

**UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON**  
**FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA**



**ANALISIS DE ESTABILIDAD DE SISTEMAS  
LINEALES EN VARIABLES DE ESTADO  
CON INCERTIDUMBRE PARAMETRICA**

**TESIS**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
DOCTOR EN INGENIERIA ELECTRICA**

**PRESENTA:**

**JUAN ANTONIO ROJAS ESTRADA**

**SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L. JULIO, 1994**

ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE SISTEMAS

LINEALES EN VARIABLES DE ESTADO

COMUNICACIONES PARALELAS

R6

1994

FIMER

1

FM2

25853

DE SISTEMAS

ESTADOS

PARALELOS

DE SISTEMAS

ESTADOS

PARALELOS

DE SISTEMAS

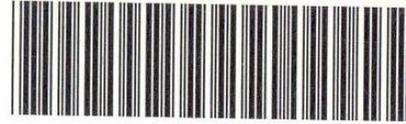
ESTADOS

PARALELOS

DE SISTEMAS

ESTADOS

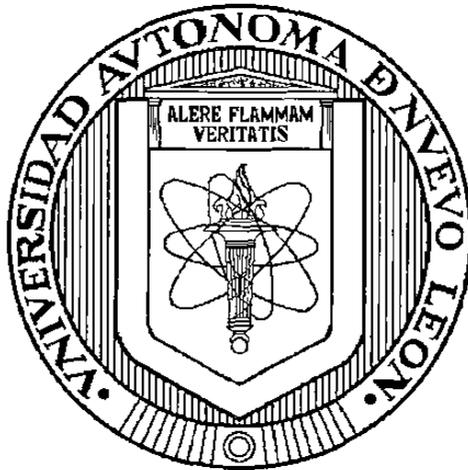
PARALELOS



1020112522

**UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON**

**FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA**



**ANALISIS DE ESTABILIDAD DE SISTEMAS LINEALES EN  
VARIABLES DE ESTADO CON INCERTIDUMBRE PARAMETRICA**

**TESIS**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
DOCTOR EN INGENIERIA ELECTRICA**

**PRESENTA**

**JUAN ANTONIO ROJAS ESTRADA**

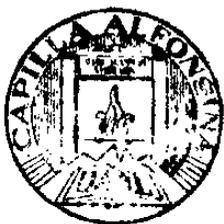
**SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N.L.**

**JULIO, 1994**

TD  
Z5853

0117-13360

M2  
FIME  
1994  
R6

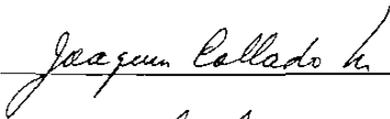


FONDO TESIS

**ANALISIS DE ESTABILIDAD DE SISTEMAS LINEALES EN  
VARIABLES DE ESTADO CON INCERTIDUMBRE PARAMETRICA**

Los miembros del Comité aprueban la Tesis  
Doctoral de Juan Antonio Rojas Estrada.

Dr. Joaquín Collado Moctezuma  
Asesor



---

Dr. Edgar Nelson Sánchez Camperos



---

Dr. Jesús de León Morales



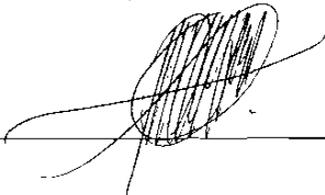
---

Dr. Alexander Semion Poznyak Gorbach



---

Dr. Oscar Leonel Chacón Mondragón



---

Copyright © 1994, por Juan Antonio Rojas Estrada

Reservados todos los derechos

*A*

*Patricia*

*y*

*Alma Yoelle, Juan Antonio, Tania Alejandra*

**ANALISIS DE ESTABILIDAD DE SISTEMAS LINEALES EN  
VARIABLES DE ESTADO CON INCERTIDUMBRE PARAMETRICA**

por

**JUAN ANTONIO ROJAS ESTRADA**

Presentado ante el Comité del Programa Doctoral de Ingeniería Eléctrica  
de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica  
para la obtención del grado de

**DOCTOR EN INGENIERIA ELECTRICA**

**UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON**

Julio de 1994

## AGRADECIMIENTOS

A mi padres, **Juan Rojas Velázquez** y **Juana Estrada Ruiz**, hermanas y hermano que siempre han mostrado interés por mi superación académica.

A mi familia, en especial a mi esposa; **Patricia Quintero Alvarez**, por su comprensión y apoyo decidido durante mis estudios doctorales; a mis hijos, **Alma Yoelle**, **Juan Antonio** y **Tania Alejandra** de quienes me siento orgulloso. A todos mis parientes y amigos que de una ú otra forma ayudaron en la culminación de mis estudios, en especial a mis compadres Jorge y Rafael.

Al Dr. Joaquín Collado Moctezuma, asesor de esta tesis, por su tiempo dedicado a mi formación como investigador y sus provechosas sugerencias a lo largo del desarrollo de este trabajo. Deseo también mostrar mi agradecimiento a los doctores Jesús de León Morales, Edgar Nelson Sánchez Camperos por sus comentarios y sugerencias a este trabajo. De igual manera mi agradecimiento a los doctores de la especialidad de Potencia, en especial al Dr. Oscar Leonel Chacón Mondragón por sus comentarios durante la revisión de esta tesis.

Quiero agradecer de una manera especial, la participación en la revisión de este trabajo al Dr. Alexander S. Poznyak, ya que sus observaciones fueron de gran utilidad en la formalidad matemática de esta disertación.

Al Instituto Tecnológico de Nuevo Laredo por permitirme realizar mis estudios doctorales otorgandome una comisión académica. De igual manera al CONACYT por su apoyo económico otorgado para el mismo fin.

A todos mis compañeros del Programa Doctoral, tanto de la especialidad de Control como de la especialidad de Potencia por sus comentarios a este trabajo, en especial a Gerardo y J.J. Darío.

Julio de 1994

# RESUMEN

## ANALISIS DE ESTABILIDAD DE SISTEMAS LINEALES EN VARIABLES DE ESTADO CON INCERTIDUMBRE PARAMETRICA

Publicación No. \_\_\_\_

Juan Antonio Rojas Estrada, Dr. en Ing.

Universidad Autónoma de Nuevo León, 1994

Profesor Asesor: Dr. Joaquín Collado Moctezuma

En esta disertación, se presenta un análisis de estabilidad en sistemas lineales invariantes en el tiempo, representados en variables de estado, en presencia de incertidumbre paramétrica. En estos sistemas la consideración de la incertidumbre de los parámetros que conforman el modelo matemático del sistema, es tomada en cuenta. De esta forma se busca garantizar la estabilidad de una sistema a pesar de la incertidumbre en sus parámetros. Esto es conocido en la actualidad como el estudio de Estabilidad Robusta de Sistemas. Claro está, que para poder hacer un análisis matemático, se establecen rangos en la incertidumbre de dichos parámetros y se parte del hecho de que los valores de los parámetros son desconocidos pero fijos dentro del rango de valores establecido. La forma de especificar la incertidumbre es un tanto arbitraria, por cuestiones de "tratabilidad" matemática se requiere que el conjunto en el cual están los posibles valores de los parámetros sea un conjunto convexo (la convexidad es tratada en el capítulo 3). Esto conduce a dos representaciones típicas: la primera, Matrices Intervalo, son aquellas en las que sus elementos pertenecen a un intervalo preespecificado de valores; y la segunda, Envolverte Convexa de  $k$  matrices preespecificadas. La primera representación es un caso particular de la segunda.

Las aportaciones de esta disertación son: partiendo de resultados de la literatura,

primeramente se presenta una condición mejorada para el caso de la estabilidad de la envolvente convexa de dos matrices estables haciendo uso de matrices compuestas tipo Kronecker. Se establecen condiciones necesarias y suficientes de estabilidad para el caso de la envolvente convexa de  $k$  matrices simétricas estables obteniéndose una *abscisa de convergencia*. Se estudia y se obtienen resultados de una técnica nueva aplicada a Estabilidad Robusta, llamada Campo de Valores. Mediante esta técnica, se establecen condiciones suficientes de estabilidad para la envolvente convexa de  $k$  matrices arbitrarias estables. Se obtienen condiciones necesarias y suficientes para la envolvente convexa de  $k$  matrices normales estables. Con la ayuda de esta técnica, se dan condiciones sobre la localización de todos los valores propios que pertenecen a una envolvente convexa de  $k$  matrices. Adicionalmente, utilizando el concepto de la distancia de una matriz estable al conjunto de las matrices inestables; aquellas que tienen por lo menos un valor propio en el eje imaginario del plano complejo, se deducen condiciones suficientes de inestabilidad para la matriz intervalo. Para este resultado, la restricción fuerte es que la matriz intervalo tenga la misma incertidumbre en todos sus elementos. Así mismo, utilizando dicho concepto, se establecen para una matriz que pertenece al intervalo, dos distancias, una es a la matriz vértice más alejada de ésta y la otra al conjunto de las matrices inestables. En base a estas dos distancias se establecen condiciones suficientes de estabilidad para la matriz intervalo.

Haciendo un análisis de los valores propios de las partes hermíticas de las matrices vértice de una matriz intervalo, se propone un teorema de estabilidad simple y rápido para una matriz intervalo. La condición de estabilidad, sólo implica conocer las matrices que definen el intervalo. Dicho teorema garantiza condiciones suficientes de estabilidad. Finalmente, se proponen algunos ejemplos de sistemas con incertidumbre paramétrica en su modelo. Esto con el fin de ilustrar las aplicaciones y las restricciones de los resultados obtenidos en esta disertación.

## INDICE

AGRADECIMIENTOS.....	vi
RESUMEN.....	vii
LISTA DE FIGURAS.....	xiii
NOTACION.....	xv

### CAPITULO 1

#### INTRODUCCION

1.1 Motivación.....	1
1.2 Clases de incertidumbre.....	3
1.3 Representación de incertidumbres.....	5
1.4 El Problema de Estabilidad Robusta.....	6
1.5 Resumen.....	7

### CAPITULO 2

#### ESTABILIDAD DE LA ENVOLVENTE CONVEXA DE MATRICES: CASOS PARTICULARES

2.1 Introducción.....	8
2.2 Preliminares.....	9
2.3 Resultados principales.....	12
2.4 Ejemplo numérico.....	16
2.5 Resumen.....	17

### CAPITULO 3

#### CAMPO DE VALORES

3.1 Introducción.....	18
-----------------------	----

## INDICE (continuación)

3.2 Propiedades del Campo de Valores.....	19
3.2.1 Obtención gráfica del Campo de Valores.....	23
3.2.2 Ilustración gráfica de algunas propiedades.....	25
3.3 Condiciones de estabilidad utilizando Campo de Valores.....	28
3.3.1 Condiciones de estabilidad para la envolvente convexa de $k$ matrices arbitrarias estables.....	28
3.3.2 Condiciones de estabilidad para la envolvente convexa de $k$ matrices normales estables.....	32
3.4 Ejemplos numéricos.....	33
3.5 Resumen.....	36

## CAPITULO 4

### INESTABILIDAD DE MATRICES INTERVALO

4.1 Introducción.....	38
4.2 Vértices de una matriz intervalo.....	38
4.3 Distancia de una matriz arbitraria estable al conjunto de las matrices inestables.....	39
4.4 Distancia de una matriz intervalo $[L, U]$ al conjunto $\mathbf{Q}$ .....	39
4.5 Condiciones suficientes de inestabilidad de matrices intervalo.....	41
4.4 Ejemplos numéricos.....	46
4.5 Resumen.....	48

## CAPITULO 5

### ESTABILIDAD DE MATRICES INTERVALO

5.1 Introducción.....	50
5.2 Obtención de la distancia entre $A_0$ y uno de los vértices de $[L, U]$ .....	50
5.3 Condición suficiente de estabilidad para una matriz intervalo.....	52

## INDICE (continuación)

5.4 Ejemplos numéricos.....	53
5.5 Resumen.....	56

### CAPITULO 6

#### TEOREMA SIMPLE DE ESTABILIDAD DE MATRICES INTERVALO: OTRA CONDICION SUFICIENTE

6.1 Introducción.....	57
6.2 Preliminares.....	57
6.3 Condición de estabilidad de una matriz intervalo.....	58
6.4 Ejemplos numéricos.....	60
6.5 Resumen.....	62

### CAPITULO 7

#### APLICACION DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS EN SISTEMAS CON INCERTIDUMBRE

7.1 Introducción.....	63
7.2 Estabilidad de un robot de <i>n.g.d.l.</i> .....	64
7.3 Robot manipulador de dos grados de libertad.....	65
7.3.1 Deducción del modelo matemático del robot.....	66
7.3.2 Simulación numérica del robot.....	69
7.4 Estabilidad de un filtro pasabajos RC activo de tercer orden.....	73
7.4.1 Deducción del modelo matemático del filtro.....	74
7.4.2 Simulación numérica del filtro.....	77
7.5 Resumen.....	81

## INDICE (continuación)

CAPITULO 8	
CONCLUSIONES.....	82
BIBLIOGRAFIA.....	84
APENDICE.....	88

## LISTA DE FIGURAS

1	Campo de Valores e Ilustración del lema 3.2.1.....	25
2	Gráfica del Campo de Valores de una matriz de $3 \times 3$ .....	25
3	Campo de Valores de la suma directa de <b>A</b> y <b>B</b> .....	26
4	Comparación entre el Campo de Valores de la suma directa y la suma de Campos de Valores.....	27
5	Campo de Valores de tres matrices normales y Campo de Valores individual (ejemplo 3.4.1).....	34
6	Campo de Valores de tres matrices normales con soporte de valores propios disjuntos (ejemplo 3.4.2).....	35
7	Campo de Valores de la suma directa de dos matrices <b>A</b> y <b>B</b> estables (ejemplo 3.4.3).....	36
8	Gráfica del Campo de Valores en envolvente convexa.....	37
9	Distancia de una matriz <b>A</b> estable al conjunto de las matrices inestables <b>Q</b> .....	40
10	Distancia de la matriz centroide $A_0$ al conjunto de las matrices inestables <b>Q</b> .....	40
11	Valores propios de matrices <b>A</b> que pertenecen a la matriz intervalo $[L, U]$ (ejemplo 4.6.1).....	47
12	Valores propios de matrices <b>A</b> que pertenecen a la matriz intervalo $[L, U]$ (ejemplo 4.6.2).....	48
13	Comparación entre valores propios de matrices aleatorias <b>A</b> que pertenecen a $[L, U]$ y las matrices de Mansour (ejemplo 5.4.1).....	54
14	Comparación entre valores propios de matrices aleatorias <b>A</b> que pertenecen a $[L, U]$ y las matrices de Mansour (ejemplo 5.4.2).....	55
15	Comparación entre valores propios de todas las matrices vértice, las matrices de Mansour y la cota superior $\xi$ (ejemplo 6.4.1).....	60
16	Comparación entre valores propios de todas las matrices vértice, las matrices de Mansour y la cota superior $\xi$ (ejemplo 6.4.2).....	62

## LISTA DE FIGURAS (continuación)

17	Robot planar de 2 <i>g.d.l.</i> .....	65
18	Campos de Valores de matrices normales para tres diferentes valores de la matriz de inercias estimada.....	72
19	Campo de Valores de la suma directa de $\bar{A}_{0^\circ}$ , $\bar{A}_{nominal}$ y $\bar{A}_{90^\circ}$ .....	72
20	Filtro activo RC pasabajos de tercer orden.....	74
21	Campo de Valores para la matriz A del modelo, para cuatro casos de cambio en los valores de $R_1$ y $C_1$ debido a tolerancias.....	79
22	Campo de Valores de la suma directa de las matrices A del modelo, para los cuatro casos de cambio en los valores de $R_1$ y $C_1$ debido a tolerancias.....	79
23	Campo de Valores para la matriz A del modelo, para tres valores diferentes de la ganancia $K_1$ .....	80

## NOTACION

$\mathbb{R}, \mathbb{C}$	Números reales, Números complejos.
$\mathbb{R}^{n \times m}, \mathbb{C}^{n \times m}$	Matrices reales de $n \times m$ , matrices complejas de $n \times m$ .
$A_i$	Matriz cuadrada $n \times n$ .
$I$	Matriz identidad $n \times n$ .
$a_{ij}$	$ij$ -ésimo elemento de $A$ .
$A^T, A^*$	Traspuesta de $A$ , Traspuesta compleja conjugada de $A$ .
$\mathbf{x}, \mathbf{x}^*$	Vector columna de $n \times 1$ , traspuesto complejo conjugado de $\mathbf{x}$ .
$\mathbb{C}_-$	Semiplano izquierdo abierto del plano complejo, i.e. $\{s \in \mathbb{C} : \text{Re } s < 0\}$
$A \geq 0$	Matriz no negativa elemento a elemento, i.e. $a_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, n$ .
$A < B$	$B > A$ elemento a elemento, i.e. $a_{ij} < b_{ij} \quad \forall i, j = 1, \dots, n$ .
$\text{Diag}(A, B)$	Matriz diagonal = $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ $A$ y $B$ cuadradas, no necesariamente de la misma dimensión.
$A + B$	Suma directa de $A$ y $B = \text{Diag}(A, B)$ .
$\lambda_i(A)$	$i$ -ésimo valor propio de $A$ .
$\sigma(A)$	Espectro de $A$ , i.e. $\{ \lambda_i \in \mathbb{C} :  \lambda I - A  = 0 \}$ .
$H(A) = \frac{1}{2}(A + A^*)$	Parte hermítica de $A$ .
$S(A) = \frac{1}{2}(A - A^*)$	Parte anti-hermítica de $A$ .
$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i$	Producto interior de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ , donde $\bar{x}_i$ es el conjugado del $i$ -ésimo elemento de $\mathbf{x}$ [23].
$\alpha(A)$	Abscisa espectral de $A = \max\{ \text{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(A) \}$ [27].
$\mathcal{A}$	Conjunto que representa una familia o polígono de matrices.
$[L, U]$	Matriz Intervalo donde $l_{ij} \leq a_{ij} \leq u_{ij} ; \quad \forall A \in [L, U]$ .
$F(A)$	Campo de Valores de $A$ [22], i.e. $\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C} : \mathbf{z} = \mathbf{x}^* A \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \ \mathbf{x}\ _2 = 1 \}$ .

# CAPITULO 1

## INTRODUCCION

### 1.1 Motivación.

En los últimos años, el análisis de estabilidad de sistemas con incertidumbre, ha despertado un creciente interés en la comunidad de control. Ciertamente, debido a la incertidumbre, el análisis de estabilidad no resulta sencillo. Esta aseveración tiene su razón de ser debido a que los modelos matemáticos son una aproximación de un sistema físico, ya que una representación exacta es imposible de obtener. Las razones son debidas a imprecisiones de cálculo en la determinación de los parámetros, cambio en las constantes de tiempo, desgaste interno, y dinámicas no modeladas. El análisis de la estabilidad de tales sistemas pasa a ser, de simple estabilidad a algo más complejo que ha dado en llamarse Estabilidad Robusta. Esto es, que el sistema a pesar de las incertidumbres es estable. La incertidumbre es fija, pero desconocida, y para poder hacer un análisis de estabilidad, se suponen ciertos intervalos en los parámetros que presentan la incertidumbre. Afortunadamente, este problema se está abordando hoy en día, pues recientemente en [1], [2], [4] y [13], entre otros, se han presentado resultados importantes para cierta clase de sistemas modelados en alguna representación, abordando el tema de Estabilidad Robusta. La representación matemática de los sistemas lineales puede verse en dos formas; la representación entrada-salida y la representación en variables de estado. Bajo la primera representación existen la mayor parte de los resultados y podríamos decir que los más importantes hasta ahora. Bajo la segunda representación; variables de estado; aunque ha habido resultados importantes, el problema está aún abierto.

Es precisamente en los sistemas representados en variables de estado, y estrictamente el caso de los sistemas lineales invariantes en el tiempo, donde el análisis de la Estabilidad Robusta ocupa nuestro interés.

En el estudio de sistemas lineales invariantes en el tiempo, mediante descripciones de espacio de estado o en la representación entrada-salida, como ya se dijo, está presente la incertidumbre paramétrica, la cual resulta de la imprecisión de los parámetros del modelo dinámico obtenido. Esto finalmente repercute en la estabilidad del mismo. En la literatura existen varios resultados, sobre Estabilidad Robusta, para la representación entrada-salida, o sea para el caso polinomial; entre los más notables se pueden contar el importante trabajo de Kharitonov [1], el cual trata de la estabilidad de los polinomios intervalo, mismo que ha servido como generador de otros trabajos como el de generalización de los polinomios de Kharitonov al caso de dependencia lineal entre los coeficientes generados por las incertidumbres, realizado por Barmish [2],[3], el teorema del "edge" por Bartlett et. al. [4] . Nuevamente Barmish [5] y Rantzer [6] usan el conjunto de valores conocido como "value-set"; con esta técnica se hace uso del principio de exclusión del cero; el cual es esencial para establecer las condiciones de estabilidad, en fin, bastante se ha hecho para el caso entrada-salida. El interés por enumerar estos resultados, reside en el hecho de que ha habido intentos por extender dichos resultados [34] al caso donde el sistema está representado en variables de estado, sin embargo, se ha demostrado [30] y [35] que la extensión de resultados a la representación espacio de estado, no es directa.

Como ya se ha establecido, el problema que se aborda en esta disertación es Estabilidad Robusta de sistemas lineales invariantes en el tiempo con incertidumbre paramétrica y representados en variables de estado. Bajo esta representación de los sistemas, existen algunos resultados importantes para el caso de la envolvente convexa de matrices, entre otros, condiciones necesarias y suficientes para el caso particular de dos matrices arbitrarias [2]; para  $k$  matrices simétricas [7] y [8], para el caso de  $k$  matrices arbitrarias que conmutan [9] y para  $k$  matrices normales [10] y [24]. Trabajos que presentan condiciones suficientes de estabilidad, Campo de Valores [11], matrices intervalo [13] y las referencias contenidas en estos trabajos.

El trabajo de esta tesis se ha organizado de la siguiente manera; en el capítulo 2, utilizando la representación de un polígono de matrices, como la envolvente convexa

de matrices, se abordan condiciones necesarias y suficientes de estabilidad, así como la determinación de una *abscisa de convergencia* para el caso de  $k$  matrices simétricas [7]; una técnica nueva en Estabilidad Robusta se presenta en el capítulo 3; utilizando el concepto de Campo de Valores de una matriz cuadrada; se presenta como una prueba gráfica alterna. Se estudian las propiedades más importantes y útiles del Campo de Valores en estabilidad. Usando esta técnica se obtienen condiciones suficientes de estabilidad para el caso de  $k$  matrices arbitrarias [10] y [11] y condiciones necesarias y suficientes para el caso de  $k$  matrices normales [9] y [10]. En el capítulo 4 se utiliza una forma más natural de representar la incertidumbre en variables de estado, conocida como matriz intervalo. Se analiza la distancia de una matriz Hurwitz-estable al conjunto de las matrices inestables (aquellas que tienen por lo menos un valor propio en el eje imaginario). En base a la distancia obtenida se proponen condiciones suficientes de estabilidad para el caso de una matriz intervalo arbitraria. Un teorema sobre inestabilidad de matrices intervalo, es abordado en este capítulo. En el capítulo 5, utilizando una cota inferior de la distancia de una matriz centroide (matriz que se define a partir de las matrices que definen el intervalo) al conjunto de las matrices inestables y la distancia de la matriz centroide a la matriz vértice más alejada de ésta, se propone un teorema de estabilidad que garantiza condiciones suficientes para la estabilidad de una matriz intervalo; en el capítulo 6, se deriva una condición simple para estabilidad de una matriz intervalo a partir de un análisis de la localización extrema de los valores propios de las partes hermíticas de las matrices vértices de una matriz intervalo; en base a esto se proponen condiciones suficientes de estabilidad. Lo más notable es que dicha condición sólo hace uso de las matrices que definen el intervalo y la verificación se mantiene simple aunque la dimensión de las matrices aumente. En el capítulo 7, mediante ejemplos, se presentan algunas aplicaciones de los resultados obtenidos en esta tesis. Todas las herramientas computacionales fueron desarrolladas en MATLAB. Dichos programas apoyan computacionalmente los resultados del capítulo 3, especialmente. Finalmente en el capítulo 8, se dan las conclusiones, algunos comentarios y se propone el trabajo futuro.

## 1.2 Clases de Incertidumbres

Por las razones expresadas anteriormente, los modelos matemáticos que se obtienen de los sistemas físicos no representan de una manera exacta al sistema que describen; en la medida en que el modelo se apegue al sistema físico, más precisa será la representación. Siempre que se obtiene un modelo matemático de un sistema, es necesario tener en cuenta que existe una incertidumbre que tendrá que tomarse en consideración a la hora de hablar de la estabilidad y en general del desempeño del sistema en cuestión.

La representación de incertidumbres [19], [20] y [21] puede variar dependiendo de: qué tanta estructura se conozca de la incertidumbre; del conocimiento que tengamos del sistema físico y nuestra habilidad para poder representar la incertidumbre de una manera tal que permita su manipulación matemática. En este trabajo se clasificarán los tipos de incertidumbres con el fin de poner en claro la incertidumbre de la que se estará hablando en el resto de esta tesis. Como la representación del sistema es la de espacio de estado, cuando se hable de matrices, se estará refiriendo a las matrices de dicha representación. A continuación se presentan definiciones de tres tipos de incertidumbres [21].

*Incetidumbre paramétrica.* En este caso la estructura del modelo de la incertidumbre se conoce; esto es, se conocen los intervalos de cada uno de los elementos de la matriz con incertidumbre. El orden del sistema es constante. La representación en espacio de estado de un sistema lineal invariante en el tiempo con incertidumbre paramétrica sería de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= (\mathbf{A} + \mathbf{E})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{aligned}\quad (1)$$

la matriz  $\mathbf{E}$  representa la matriz de incertidumbre y cada uno de sus elementos esta comprendido dentro del intervalo dado por la siguiente ecuación

$$\mathbf{E} = [e_{ij}] \quad \text{donde} \quad (e_{ij})_{\min} \leq e_{ij} \leq (e_{ij})_{\max} \quad \forall i,j = 1,2,\dots,n \quad (2)$$

la cual determina que cada elemento de  $\mathbf{A}$  pueda estar dentro de dicho intervalo. En este caso sólo se consideró incertidumbre paramétrica en la matriz  $\mathbf{A}$ .

*Incertidumbre paramétrica pobremente estructurada.* A diferencia de la anterior, el modelo de la incertidumbre no se conoce completamente; lo único de lo que se dispone es de la norma espectral o la norma 2 de la matriz de incertidumbres, la cual también puede ser obtenida para el caso anterior. La incertidumbre  $\mathbf{E}$  sólo está restringida por

$$\|\mathbf{E}\|_2 \leq \varepsilon \quad \text{donde } \varepsilon \text{ representa la cota de la incertidumbre.}$$

*Incertidumbre dinámica.* Con esta clase de incertidumbre el orden del sistema puede cambiar. La incertidumbre de este tipo puede ser estructurada y no estructurada. Esta clase de incertidumbre tradicionalmente se utiliza cuando se trabaja en el dominio de la frecuencia y puede ser aditiva o multiplicativa [19] y [20].

Esta última representación de incertidumbre, no será utilizada en el desarrollo de esta tesis, sólo se menciona con el fin de mostrar los tipos de incertidumbres y su principal diferencia con las anteriores. En adelante sólo se considerarán los dos primeros casos a los cuales se llamará simplemente incertidumbre paramétrica. Igualmente, en esta tesis, la estabilidad considerada es la estabilidad *asintótica* ó *exponencial*.

### 1.3 Representación de Incertidumbres.

Consideremos el sistema lineal invariante en el tiempo y descrito por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (3)$$

donde  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  son matrices reales de dimensiones  $n \times n$ ,  $n \times m$  y  $p \times n$  que pertenecen a las familias de matrices  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{C}$  respectivamente. La estabilidad del sistema está determinada exclusivamente por la matriz  $\mathbf{A}$ , que también incluye a la matriz resultante después de una retroalimentación de estado. Cuando existe incertidumbre paramétrica, la matriz  $\mathbf{A}$  no es única, por lo que  $\mathcal{A}$  contiene a todas las posibles matrices  $\mathbf{A}$  de (3). El conjunto de dicha familia de matrices  $\mathcal{A}$  puede contener un gran número de matrices. Por esta razón, es necesario adoptar alguna representación como caso de estudio, que nos permita hablar de la estabilidad de  $\mathcal{A}$  a partir de sólo un

conjunto finito de ellas. Por cuestiones de análisis, en esta tesis se describirá a la familia de matrices  $\mathcal{A}$  de dos formas; envolvente convexa de matrices y matriz intervalo.

Envolvente Convexa de Matrices.

La envolvente convexa de las matrices  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_k$  se puede expresar como:

$$\mathcal{A} = \text{Co}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_k) = \{ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} : \mathbf{A} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{A}_i, \alpha_i \in [0,1], \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1 \} \quad (4)$$

donde cada  $\mathbf{A}_i$  es una matriz estable, es decir que todos sus valores propios tienen parte real negativa. Si la envolvente convexa de matrices resulta ser estable, cualquier matriz que pertenezca a esta envolvente convexa será también estable. En el capítulo 2 se dan condiciones necesarias y suficientes de estabilidad para esta representación. En seguida, se detalla la representación de la incertidumbre utilizando la llamada matriz intervalo.

Matriz Intervalo.

Una familia de matriz intervalo  $\mathcal{A}$  se puede definir como sigue:

$$\mathcal{A} = [\mathbf{L}, \mathbf{U}] = \{ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} : l_{ij} \leq a_{ij} \leq u_{ij} \}$$

$\mathbf{L}, \mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , son las matrices extremo que definen el intervalo.

La representación de la envolvente convexa de matrices,  $\text{Co}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_k)$ , es más general que la representación de matriz intervalo,  $\mathcal{A} = [\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ . Esto se explicará en detalle más adelante.

#### 1.4 El Problema de Estabilidad Robusta.

Una vez establecido que existe una familia de matrices  $\mathcal{A}$  que agrupa a un número infinito de matrices, el problema de Estabilidad Robusta puede ser enunciado de la siguiente manera, independientemente de qué representación se adopte para la familia de matrices  $\mathcal{A}$ .

*Problema de Estabilidad Robusta* : Dada la familia  $\mathcal{A}$  encontrar condiciones necesarias y suficientes (verificables) tal que toda  $A \in \mathcal{A}$  sea estable.

El problema de Estabilidad robusta puede ser expresado en las dos diferentes representaciones que para  $\mathcal{A}$  se utilizarán en esta tesis. Para el caso de la **envolvente convexa** de  $k$  matrices, esto es,  $\mathcal{A} = \text{Co}(A_1, A_2, \dots, A_k)$  se tiene:

*Problema de Estabilidad Robusta (PEREC)* : Dadas las matrices reales estables  $A_1, A_2, \dots, A_k$  de dimension  $n \times n$ , encontrar condiciones necesarias y suficientes que garanticen la estabilidad de  $\mathcal{A} = \text{Co}(A_1, A_2, \dots, A_k)$ .

Usando ahora la representación de **matriz intervalo**, esto es, la familia de matrices  $\mathcal{A} = [\mathbf{L}, \mathbf{U}]$  el problema se puede enunciar como:

*Problema de Estabilidad Robusta (PERMI)* : Dado  $\mathcal{A} = [\mathbf{L}, \mathbf{U}]$  donde  $l_{ij} \leq a_{ij} \leq u_{ij}$  y  $\mathbf{L}, \mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , encontrar condiciones necesarias y suficientes para garantizar que toda  $A \in \mathcal{A}$  sea estable.

Los términos entre paréntesis, **PEREC** y **PERMI**, sólo se usan para diferenciar como se establece el problema de Estabilidad Robusta en ambas representaciones, envolvente convexa de matrices y matriz intervalo respectivamente.

## 1.5 Resumen.

En este capítulo se ha dado una motivación para el estudio de sistemas lineales invariantes en el tiempo, modelados en variables de estado y que presentan incertidumbre paramétrica; esto es, el estudio de Estabilidad Robusta. En los capítulos posteriores, se adoptará primero la representación de incertidumbre de la envolvente convexa de  $k$  matrices, capítulos 2 y 3, y a partir del capítulo 4 la incertidumbre se representará mediante la matriz intervalo.

# CAPITULO 2

## ESTABILIDAD DE LA ENVOLVENTE CONVEXA DE MATRICES: CASOS PARTICULARES

### 2.1 Introducción.

En este capítulo se aborda el problema de Estabilidad Robusta cuando la incertidumbre está representada por la envolvente convexa de matrices. En la primera parte, se retoma el resultado presentado en [2], para el caso de la combinación convexa de dos matrices arbitrarias estables. En dicho resultado, cuyo teorema formal y la prueba se dá en la sección 2.3, se muestra una condición algebraica que determina la estabilidad de la combinación convexa usando sumas y productos Kronecker [14]. El resultado de estabilidad representa condiciones necesarias y suficientes. La condición se puede resumir de la siguiente manera; dadas dos matrices  $A_0$  y  $A_1$  estables, cuya envolvente convexa se representa como  $A_\alpha = \alpha A_0 + (1-\alpha)A_1 \quad \forall \alpha \in [0,1]$ ; se debe cumplir que  $\sigma\{(A_0 \oplus A_0)^{-1} (A_1 \oplus A_1)\} \cap (-\infty, 0] = \emptyset$ . Para este caso, haciendo uso de productos de matrices tipo Kronecker [15] y [16], se propone la misma prueba algebraica de una manera simplificada. La dimensión de las matrices de prueba que se generan son de dimensión menor que en [2]. En [15] se trata el mismo caso, sólo que aquí, la condición de estabilidad está basada en mapas guardianes de estabilidad, los cuales relacionan su argumento con la matriz y se hacen cero a medida que se pierde estabilidad.

En la segunda parte, se analiza la estabilidad de la envolvente convexa de  $k$  matrices y se aborda el caso particular en el que las  $k$  matrices son simétricas estables. En este caso se hace una proposición que garantiza la estabilidad del  $\text{Co}(A_1, A_2, \dots, A_k)$ ; más aún, se obtiene una *abscisa de convergencia* aprovechando el hecho de que una matriz simétrica tiene sólo valores propios reales y pueden ser ordenados.

## 2.2 Preliminares.

**Hecho 2.2.1** Dado  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , si  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$  entonces  $\lambda_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1, \dots, n$  y además pueden ser ordenados como  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  donde  $\lambda_1 = \lambda_{max}$  y  $\lambda_n = \lambda_{min}$  [31].

Definición de Matrices Compuestas [16].

