P^{-\frac{1}{2}}) = -\frac{1}{2}(P)$  es negativa definida y por lo tanto es estable. No obstante que la parte Hermítica de la transformación de  $H(A_0)$  es estable, el máximo valor característico es mayor que la máxima parte real del espectro de  $A_0$ .

b.- Como el espectro de la matriz centroide no tiene valores característicos repetidos, existe una matriz  $T$  que diagonaliza la matriz  $A_0$ , esto es  $MA_0 = T^{-1} \cdot A_0 \cdot T = \text{diag}(\lambda_1(A_0), \lambda_2(A_0), \dots, \lambda_n(A_0))$ ; y existe otra matriz  $T1$  que diagonaliza a bloques la matriz  $A_0$ , esto es  $MA_0 = T1^{-1} \cdot A_0 \cdot T1 = \text{diag}(\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k)$ , donde

$$\Gamma_k = \begin{cases} \Gamma_k = \lambda_k(A_0) & \text{si } \lambda_k(A_0) \in \mathbb{R} \\ \Gamma_k = \begin{bmatrix} \text{Re}(\lambda_k(A_0)) & \text{Im}(\lambda_k(A_0)) \\ -\text{Im}(\lambda_k(A_0)) & \text{Re}(\lambda_k(A_0)) \end{bmatrix} & \text{si } \lambda_k(A_0) \in \mathbb{C} \end{cases} \quad (5.10)$$

La matriz de transformación  $\mathbf{T1}$  tiene la particularidad que colapsa el espectro de la parte Hermítica de la matriz transformada  $\mathbf{MA}_0$  exactamente en la parte real del espectro de la matriz inicial, esto es:

$$\{\sigma(\frac{1}{2}(\mathbf{T1}^{-1} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{T1}) + \frac{1}{2}(\mathbf{T1}^{-1} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{T1})^*)\} = \{\text{Re}(\sigma(\mathbf{A}_0))\} \quad (5.11)$$

Lo anterior se debe a que los elementos fuera de la diagonal de la matriz  $\mathbf{MA}_0$  están en disposición anti-Hermítica, esto es  $[\mathbf{T1}]_{ij} = -[\mathbf{T1}^*]_{ji}$  si  $i \neq j$ , y por lo tanto se anulan al evaluar la parte Hermítica. En este trabajo se va a usar la matriz de transformación  $\mathbf{T1}$ .

**Caso 1.** - La matriz centroide y la matriz de perturbación centralizada de la dinámica longitudinal del aeronave están dadas por:

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} -0.49 & 0.00005 & -4.8 & 0 \\ 0 & -0.015 & -14 & -32.2 \\ 1 & -0.00019 & -0.84 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0.0001 & 0 & 0.0008 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0022 & 0.0029 \\ 0.0002 & 0 & 0.0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Donde la matriz de transformación  $\mathbf{T1}$  es:

$$\mathbf{T1} = \begin{bmatrix} 0.01153 & -0.11119 & -0.00017 & 0.00004 \\ -0.35470 & -0.92557 & -0.96957 & 0.24479 \\ -0.05013 & -0.00932 & 0 & 0 \\ -0.0489 & 0.00938 & 0.00082 & 0.00224 \end{bmatrix}$$

Y la matriz transformada es:

$$\mathbf{MA}_0 = \mathbf{T1}^{-1}\mathbf{A}_0\mathbf{T1} = \begin{bmatrix} -0.66564 & 2.18212 & 0 & 0 \\ -2.18212 & -0.66564 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.00685 & 0.07651 \\ 0 & 0 & -0.07651 & -0.00685 \end{bmatrix}$$

Aplicando la matriz de transformación  $\mathbf{T1}$  a la matriz intervalo inicial  $\mathbf{T1}^{-1}\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{T1} = \mathbf{T1}^{-1}\cdot[\mathbf{L},\mathbf{U}]\cdot\mathbf{T1}$ , se obtiene una nueva matriz intervalo y es:

$$l_{ij} = \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n \min \left\{ t1^{-1}_{ik} \cdot l_{km} \cdot t1_{mj}, t1^{-1}_{ik} \cdot u_{km} \cdot t1_{mj} \right\} \quad i, j=1,2,\dots,n \quad (5.12)$$

$$u_{ij} = \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n \max \left\{ t1^{-1}_{ik} \cdot l_{km} \cdot t1_{mj}, t1^{-1}_{ik} \cdot u_{km} \cdot t1_{mj} \right\} \quad i, j=1,2,\dots,n \quad (5.13)$$

$$\mathbf{L1} = \begin{bmatrix} -0.66585 & 2.18163 & 0 & 0 \\ -2.18250 & -0.66586 & 0 & 0 \\ -0.00185 & -0.00249 & -0.00685 & 0.07651 \\ -0.00548 & -0.00999 & -0.07653 & -0.00685 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U1} = \begin{bmatrix} -0.66543 & 2.18260 & 0 & 0 \\ -2.18174 & -0.66543 & 0 & 0 \\ 0.00185 & 0.00249 & -0.00684 & 0.07652 \\ 0.00548 & 0.00999 & -0.07650 & -0.00684 \end{bmatrix}$$

Evaluando la cota superior con la nueva matriz intervalo se tiene  $\delta_4 = -0.00063$  e indica que el ascenso del aeronave es estable.

La figura 5.8 muestra: (·) Los valores característicos de 1000 matrices aleatorias y la línea vertical muestra la cota  $\delta_4$ .

**Nota:** Realizando análisis a la matriz original  $\mathbf{A}_0$  y  $\mathbf{D}$  se tiene:  $\lambda_{\max}(H(\mathbf{A}_0)) + \lambda_{\max}(H(\mathbf{D})) = 17.49$  que no asegura estabilidad, como tampoco los resultados de [9],[28],[31],[33],[34],[40],[49].

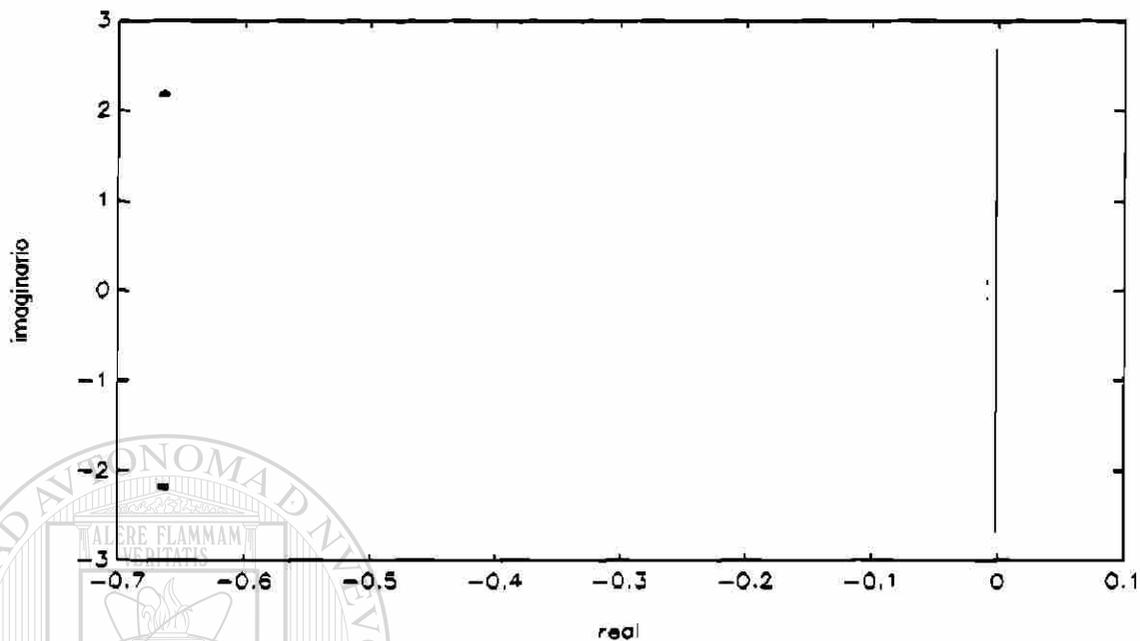


Figura 5.8 Espectro de la matriz intervalo del ascenso del aeronave F-8 caso 1

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
**Caso 2.**– La matriz centroide y la matriz de perturbación centralizada de la dinámica longitudinal del aeronave están dadas por:

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} -0.49 & 0.00005 & -4.8 & 0 \\ 0 & -0.015 & -14 & -32.2 \\ 1 & -0.00019 & -0.84 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0.0325 & 0 & 0.0675 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando la matriz de transformación  $\mathbf{T1}$  (la misma del caso 1) a la matriz intervalo  $\mathbf{T1}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{T1} = \mathbf{T1}^{-1} \cdot [\mathbf{L}, \mathbf{U}] \cdot \mathbf{T1}$  se obtiene una nueva matriz intervalo:

$$L1 = \begin{bmatrix} -0.67183 & 2.17513 & -0.00001 & 0 \\ -2.21532 & -0.70312 & -0.00005 & -0.00001 \\ -0.08973 & -0.10130 & -0.00700 & 0.07648 \\ -0.23886 & -0.26964 & -0.07692 & -0.00695 \end{bmatrix}$$

$$U1 = \begin{bmatrix} -0.65945 & 2.18911 & 0.00001 & 0 \\ -2.14892 & -0.62816 & 0.00005 & 0.00001 \\ 0.08973 & 0.10130 & -0.00670 & 0.07655 \\ 0.23886 & 0.26964 & -0.07611 & -0.00675 \end{bmatrix}$$

Evaluando la cota superior con la nueva matriz intervalo se tiene  $\delta_4=0.20919$  y no asegura estabilidad en el ascenso del aeronave.

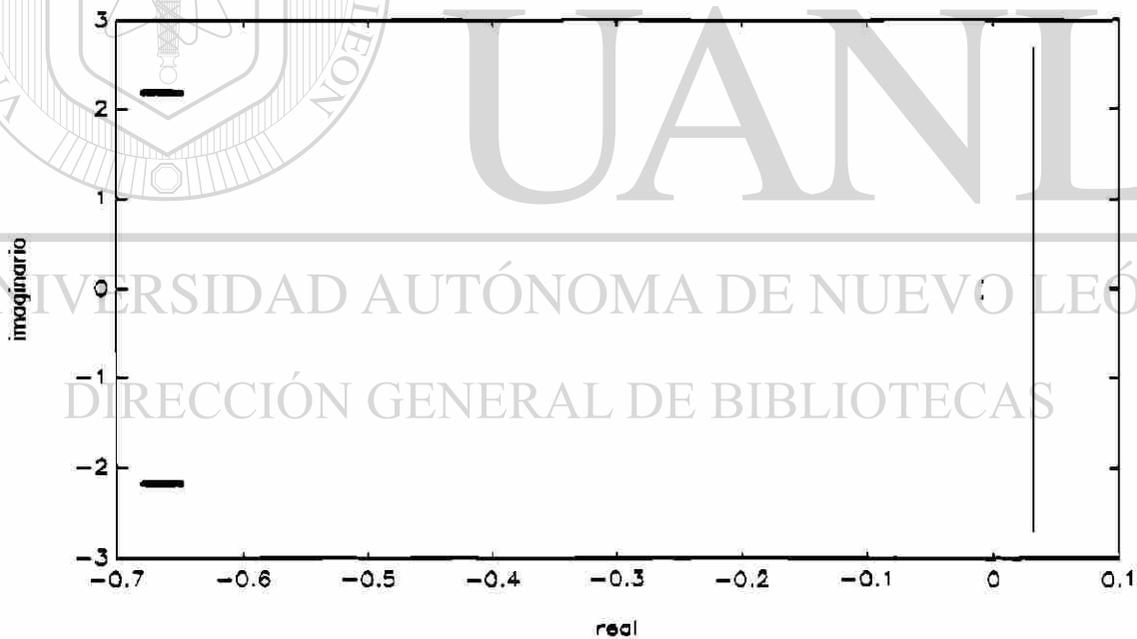


Figura 5.9 Espectro de la matriz intervalo del ascenso del aeronave F-8 caso 2

La figura 5.9 muestra: (·) Los valores característicos de 1000 matrices aleatorias y la línea vertical muestra la cota  $\delta_4$ .