Dado  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times q}$  el producto Kronecker de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  denotado por  $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$  se define como:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \triangleq \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \dots & a_{1n}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & \dots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mp \times nq} \quad (5)$$

si  $m = n$  y  $p = q$ , la suma Kronecker de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  denotada por  $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$  está definida por

$$\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} \triangleq \mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_p + \mathbf{I}_m \otimes \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{mp \times mp} \quad (6)$$

Dado  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  para  $n \geq 2$ , donde  $(i1, i2)$  y  $(j1, j2)$  son el  $i$ -ésimo y el  $j$ -ésimo par de enteros respectivamente en la secuencia

$$(1,1), (1,2), \dots, (1,n), (2,2), (2,3), \dots, (2,n), (3,3), \dots, (n-1,n), (n,n) \quad (7)$$

se define

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \triangleq [c_{zw}] \in \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1) \times \frac{1}{2}n(n+1)} \quad (8)$$

donde

$$c_{zw} \triangleq \left\{ \begin{array}{ll} a_{i1j1} b_{i1j1} & \text{si } i1_z = i2_z, \quad j1_w = j2_w \\ \frac{1}{2}(a_{i1j1} b_{i2j2} + a_{i1j2} b_{i2j1} + a_{i2j1} b_{i1j2} + a_{i2j2} b_{i1j1}) & \text{si } i1_z \neq i2_z, \quad j1_w \neq j2_w \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(a_{i1j1} b_{i2j2} + a_{i2j2} b_{i1j1}) & \text{en los otros casos} \end{array} \right\} \quad (9)$$

$$\forall z, w = 1, \dots, \frac{1}{2}n(n+1)$$

Utilizando ahora la secuencia

$$(1,2),(1,3),\dots,(1,n),(2,3),\dots,(2,n),(3,4),\dots,(n-1,n) \quad (10)$$

donde  $(r1,r2)$  y  $(s1,s2)$  son el  $r$ -ésimo y  $s$ -ésimo par de enteros, se define

$$\overline{\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}} \triangleq [d_{kl}] \in \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n-1) \times \frac{1}{2}n(n-1)} \quad (11)$$

y

$$d_{kl} \triangleq \frac{1}{2} (a_{r1,s1} b_{r2,s2} - a_{r1,s2} b_{r2,s1} - a_{r2,s1} b_{r1,s2} + a_{r2,s2} b_{r1,s1}) \quad \forall k,l = 1, \dots, \frac{1}{2}n(n-1) \quad (12)$$

el producto expresado en (11) tambien es llamado producto bialterno [15]. A partir de los productos definidos en (8) y (11), se pueden definir las siguientes sumas tipo Kronecker

$$\overline{\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}} \triangleq \overline{\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_n} + \overline{\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1) \times \frac{1}{2}n(n+1)} \quad (13)$$

también

$$\overline{\overline{\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}}} \triangleq \overline{\overline{\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_n}} + \overline{\overline{\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}}} \in \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n-1) \times \frac{1}{2}n(n-1)} \quad (14)$$

Algunas Propiedades Importantes de productos Kronecker [23] y [37] son:

- 1.-  $(\mu\mathbf{A}) \otimes \mathbf{B} = \mathbf{A} \otimes (\mu\mathbf{B}) \quad \forall \mu \in \mathbb{C}$
- 2.-  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{C}$
- 3.-  $\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{C}$
- 4.-  $\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C}$
- 5.-  $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T$
- 6.- Si  $\mathbf{A}, \mathbf{C} \in \mathbb{C}^{m \times m}$  y  $\mathbf{B}, \mathbf{D} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = \mathbf{AC} \otimes \mathbf{BD}$$

De la propiedad 6, se desprenden dos consecuencias importantes.

**Corolario 2.2.1.** Si  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times m}$  y  $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  son no singulares, entonces

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}.$$

**Corolario 2.2.2.** Si  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_p \in \mathbb{C}^{m \times m}$  y  $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_p \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , entonces

$$(\mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{B}_1)(\mathbf{A}_2 \otimes \mathbf{B}_2) \dots (\mathbf{A}_p \otimes \mathbf{B}_p) = (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_p) \otimes (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \dots \mathbf{B}_p).$$

**Teorema 2.2.1** [23] y [37]. Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times m}$  con valores propios  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  y  $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  con valores propios  $\mu_1, \dots, \mu_n$ , entonces los valores propios de la matriz compuesta, donde  $l$  es el número de términos, son los  $mn$  números  $\phi(\lambda_r, \mu_s)$  donde  $r = 1, 2, \dots, m$  y  $s = 1, 2, \dots, n$  y están dados por

$$\phi(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \sum_{i,j=0}^l \phi_{ij} \mathbf{A}^i \otimes \mathbf{B}^j \quad (15)$$

$$\phi(\lambda_r, \mu_s) = \sum_{i,j=0}^l \phi_{ij} \lambda_r^i \mu_s^j. \quad (16)$$

*Prueba:* Sean las matrices  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{Q}$  de dimensiones apropiadas tales que

$$\mathbf{J}_1 = \mathbf{PAP}^{-1} \text{ y } \mathbf{J}_2 = \mathbf{QBQ}^{-1}$$

definen las formas canónicas de Jordan de las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  respectivamente. Cada  $\mathbf{J}_1^i$  es una matriz triangular superior que tiene los valores propios  $\lambda_1^i, \dots, \lambda_m^i$  en su diagonal principal. Similarmente  $\mu_1^j, \dots, \mu_n^j$  son los elementos de la diagonal de la matriz triangular superior  $\mathbf{J}_2^j$ . Del producto Kronecker definido en (5),  $\mathbf{J}_1^i \otimes \mathbf{J}_2^j$  también es una matriz triangular que tiene por valores propios  $\lambda_r^i \mu_s^j$ ,  $r = 1, 2, \dots, m$  y  $s = 1, 2, \dots, n$ . Así  $\phi(\mathbf{J}_1 \otimes \mathbf{J}_2)$  es una matriz triangular superior con  $\phi(\lambda_r, \mu_s)$  en la diagonal principal esto es, sus valores propios. Sólo resta probar que los valores propios de  $\phi(\mathbf{J}_1 \otimes \mathbf{J}_2)$  y  $\phi(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})$  son los mismos. Para esto, usando el resultado del corolario 2.2.1 y 2.2.2 se tiene que

$$\mathbf{J}_1^i \otimes \mathbf{J}_2^j = \mathbf{PA}^i \mathbf{P}^{-1} \otimes \mathbf{QB}^j \mathbf{Q}^{-1}$$

$$\begin{aligned}
&= (\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q})(\mathbf{A}^i \otimes \mathbf{B}^j)(\mathbf{P}^{-1} \otimes \mathbf{Q}^{-1}) \\
&= (\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q})(\mathbf{A}^i \otimes \mathbf{B}^j)(\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q})^{-1}
\end{aligned}$$

por lo que

$$\phi(\mathbf{J}_1 \otimes \mathbf{J}_2) = (\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q})\phi(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q})^{-1}$$

como  $\phi(\mathbf{J}_1 \otimes \mathbf{J}_2)$  y  $\phi(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})$  son similares, tienen los mismos valores propios. ■

Mediante procedimientos similares se puede establecer que:

$$\sigma(\overline{\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}}) = \{ \lambda_i(\mathbf{A})\lambda_j(\mathbf{A}), i = 1, 2, \dots, m, j \geq i \}.$$

$$\sigma(\overline{\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}}) = \{ \lambda_i(\mathbf{A})\lambda_j(\mathbf{A}), i = 1, 2, \dots, m - 1, j > i \}.$$

$$\sigma(\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}) = \{ \lambda_i(\mathbf{A}) + \lambda_j(\mathbf{B}), i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n \}.$$

$$\sigma(\mathbf{A} \oplus \mathbf{A}) = \{ \lambda_i(\mathbf{A}) + \lambda_j(\mathbf{A}), i = 1, 2, \dots, m, j \geq i \}.$$

$$\sigma(\overline{\mathbf{A} \oplus \mathbf{A}}) = \{ \lambda_i(\mathbf{A}) + \lambda_j(\mathbf{A}), i = 1, 2, \dots, m - 1, j > i \}.$$

### 2.3 Resultados principales.

Primeramente se presenta una proposición para el caso de la envolvente convexa de  $k$  matrices simétricas estables; la cual representa condiciones necesarias y suficientes de estabilidad, además se obtiene una *abscisa de convergencia*. En el segundo resultado se replantea la prueba de estabilidad de la envolvente convexa de dos matrices  $\text{Co}(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1)$  obtenida por Fu y Barmish [2], utilizando matrices compuestas tipo Kronecker.

$\mathcal{A} = \text{Co}(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1)$  representa la envolvente convexa de  $\mathbf{A}_0$  y  $\mathbf{A}_1$  y se puede establecer como sigue:

$$\mathcal{A} = \{ \mathbf{A}_\alpha : \mathbf{A}_\alpha = \alpha \mathbf{A}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{A}_0, \forall \alpha \in [0, 1] \}$$

donde  $\mathbf{A}_\alpha$  es cualquier matriz que pertenece a la envolvente convexa de  $\mathbf{A}_0$  y  $\mathbf{A}_1$  y  $\alpha$  es un parámetro que pertenece al intervalo  $[0, 1]$ .

Para el caso de  $k$  matrices, donde  $k \geq 3$ , la envolvente convexa resultante está dada en (4)

**Teorema 2.3.1** Dado  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrices simétricas, el  $\text{Co}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_k)$  generado por dichas matrices es estable sí y sólo sí las  $\mathbf{A}_i$  son estables.

*Prueba:*

*Suficiencia*( $\Leftarrow$ ). Suponiendo que las  $\mathbf{A}_i$  son estables, por el teorema de Weyl [17], se puede establecer para el caso de dos matrices el siguiente resultado

$$\lambda_{\min}(\mathbf{A}_1) + \lambda_i(\mathbf{A}_2) \leq \lambda_i(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{A}_1) + \lambda_i(\mathbf{A}_2) \quad (17)$$

y

$$\lambda_{\max}(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{A}_1) + \lambda_{\max}(\mathbf{A}_2) < 0 \quad (18)$$

por estabilidad se puede obtener una *abscisa de convergencia* expresada como

$$\bar{\rho} = \max_i(\lambda_{\max}(\mathbf{A}_i)) < 0 \quad (19)$$

nuevamente usando el teorema de Weyl para las  $k$  matrices simétricas y comparando con  $\bar{\rho}$ , se encuentra que

$$\lambda_{\max}(\sum_{j=1}^k \alpha_j \mathbf{A}_j) \leq \sum_{j=1}^k \alpha_j \lambda_{\max}(\mathbf{A}_j) \leq \bar{\rho} < 0 \quad (20)$$

$$\forall \alpha_j \in [0,1] \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^k \alpha_j = 1 \quad (21)$$

por lo que se concluye que  $\text{Co}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_k)$  es estable.

En la ecuación

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j \lambda_{\max}(\mathbf{A}_j) \leq \bar{\rho} \quad (22)$$

existe igualdad en dos casos: cuando existe sólo una matriz cuyo espectro contiene a  $\bar{\rho}$  y el  $\alpha_j$  que corresponde al mayor  $\lambda_{\max}(\mathbf{A}_i)$ , ( $\bar{\rho}$ ), es igual a uno y todos los demás  $\alpha_j$ 's son igual a cero para todo  $i \neq j$ ; y cuando existen varias matrices cuyos espectros contienen  $\bar{\rho}$ ,

en este caso hay igualdad si los  $\alpha_j$ 's correspondientes a esas matrices suman uno y todos los demás  $\alpha_j$ 's son igual a cero. En todos los otros casos, la desigualdad es estricta.

*Necesidad*( $\Rightarrow$ ). En este sentido la prueba es trivial, ya que las matrices  $A_1, A_2, \dots, A_k$  pertenecen al  $\text{Co}(A_1, A_2, \dots, A_k)$ . ■

En la segunda parte de este capítulo, se muestra como la condición de estabilidad establecida por Fu y Barmish en [2] para el  $\text{Co}(A_0, A_1)$  puede ser simplificada. Se muestran ambos resultados; primero la condición dada en [2] y segundo el resultado simplificado. Antes de presentar formalmente los teoremas, es necesario tener en cuenta lo siguiente:

**Hecho 2.3.1** [18, teorema 4] y [29]. Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $D = A \oplus A$  donde  $\oplus$  representa la suma Kronecker definida en (6) y la dimensión de  $D$  es  $n^2 \times n^2$ , entonces, el espectro de  $D$  esta dado por  $\sigma(D) = \{ \lambda_i(A) + \lambda_j(A), i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n \}$ .

**Hecho 2.3.2** [18, teorema 6] y [29]. Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $E = A \bar{\oplus} A$  donde  $\bar{\oplus}$  representa la suma tipo Konecker definida en (13) y la dimensión de  $E$  es  $\frac{1}{2}n(n+1) \times \frac{1}{2}n(n+1)$ , entonces, el espectro de  $E$  esta dado por  $\sigma(E) = \{ \lambda_i(A) + \lambda_j(A), i = 1, 2, \dots, n, j \geq i \}$ .

**Lema 2.3.1.** Sean  $A_0$  y  $A_1$  dos matrices de  $n \times n$ , donde  $A_0$  es no singular, entonces  $A_\alpha = (1-\alpha)A_0 + \alpha A_1$  es no singular  $\forall \alpha \in [0, 1]$  sí y sólo sí  $A_0^{-1}A_1$  no tiene valores propios en  $(-\infty, 0]$ .

*Prueba:* De la expresión  $A_\alpha = (1-\alpha)A_0 + \alpha A_1$  factorizando  $A_0$  y  $\alpha$  resulta  $A_\alpha = \alpha A_0 \Gamma$ , donde  $\Gamma = [(1-\alpha)/\alpha I + A_0^{-1}A_1]$ , de esta ecuación se observa que al variar  $\alpha$  de 0 a 1 los valores propios de  $(1-\alpha)/\alpha I$  están en  $[0, \infty)$ , por lo que  $A_0^{-1}A_1$  no debe tener valores propios en  $(-\infty, 0]$  para que  $\Gamma$  no sea singular. Si  $\Gamma$  es no singular para toda  $\alpha \in (0, 1]$ , entonces  $A_\alpha$  es no singular para toda  $\alpha \in (0, 1]$ . ■

La condición de estabilidad [2], utiliza la suma y el producto Kronecker.

**Teorema 2.3.2.** Dadas dos matrices estables  $A_0$  y  $A_1$ , el  $\text{Co}(A_0, A_1) = (1-\alpha)A_0 + \alpha A_1$  es estable sí y sólo sí  $\sigma\{(A_0 \oplus A_0)^{-1} (A_1 \oplus A_1)\} \cap (-\infty, 0] = \emptyset$ .

*Prueba:* Por el hecho 2.3.1, si  $A_0$  es estable implica que  $A_0 \oplus A_0$  es no singular, entonces el  $\text{Co}(A_0, A_1)$  es estrictamente Hurwitz para toda  $\alpha \in (0, 1]$  sí y sólo sí  $A_0$  es estrictamente Hurwitz y  $(A_0 \oplus A_0)^{-1} (A_1 \oplus A_1)$  no tiene valores propios en  $(-\infty, 0]$  por lo que utilizando el lema 2.3.1, el teorema resulta. ■

La matriz que resulta al aplicar la condición es de dimensión  $n^2 \times n^2$ , y su espectro, que consiste de  $n^2$  valores propios, incluye valores que se repiten.

En el producto y suma de matrices compuestas, descritas en preliminares, ecuaciones (8) y (13) respectivamente, la dimensión de las matrices resultantes es de  $\frac{1}{2}n(n+1) \times \frac{1}{2}n(n+1)$ , lo que indica que son aproximadamente de la mitad de la dimensión que la de las matrices originales, ecuaciones (5) y (6). De hecho el espectro de una matriz que resulta utilizando (8) y (13) i.e.  $M = (A_0 \bar{\oplus} A_0)^{-1} (A_1 \bar{\oplus} A_1)$  [15] y [18] no contiene términos repetidos. En base a esto, se puede replantear la condición de estabilidad, realizando operaciones que incluyen matrices de dimensión menor. A continuación se presenta el resultado simplificado.

**Teorema 2.3.3.** Dadas dos matrices estables  $A_0$  y  $A_1$ , el  $\text{Co}(A_0, A_1)$  es estable sí y sólo sí  $\sigma\{(A_0 \bar{\oplus} A_0)^{-1} (A_1 \bar{\oplus} A_1)\} \cap (-\infty, 0] = \emptyset$ .

*Prueba:* Como este resultado es una simplificación del resultado dado por Fu y Barmish en [2], primeramente se tiene que demostrar que los valores propios de  $A \bar{\oplus} A$  y  $A \oplus A$  son los mismos. Utilizando los hechos 2.3.1 y 2.3.2, resulta que  $\sigma(A \bar{\oplus} A) = \sigma(A \oplus A)$  ya que los elementos de  $\sigma(D)$ , que no están en  $\sigma(E)$  se encuentran repetidos en  $\sigma(D)$ . Finalmente usando el lema 2.3.1 el teorema se cumple. ■

## 2.4 Ejemplo numérico.

A continuación a manera de ilustración del resultado de Fu y Barmish y el teorema 2.3.3, se presenta un ejemplo numérico.

### Ejemplo 2.4.1

Sean  $A_0$  y  $A_1$  dos matrices estables.

$$A_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -7 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A_1 = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Usando primero la condición dada por Fu y Barmish, resulta

$$\sigma\{(A_0 \oplus A_0)^{-1} (A_1 \oplus A_1)\} = \{119.88, 7.49, 7.49, 0.34+0.52i, 0.34-0.52i, 0.11, 0.62+2.72i, 0.62-2.72i, 0.62+2.72i, 0.62-2.72i, 1.07, 1.07, 0.33+0.08i, 0.33-0.08i, 0.33+0.08i, 0.33-0.08i\}.$$

Utilizando ahora el teorema 2.3.3

$$\sigma\{(A_0 \oplus A_0)^{-1} (\overline{A_1 \oplus A_1})\} = \{119.88, 7.49, 0.62+2.72i, 0.62-2.72i, 1.07, 0.34+0.52i, 0.34-0.52i, 0.33+0.08i, 0.52-0.08i, 0.11\}.$$

Como se puede observar en este ejemplo, se obtienen los mismos espectros utilizando los dos tipos de sumas Kronecker. Está claro que, utilizando el resultado del teorema 2.3.3 se eliminan las redundancias en los elementos contenidos en el espectro de la suma Kronecker de dos matrices, lo que prueba que esta condición es más simple, sobre todo por que las matrices son de dimensión menor.

## 2.5 Resumen

En este capítulo, se presentaron dos resultados; en el primero, se obtienen condiciones necesarias y suficientes para garantizar la estabilidad de la envolvente convexa de  $k$  matrices simétricas; se obtuvo además una *abscisa de convergencia*, la cual asegura la velocidad de respuesta en un tiempo dado de un sistema que presenta incertidumbre; en el segundo resultado, se hace un replanteamiento de la prueba de estabilidad de la envolvente convexa de dos matrices arbitrarias estables, determinada en [2], por medio de matrices compuestas de dimensión menor. El teorema replanteado, mejora el cómputo de la prueba, ya que se requiere menos tiempo y menos memoria para determinar la estabilidad.

# CAPITULO 3

## CAMPO DE VALORES

### 3.1 Introducción.

En este capítulo se estudia el concepto de Campo de Valores de una matriz. El objetivo por el cual se estudia dicho concepto, es el de usarlo en el estudio de Estabilidad Robusta de sistemas lineales invariantes en el tiempo y representados en variables de estado. Primeramente se estudia el Campo de Valores para una matriz arbitraria, haciendo extensiones para el caso de dos o más matrices. Todo esto está encaminado a la aplicación de esta técnica en el estudio de Estabilidad Robusta de un polítopo de matrices. En este caso se tratará la envolvente convexa de  $k$  matrices arbitrarias comúnmente conocida como "*Convex Hull*". Se estudian en detalle algunas propiedades que muestran ser útiles en el establecimiento de condiciones de estabilidad.

El problema de la búsqueda de condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad de la envolvente convexa de matrices; ha propiciado que el problema sea enfocado actualmente, de diferentes formas y técnicas por la comunidad de control. En [13] por ejemplo, se muestran varias técnicas para determinar la estabilidad de polítopos de matrices. Sin embargo, con excepción del caso de dos matrices en envolvente convexa en el que se dan condiciones necesarias también [2] y [13], todo lo que se ha presentado hasta ahora han sido sólo condiciones suficientes de estabilidad para el caso general de  $k$  matrices. El interés fundamental para el estudio de esta técnica, reside en el hecho de que el conjunto del Campo de Valores de una matriz arbitraria contiene al conjunto de los valores propios de esa matriz. Existen otras propiedades útiles para el establecimiento de condiciones de estabilidad. Así, el objetivo de este capítulo es el estudio de las propiedades del Campo de Valores y la búsqueda de condiciones de estabilidad.

### 3.2 Propiedades del Campo de Valores.

El concepto del Campo de Valores de una matriz  $A$ , ver [22] y [23], denotado por el conjunto  $F(A)$  de números complejos  $(Ax, x)$ , donde  $x$  varia en todo el rango de vectores normalizados en  $\mathbb{C}^n$ , es decir que,  $x^*x = 1$ , tiene la siguiente definición formal.

**Definición 3.2.1.** El Campo de Valores de una matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  está dado por

$$F(A) \equiv \{z \in \mathbb{C}: z = x^*Ax, x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\} \quad (23)$$

Propiedades Básicas Importantes.

**Propiedad 3.2.1. Compacidad.** Para toda  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $F(A)$  es un subconjunto compacto de  $\mathbb{C}$

*Prueba:* El conjunto  $F(A)$  es el rango de la función continua  $x \rightarrow x^*Ax$  sobre el dominio  $\{x: x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\}$ , la frontera de la bola unitaria cerrada euclidiana en  $\mathbb{C}^n$ , la cual es un conjunto compacto. Como la imagen continua de un conjunto compacto es compacto [23], entonces  $F(A)$  es compacto. ■

**Propiedad 3.2.2. Convexidad.** Para toda  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $F(A)$  es un subconjunto convexo de  $\mathbb{C}$ .

*Prueba:* Ver [22, pag. 17-20].

La propiedad de convexidad se puede observar en el siguiente hecho: Si  $A$  es una matriz diagonal,  $F(A)$  es la combinación convexa de los elementos de la diagonal principal.

El Campo de Valores de  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  está dado por

$$F(A) = \{x^*Ax : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\}$$

y el espectro de  $A$ ;  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ , como la matriz es diagonal los valores propios son los elementos de la diagonal. Debido a esto el Campo de Valores se puede representar de la siguiente forma

$$F(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \lambda_i : x^*x = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = 1 \text{ y } |x_i|^2 \geq 0 \right\} \quad (24)$$

lo anterior representa una envolvente convexa de  $\lambda_i \forall i$ , por lo que

$$F(\mathbf{A}) = \text{Co}(\sigma(\mathbf{A})).$$

**Propiedad 3.2.3. Traslación.** Para toda  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  y toda  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,

$$F(\mathbf{A} + \alpha \mathbf{I}) = F(\mathbf{A}) + \alpha$$

*Prueba:* Se tiene que

$$\begin{aligned} F(\mathbf{A} + \alpha \mathbf{I}) &= \{ \mathbf{x}^*(\mathbf{A} + \alpha \mathbf{I})\mathbf{x} : \mathbf{x}^*\mathbf{x} = 1 \} \\ &= \{ \mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x} + \alpha \mathbf{x}^*\mathbf{x} : \mathbf{x}^*\mathbf{x} = 1 \} \\ &= \{ \mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x} + \alpha : \mathbf{x}^*\mathbf{x} = 1 \} \\ &= \{ \mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x} : \mathbf{x}^*\mathbf{x} = 1 \} + \alpha \\ &= F(\mathbf{A}) + \alpha \end{aligned}$$

■

**Propiedad 3.2.4. Multiplicación Escalar.** Para toda  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  y toda  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,

$$F(\alpha \mathbf{A}) = \alpha F(\mathbf{A})$$

*Prueba:* Se tiene que

$$\begin{aligned} F(\alpha \mathbf{A}) &= \{ \mathbf{x}^*(\alpha \mathbf{A})\mathbf{x} : \mathbf{x}^*\mathbf{x} = 1 \} \\ &= \{ \alpha \mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x} : \mathbf{x}^*\mathbf{x} = 1 \} \\ &= \alpha \{ \mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x} : \mathbf{x}^*\mathbf{x} = 1 \} \\ &= \alpha F(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

■

**Propiedad 3.2.5. Proyección Real.** Para toda  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,

$$F(H(\mathbf{A})) = \text{Re } F(\mathbf{A}), \text{ donde } H(\mathbf{A}) \text{ es la parte hermítica de } \mathbf{A}$$

*Prueba:* Calculando

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^*H(\mathbf{A})\mathbf{x} &= \mathbf{x}^*\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^*)\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{x}^*\mathbf{A}^*\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x} + (\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x})^*) \\ &= \text{Re } \mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x} \Rightarrow \\ F(H(\mathbf{A})) &= \text{Re } F(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

■

**Propiedad 3.2.6. Proyección Imaginaria.** Para toda  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,

$F(S(A)) = \text{Im } F(A)$ , donde  $S(A)$  es la parte anti-hermítica de  $A$

*Prueba:* Calculando

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^*S(A)\mathbf{x} &= \mathbf{x}^*\frac{1}{2}(A - A^*)\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{x}^*A\mathbf{x} - \mathbf{x}^*A^*\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{x}^*A\mathbf{x} - (\mathbf{x}^*A\mathbf{x})^*) \\ &= \text{Im } \mathbf{x}^*A\mathbf{x} \Rightarrow \\ F(S(A)) &= \text{Im } F(A) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Esta propiedad es muy importante, ya que la localización del Campo de Valores de una matriz en el plano complejo, se basa en la proyección de la parte hermítica y anti-hermítica de la matriz  $A$  en el eje real e imaginario respectivamente. Este procedimiento se basa en el siguiente hecho simple: al tomar la parte real e imaginaria de un número complejo, éste se proyecta en el eje real e imaginario; de la misma forma, al tomar la parte hermítica y anti-hermítica de una matriz, su Campo de Valores se proyecta en el eje real e imaginario. La obtención gráfica del Campo de Valores, que se detallará más adelante, utiliza la propiedad de proyección real. Hay que hacer notar que para el caso de una matriz compleja en general,  $F(A)$  no contiene a  $F(H(A))$  ni a  $F(S(A))$ . Esto se debe a que el Campo de Valores de una matriz compleja, en general, no es simétrico con respecto al eje real.

**Propiedad 3.2.7. Contención espectral.** Para toda  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,

$$\sigma(A) \subset F(A)$$

*Prueba:* Suponer que  $\lambda \in \sigma(A)$ . Entonces  $\exists$  un vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$  diferente de cero, el cual se puede escoger como un vector unitario, para el cual  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$  y como  $\lambda = \lambda\mathbf{x}^*\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(\lambda\mathbf{x}) = \mathbf{x}^*A\mathbf{x} \in F(A)$ .  $\blacksquare$

**Propiedad 3.2.8. Invariante a la transformación unitaria de similitud.** Para toda  $A, U \in \mathbb{C}^{n \times n}$  con  $U$  unitaria,

$$F(U^*AU) = F(A)$$

*Prueba:* Si  $x, y \in \mathbb{C}^n$  y  $x^*x = 1$ , se tiene que  $x^*(U^*AU)x = y^*Ay \in F(A)$ , donde  $y = Ux$ , de tal forma que  $y^*y = x^*U^*Ux = x^*x = 1$ . Entonces,  $F(U^*AU) \subset F(A)$ . En el otro sentido, se tiene que  $y^*Ay = x^*U^*AUx \in F(U^*AU)$  por lo que  $F(A) \subset F(U^*AU)$ . Con esto se demuestra que  $F(U^*AU) = F(A)$ . ■

**Propiedad 3.2.9. Suma directa.** Para toda  $A \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_1}$  y  $B \in \mathbb{C}^{n_2 \times n_2}$

$$F(A + B) = \text{Co}(F(A) \cup F(B))$$

*Prueba:* Recordar que  $A + B \triangleq \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n_1+n_2 \times n_1+n_2}$ , entonces para probar que  $F(A+B)$

$\supset \text{Co}(F(A) \cup F(B))$ , tómesese cualquier vector unitario particionado  $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n_1+n_2}$ ;

entonces:

$$\begin{aligned} F(A+B) &= \{ z^*(A+B)z : z^*z = 1 \} \\ &= \{ x^*Ax + y^*By : x^*x + y^*y = 1 \} \end{aligned}$$

de esto

si  $y^*y = 1 \Rightarrow x = 0$  y  $F(A+B) = F(B)$ , así  $F(A+B) \supset F(B)$

si  $x^*x = 1 \Rightarrow y = 0$  y  $F(A+B) = F(A)$ , así  $F(A+B) \supset F(A)$

por lo tanto  $F(A+B) \supset F(A) \cup F(B)$ , pero como  $F(A+B)$  es convexo, entonces resulta que

$$F(A+B) \supset \text{Co}(F(A) \cup F(B)).$$

Ahora, para probar que  $F(A+B) \subset \text{Co}(F(A) \cup F(B))$ , suponer otra vez un vector

unitario particionado  $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n_1+n_2}$  si  $x^*x = 0 \Rightarrow y^*y = 1$  y

$$F(A+B) = F(B) \subset \text{Co}(F(A) \cup F(B)), \text{ similarmente}$$

si  $y^*y = 0 \Rightarrow x^*x = 1$  y  $F(A+B) = F(A) \subset \text{Co}(F(A) \cup F(B))$ .

Considerar el caso cuando  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$  son diferentes de cero, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^*(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{z} &= \{ \mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{y}^*\mathbf{B}\mathbf{y} : \mathbf{x}^*\mathbf{x} + \mathbf{y}^*\mathbf{y} = 1 \} \\ &= \left\{ \mathbf{x}^*\mathbf{x} \left[ \frac{\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^*\mathbf{x}} \right] + \mathbf{y}^*\mathbf{y} \left[ \frac{\mathbf{y}^*\mathbf{B}\mathbf{y}}{\mathbf{y}^*\mathbf{y}} \right] : \mathbf{x}^*\mathbf{x} + \mathbf{y}^*\mathbf{y} = 1 \right\} \\ &\subset \{ \mathbf{x}^*\mathbf{x} F(\mathbf{A}) + \mathbf{y}^*\mathbf{y} F(\mathbf{B}) : \mathbf{x}^*\mathbf{x} + \mathbf{y}^*\mathbf{y} = 1 \} \\ &= \text{Co}(F(\mathbf{A}) \cup F(\mathbf{B})) \end{aligned}$$

así  $F(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \subset \text{Co}(F(\mathbf{A}) \cup F(\mathbf{B}))$ . ■

Esta propiedad puede extenderse para el caso de  $k$  matrices arbitrarias, esto es,

$$F(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \dots + \mathbf{A}_k) = \text{Co}(F(\mathbf{A}_1) \cup F(\mathbf{A}_2) \dots \cup F(\mathbf{A}_k))$$

esta propiedad al igual que la de contención espectral, representan las propiedades más importantes del Campo de Valores. La suma directa, agrupa los campos de valores de las matrices y por contención espectral los valores propios están dentro de estos.

**Propiedad 3.2.10. Subaditividad.** Para toda  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$$F(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \subset F(\mathbf{A}) + F(\mathbf{B})$$

*Prueba:* Sea  $F(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \{ \mathbf{x}^*(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n, \mathbf{x}^*\mathbf{x} = 1 \}$

$$\begin{aligned} &= \{ \mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{x}^*\mathbf{B}\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n, \mathbf{x}^*\mathbf{x} = 1 \} \\ &\subset \{ \mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n, \mathbf{x}^*\mathbf{x} = 1 \} + \{ \mathbf{y}^*\mathbf{B}\mathbf{y} : \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n, \mathbf{y}^*\mathbf{y} = 1 \} \\ &= F(\mathbf{A}) + F(\mathbf{B}). \end{aligned}$$
■

En esta propiedad el subconjunto  $F(\mathbf{A} + \mathbf{B})$  deja de ser propio cuando  $n = 1$ .

### 3.2.1 Obtención Gráfica del Campo de Valores.

Aquí se describirá un método numérico para graficar el Campo de Valores. Como el conjunto  $F(\mathbf{A})$  es convexo y compacto, sólo se necesita determinar la frontera de  $F(\mathbf{A})$  la cual se denota por  $\partial F(\mathbf{A})$ . La estrategia es calcular puntos espaciados sobre  $\partial F(\mathbf{A})$  y

unirlos; esto da en general un polígono convexo aproximado.

Para establecer el procedimiento para el cálculo de  $F(\mathbf{A})$ , es necesario mencionar algunos puntos interesantes. De la propiedad de multiplicación escalar se puede establecer que

$$e^{-i\theta}F(e^{i\theta}\mathbf{A}) = F(\mathbf{A}) \quad (25)$$

para toda  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$  y  $\forall \theta \in [0, 2\pi)$ . El siguiente lema, que se presenta sin prueba, ver [22], sienta las bases para la obtención de la gráfica de  $F(\mathbf{A})$ .

**Lema 3.2.1.** Si  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ ,  $\mathbf{x}^*\mathbf{x} = 1$  y  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , las siguientes tres condiciones son equivalentes:

- a)  $\max\{\operatorname{Re} \mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x}\} = \max\{\operatorname{Re} \alpha: \alpha \in F(\mathbf{A})\}$
- b)  $\max\{\mathbf{x}^*\mathbf{H}(\mathbf{A})\mathbf{x}\} = \max\{\mathbf{r}: \mathbf{r} \in F(\mathbf{H}(\mathbf{A}))\}$
- c)  $\mathbf{H}(\mathbf{A})\mathbf{x} = \lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{A}))\mathbf{x}$

donde  $\lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{C}))$  denota el valor propio más grande de la parte hermítica de  $\mathbf{C}$ . de este lema se puede establecer la siguiente relación

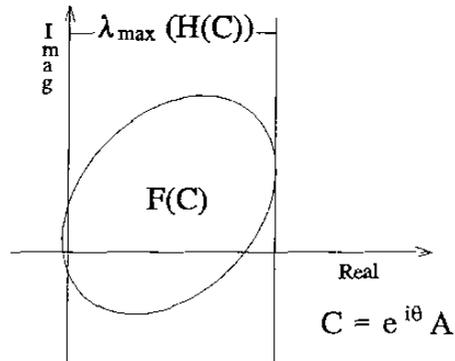
$$\max\{\operatorname{Re} \alpha: \alpha \in F(\mathbf{A})\} = \max\{\mathbf{r}: \mathbf{r} \in F(\mathbf{H}(\mathbf{A}))\} = \lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{A})) \quad (26)$$

Esto quiere decir que el punto más a la derecha en  $F(\mathbf{H}(\mathbf{A}))$  es la parte real del punto más a la derecha en  $F(\mathbf{A})$  y este último es  $\lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{A}))$ .

El lema dice que si calculamos  $\lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{A}))$  y el correspondiente vector propio asociado  $\mathbf{x}$ , obtenemos un punto de frontera  $\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x}$  de  $F(\mathbf{A})$  y una línea de soporte  $\{\lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{A})) + ti: t \in \mathbb{R}\}$ .

En suma, el procedimiento para el cálculo numérico de  $F(\mathbf{A})$ , se puede establecer de la siguiente forma; calcular  $\lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{A}))$  y el vector propio asociado  $\mathbf{x}$ , encontrar el punto de frontera de  $F(\mathbf{A})$  utilizando dicho vector; esto es, obtener  $\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x}$ . Con la ayuda de la propiedad expresada por la ecuación (25), rotar la matriz  $\mathbf{A}$  y el procedimiento se repite. Esto se realiza para todo  $\theta \in [0, 2\pi)$ ; el intervalo se divide dependiendo de

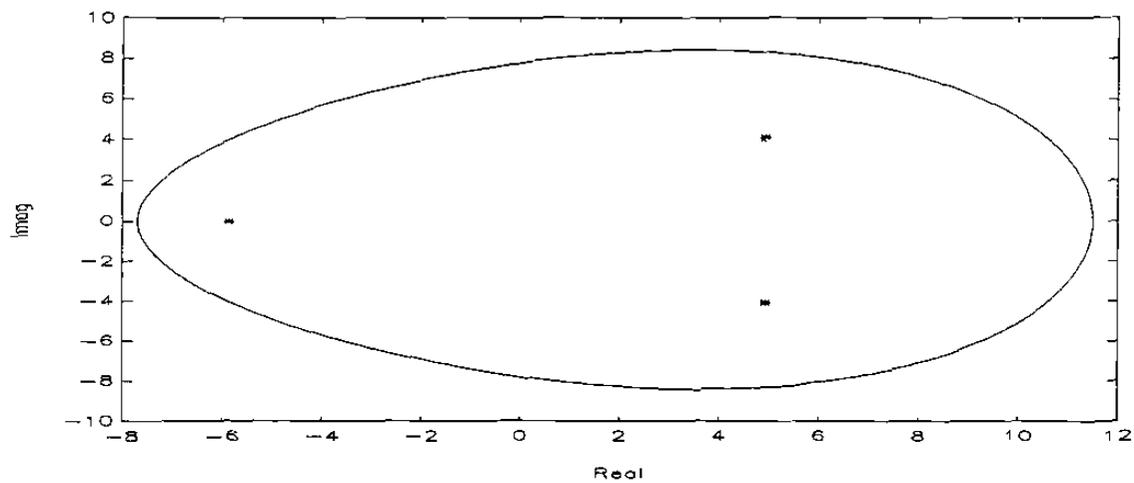
cuantos puntos de frontera se quieran obtener. Normalmente barriendo  $\theta$  de  $0^\circ$  a  $360^\circ$  en incrementos de un grado, se obtiene una buena gráfica. En la figura 1, se puede apreciar una gráfica que ilustra el lema.



**Figura 1.** Ilustración del lema 3.2.1

### 3.2.2 Ilustración Gráfica de Algunas Propiedades.

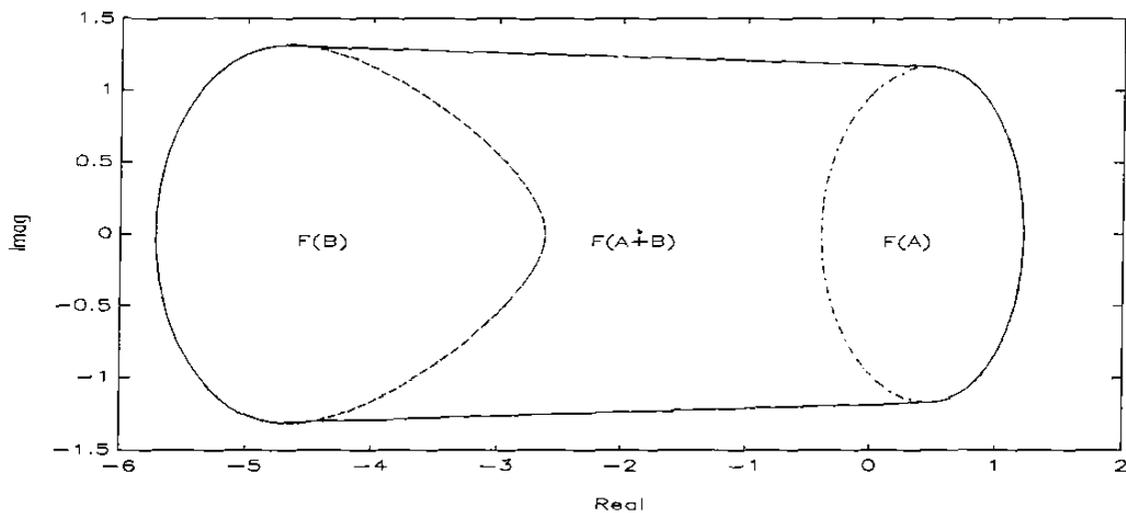
En la figura 2 se muestra el Campo de Valores de una matriz de  $3 \times 3$ , que se



**Figura 2.** Gráfica del Campo de Valores de una matriz de  $3 \times 3$ . En \* los valores propios.

calculó utilizando un programa de MATLAB. En la misma figura se muestran los valores propios de la matriz.

En la figura 3, se puede apreciar el Campo de Valores de la suma directa de dos matrices arbitrarias. Es importante notar como se genera el campo resultante; pues sólo se completa una figura convexa. También se puede resaltar el hecho de que el valor máximo del Campo de Valores de **A** y el valor mínimo del Campo de Valores de **B**, siguen siendo el máximo y el mínimo valor del Campo de Valores de la suma directa de **A** y **B**.



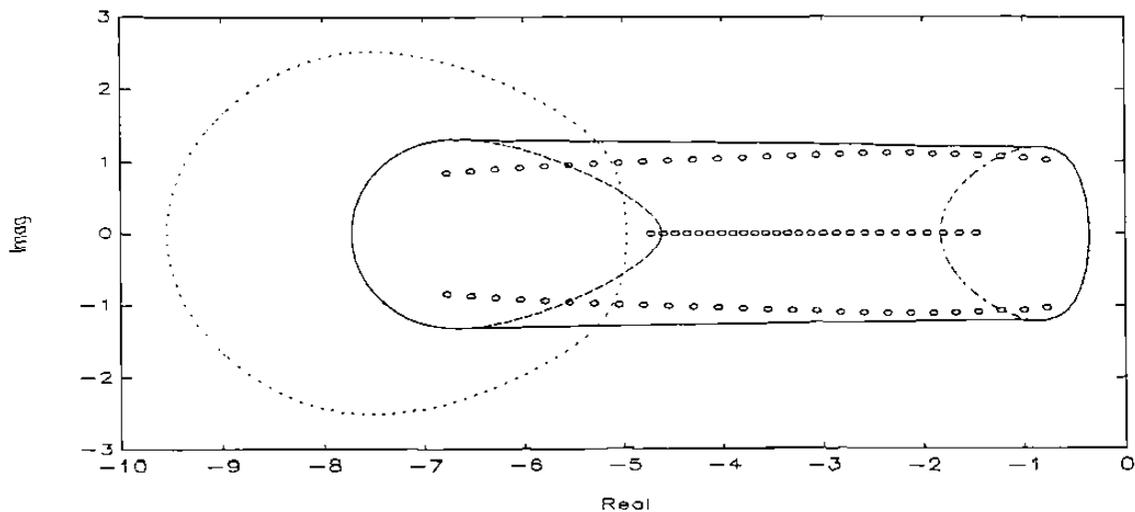
**Figura 3.** Gráfica de  $F(A + B)$

En la figura 4, se puede observar la suma de dos campos de valores y como es ésta, comparada con la suma directa. Observe que tanto  $F(A)$  como  $F(B)$  no tienen que estar dentro de  $F(A)+F(B)$ . En la misma figura también se aprecia el espectro de la envolvente convexa de **A** y de **B**, el cual sí está dentro del Campo de Valores de la suma directa de **A** y **B**.

En esta sección, se ha presentado el concepto del Campo de Valores de una matriz con algunas de sus propiedades más importantes. Sin duda una de las propiedades

importantes del conjunto del Campo de Valores es la de contención espectral, esto es, que contiene a los valores propios de la matriz. Este hecho asegura que  $F(\mathbf{A})$  contendrá a los valores propios de  $\mathbf{A}$ , donde  $\mathbf{A}$  puede ser la envolvente convexa de  $k$  matrices.

Por otro lado, la propiedad de suma directa asegura que cualquier envolvente convexa de los campos de valores de  $k$  matrices, estará contenida en el campo de la suma directa de las  $k$  matrices; esto se puede observar en la figura 4 para  $k = 2$ . De la misma gráfica se observa que el  $\sigma(\alpha\mathbf{A}+(1-\alpha)\mathbf{B})$  también está contenido en el campo de la suma directa.



**Figura 4.** Graficas de  $F(\mathbf{A})+F(\mathbf{B})$  en ..,  $F(\mathbf{A}+\mathbf{B})$  en -,  $F(\mathbf{B})$  en -. ,  $F(\mathbf{A})$  en -- y  $\sigma(\text{Co}(\mathbf{A},\mathbf{B}))$  en o.

Por el contrario la suma de los Campos de Valores de dos matrices, esto es,  $F(\mathbf{A})+F(\mathbf{B})$  generalmente no contiene al espectro de la envolvente convexa de  $\mathbf{A}$  y de  $\mathbf{B}$ , es decir,  $F(\mathbf{A})+F(\mathbf{B}) \neq \sigma(\alpha\mathbf{A}+(1-\alpha)\mathbf{B})$ , como se observa en la figura 4. Este hecho se puede extender al caso de  $k$  matrices. De esta observación se establece que la suma de los Campos de Valores de matrices no puede ser utilizada como una condición de estabilidad.

### 3.3 Condiciones de estabilidad utilizando Campo de Valores.

En esta sección se aborda el problema de la Estabilidad Robusta en sistemas lineales invariantes en el tiempo. Con la ayuda de la técnica basada en el Campo de Valores de una matriz, se determinan condiciones de estabilidad de sistemas representados en modelos de espacio de estado con incertidumbre paramétrica. Aquí la incertidumbre se expresa como la envolvente convexa de  $k$  matrices. El método que se presenta requiere algo de trabajo computacional, él cual se ha desarrollado en MATLAB. La técnica, aunque requiere trabajo computacional, representa un gran potencial para futuras herramientas de prueba. En el caso de una envolvente convexa de matrices normales, las condiciones son necesarias y suficientes. Para el caso general son sólo condiciones suficientes de estabilidad.

Como ya se estableció se tratarán sistemas de la forma

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{aligned}\tag{27}$$

donde  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  son matrices reales de dimensiones  $n \times n$ ,  $n \times m$ ,  $p \times n$  respectivamente; el modelo así representado tiene incertidumbre paramétrica; esto es, que existen conjuntos de matrices  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{C}$  los cuales contienen todos los posibles valores de las matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ . Es bien sabido que la estabilidad del sistema sólo depende de los valores propios de la matriz  $\mathbf{A}$  del modelo resultante. En este caso, la familia de matrices  $\mathcal{A}$  con la cual se trabajará, es la envolvente convexa representada por  $\text{Co}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_k)$ .

#### 3.3.1 Condiciones de estabilidad para la envolvente convexa de $k$ matrices arbitrarias estables.

En la primera parte de esta sección se muestran dos lemas importantes que sirven para apoyar los resultados tanto de la condición suficiente de estabilidad para una envolvente convexa de  $k$  matrices estables arbitrarias, como para la envolvente convexa de  $k$  matrices normales estables. En la literatura existe un resultado para el segundo caso [24], sólo que aquí resulta de una manera natural de las propiedades de Campo de

Valores. El primer lema representa una prueba para la propiedad de normalidad y se muestra con el fin de apoyar la prueba del teorema 3.3.1. El segundo lema tiene que ver con la localización en el plano complejo, de los valores propios de una matriz  $\mathbf{A}$ .

**Lema 3.3.1.** El Campo de Valores  $F(\mathbf{A})$  para  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  está dado por  $F(\mathbf{A}) = \text{Co}(\sigma(\mathbf{A}))$  si  $\mathbf{A}$  es normal.

*Prueba:*

Como  $\mathbf{A}$  es normal, entonces se puede expresar como  $\mathbf{A} = \mathbf{U}^* \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}$  donde  $\mathbf{\Lambda} = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  y  $\mathbf{U}$  es una matriz unitaria [23]. Como el Campo de Valores es invariante bajo transformaciones unitarias de similaridad (propiedad 3.2.8) entonces,

$$F(\mathbf{U}^* \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}) = F(\mathbf{A}) = F(\mathbf{\Lambda}) \quad (28)$$

como  $\mathbf{\Lambda}$  contiene a los valores propios de  $\mathbf{A}$ , entonces  $F(\mathbf{\Lambda})$  representa el Campo de Valores de  $\mathbf{A}$  ya que de acuerdo a la definición 3.2.1 del Campo de Valores

$$\mathbf{x}^* \mathbf{\Lambda} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i x_i \lambda_i = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \lambda_i \quad (29)$$

y como se cumple que  $\mathbf{x}^* \mathbf{x} = 1$  implica que  $\sum_i |x_i|^2 = 1$  y  $|x_i|^2 \geq 0$ ,  $F(\mathbf{\Lambda})$  representa la combinación convexa de los valores propios de  $\mathbf{A}$  por lo que  $F(\mathbf{A}) = \text{Co}(\sigma(\mathbf{A}))$ . ■

**Comentario 3.3.1.** Del lema anterior se concluye que si la matriz  $\mathbf{A}$  es normal, es estable sí y sólo sí  $F(\mathbf{A}) \subset \mathbb{C}_-$

**Comentario 3.3.2.** Hay que hacer notar que el converso del lema 3.3.1 no necesariamente es cierto, esto es, que si  $F(\mathbf{A}) = \text{Co}(\sigma(\mathbf{A})) \neq \mathbf{A}$  es normal.

**Lema 3.3.2.** Sea  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , entonces

$$\lambda_{\min} \left[ \frac{1}{2}(A+A^*) \right] \leq \operatorname{Re} [\lambda_i(A)] \leq \lambda_{\max} \left[ \frac{1}{2}(A+A^*) \right] \quad (30)$$

y

$$\lambda_{\min} \left[ -\frac{j}{2}(A-A^*) \right] \leq \operatorname{Im} [\lambda_i(A)] \leq \lambda_{\max} \left[ -\frac{j}{2}(A-A^*) \right] \quad (31)$$

*Prueba:*

Haciendo uso de la propiedades de proyección real e imaginaria, la cuales se reescriben aquí con fines prácticos, que expresan que:

$$\begin{aligned} F(H(A)) &= \operatorname{Re} F(A) \\ F(S(A)) &= \operatorname{Im} F(A) \end{aligned} \quad (32)$$

y con la propiedad 3.2.7 de contención espectral, los valores propios siempre están dentro de  $F(A)$  y los puntos mínimos y máximos del campo sobre el eje real coinciden con  $\lambda_{\min}(H(A))$  y  $\lambda_{\max}(H(A))$  respectivamente, con esto la primera expresión del lema está probada. De la misma forma, como  $\sigma(S(A))$  contiene valores propios puramente imaginarios, los cuales coinciden con los puntos máximos y mínimos que  $F(A)$  proyecta sobre el eje imaginario, estos a su vez coinciden con las cotas máximas y mínimas de la segunda expresión. Con lo cual, la segunda parte del lema resulta. ■

A continuación se enuncia el resultado que garantiza condiciones suficientes de estabilidad de la envolvente convexa de  $k$  matrices arbitrarias estables.

**Teorema 3.3.1.** Dado  $A_1, A_2, \dots, A_k$  matrices reales estables de dimensión  $n \times n$  y donde  $A+B$ , representa la suma directa de  $A$  y  $B$ . Si el Campo de Valores de la suma directa  $F(A_1 + A_2 + \dots + A_k) \subset \mathbb{C}_-$  entonces  $\operatorname{Co}(A_1, A_2, \dots, A_k)$  es estable.

*Prueba:* Como

$$F(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \dots + \mathbf{A}_k) \subset \mathbb{C}_- \quad (33)$$

entonces basta con probar que

$$\sigma(\mathbf{A}) \subset F(\mathbf{A}) \subset F(\mathbf{A}_1 + \dots + \mathbf{A}_k) \quad \forall \mathbf{A} \in \text{Co}(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k) \quad (34)$$

$\mathbf{A}$  también se puede expresar como:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{A}_i, \quad \alpha_i \in [0,1], \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1 \quad (35)$$

obteniendo el Campo de Valores de  $\mathbf{A}$

$$\begin{aligned} F(\mathbf{A}) &= F(\alpha_1 \mathbf{A}_1 + \alpha_2 \mathbf{A}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{A}_k) \quad \alpha_i \in [0,1], \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1 \\ &\subset \sum_{i=1}^k F(\alpha_i \mathbf{A}_i) && \text{Subaditividad} \\ &= \sum_{i=1}^k \alpha_i F(\mathbf{A}_i) && \text{Escalamiento} \\ &= \text{Co}(F(\mathbf{A}_1), \dots, F(\mathbf{A}_k)) && \text{Def. de Co}(\cdot, \cdot) \\ &= F(\mathbf{A}_1 + \dots + \mathbf{A}_k) && \text{Suma directa} \end{aligned} \quad (36)$$

de aquí que

$$\sigma(\mathbf{A}) \subset F(\alpha_1 \mathbf{A}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{A}_k) \subset F(\mathbf{A}_1 + \dots + \mathbf{A}_k) \subset \mathbb{C}_- \quad \forall \mathbf{A} \in \text{Co}(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k) \quad (37)$$

■

La condición suficiente de estabilidad expresada por este teorema, representa el mejor resultado para el caso general de  $k$  matrices arbitrarias estables en envolvente convexa utilizando el concepto de Campo de Valores. Nuevamente para el caso de  $n=1$ , el resultado es obvio.

### 3.3.2 Condiciones de estabilidad para la envolvente convexa de $k$ matrices normales.

La condición de estabilidad para el caso de una matriz normal, i.e.  $A^*A = AA^*$ , la da el lema 3.3.1, ya que el Campo de Valores de una matriz normal es la envolvente convexa de los valores propios de la matriz, esto es,  $F(A) = \text{Co}(\sigma(A))$ . El teorema que se establece a continuación, da las condiciones necesarias y suficientes para que la envolvente convexa de matrices normales sea estable. Como las matrices que generan la envolvente son conocidas, sus valores propios determinarán la estabilidad de toda la envolvente convexa.

**Teorema 3.3.2.** Dadas  $A_1, A_2, \dots, A_k$  matrices complejas normales de dimensión  $n \times n$ , entonces  $\text{Co}(A_1, A_2, \dots, A_k)$  es estable sí y sólo sí las matrices  $A_i$  son estables.

*Prueba:*

*Suficiencia.* Suponer las  $A_i$  estables, entonces por el lema 3.3.1 se tiene que

$$\begin{aligned} A_i \text{ estable} &\Rightarrow F(A_i) \subset \mathbb{C}_- \quad \forall i \\ \Rightarrow F(A_1 + A_2 + \dots + A_k) &= \text{Co}(F(A_1), F(A_2), \dots, F(A_k)) \subset \mathbb{C}_- \end{aligned} \quad (38)$$

y por el teorema 3.3.1 el  $\text{Co}(A_1, A_2, \dots, A_k)$  es estable.

*Necesidad.* La prueba es trivial en este sentido ya que las matrices  $A_i \in \text{Co}(A_1, A_2, \dots, A_k)$  para toda  $i = 1, \dots, k$ . ■

**Comentario 3.3.3.** En este caso las matrices vértice son normales, pero la suma de dos matrices normales no necesariamente es normal; por lo que las matrices que resultan de

la envolvente convexa de  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_k$  matrices complejas normales, en general, no son normales.

### 3.4 Ejemplos numéricos.

En seguida se presentan algunos ejemplos numéricos para ilustrar los dos resultados presentados, así como algunas propiedades importantes de Campo de Valores.

Las matrices utilizadas son generadas aleatoriamente, cuidando solamente que sean estables.

**Ejemplo 3.4.1.** Sean las matrices normales estables.

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -7.9870 & 5.7280 & -1.8410 \\ -0.2370 & -3.3570 & -9.4170 \\ 6.0120 & 7.4780 & -2.8170 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -1.8190 & -4.6053 & -0.6945 \\ 4.4291 & -1.4800 & -1.7867 \\ -1.4401 & 1.2652 & -4.6179 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} -9.7090 & -2.2940 & 0.6850 \\ -0.5310 & -0.7270 & -9.9590 \\ -2.3340 & 9.7060 & -0.5840 \end{bmatrix}$$

En la figura 5, donde se muestra la gráfica del ejemplo 3.4.1, el Campo de Valores de  $\mathbf{A}_3$  es el que está más a la derecha en el plano complejo, por lo mismo, sus valores propios son los que están localizados más a la derecha de los valores propios de las tres matrices. Por esto, la estabilidad de la envolvente convexa de las tres matrices, está determinada por los valores propios de  $\mathbf{A}_3$ . También se observa que el espectro de cualquier combinación convexa entre las matrices permanece dentro del Campo de Valores de la suma directa de las tres matrices.

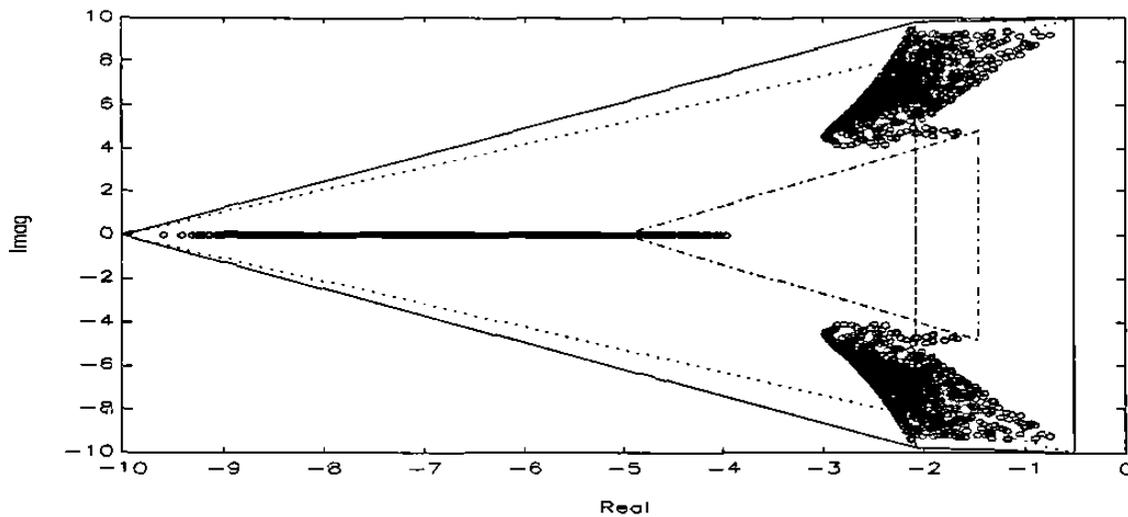


Figura 5. Se muestra en  $-F(A_1+A_2+A_3)$ ,  $-F(A_1)$ ,  $-F(A_2)$ ,  $\dots F(A_3)$  y 'o'  $\sigma(\text{Co}(A_1, A_2, A_3))$ .

Ejemplo 3.4.2. Matrices normales estables con soporte de valores propios disjuntos.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2.9045 & 0.4222 & -0.0602 \\ 0.2976 & -1.4762 & -0.7982 \\ 0.3054 & 0.7399 & -1.4006 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -5.7939 & 0.5739 & 0.2007 \\ 0.5980 & -4.3225 & 0.4282 \\ -0.1098 & -0.4600 & -4.1189 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -7.7589 & -0.9629 & -0.1209 \\ -0.8124 & -8.1321 & -0.5680 \\ -0.5310 & -0.2352 & -7.1859 \end{bmatrix}$$

La figura 6, muestra la gráfica del ejemplo 3.4.2. Aquí, los Campos de Valores de las tres matrices son disjuntos, sin embargo el Campo de Valores de la suma directa de las tres matrices sólo completa una figura convexa. En este caso los valores propios de  $A_1$  son los que determinan la estabilidad de la envolvente convexa de  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$ .

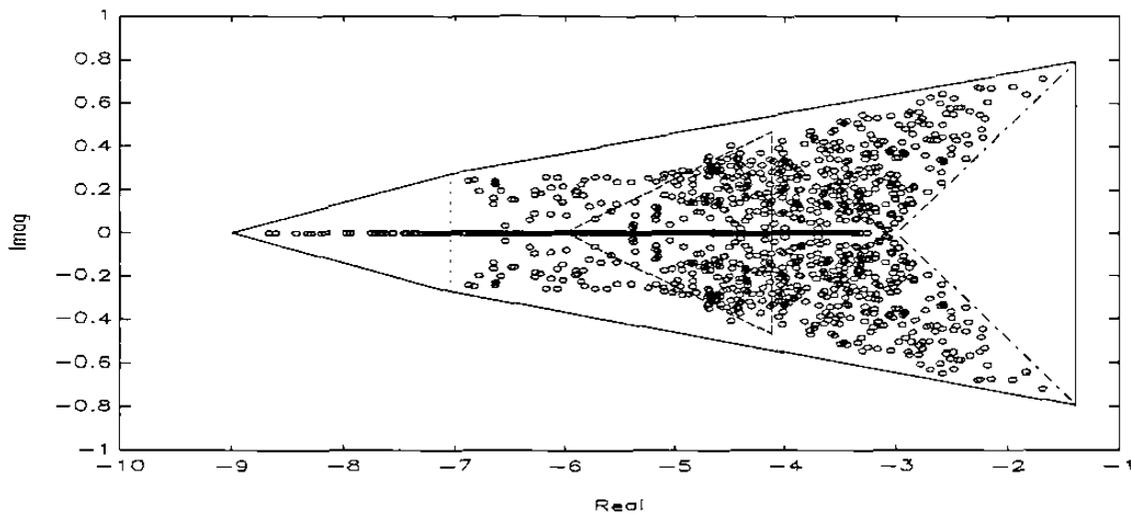


Figura 6. Muestra en  $\bullet$   $F(A_1+A_2+A_3)$ , en  $\cdot$   $F(A_1)$ , en  $\circ$   $F(A_2)$ , ...  $F(A_3)$  y en  $\square$   $\sigma(\text{Co}(A_1, A_2, A_3))$ .

**Ejemplo 3.4.3.** Sean las matrices Hurwitz estables.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 5 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -16 & 10 & -18 \\ -6 & -20 & -2 \\ 26 & 6 & -21 \end{bmatrix}$$

La figura 7, muestra el caso del ejemplo 3.4.3. En este ejemplo, se hace notar el Campo de Valores de la suma directa y el Campo de Valores individual para  $A_1$  y  $A_2$ . Se observa que el campo de la suma directa de  $A_1$  y  $A_2$  está estrictamente en el semiplano izquierdo y de acuerdo al teorema 3.3.1, la envolvente convexa de  $A_1$  y  $A_2$  es estable lo cual resulta obvio de la gráfica.

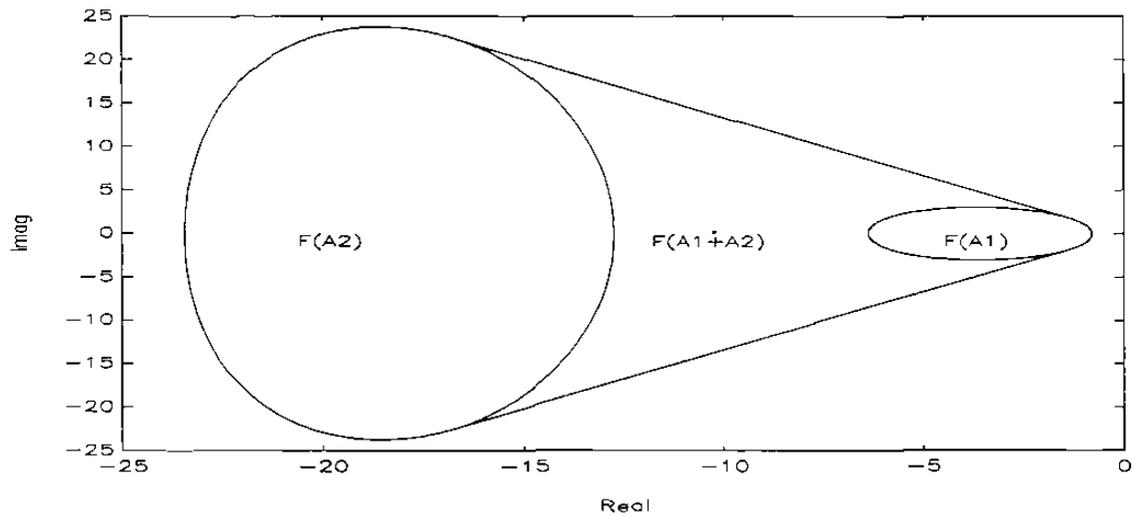


Figura 7. Campo de valores de  $F(A_1 + A_2)$ ,  $F(A_1)$  y  $F(A_2)$ .

En la figura 8, se muestra el Campo de Valores de la suma directa de dos matrices y algunas gráficas que pertenecen a la envolvente convexa de Campos de Valores de las dos matrices.

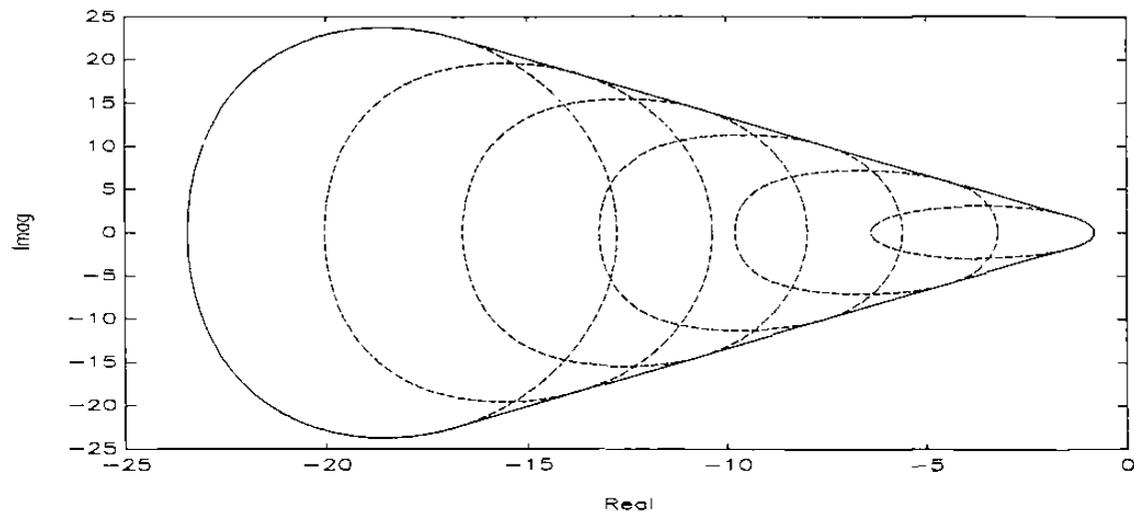


Figura 8. La gráfica presenta a  $F_\alpha = \alpha F(A_1) + (1-\alpha)F(A_2)$  en -- y a  $F(A_1 + A_2)$  en \_.

Se puede observar en esta gráfica que cualquier combinación convexa de campos, esto es,  $F_\alpha = [\alpha F(A_1) + (1-\alpha)F(A_2)]$ ,  $\alpha \in [0,1]$  está contenido en el campo de la suma directa. Esto concuerda con lo expresado en el teorema 3.3.1. En este ejemplo  $\alpha$  toma valores de 0 a 1, en intervalos de 0.2.

### 3.5 Resumen.

En este capítulo se han presentado condiciones de estabilidad, suficientes para el caso de  $k$  matrices estables arbitrarias, y necesarias y suficientes para el caso de  $k$  matrices normales, utilizando la técnica del Campo de Valores de una matriz. La incertidumbre se representó mediante una envolvente convexa de matrices. Se resaltaron algunas propiedades importantes de esta técnica, mostrando su aplicación a Estabilidad Robusta. A pesar de que mediante esta técnica se proporciona información acerca de la localización de los valores propios de cualquier matriz que pertenezca al  $\text{Co}(A_1, A_2, \dots, A_k)$ , el resultado puede ser arbitrariamente conservador ya que para estabilidad es equivalente a  $H(A_i) < 0 \quad \forall i$  [13] y el cálculo numérico es mayor.

# CAPITULO 4

## INESTABILIDAD DE MATRICES INTERVALO

### 4.1 Introducción.

A partir de este capítulo, la incertidumbre de un sistema lineal, se representará mediante una matriz intervalo. En el capítulo uno, se introdujo la definición de esta familia de matrices. Dicha definición se presenta de nuevo aquí, para poder abordar de una manera formal sus características y su aplicación en el análisis de Estabilidad Robusta. Sea

$$\mathcal{A} = [\mathbf{L}, \mathbf{U}] = \{ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} : l_{ij} \leq a_{ij} \leq u_{ij} \}$$

$\mathbf{L}, \mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son las matrices extremo que definen el intervalo; cualquier matriz cuyos valores de sus elementos estén comprendidos entre los valores de los elementos de  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{U}$ , es una matriz que pertenece a  $\mathcal{A}$ .

En este capítulo, primeramente se definen los vértices de una matriz intervalo y la forma en que se obtienen. Posteriormente, se aborda el problema de estabilidad de una matriz arbitraria en base a la distancia de ésta al conjunto de las matrices inestables  $\mathbf{Q}$  [27]. Finalmente, se extiende este último concepto al caso de una matriz intervalo  $[\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ ; es decir, se estima la distancia de una matriz centroide  $\mathbf{A}_o$ , que pertenece al conjunto de matrices  $\mathcal{A}$ , al conjunto  $\mathbf{Q}$ ; estableciéndose un teorema de inestabilidad. Las condiciones de inestabilidad dadas por este teorema, son sólo suficientes.