**Nota:** Si no se usa la matriz de transformación **T1**, entonces la prueba usando la matriz inicial  $A_0$  es  $\lambda_{max}(H(A_0)) + \lambda_{max}(H(D)) = 17.491$  también falla.

**Caso 3.-** La matriz centroide y la matriz de perturbación centralizada de la dinámica lateral del aeronave están dadas por:

$$A_0 = \begin{bmatrix} -2.6 & 0.25 & -38 & 0 \\ -0.075 & -0.27 & 4.4 & 0 \\ 0.078 & -0.99 & -0.23 & 0.052 \\ 1 & 0.078 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0.00095 & 0.00115 & 0.00950 & 0 \\ 0.00020 & 0.00070 & 0.01675 & 0 \\ 0.00015 & 0.00230 & 0.00090 & 0.00020 \\ 0.00140 & 0.00035 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se obtiene una matriz de transformación **T1**

$$T1 = \begin{bmatrix} 0.67396 & 0.62790 & 0.92155 & -0.02878 \\ -0.15789 & 0.01972 & 0.04214 & 0.04969 \\ 0.00221 & -0.08375 & -0.00465 & 0.00227 \\ 0.20389 & -0.27850 & -0.38591 & 0.99834 \end{bmatrix}$$

Y la matriz transformada es:

$$MA_0 = T1^{-1}A_0T1 = \begin{bmatrix} -0.33929 & 2.62351 & 0 & 0 \\ -2.62351 & -0.33929 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.39647 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.02494 \end{bmatrix}$$

Aplicando la matriz de transformación **T1** a la matriz intervalo  $T1^{-1} \cdot M \cdot T1 = T1^{-1} \cdot [L, U] \cdot T1$  se obtiene una nueva matriz intervalo y evaluando la cota superior usando la nueva matriz intervalo se obtiene  $\delta_4 = -0.007786$  e indica que la maniobra del aeronave es estable.

$$L1 = \begin{bmatrix} -0.34135 & 2.61552 & -0.00213 & -0.00056 \\ -2.62993 & -0.34313 & -0.00408 & -0.00399 \\ -0.00605 & -0.00924 & -2.40118 & -0.00298 \\ -0.00198 & -0.00482 & -0.00223 & -0.02534 \end{bmatrix}$$

$$U1 = \begin{bmatrix} -0.33722 & 2.63149 & 0.00213 & 0.00056 \\ -2.61708 & -0.33544 & 0.00408 & 0.00399 \\ 0.00605 & 0.00924 & -2.39175 & 0.00298 \\ 0.00198 & 0.00482 & 0.00223 & -0.00245 \end{bmatrix}$$



Figura 5.10 Espectro de la matriz intervalo de la maniobra del aeronave F-8 caso 3

La figura 5.10 muestra: (·) Los valores característicos de 1000 matrices aleatorias y la línea vertical muestra la cota  $\delta_4$ .

**Nota:** Si no se usa la matriz de transformación **T1**, entonces la prueba usando la matriz inicial  $A_0$  es  $\lambda_{max}(H(A_0)) + \lambda_{max}(H(D)) = 17.49998$  no asegura estabilidad en la maniobra del aeronave.

## CAPITULO 6

### CONCLUSIONES

**E**n este trabajo se han presentado cinco cotas para análisis de estabilidad de sistemas lineales continuos, invariantes en el tiempo y con incertidumbre paramétrica, las cuatro primeras cotas se refieren a diferentes refinamientos a la cota inicial propuesta. En el caso de análisis de estabilidad de sistemas lineales discretos, invariantes al corrimiento y con incertidumbre paramétrica se presentaron cuatro cotas y son refinamientos a una cota inicial propuesta.

Se han presentado ejemplos que muestran las cotas, ejemplos comparativos entre las cotas y finalmente ejemplos de aplicación, con el fin de hacer uso de algunas de las cotas presentadas en este trabajo.

Es importante mencionar que aunque es muy simple la evaluación de las cotas, se tiene conservatismo dependiente de las partes Hermíticas de las matrices para el caso continuo y de las partes Hermíticas y anti-Hermíticas de las matrices para el caso discreto.

#### DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

El conservatismo inherente a la parte Hermítica puede ser arbitrariamente alto y así como las matrices de transformación  $P^{1/2}$  y  $T1$  acercan el espectro de la parte Hermítica de una matriz  $T1^{-1} \cdot A \cdot T1$  a la parte real del espectro de la matriz  $A$  estable, una matriz arbitraria puede alejarlo cada vez más y genera problemas **NP-complicados (NP-hard)** [31],[47] y puede trasladarse a un problema **P** usando una transformación de similitud para poder usar las pruebas aquí presentadas.

El primer problema de aplicación de los resultados obtenidos (aplicación a un circuito eléctrico) puede evaluarse directamente porque la parte Hermítica de la matriz

intervalo generada  $H(\mathbf{M})$  donde  $\mathbf{M} \in [\mathbf{L}, \mathbf{U}]$  es Hurwitz estable y permite el análisis usando las cotas aquí presentadas.

El segundo ejemplo de aplicación (ascenso y maniobras de un aeronave) **no** puede evaluarse directamente porque la parte Hermítica de la matriz intervalo generada  $H(\mathbf{M})$  donde  $\mathbf{M} \in [\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ , no es Hurwitz estable y no puede analizarse por casi ninguno de los resultados dados en la literatura de control, por lo tanto debe usarse una transformación de similitud  $\mathbf{T1}$  y aplicarla a  $\mathbf{M}=[\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ , esto es  $\mathbf{M1}=\mathbf{T1}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{T1} = \mathbf{T1}^{-1} \cdot [\mathbf{L}, \mathbf{U}] \cdot \mathbf{T1}$  para generar otra matriz intervalo  $[\mathbf{L1}, \mathbf{U1}]$  usando el sobreacotamiento dado en las ecuaciones (5.12) y (5.13), para entonces usar los resultados presentados en este trabajo.

En muchos problemas físicos pueden usarse directamente los resultados aquí presentados, aunque existen otros en los cuales no puedan asegurarse la estabilidad del sistema físico.

Es importante indicar que los resultados obtenidos son para el caso general de matrices que pertenecen a  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . Los resultados aquí presentados se cumplen también si la matriz intervalo  $\mathbf{M}=[\mathbf{L}, \mathbf{U}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$  con  $\mathbf{D}=\frac{1}{2}(\mathbf{U}-\mathbf{L}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

La generalización de los resultados a matrices intervalo  $\mathbf{M}=[\mathbf{L}, \mathbf{U}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$  con  $\mathbf{D}=\frac{1}{2}(\mathbf{U}-\mathbf{L}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  es directa y se obtiene usando la parte Hermítica del valor absoluto de la matriz de perturbación centralizada  $H(|\mathbf{D}|)$ , tanto para el caso continuo como para el caso discreto.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Ackerman J. and Siemel W. "On the Computation of Value Sets for Robust Stability Analysis", *European Control Conference*. pp. 1345-1350. 1991.
- [2] Barmish B. R. "A Generalization of Kharitonov's four Polynomial concept of Robust Stability Problems with linearly dependent coefficient perturbations", *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol 34, No. 2 pp. 157-165, 1989.
- [3] Barmish B. R. and Hollot C. V. "Counter-Example to recent Result on the Stability of Interval Matrices by S. Bialas", *International Journal Control*. Vol. 39. No. 5, pp. 1103-1104. 1984
- [4] Barmish, B. R. *New Tools for Robust Control Systems*. Macmillan Publishing Company. New York, 1994.
- 
- [5] Bartlett, A. C. "Root Locations of an Entire Polytope of Polynomials: It Suffices to Check the Edges", *Maht. Control Signals Systems* Vol 1, pp. 61-71, 1989. ®
- DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS
- [6] Belhouiri A, Tissir E. and Hamamed A. "Stability of Interval Matrix Polynomial in Continuous and Discrete cases", *Systems and control letters*. pp. 183-189. 1992.
- [7] Bialas S. "A Necessary and Sufficient Condition for the Stability of Interval Matrices", *International Journal Control*. Vol. 3 No 4 pp. 717-722. 1983
- [8] Cobb J. D. and Demarco C. L. "The Minimal Dimension of Stable Faces Required to Guarantee Stability of a Matrix Polytope", *IEEE Transaction on Automatic Control*. Vol 34, No. 9, pp. 990-992. 1989.

- [9] Collado J. M. and Rojas J. A. "New technique for Robust Stability", *Proc. of the 31st IEEE Conf. Decis. and Control*. Vol 1. pp. 231–236. 1992.
- [10] Collado M. J. "Stability of the Convex Hull of Conmuting Matrices", *Proc. of the 32nd IEEE Conf. on Decision and Control* Vol 3 pp. 2002–2003, 1993.
- [11] Chow J. and Chen B. "New approach for the Stability Analysis of Interval Matrices", *Control theory and advanced technology*. Vol 4 pp. 725–729. 1990.
- [12] Delgado R. J. J. D., Rojas E. J. A. y Collado M. J. "Análisis de Estabilidad Robusta de Sistemas con Incertidumbre", *Memoria del 10º Congreso Brasileiro de Automática y 6º Congreso Latinoamericano de controle automático* Vol 1, pp. 319–324, Rio de Janeiro Brasil
- [13] Delgado-Romero J. J., Rojas-Estrada J. A. and Collado Moctezuma J. "Análisis de Estabilidad de Sistemas con Incertidumbre: Prueba de Mansour", *Memoria del 10º Congreso Brasileiro de Automática y 6º Congreso Latinoamericano de controle automático* Vol 1, pp. 194–196, Rio de Janeiro Brasil
- [14] Delgado-Romero J.J., Rojas-Estrada J. A. and J. M. Collado "A Simple Test to Determine the Stability of an Interval Matrix", *Proc. of the 1994 American Control Conference* Vol. 1 pp. 642–643, 1994.
- [15] Delgado-Romero J. J., Rojas-Estrada J. A. and Collado Moctezuma J. "New Simple Tests for Hurwitz and Schur Stability of Interval Matrices", aceptado para su presentación en el *European Control Conference ECC '95* en Septiembre de 1995 en Roma Italia.

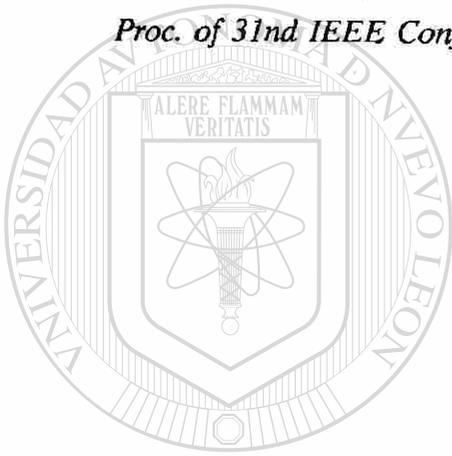
- [16] Elliot J. R. "NASA's Advanced Control Law Program for the F-8 Digital Fly-by-wire Aircraft", *IEEE Transaction on Automatic Control*. Vol 22, No. 5, pp. 753-757. 1977
- [17] Foo Y. K. and Soh Y. C. "Stability Analysis of a Family of Matrices", *IEEE Trans on Autom. Contr.* Vol 35, No. 11, pp. 1257-1259. 1990.
- [18] Fu M. and Barmish B. R. "A Generalization of Kharitonov's Interval Polynomial Framework to handle Linearly Dependent Uncertainty", *Technical Report Electrical and Computer Engineering*, University of Wisconsin - Madison, (1987).
- [19] Garey M. R. and Johnson D. S., *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, Freeman, New York, 1979.
- [20] Gao Z. and Antsaklis P. "New Bounds on Parameter Uncertainties for Robust Stability", *Proc. of the 1994 American Control Conference*. Vol. 1 pp. 879-880, 1991.
- 
- [21] Heinen J. A. "Sufficient Conditions for Stability of Interval Matrices", *International Journal Control*, Vol 39, No. 6, pp. 1323-1328. 1984.
- [22] Hollot C. V. and Bartlett A. C. "On the Eigenvalues of Interval Matrices", *Proceeding of the 26th Conference on Decision and Control*. pp. 794-799. 1987.
- [23] Horn R. A. and Johnson C. R. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, New York (1985).
- [24] Horn R. A. and Johnson C. R. *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press, New York (1991).

- [25] Juang Y. T. and Shao C. S. "Stability Analysis of Dynamic Interval Systems", *International Journal Control*, Vol 49, No. 4, pp. 1401. 1989.
- [26] Juang Y. T, Kuo T. S. and Tung S. L. "Stability Analysis of Continuous and Discrete Interval Systems", *Control Theory and Advanced Technology*. Vol. 1. pp. 221-235. 1990.
- [27] Lancaster P. and Tismenetsky M. *The Theory of Matrices with Applications. 2nd Edition*. Academic Press, San Diego (1985).
- [28] Mansour M. "Robust Stability of Interval Matrices", *Proceeding of the 28th IEEE Conference in Decision and Control*, Vol 1, pp. 46-51. 1989.
- [29] Mansour M. "Simplified Sufficient Conditions for the Asymptotic Stability of Interval Matrices", *International Journal Control*, Vol 50, No 1, pp.443-444. 1989.
- [30] Martin J. M. and Hewan G. A. "Smallest Destabilizing Perturbations for Linear Systems", *International Journal Control*. Vol. 45 No. 5, pp. 1495-1504. 1987.
- [31] Naimark L. and Zeheb E. "A New Test for Stability of Interval Matrices", *Proc of the 33rd IEEE Conf. on Decision and Control* Vol 3 pp. 3015-3016, 1994.
- [32] Padmanabhan P. and Hollot C. V. "Quadratic Stability of Interval Matrices", *Proceeding of 1994 ACC*. Baltimore Ma. pp. 1994.
- [33] Qiu L. and Davison E. J. "A new Method for the Stability Robustness Determination of State Space Models with Real Perturbations", *Proceeding of the 27th Conference on Decision and Control*. pp. 538-543. 1988.

- [34] Qiu L. and Davison J. "The Stability Robustness Determination of State Space Models with Real Unstructured Perturbations", *Mathematics of Control, signals and Systems*. pp. 247-267. 1991.
- [35] Rantzer, A. "Parametric Uncertainty and Feedback Complexity in Linear Control Systems", *Department of Mathematics, Division of Optimization and system theory. Doctoral dissertation*. Norstedts Tryckeri A. B. Stockholm, 1991.
- [36] Rojas J. A. and Collado J. M. "Campo de Valores en Estabilidad Robusta", *XI Congreso de la AMCA*, pp. 284-297. 1992.
- [37] Rojas Estrada J. A. y Collado M. J. "Estabilidad de la envolvente convexa de matrices", *Memoria del V Congreso latinoamericano de Control Automático Vol 1*, pp. 262-265, La Habana, Cuba.
- [38] Rohn J. "Checking positive definiteness or stability of symmetric interval matrices is NP-hard", *Comment. Math. Univ. Carolinae*, pp. 795-797, 1994
- [39] Rohn J. "Positive Definiteness and Stability of Interval Matrices", *Faculty of mathematics and Physics Charles University, Prag*. Internal report. 1992
- [40] Rohn J. "Stability of Interval Matrices: The real eigenvalue case", *IEEE Transaction on Automatic Control*. Vol 37, No. 10, pp. 1604-1605. 1992.
- [41] Shi Z-C. and Bin Gao W-B. "A Necessary and Sufficient Condition for the Positive-Definiteness of Interval Symetric Matrices", *International Journal Control*. Vol 43 No 1, pp. 325-328. 1986

- [42] Soh C. B. "Characterizations of Eigenvalues of Interval Matrices", *Control Theory and Advanced Technology*. Vol. 1. pp. 123-131. 1990.
- [43] Soh Y. C. and Foo Y. K. "Comments on Stability of a Polytope of Matrices: Counterexamples", *IEEE Transaction on Automatic Control*. Vol 34, No. 12, pp. 1324-1326. 1989.
- [44] Soh C. B. "Stability Margins of Dynamic Interval Systems", *Control theory and advanced technology*. Vol. 7 No. 4, pp. 709-719. 1991.
- [45] Stein G, Hartmann G. L. and Hendrick R. C. "Adaptive Control Laws for F-8 Flight Test", *IEEE Transaction on Automatic Control*. Vol 22, No. 5, pp. 758-759. 1977.
- [46] Van Loan C. "How near is a Stable Matrix to an Unstable Matrix?", *Contemporary mathematics*. Vol 47. pp. 465-478. 1985
- 
- [47] Walker H. M. *The Limits of Computing*, Jones and Bartlett Publishers, Inc. 1994.
- [48] Wang K, Michel A. and Liu D. "Necessary and Sufficient Conditions for the Stability of Interval Matrices", *Proceeding of the 32th Conference on Decision and Control*. pp. 2014-2019. 1993.
- [49] Wang K. and Michel A. N. "On Sufficient Conditions for the Stability of Interval Matrices", *System and Control letters* pp. 345-351. 1993.
- [50] Wang Q-G. "Necessary and Sufficient conditions for Stability of a Matrix Polytope with Normal Vertex Matrices", *Automatica*, 27, pp. 887-888. 1991.

- [51] Wicks M. A. "Computing Robustness of System Properties with Respect to Structured real Matrix Perturbations", *Proceeding of the 28th IEEE Conference in Decision and Control*, Vol 2, pp. 1909-1914. 1992.
- [52] Yedavalli R. K. "Stability Analysis of Interval Matrices: another Sufficient Condition", *International Journal Control*, Vol 43 No 3, pp. 767-772. 1986.
- [53] Zhou K., Stoustrap J. and Niemann H. H. "Schur Stability of Uncertain Matrices", *Proc. of 31nd IEEE Conf. on Decision and Control* Vol 2 pp. 1565-1566, 1992.



# UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



## APENDICE

En esta parte se incluyen algunos de los resultados presentados en este trabajo y que fueron aceptados para su publicación en Congresos Internacionales:

- 1.- **A Very Simple Stability Test to Determine the Stability of an Interval Matrix**, presentado en el American Control Conference ACC '94 en Baltimore, Maryland, U.S.A.
- 2.- **Análisis de Estabilidad de Sistemas con Incertidumbre** presentado en el 10° Congresso Brasileiro de Automática (CBA '94) y en el 6° Congresso Latinoamericano de Controle Automático en Rio de Janeiro, Brasil.
- 3.- **Análisis de Estabilidad de Sistemas con Incertidumbre: Prueba de Mansour**, presentado en el 10° Congresso Brasileiro de Automática (CBA '94) y en el 6° Congresso Latinoamericano de Controle Automático en Rio de Janeiro, Brasil.
- 4.- **New Simple Tests for Hurwitz and Schur Stability of Interval Matrices**, aceptado para su presentación en el European Control Conference ECC '95 en Roma, Italia.

NOMBRE DEL ARTICULO:

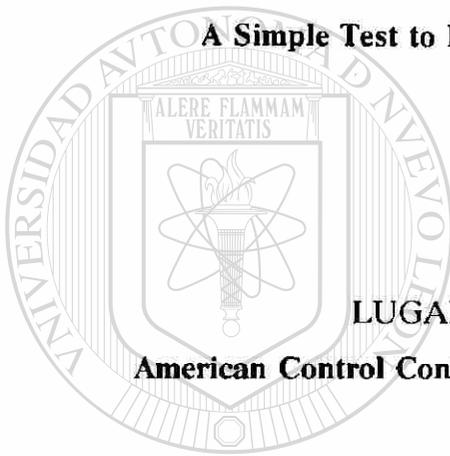
**A Simple Test to Determine the Stability of an Interval Matrix**

REFERENCIA:

**[14]**

LUGAR DONDE FUE PRESENTADO:

**American Control Conference ACC '94 en Baltimore, Maryland, U. S. A.**



UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



## A SIMPLE TEST TO DETERMINE THE STABILITY OF AN INTERVAL MATRIX

J.J.D. Delgado-Romero<sup>1</sup>, J.A. Rojas-Estrada<sup>2</sup> and J. M. Collado

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Universidad Autónoma de Nuevo León

Apartado Postal 65-F

66451 San Nicolás de los Garza, N.L.

Phone (8) 352-48-34

FAX (8) 352-87-48

MEXICO

### Abstract

In this paper we describe a sufficient condition by means of a simpler test that guarantees stability of a linear time-invariant system with parametric uncertainty in the "A" matrix. The parametric uncertainty is represented by an interval matrix. The proposed test is simpler than the existing ones. It is based on the eigenvalues of the hermitian part of  $L$  and  $P = (U - L)$ , an upper bound  $\xi$ , is derived from their maximum eigenvalues. The result presented is for the general case of an interval matrix. Simple examples are shown to illustrate its practical application.

stability of an interval matrix. The proposed check is only sufficient, but compared with existing ones [2] [3] [8] is very simple. In [4] the test consists in checking the hermitian part of  $2^{n-1} \times 2^{n-1}$  corners to guarantee stability of the interval matrix. Another recent result [5] the proof is reduced to check  $2^{n-1}$ , but is applicable to a very restricted class of interval matrices. Very recently Wang and Michel [8] strengthened the result of [4] to test only  $2^{n-1}$  corners.

In the present work, we only calculate the largest eigenvalue of the hermitian part of two matrices,  $L$  and  $P$ , (see notation), if the sum of this two eigenvalues is negative then the interval matrix is stable. This simplicity is paid with a more conservative result than [4] or [8].

The paper is organized as follows: In section II, we present some preliminary results, the main results are given in section III, Numerical examples are shown in section IV, conclusions and future work is presented in section V.

### Notation

$R^{n \times n}$	$n \times n$ real matrices
$C^{n \times n}$	$n \times n$ complex matrices
$I$	Identity $n \times n$ matrix
$\lambda_i(A)$	$i$ th eigenvalue of $A$
$\sigma(A)$	Spectrum of $A = \{ \lambda_i \in C :  \lambda I - A  = 0 \}$
$\lambda_{\max}(A)$	$\max\{ \text{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(A) \}$
$M = [L, U]$	Interval matrix family where $l_{ij} \leq m_{ij} \leq u_{ij}$
$P = [U - L]$	Difference matrix $P = [p_{ij}] \geq 0 : p_{ij} = (u_{ij} - l_{ij}), i, j = 1, \dots, n$
$A < B$	$B$ is greater than $A$ componentwise i.e. $a_{ij} < b_{ij}, \forall i, j = 1, \dots, n$
$A \geq 0$	i.e. $a_{ij} \geq 0 \forall i, j = 1, \dots, n$
$H(A)$	Hermitian part of $A$ [1]
$F(A)$	$\{z \in C : z = x^*Ax, x^*x = 1\} =$ field of values of $A$ . [1].
$ x $	Absolute value of $x$

### II Preliminaries

In this section we will show some basic results that support the main results in the next section.

**Lemma 2.1.** Let  $A, B \in R^{n \times n}$ , then  $\lambda_{\max}(H(A) + H(B)) \leq \lambda_{\max}H(A) + \lambda_{\max}H(B)$

**Proof:** Since the field of values [1], of a hermitian matrix is the convex combination of its eigenvalues, we can use this concept to prove this lemma. Using the fact [1] that  $\max(F(H(A))) = \lambda_{\max}H(A)$  and the property of subadditivity where the set sum is the sums of all possible pairs, one from each, we have

$$\begin{aligned} F(A + B) &\subset F(A) + F(B) \\ F(H(A) + H(B)) &\subset F(H(A)) + F(H(B)) \\ \max(F(H(A) + H(B))) &\leq \max(F(H(A))) \\ &\quad + \max(F(H(B))) \\ \lambda_{\max}(H(A) + H(B)) &\leq \lambda_{\max}H(A) + \lambda_{\max}H(B) \end{aligned}$$

### I Introduction

Consider the linear time-invariant system described by the equations

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

where  $A, B$  and  $C$  are real matrices of dimensions  $n \times n, n \times m$  and  $p \times n$  respectively. It is known that stability of the system depends only on the  $A$  matrix. When there is parametric uncertainty,  $A$  could be represented by a set of interval matrix, a special case of a polytope of matrices, i.e.  $A \in [L, U]$ .