### 4.2 Vértices de una matriz intervalo.

Como el conjunto de matrices contenidas en una matriz intervalo  $[\mathbf{L}, \mathbf{U}]$  es infinito, se hace necesario estudiar sólo un subconjunto de estas, a fin de determinar si una familia de matriz intervalo  $[\mathbf{L}, \mathbf{U}]$  es estable o no. Los vértices de una matriz

intervalo, forman un conjunto finito de matrices al cual se llamará  $\mathcal{M}$  de tal manera que  $\mathcal{M} \subset \mathcal{A} = [\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ . Las matrices vértice se obtienen haciendo todas las combinaciones posibles entre los valores de los elementos de las matrices  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{U}$ . Como las combinaciones obedecen a una representación binaria, el número de matrices vértice es de  $2^{n^2}$ , donde  $n \times n$  es la dimensión de las matrices  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{U}$ . Un método para calcular numéricamente el conjunto  $\mathcal{M}$  se presenta en [12]. Cuando algún  $l_{ij} = u_{ij}, \forall i, j = 1, \dots, n$ , el conjunto de las matrices vértice contiene  $2^b$  matrices, donde  $b$  es igual a el número de  $l_{ij} \neq u_{ij}, \forall i, j = 1, \dots, n$ . Obviamente la cardinalidad del conjunto de las matrices vértices  $\mathcal{M}$  es menor que la cardinalidad del conjunto  $\mathcal{A}$ .

#### 4.3 Distancia de una matriz arbitraria estable al conjunto de las matrices inestables.

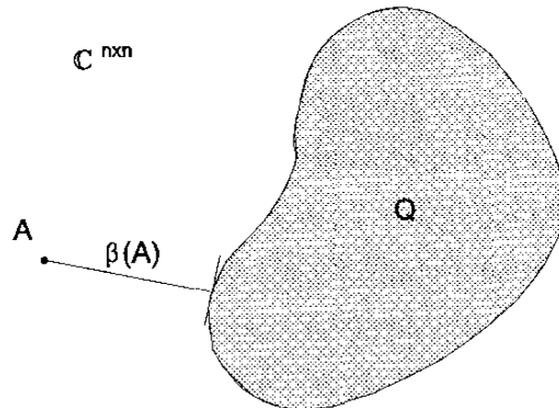
El concepto de la distancia de una matriz arbitraria estable al conjunto  $\mathbf{Q}$  se explicará por ahora gráficamente. En una matriz  $\mathbf{A}$  estable, no se puede tomar la cercanía de los valores propios al eje imaginario como una medida de la cercanía de la matriz a la inestabilidad, esto es, al conjunto  $\mathbf{Q}$  [27]. Lo anterior es debido a que con una perturbación menor que la abscisa espectral, en algún elemento de la matriz, ésta podría hacerse inestable. Es por esta razón que son los valores singulares de una matriz y no los valores propios, los que en un momento dado, pueden dar información de la cercanía de la matriz a la inestabilidad.

Como el espacio vectorial de las matrices  $n \times n$ ,  $\mathbb{C}^{n \times n}$ , contiene tanto a las matrices estables como a las inestables, entonces en la figura 9,  $\beta(\mathbf{A})$  representa a la distancia más cercana de la matriz  $\mathbf{A}$  al conjunto  $\mathbf{Q}$ ; en este caso, se considera a la matriz  $\mathbf{A}$  como un elemento puntual en  $\mathbb{C}^{n \times n}$  y al conjunto  $\mathbf{Q}$  como el subconjunto que agrupa las matrices inestables.

#### 4.4 Distancia de una matriz intervalo $[\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ al conjunto $\mathbf{Q}$ .

En esta sección, se extiende el concepto de la distancia de una matriz arbitraria al conjunto de las matrices inestables a un conjunto de matrices. La distancia de una matriz  $[\mathbf{L}, \mathbf{U}]$  a  $\mathbf{Q}$  es algo más complicado, que el de una matriz  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{Q}$ , por lo que se

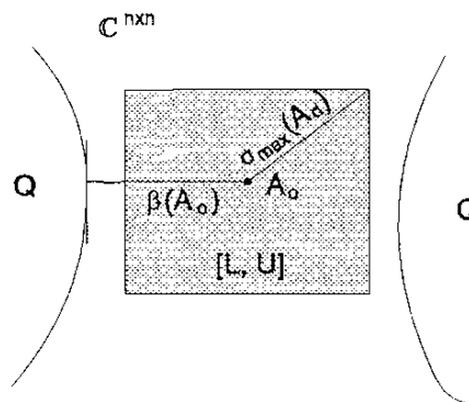
propone calcularla en base a una matriz que pertenece a  $[L, U]$ . Existen distancias de cada matriz  $A$  que pertenece a  $[L, U]$  al conjunto  $Q$  en determinada dirección, de tal



**Figura 9.** Distancia de una matriz  $A$  estable al conjunto  $Q$

manera que la matriz intervalo, puede alcanzar la inestabilidad por cualquier dirección.

En la figura 10 se representa esquemáticamente una matriz intervalo  $[L, U]$  y las matrices inestables.



**Figura 10.** Distancia de la matriz  $A_0$  al conjunto  $Q$

De la figura 10 se pueden destacar algunos puntos importantes. Se observa una matriz centroide  $A_0$ , que es el promedio de  $L$  y  $U$ , y está contenida en la matriz intervalo;

además, se hacen notar dos distancias, una es  $\beta(\mathbf{A}_o)$  y la otra es  $\sigma_{\max}(\mathbf{A}_d)$ , donde  $\mathbf{A}_d = \frac{1}{2}(\mathbf{U}-\mathbf{L})$ .  $\beta(\mathbf{A}_o)$  representa la distancia de  $\mathbf{A}_o$ , la matriz centroide, al conjunto  $\mathbf{Q}$  y  $\sigma_{\max}(\mathbf{A}_d)$  representa la distancia de la matriz centroide a la matriz vértice, que pertenece a  $[\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ , más alejada de  $\mathbf{A}_o$ . Por ahora, sólo se intenta expresar gráficamente y de una manera muy simple una matriz intervalo y el conjunto de las matrices inestables.

El valor exacto de la distancia de una matriz estable  $\mathbf{A}$  al conjunto de las matrices inestables, actualmente es un problema abierto, ver [27], [28] y [29]. El cálculo del parámetro  $\beta(\mathbf{A})$  implica minimizar el valor singular más pequeño de  $\mathbf{A} - \omega \mathbf{I}$ ; esto es, si  $\mathbf{A}$  es una matriz estable y  $\mathbf{E}$  es una matriz de perturbación desestabilizante, la norma 2 mínima de tal  $\mathbf{E}$  es el valor singular mínimo de  $\mathbf{A} - \omega \mathbf{I}$ .

$$\underline{\beta}(\mathbf{A}) \leq \beta(\mathbf{A}) = \min \{ \sigma_{\min}(\mathbf{A} - \omega \mathbf{I}) : \omega \in \mathbb{R} \} \leq \sigma_{\min}(\mathbf{A}) \quad (39)$$

Sin embargo, como se observa en la ecuación de arriba, el valor singular mínimo de  $\mathbf{A}$  siempre representa una cota superior al valor minimizado. Cotas superiores o inferiores  $\beta(\mathbf{A})$  pueden ser calculadas utilizando entre otras técnicas, la de resolver una ecuación de Liapunov [29], utilizar un algoritmo de bisección [28] para obtener el parámetro dentro de ciertos rangos, etc. En suma, el cálculo exacto de  $\beta(\mathbf{A})$  no se puede conocer; debido a esto, sólo se buscan ya sea cotas superiores ó inferiores de este valor. Qiu y Davison presentan algunas cotas superiores e inferiores de  $\beta(\mathbf{A})$  en [29]. En adelante se adoptará el uso de una cota inferior,  $\underline{\beta}(\mathbf{A})$ , ya que ésta favorece a los resultados que se establecen posteriormente.

#### 4.5 Condiciones suficientes de Inestabilidad de matrices intervalo.

Hasta ahora en la literatura [13], [25] y [26], entre otras, se pueden encontrar varios teoremas y pruebas para garantizar la estabilidad de una matriz intervalo  $[\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ , sin embargo todas estas pruebas representan condiciones suficientes. En esta sección se presenta una variante. En ella, se muestra un teorema de inestabilidad, el cual compara

la distancia de la matriz centroide i.e.  $A_o = \frac{1}{2}(L + U)$  al hiperplano de soporte perpendicular más cercano de  $\mathcal{A}$ , con la distancia de  $A_o$  al conjunto  $\mathbf{Q}$ . La distancia de  $A_o$  al conjunto  $\mathbf{Q}$  se representa por  $\beta(A_o)$  [28]; sin embargo, como ya se explicó, ésta no se conoce con exactitud y se calcula una cota inferior [29] expresada por  $\bar{\beta}(A_o)$ . Tomando como base esta cota inferior, si la distancia,  $\bar{\beta}(A_o)$ , de  $A_o$  al conjunto  $\mathbf{Q}$ , es menor que la distancia de  $A_o$  al hiperplano de soporte perpendicular más cercano de  $\mathcal{A}$ , entonces debe existir una matriz  $\mathbf{E}$  tal que  $A_o + \mathbf{E} \in [L, U]$  es inestable. Como dicha matriz pertenece a la matriz intervalo, entonces  $[L, U]$  es inestable. En la figura 10, esto significa que alguna matriz del conjunto  $\mathbf{Q}$  está dentro de  $[L, U]$ .

La distancia utilizada es la norma 2, i.e.  $\|\cdot\|_2$  ó el valor singular máximo i.e.  $\sigma_{max}(\cdot)$ . La cota inferior de  $\beta(A_o)$ ,  $\bar{\beta}(A_o)$ , está dada en función de los valores singulares de la matriz centroide y de la matriz compuesta derivada de ésta [29]. Una restricción importante en este resultado, es el hecho de que debe existir la misma incertidumbre en todos los elementos de la matriz.

Antes de mostrar los resultados principales, se presentan algunas definiciones y resultados que servirán de soporte a los resultados principales.

**Definición 4.5.1.** Sea la matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  estable, entonces la distancia más cercana de  $\mathbf{A}$ , denotada por  $\beta(\mathbf{A})$ , al conjunto  $\mathbf{Q}$  [27], [28] y [29] está definida por:

$$\beta(\mathbf{A}) = \min \{ \|\mathbf{E}\| \mid \mathbf{A} + \mathbf{E} \in \mathbf{Q} \} \quad (40)$$

un argumento simple de compacidad permite definir, en la ecuación de arriba, el mínimo en lugar del ínfimo. Aunque la definición anterior es para cualquier norma de matriz, se usará la norma 2.

Una cota inferior [29] de  $\beta(\mathbf{A})$  usando matrices compuestas [29, sección 8] puede ser establecida como

$$\beta(\mathbf{A}) \geq \min\{\sigma_{\min}(\mathbf{A}), \frac{1}{2}\sigma_{\min}(\overline{\mathbf{A} \oplus \mathbf{A}})\} \triangleq \overline{\beta}(\mathbf{A}). \quad (41)$$

**Propiedad 4.5.1.** [27] Si  $\mathbf{A}$  es estable y la matriz de norma 2 mínima  $\mathbf{E}$  es una perturbación desestabilizante, entonces  $\mathbf{A}+\mathbf{E}$  tiene un valor propio sobre el eje imaginario. Usando la abscisa espectral, la definición 4.5.1 puede ser expresada como sigue

$$\beta(\mathbf{A}) = \min \{ \|\mathbf{E}\| \mid \alpha(\mathbf{A}+\mathbf{E}) = 0, \mathbf{A}+\mathbf{E} \in \mathbf{Q} \} \quad (42)$$

si se hiciera el mismo análisis pero en la frecuencia, la cota inferior y el valor singular mínimo de  $\mathbf{A}$ , estarían comparados como lo muestra la siguiente propiedad;

**Propiedad 4.5.2.** [28] Si  $\mathbf{A}$  es estable y  $\mathbf{E}$  es una perturbación desestabilizante, la norma 2 mínima de tal  $\mathbf{E}$  es el valor singular mínimo de  $\mathbf{A} - \omega \mathbf{i} \mathbf{I}$ .

$$\overline{\beta}(\mathbf{A}) \leq \min \{ \sigma_{\min}(\mathbf{A} - \omega \mathbf{i} \mathbf{I}) : \omega \in \mathbb{R} \} \leq \sigma_{\min}(\mathbf{A}) \quad (43)$$

Se debe tener en cuenta que la incertidumbre debe estar presente en cada elemento de la matriz, lo que es equivalente a decir que  $[\mathbf{U} - \mathbf{L}]_{ij} \neq 0, \forall i, j = 1, \dots, n$ , entonces  $\mathbf{U} - \mathbf{L}$  puede ser expresado como  $(\mathbf{U} - \mathbf{L}) \circ \mathbf{ONES}$ . Además, si  $[\mathbf{U} - \mathbf{L}]_{ij} = h \forall i, j = 1, \dots, n$ , entonces  $\mathbf{U} - \mathbf{L}$  puede ser simplificado como  $\mathbf{U} - \mathbf{L} = h \cdot \mathbf{ONES}$ . Recordar que  $\mathbf{A}_o$  es la matriz centroide  $\mathbf{A}_o = \frac{1}{2}(\mathbf{U} + \mathbf{L})$ .

Los hiperplanos de soporte paralelos a los ejes coordenados (de parámetros) de una matriz  $\mathbf{B}$  cualquiera de  $n \times n$ , se obtienen manteniendo fijo sólo un elemento  $b_{ij} \forall i, j = 1, \dots, n$  a la vez y permitiendo variar todos los elementos restantes a un determinado valor. Como la matriz  $\mathbf{B}$ , en este caso tiene  $n^2$  elementos, entonces tendrá  $n^2$  hiperplanos de soporte paralelos.

En seguida, se da la definición formal de hiperplano de soporte para una matriz intervalo  $[\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ , esto, con la finalidad de hacer más claro el resultado expresado en el lema 4.5.1.

**Definición 4.5.2.** Los hiperplanos de soporte perpendiculares de una matriz intervalo  $[\mathbf{L}, \mathbf{U}]$  se establecen como:

$$\text{HS}([\mathbf{L}, \mathbf{U}])_k = \left\{ \begin{array}{l} \text{HS}([\mathbf{L}, \mathbf{U}])_{ij} = l_{ij} \text{ o } u_{ij} \\ \text{HS}([\mathbf{L}, \mathbf{U}])_{mr} = s_{mr} \text{ donde } l_{mr} \leq s_{mr} \leq u_{mr} \\ \forall m \neq i \text{ y } \forall r \neq j \end{array} \right\} \quad \forall i, j, m, r = 1, \dots, n$$

$\forall k = 1, \dots, 2n^2$  donde  $\text{HS}([\mathbf{L}, \mathbf{U}])_k$  representa al  $k$ -ésimo hiperplano de soporte perpendicular de  $[\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ .

En palabras,  $[\mathbf{L}, \mathbf{U}]$  mantiene un elemento fijo,  $[\mathbf{L}, \mathbf{U}]_{ij} = l_{ij}$  o  $u_{ij}$ , permitiendo que todos los elementos restantes obtengan valores entre  $l_{mr}$  y  $u_{mr}$ , esto es  $l_{mr} \leq [\mathbf{L}, \mathbf{U}]_{mr} \leq u_{mr}$  para todo  $m \neq i$  y  $r \neq j$ . Repitiendo este proceso para todos los elementos de  $[\mathbf{L}, \mathbf{U}]$  uno a la vez, se generan todos los hiperplanos de soporte perpendiculares. Así en este caso  $[\mathbf{L}, \mathbf{U}]$  tiene  $2n^2$  hiperplanos de soporte perpendiculares.

**Lema 4.5.1.** Sea la perturbación igual en todos los elementos i.e.  $h$  y sea  $\mathbf{A}_0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$  la matriz centroide, entonces la distancia (inducida por cualquier norma) de  $\mathbf{A}_0$  a cualquiera de sus hiperplanos perpendiculares de soporte es  $\frac{1}{2}h$ .

*Prueba:* Como  $\mathbf{H} = \mathbf{U} - \mathbf{L} = \begin{bmatrix} h & \dots & h \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h & \dots & h \end{bmatrix}$  entonces  $\mathbf{A}_0 = [\mathbf{L} + \frac{1}{2}\mathbf{H}]$ .

Sea  $A_k$  una matriz contenida en el  $k$ -ésimo hiperplano de soporte perpendicular de  $A_0$ , y sea  $A_k^*$  la matriz en el  $k$ -ésimo hiperplano de soporte con la mínima distancia a  $A_0$ , entonces  $A_k^*$  pertenece al conjunto de matrices representado por  $A_{F_k} = [l_{ij} + \frac{1}{2}h_{ij}] \pm [f_{ij}]$  para toda  $k = 1, \dots, 2n^2$  donde  $F$  es una matriz de ceros excepto un elemento igual a  $\frac{1}{2}h$  a la vez, además representa la cota mínima y máxima en ambos sentidos. La distancia de  $A_0$  a cualquier  $A_k^*$  esta expresada por  $d(A_0, A_k^*) = \|A_0 - A_k^*\|_2 = \|F\|_2$ , como la matriz  $F$  tiene sólo un elemento diferente de cero, i.e.  $\frac{1}{2}h$ , entonces  $\|F\|_2 = \frac{1}{2}h$  en todos los casos. ■

En seguida se presentan condiciones suficientes para garantizar inestabilidad de una matriz intervalo  $[L, U]$  cuya restricción fuerte es que exista la misma incertidumbre en cada elemento de  $[L, U]$ . El mismo resultado se extiende para el caso general de una matriz intervalo, donde la perturbación existe en todos los elementos, pero la magnitud no tiene que ser la misma en cada uno. Debido a esto, el resultado propuesto, es más conservador para este caso.

**Teorema 4.5.1.** Sea  $U - L = h \cdot \text{ONES}$  para algún  $h > 0$ , si la cota inferior  $\bar{\beta}(A_0) \leq \frac{1}{2}h$  entonces la familia de matrices intervalo  $\mathcal{A} = [L, U]$  es inestable.

*Prueba:* De la propiedad 4.5.1, resulta que si  $\bar{\beta}(A_0) \leq \frac{1}{2}h \rightarrow \exists E \in \mathbb{R}^{n \times n} : \alpha(A_0 + E) \geq 0$  donde  $A_0 + E \in [L, U]$ . ■

**Observación 4.5.1.** Debido a que la condición de inestabilidad es suficiente, si  $\bar{\beta}(A_0) > \frac{1}{2}h$  nada se puede decir acerca de la estabilidad de la familia de matriz intervalo  $\mathcal{A} = [L, U]$ .

**Corolario 4.5.1.** Si la condición  $U - L = h \cdot \text{ONES}$  no se cumple, pero existe incertidumbre en todos los elementos de  $[L, U]$ , se busca la mínima diferencia entre los elementos de  $L$  y  $U$ , esto es,

$$d = \min \{ (u_{ij} - l_{ij}), i, j=1, \dots, n \} > 0 \quad (44)$$

después se calculan las nuevas matrices  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{U}$  y la nueva  $\mathbf{H}$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}' &= \mathbf{A}_o - \frac{1}{2} d \cdot \mathbf{ONES} \\ \mathbf{U}' &= \mathbf{A}_o + \frac{1}{2} d \cdot \mathbf{ONES} \end{aligned} \quad (45)$$

y si  $\bar{\beta}(\mathbf{A}_o) \leq \frac{1}{2}d$ ,  $[\mathbf{L}, \mathbf{U}]$  es inestable.

*Prueba:* Como  $[\mathbf{L}', \mathbf{U}'] \subsetneq [\mathbf{L}, \mathbf{U}]$  entonces  $[\mathbf{L}, \mathbf{U}]$  también es inestable. ■

#### 4.6 Ejemplos numéricos.

A continuación se presenta un par de ejemplos simples para ilustrar el resultado de inestabilidad.

**Ejemplo 4.6.1.** Este ejemplo es una versión modificada del que aparece en [30].

Sean

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -1.7 & -12.26 & -0.26 \\ -0.45 & -0.20 & 0.80 \\ 0.05 & -4.20 & -1.20 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} -1.50 & -12.06 & -0.06 \\ -0.25 & 0 & 1 \\ 0.25 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} -1.60 & -12.16 & -0.16 \\ -0.35 & -0.10 & 0.90 \\ 0.15 & -4.10 & -1.10 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{2}h = 0.1$$

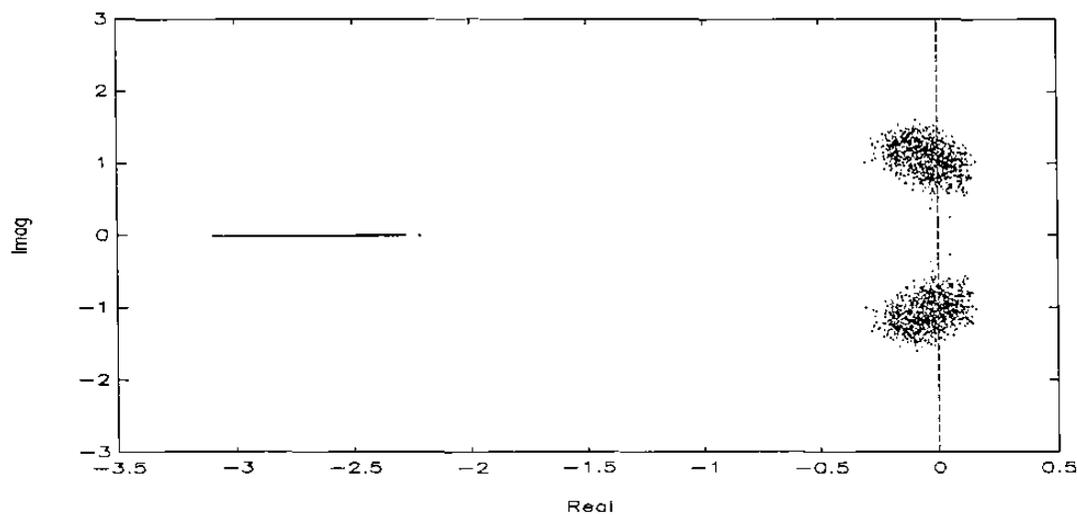
Calculando la cota inferior  $\bar{\beta}(\mathbf{A}_o)$  dada por (41), se obtiene  $\bar{\beta}(\mathbf{A}_o) = 0.0175$ ;

de aquí que

$$\bar{\beta}(A_0) < \frac{1}{2}h = 0.1$$

por consiguiente la familia de matrices intervalo  $\mathcal{A} = [\mathbf{L}, \mathbf{U}]$  es inestable.

En la figura 11 estan mostrados los valores propios de matrices pertenecientes a la familia de matriz intervalo  $\mathcal{A} = [\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ . Se puede observar que hay algunos valores propios en el semiplano derecho del plano complejo, lo que implica inestabilidad.



**Figura 11.** Valores propios de matrices  $\mathbf{A} \in [\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ .

**Ejemplo 4.6.2.** En este ejemplo la primera condición del teorema 4.5.1 no se cumple. Por lo que se tiene que buscar la mínima diferencia entre los elementos de  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{U}$ .

Sean

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -4.9 & -5 & -5 \\ -1 & -5.9 & -7 \\ 6 & -1 & -2.9 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} -4.7 & -4.9 & -4.8 \\ -0.8 & -5.6 & -6.7 \\ 6.4 & -0.8 & -2.7 \end{bmatrix}$$

$$A_o = \begin{bmatrix} -4.80 & -4.95 & -4.90 \\ -0.90 & -5.75 & -6.85 \\ 6.20 & -0.90 & -2.80 \end{bmatrix}$$

para este caso  $d = 0.1$

entonces, calculando  $L'$  y  $U'$

$$L' = \begin{bmatrix} -4.85 & -5 & -4.95 \\ -0.95 & -5.80 & -6.90 \\ 6.15 & -0.95 & -2.85 \end{bmatrix} \quad U' = \begin{bmatrix} -4.75 & -4.90 & -4.85 \\ -0.85 & -5.70 & -6.80 \\ 6.25 & -0.85 & -2.75 \end{bmatrix}$$

también

$$\bar{\beta}(A_o) = 0.0405 \text{ y } \frac{1}{2}d = 0.05$$

claramente  $\bar{\beta}(A_o) < 0.05$  por lo tanto se concluye que la familia de la matriz intervalo  $[L, U]$  es inestable. En la figura 12 se muestran los valores propios de 1000 matrices arbitrarias en  $[L, U]$ . También en este ejemplo, se pueden apreciar algunos valores propios reales en el semiplano derecho del plano complejo.

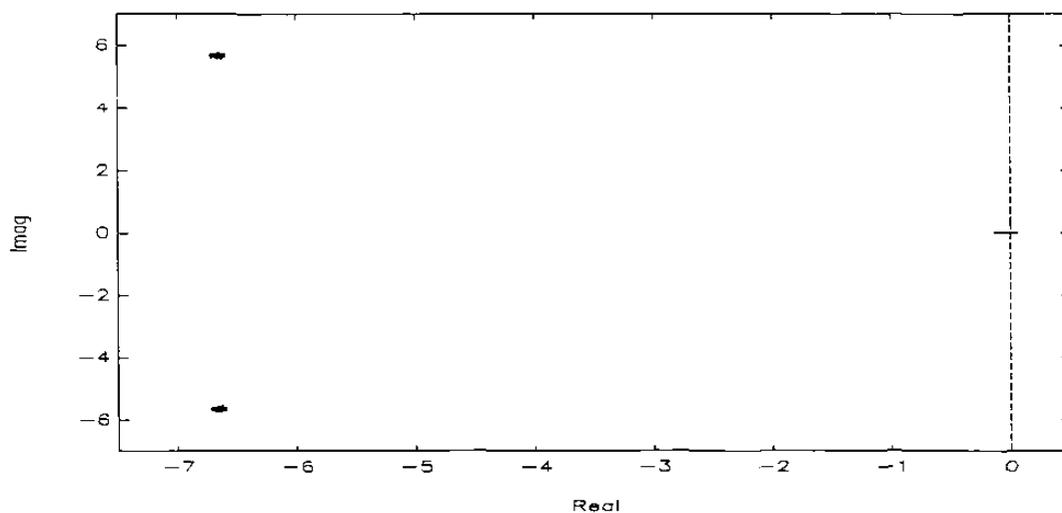


Figura 12. Valores propios de matrices arbitrarias  $A \in [L, U]$ .

El teorema de inestabilidad presentado en este capítulo, permite garantizar condiciones de inestabilidad en una matriz intervalo. Obteniendo los valores propios de las matrices hermíticas de Mansour [13] y [33], para el ejemplo 4.6.1, existe un valor propio en  $\lambda = 5.9$  y para el ejemplo 4.6.2, existe un valor propio en  $\lambda = 1.1459$ . Sin embargo, aún cuando existen valores propios positivos, la condición de Mansour no puede asegurar inestabilidad de la matriz intervalo.

#### 4.7 Resumen.

En este capítulo, se presentó un resultado en cuanto a la inestabilidad de un sistema lineal invariante en el tiempo cuya incertidumbre está representada por una familia de matriz intervalo  $\mathcal{A} = [\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ . El resultado, aunque representa condiciones suficientes de inestabilidad, es una prueba simple y rápida en comparación a las ya reportadas en la literatura hasta ahora. Conociendo la perturbación y la distancia de la matriz centroide al conjunto de las matrices inestables, mediante este resultado, se puede determinar la inestabilidad de un sistema dado.

# CAPITULO 5

## ESTABILIDAD DE MATRICES INTERVALO

### 5.1 Introducción.

En este capítulo, se establecen condiciones suficientes para asegurar la estabilidad de una matriz intervalo  $[\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ . En éste, al igual que en el capítulo anterior, se utiliza el concepto de la distancia de una matriz estable al conjunto de las matrices inestables  $\mathbf{Q}$ . A diferencia del teorema de inestabilidad, enunciado en el capítulo anterior, este resultado es para el caso general de una matriz intervalo  $[\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ .

En la sección 5.2, se presenta un teorema interesante el cual está relacionado con la distancia, inducida por la norma 2, que existe entre la matriz centroide  $\mathbf{A}_0$  y uno de los  $2^n$  vértices más alejado de  $\mathbf{A}_0$ . En palabras, significa que utilizando como medida de distancia, inducida por la norma 2, se puede determinar mediante un cálculo sencillo la distancia de  $\mathbf{A}_0$  a la matriz vértice más alejada de ésta, del conjunto de las  $2^n$  matrices vértice de la matriz intervalo  $[\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ . La condición suficiente de estabilidad de  $[\mathbf{L}, \mathbf{U}]$  se basa principalmente en este resultado y es formulada en el teorema 5.3.1 de la sección 5.3.

### 5.2 Obtención de la distancia entre $\mathbf{A}_0$ y uno de los vértices de $[\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ .

El teorema que formula la distancia entre  $\mathbf{A}_0$  y el vértice más alejado de ésta se basa en los siguientes resultados previos.

**Hecho 5.2.1** [23], [32]. Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  y  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Si  $|\mathbf{A}| \preceq \mathbf{B}$ , i.e.  $|a_{ij}| \leq b_{ij}, \forall i, j = 1, \dots, n$  entonces  $\rho(\mathbf{A}) \leq \rho(\mathbf{B})$ .

**Lema 5.2.1.** Sea  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y sea  $|\mathbf{A}|$  una matriz con elementos  $|a_{ij}|, \forall i, j = 1, \dots, n$ , entonces  $|\mathbf{AB}| \preceq |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$ .

*Prueba:* Los elementos de  $|\mathbf{AB}|$  pueden ser expresados como:

$$\begin{aligned} |\mathbf{AB}|_{ij} &= \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_{ik} b_{kj}| = \sum_{k=1}^n |a_{ik}| |b_{kj}| \\ &\leq (|\mathbf{A}| |\mathbf{B}|)_{ij} \end{aligned}$$

por lo que el lema resulta ■

El siguiente lema va a ser muy útil para probar que la distancia más grande de  $\mathbf{A}_0$  a cualquier vértice es precisamente a  $\mathbf{L}$  ó a  $\mathbf{U}$ .

**Lema 5.2.2.** Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  y  $|\mathbf{A}| \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , donde los elementos de  $|\mathbf{A}|$  son  $|a_{ij}| \quad \forall i, j = 1, \dots, n$ , entonces

$$\sigma_{\max}(\mathbf{A}) \leq \sigma_{\max}(|\mathbf{A}|)$$

*Prueba:* El valor singular máximo de  $\mathbf{A}$  puede ser establecido como:

$$\sigma_{\max}^2(\mathbf{A}) = \lambda_{\max}(\mathbf{A}^* \mathbf{A}) = \rho(\mathbf{A}^* \mathbf{A})$$

y

$$\sigma_{\max}^2(|\mathbf{A}|) = \lambda_{\max}(|\mathbf{A}|^* |\mathbf{A}|) = \rho(|\mathbf{A}|^* |\mathbf{A}|)$$

usando el hecho 5.2.1 junto con el lema 5.2.1, resulta que

$$\rho(\mathbf{A}^* \mathbf{A}) \leq \rho(|\mathbf{A}|^* |\mathbf{A}|)$$

↓

$$\sigma_{\max}(\mathbf{A}) \leq \sigma_{\max}(|\mathbf{A}|) \quad \blacksquare$$

A continuación se formula el primer teorema de este capítulo. En él se expresa que la matriz vértice más alejada de la matriz centroide  $\mathbf{A}_0$  es la matriz  $\mathbf{L}$  o la matriz  $\mathbf{U}$ .

De hecho las matrices  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{U}$  forman parte de las  $2^{n^2}$  matrices vértice del conjunto  $\mathcal{M}$ . Esta distancia, entre la matriz centroide  $\mathbf{A}_o$  y el vértice más alejado de ella, es muy importante, ya que de este valor se derivan condiciones suficientes de estabilidad de todo el conjunto de matrices contenido en  $\mathcal{A} = [\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ .

**Teorema 5.2.1.** [41] Sea la matriz intervalo  $[\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ , donde  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{A}_o = (\mathbf{U} + \mathbf{L})/2$  es la matriz centroide y  $\mathbf{A}_k$  es cualquier matriz vértice de  $[\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ , entonces

$$\|\mathbf{A}_o - \mathbf{A}_k\|_2 \leq \|\mathbf{A}_o - \mathbf{L}\|_2 = \|\mathbf{A}_o - \mathbf{U}\|_2 \quad \forall k = 1, \dots, 2^{n^2}$$

*Prueba:* Las matrices  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{U}$  pertenecen al conjunto de los  $2^{n^2}$  matrices vértices de  $[\mathbf{L}, \mathbf{U}]$  entonces la distancia de  $\mathbf{A}_o$  a  $\mathbf{L}$  ó a  $\mathbf{U}$ , la cual es la misma, puede ser expresada como:

$$\|\frac{1}{2}(\mathbf{U} + \mathbf{L}) - \mathbf{L}\|_2 = \|\frac{1}{2}(\mathbf{U} - \mathbf{L})\|_2 \quad \text{y}$$

$$\|\frac{1}{2}(\mathbf{U} + \mathbf{L}) - \mathbf{U}\|_2 = \|\frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{U})\|_2$$

como  $\mathbf{U} \geq \mathbf{L}$  y recordando que  $\|-\mathbf{X}\| = \|\mathbf{X}\|$  [23], ambas distancias son la misma. Cualquier otra matriz vértice  $\mathbf{A}_k$ ,  $k=1, \dots, 2^{n^2}$  generada, es tal que  $|\mathbf{A}_o - \mathbf{A}_k| \leq \frac{1}{2}(\mathbf{U} - \mathbf{L})$  componente a componente y usando el resultado del lema 5.2.2 el teorema resulta. ■

**Observación 5.2.1.** En otras normas como  $\|\cdot\|_1$  ó  $\|\cdot\|_\infty$ , la distancia de  $\mathbf{A}_o$  a cualquier  $\mathbf{A}_k$  es la misma.

De aquí en adelante, cuando se hable de la matriz vértice más alejada, se hará referencia a la matriz vértice que pertenece a  $\mathcal{M}$  más distante de la matriz centroide  $\mathbf{A}_o$ . i.e.  $\|\mathbf{A}_o - \mathbf{U}\|_2$ . También se expresa que  $\mathbf{A}_d = \frac{1}{2}(\mathbf{U} - \mathbf{L})$ .

### 5.3 Condición suficiente de estabilidad para una matriz intervalo.

A continuación se presenta una condición suficiente de estabilidad para el caso general de una matriz intervalo  $[\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ . La distancia entre la matriz centroide y la matriz

vértice más alejada, sólo garantiza que si esta distancia es menor que la distancia de  $A_0$  a la matriz inestable más cercana que pertenece a  $\mathbf{Q}$ , la matriz intervalo  $[L, U]$  es estable. La razón por la cual la condición de estabilidad es suficiente, es debido a que la matriz vértice más alejada y la matriz inestable que pertenece a  $\mathbf{Q}$  más cercana a  $A_0$  pueden no estar en la misma dirección. Por lo mismo, mediante este resultado, tampoco se puede afirmar que  $[L, U]$  es inestable si la distancia de  $A_0$  a  $\mathbf{Q}$  es menor que la distancia de  $A_0$  al vértice más alejado. A continuación se formula el teorema.

**Teorema 5.3.1.** [41] Sea la matriz intervalo  $[L, U]$ , donde  $L$  y  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A_0 = (U+L)/2$  la matriz centroide,  $d(A_0, L) = \|1/2(U-L)\|_2$  la distancia de  $A_0$  al vértice más alejado de  $[L, U]$  y sea  $\bar{\beta}(A_0)$  una cota inferior de la distancia de  $A_0$  al conjunto  $\mathbf{Q}$ ; entonces, si  $\sigma_{\max}(A_d) < \bar{\beta}(A_0)$  la familia de la matriz intervalo  $\mathcal{A} = [L, U]$  es estable.

*Prueba:* Suponer que  $\sigma_{\max}(A_d) < \bar{\beta}(A_0)$ , entonces de acuerdo a la definición 4.5.1, significa que si  $\sigma_{\max}(A_d) < \bar{\beta}(A_0) \leq \beta(A_0) \Rightarrow \exists E \in \mathbb{R}^{n \times n} : A_0 + E \in \mathbf{Q} \quad \forall E \in [L, U]$  ■

**Observación 5.3.1.** La simplicidad de la aplicación de la condición dada por el teorema 5.3.1 para saber si una matriz intervalo  $[L, U]$  es estable, es clara ya que solamente se necesitan dos cosas,  $\sigma_{\max}(A_d)$  y  $\bar{\beta}(A_0)$ .

Refiriéndose nuevamente a la figura 10, significa que a una distancia de  $\sigma_{\max}(A_d)$  de la matriz centroide  $A_0$ , ninguna matriz  $A \in \mathcal{A} = [L, U]$  puede estar dentro del conjunto de matrices inestables  $\mathbf{Q}$ .

#### 5.4 Ejemplos numéricos.

En seguida, se presenta un par de ejemplos numéricos para ilustrar la aplicación de la condición de estabilidad.

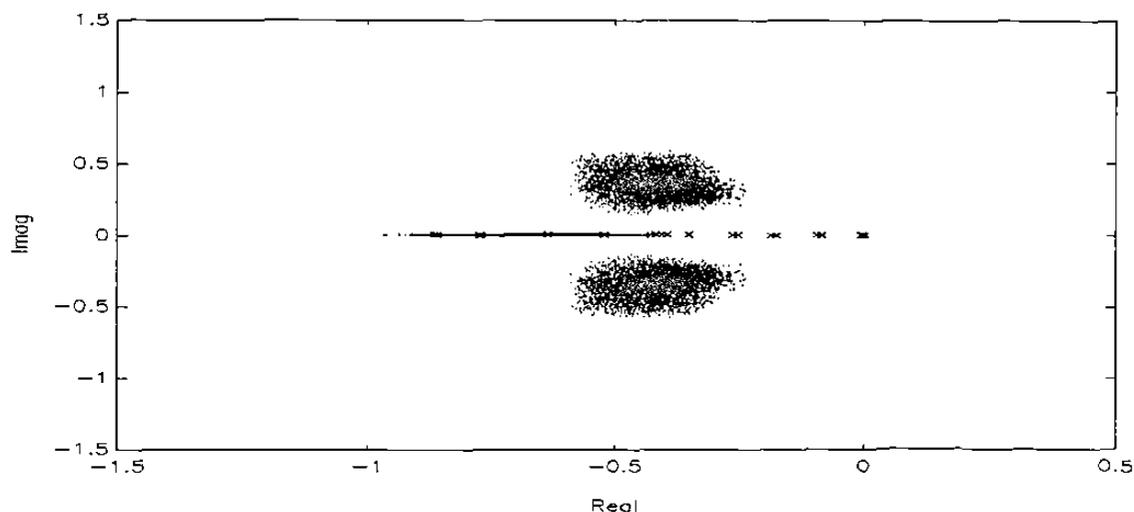
**Ejemplo 5.4.1.** Sea la matriz intervalo  $[L, U]$  dada por

$$L = \begin{bmatrix} -0.7288 & -0.4313 & -0.2675 \\ 0.2265 & -0.5500 & -0.0602 \\ 0.0397 & 0.1190 & -0.6594 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{bmatrix} -0.2948 & -0.0137 & -0.2592 \\ 0.7336 & -0.4721 & 0.1605 \\ 0.0589 & 0.2652 & -0.3560 \end{bmatrix}$$

$A_o$  y  $A_d$  son

$$A_o = \begin{bmatrix} -0.5118 & -0.2225 & -0.2633 \\ 0.4800 & -0.5111 & 0.0502 \\ 0.0493 & 0.1921 & -0.5077 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A_d = \begin{bmatrix} 0.2170 & 0.2088 & 0.0041 \\ 0.2535 & 0.0390 & 0.1103 \\ 0.0096 & 0.0731 & 0.1517 \end{bmatrix}$$

calculando la cota inferior  $\underline{\beta}(A_o)$ , dada por (41), y  $\sigma_{max}(A_d) = \|\frac{1}{2}(U-L)\|_2$ , se tiene que  $\underline{\beta}(A_o) = 0.4007$  y  $\sigma_{max}(A_d) = 0.3931$ . Usando el resultado del teorema 5.3.1, como  $\sigma_{max}(A_d) < \underline{\beta}(A_o)$  entonces la matriz intervalo  $[L, U]$  es estable. En la figura 13, se muestran los valores propios de 5000 matrices aleatorias en ".", las cuales pertenecen a la matriz intervalo  $[L, U]$ . Los valores propios de las matrices hermiticas de Mansour [33] están graficados con el caracter "x". El valor propio más grande está en  $\lambda = 0.002$ .



**Figura 13.** Valores propios de matrices aleatorias  $A \in [L, U]$  en (·) y los valores propios de las matrices generadas en [13], en (x).

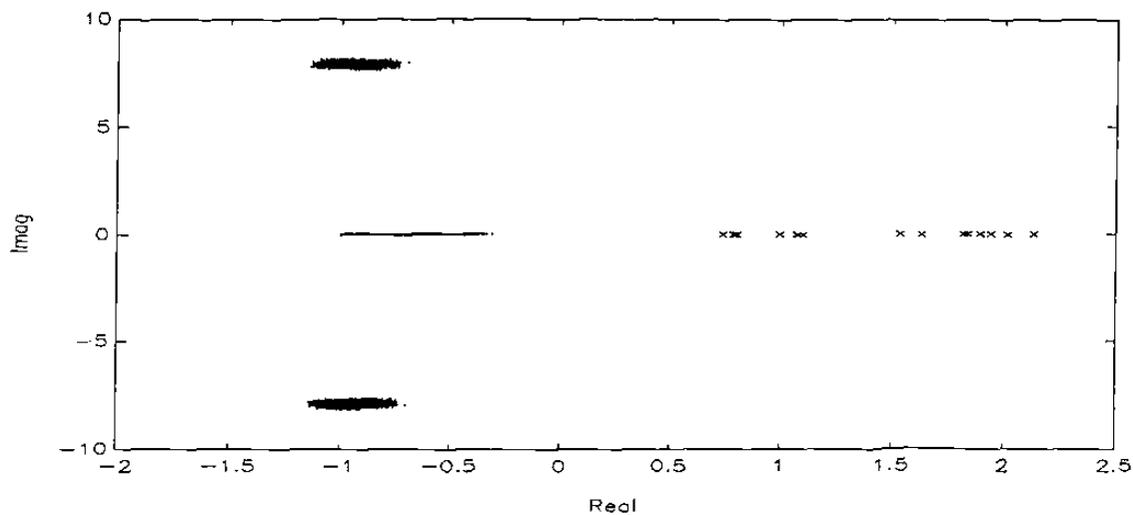
**Ejemplo 5.4.2.** Sea la matriz intervalo  $[L, U]$  definida por

$$L = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -7 & -1 & -5 \\ 4 & 9 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{bmatrix} -0.7 & 2.3 & -0.7 \\ -6.7 & -0.7 & -4.6 \\ 4.3 & 9.5 & -0.7 \end{bmatrix}$$

$A_o$  y  $A_d$  son

$$A_o = \begin{bmatrix} -0.85 & 2.15 & -0.85 \\ -6.85 & -0.85 & -4.80 \\ 4.15 & 9.25 & -0.85 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A_d = \begin{bmatrix} 0.15 & 0.15 & 0.15 \\ 0.15 & 0.15 & 0.20 \\ 0.15 & 0.25 & 0.15 \end{bmatrix}$$

en este caso;  $\bar{\beta}(A_o) = 0.5146$  y  $\sigma_{max}(A_d) = 0.5037$ . Claramente  $\sigma_{max}(A_d) < \bar{\beta}(A_o)$  así que  $[L, U]$  es estable. En la figura 14 se muestran los valores propios de 5000 matrices aleatorias  $A \in [L, U]$  en ".". Los valores propios de las matrices hermíticas de Mansour, están graficados en "x" y el valor propio más grande está en  $\lambda = 2.13$ .



**Figura 14.** Valores propios de matrices aleatorias  $A \in [L, U]$  en (·) y los valores propios de las matrices generadas en [13], en (x).

En ambos ejemplos 5.4.1 y 5.4.2 la condición de Mansour [13] y [33] no se cumple, esto es alguna de las  $2^{n(n-1)/2}$  matrices hermiticas tiene un valor propio positivo. Por lo que se concluye que mediante la condición de Mansour nada se puede decir acerca de la estabilidad de  $[L, U]$ . Por el contrario, en estos casos, utilizando la condición dada en el teorema 5.3.1, la matriz intervalo  $[L, U]$  resulta estable. En general ninguno de los dos resultados, la condición de Mansour y el dado por el teorema 5.3.1, contiene al otro.

### 5.5 Resumen.

En este capítulo, se presentaron dos teoremas; el primero esta relacionado con el cálculo de la distancia de la matriz centroide  $A_0$  al vértice más alejado de ésta y que pertenece a  $[L, U]$ . Dicho resultado es enunciado en el teorema 5.2.1. Hay que hacer notar que el sentido de la distancia utilizado entre dos matrices, es el inducido por la norma 2 ó el valor singular máximo; ya que en otras normas como en la 1 ó infinito, la distancia entre la matriz centroide y cualquiera de los vértices siempre es la misma. El segundo teorema da las condiciones suficientes para garantizar la estabilidad de la matriz intervalo  $[L, U]$ . La condición presentada aquí, es una de las pruebas más simples en la literatura, sin embargo el resultado puede ser en algunos casos más ó menos conservador comparado con otras condiciones de estabilidad. Lo que si está claro es que los cálculos que involucra la condición de estabilidad presentada no se ven afectados por la dimensión de las matrices.

# CAPITULO 6

## TEOREMA SIMPLE DE ESTABILIDAD DE MATRICES INTERVALO: OTRA CONDICION SUFICIENTE

### 6.1 Introducción.

En este capítulo se describe una condición suficiente que garantiza la estabilidad, mediante un cálculo simple, de un sistema lineal invariante en el tiempo representado en variables de estado y con incertidumbre paramétrica en la matriz  $A$ . La incertidumbre se representa mediante una familia de matriz intervalo  $[L, U]$ . La condición, comparada con las existentes en la literatura, es la más simple. Esta se basa en un análisis de los valores propios de las partes hermíticas de las matrices que definen el intervalo. Una cota superior  $\xi$ , se deriva de los valores propios máximos. El resultado es para el caso general de una matriz intervalo.

El resultado que se presenta es sólo suficiente, pero su aplicación comparado con otros, ver [38], [25] etc., es muy simple. En [13], por ejemplo, el resultado consiste en revisar las partes hermíticas de  $2^{n(n-1)/2}$  matrices vértice para determinar la estabilidad de la matriz intervalo. Un resultado que mejora al presentado en [13] es el reportado en [40], en éste el número de matrices vértice a verificar es de  $2^{n-1}$ . En otro resultado reciente [39], la condición se reduce a revisar  $2^{2n-1}$  matrices vértice, y para una clase muy restringida de matriz intervalo sólo hay que revisar dos matrices. Para el caso de la matriz intervalo simétrica [36], primero se tiene que probar que todas las matrices que pertenecen al intervalo son no singulares y segundo que la matriz intervalo contenga al menos una matriz simétrica estable.

El capítulo está organizado de la siguiente manera: en la sección 6.2, se presentan algunos resultados preliminares; el resultado principal se aborda en la sección 6.3 y en la sección 6.4 se ilustra la condición de estabilidad mediante un par de ejemplos.

## 6.2 Preliminares.

La idea es presentar algunos resultados básicos para apoyar los resultados principales de la siguiente sección. La representación del sistema lineal invariante es como la expresada en la ecuación (3).

**Hecho 6.2.1.** Sea la matriz intervalo  $[\mathbf{L}, \mathbf{U}]$  y  $\mathbf{P} = (\mathbf{U}-\mathbf{L})$ , entonces  $H(\mathbf{U}) = H(\mathbf{L}) + H(\mathbf{P})$ .

**Hecho 6.2.2** [17]. (Teorema de Perron) Si  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  y  $\mathbf{A} > 0$ , entonces  $\rho(\mathbf{A})$  es un valor propio de  $\mathbf{A}$ , además  $\rho(\mathbf{A}) = \lambda_{\max}(\mathbf{A})$ .

## 6.3 Condición de estabilidad de una matriz intervalo.

En esta sección se determina la cota superior que da la condición suficiente de estabilidad para  $[\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ . Antes se muestra una forma de obtener todas las matrices vértice, en función de la matriz  $\mathbf{P}$ . De hecho la base de este teorema, es precisamente el valor propio máximo que pueda tener la parte hermítica de la matriz  $\mathbf{P}$ .

**Hecho 6.3.1** [12]. Sea la matriz intervalo  $[\mathbf{L}, \mathbf{U}]$  donde  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\mathbf{P} = (\mathbf{U}-\mathbf{L})$  donde  $p_{ij}$  es el  $ij$ -ésimo elemento de  $\mathbf{P}$ , el conjunto de matrices vértice se puede expresar como:

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{L} + \mathbf{P}_k \quad \forall k = 1, 2, \dots, 2^n$$

donde  $\mathbf{P}_k(i,j) = 0$  ó  $p_{ij}$  y  $\mathbf{M}_k$  es la  $k$ -ésima matriz vértice.

**Teorema 6.3.1** [42]. Sea la matriz intervalo  $[\mathbf{L}, \mathbf{U}]$  donde  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\mathbf{P} = (\mathbf{U}-\mathbf{L})$ , la matriz intervalo  $[\mathbf{L}, \mathbf{U}]$  es estable si  $\xi = \lambda_{\max}(H(\mathbf{L})) + \lambda_{\max}(H(\mathbf{P})) < 0$ .

*Prueba:* Usando el hecho 6.2.1 y 6.3.1, la parte hermítica de las  $2^n$  matrices vértice es como sigue:

$$H(\mathbf{M}_k) = H(\mathbf{L}) + H(\mathbf{P}_k) \quad \forall k = 1, 2, \dots, 2^n$$

obteniendo el valor propio máximo de cada lado, se tiene

$$\lambda_{max}(H(\mathbf{M}_k)) = \lambda_{max}(H(\mathbf{L}) + H(\mathbf{P}_k))$$

y usando el teorema de Weyl [17] esto resulta en

$$\lambda_{max}(H(\mathbf{M}_k)) \leq \lambda_{max}(H(\mathbf{L})) + \lambda_{max}(H(\mathbf{P}_k))$$

como en la expresión de arriba  $H(\mathbf{P}_k) \geq 0$ , entonces por el hecho 6.2.2,  $\rho(H(\mathbf{P}_k)) = \lambda_{max}(H(\mathbf{P}_k))$  de tal forma que

$$\lambda_{max}(H(\mathbf{M}_k)) \leq \lambda_{max}(H(\mathbf{L})) + \rho(H(\mathbf{P}_k))$$

y como  $H(\mathbf{P}_k) \preceq H(\mathbf{P})$  usando el hecho 5.2.1,  $\rho(H(\mathbf{P}_k)) \leq \rho(H(\mathbf{P}))$  entonces

$$\lambda_{max}(H(\mathbf{M}_k)) \leq \lambda_{max}(H(\mathbf{L})) + \rho(H(\mathbf{P}))$$

usando  $\lambda_{max}$  en lugar de  $\rho$ , se tiene finalmente

$$\lambda_{max}(H(\mathbf{M}_k)) \leq \lambda_{max}(H(\mathbf{L})) + \lambda_{max}(H(\mathbf{P})) = \xi \quad \forall k = 1, 2, \dots, 2^{n^2}$$

■

Aquí el valor de  $\xi$  debe ser estrictamente negativo para asegurar estabilidad.

**Observación 6.3.1.** La condición propuesta sólo verifica los valores propios de las partes hermíticas de dos matrices, las cuales son  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{P}$ . Esto quiere decir que, el procedimiento de revisar las  $2^{n^2}$  matrices vértice se reduce drásticamente. Sin embargo el costo de tal reducción en la prueba es que ésta es más conservadora que la de probar los valores propios de todas las matrices vértices.

#### 6.4 Ejemplos numéricos.

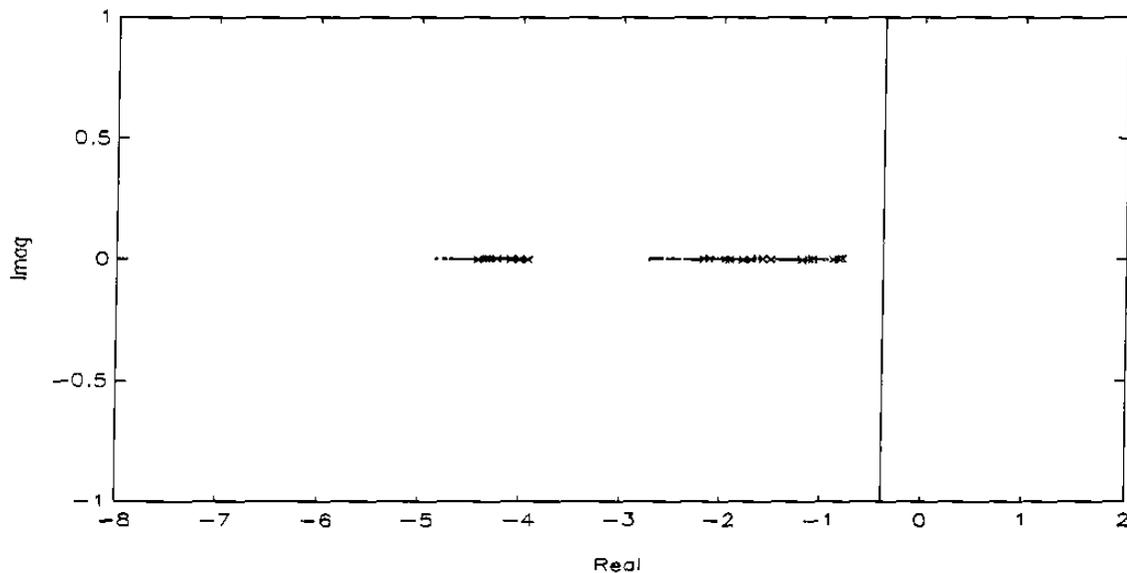
En seguida se presentan dos ejemplos numéricos para ilustrar la aplicación de la condición. En ambos casos se mostrarán los valores propios de las partes hermíticas de las  $2^n$  matrices vértice de  $[L, U]$ , los valores propios de las matrices generadas por Mansour en [13, teorema 20] y la cota superior  $\xi$ .

##### Ejemplo 6.4.1.

Sea la matriz intervalo  $[L, U]$  donde  $U$ ,  $L$  y  $P$  están dadas por

$$U = \begin{bmatrix} -8.8 & -3.5 & -2.3 \\ -3.1 & -8.7 & -2.7 \\ -2.7 & -2.8 & -8.9 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} -9.0 & -3.9 & -3.2 \\ -3.1 & -9.3 & -3.0 \\ -3.5 & -3.6 & -9.2 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.9 \\ 0.0 & 0.6 & 0.3 \\ 0.8 & 0.8 & 0.3 \end{bmatrix}$$



**Figura 15.** Valores propios de: (·) las partes hermíticas de las matrices vértice, (x) matrices de Mansour y  $\xi$  en línea vertical.

la cota superior,  $\xi = -0.4155$

La Figura 15, muestra la gráfica del ejemplo 6.4.1. En ella se puede ver que todas las matrices de Mansour [13, teorema 20] tienen valores propios negativos, lo cual implica que mediante esta condición  $[\mathbf{L}, \mathbf{U}]$  es estable. También de la gráfica se observa que la cota superior  $\xi$  es negativa, esto indica que mediante la condición del teorema 6.3.1  $[\mathbf{L}, \mathbf{U}]$  es estable. Notar que  $\xi$  nunca puede ser menor que el valor propio más grande de las matrices de Mansour, lo cual está establecido en la prueba del teorema 6.3.1.

### Ejemplo 6.4.2.

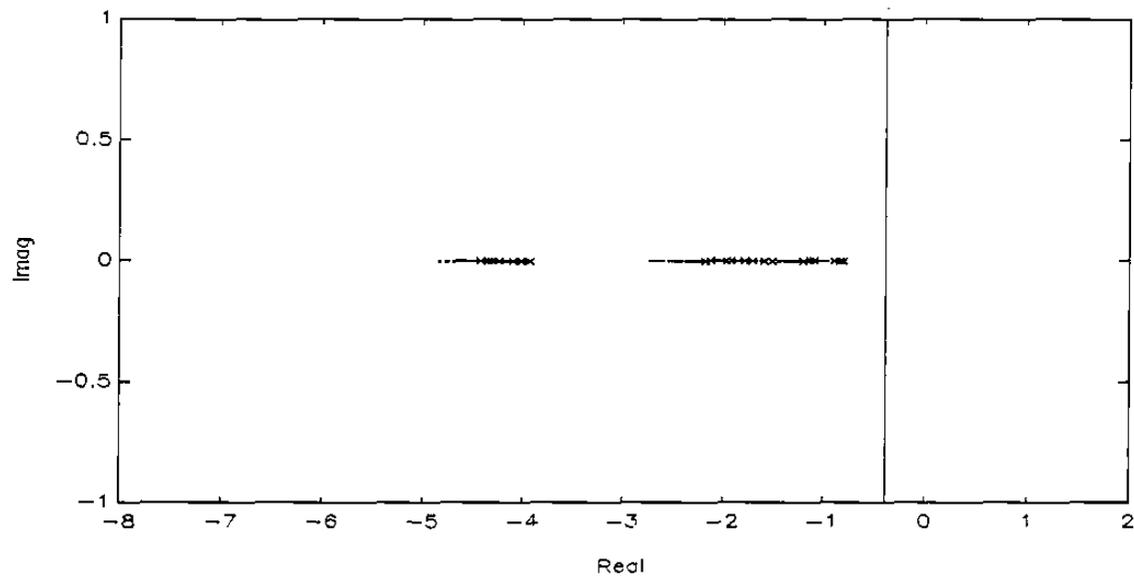
Sea la matriz intervalo  $[\mathbf{L}, \mathbf{U}]$  donde  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{P}$  están dadas por

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -3.38 & 0.05 & -0.44 \\ -0.71 & -1.77 & -0.27 \\ -1.31 & -0.97 & -1.88 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} -3.39 & -0.65 & -0.63 \\ -1.12 & -2.71 & -0.59 \\ -1.34 & -1.27 & -2.72 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.70 & 0.19 \\ 0.41 & 0.94 & 0.32 \\ 0.03 & 0.30 & 0.84 \end{bmatrix}$$

En este caso  $\xi = -0.3852$  y la gráfica correspondiente a este ejemplo, se muestra en la figura 16. Al igual que en el ejemplo anterior, ambas condiciones, la de Mansour [13, teorema 20] y la del teorema 6.3.1 indican que la matriz intervalo  $[\mathbf{L}, \mathbf{U}]$  es estable.

Hay que hacer notar que para estabilidad, el valor de la cota superior  $\xi$  debe ser negativo. Sin embargo el hecho de que  $\xi$  resulte positivo, no implica que la matriz intervalo  $[\mathbf{L}, \mathbf{U}]$  sea inestable. Esto, al igual que en algunos resultados anteriores, se debe a que la condición es sólo suficiente. La condición a verificar del teorema 6.3.1 es mucho más simple, pero el resultado es más conservador que el de verificar que las partes hermíticas de todos los vértices de  $[\mathbf{L}, \mathbf{U}]$  tengan valores propios negativos.



**Figura 16.** Valores propios de: (·) las partes hermíticas de las matrices vértice, (x) matrices de Mansour y  $\xi$  en línea vertical.

### 6.5 Resumen.

En este capítulo se ha presentado una condición suficiente de estabilidad para el caso de un sistema lineal invariante en el tiempo. El sistema, el cual está representado en variables de estado, presenta incertidumbre y está expresada mediante una matriz intervalo. Basado en los valores propios de las partes hermíticas de dos matrices, se obtuvo una cota superior  $\xi$ . Esta condición, cuando es aplicable, evita el analizar los valores propios de al menos  $2^{n-1}$  matrices vértice, ver [40]. En suma, de los resultados reportados en la literatura que dan condiciones suficientes de estabilidad para una matriz intervalo, este resultado representa una de las condiciones de estabilidad más simples.

# CAPITULO 7

## APLICACION DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS EN SISTEMAS CON INCERTIDUMBRE

### 7.1 Introducción.

La intención de este capítulo es tomar algunos sistemas físicos, los cuales presenten incertidumbre paramétrica en su modelo matemático de una manera natural y hacer un análisis de Estabilidad Robusta aplicando los resultados obtenidos en esta disertación.

En la primera parte, se presenta el caso de un robot rígido de  $n$  grados de libertad (*n.g.d.l.*) [43]. Se sabe de antemano que un robot es un sistema no lineal. Por lo mismo, primeramente, se busca una ley de control que elimine las no linealidades del sistema mediante una retroalimentación y se obtenga un modelo lineal del sistema en lazo cerrado, lo cual es un requisito para la aplicación de los resultados de Estabilidad Robusta. En el modelo matemático en variables de estado, la incertidumbre se representa mediante una envolvente convexa de matrices. En este caso se busca garantizar la estabilidad del error y se demuestra que siempre está presente un error en el posicionamiento cuando hay incertidumbre. Para esto, se utiliza el teorema de estabilidad 3.3.1 dado en el capítulo 3.

En el segundo ejemplo, se aborda el caso de un filtro activo de tercer orden pasabajos tipo Butterworth [44] usando amplificadores operacionales. En este sistema, se considera la presencia de incertidumbre en dos casos: el primero, en la tolerancia de los valores nominales de los elementos capacitivos y resistivos que determinan la frecuencia de corte y segundo; en los elementos resistivos que fijan las ganancias de los amplificadores operacionales. Para este último caso, por cuestiones de análisis, la incertidumbre se considera de una manera indirecta en el parámetro de la ganancia y no

en la tolerancia de los elementos resistivos externos que la determinan. Esto, con el fin de considerar también posibles cambios en el comportamiento interno del amplificador operacional que se reflejen en la ganancia.

## 7.2 Modelo de un Robot de *n.g.d.l.*

El modelo dinámico de un robot de *n.g.d.l.* se obtiene de las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange [43]. En esta sección, se deducirá en una forma sintetizada, el modelo de un robot manipulador. La idea es obtener un modelo general para después particularizar en un robot de dos grados de libertad.

Las ecuaciones de movimiento de un robot manipulador de *n.g.d.l.* [43] son las siguientes

$$\sum_{j=1}^n d_{jk}(\mathbf{q})\ddot{q}_j + \sum_{i,j=1}^n c_{ijk}(\mathbf{q})\dot{q}_i\dot{q}_j + g_k(\mathbf{q}) = \tau_k \quad (46)$$

$$J_{m_k} \ddot{\theta}_{m_k} + (B_{m_k} + K_{b_k} K_{m_k} / R_k) \dot{\theta}_{m_k} = K_{m_k} / R_k V_k - r_k \tau_k \quad k = 1, \dots, n \quad (47)$$

donde  $q_1, \dots, q_n$  son elementos de  $\mathbf{q}$  y representan un conjunto de coordenadas generalizadas para un robot manipulador de  $n$  eslabones;  $d_{jk}$  es el  $jk$ -ésimo elemento de la matriz de inercias  $\mathbf{D}(\mathbf{q})$  simétrica de  $n \times n$ ;  $c_{ijk}$  es un elemento de  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  y representa el elemento  $jk$  del  $i$ -ésimo eslabón;  $g_k$  representa el  $k$ -ésimo término gravitacional y  $\tau_k$  representa el  $k$ -ésimo par aplicado. La ecuación (47) es el modelo dinámico de un motor de imán permanente donde  $\theta_{m_k}$  es el ángulo de la flecha del motor y  $r_k$  es la  $k$ -ésima relación de engranaje. Teniendo en cuenta que,  $q_k = r_k \theta_{m_k}$ , combinando ambas ecuaciones de movimiento resulta en forma matricial

$$(\mathbf{D}(\mathbf{q}) + \mathbf{J})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u} \quad (48)$$

donde la  $k$ -ésima componente de  $\mathbf{u}$  está dada por

$$u_k = \frac{K_m v_k}{r_k R_k} \quad (49)$$

y  $\mathbf{J}$  es una matriz diagonal con elementos  $\frac{1}{r_k^2} J_{m_k}$  donde  $J_{m_k}$  es la inercia del  $k$ -ésimo actuador.

Haciendo  $\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \mathbf{D}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}$  y  $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})$  la ecuación matricial para un robot manipulador de  $n.g.d.l.$  resulta en

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{u}. \quad (50)$$

Sobre esta ecuación se aplicará en la siguiente sección una ley de control no lineal linealizante  $\mathbf{u}$  para obtener un modelo linealizado de un sistema en lazo cerrado, el cual tendrá incertidumbre paramétrica.

### 7.3 Robot Manipulador Planar de dos Grados de Libertad.

En la figura 17, se muestra un esquema de un robot rígido de dos grados de libertad que se utilizará para mostrar la aplicación de la técnica de Campo de Valores

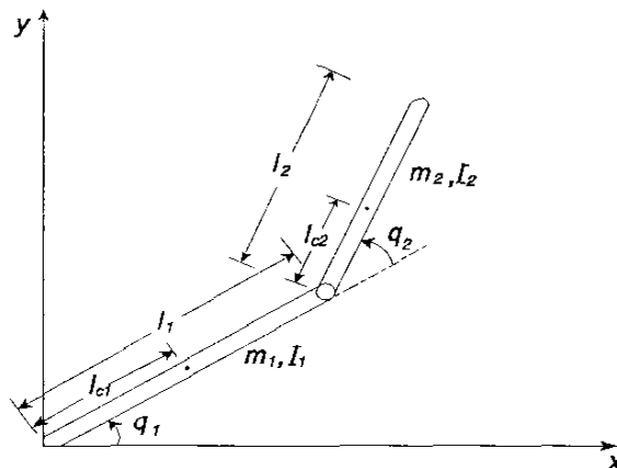


Figura 17. Robot planar de 2 g.d.l.

para análisis de Estabilidad Robusta. La ecuación (50), representa a un modelo no lineal del robot manipulador y como la técnica citada sólo es aplicable a sistemas lineales, entonces, es necesario obtener un modelo linealizado para el robot manipulador. Para tal efecto, se propone una ley de control no lineal linealizante que cancele las no linealidades del modelo dado por (50).

### 7.3.1 Deducción del modelo matemático del robot.

En la deducción del modelo, se tomarán en cuenta las siguientes hipótesis:

**H1.**  $\dot{D}(q) - 2C(q, \dot{q})$  es una matriz anti-simétrica.

**H2.**  $\exists q^d \in \mathbb{C}^n$ , y es continuamente diferenciable hasta  $n$ .

**H3.**  $\sup(\|\ddot{q}^d\|) < K_1 < \infty$ ; donde  $\sup(\|\ddot{q}^d\|)$  es la mínima cota superior de toda  $\ddot{q}^d \in \mathbb{C}^n$  y  $K_1$  es una constante real.

Utilizando una ley de control no lineal linealizante [43], técnica conocida como *Dinámica Inversa*

$$\mathbf{u} = f(q, \dot{q}) \quad (51)$$

se obtiene un sistema linealizado en lazo cerrado. Proponiendo una ley de control estimada con incertidumbre en la matriz de inercias  $\mathbf{M}$ , y eliminando los argumentos se tiene

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{M}}\mathbf{v} + \mathbf{h} \quad (52)$$

donde  $\mathbf{v}$  es la nueva entrada y  $\hat{\mathbf{M}}$  es la matriz de inercias estimada. Sustituyendo esta ecuación en la ecuación del modelo no lineal del robot manipulador y nuevamente eliminando los argumentos, resulta el modelo linealizado

$$\mathbf{M}\ddot{q} = \hat{\mathbf{M}}\mathbf{v} \quad (53)$$

aplicando ahora una entrada de control en base a la aceleración, velocidad y posición deseada

$$\mathbf{v} = \ddot{\mathbf{q}}^d - \mathbf{K}_1(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^d) - \mathbf{K}_0(\mathbf{q} - \mathbf{q}^d) \quad (54)$$

donde  $\mathbf{K}_1$  y  $\mathbf{K}_0$  son matrices que se van a determinar y  $\mathbf{q}^d$  representa la posición deseada, el modelo linealizado resulta

$$\hat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}^d + \mathbf{K}_1(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^d) + \mathbf{K}_0(\mathbf{q} - \mathbf{q}^d) = 0 \quad (55)$$

como se quiere garantizar la estabilidad del error, entonces se toma como error a

$$\mathbf{e} = \mathbf{q} - \mathbf{q}^d \quad (56)$$

y haciendo manipulaciones algebraicas, finalmente el modelo linealizado del sistema del robot manipulador, en base al error, queda

$$\hat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_1 \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_0 \mathbf{e} = (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{M}) \ddot{\mathbf{q}}^d \quad (57)$$

como la matriz de inercias  $\mathbf{M}$ , la matriz de inercias estimada  $\hat{\mathbf{M}}$  y el vector de aceleración deseado  $\ddot{\mathbf{q}}^d$  no dependen del error  $\mathbf{e}$ , la ecuación anterior es lineal. Con el fin de obtener una representación en el espacio de estado, la ecuación lineal se expresa de la siguiente manera

$$\mathbf{T}^{-1} \ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_1 \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_0 \mathbf{e} = (\mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1}) \ddot{\mathbf{q}}^d \quad (58)$$

y finalmente la cuarta hipótesis:

**H4.** Se considerará incertidumbre paramétrica exclusivamente en la matriz

resultante de  $\mathbf{T}$ , donde  $\mathbf{T} = \mathbf{M}^{-1} \hat{\mathbf{M}}$ .