In this paper we propose a new very simple test for the

**Fact 2.2.** Let the interval matrix  $M = [L, U]$  and  $U = L + P$ , then  $H(U) = H(L) + H(P)$

**Fact 2.3** [6],[7] Let  $A \in C^{n \times n}$ , and  $B \in R^{n \times n}$ . If  $|A| \leq B$ , then  $\rho(A) \leq \rho(|A|) \leq \rho(B)$ .

**Fact 2.4** [7] (Perron's theorem) If  $A \in C^{n \times n}$  and  $A > 0$ , then  $\rho(A)$  is an eigenvalue of  $A$ , indeed  $\rho(A) = \lambda_{\max}(A)$ .

### III Main result

**Fact 3.1.** Let the interval matrix  $M = [L, U]$  where  $L$  and  $U \in$

<sup>1</sup> The work of this author was partially supported by Instituto Tecnológico de Morelia and by CONACyT, MEXICO.

<sup>2</sup> The work of this author was partially supported by Instituto Tecnológico de Nuevo Laredo and by CONACyT, MEXICO.

$\mathbb{R}^{2^m}$  and  $P = (U-L)$ , the set of the corner matrices can be expressed as:

$$M_k = L + P_k \quad \forall k=1,2,\dots,2^m \quad \text{where } P_k(i,j)=0 \text{ or } P_k(i,j) = p_i$$

**Theorem 3.2** Let the interval matrix  $M = [L,U]$  where  $L$  and  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  and  $P = (U-L)$ , the interval matrix  $[L,U]$  is stable if  $\xi = \lambda_{\max}(H(L)) + \lambda_{\max}(H(P)) < 0$ .

**Proof:** Using the fact 2.2 and by the fact 3.1 the hermitian part of the  $2^m$  corners is as follows

$$H(M_k) = H(L) + H(P_k) \quad \forall k = 1,2,\dots,2^m$$

$$\lambda_{\max}(H(M_k)) = \lambda_{\max}(H(L) + H(P_k))$$

by the lemma 2.1

$$\lambda_{\max}(H(M_k)) \leq \lambda_{\max}(H(L)) + \lambda_{\max}(H(P_k))$$

It can be seen in the above expression that since  $H(P_k) \geq 0$ , then by the fact 2.3,

$$\rho(H(P_k)) = \lambda_{\max}(H(P_k)) \text{ so}$$

$$\lambda_{\max}(H(M_k)) \leq \lambda_{\max}(H(L)) + \rho(H(P_k))$$

now by the fact 2.3,  $\rho(H(P_k)) \leq \rho(H(P))$

then

$$\lambda_{\max}(H(M_k)) \leq \lambda_{\max}(H(L)) + \rho(H(P))$$

using  $\lambda_{\max}$  instead of  $\rho$ , we have finally

$$\lambda_{\max}(H(M_k)) \leq \lambda_{\max}(H(L)) + \lambda_{\max}(H(P)) = \xi \quad \forall k = 1,2,\dots,2^m$$

**Remark 3.4** The proposed test just checks the eigenvalues of the hermitian parts of two matrices, they are  $L$  and  $P$ , it means that the procedure of checking the  $2^m$  corner matrices is drastically reduced. The cost of this reduction is that this test is more conservative than test all the vertex matrices.

#### IV Numerical examples

In this section we present two examples to illustrate how simple is the test. In both cases it will be shown in the figures, the eigenvalues of the hermitian part of the  $2^m$  corners of  $[L,U]$ , the eigenvalues of the matrices generated by Mansour in [4, theorem 1] and the upper bound  $\xi$

**Example 1**

Let  $M = [L,U]$  where  $U, L$  and  $P$  are given by

$$U = \begin{bmatrix} -8.8 & -3.5 & -2.3 \\ -3.1 & -8.7 & -2.7 \\ -2.7 & -2.8 & -8.9 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} -9.0 & -3.9 & -3.2 \\ -3.1 & -9.3 & -3.0 \\ -3.5 & -3.6 & -9.2 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.9 \\ 0.0 & 0.6 & 0.3 \\ 0.8 & 0.8 & 0.3 \end{bmatrix}$$

computing the upper bound,  $\xi = -4.155$

**Example 2**

Let  $M = [U,L]$  where  $U, L$  and  $P$  are given by

$$U = \begin{bmatrix} -3.38 & 0.05 & -0.44 \\ -0.71 & -1.77 & -0.27 \\ -1.31 & -0.97 & -1.88 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} -3.39 & -0.65 & -0.63 \\ -1.12 & -2.71 & -0.59 \\ -1.34 & -1.27 & -2.72 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.70 & 0.19 \\ 0.41 & 0.94 & 0.32 \\ 0.03 & 0.30 & 0.84 \end{bmatrix}$$

in this case  $\xi = -0.3852$

In both cases the values of  $\xi$  is  $< 0$ , then according to the theorem 3.3 the interval matrices are stable.

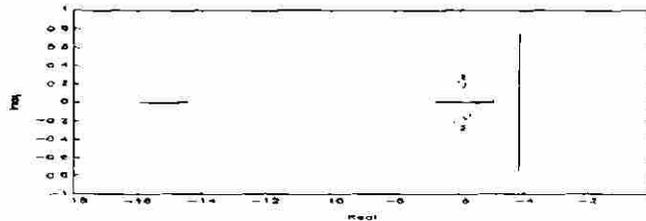


Figure 1. Eigenvalues of: (x) the matrices of Mansour, (.) the matrices of all corners. The upper bound  $\xi$  is expressed by the vertical line.

#### V Conclusions and Future work

In this work sufficient conditions for the stability of a linear time-invariant system, where the uncertainty is expressed by an interval matrix, have been shown. Based on the eigenvalues of the hermitian parts of two matrices, an upper bound  $\xi$  is obtained. As a consequence the application of the test is very simple, avoiding to check up to  $2^{21}$  corner matrices, the proposed test gives a more conservative bound for stability than [4] or [8]. This result represents the simplest test among various result with sufficient conditions reported in the literature. We think this result is a suitable choice to determine the stability of a general interval matrix. We believe that making further research by this mean would yield an improved bound.

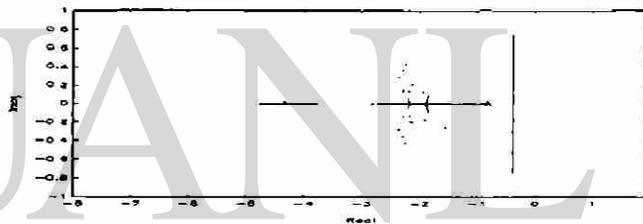


Figure 2. Eigenvalues of:(x) the matrices of Mansour, (.) the matrices of all corners. The upper bound  $\xi$  is expressed by the vertical line.

#### References

- [1] R. A. Horn and C. R. Johnson. *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press, New York (1991).
- [2] Y.T.Juang, C.S. Shao. Stability Analysis of Dynamic Interval Systems. *Int. Journal Control*, Vol 49, No. 4, pp. 1401. 1989.
- [3] J. A. Heinen. Sufficient conditions for stability of Interval Matrices. *Int. Journal Control*, Vol 39, No. 6, pp. 1323-1328. 1984.
- [4] M. Mansour. Robust Stability of Interval Matrices. *Proc. of the 28th IEEE Conf. Decis. and Control*, Vol 1, pp. 46-51. 1989.
- [5] J. Rohn. Stability of interval matrices: The real eigenvalue case. *IEEE Trans on Autom. Contr.* Vol 37, No. 10, pp. 1604-1605. 1992.
- [6] P. Lancaster and M. Tismenetsky. *The Theory of Matrices with Applications. 2nd Ed.* Academic Press, San Diego (1985).
- [7] R. A. Horn and C. R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, New York (1985).
- [8] K. Wang and A. N. Michel: On sufficient conditions for the stability of interval matrices. *System and Control letters* pp. 345-351. 1993.

NOMBRE DEL ARTICULO:

**Análisis de Estabilidad de Sistemas con Incertidumbre**

REFERENCIA:

[12]

LUGAR DONDE FUE PRESENTADO:

**10° Congresso Brasileiro de Automática (CBA '94) y 6° Congresso Latinoamericano de Controle Automático en Rio de Janeiro, Brasil**



---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



# ANÁLISIS DE ESTABILIDAD ROBUSTA DE SISTEMAS CON INCERTIDUMBRE<sup>1</sup>

Juan J. D. Delgado R, Juan A. Rojas E. y Joaquín Collado M.  
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica  
Universidad Autónoma de Nuevo León  
Apartado Postal 65-F  
66451 San Nicolás de los Garza, N.L.  
Phone/Fax (83) 76-45-14

## RESUMEN

En este artículo se describen condiciones suficientes para garantizar la estabilidad de un sistema lineal invariante en el tiempo con incertidumbre paramétrica en la matriz A.

La incertidumbre es representada por una matriz intervalo.

La prueba aquí presentada es muy simple comparada con las existentes, ya que solo se necesita conocer el valor de  $\delta$ , el cual es función de la parte hermítica de las matrices L y P. El resultado presentado es para el caso general de una matriz intervalo. Se muestran dos ejemplos sencillos para ilustrar la aplicación práctica de la prueba.

Esta prueba está basada principalmente en las propiedades del producto Hadamard.

$$A \circ B = [a_{ij} \times b_{ij}]; i, j = 1, 2, \dots, n$$

## ABSTRACT

In this paper we describe a sufficient condition by means of a simple test that guarantee stability of a linear time-invariant system with parametric uncertainty in the A matrix.

The parametric uncertainty is represented by an interval matrix.

The proposed test is simpler than the existing ones. We only need to know the value of  $\delta$  which is based on the eigenvalues of the hermitian part of the matrices L and P. The result presented is for the general case of an interval matrix. Simple examples are shown to illustrate its practical application.

This test is based on the properties of the Hadamard product.

Trabajo parcialmente financiado por Instituto Tecnológico de Morelia, Instituto Tecnológico de Nuevo Laredo y por CONACyT, MEXICO.

## NOTACION:

$\mathbb{R}^{n \times m}$	matrices reales de dimensión $n \times m$
$\mathbb{C}^{n \times m}$	matrices complejas de dimensión $n \times m$
I	matriz identidad de dimensión $n \times n$
$\lambda_i(A)$	$i$ -ésimo valor característico de A
$\sigma(A)$	Espectro de $A = \{ \lambda, \in \mathbb{C} :  \lambda I - A  = 0 \}$
$\lambda_{\max}(A)$	$\max\{ \text{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(A) \}$
$M=[L,U]$	Familia de matriz intervalo, donde $l_{ij} \leq m_{ij} \leq u_{ij}$
$P=[U-L]$	Matriz de perturbación $P=[p_{ij}] \geq 0$ $p_{ij}=(u_{ij}-l_{ij})=p$ , $i,j=1,\dots,n$
$X \circ Y$	Producto Hadamard (elemento elemento) de matrices $n \times n$ [1].
$H(A)$	Parte hermítica de A [1]
$F(A)$	Campo de valores de $A = \{ z \in \mathbb{C} : z = x^* A x, x^* x = 1 \}$ [1].
$ x $	Valor absoluto de $x$
$\delta$	Cota superior $= \lambda_{\max} H(L) + np$
UNOS(n)	Matriz de unos, UNOS(n) = unos $_{ij} = 1$ para toda $i,j=1,2,\dots,n$

Cuando existe incertidumbre paramétrica, la matriz A puede ser representada por un conjunto de matriz intervalo  $A \in [L, U]$

El problema de la estabilidad de un politopo de  $n$  matrices estables aún esta abierto.

## II.- RESULTADOS PRELIMINARES

En esta sección se muestran algunos resultados que son necesarios para soportar la demostración del teorema principal. Primero se muestra un método para generar las matrices vértice de la matriz intervalo  $M = [L,U]$ .