Escogiendo las variables de estado como:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{e} \quad \mathbf{x}_2 = \dot{\mathbf{e}} \quad \text{con} \quad \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2 \quad \text{y} \quad \dot{\mathbf{x}}_2 = \ddot{\mathbf{e}}$$

la ecuación (58) en espacio de estado resulta

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{BTK})\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta} \quad (59)$$

donde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = [-\mathbf{K}_0 - \mathbf{K}_1] \quad \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{T}(\mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1})\ddot{\mathbf{q}}^d \end{bmatrix}$$

$$\text{y} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2nx1}; \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2nx2n}; \quad \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2nxn}; \quad \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{nx2n}; \quad \mathbf{T} \in \mathbb{R}^{nxn}; \quad \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{2nx1}$$

si la matriz de inercias estimada  $\hat{\mathbf{M}}$  llega a ser igual que la matriz de inercias  $\mathbf{M}$ , entonces  $\mathbf{T} = \mathbf{I}$  y la ecuación de estado (59) se reduce a

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{BK})\mathbf{x} \quad (60)$$

La ecuación de estado (60) es el modelo linealizado en espacio de estado de un robot manipulador de *n.g.d.l.*, la ecuación en esta forma expresa una retroalimentación de estado [45] y como el par  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$  es controlable [45] los valores propios del sistema pueden ser arbitrariamente asignados. Como consecuencia, debe encontrarse una matriz  $\mathbf{K}$  tal que los valores propios de  $\mathbf{A} + \mathbf{BK}$  se localicen en el lugar deseado. Para el propósito de este análisis, se asumirá un robot manipulador de *2.g.d.l.* como el mostrado en la figura 17. Para este robot la matriz de inercia está dada por

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \quad (61)$$

donde

$$\begin{aligned} d_{11} &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos q_2) + I_1 + I_2 \\ d_{12} &= d_{21} = m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos q_2) + I_2 \\ d_{22} &= m_2 l_{c2}^2 + I_2 \end{aligned}$$

y los momentos de inercia de los eslabones son  $I_1 = \frac{1}{3} m_1 l_1^2$  e  $I_2 = \frac{1}{3} m_2 l_2^2$ .

### 7.3.2 Simulación numérica del robot.

Con fines de simplicidad se tomará a  $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{BTK}$ . La incertidumbre considerada en  $\tilde{\mathbf{A}}$  en este caso, es la que introduce precisamente el valor de  $\mathbf{T}$ . Cuando las matrices de inercia estimada y nominal son iguales la matriz  $\mathbf{T}$  no tiene efecto en  $\tilde{\mathbf{A}}$ . Primeramente, para encontrar la matriz  $\mathbf{K}$  que localice los valores propios deseados de  $\mathbf{A} + \mathbf{BK}$ , se considera que  $\mathbf{T}$  es la identidad. Como la matriz de inercias depende de la posición de los eslabones del robot, se puede observar de la matriz de inercias expresada en (61), que sólo la posición del eslabón terminal con respecto del primer eslabón es la que está presente como parámetro en la matriz  $\mathbf{M}$ . Por consiguiente se considerará parte de la incertidumbre del sistema como la variación que  $q_2$  pueda tener cuando el robot se mueva en todo su espacio de trabajo. La parte restante de la incertidumbre, se contempla al momento de estar calculando la ley de control, la cual se hace en línea durante el proceso de control [43]. Para el propósito del ejemplo, sólo se considerará la incertidumbre introducida en  $\mathbf{T}$  por  $q_2$ . El valor de la matriz de inercias  $\mathbf{M}$  nominal se toma cuando el valor de  $q_2$  es de  $45^\circ$ , los otros valores de  $\mathbf{M}$  se toman cuando  $q_2$  es igual a  $0^\circ$  y  $90^\circ$ , es decir, se escogen tres puntos de operación. Para el robot de 2 *g.d.l.* la ecuación de estado (59) se puede expresar con los valores de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  como

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

asumiendo que los valores propios deseados son  $-1, -2, -3, -4$ , y que la matriz  $\mathbf{T}$  es la identidad, una matriz  $\mathbf{K}$  calculada con el algoritmo presentado en [45] es

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 8.8100 & -4.2405 & 5.6990 & -0.6709 \\ 3.2901 & 1.1406 & 0.8020 & 4.3010 \end{bmatrix}$$

Los valores físicos de robot planar, para este ejemplo, son;  $m_1 = 2$  kg,  $m_2 = 1$  kg,  $l_1 = 0.6$  m,  $l_{c1} = 0.3$  m,  $l_2 = 0.3$  m y  $l_{c2} = 0.15$  m.  $l_{ci}$  expresa la distancia de la unión previa al centro de masa del eslabón  $i$ .

Calculando  $\mathbf{T}$  con la matriz estimada  $\hat{\mathbf{M}}$  cuando  $q_2$  es igual a  $0^\circ$  y  $90^\circ$  resulta

$$\mathbf{T}_{0^\circ} = \begin{bmatrix} 0.9920 & 0.0375 \\ 0.5197 & 0.9170 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{T}_{90^\circ} = \begin{bmatrix} 1.0192 & -0.0905 \\ -1.2547 & 1.2003 \end{bmatrix}$$

sustituyendo los diferentes valores de  $\mathbf{T}$  en  $\tilde{\mathbf{A}}$  se obtienen tres matrices. Recordar que la matriz nominal  $\mathbf{T} = \mathbf{I}$ .

$$\tilde{\mathbf{A}}_{0^\circ} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8.8633 & 4.1640 & -5.6837 & 0.5042 \\ -7.5957 & 1.1579 & -3.6972 & -3.5955 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_{nominal} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8.8100 & 4.2405 & -5.6990 & 0.6709 \\ -3.2901 & -1.1406 & -0.8020 & -4.3010 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_{90^\circ} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8.6813 & 4.4252 & -5.7359 & 1.0732 \\ 7.1047 & -6.6895 & 6.1878 & -6.0042 \end{bmatrix}$$

Encontrando una matriz  $\mathbf{P}$  no singular de transformación [46] en cada caso tal que  $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1/2} \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{P}^{1/2}$ , donde  $\mathbf{P}$  es la matriz solución de la ecuación de Lyapunov [45],

$$\tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \tilde{\mathbf{A}} = -\mathbf{Q}$$

y  $\mathbf{Q}$  es la matriz identidad, se obtienen las siguientes matrices

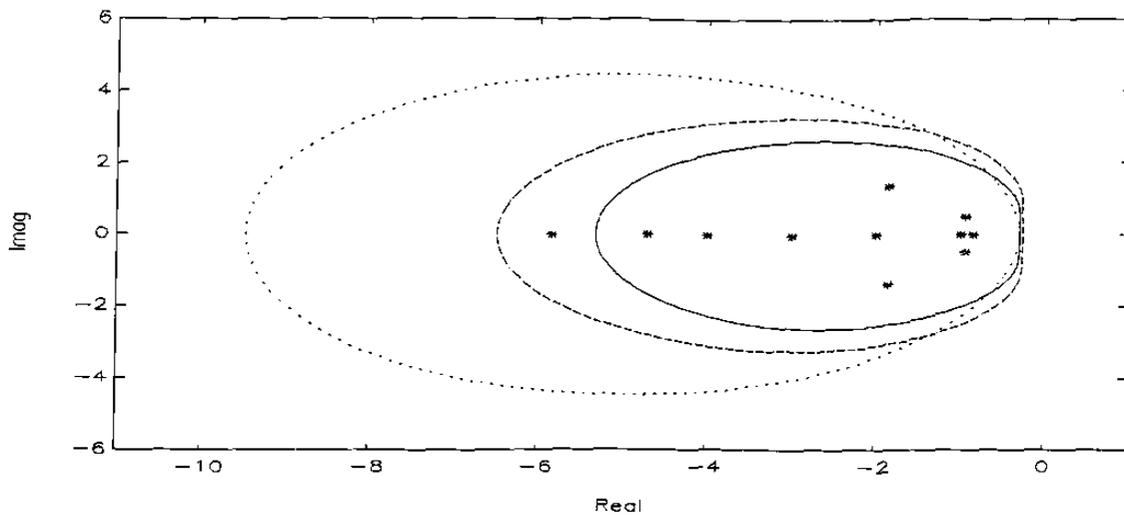
$$\bar{\mathbf{A}}_{0^\circ} = \begin{bmatrix} -4.6859 & 1.6333 & -0.0602 & 0.1384 \\ 0.7010 & -1.1521 & 0.1277 & -0.2060 \\ -3.8424 & 1.8698 & -1.5442 & 1.5795 \\ -3.4487 & -0.4327 & -1.7819 & -1.8970 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{A}}_{nominal} = \begin{bmatrix} -3.6989 & 1.1889 & 0.6210 & -0.3914 \\ 0.9026 & -1.5556 & 0.3514 & -0.5127 \\ -4.1178 & 1.9367 & -1.6165 & 0.9187 \\ -1.8460 & -1.8183 & -0.1134 & -3.1289 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{A}}_{90^\circ} = \begin{bmatrix} -4.2522 & 2.1669 & -0.2214 & -0.4965 \\ 3.2353 & -2.5837 & 1.7426 & 0.1611 \\ -5.4049 & 2.3926 & -2.4568 & -0.6956 \\ 3.7282 & -3.9588 & 3.6423 & -2.4474 \end{bmatrix}$$

El Campo de Valores correspondiente a cada matriz transformada, se calcula de acuerdo al algoritmo propuesto en el capítulo 3, mediante un programa de MATLAB.

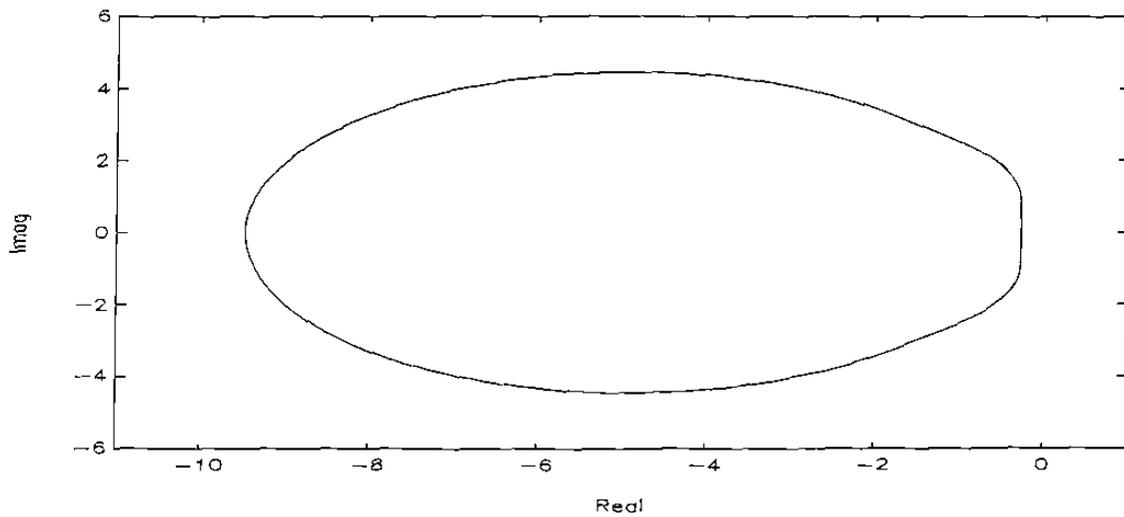
Las respectivas gráficas de  $F(\bar{A}_{0^\circ})$ ,  $F(\bar{A}_{nominal})$  y  $F(\bar{A}_{90^\circ})$  son mostradas en la figura 18. En todos los casos los asteriscos indican los valores propios de cada matriz. Así mismo en la gráfica de la figura 19, se muestra el Campo de Valores de la suma directa de las tres matrices, esto es,  $F(\bar{A}_{0^\circ} + \bar{A}_{nominal} + \bar{A}_{90^\circ})$ . En este caso el Campo de Valores de la suma directa, esta contenido estrictamente en el semiplano izquierdo abierto del plano complejo i.e.  $\mathbb{C}_-$ , por lo que de acuerdo al teorema 3.3.1 el sistema del robot planar de 2 *g.d.l.* es robustamente estable a pesar de la incertidumbre introducida en la matriz  $\bar{A}$



**Figura 18.** Campos de Valores.  $F(\bar{A}_{0^\circ})$  en --,  $F(\bar{A}_{nominal})$  en \_ y  $F(\bar{A}_{90^\circ})$  en ...

por la posición del eslabón terminal con respecto del primer eslabón,  $q_2$ .

De las matrices transformadas  $\bar{A}_{0^\circ}$ ,  $\bar{A}_{nominal}$  y  $\bar{A}_{90^\circ}$  que representan tres puntos de operación se observa que los valores propios de  $\bar{A}$  permanecen en el semiplano izquierdo abierto del plano complejo ante la incertidumbre de  $q_2 \in [-90^\circ, 90^\circ]$  o igualmente en la variación del término  $\cos(q_2) \in [0, 1]$  en la matriz de inercias. Esto es suponiendo que el eslabón terminal pueda moverse en toda la gama de valores de  $q_2$ . Hasta aquí se ha demostrado la estabilidad del error  $e$ , lo cual significa que el robot manipulador, es capaz de posicionarse en el espacio planar sin que el error crezca. Sin embargo, la existencia del término  $\eta$  en la ecuación de estado del modelo linealizado, implica la presencia de un error en el posicionamiento. La magnitud de dicho error, esta determinado por la



**Figura 19.** Campo de Valores de la suma directa,  $F(\bar{A}_{0^\circ} + \bar{A}_{nominal} + \bar{A}_{90^\circ})$ .

relación que guarda la matriz estimada de inercias  $\hat{M}$  con la matriz de inercias nominal  $M$ . El error  $\eta$  es cero cuando tales matrices son iguales. El término  $\eta$  es acotado ya que  $\bar{q}^d$  es acotado.

De este análisis se puede concluir que el robot manipulador siempre tendrá un error en el posicionamiento, ya que las incertidumbres siempre estarán presentes.

#### 7.4 Estabilidad de un filtro pasabajos RC activo de tercer orden.

El siguiente ejemplo contempla un filtro pasabajos tipo Butterworth, en el cual existe incertidumbre paramétrica en la tolerancia de los valores nominales de los elementos que fijan las ganancias  $K_1$  y  $K_2$  de los amplificadores operacionales y los elementos  $R$  y  $C$  que fijan la frecuencia de corte. Se analizan dos casos, en el primero se consideran cambios en los valores de  $R_1$  y  $C_1$  que fijan la frecuencia de corte y en el segundo, se considera la incertidumbre presente en las ganancias en lazo cerrado de los amplificadores operacionales. En el caso de las ganancias se hablará de las incertidumbres en  $K_1$  y  $K_2$  directamente, sabiendo de antemano que son propiciadas por cambios en los elementos resistivos que las determinan.

El rango de valores escogidos de los elementos resistivos para fijar las ganancias, no propiamente las tolerancias, constituye también una fuente de incertidumbre en el funcionamiento del amplificador operacional. Esta al igual que las tolerancias de los elementos resistivos, también será considerada en la incertidumbre de las ganancias. En la figura 20 se muestra el filtro activo de tercer orden.

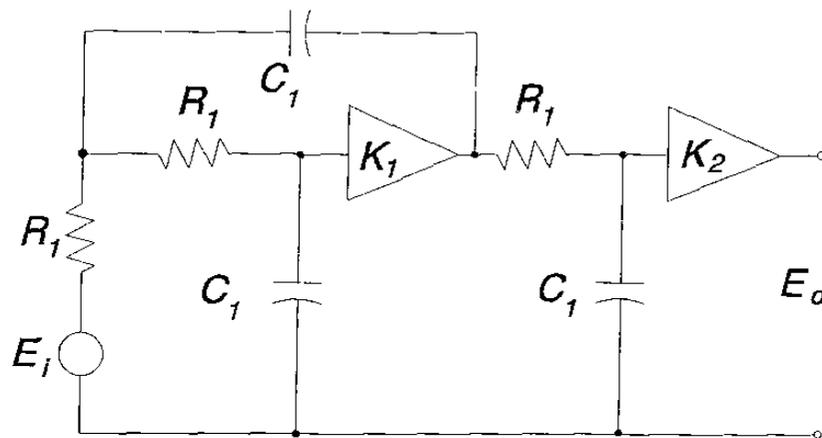


Figura 20. Filtro activo RC pasabajos de tercer orden.

#### 7.4.1 Deducción del modelo matemático del filtro.

Para poder hacer un análisis de estabilidad, es necesario obtener un modelo matemático del filtro. Se obtendrá el modelo matemático en variables de estado. Para este fin, se parte de la función de transferencia del filtro [44], para después obtener una realización irreducible. El filtro activo, está formado por un filtro pasabajos de segundo orden y un filtro pasabajos de primer orden conectados en cascada. Ambos filtros tienen la misma frecuencia de corte dada por  $R_1$  y  $C_1$ . La función de transferencia global se puede establecer como sigue.

$$\frac{E_o}{E_i} = G(s) = HG_1(s)G_2(s) \quad (62)$$

donde  $G_1(s)$  representa la función de transferencia del filtro de segundo orden,  $G_2(s)$  la función de transferencia del filtro de primer orden y  $H$  es una constante a determinarse.  $G_1(s)$  y  $G_2(s)$  están dados por

$$G_1(s) = \frac{K_1 \omega_1^2}{s^2 + s \frac{\omega_1}{Q} + \omega_1^2} \quad (63)$$

$$G_2(s) = \frac{K_2 \omega_2}{s + \omega_2} \quad (64)$$

donde

$$\omega_1 = \frac{1}{R_1 C_1} \quad \omega_2 = \frac{1}{R_1 C_1} \quad Q = \frac{1}{3 - K_1}$$

los polos de  $G(s)$  en función de  $K_1$ ,  $Q$ ,  $\omega_1$  y  $\omega_2$  están dados por

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} \frac{(3 - K_1)}{R_1 C_1} + \frac{1}{2} \frac{(3 - K_1)}{R_1 C_1} \sqrt{1 - 4 \left( \frac{1}{3 - K_1} \right)^2} \quad (65)$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2} \frac{(3 - K_1)}{R_1 C_1} - \frac{1}{2} \frac{(3 - K_1)}{R_1 C_1} \sqrt{1 - 4 \left( \frac{1}{3 - K_1} \right)^2} \quad (66)$$

$$\lambda_3 = -\frac{1}{R_1 C_1} \quad (67)$$

Con el fin de obtener un filtro de tercer orden con una frecuencia de corte de 1 rad/seg, el polinomio del denominador de  $G(s)$ , usando una aproximación de Butterworth para un filtro de tercer orden, se obtiene utilizando  $D_3(s)$  [44]

$$D_3(s) = (s^2 + s + 1)(s + 1)$$

donde el subíndice 3 indica el orden del filtro. Igualando los coeficientes en  $s$  dados por  $D_3(s)$  y los del polinomio del denominador de  $HG_1(s)G_2(s)$  resulta

$$\omega_1 = \omega_2 = 1 \quad \text{y} \quad \frac{\omega_1}{Q} = 1$$

por lo tanto

$$R_1 C_1 = 1, \quad K_1 = 2 \quad \text{y} \quad H = 2$$

el valor de la ganancia  $K_2$  se toma como unitaria.

La función de transferencia nominal  $G(s)$  resulta

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{2}{(s^2 + s + 1)(s + 1)} \quad (68)$$

Los valores nominales de las componentes del filtro se tomarán como  $R_1 = 10\Omega$  y  $C_1 = 0.1$  f y el valor de las ganancias de los amplificadores operacionales como  $K_1 = 2$  y  $K_2 = 1$ . Sustituyendo estos valores nominales en las ecuaciones de los polos, resulta la función de transferencia nominal  $G(s)$ .

Para la obtención del modelo en variables de estado, se considerará una realización de la forma canónica controlable [45]. Los valores  $\alpha_3$ ,  $\alpha_2$  y  $\alpha_1$  son los coeficientes del polinomio característico de  $G(s)$ . El polinomio característico  $D(s)$  en función de los polos  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$ , los cuales están dados por (65), (66) y (67), es el siguiente

$$D(s) = (s + \lambda_1)(s + \lambda_2)(s + \lambda_3) = s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3.$$

Una realización de la forma canónica controlable para  $G(s)$  está dada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_3 & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{C} = [2 \ 0 \ 0]$$

#### 7.4.2 Simulación numérica del filtro.

El análisis de estabilidad del filtro activo se hará utilizando la técnica del Campo de Valores. Se analizará primeramente considerando variaciones en las tolerancias de  $R_1$  y  $C_1$  y finalmente cambios en las ganancias nominales. Con  $K_1 = 2$ , a continuación se presentan los valores numéricos de la matriz  $\mathbf{A}$  para cuatro casos diferentes de valores de  $R_1$  y  $C_1$ , debido a tolerancias, correspondientes a cuatro puntos de operación distintos

Caso 1. Valor nominal de  $R_1$  y  $C_1$ .

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Caso 2. Valor nominal de  $R_1$  mas el 10%, valor nominal de  $C_1$  mas el 10%.

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.5645 & -1.3660 & -1.6529 \end{bmatrix}$$

Caso 3. Valor nominal de  $R_1$  mas el 10%, valor nominal de  $C_1$  mas el 80%.

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.1288 & -0.5102 & -1.0101 \end{bmatrix}$$

Caso 4. Valor nominal de  $R_1$  menos el 10%, valor nominal de  $C_1$  menos el 10%.

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1.8817 & -3.0483 & -2.4691 \end{bmatrix}$$

Al igual que en el primer ejemplo de este capítulo, se hace una transformación de  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$  y  $\mathbf{A}_4$  encontrando una matriz  $\mathbf{P}$  en cada caso tal que  $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1/2} \mathbf{A} \mathbf{P}^{1/2}$ , donde  $\mathbf{P}$  es la matriz solución de la ecuación de Lyapunov [45], [46]. Las matrices transformadas son las siguientes

$$\bar{\mathbf{A}}_1 = \begin{bmatrix} -0.4000 & 0.09111 & -0.3948 \\ -0.6911 & -0.6000 & 0.5890 \\ -0.6052 & -1.5890 & -1.0000 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{A}}_2 = \begin{bmatrix} -0.2193 & 0.2228 & -0.3251 \\ -0.5459 & -0.4331 & 0.4952 \\ -0.3871 & -1.2570 & -1.0005 \end{bmatrix}$$

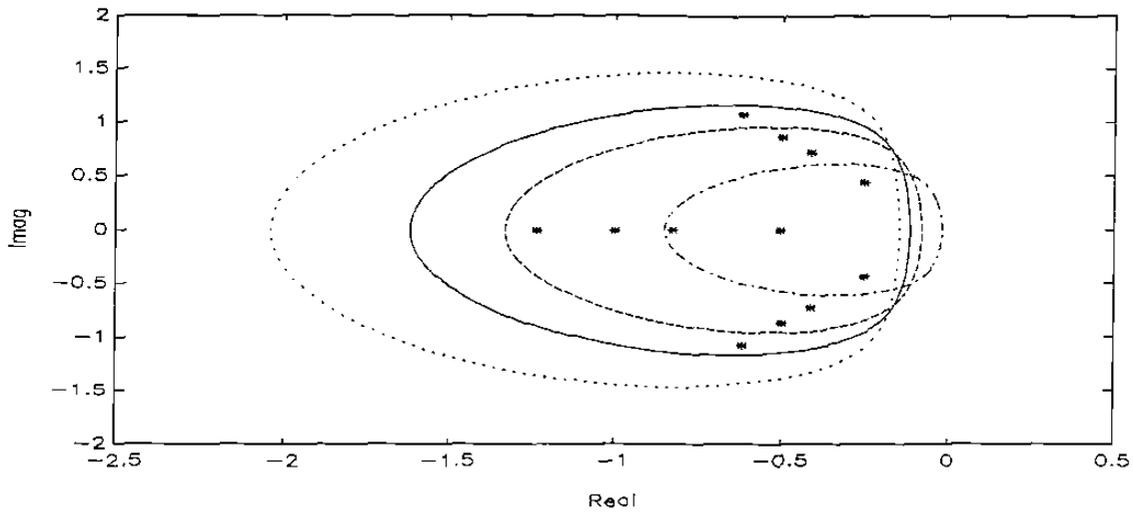
$$\bar{\mathbf{A}}_3 = \begin{bmatrix} -0.0359 & 0.2894 & -0.1292 \\ -0.3327 & -0.1678 & 0.3899 \\ -0.0973 & -0.6571 & -0.8064 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{A}}_4 = \begin{bmatrix} -0.7265 & -0.1491 & -0.4136 \\ -0.9169 & -0.8174 & 0.7756 \\ -0.9264 & -1.9932 & -0.9252 \end{bmatrix}$$

El Campo de Valores para cada caso esta mostrado en la figura 21. En todos los casos los asteriscos indican los valores propios  $\lambda_1, \lambda_2$  y  $\lambda_3$  de cada matriz  $\bar{\mathbf{A}}$ .

En la figura 22, se grafica el Campo de Valores de la suma directa de  $\bar{\mathbf{A}}_1, \bar{\mathbf{A}}_2, \bar{\mathbf{A}}_3$  y  $\bar{\mathbf{A}}_4$ , esto es,  $F(\bar{\mathbf{A}}_1 + \bar{\mathbf{A}}_2 + \bar{\mathbf{A}}_3 + \bar{\mathbf{A}}_4)$ .

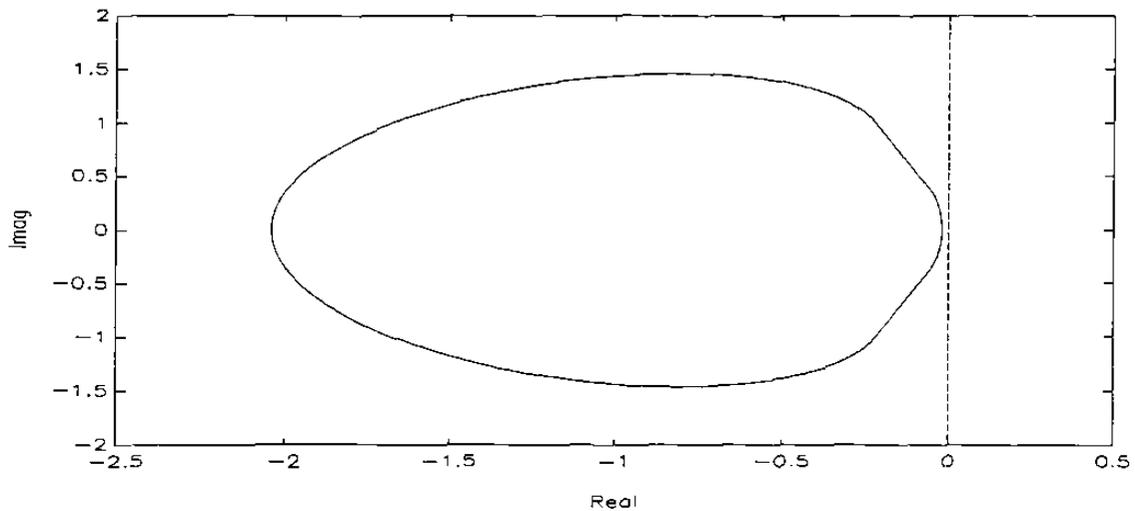
De acuerdo con el teorema 3.3.1, el sistema representado por el filtro activo de tercer orden con incertidumbres en los elementos  $R_1$  y  $C_1$  es estable, ya que la condición dada por  $F(\bar{\mathbf{A}}_1 + \bar{\mathbf{A}}_2 + \bar{\mathbf{A}}_3 + \bar{\mathbf{A}}_4) \subset \mathbb{C}_-$  se satisface.

En la segunda parte de este ejemplo, se consideran variaciones en las ganancias nominales. En el caso de este filtro, la ganancia  $K_2$  nada tiene que ver con la localización de los valores propios del sistema. En cambio la ganancia  $K_1$  es clave en la localización de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  como se puede observar en las ecuaciones (65) y (66). La incertidumbre en la ganancia  $K_1$  se debe principalmente a la variación que puedan tener las resistencias



**Figura 21.**  $F(\bar{A}_1)$  en —,  $F(\bar{A}_2)$  en --,  $F(\bar{A}_3)$  en -·- y  $F(\bar{A}_4)$  en ...

utilizadas para fijar dicha ganancia [44], esto es, la tolerancia de  $\pm 10\%$ ,  $\pm 20\%$  o combinaciones de ambas. También están incluidos aquí posibles cambios en la ganancia debido a efectos en el comportamiento interno del amplificador operacional de los



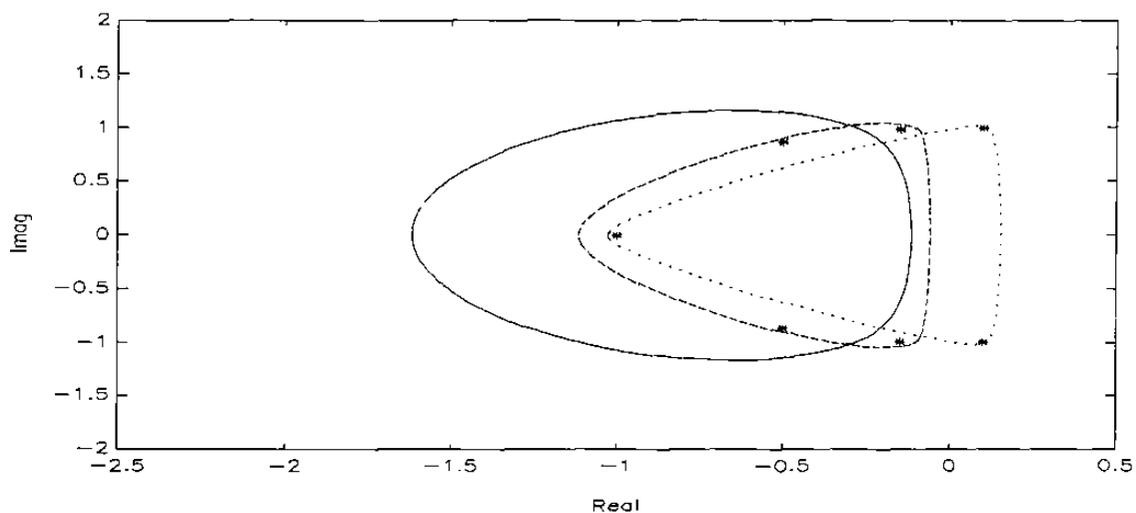
**Figura 22.** Campo de Valores de  $F(\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3 + \bar{A}_4)$

elementos resistivos que la fijan. En la figura 23, se muestran Campos de Valores para diferentes ganancias  $K_2 = 2$ ,  $K_2 = 2.7$  y  $K_2 = 3.2$ , considerando valores nominales de  $R_1$  y  $C_1$ . Como se puede observar de las ecuaciones de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , cuando  $K_1$  es mayor o igual que tres, el sistema se vuelve inestable. Esto se puede apreciar en la gráfica del Campo de Valores para las diferentes ganancias  $K_1$ . Los valores numéricos de las matrices  $\bar{A}'$  son

$$\bar{A}'_1 = \begin{bmatrix} -0.4000 & 0.0911 & -0.3948 \\ -0.6911 & -0.6000 & 0.5890 \\ -0.6052 & -1.5890 & -1.0000 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}'_2 = \begin{bmatrix} -0.4833 & 0.4015 & -0.3799 \\ -0.6580 & -0.1667 & 0.7393 \\ -0.6201 & -1.0393 & -0.6500 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}'_3 = \begin{bmatrix} -0.4878 & 0.7860 + 0.1512i & -0.3590 - 0.1839i \\ -0.5665 - 0.1512i & 0.0878 & 0.8338 - 0.1034i \\ -0.6410 + 0.1839i & -0.6383 + 0.1034i & -0.4000 \end{bmatrix}$$



**Figura 23.** Campo de Valores para tres  $K_1$ .  $F(\bar{A}'_1)$  en —,  $F(\bar{A}'_2)$  en -- y  $F(\bar{A}'_3)$  en ...

Del ejemplo, el cambio en los valores de los elementos que determinan la frecuencia de corte, debido a las tolerancias, no afecta la estabilidad del sistema. Lo único que afecta es el corrimiento de la frecuencia de corte, que puede ser hacia atrás o hacia adelante. La incertidumbre presente en la ganancia  $K_1$  del amplificador operacional, como se observa de las ecuaciones de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  y en la gráfica de la figura 23, puede hacer que el sistema se vuelva inestable. Se puede sacar en claro de este análisis, que la restricción más fuerte para la estabilidad del filtro la da precisamente la incertidumbre en el valor de  $K_1$ .

## 7.5 Resumen

En este capítulo, se ilustró mediante ejemplos, la aplicación de algunos de los resultados obtenidos en esta tesis. Se mostró el análisis de Estabilidad Robusta en dos ejemplos razonablemente reales pudiéndose probar la aplicabilidad de los teoremas presentados. Se asumieron las fuentes de incertidumbres más evidentes en dichos sistemas. Ciertamente no son las únicas, pero tal vez sí las de más importancia. Debido a la suficiencia de los resultados, a veces no resulta fácil ilustrar un resultado mediante un ejemplo completamente real.

## CAPITULO 8

### CONCLUSIONES

Cualquier sistema físicamente realizable, tiene un modelo matemático que tradicionalmente había sido considerado sin incertidumbre hasta hace poco más de una década. Actualmente el análisis de estabilidad es visto por la comunidad de control como algo más ingenieril, esto es, considerando posibles fuentes de incertidumbre.

Los resultados presentados en esta tesis, tienen como finalidad cubrir algunas de estas necesidades en cuanto a el análisis de Estabilidad Robusta. Desde luego el problema de encontrar una prueba algebraica con la cual se pueda probar Estabilidad Robusta para un sistema en general aún esta abierto. Lo que se ha encontrado hasta hoy y en particular en esta tesis, son resultados que se aplican con frecuencia a casos especiales de sistemas con incertidumbre paramétrica. El criterio que se pueda formar acerca de la estabilidad de un sistema, utilizando un resultado, no necesariamente es el mismo si se aplica otro resultado. Esto es por la suficiencia de las condiciones, de ahí el hecho de que algunos resultados sean más o menos conservadores que otros.

Los teoremas que representan condiciones de Estabilidad Robusta de sistemas, actualmente requieren de algoritmos computacionales, los cuales pueden ser grandes, tediosos o simples y esto depende también del equipo de cómputo con el que se cuente para realizar la verificación. En algunos resultados los algoritmos computacionales son sólo herramientas de apoyo para emitir un criterio, en otros el algoritmo computacional representa la minimización o maximización de alguna variable o función la cual no siempre es factible. En el caso de los resultados presentados en esta tesis, todos requieren de trabajo computacional, en algunos es todo un algoritmo y en otros es un simple cálculo. Tal es el caso de los resultados obtenidos mediante la técnica de Campo de Valores, en la que se requiere de algoritmos computacionales para emitir un criterio. En el caso de los resultados basados en el concepto de la distancia de una matriz estable al conjunto de las matrices inestables, el resultado se puede obtener de calculos simples.

En los dos casos el algoritmo sólo es una herramienta de apoyo. Sin duda, algunos de los resultados de esta tesis pueden mejorarse o pueden enfocarse utilizando otro concepto. Algunas líneas a seguir para tal propósito serían entre otras; algún refinamiento de la técnica del Campo de Valores, para tratar de obtener un resultado menos conservador; mediante el concepto de la distancia de una matriz estable al conjunto de las matrices inestables, la búsqueda de las direcciones de estabilidad de los vértices de una matriz intervalo, pudiera ser un enfoque más; otro enfoque pudiera ser el análisis de las partes hermíticas de las matrices vértice de una matriz intervalo con el fin de obtener condiciones simples que involucren menos cálculos. Por último, analizar la Estabilidad Robusta de sistemas considerando sistemas más reales con el propósito de mejorar la aplicabilidad de los resultados.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Kharitonov, V. L., "Asymptotic Stability of an Equilibrium Position of a Family of Systems of Linear Differential Equations", *Differential'nye Uraveniya*, Vol 14 No. 11 pp. 1483-1485, 1978.
- [2] Fu, M. and Barmish, B. R., "A Generalization of Kharitonov's Interval Polynomial Framework to Handle Linearly Dependent Uncertainty". *Technical Report*. 1987. Department of Electrical and Computer Engineering. University of Wisconsin-Madison, WI 53706.
- [3] Barmish, B. R., "A Generalization of Kharitonov's Four Polynomial Concept for Robust Stability Problems with Linearly Dependent Coefficient Perturbations", *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol 34, No.2, pp. 157-165, 1989.
- [4] Bartlett, A. C., Hollot, C. V. and Lin H., "Root Locations of an Entire Polytope of Polynomials: It suffices to Check the Edges", *Math. Control Signals Systems*. Vol 1, pp. 61-71, 1988.
- [5] Barmish, B. R., "New Tools For Robust Control Systems" Curso Corto, Monterrey, México. Enero de 1992.
- [6] Rantzer, A., *Parametric Uncertainty and Feedback Complexity in Linear Control Systems*. Department of Mathematics, Division of Optimization and System Theory. Doctoral Disertation. Norstedts Tryckeri AB, Stockholm. 1991.
- [7] Rojas Estrada, J. A. y Collado M., J., "Estabilidad de la Envolvente Convexa de Matrices", *Memoria del V Congreso Latinoamericano de Control Automático*. Vol 1, pp. 262-265, 1992. La Habana, Cuba.
- [8] Foo, Y. K. and Soh, Y. C., "Stability Analysis of a Family of Matrices", *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol 35, No. 11, pp. 1257-1259. 1990.
- [9] Collado M., J., "Stability of the Convex Hull of Commuting Matrices", *Proc. of the 32nd IEEE Conf. on Decision and Control*, Vol 3, pp. 2002-2003. 1993.
- [10] Rojas Estrada, J. A. y Collado M., J., "Campo de Valores en Estabilidad Robusta", *Memoria del XI Congreso Nacional de Control Automático Querétaro'92*. Vol. 1, pp. 284-297. 1992.
- [11] Collado M., J. y Rojas Estrada, J. A., "New Technique for Robust Stability", *Proc. of the 31st IEEE Conf. on Decision and Control*. Vol. 1. pp. 231-236, 1992

- [12] Delgado Romero, J.J.D y Rojas Estrada, J. A., " Analisis de Estabilidad Robusta de Sistemas con Incertidumbre Usando la Prueba de Mansour", *XV Congreso Nacional de Ingeniería Electrónica, ELECTRO 93*, Vol XV, pp. 155-166, 1993.
- [13] Mansour, M., "Robust Stability of Interval Matrices", *Proc. of the 28th IEEE Conf. on Decision and Control*, Vol 1, pp. 46-51. 1989.
- [14] Brewer, J. W., "Kronecker Products and Matrix Calculus in System Theory", *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol. CAS-25, No. 9, pp. 772-780. 1978
- [15] Saydy, L., Tits, A. L. and Abed, E. H., "Guardian Maps and the Generalized Stability of Parametrized Families of Matrices and Polynomials", *Math. Control Signals and Systems*, Vol. 3, pp. 345-371, 1990.
- [16] Qiu, L. and Davison, E. J., "A New Method For the Stability Robustness Determination of State Space Models with Real Perturbations", *Proc. of the 27th IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 538-543, 1988.
- [17] Horn, R. A. and Johnson, C., *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1985
- [18] Fuller, A.T., "Conditions for a Matrix to have Only Characteristics Roots with Negative Real Parts", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol 23, pp. 71-98, 1968.
- [19] Doyle, J. C. and Stein, G., "Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis", *IEEE Trans. on Automat. Control*, Vol. AC-26, No.1, pp. 4-16, 1981.
- [20] Fu, M. Olbrot, A. W., and Polis, M. P., "Introduction to the Parametric Approach to Robust Stability", *IEEE Contr. Syst. Mag.*, pp. 7-11, 1989.
- [21] Yedavalli, R. K., "Perturbation Bounds for Robust Stability in Linear State Space Models", *Int. Journal Control*, Vol. 42, No. 6, pp. 1507-1517, 1985.
- [22] Horn, R. A. and Johnson, C., *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1991.
- [23] Lancaster, P. and Tismenetsky, M., *The Theory of Matrices*. Academic Press 1985.
- [24] Wang, Qing-Guo, "Necessary and Sufficient Conditions for Stability of a Matrix Polytope with Normal Vertex Matrices", *Automatica*, Vol. 27, No. 25, pp. 887-888, 1991.

- [25] Heinen, J. A., "Sufficient Conditions for Stability of Interval Matrices", *Int. Journal Control*, Vol. 39, No. 6, pp. 1323-1328, 1984.
- [26] Yedavalli R. K., "Stability Analysis of Interval Matrices: Another Sufficient Condition", *Int. Journal Control*, Vol. 43, No. 3, pp. 767-772, 1986.
- [27] Van Loan C., "How Near is a Stable Matrix to an Unstable Matrix?", *Contemporary Mathematics*, Vol. 47, pp. 465-478, 1985.
- [28] Byers, R., "A Bisection Method For Measuring the Distance of a Stable Matrix to the Unstable Matrices", *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, Vol. 9, No. 5, pp.875-881, 1988.
- [29] Qiu, L. and Davison, E.J., "The Stability Robustness Determination of State Space Models with Real Unstructured Perturbations", *Math. Control Signals Systems*, Vol. 4, pp. 247-267, 1991.
- [30] Barmish, B.R., "Counter-example to a Recent Result on the Stability of Interval Matrices by S. Bialas", *Int. Journal Control*, Vol. 39, No. 5, pp.1103-1104, 1984.
- [31] Golub, G.H. and Van Loan, C., *Matrix Computations*, The Johns Hopkins Press, Baltimore, MD., 1983.
- [32] Housholder, A. S., *The Theory of Matrices in Numerical Analysis*, Dover Publications, 1964
- [33] Mansour, M. "Simplified Sufficient Conditions for the Asymptotic Stability of Interval Matrices", *Int. Journal Control*, Vol. 50, No. 1, pp. 443-444. 1989.
- [34] Bialas, S., " A Necessary and Sufficient Condition for the Stability of Interval Matrices", *Int. Journal Control*, Vol. 37, pp. 717-722. 1983.
- [35] Barmish, B. R. and Fu, M., "Stability of a Polytope of Matrices: Counterexamples", *IEEE Trans. on Automat. Control.*, Vol. 33, No. 6, 1988.
- [36] Rhon, J., "Positive Definiteness and Stability of Interval Matrices", *Technical Report NI-92-05*, Faculty of Mathematics and Physics Charles University, Prag. 1992.
- [37] Gutman, S., *Root Clustering in Parameter Space*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 141, Springer-Verlag., 1990.

- [38] Juang, Y. T. and Shao, C.S., "Stability Analysis of Dynamic Interval Systems". *Int. Journal Control*, Vol. 39, No. 6, pp. 1323-1328, 1984.
- [39] Rhon, J., "Stability of Interval Matrices: The Real Eigenvalue Case. *IEEE Trans. on Automat. Control.*, Vol. 37, No. 10, pp. 1604-1605, 1992.
- [40] Wang, K. and Michel, A. N., "On Sufficient Conditions for the Stability of Interval Matrices", *Systems and Control Letters*, Vol. 20, pp. 345-351, 1993.
- [41] Rojas, J.A. and Collado, J.M., "Stability of Interval Matrices Using the Distance to the Set of Unstable Matrices", artículo aceptado para su publicación en el *Proc. of the 1994 American Control Conference*.
- [42] Delgado Romero, J.J.D., Rojas Estrada, J.A. and J.M. Collado, "A Simple Test to Determine the Stability of an Interval Matrix", artículo aceptado para su publicación en el *Proc. of the 1994 American Control Conference*.
- [43] Spong, M. W. and Vidyasagar M., *Robot Dynamics and Control*, John Wiley & Sons, 1989.
- [44] Budak, A., *Passive and Active Network Analysis and Synthesis*, Houghton Mifflin, 1974.
- [45] Chen, C.T., *Linear System Theory and Design*, Saunders, Harcourt Brace Jovanovich. 1984.
- [46] Lozano-Leal, R. and Joshi, S.M., "On the Design of Dissipative LQG-Type Controllers", *Proc. of the 27th IEEE Conf. on Decision and Control*, vol. 2, pp. 1645-1646, 1988.

APENDICE

ARTICULOS INTERNACIONALES PUBLICADOS Y  
POR PUBLICARSE

- Título:** Estabilidad de la Envolvente Convexa de Matrices.
- Referencia:** [7]
- Memoria:** Artículo publicado en la *Memoria del V Congreso Latinoamericano de Control Automático*. Vol 1, pp. 262-265, 1992. La Habana, Cuba.
- Resultado:** Simplificación de la prueba de la envolvente convexa de dos matrices resuelta por Barmish, mediante matrices compuestas tipo Kronecker. Obtención de una *abscisa de convergencia* para el caso de la envolvente convexa de  $k$  matrices simétricas.



### ESTABILIDAD DE LA ENVOLVENTE CONVEXA DE MATRICES

JUAN ANTONIO ROJAS E.

JOAQUIN COLLADO M.

Universidad Autónoma de Nuevo León  
 Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica  
 Programa Doctoral en Ingeniería Eléctrica  
 Control Automático y Robótica  
 Cd. Universitaria, Apdo. Postal 65-F  
 66451 San Nicolás de los Garza, Nuevo León  
 MEXICO

**Resumen:** En cualquier sistema de control la parte más importante es la estabilidad, una vez asegurada esta, se puede hacer que el sistema cumpla también con otras características. Lo que aquí se presenta, para el caso multivariable, es un panorama de como el problema de la estabilidad de matrices que pertenecen a un polítopo ha sido atacado. Se presentan pruebas alternas más compactas para el caso de dos matrices y condiciones necesarias y suficientes para el caso  $n$  de matrices simétricas.

#### I. INTRODUCCION

Siempre es necesario conocer si un sistema de control permanecerá estable, a pesar de que se puedan presentar ciertas perturbaciones como incertidumbres de algunos parámetros de componentes del mismo sistema.

En la presente investigación se busca encontrar condiciones necesarias y suficientes para probar estabilidad de la envolvente convexa de matrices. Dicho problema se presenta cuando la matriz  $A$  de la ecuación en variables de estado de un sistema de control, sufre perturbaciones, en sus elementos.

Se necesita saber si el sistema  $\dot{x} = Ax$  permanece estable para perturbaciones de la matriz  $A$  del tipo  $x = (A + \Delta A)x$ , en donde  $\Delta A$  pertenece a una familia dada de matrices, la cual puede ser la envolvente convexa de  $n$  matrices por ejemplo.

Ciertamente, se han encontrado condiciones necesarias y suficientes para el caso polinomial con independencia entre las perturbaciones de los coeficientes [1], pero, estas no pueden ser extendibles al caso matricial directamente.

Esto es que cuando se trabaja en el espacio de elementos de matrices, los resultados en polinomios no se pueden transferir a matrices. En otros trabajos como en [2], se han encontrado condiciones necesarias y suficientes para la envolvente convexa de dos matrices perturbadas.

#### II OBJETIVO

Simplificar la prueba existente para el caso de dos matrices utilizando productos bilaterales y para el caso de  $n$  matrices simétricas, establecer condiciones necesarias y suficientes que garanticen estabilidad así como una cota superior que sirva como abscisa de convergencia.

#### III ANTECEDENTES

Existen varios resultados en la literatura que tienen que ver con la estabilidad robusta, pero en casi todos, las condiciones para estabilidad son solo suficientes. El antecedente importante en este caso, es el resultado presentado por Kharitonov [3] el cual trata polinomios cuya incertidumbre obedece a una independencia lineal entre las perturbaciones que entran en los coeficientes del polinomio.

En otro trabajo [3] trata la dependencia lineal de las perturbaciones en los coeficientes, pero con ciertas restricciones, como independencia entre las perturbaciones de coeficientes de potencias pares y nones. Bartlett, Hollot y Lin [4], presentan un trabajo más elaborado que contiene condiciones necesarias y suficientes para estabilidad en envolvente convexa con dependencia lineal entre los coeficientes del polinomio. Desafortunadamente el "Edge-theorem" de Bartlett, et al. nos da una explosión geométrica con el número de vértices de la envolvente convexa, por esta razón, es que se quiere un resultado computacionalmente más eficiente.

Entrando al terreno matricial, se pueden mencionar dos resultados importantes que muestran condiciones necesarias y suficientes para estabilidad en envolvente convexa de dos matrices. El primero de ellos Fu y Barnish [2], utilizando sumas Kronecker [5] muestra condiciones necesarias y suficientes, para estabilidad de dos matrices, esto es,  

$$A_\alpha = (1-\alpha)A_0 + \alpha A_1$$
 para todo  $\alpha \in [0,1]$  y se debe cumplir que  $\sigma((A_0 \otimes A_0)^{-1}(A_1 \otimes A_1)) \cap (-\infty, 0) = \emptyset$  o sea, el conjunto vacío, donde  $\sigma(\cdot)$  representa el conjunto de los valores característicos.

<sup>1</sup> Para la definición de producto y suma Kronecker ver preliminares



El segundo es el trabajo de [6], el cual muestra otra forma de probar estabilidad que se basa en mapas guardianes de estabilidad generalizada de familias de matrices y polinomios reales. Estos relacionan su argumento con la matriz o el polinomio y se hacen cero a medida que se pierde estabilidad. El resultado que presenta en esencia es el mismo que el presentado por [2], pero utiliza productos y sumas de otras representaciones, como el producto Schläflian superior e inferior [6]. La ventaja con respecto al primero, es que en dichas representaciones no ocurren productos o sumas de valores característicos repetidos. Los productos Schläflian superior e inferior son dimensionados a matrices de orden  $n(n-1)/2 \times n(n-1)/2$  y  $n(n+1)/2 \times n(n+1)/2$  respectivamente.

### IV PRELIMINARES

En esta sección se presentan algunos conceptos matemáticos que apoyan las secciones posteriores.

Dado  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{p \times q}$ , el producto Kronecker de A y B, denotado por  $A \otimes B$  está definido como:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mp \times nq} \quad (P1)$$

Si  $m = n$  y  $p = q$  la suma Kronecker de A y B denotada por  $A \oplus B$  está definida por

$$A \oplus B = A \otimes I_p + I_m \otimes B \in \mathbb{R}^{mp \times mp} \quad (P2)$$

Dado  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  para  $n \geq 2$ , donde  $(i_1, i_2)$  es el  $i$ -ésimo par de enteros en la secuencia.

$$(1,1), (1,2), \dots, (1,n), (2,2), (2,3), \dots, (2,n), (3,3), \dots, (n-1,n), (n,n) \quad (P3)$$

#### Definición 1

$$A \otimes B = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1) \times \frac{1}{2}n(n+1)} \quad (P4)$$

donde

$$c_{ij} := \begin{cases} a_{i_1 j_1} b_{i_2 j_2} \\ \frac{1}{2} (a_{i_1 j_1} b_{i_2 j_2} + a_{i_1 j_2} b_{i_2 j_1} + a_{i_2 j_1} b_{i_1 j_2} + a_{i_2 j_2} b_{i_1 j_1}) \\ \frac{\sqrt{2}}{2} (a_{i_1 j_1} b_{i_2 j_2} + a_{i_2 j_2} b_{i_1 j_1}) \end{cases} \text{ en otros casos} \quad (P5)$$

Dado  $(r_1, r_2)$  y  $(s_1, s_2)$  son el  $r$  y  $s$ -ésimo par de enteros en la secuencia respectivamente

$$(1,2), (1,3), \dots, (1,n), (2,3), \dots, (2,n), (3,4), \dots, (n-1,n) \quad (P6)$$

#### Definición 2

$$A \otimes B = [d_{rs}] \in \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n-1) \times \frac{1}{2}n(n-1)} \quad (P7)$$

donde

$$d_{rs} := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_{r_1 s_1} b_{r_2 s_2} - a_{r_1 s_2} b_{r_2 s_1} - a_{r_2 s_1} b_{r_1 s_2} + a_{r_2 s_2} b_{r_1 s_1} \end{pmatrix} \quad (P8)$$

A partir de los productos anteriores se pueden derivar las siguientes sumas.

#### Definición 3

$$A \oplus B := A \oplus I_n + I_n \oplus B \in \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1) \times \frac{1}{2}n(n+1)} \quad (P9)$$

y

#### Definición 4

$$A \otimes B := A \otimes I_n + I_n \otimes B \in \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n-1) \times \frac{1}{2}n(n-1)} \quad (P10)$$

### V DESARROLLO

En esta sección se presenta el resultado principal para el caso de  $n$  matrices simétricas. Antes de presentarlo, se describen algunos hechos importantes en los cuales se basa el resultado.

La envolvente convexa  $A$  o polítopo de matrices se puede establecer como sigue:

Para el caso de dos matrices  $A_0$  y  $A_1$  es:

$$A = \{A_\alpha : A_\alpha = (1 - \alpha) A_0 + \alpha A_1 : \forall \alpha \in [0,1]\} \quad (1)$$

donde  $A_\alpha$  es cualquier matriz que pertenece a la envolvente convexa de  $A_0$  y  $A_1$  y  $\alpha$  es un parámetro que pertenece al intervalo  $[0,1]$ .

Para el caso de  $n$  matrices donde  $n \geq 3$ , la envolvente convexa resultante está dada por:

$$A = \left\{ A_\alpha : A_\alpha = \sum_{l=1}^n \alpha_l A_l : \sum_{l=1}^n \alpha_l = 1 : \alpha_l \in [0,1] \right\} \quad (2)$$

#### Algunas propiedades de matrices simétricas

- i)  $A = A^T$ ;  $(A = A^R)$
- ii)  $\lambda_i$  son reales. [7]
- iii) La suma de matrices simétricas resulta en otra matriz simétrica [7]



4a)  $\beta_i A_i$  es tambien simétrica (7)  $\forall \beta_i \in \mathbb{R}$

e) Si  $\lambda_i(A)$  es real, los  $\lambda_i$  se pueden ordenar como:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \quad (3)$$

donde

$$\lambda_1 = \lambda_{\max}$$
$$\lambda_n = \lambda_{\min}$$

El teorema de Weyl [7] establece que:

$$\lambda_{\min}(A) + \lambda_i(B) \leq \lambda_i(A+B) \leq \lambda_{\max}(A) + \lambda_i(B) \quad (4)$$

El mismo teorema se puede poner de la siguiente manera si los valores característicos de A y B respetan la ecuación (3) y son negativos.

$$\lambda_{\max}(A+B) \leq \lambda_{\max}(A) + \lambda_{\max}(B) < 0 \quad (5)$$

Para el caso de A por estabilidad se tiene que:

$$\bar{\rho} = \max_i (\lambda_{\max}(A_i)) < 0 \quad (6)$$

Proposición

Dado  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrices simétricas, el  $\text{co} \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  generado es estable si y solo si las  $A_i$  son estables (donde  $\text{co} \{ \dots \}$  esta dado por (2)).

Pruebas de suficiencia (\*)

suponiendo las  $A_i$  estables

de (5) y (6) se observa que la suma de los valores característicos máximos de A y B (siendo A y B cualesquier matriz  $A_i \forall i = 1, \dots, n$ ) es menor que  $\bar{\rho}$  por lo que se concluye que:

$$\lambda_{\max} \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_{\max}(A_i) \leq \bar{\rho} < 0$$
$$\forall \alpha_i \in [0, 1] \text{ y } \sum \alpha_i = 1 \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_{\max}(A_i) \leq \bar{\rho} \quad (7a)$$

por lo que el  $\text{co} \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  es estable.

En (7a) hay igualdad en uno de los casos, cuando el  $\alpha_i$  que corresponde al mayor  $\lambda_{\max}(A_i)$  es igual a uno y todos los demás  $\alpha_i$ 's son igual a cero para todo  $j \neq i$ . En todos los otros casos, la desigualdad es estricta.

La prueba de necesidad (\*) es trivial, ya que algunas matrices en particular generan la envolvente convexa.

VI RESULTADOS Y CONCLUSIONES

La prueba de estabilidad, para el caso de dos matrices, también se puede obtener utilizando matrices compuestas [8] los cuales tienen propiedades similares a las generadas por sumas y productos Kronecker. La única restricción es que ambas matrices deben ser cuadradas.

Aplicando la definición 1 se obtiene una matriz de orden  $\frac{1}{2}n(n+1)$ . Los valores característicos de la matriz compuesta son todas las combinaciones posibles de productos entre los valores característicos de A y B, excluyendo las multiplicidades. Ejemplo para una matriz A de  $3 \times 3$ , el  $\sigma(A \otimes A)$  esta formada por:

$$\lambda_1^2, \lambda_1 \lambda_2, \lambda_1 \lambda_3, \lambda_2^2, \lambda_2 \lambda_3, \lambda_3^2$$

Aplicando la definición 2 para el mismo ejemplo el  $\sigma(A \circ A)$  esta dado por:

$$\lambda_1 \lambda_2, \lambda_1 \lambda_3, \lambda_2 \lambda_3$$

mientras que para  $\sigma(A \bullet A)$  (donde  $\bullet$  indica el producto Kronecker) es:

$$\lambda_1^2, \lambda_1 \lambda_2, \lambda_1 \lambda_3, \lambda_2 \lambda_1, \lambda_2^2, \lambda_2 \lambda_3, \lambda_3 \lambda_1, \lambda_3 \lambda_2, \lambda_3^2$$

En el trabajo presentado por Fu y Baraish [2] (teorema 3.2) se analizan los valores característicos de  $(A \bullet A)^k (B \bullet B)$ , la cual incluye las combinaciones de productos de valores característicos repetidos. Contrariamente,  $(A \circ A)^k (B \circ B)$  no incluye elementos repetidos.

En suma se puede observar que tales matrices compuestas, aportan resultados compactos eliminando redundancias, y esto, por supuesto que ahorra cálculos computacionales.

La abscisa de convergencia  $\bar{\rho}$  encontrada, nos permite asegurar cierta rapidez en la respuesta del sistema con cualquier matriz que pertenezca a la envolvente convexa, además de permitir alguna otra incertidumbre no contemplada.

VII REFERENCIAS

[1] Kharitonov, V. L., "Asymptotic Stability of an Equilibrium Position of a Family of Systems of Linear Differential Equations", Differential'nye Uravneniya, Vol. 14, No. 11., pp. 1483-1485, 1978.  
[2] Fu, M. and Baraish, B. R. "A Generalization of Kharitonov's Interval Polynomial Framework to Handle Linearly Dependent Uncertainty". Technical Report, 1987. Department of Electrical and Computer Engineering, University of Wisconsin-Madison, WI 53706.



- [3] Blasas, S and Garloff J. "Convex Combinations of Stable Polynomials". Journal of Franklin Institute. Vol. 319, No. 3, pp. 373-377, 1985.
- [4] Bartlett, A. C., Hollot, C. V. and Lin, H. "Root Locations on an Entire Polytope of Polynomials: It suffices to check the Edges," Proceedings of the 1987 American Control Conference, Minneapolis. Also in Mathematics of Control, Signals and Communications, (in Press). Vol. 1, No. 1, 1988, pp. 61-71
- [5] Brewer J. W. "Kronecker Products and Matrix Calculus in System Theory" IEEE Trans. Automat. Contr., Vol CAS-25, No. 9, pp. 772-780, 1978
- [6] Saydy L., Tits A. L. and Abed E. H. "Guardian Maps and the Generalized Stability of Parametrized Families of Matrices and Polynomials". Math. Control Signals and Systems, 3, pp. 345-371, 1990.
- [7] Horn R. A. and Johnson Ch. A. "Matrix Analysis". Cambrid Un UniversiPrePrespi8p181181-181981985. 5.
- [8] Qiu L. and Davison E. J. "A New Method For the Stability Robustness Determination of State Space Models With Real Perturbations", Proc. IEEE CDC, pp. 538-543, 1988.

- Título:** New Technique for Robust Stability.
- Referencia:** [11]
- Memoria:** Artículo publicado en el *Proceeding of the 31st IEEE Conference on Decision and Control*. Vol. 1. pp. 231-236, 1992. Tucson, Arizona. U.S.A.
- Resultado:** Aplicación del Campo de Valores en el estudio de Estabilidad Robusta. Condiciones suficientes de estabilidad para el caso general de  $k$  matrices estables. Condiciones necesarias y suficientes para el caso de  $k$  matrices normales.

# New Technique for Robust Stability<sup>1</sup>

Joaquín M. Collado and Juan A. Rojas

F.I.M.E.-U.A.N.L.

Apartado Postal F-30

66451 San Nicolás de los Garza, N.L.

México

## Abstract

The problem of Robust Stability in Linear Systems with parametric uncertainties is addressed. A novel method based on the field of values of a matrix is used to determine the stability of state-space models with parametric uncertainty. If the uncertainty is expressed as the convex hull of certain  $k$  matrices, the present method requires much less computational effort than the Value Set. In some cases the result is the best possible.

## Notation

$\mathbb{R}, \mathbb{C}$  real numbers, complex numbers  
 $\mathbb{R}^{n \times m}$   $n \times m$  real matrices  
 $A_i$  square matrices of dimension  $n \times n$   
 $A^T, A^*$  Transpose, complex conjugate transpose  
 $A > 0, (A < 0)$  Positive (Negative) definite matrix  
 If  $A$  and  $B$  are square matrices, not necessarily of the same dimensions, then

$$Diag(A, B) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

$A + B$  = direct sum of  $A$  and  $B = diag(A, B)$   
 $Co(A_1, A_2, \dots, A_k)$  = convex hull generated by  $A_1, A_2, \dots, A_k$  =

$$\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A = \sum_{i=1}^k \alpha_i A_i, \alpha_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1\}$$

$\lambda_i(A)$  =  $i$ th eigenvalue of  $A$   
 $\sigma(A) = \{\lambda_i \in \mathbb{C} : |\lambda I - A| = 0\}$  = Spectrum of  $A$   
 $H(A) = \frac{1}{2}(A + A^*)$  hermitian part of  $A$   
 $S(A) = \frac{1}{2}(A - A^*)$  skew-hermitian part of  $A$   
 $F(A) = \{z \in \mathbb{C} : z = x^* A x, \|x\|_2 = 1\}$

= field of values of  $A$ . [6], [17].

Let the Schur decomposition [10, pp. 192] be

$$A = U(D + N)U^*$$

where  $U$  is unitary ( $U^*U = I$ ),  $D$  is a diagonal with entries  $\lambda_i(A)$  and  $N$  is strictly upper triangular. With respect to the Schur Decomposition, we define  $N(A) = U D U^* =$  Normal part of  $A$   
 $NN(A) = U N U^* =$  Not normal part of  $A$   
 notice that  $N(A)$  is not the closest normal matrix to  $A$ , see [11].

## I.-Introduction

We are concerned with systems of the form.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); y(t) = Cx(t) \quad (1)$$

Where  $A, B, C$  are real matrices of dimensions  $n \times n, n \times m, p \times n$ , respectively. The model (1) has parametric uncertainty, i.e.  $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C}$ , where  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  and  $\mathcal{C}$  are sets of matrices that contains all the possible values for the matrices  $A, B$ , and  $C$ . It is well known that the stability of (1) depends only on the eigenvalues of the  $A$  matrix. Depending on how to specify the family  $\mathcal{A}$ , is the type of results that we may obtain. We are going to choose  $\mathcal{A} = Co(A_1, A_2, \dots, A_k)$ , this is due to: a) this formulation contains the so-called Interval-matrices [4], which is a more natural formulation, and b) it is more tractable than other types of families. We can formulate the

**ROBUST STABILITY PROBLEM: (RSP)** given  $A_1, A_2, \dots, A_k$  real stable matrices of dimensions  $n \times n$ ; Find (verifiable) necessary and sufficient

<sup>1</sup> JAR was sponsored by CONACyT

conditions for  $\text{Co}(A_1, A_2, \dots, A_k)$  be stable. It is not known solution for the general RSP. For  $k=2$ , Fu and Barmish [14] solved the

$$F(A + \alpha I) = F(A) + \alpha$$

problem. If  $A_i, i=1, \dots, k$  are symmetric the problem is also solved. Very recently [16] RSP was solved when  $A_i, i=1, \dots, k$  are normal matrices; and [15] RSP was also solved if  $A_i A_j = A_j A_i, \forall i \neq j, i, j = 1, \dots, k$ ; i.e. the vertex matrices commute. For these problems,  $A_i$  symmetric, normal or commuting matrices necessary and sufficient condition are that  $A_i$  be stable.

The previous tests are analytical, there are also interest in developing graphical test. One of these is the value set [7], [1], [12]. The present paper proposes an alternative graphical test based on the field of values associated with a square matrix [6], [17].

On section II we study the basic properties of the field of values. In section III we propose the main result as a sufficient condition for RSP. Some examples are shown in section IV. Our conclusion is given in section V.

## II.-Preliminaries

Definition. 2.1. The field of values of a square matrix, denoted as  $F(A)$ , is defined by.

$$F(A) = \{z \in \mathbb{C} : z = x^* A x, x^* x = 1\}$$

Property 2.2. Subadditivity.

$$F(A+B) \subset F(A) + F(B)$$

Property 2.3.  $F(A)$  contains the eigenvalues of  $A$

$$\alpha(A) \triangleq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda I - A| = 0\} \subset F(A)$$

Property 2.4. Spectral Containment of the sum of matrices

$$\alpha(A+B) \subset F(A+B) \subset F(A) + F(B)$$

Property 2.5. Convexity and Compactness

$F(A)$  is a convex and compact set

Property 2.6. Translation

$$F(A + \alpha I) = F(A) + \alpha, \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

Property 2.7. Scaling

$$F(\alpha A) = \alpha F(A), \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

Property 2.8. Decompose matrix  $A$ , in the hermitian and skew-hermitian parts, i.e.

$$A = H(A) + S(A), \text{ where}$$

$$H(A) = \frac{1}{2}(A + A^*); S(A) = \frac{1}{2}(A - A^*)$$

Then

- a)  $F(H(A)) = \text{Re } F(A)$
- b)  $F(S(A)) = \text{Im } F(A)$

Property 2.9. Stability

$$a) F(A) \subset \mathbb{C}_+ \triangleq \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z > 0\}$$

$\Downarrow$

$$A + A^* > 0$$

$$b) F(A) \subset \mathbb{C}_- \triangleq \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z < 0\}$$

$\Downarrow$

$$A + A^* < 0$$

Property 2.10. Unitary Similarity Invariance. Let  $U$  be unitary of the same dimension as  $A$ , then

$$F(A) = F(U^* A U); U^* U = I$$

Property 2.11. Normality. Let  $A$  be normal, i.e.  $A A^* = A^* A$ , then

$$F(A) = Co(\sigma(A))$$

Property 2.12. Symmetry if A is real. If  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  then

$$F(A) = \overline{F(A)}$$

Property 2.13. Direct sum

$$F(A+B) = Co(F(A), F(B))$$

The proofs of all these properties may be found in [6], [17].

Figure 1 shows a matrix A, F(A) and Co( $\sigma(A)$ ). With respect to the Robust Stability problem, the most important properties are 2.3 the Spectrum of A is contained in F(A) and property 2.9 b), which is a restatement for the linear case of the well known Krasovskii theorem [13]. Combination of properties of Subadditivity (2.2) and Scaling (2.7) give us a bound on the eigenvalues of a convex hull of a set of matrices; this bound is, in general, conservative.

Definition 2.14

We say that  $Co(A_1, \dots, A_k)$  is stable if for all matrices which belong to the set, the eigenvalues are in the open LHP.

### III.- Main Results

It is known [8] that the stability of the edges of a convex hull of matrices does not suffice for stability. It is easy to construct counterexamples for the next test:  $Co(A_1, A_2)$  is stable iff  $Co(\sigma(A), \sigma(B))$  is stable. Now let us state a sufficient condition for stability, first let us give a preliminary result.

Lemma 3.1. Let A be a nxn matrix, then

$$\lambda_{min} H(A) \leq Re \lambda_i(A) \leq \lambda_{max} H(A)$$

and.

$$\lambda_{min}[-jS(A)] \leq Im \lambda_i(A) \leq \lambda_{max}[-jS(A)]$$

Proof

Using the property 2.8 a) which express that  $F(H(A)) = Re F(A)$  and by the property 2.3 of spectral containment, the eigenvalues always are inside of F(A), the minimum and maximum points of F(A) on the real axis, coincide with  $\lambda_{min}(H(A))$  and  $\lambda_{max}(H(A))$  respectively, then first expression of lemma 3.1 is proved. On the same way  $\lambda(S(A))$  contains purely imaginary eigenvalues which coincide with the minimum and maximum points of F(A) on the imaginary direction, which coincide also with  $(j)\lambda_{min}[-jS(A)]$  and  $(j)\lambda_{max}[-jS(A)]$ , then the second expression of lemma 3.1 is proved. ■

Lemma 3.1 give us a field of values re-statement of Bendixson Theorem, see [17] or [18]. Let us to state our Main Result:

Theorem 3.2 Given  $A_1, A_2, \dots, A_k$  stable real matrices of dimensions nxn. If

$F(A_1 + A_2 + \dots + A_k) \subset \mathbb{C}$  then  $Co(A_1, A_2, \dots, A_k)$  is stable.