Lema 2.1.- Sea  $C_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  las matrices vértice generadas por la matriz intervalo, entonces las matrices  $C_k$  pueden ser obtenidas por:

$$C_k = L + P \circ T_k \quad \forall k=1,2,\dots,2^{n^2}$$

donde  $T_k$  es una matriz formada con los elementos que expresan el número binario de  $k-1$ , esto es  $t_{ij} \in \{1,0\}$   $i,j=1,2,\dots,n$ .

## I.- INTRODUCCION

Considere el sistema lineal invariante en el tiempo descrito por las ecuaciones siguientes

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

donde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$

La estabilidad del sistema esta determinada exclusivamente por la matriz A.

**Comentario:** Como los vértices no garantizan la estabilidad de la matriz intervalo, y la parte hermítica de los vértices sí garantizan la estabilidad; se toma entonces la parte hermítica de dichos vértices, esto es:

$$H(C_k) = H(L) + H(P) \circ W_k \quad \forall k=1,2,\dots,2^{n^2}$$

y  $W_k$  es una matriz hermítica dada como sigue:

$$W_k = \{w_{k_{ij}} = w_{k_{ji}} = s : s \in \{0,1\}\} \\ \forall i,j=1,2,\dots,n; \quad \forall k=1,2,\dots,2^{n^2}$$

**Lema 2.2.-** Sea  $W_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  donde  $W_k$  esta dado como en el comentario del lema 2.1

$$W_k = \{w_{k_{ij}} = w_{k_{ji}} = s : s \in \{0,1\}\} \\ \forall i,j=1,2,\dots,n; \quad \forall k=1,2,\dots,2^{n^2}$$

entonces

$$\lambda_{\max}(W_k) \leq n \quad \forall k = 1,2,\dots, 2^{n^2}$$

**Prueba:** Para probar este lema, se emplean los discos Geršgorin [11]. Los discos Geršgorin para una matriz con la estructura de  $W$  esta definida por:

$$\{z: |z - w_{jj}| \leq \rho_j\} \quad j = 1,2,\dots,n$$

donde

$$\rho_j = \sum_{k=1}^n |w_{jk}| \quad \forall k \neq j$$

$\rho_j$  representa el radio del disco  $j$ -ésimo entonces cada valor característico de  $W$  cae en alguno de los discos, pero por la estructura de  $W$ , cualquier  $\rho_j \leq n$  (no es mayor que el mas grande valor característico de  $W$ ).

**Lema 2.3.-** Sea  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , hermíticas, entonces

$$\lambda_{\max}(A+B) \leq \lambda_{\max}(A) + \lambda_{\max}(B)$$

**Prueba:** Usando el teorema de Weyl: Sean  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  hermíticas y cuyos valores característicos están ordenados en forma ascendente, esto es:

$$\lambda_{\min}(A) = \lambda_1(A) \leq \dots \leq \lambda_k(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A) = \lambda_{\max}(A)$$

$$\lambda_{\min}(B) = \lambda_1(B) \leq \dots \leq \lambda_k(B) \leq \dots \leq \lambda_n(B) = \lambda_{\max}(B)$$

$$\lambda_{\min}(A+B) = \lambda_1(A+B) \leq \dots \leq \lambda_k(A+B) \leq \dots \leq \lambda_n(A+B) = \lambda_{\max}(A+B)$$

entonces:

$$\lambda_1(A) + \lambda_k(B) \leq \lambda_k(A+B) \leq \lambda_n(A) + \lambda_k(B)$$

como  $\lambda_1(A) = \lambda_{\min}(A)$  y  $\lambda_n(A) = \lambda_{\max}(A)$  se tiene

$$\lambda_{\min}(A) + \lambda_k(B) \leq \lambda_k(A+B) \leq \lambda_{\max}(A) + \lambda_k(B)$$

y si evaluamos para  $k=n$  ( $\lambda_n(B) = \lambda_{\max}(B)$ )

$$\lambda_{\min}(A) + \lambda_{\max}(B) \leq \lambda_{\max}(A+B) \leq \lambda_{\max}(A) + \lambda_{\max}(B)$$

tenemos

$$\lambda_{\max}(A+B) \leq \lambda_{\max}(A) + \lambda_{\max}(B)$$

$$\lambda_{\max}\{Q_k\} \leq \lambda_{\max}\{H(L)\} + \lambda_{\max}\{p \times W_k\} \leq \lambda_{\max}\{H(L)\} + p \times \lambda_{\max}\{W_k\}$$

### III.- RESULTADO PRINCIPAL

En esta sección se presenta el teorema que dá las condiciones para asegurar la estabilidad por medio de la parte hermítica de las matrices extremo de la matriz intervalo.

**Teorema 3.1.-** Sea la matriz intervalo  $M=[L,U]$ , donde  $L, U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $P=U-L=p \times UNOS(n)$ .

Entonces  $M$  es estable si

$$\delta = \lambda_{\max}\{H(L)\} + n \times p < 0$$

**Prueba:** La parte hermítica de los vértices de la matriz intervalo puede ser representada por:

$$Q_k = H(L) + H(P) \circ W_k$$

donde  $W_k$  es una matriz hermítica de unos y ceros. Puede entonces establecerse que

$$\lambda_{\max}\{Q_k\} = \lambda_{\max}\{H(L) + H(P) \circ W_k\} \quad \forall k = 1, 2, \dots, 2^n$$

Ahora por lema 2.3 y puesto que  $H(P) \circ W_k$  es hermítica, la expresión anterior se puede transformar en

$$\lambda_{\max}\{Q_k\} = \lambda_{\max}\{H(L) + H(P) \circ W_k\} \leq \lambda_{\max}\{H(L)\} + \lambda_{\max}\{H(P) \circ W_k\}$$

$$\forall k = 1, 2, \dots, 2^n$$

pero como  $H(P) = p \times UNOS(n)$ , entonces  $H(P) \circ W_k = p \times (UNOS(n) \circ W_k) = p \times W_k$  (La matriz identidad en el producto Hadamard es  $UNOS(n)$ ).

por lema 2.2,  $\lambda_{\max}\{W_k\}$  esta acotada superiormente por  $n$ , esto es, ninguno de los valores característicos de  $W_k$  es mayor

que  $n \quad \forall k = 1, 2, \dots, 2^n$

basado en este hecho la condición de estabilidad es:

$$\lambda_{\max}\{Q_k\} \leq \delta = \lambda_{\max}\{H(L)\} + n \times p < 0$$

**Comentario:** Si la matriz de perturbación no es constante ( $P \neq p \times UNOS(n)$ ), entonces debe tomarse una matriz de perturbación cuyos elementos sea el mayor valor de  $P$ ; lo cual hace:

$$P = p_{\max} \times UNOS(n)$$

y la condición de estabilidad es:

$$\lambda_{\max}\{Q_k\} \leq \delta = \lambda_{\max}\{H(L)\} + n \times p_{\max} < 0$$

### IV.- EJEMPLOS NUMERICOS

En esta sección se presentan dos ejemplos numéricos con la finalidad de mostrar la cota  $\delta$ . El primer ejemplo muestra una matriz intervalo que es estable con la prueba de [3, teorema 20] y también es estable con la prueba aquí presentada  $\delta$ .

En el segundo ejemplo, la prueba de Mansour [3, teorema 20] muestra que la matriz intervalo es estable pero  $\delta$  no asegura estabilidad.

**Ejemplo 1**

Sea  $M = [L,U]$  donde

$$U = \begin{bmatrix} -8.8 & -3.5 & -2.3 \\ -3.1 & -8.7 & -2.7 \\ -2.7 & -2.8 & -8.9 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} -9.0 & -3.9 & -3.2 \\ -3.1 & -9.3 & -3.0 \\ -3.5 & -3.6 & -9.2 \end{bmatrix}$$

**Ejemplo 2**

Sea  $M = [U,L]$  donde  $U$  y  $L$  son dados por

$$U = \begin{bmatrix} -3.38 & 0.05 & -0.44 \\ -0.71 & -1.77 & -0.27 \\ -1.31 & -0.97 & -1.88 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} -3.39 & -0.65 & -0.63 \\ -1.12 & -2.71 & -0.59 \\ -1.34 & -1.27 & -2.72 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.9 \\ 0.0 & 0.6 & 0.3 \\ 0.8 & 0.8 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$\delta = -3.0564$

$$P = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.70 & 0.19 \\ 0.41 & 0.94 & 0.32 \\ 0.03 & 0.30 & 0.14 \end{bmatrix}$$

$\delta = 1.0417$

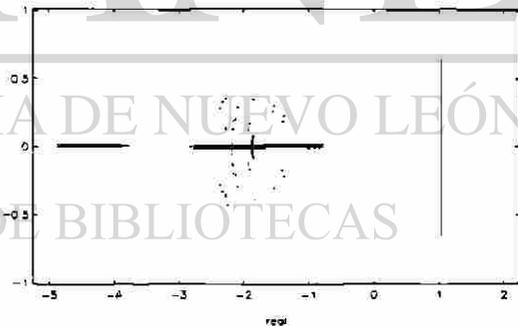


Figura 1.- Valores característicos de:  
(x) Matrices de Mansour,(.) Matrices de los vértices del hipercubo y la línea vertical representa la cota dada en este artículo.

Figura 2.- Valores característicos de:  
(x) Matrices de Mansour,(.) Matrices de los vértices del hipercubo y la línea vertical representa la cota dada en este artículo.

## V.- CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

El trabajo aquí presentado es una nueva y muy simple prueba para asegurar la estabilidad de una matriz intervalo. Esta prueba representa una condición suficiente, pero es la más simple de las existentes. La matriz de perturbación tiene la restricción de ser de la forma  $p \times UNOS(n)$ .

Para el trabajo futuro se espera, primero eliminar la restricción de la matriz de perturbación y después reducir la cota superior  $\delta$  dada en este artículo.

### BIBLIOGRAFIA

- [1] R. A. Horn and C. R. Johnson. *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press, New York (1991).
- [2] M. Fu and B. R. Barmish. A Generalization of Kharitonov's interval polynomial framework to handle linearly dependent uncertainty. Technical Report Electrical and Computer Engineering, University of Wisconsin - Madison, (1987).
- [3] M. Mansour. Robust Stability of Interval Matrices. *Proc. of the 28th IEEE Conf. Decis. and Control*, Vol 1, pp. 46-51. 1989.
- [4] Y. T. Juang, C.S. Shao. Stability analysis of Dynamic Interval Systems. *Int. Journal Control*, Vol 49, No. 4, pp. 1401. 1989.
- [5] James A. Heinen. Sufficient conditions for stability of Interval Matrices. *Int. Journal Control*, Vol 39, No. 6, pp. 1323-1328. 1984.
- [6] J. M. Collado and J.A. Rojas. New technique for Robust Stability. *Proc. of the 31st IEEE Conf. Decis. and Control*. Vol 1. pp. 231-236. 1992.
- [7] J.A. Rojas and J.M. Collado. Campo de Valores en Estabilidad Robusta. *XI Congreso de la AMCA*. pp. 284-297. 1992.
- [8] Q-G. Wang. Necessary and Sufficient conditions for Stability of a Matrix Polytope with Normal Vertex Matrices. *Automatica*, 27, pp. 887-888. 1991.
- [9] Foo Y. K. and Soh Y. C. Stability Analysis of a Family of Matrices. *IEEE Trans on Autom. Contr.* Vol 35, No. 11, pp. 1257-1259. 1990.
- [10] J. Rohn. Stability of interval matrices: The real eigenvalue case. *IEEE Trans on Autom. Contr.* Vol 37, No. 10, pp. 1604-1605. 1992.
- [11] P. Lancaster and M. Tismenetsky. *The Theory of Matrices with Applications*. 2nd Ed. Academic Press, San Diego (1985).
- [12] R. A. Horn and C. R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, New York (1985).

NOMBRE DEL ARTICULO:

**Análisis de Estabilidad de Sistemas con Incertidumbre: Prueba de Mansour**

REFERENCIA:

[13]

LUGAR DONDE FUE PRESENTADO:

**10º Congresso Brasileiro de Automática (CBA '94) y 6º Congresso Latinoamericano  
de Controle Automático en Rio de Janeiro, Brasil**

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



# ANÁLISIS DE ESTABILIDAD ROBUSTA DE SISTEMAS CON INCERTIDUMBRE: PRUEBA DE MANSOUR<sup>1</sup>

J. J. D. Delgado Romero y J. A. Rojas Estrada  
 Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica  
 Universidad Autónoma de Nuevo León  
 Apartado Postal 65-F  
 66451 San Nicolás de los Garza N. L.

**RESUMEN:** En este artículo se describe un método algorítmico para generar las  $2^{n(n-1)/2}$  matrices de Mansour, las cuales son usadas en análisis de estabilidad robusta de sistemas con incertidumbre y pueden ser representadas por una matriz intervalo. Esta prueba realiza análisis de la parte hermitica de las matrices de Mansour. El método algorítmico aquí presentado genera las matrices de Mansour como un producto Hadamard de la matriz de perturbación con una matriz de peso binaria.

donde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$

La estabilidad del sistema esta determinada exclusivamente por la matriz A. Cuando existe incertidumbre paramétrica la matriz A puede ser representada como una matriz intervalo, la cual es un caso especial de familia de matrices (politopo de matrices).

El problema de estabilidad de un politopo de  $n$  matrices estables para el caso general aún está abierto. En [5] y [6] se presentan condiciones necesarias y suficientes cuando  $n = 2$ ; para el caso general (cuando  $n > 2$ ) en [7], [8] y [9] se presentan sólo condiciones suficientes para garantizar estabilidad robusta de la matriz intervalo. En [10] y [11] se presentan condiciones necesarias y suficientes si la matriz intervalo es simétrica o normal.

## I.- NOTACION

$\mathbb{R}^{n \times m}$	Matrices reales de dimensión $n \times m$
$\mathbb{C}^{n \times m}$	Matrices complejas de dimensión $n \times m$
I	Matriz identidad
$\lambda_j(A)$	j-ésimo valor característico de A
$\sigma(A)$	Espectro de $A = \{\lambda_j \in \mathbb{C} :  \lambda I - A  = 0\}$ [1]
$\lambda_{\max}(A)$	$\text{Max}\{\text{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$
$M_j$	j-ésima matriz de Mansour, correspondiente a un vértice de la familia de matriz intervalo [2]
$N = [L, U]$	Familia de matriz intervalo con $L_{ij} \leq N_{ij} \leq U_{ij}$
$P = U - L$	Matriz de perturbación con $P_{ij} = U_{ij} - L_{ij} \forall i, j = 1, 2, \dots, n$
$A \circ B$	Producto Hadamard de matrices $n \times n$ [3],[4]
$H(A)$	Parte hermitica de A

## III.- RESULTADO PRINCIPAL

En esta sección se demuestra que las matrices de Mansour pueden ser representadas por un producto Hadamard de la matriz de perturbación P y una matriz binaria de peso, con lo cual se generan las  $2^{n(n-1)/2}$  matrices de Mansour.

**TEOREMA:** Sea  $N = [L, U] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la matriz intervalo y  $P = U - L$  la matriz de perturbación, sean  $M_k$  las  $2^{n(n-1)/2}$  matrices de Mansour y  $T_k$  las  $2^{n(n-1)/2}$  matrices binarias de peso tales que:

$$M_k = \begin{cases} m_{k_{ij}} = u_{ij} & \text{si } i=j \\ m_{k_{ij}} = m_{k_{ji}} = r : r \in \left\{ \frac{1_j + 1_j}{2}, \frac{u_{ij} + u_{ji}}{2} \right\} & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$\forall ij = 1, 2, \dots, n$$

$$\forall k = 1, 2, \dots, 2^{n(n-1)/2}$$

entonces  $M_k$  puede representarse como:  
 $M_k = H(L) + H(P) \circ T_k$

## II.- INTRODUCCION

Considere el sistema lineal invariante en el tiempo y descrito por las ecuaciones:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Prueba:

$$u_{k,ij} = \frac{l_{ij} + l_{ji}}{2} + \left( \frac{p_{ij} + p_{ji}}{2} \right) t_{k,ij}$$

$$\forall \quad ij = 1,2,\dots,n$$

$$\forall \quad k = 1,2,\dots,2^{n(n-1)/2}$$

pero

$$u_{ij} = l_{ij} + p_{ij} \quad \forall \quad ij = 1,2,\dots,n$$

por lo tanto

$$M_k = \begin{cases} u_{ij} & \text{si } i=j \\ \left( \frac{l_{ij} + l_{ji}}{2} \right) \delta + \left( \frac{u_{ij} + u_{ji}}{2} \right) & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$\forall \quad k=1,2,\dots,2^{n(n-1)/2}$$

$$\forall \quad ij=1,2,\dots,n$$

que son las matrices de Mansour.

Se puede entonces concluir, por el teorema anterior, que las  $2^{n(n-1)/2}$  matrices de Mansour pueden ser representadas por la parte hermítica de la matriz L mas el producto Hadamard de la parte hermítica de la matriz de perturbación P y las  $2^{n(n-1)/2}$  matrices binarias de peso.

#### IV.- EJEMPLOS NUMERICOS

##### EJEMPLO 1:

Sea la siguiente matriz intervalo L, U con perturbación P

$$L = \begin{bmatrix} -2.0 & -1.9 & -1.2 \\ -1.1 & -4.3 & -3.0 \\ -1.1 & -3.6 & -5.2 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} -1.8 & -0.5 & -0.1 \\ -1.1 & -3.7 & -2.7 \\ -0.7 & -2.8 & -3.9 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.2 & 1.4 & 1.1 \\ 0.0 & 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.8 & 1.3 \end{bmatrix}$$

Cuya gráfica de valores característicos de las matrices de Mansour es:

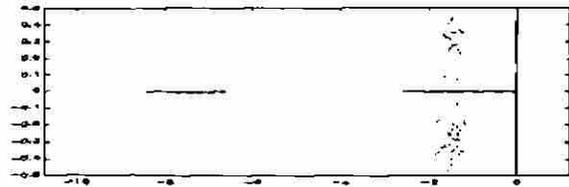


figura 1.- (x) Representa los valores característicos de las matrices de Mansour. (.) Representa los valores característicos de los vértices del hipercono.

##### EJEMPLO2:

Sea la siguiente matriz intervalo L, U con perturbación P

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 2.0 & 4.0 & 3.5 \\ 2.5 & 5.0 & 6.0 \\ 2.1 & 7.0 & 9.2 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1.0 & 2.0 & 0.5 \\ 0.5 & 1.0 & 3.0 \\ 0.1 & 2.0 & 3.2 \end{bmatrix}$$

Cuya gráfica de valores característicos de las matrices de Mansour es:



figura 2.- (x) Valores característicos de las matrices de Mansour. (.) Valores característicos de los vértices del hipercono.

Como la prueba de Mansour presenta solamente condiciones suficientes de estabilidad, entonces nada puede asegurarse acerca de la estabilidad si alguna o algunas matrices de Mansour son inestables.

Por lo tanto de la figura 2 no puede asegurarse estabilidad del sistema con incertidumbre del ejemplo 2.

## V.- PROGRAMA

```
mansour func
c1g[n1,m1]=size(u);
[n2,m2]=size(l);
b=u-l;
hl=(l+l')/2;
hu=(u+u')/2;
hb=(b+b')/2;
sl=(l-l')/2;
su=(u-u')/2;
sb=(b-b')/2;
jul=[max(eig(hu)) min(eig(hu)) max(eig(hl))
min(eig(hl))];
jb=max(real(eig(hb)));
imjul=[max(imag(eig(su))), max(imag(eig(sl)))];
imjul=[imjul, min(imag(eig(su))),
min(imag(eig(sl)))];
imjb=max(imag(eig(sb)));
mare=max(jul)+jb;
mire=min(jul)-jb;
maim=max(imjul)+imjb;
miim=-maim;
v=[mire mare miim maim];
axis(v);
plot(real(lin),imag(lin),'w')
hold on
n=(zz)*(zz-1)/2;
m=zz;
for i=0:2^n-1,
z=i;
for j=1:n,
z2=z/2;
z=fix(z/2);
z3=2*(z2-z);
c(j)=z3;
end
conta=1;
for k=1:zz,
for zm=1:zz,
if zm>k
d1(k,zm)=c(conta);
conta=conta+1;
else
d1(k,zm)=0;
end
end
end
d11=d1+d1';
hadamh=(hu-hl).*d11;
```

```
d=hu-hadamh
kld=eig(d);
plot(real(kld),imag(kld),'xg')
end
k12=0;
for i=0:2^(zz*zz)-1,
z=i;
eje(i+1)=i;
for j=1:n*m
z2=z/2;
z=fix(z/2);
z3=2*(z2-z);
c(j)=z3;
end
for k=1:n,
n1=m*(k-1)+1;
n2=m*(k-1)+m;
d1(k,1:m)=c(1,n1:n2);
end
hadam=(u-l).*d1;
d=l+hadam;
hd=(d+d')/2;
plot(real(eig(d)),imag(eig(d)),'r')
end
hold off
end
end
```

## VI.- CONCLUSIONES

En este trabajo se presenta método algorítmico para generar las matrices de Mansour en la prueba de ESTABILIDAD ROBUSTA de sistemas con incertidumbre paramétrica representada como una matriz intervalo.

## VII.- BIBLIOGRAFIA

- [1] R. A. Horn and C. R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, New York (1985).
- [2] M. Mansour. Robust Stability of interval matrices. *Proc. of the 28th IEEE Conf. Desic. and Control* Vol 1, pp. 46-51. 1989.
- [3] R.A. Horn and C.R. Johnson. *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press, New York (1991).
- [4] P. Lancaster and M. Tismenetsky. *The theory of Matrices with Applications*. 2dn. Ed. Academic Press, San Diego (1985).
- [5] M. Fu and B. R. Barmish. A Generalization of Kharitonov's interval polynomial framework to handle linearly dependent uncertainty. Technical

NOMBRE DEL ARTICULO:

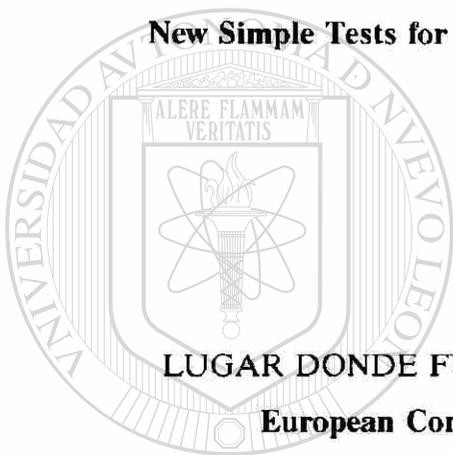
**New Simple Tests for Hurwitz and Schur Stability of Interval Matrices**

REFERENCIA:

**[15]**

LUGAR DONDE FUE ACEPTADO PARA SU PRESENTACION:

**European Control Conference ECC '95 en Roma, Italia**



UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



# NEW SIMPLE TESTS FOR HURWITZ AND SCHUR STABILITY OF INTERVAL MATRICES<sup>1</sup>

J. J. D. Delgado-Romero<sup>2</sup>  
 Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica  
 Universidad Autónoma de Nuevo León  
 Apartado Postal 65-F  
 San Nicolás de los Garza, 66451 N. L.  
 México  
 jdelgado@ccr.dsi.uanl.mx

J. A. Rojas-Estrada  
 Departamento de Eléctrica y Electrónica  
 Instituto Tecnológico de Nuevo Laredo  
 Reforma Sur 2007, Col. Centro  
 Nuevo Laredo, 88000 Tamaulipas  
 México  
 lare1003@bestit.dgit.seit.mx

**Keywords:** Linear Systems, Uncertain Systems, Stability, Time Invariant Systems, Eigenvalues.

## Notation

$\mathbf{R}^{n \times m}$	$n \times m$ real matrices
$\mathbf{C}^{n \times m}$	$n \times m$ complex matrices
$\mathbf{I}$	Identity $n \times n$ Matrix
$\lambda_i(A)$	$i$ th eigenvalue of $A$
$\sigma(A)$	Spectrum of $A = \{\lambda_i \in \mathbf{C} :  \lambda_i \mathbf{I} - A  = 0\}$
$\lambda_{\max}(A)$	$\max\{\text{Re}(\lambda_i) : \lambda_i \in \sigma(A)\}$
$\mathbf{M} = [\mathbf{L}, \mathbf{U}]$	Interval matrix family where $l_{ij} \leq m_{ij} \leq u_{ij}$
$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{U} - \mathbf{L})$	Difference matrix $\mathbf{D} = [d_{ij}] \geq 0 : d_{ij} = \frac{1}{2}(u_{ij} - l_{ij}), i, j = 1, \dots, n$
$\mathbf{A}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{U} + \mathbf{L})$	Centroid matrix
$\mathbf{A} < \mathbf{B}$	$\mathbf{B}$ is greater than $\mathbf{A}$ componentwise i.e. $b_{ij} > a_{ij} \forall i, j = 1, \dots, n$
$\mathbf{A} \geq 0$	i.e. $a_{ij} \geq 0 \forall i, j = 1, \dots, n$
$\mathbf{H}(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^*)$	Hermitian part of $\mathbf{A}$ [1]
$\mathbf{S}(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^*)$	Skew-hermitian part of $\mathbf{A}$ [1]
$\mathbf{ONES}(n)$	Matrix of ones, i.e. $\text{ones}_{ij} = 1 \forall i, j = 1, \dots, n$
$\mathbf{TRI}(n)$	Upper triangular matrix, i.e. $\text{triu}_{ij} = 1$ if $i \leq j$ and $\text{triu}_{ij} = 0$ if $i > j \forall i, j = 1, \dots, n$
$\mathbf{TRIL}(n)$	Lower triangular matrix, i.e. $\text{tril}_{ij} = 1$ if $i \geq j$ and $\text{tril}_{ij} = 0$ if $i < j \forall i, j = 1, \dots, n$
$ \mathbf{x} $	Absolute value of $\mathbf{x}$
$\mathbf{A} \circ \mathbf{B}$	Hadamard product of $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$ , componentwise

## Abstract

In this paper we describe new sufficient conditions by means of simple tests that guarantee stability of a linear time-invariant system, modeled in state variables, with parametric uncertainty in the "A" matrix; for both cases; continuous time systems and discrete time systems. The parametric uncertainty is represented by an interval matrix. The proposed tests are simpler than the existing ones. They are based on the eigenvalues of the hermitian parts of the lower and upper matrices of the interval. An upper bound  $\xi$ , is derived for the continuous case. In this case the negativity of this upper bound guarantees the stability of the interval matrix. Two upper bounds are found for the discrete case, which must be less than one to guarantee Schur Stability. The results presented are for the general case of an interval matrix. Simple examples are shown to illustrate their practical application.

## 1 Introduction

The main motivation for this work has been given by the existence of many dynamic systems with parametric uncertainty considered in their mathematical models. The representation for the systems we will adopt is state space models. In this work Hurwitz and Schur stability are

<sup>1</sup> This work was partially supported by CONACyT, MEXICO

<sup>2</sup> The work of this author was also supported in part by Instituto Tecnológico de Morelia

boarded, assuming that the parametric uncertainty expressed in the matrix  $A$  of the state equation, is represented by an interval matrix [3], [4]. Quite a few sufficient conditions (algebraic conditions) for Hurwitz and Schur stability have been derived [2], [3], [4], [5] and [8]. In the present work, we give sufficient conditions of simple and fast application, involving only the lower and upper matrices of the interval. Other sufficient conditions of simple application have been reported recently in [9] and [10].

It is known that the stability of a system (continuous or discrete) depends only on the  $A$  matrix. When there is parametric uncertainty,  $A$  could be represented by a set of interval matrix, a special case of a polytope of matrices, i.e.  $A \in [L,U]$ . In the present work, we derive the conditions using only the largest eigenvalues of the hermitian part of two matrices,  $L$  and  $D$ , (see notation). Throughout the paper, we will use the general term *hermitian part of a matrix* even though the matrices are real.

The paper is organized as follows: An Introduction is presented in section I; in section II, we present some preliminary results; the main results are given in section III; numerical examples are shown in section IV; conclusions and future work are presented in section V.

## 2 Preliminaries

In this section it is intended to show some basic results that will serve us of support to the main results in the next section for both Hurwitz stability and Schur stability.

**Fact 2.1** [7] (Weyl's Theorem). Let  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  be hermitian matrices whose eigenvalues are in increasing order:

$$\lambda_{\min}(A) = \lambda_1(A) \leq \lambda_2(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A) = \lambda_{\max}(A)$$

$$\lambda_{\min}(B) = \lambda_1(B) \leq \lambda_2(B) \leq \dots \leq \lambda_n(B) = \lambda_{\max}(B)$$

then

$$\lambda_1(A) + \lambda_k(B) \leq \lambda_k(A+B) \leq \lambda_n(A) + \lambda_k(B).$$

**Lemma 2.2.** Let  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  be hermitian matrices, then

$$\lambda_{\min}(A) + \lambda_{\min}(B) \leq \lambda_{\min}(A+B)$$

and

$$\lambda_{\max}(A+B) \leq \lambda_{\max}(A) + \lambda_{\max}(B).$$

**Proof:** Using Fact 2.1 (Weyl's theorem) with  $k=1$  and  $k=n$

$$\lambda_1(A) + \lambda_1(B) = \lambda_{\min}(A) + \lambda_{\min}(B) \leq \lambda_{\min}(A+B) = \lambda_1(A+B)$$

and

$$\lambda_{\max}(A+B) = \lambda_n(A+B) \leq \lambda_n(A) + \lambda_n(B) = \lambda_{\max}(A) + \lambda_{\max}(B). \quad \blacksquare$$

**Fact 2.3** Let the interval matrix be  $M=[L,U]$  and  $U=L+D$ , then

$$H(U) = H(L) + H(D).$$

**Fact 2.4** [6],[7] Let  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , and  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . If  $A \leq |A| \leq B$ , then

$$\rho(A) \leq \rho(|A|) \leq \rho(B).$$

**Fact 2.5** [7] (Perron's theorem) If  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  and  $A \geq 0$ , then  $\rho(A)$  is an eigenvalue of  $A$ , indeed  $\rho(A) = \lambda_{\max}(A)$ , where  $\rho(A)$  is defined as the spectral radius of the matrix  $A$ .

**Fact 2.6** Let  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  then, there is a circle that has as its radius the spectral radius,  $\rho(A)$ , which contains all eigenvalues of  $A$ , that is

$$|\lambda_i(A)| \leq \rho(A) \quad i=1,2,\dots,n.$$

**Fact 2.7** Let the interval matrix be  $M=[L,U]$  where  $L$  and  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A_0 = \frac{1}{2}(U+L)$ , and  $D = \frac{1}{2}(U-L)$ , the set of the corner matrices can be expressed as:

$$M_k = A_0 + D_k \quad \forall k=1,2,\dots,2^n$$

$$\text{where } D_k(i, j) = d_{ij} \text{ or } D_k(i, j) = -d_{ij}.$$

## 3 Main Results

This section shows the main results for continuous time case as well as for discrete time case. The result for

Hurwitz stability is shown in part A) and the results for Schur stability in part B)

#### A) Hurwitz Stability.

Consider the continuous linear time-invariant system described by the equations

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

where  $A$ ,  $B$  and  $C$  are real matrices of dimensions  $n \times n$ ,  $n \times m$  and  $p \times n$  respectively.

**Theorem 3.1** Let the interval matrix be  $M=[L,U]$  where  $L$  and  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A_0 = \frac{1}{2}(U+L)$ , and  $D = \frac{1}{2}(U-L)$ , the interval matrix  $[L,U]$  is Hurwitz stable if  $\xi = \lambda_{\max}(H(A_0)) + \lambda_{\max}(H(D)) < 0$ .

**Proof:** Suppose  $\xi < 0$  and using the fact 2.7 the hermitian part of the  $2^{n^2}$  corners is as follows

$$H(M_k) = H(A_0) + H(D_k) \quad \forall k=1,2,\dots,2^{n^2}$$

$$\lambda_{\max}(H(M_k)) = \lambda_{\max}(H(A_0) + H(D_k)) \text{ by the fact 2.1}$$

$$\lambda_{\max}(H(M_k)) \leq \lambda_{\max}(H(A_0)) + \lambda_{\max}(H(D_k)).$$

As  $\lambda_{\max}(H(A)) \leq \rho(H(A))$  (fact 2.6), then

$$\lambda_{\max}(H(M_k)) \leq \lambda_{\max}(H(A_0)) + \rho(H(D_k))$$

now because  $H(D_k) \leq |H(D_k)| \leq H(D)$  then  $\rho(H(D_k)) \leq \rho(H(D))$  (Fact 2.4)

$$\lambda_{\max}(H(M_k)) \leq \lambda_{\max}(H(A_0)) + \rho(H(D))$$

using  $\lambda_{\max}(H(D))$  instead of  $\rho(H(D))$  (fact 2.5), we have finally

$$\lambda_{\max}(H(M_k)) \leq \lambda_{\max}(H(A_0)) + \lambda_{\max}(H(D)) = \xi < 0$$

$$\forall k=1,2,\dots,2^{n^2}.$$

#### B) Schur Stability.

Consider the discrete linear time-invariant system described by the equations

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k)\end{aligned}$$

where  $A$ ,  $B$  and  $C$  are real matrices of dimensions  $n \times n$ ,  $n \times m$  and  $p \times n$  respectively. In this subsection a couple of simple sufficient conditions for the case of Schur stability are presented.

#### First result.

**Theorem 3.2** Let the interval matrix be  $M=[L,U]$  where  $L$  and  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , and  $D = \frac{1}{2}(U-L)$ , the interval matrix  $M=[L,U]$  is Schur stable if  $\kappa = \max\{\xi_1, \xi_2\} < 1$ , where:

$$\xi_1 = \{[\lambda_{\max}(H(A_0)) + \lambda_{\max}(H(D))]^2 +$$

$$[\lambda_{\max}(jS(A_0)) + \lambda_{\max}(jSAD)]^2\}^{1/2}$$

and

$$\xi_2 = \{[\lambda_{\max}(-H(A_0)) + \lambda_{\max}(H(D))]^2 +$$

$$[\lambda_{\max}(-jS(A_0)) + \lambda_{\max}(jSAD)]^2\}^{1/2}$$

with

$$SAD = H(D) \circ (\text{TRIU}(n) - \text{TRIL}(n)).$$

**Proof:** The proof is given in three steps; suppose  $\xi_1 < 1$  and  $\xi_2 < 1$ , and using the fact 2.7 the hermitian part of the  $2^{n^2}$  corners is as follows

$$H(M_k) = H(A_0) + H(D_k) \quad \forall k=1,2,\dots,2^{n^2}.$$

**Step 1 (maximal real bound):**

$$\lambda_{\max}(H(M_k)) = \lambda_{\max}(H(A_0) + H(D_k))$$

by lemma 2.2 results in

$$\lambda_{\max}(H(M_k)) \leq \lambda_{\max}(H(A_0)) + \lambda_{\max}(H(D_k)).$$

As  $\lambda_{\max}(H(D_k)) \leq \rho(H(D_k))$  (fact 2.6) then

$$\lambda_{\max}(H(M_k)) \leq \lambda_{\max}(H(A_0)) + \rho(H(D_k))$$

now because  $H(D_k) \leq |H(D_k)| \leq H(D)$  then  $\rho(H(D_k)) \leq \rho(H(D))$  and

$$\lambda_{\max}(H(M_k)) \leq \lambda_{\max}(H(A_0)) + \rho(H(D))$$

using  $\lambda_{\max}(H(D))$  instead of  $\rho(H(D))$  (fact 2.5), we have finally

$$\lambda_{\max}(H(M_k)) \leq \lambda_{\max}(H(A_0)) + \lambda_{\max}(H(D)) \quad \forall k=1,2,\dots,2^{n^2}$$

which is the maximal real bound.

Step 2 (minimal real bound):

$$\lambda_{\min}(H(A_0) + H(D_k)) = \lambda_{\min}(H(M_k))$$

by lemma 2.2

$$\lambda_{\min}(H(A_0)) + \lambda_{\min}(H(D_k)) \leq \lambda_{\min}(H(M_k))$$

but  $\lambda_{\min}(A) = -\lambda_{\max}(-A)$ , then

$$-\lambda_{\max}(-H(A_0)) - \lambda_{\max}(-H(D_k)) \leq \lambda_{\min}(H(M_k))$$

Using fact 2.6  $\lambda_{\max}(-H(D_k)) \leq \rho(-H(D_k))$

$$-\lambda_{\max}(-H(A_0)) - \rho(-H(D_k)) \leq \lambda_{\min}(H(M_k))$$

now because  $(-H(D_k)) \leq |H(D_k)| \leq H(D)$  then  $\rho(-H(D_k)) \leq \rho(H(D))$ , and

$$-\lambda_{\max}(-H(A_0)) - \rho(H(D)) \leq \lambda_{\min}(H(M_k))$$

using  $\lambda_{\max}(H(D))$  instead of  $\rho(H(D))$  (fact 2.5), we have finally

$$-\lambda_{\max}(-H(A_0)) - \lambda_{\max}(H(D)) \leq \lambda_{\min}(H(M_k))$$

$$\forall k = 1, 2, \dots, 2^{n^2}$$

which is the minimal real bound.

Step 3 (maximal imaginary bound):

$$S(M_k) = S(A_0) + S(D_k)$$

which are skew hermitian matrices and

$$jS(M_k) = jS(A_0) + jS(D_k)$$

are hermitian matrices, and by lemma 2.2 we have

$$\lambda_{\max}(jS(M_k)) \leq \lambda_{\max}(jS(A_0)) + \lambda_{\max}(jS(D_k)).$$

Using fact 2.6  $\lambda_{\max}(jS(D_k)) \leq \rho(jS(D_k)) = \rho(S(D_k))$

$$\lambda_{\max}(jS(M_k)) \leq \lambda_{\max}(jS(A_0)) + \rho(S(D_k))$$

now because  $S(D_k) \leq |S(D_k)| \leq H(D) \circ (\text{TRIU}(n) - \text{TRIL}(n))$  then

$$\rho(S(D_k)) \leq \rho(H(D) \circ (\text{TRIU}(n) - \text{TRIL}(n))).$$

If we consider  $\text{SAD} = H(D) \circ (\text{TRIU}(n) - \text{TRIL}(n))$ , we have

$$\lambda_{\max}(jS(M_k)) \leq \lambda_{\max}(jS(A_0)) + \rho(j\text{SAD})$$

using  $\lambda_{\max}(j\text{SAD})$  instead of  $\rho(j\text{SAD})$  (fact 2.5), we have

finally

$$\lambda_{\max}(jS(M_k)) \leq \lambda_{\max}(jS(A_0)) + \lambda_{\max}(j\text{SAD}) \quad \forall k = 1, 2, \dots, 2^{n^2}$$

which is the maximal imaginary bound.

The minimal imaginary bound is the negative of the maximal imaginary bound because the interval matrix  $M = [L, U]$  is real, i.e.  $L$  and  $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , so the theorem results. ■

Second result.

**Theorem 3.3** Let the interval matrix be  $M = [L, U]$  where  $L$  and  $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$  and  $D = \frac{1}{2}(U - L)$ , the interval matrix  $M = [L, U]$  is Schur stable if  $\kappa' = \max\{\xi'_1, \xi'_2\} < 1$ , where:

$$\xi'_1 = \{[\lambda_{\max}(H(A_0)) + \lambda_{\max}(H(D))]^2 +$$

$$[\lambda_{\max}(jS(A_0)) + \lambda_{\max}(j\text{SAD})]^2\}^{1/4}$$

and

$$\xi'_2 = \{[\lambda_{\max}(-H(A_0)) + \lambda_{\max}(H(D))]^2 +$$

$$[\lambda_{\max}(-jS(A_0)) + \lambda_{\max}(j\text{SAD})]^2\}^{1/4}$$

with

$$\text{SAD} = H(D) \circ (\text{ONES}(n) - \mathbf{I}).$$

**Proof:** The proof for this theorem follows an equal sequence as the proof for the theorem 3.2. Notice that in this statement the resulting matrix  $\text{SAD}$  has another structure. ■

**Remark 3.4** The values of  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\xi'_1$  and  $\xi'_2$  can be obtained adding vectorially the minimal and maximal bounds, reals and imaginaries.

## 4 Numerical examples

In this section we present two examples to illustrate the tests. In both cases it will be shown in the graphics, the eigenvalues of the  $2^n$  vertex matrices of  $M = [L, U]$ . The first example is for the continuous case, where  $\xi$  is also shown. In the second example, which is for the discrete case,  $\kappa$  and  $\kappa'$  are also shown in the graphics.

**Example 1**

Let  $M=[L,U]$  where  $U$  and  $L$  are given by

$$L = \begin{bmatrix} -0.4059 & -0.1877 & -0.4557 \\ 0.2908 & -0.4933 & -0.0288 \\ 0.2283 & 0.1450 & -0.4985 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} -0.2909 & -0.0636 & -0.4392 \\ 0.3081 & -0.3554 & 0.1422 \\ 0.4108 & 0.3274 & -0.4893 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} -0.5006 & -0.3361 & 0.1702 \\ 0.0494 & -0.4314 & -0.2270 \\ -0.3593 & 0.0925 & -0.2073 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 0.2845 & 0.1582 & 0.2781 \\ 0.3282 & 0.0937 & -0.1052 \\ -0.0448 & 0.2271 & 0.3563 \end{bmatrix}$$

making calculations it results that:  $\xi_1=0.8452$ ,  $\xi_2=0.9431$  so  $\kappa=0.9431$ ;  $\xi'_1=0.8590$ ,  $\xi'_2=0.9555$  so  $\kappa'=0.9555$  and  $\rho(\max\{|L|,|U|\})=1.0251$  [11]. According to the theorems 3.2 and 3.3, the interval matrix is Schur stable.

computing the upper bound,  $\xi=-0.1205$ . Applying the condition given by theorem 3.1, the interval matrix is Hurwitz stable.

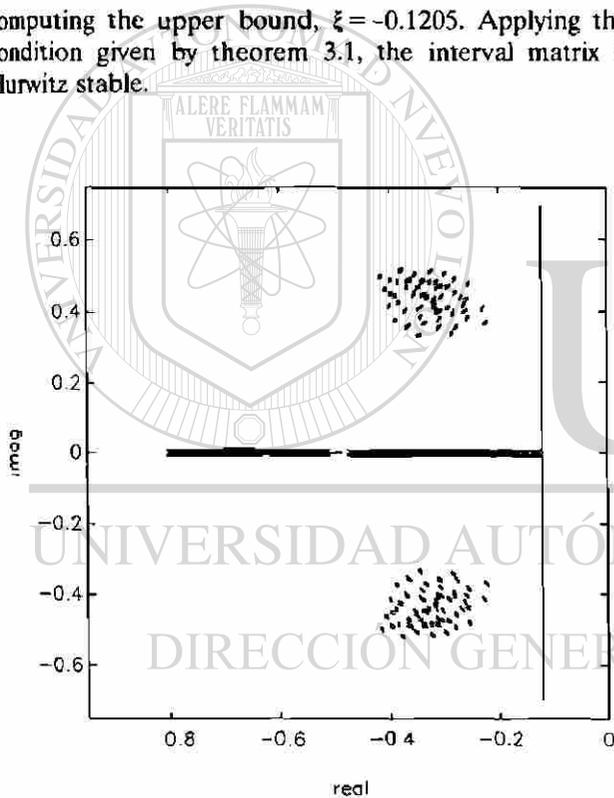


Figure 1. The graphic shows in (·) the eigenvalues of the vertex matrices, in (x) those of the hermitian part of the vertex matrices and  $\xi$  in vertical line.

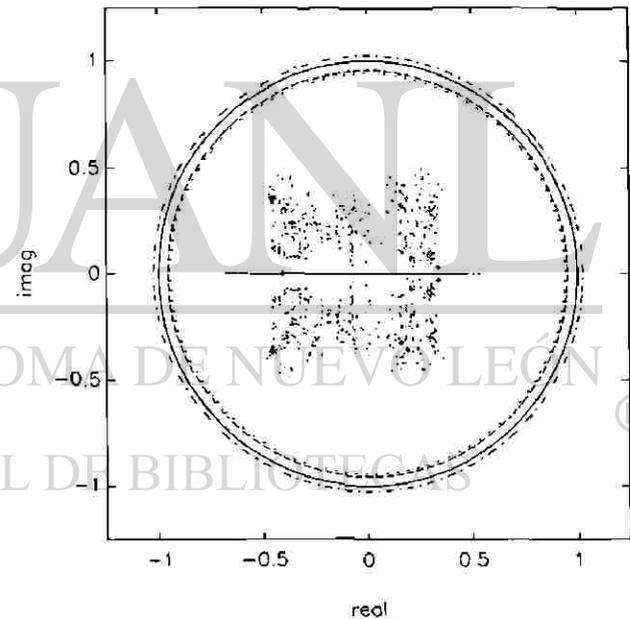


Figure 2. The graphic shows all the eigenvalues of the vertex matrices in (·), in continuous line the unitary circle, in (···) the upper bound  $\kappa$ , in (---) the upper bound  $\kappa'$  and finally in (-·-) the upper bound  $\rho(\max\{|L|,|U|\})$ .

**Example 2**

This example is for the discrete case. Let  $M=[L,U]$  where  $U$  and  $L$  are given by

**5 Conclusions and Future work**

In this work sufficient conditions for the stability of a linear time-invariant system, where the uncertainty is expressed by an interval matrix, have been shown. The results consider both cases, the continuous case and the

discrete case. Based on the eigenvalues of the hermitian parts of two matrices, an upper bound  $\xi$  is obtained for Hurwitz stability and for Schur stability  $\kappa$  and  $\kappa'$  were determined. As could be seen from the examples  $\kappa$  is better bound than  $\kappa'$ , in fact it is in all the cases, but the formal proof is not presented here. The sufficient conditions found have simple and fast application. We think that these results are a suitable choice to determine the stability of a general interval matrix in continuous and discrete case. Maybe the price we have to pay for using these simple and fast application sufficient conditions, is that we get a more conservative stability result. We believe that making further research by this mean would yield improved bounds.

- [10] J. A. Rojas-Estrada and J. M. Collado, "Stability of Interval Matrices using the Distance to the Set of Unstable Matrices" *Proceeding of the American Control Conference 1994*. Vol. 1, pp. 238-239. 1994
- [11] K. Zhou, J. Stoustrup and H. Niemann H. "Schur Stability of Uncertain Matrices" *Proceeding of the 31st IEEE Conference on Decision and Control*. Vol 1, pp. 1565-1566. 1992.

## References

- [1] R. A. Horn and C. R. Johnson *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press, New York, 1991.
- [2] Y. T. Juang and C. S. Shao "Stability Analysis of Dynamic Interval Systems" *International Journal Control*, Vol 49, No. 4, pp. 1401. 1989.
- [3] J. A. Heinen "Sufficient Conditions for Stability of Interval Matrices" *International Journal Control*, Vol 39, No. 6, pp. 1323-1328. 1984.
- [4] Mansour M. "Robust Stability of Interval Matrices" *Proceeding of the 28th IEEE Conference on Decision and Control*, Vol 1, pp. 46-51. 1989.
- [5] J. Rohn "Stability of Interval Matrices: The Real Eigenvalue Case" *IEEE Transaction on Automatic Control*. Vol 37, No. 10, pp. 1604-1605. 1992.
- [6] P. Lancaster and M. Tismenetsky *The Theory of Matrices with Applications. 2nd Edition*. Academic Press, San Diego, 1985.
- [7] R. A. Horn and C. R. Johnson *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, New York, 1985.
- [8] K. Wang and A. N. Michel "On Sufficient Conditions for the Stability of Interval Matrices. *Systems and Control Letters* pp. 345-351. 1993.
- [9] J. J. Delgado-Romero, J. A. Rojas-Estrada and J. M. Collado "A Simple Test to Determine the Stability of an Interval Matrix" *Proceeding of the 1994 American Control Conference* Vol. 1 pp. 2002-2003, 1994.