Proof

Let  $A \in Co(A_1, \dots, A_k)$  arbitrary, then

$$\begin{aligned} F(A) &= F\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i A_i\right), \alpha_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1 \\ &\subset \sum_{i=1}^k F(\alpha_i A_i) \quad (\text{Subadditivity}) \\ &= \sum_{i=1}^k F(A_i) \quad (\text{Scaling}) \\ &= Co(F(A_1), \dots, F(A_k)) \quad (\text{Def. Convex-hull}) \\ &= F(A_1 + \dots + A_k) \quad (\text{Property 2.13}) \end{aligned}$$

Remark 3.3. This theorem is a graphical test of the condition for stability  $A_i + A_i^* < 0$ .

Remark 3.4. We know that  $F(A_1 + A_2 + \dots + A_k) \subset \mathbb{C}$  is a sufficient condition and that  $\text{Co}(\sigma(A_1), \dots, \sigma(A_k))$  is not. Based on this observation and due to the fact that for stability purposes we are interested on the rightmost point in  $F(A_1 + A_2 + \dots + A_k)$  which is  $\max_{i,j} \lambda_j [H(A_i)]$ . We are interested in construct a matrix  $T$ , function of  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  such that

$$\max_{i,j} \text{Re } \lambda_j(A_i) \leq \text{Re}(\lambda_{\max} T) \leq \max_{i,j} \lambda_j(H(A_i))$$

We propose for each  $A_i$  matrix

$$T(A) = \begin{bmatrix} N(A) & 0 \\ 0 & \text{Re}[NN(A)] + \alpha I \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

The (1,1) block takes into account the eigenvalues of  $A$ , the (2,2) block considers the not normal part of  $A$  as the responsible for which is not sufficient consider only the eigenvalues, the term  $\alpha I$  is because  $\sigma(NN(A)) = \{0\}$ , i.e. all the eigenvalues of  $NN(A)$  are zero and  $F(NN(A))$  is "centered" about the origin; the term  $\alpha I$  translates  $\alpha$  units  $F(NN(A))$ .

Different choices of  $\alpha$  gives different test matrix. The  $\alpha$ 's we had proved are:

$$\alpha_1 = \text{trace}(A),$$

$$\alpha_2 = \text{medium point of } F(NN(A)) + \text{trace}(A).$$

$$\alpha_3 = \text{medium point of } F(NN(A)) + \frac{1}{2} [\min_i \text{Re } \lambda_i(A) + \max_i \text{Re } \lambda_i(A)].$$

The examples were developed considering  $\alpha_3$ .

The test matrix for  $\text{Co}(A_1, A_2, \dots, A_k)$  is:

$$T \triangleq T(A_1) + \dots + T(A_k) \in \mathbb{R}^{2nk \times 2nk}$$

Remark 3.5. Contrary on the value set in which we have to evaluate for different frequencies, We have only one graphical test and the dimension of the test matrix grows linearly with the number of matrices generating the convex hull. It is easy to generate the

boundary of the field of values with MATLAB, taking into account property of Scaling (2.7) with  $\alpha = e^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$  and property of projection 2.8 a).

#### IV.- Examples.

We have computed  $F(A_1 + A_2 + \dots + A_k)$ ,  $F(T)$  where  $T$  was defined in previous equation and  $\sigma(A)$ , where  $A \in \text{Co}(A_1, A_2, \dots, A_k)$  in each case as shown in figure 2 for example 1 and figure 3 for example 2. Example 1 was generated at random, while example 2 was taken form [8]. In both cases discontinuous line represents boundary of  $F(T)$  and continuous represents boundary of the field of values of the direct sum of the matrices. On a 386 PC computer @ 25 MHz both examples took about 3 minutes to execute.

#### V.- Conclusions

We introduce the concepts of Field of Values in the Robust Stability Analysis, we give some sufficient conditions and a refinement for a class of matrices that generate a convex hull. Computationally, the effort is reasonable, and we believe that a better choice of the test matrix  $T$  can determine necessary and sufficient conditions for the stability of the convex hull generated by  $k$  arbitrary matrices.

#### References

- [1] Uncertainty Structures and Robust Stability Analysis  
J. Ackermann  
European Control Conference, pp. 2318-2327, 1991.
- [2] New Tools for Robustness Analysis  
B. R. Barmish  
Proc. IEEE Conf. Decis. and Control, Dec. 1988, pp. 1-6

- [3] Introduction to Parametric Approach to Robust Stability  
Fu M., A. W. Olbrot and M. P. Polis. IEEE Control Systems Magazine, vol. 9, No. 5, 1989
- [4] Robust Stability of Interval Matrices.  
M. Mansour  
Proc. IEEE Conf. Decis. and Control, Dec. 1989.
- [5] Parameter Space Methods for Robust Control Design: A Guided Tour.  
D. D. Siljak  
IEEE Trans on Autom. Control, vol. 34, No. 7, 1989
- [6] Topics in Matrix Analysis  
R. A. Horn and C. R. Johnson  
Cambridge University Press, 1991
- [7] New Tools for Robust Control Systems  
B. R. Barmish  
Notes for the Short Course Offered Jan 8-10, 1992, Monterrey, México
- [8] Stability of a Polytope of Matrices: Counterexamples  
B. R. Barmish, M. Fu and S. Saleh  
IEEE Trans on Autom. Contr. vol. 33, No. 6, 1988
- [9] Optimization by Vector Space Methods  
D. Luenberger  
John Wiley, 1969
- [10] Matrix Computations  
G. H. Golub and C. F. Van Loan  
The John Hopkins University Press, 1983
- [11] Closet Normal Matrix Finally Found  
A. Ruhe  
Bit, vol. 27, pp. 585-598, 1987
- [12] On the computation of values sets for Robust Stability Analysis  
J. Ackermann and W. Sienel  
European Control Conference, pp. 1345-1350, 1991
- [13] Applied Nonlinear Control  
J. J. E. Slotine and W. Li  
Prentice-Hall, 1991
- [14] A Generalization of Kharitonov's interval polynomial framework to handle linearly dependent uncertainty  
M. Fu and B. R. Barmish  
Technical Report Electrical and Computer Engineering, University of Wisconsin - Madison, 1987
- [15] Stability of the convex hull of commuting matrices  
J. M. Collado  
Internal Report. UANL, Sept. 1991
- [16] Necessary and Sufficient conditions for Stability of a Matrix Polytope with Normal Vertex Matrices.  
Q-G. Wang  
Automatica, vol. 27, pp. 887-888, 1991
- [17] The Theory of Matrices in Numerical Analysis A. S. Householder  
Dover Publishing, 1975. Originally published by Ginn Blaisdell, 1964.
- [18] The Theory Of Matrices with Applications. (2nd Ed.)  
P. Lancaster and M. Tismenetsky  
Academic Press, 1985.

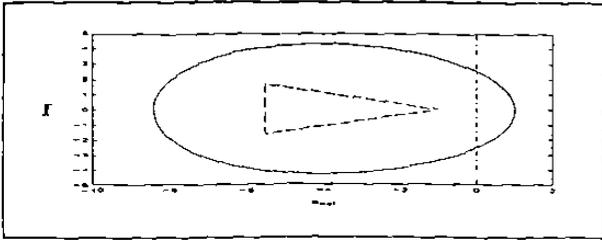


Figure 1.

- Field of values of M
- Convex hull of the Eigenvalues of M
- Eigenvalues: -1, -5.5+1.6583i, -5.5-1.6583i

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 7 & 2 & -7 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} -3.1283 & 1.2460 & -0.3600 \\ -1.4462 & -4.6390 & -0.1356 \\ -0.7012 & 0.5774 & -5.3493 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} -6.2438 & 0.3750 & -2.3775 \\ 0.4005 & -5.8748 & -0.2738 \\ -1.3414 & 0.7286 & -7.3229 \end{bmatrix}$$

The Matrices are those of example in [8]

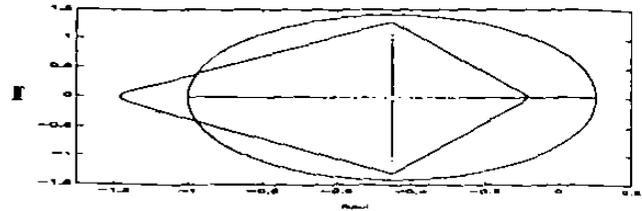


Figure 3.

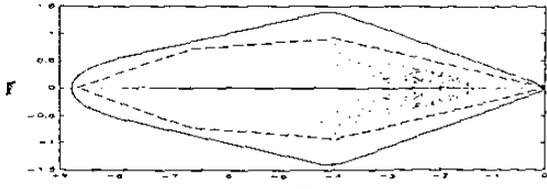


Figure 2.

$$M_1 = \begin{bmatrix} -0.6350 & 0.3516 & 0.0691 \\ 0.6268 & -2.4965 & 1.7971 \\ 0.0751 & 1.6961 & -1.5359 \end{bmatrix}$$

Artículo por publicarse en mayo de 1994.

**Titulo:** Stability of Interval Matrices Using the Distance to the Set of Unstable Matrices.

**Referencia:** [41]

**Memoria:** Artículo aceptado para su publicación en el *Proceeding of the 1994 American Control Conference*. Baltimore, MD. U.S.A.

**Resultado:** Usando el concepto de la distancia de una matriz estable al conjunto de las matrices inestables, para el caso de una matriz intervalo, obtención del vértice y la distancia en norma 2, del vértice más distante de la matriz centroide de la matriz intervalo.

# STABILITY OF INTERVAL MATRICES USING THE DISTANCE TO THE SET OF UNSTABLE MATRICES

J. A. Rojas<sup>1</sup> and J. M. Collado  
 Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica  
 Universidad Autónoma de Nuevo León  
 Apartado Postal 65-F  
 66451 San Nicolás de los Garza, N.L.  
 Phone/Fax (8) 376-45-14  
 MEXICO

**Abstract:** We describe sufficient conditions to guarantee stability of interval matrices, based on the distance of the centroid matrix to the set of unstable matrices. We define the centroid matrix as the arithmetic average of the two matrices that define the interval matrix family. First we find the longest distance of the centroid matrix to any of the  $2^n$  corners of the interval matrix, next, we calculate a lower bound of the distance of the centroid matrix to  $Q$ , where  $Q$  is the set of the matrices with at least one eigenvalue on the imaginary axis. The result is: If the longest distance from the centroid matrix to any of the  $2^n$  corners is less than the distance of the centroid matrix to  $Q$ , then the interval matrix is stable. The result is the best possible when the uncertainty in every entry is the same. We give numerical examples to illustrate the result.

**Key words.** Linear Systems, Uncertain Systems, Stability.

## Notation

$\mathbf{R}^{m \times n}, \mathbf{C}^{m \times n}$	$n \times m$ real matrices, $n \times m$ complex matrices
$I$	Identity $n \times n$ matrix
$\rho(A)$	Spectral radius of $A$ , $\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n}  \lambda_i $ [9]
$\lambda_i(A)$	$i$ th eigenvalue of $A$
$\sigma(A)$	Spectrum of $A = \{ \lambda, \lambda \in \mathbf{C} :  \lambda I - A  = 0 \}$
$\sigma_i(A)$	$i$ th singular value of $A$
$\sigma_{\min}(A)$	Minimum singular value of $A$ [7]
$Q \in \mathbf{C}^{m \times n}$	The set of matrices with at least one eigenvalue on the imaginary axis [5]
$[L, U]$	Interval matrix family where $l_{ij} \leq u_{ij}$
$A_0 = \frac{1}{2}(L + U)$	Centroid matrix $A_0 = [a_{ij}] : a_{ij} = \frac{1}{2}(l_{ij} + u_{ij}), i, j = 1, \dots, n$
$\text{ONES} \in \mathbf{R}^{m \times n}$	$\text{ONES} = [\text{ones}_{ij}] = 1, i, j = 1, \dots, n$
$\beta(A)$	The nearest distance of $A$ to the set $Q$ [5]
$d(A, B)$	Distance of $A$ to $B$ , i.e. $\ A - B\ _2 = \sigma_{\max}(A - B)$
$A \otimes B$	Kronecker product of $A \in \mathbf{C}^{m \times n}, B \in \mathbf{C}^{p \times q}$ [6]
$A \bar{\otimes} B$	A Kronecker sum like of composite matrices $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$ and $B \in \mathbf{C}^{p \times q}$ [6]

## I Introduction

In this paper we will consider linear time-invariant systems described by the equations

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (1)$$

where  $A, B$  and  $C$  are real matrices of dimensions  $n \times n, n \times m$  and  $p \times n$  respectively. The representation described by (1) has parametric uncertainty, this is due to some inaccuracy in the process to obtain such a model for the system. There are several representations to describe this uncertainty, one of these is that  $A, B$  and  $C$  belong to Interval matrices families [1], [2]. As far as stability problem concerns, only the matrix  $A$  plays a role, we consider that the elements of  $A$  are contained in an interval defined by  $L$  and  $U$ , that is,  $A = [a_{ij}] \in [l_{ij}, u_{ij}]$  where  $l_{ij} \leq u_{ij}; l_{ij}, u_{ij} \in \mathbf{R}$ . If  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  are the eigenvalues of a matrix  $A_1$ , then  $A_1$  is said to be stable if  $\text{Re}(\lambda_i) < 0, i = 1, \dots, n$ . We say that the interval matrix family is stable if and only if for all  $A_1 \in [L, U]$ ,  $A_1$  is stable. In the literature we can find some results which present sufficient conditions to assure stability for an interval matrix family [1], [2] and [3]. In [2] examining  $2^n$  corner matrices a sufficient condition was established. This condition was strengthened by Mansour [1] to test only  $2^{(n-1)/2}$  vertex matrices. Finally Wang and Michel [12] reduced further to check only  $2^{n-1}$  corners.

In this work we derive sufficient conditions using the distance of one matrix to the set of the unstable matrices  $Q$ , which contains the matrices with at least one eigenvalue on the imaginary axis. Only involving the matrices  $U, L$  and the centroid matrix, i.e.  $A_0 = (L+U)/2$ , we prove that the longest distance from the centroid matrix to any of the  $2^n$  corners is achieved by  $U$  or  $L$  (theorem 3.1). The proposed procedure is: first, calculate the distance from  $A_0$  to  $U$  or to  $L$ ; second, calculate a lower bound of the distance from  $A_0$  to the set  $Q$  and third, if the longest distance from  $A_0$  to any corner of the interval matrix is less than the distance from  $A_0$  to  $Q$  then the stability of the interval matrix is assured. The paper has been organized as follows: In section II, preliminaries are given; the main results are shown in section III; numerical examples are given in section IV and finally we give conclusions and some comments in section V.

## II Preliminaries

We will show preliminary results that supports the main result in the next section.

**Definition 2.1** Suppose  $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$  is stable, then the nearest distance, denoted by  $\beta(A)$ , to the set  $Q$  [4], [5] and [6] is defined by

$$\beta(A) = \min \{ \|E\| \mid A + E \in Q \} \quad (2)$$

which represents the nearest distance of  $A$  to the set  $Q$ . An easy compactness argument allows us to define in (2) the minimum instead of the infimum. Although the definition (2) is for any matrix norm, we are going to use the 2-norm.

A lower bound [6] of  $\beta(A)$  using composite matrices have been established in [6, section 8] as:

$$\beta(A) \geq \min \{ \sigma_{\min}(A), \frac{1}{2} \sigma_{\min}(A \bar{\otimes} A) \} \triangleq \bar{\beta}(A) \quad (3)$$

**Fact 2.2** [9], [10] Let  $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$  and  $B \in \mathbf{R}^{m \times n}$ . If  $|A| \leq B$ , i.e.  $|a_{ij}| \leq b_{ij}, \forall i, j = 1, \dots, n$  then  $\rho(A) \leq \rho(B)$ .

**Lemma 2.3** Let  $A, B \in \mathbf{R}^{m \times n}$  and let  $|A|$  be a matrix with entries  $|a_{ij}|, \forall i, j = 1, \dots, n$ , then  $|AB| \leq |A||B|$

*Proof:* The entries of  $|AB|$  can be expressed as:

$$|AB|_{ij} = \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_{ik} b_{kj}| = \sum_{k=1}^n |a_{ik}| |b_{kj}|$$

$$\leq (|A||B|)_{ij}$$

then the lemma results ■

The following lemma is going to be useful to prove that the longest distance from  $A_0$  to any corner is precisely to  $L$  or  $U$ . Now is formulated.

**Lemma 2.4** Let  $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$  and  $|A| \in \mathbf{R}^{m \times n}$ , where the entries of  $|A|$  are  $|a_{ij}| \forall i, j = 1, \dots, n$  then

$$\sigma_{\max}(A) \leq \sigma_{\max}(|A|)$$

*Proof:* The maximum singular value of  $A$  can be stated as:

$$\sigma_{\max}^2(A) = \lambda_{\max}(A^*A) = \rho(A^*A)$$

and

$$\sigma_{\max}^2(|A|) = \lambda_{\max}(|A|^*|A|) = \rho(|A|^*|A|)$$

using the fact 2.2 together with lemma 2.3, it follows that

$$\rho(A^*A) \leq \rho(|A|^*|A|)$$

$$\downarrow$$

$$\sigma_{\max}(A) \leq \sigma_{\max}(|A|) \quad \blacksquare$$

## III Main Results

In this section we will show two important results. The first one is related with the longest distance from the centroid matrix  $A_0$

<sup>1</sup> The Work of this author was partially supported by Instituto Tecnológico de Nuevo Laredo and CONACYT, México.

to one of the  $2^d$  corners. Although  $A_0$  is certainly a centroid matrix, the distance in 2-norm is not the same to every corner of the interval matrix, this will be detailed in the theorem 3.1. As the distance from any matrix to the set of unstable matrices is expressed in singular values (definition 2.1), the measure we have to use to establish the longest distance from the centroid matrix to any of the corners is precisely the 2-norm. This is to be in accord with the same metric. The second one is the result which gives the sufficient condition to assure stability of the interval matrix  $[L,U]$ . Now we state them.

**Theorem 3.1** Let the interval matrix  $[L,U]$ , where  $L$  and  $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $A_0 = (U+L)/2$  be the centroid matrix and  $A_k$  be any corner of  $[L,U]$ , then  $\|A_0 - A_k\|_2 \leq \|A_0 - L\|_2 = \|A_0 - U\|_2 \quad \forall k = 1, \dots, 2^d$ .

*Proof:* The matrices  $L$  and  $U$  belong to the set of the  $2^d$  corner matrices of  $[L,U]$  then the distance from  $A_0$  to  $L$  or  $U$ , which is the same, can be expressed as:

$$\|\frac{1}{2}(U+L) - L\|_2 = \|\frac{1}{2}(U - L)\|_2 \text{ and}$$

$$\|\frac{1}{2}(U+L) - U\|_2 = \|\frac{1}{2}(L - U)\|_2$$

since  $U \geq L$  and recalling that  $\| -X \| = \| X \|$  both distances are the same. Any other  $A_k$ ,  $k=1, \dots, 2^d$  generated, is such that  $\|A_0 - A_k\|_2 \leq \frac{1}{2}\|U-L\|_2$  componentwise and using the result of lemma 2.4 the theorem follows. ■

**Remark 3.2** In other norms like  $\| \cdot \|_1$  or  $\| \cdot \|_\infty$ , the distances to the centroid matrix from any corner become equal.

**Theorem 3.3** Let the interval matrix  $[L,U]$ , where  $L$  and  $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , let  $A_0 = (U+L)/2$  be the centroid matrix and  $A_d = \frac{1}{2}(U-L)$ , let  $d(A_0 - L) = \|A_d\|_2 = \|\frac{1}{2}(U-L)\|_2$  be the maximum distance from  $A_0$  to any corner of  $[L,U]$  and let  $\beta(A_0)$  be a lower bound of the distance of  $A_0$  to the set  $Q$  defined in (4), then if  $\sigma_{\max}(A_d) < \beta(A_0)$  the interval matrix family  $[L,U]$  is stable.

*Proof:* Assume that  $\sigma_{\max}(A_d) < \beta(A_0)$ , then according to the definition 2.1, it means that if  $\sigma_{\max}(A_d) < \beta(A_0) \leq \beta(A_0) - \exists E \in \mathbb{R}^{m \times m} : A_0 + E \in Q \quad \forall E \in [L,U]$  ■

**Remark 3.4** In order to know if the interval matrix  $[L,U]$  is stable, only two numbers need to be calculated,  $\sigma_{\max}(A_d)$  and  $\beta(A_0)$ .

#### IV Numerical Examples

In this section we will show two numerical examples, to illustrate the result.

**Example 1.** Let the interval matrix  $[L,U]$  be defined by

$$L = \begin{bmatrix} -0.7288 & -0.4313 & -0.2675 \\ 0.2265 & -0.5500 & -0.0602 \\ 0.0397 & 0.1190 & -0.6594 \end{bmatrix} \text{ and } U = \begin{bmatrix} -0.2498 & -0.0137 & -0.2592 \\ 0.7336 & -0.4721 & 0.1605 \\ 0.0589 & 0.2652 & -0.3560 \end{bmatrix}$$

for this case the centroid matrix and the  $A_d$  matrix are

$$A_0 = \begin{bmatrix} -0.5118 & -0.2225 & -0.2633 \\ 0.4800 & -0.5111 & 0.0502 \\ 0.0493 & 0.1921 & -0.5077 \end{bmatrix} \text{ and } A_d = \begin{bmatrix} 0.2170 & 0.2088 & 0.0041 \\ 0.2535 & 0.0390 & 0.1103 \\ 0.0096 & 0.0731 & 0.1517 \end{bmatrix}$$

calculating the lower bound  $\beta(A_0)$ , given by (4), and  $\sigma_{\max}(A_d) = \|\frac{1}{2}(U-L)\|_2$ , we have that  $\beta(A_0) = 0.4007$  and  $\sigma_{\max}(A_d) = 0.3931$ . Using the result of theorem 3.3, as  $\sigma_{\max}(A_d) < \beta(A_0)$  then the interval matrix  $[L,U]$  is stable. In the figure 1, are shown the eigenvalues of 5000 random matrices which belong to the interval matrix  $[L,U]$ .

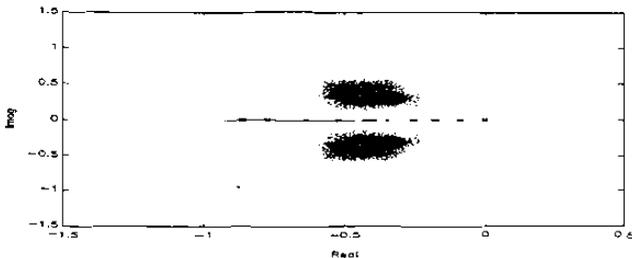


Figure 1. Eigenvalues of random matrices  $A_i \in [L,U]$  in (.) and the eigenvalues of the matrices generated as in [11], in (x).

**Example 2.** Let the interval matrix  $[L,U]$  be defined by

$$L = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -7 & -1 & -5 \\ 4 & 9 & -1 \end{bmatrix} \text{ and } U = \begin{bmatrix} -0.7 & 2.3 & -0.7 \\ -6.7 & -0.7 & -4.6 \\ 4.3 & 9.5 & -0.7 \end{bmatrix}$$

Calculating the matrices  $A_0$  and  $A_d$

$$A_0 = \begin{bmatrix} -0.85 & 2.15 & -0.85 \\ -6.85 & -0.85 & -4.80 \\ 4.15 & 9.25 & -0.85 \end{bmatrix} \text{ and } A_d = \begin{bmatrix} 0.15 & 0.15 & 0.15 \\ 0.15 & 0.15 & 0.20 \\ 0.15 & 0.25 & 0.15 \end{bmatrix}$$

the calculated distances are;  $\beta(A_0) = 0.5146$  and  $\sigma_{\max}(A_d) = 0.5037$ . Clearly  $\sigma_{\max}(A_d) < \beta(A_0)$  so  $[L,U]$  is stable. In the following figure the eigenvalues of 5000 random matrices  $A_i \in [L,U]$  are shown.

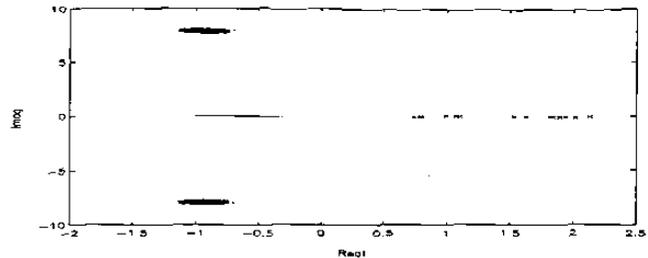


Figure 2. Eigenvalues of random matrices  $A_i \in [L,U]$  in (.) and eigenvalues of the matrices generated as in [11], in (x).

#### V Conclusions and comments

In this work stability conditions, using the concept of the distance of one matrix to the set of the unstable matrices, have been shown for the case when the parametric uncertainty of a linear time invariant system is represented for a particular class of polytope of matrices, i.e. interval matrix. It is worth to mention that the theorem we present is simpler and faster than some others in the literature, see for example the results of [1] or [12]. As a way of example, if we use the result by Mansour in [11] the theorem does not say anything about stability for the case of the examples. In these particular examples, we can say that our result is less conservative than the result by Mansour [11] or Wang [12], but it was not proved that it is less conservative in general. We think that using this concept of distance, the results presented can be improved.

#### VI References

- [1] Mansour, M., "Robust Stability of Interval Matrices" *Proc. IEEE Conf. Decision Contr.*, 1989.
- [2] Heinen, James A., "Sufficient Conditions for Stability of Interval Matrices" *Int. Journal Control*, Vol. 39, No. 6, pp. 1323-1328, 1984.
- [3] Yedavalli R. K., "Stability analysis of Interval Matrices: Another Sufficient Condition", *Int. Journal Control*, Vol. 43, No. 3, pp. 767-772, 1986.
- [4] Van Loan Ch., "How Near is a Stable Matrix to an Unstable Matrix?", *Contemporary Mathematics*, Vol. 47, pp. 465-478, 1985.
- [5] Byers R., "A Bisection Method For Measuring the Distance of a Stable Matrix to the Unstable Matrices", *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, Vol. 9, No. 5, pp. 875-881, 1988.
- [6] Qiu L. and Davison E.J., "The Stability Robustness Determination of State Space Models with Real Unstructured Perturbations", *Math. Control Signals Systems*, Vol. 4, pp. 247-267, 1991.
- [7] Golub, G.H. and Van Loan, C., *Matrix Computations*, The Johns Hopkins Press, Baltimore, MD., 1983.
- [8] Horn, Roger A. and Johnson Charles R. *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1991.
- [9] Lancaster P. and Tismenetsky M. *The theory of Matrices*, Academic Press, Inc., 1985
- [10] Housholder Alston S. *The Theory of Matrices in Numerical Analysis*, Dover Publications, 1964
- [11] Mansour, M. "Simplified sufficient conditions for the asymptotic stability of interval matrices", *Internal Journal Control*, Vol. 50, No. 1, pp. 443-444, 1989.
- [12] Wang K. and Michel N. "On sufficient conditions for the stability of interval matrices", *Systems & Control Letters*, Vol 20, pp. 345-351, 1993.

Artículo por publicarse en mayo de 1994.

**Título:** A Simple Test to Determine the Stability of an Interval Matrix.

**Referencia:** [42]

**Memoria:** Artículo aceptado para su publicación en el *Proceeding of the 1994 American Control Conference*. Baltimore, MD. U.S.A.

**Resultado:** En base a un análisis de los valores propios de las partes hermíticas de las matrices vértice de una matriz intervalo, se obtuvo una cota superior que garantiza condiciones suficientes de estabilidad de una matriz intervalo. La prueba resulta ser muy simple.

# A SIMPLE TEST TO DETERMINE THE STABILITY OF AN INTERVAL MATRIX

J.J.D. Delgado-Romero<sup>1</sup>, J.A. Rojas-Estrada<sup>2</sup> and J. M. Collado  
 Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica  
 Universidad Autónoma de Nuevo León  
 Apartado Postal 65-F  
 66451 San Nicolás de los Garza, N.L.  
 Phone (8) 352-48-34  
 FAX (8) 352-87-48  
 MEXICO

## Abstract

In this paper we describe a sufficient condition by means of a simpler test that guarantees stability of a linear time-invariant system with parametric uncertainty in the "A" matrix. The parametric uncertainty is represented by an interval matrix. The proposed test is simpler than the existing ones. It is based on the eigenvalues of the hermitian part of L and P = (U - L), an upper bound  $\xi$ , is derived from their maximum eigenvalues. The result presented is for the general case of an interval matrix. Simple examples are shown to illustrate its practical application.

## Notation

$\mathbf{R}^{n \times n}$	$n \times n$ real matrices
$\mathbf{C}^{n \times n}$	$n \times n$ complex matrices
$\mathbf{I}$	Identity $n \times n$ matrix
$\lambda_i(A)$	$i$ th eigenvalue of A
$\sigma(A)$	Spectrum of $A = \{ \lambda_i \in \mathbf{C} :  \lambda I - A  = 0 \}$
$\lambda_{\max}(A)$	$\max\{ \text{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(A) \}$
$\mathbf{M} = [L, U]$	Interval matrix family where $l_{ij} \leq m_{ij} \leq u_{ij}$
$\mathbf{P} = [U - L]$	Difference matrix $P = [p_{ij}] \geq 0 : p_{ij} = (u_{ij} - l_{ij}), i, j = 1, \dots, n$
$A < B$	B is greater than A componentwise i.e. $a_{ij} < b_{ij} \forall i, j = 1, \dots, n$
$A \geq 0$	i.e. $a_{ij} \geq 0 \forall i, j = 1, \dots, n$
$H(A)$	Hermitian part of A [1]
$F(A)$	$\{ z \in \mathbf{C} : z = x^* A x, x^* x = 1 \} =$ field of values of A. [1].
$ x $	Absolute value of x

## I Introduction

Consider the linear time-invariant system described by the equations

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

where A, B and C are real matrices of dimensions  $n \times n$ ,  $n \times m$  and  $p \times n$  respectively. It is known that stability of the system depends only on the A matrix. When there is parametric uncertainty, A could be represented by a set of interval matrix, a special case of a polytope of matrices, i.e.  $A \in [L, U]$ .

In this paper we propose a new very simple test for the

<sup>1</sup> The work of this author was partially supported by Instituto Tecnológico de Morelia and by CONACyT, MEXICO.

<sup>2</sup> The work of this author was partially supported by Instituto Tecnológico de Nuevo Laredo and by CONACyT, MEXICO.

stability of an interval matrix. The proposed check is only sufficient, but compared with existing ones [2] [3] [8] is very simple. In [4] the test consists in checking the hermitian part of  $2^{(n-1)/2}$  corners to guarantee stability of the interval matrix. Another recent result [5] the proof is reduced to check  $2^{2n-1}$ , but is applicable to a very restricted class of interval matrices. Very recently Wang and Michel [8] strengthened the result of [4] to test only  $2^{n-1}$  corners.

In the present work, we only calculate the largest eigenvalue of the hermitian part of two matrices, L and P, (see notation), if the sum of this two eigenvalues is negative then the interval matrix is stable. This simplicity is paid with a more conservative result than [4] or [8].

The paper is organized as follows: In section II, we present some preliminary results, the main results are given in section III, Numerical examples are shown in section IV, conclusions and future work is presented in section V.

## II Preliminaries

In this section we will show some basic results that support the main results in the next section.

**Lemma 2.1.** Let  $A, B \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , then  $\lambda_{\max}(H(A) + H(B)) \leq \lambda_{\max}H(A) + \lambda_{\max}H(B)$

**Proof:** Since the field of values [1], of a hermitian matrix is the convex combination of its eigenvalues, we can use this concept to prove this lemma. Using the fact [1] that  $\max(F(H(A))) = \lambda_{\max}H(A)$  and the property of subadditivity where the set sum is the sums of all possible pairs, one from each, we have

$$\begin{aligned} F(A+B) &\subset F(A)+F(B) \\ F(H(A)+H(B)) &\subset F(H(A))+F(H(B)) \\ \max(F(H(A)+H(B))) &\leq \max(F(H(A))) \\ &\quad + \max(F(H(B))) \\ \lambda_{\max}(H(A)+H(B)) &\leq \lambda_{\max}H(A) + \lambda_{\max}H(B) \end{aligned}$$

**Fact 2.2.** Let the interval matrix  $\mathbf{M} = [L, U]$  and  $U = L + P$ , then  $H(U) = H(L) + H(P)$

**Fact 2.3** [6],[7] Let  $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ , and  $B \in \mathbf{R}^{n \times n}$ . If  $|A| \leq B$ , then  $\rho(A) \leq \rho(|A|) \leq \rho(B)$ .

**Fact 2.4** [7] (Perron's theorem) If  $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$  and  $A > 0$ , then  $\rho(A)$  is an eigenvalue of A, indeed  $\rho(A) = \lambda_{\max}(A)$ .

## III Main result

**Fact 3.1.** Let the interval matrix  $\mathbf{M} = [L, U]$  where L and U  $\in$

$\mathbb{R}^{m \times m}$  and  $P = (U-L)$ , the set of the corner matrices can be expressed as:

$$M_k = L + P_k \quad \forall k=1,2,\dots,2^{mn} \quad \text{where } P_k(i,j)=0 \text{ or } P_k(i,j) = p_{ij}$$

**Theorem 3.2** Let the interval matrix  $M = [L,U]$  where  $L$  and  $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$  and  $P = (U-L)$ , the interval matrix  $[L,U]$  is stable if  $\xi = \lambda_{\max}(H(L)) + \lambda_{\max}(H(P)) < 0$ .

**Proof:** Using the fact 2.2 and by the fact 3.1 the hermitian part of the  $2^{mn}$  corners is as follows

$$H(M_k) = H(L) + H(P_k) \quad \forall k = 1,2,\dots,2^{mn}$$

$$\lambda_{\max}(H(M_k)) = \lambda_{\max}(H(L) + H(P_k))$$

by the lemma 2.1

$$\lambda_{\max}(H(M_k)) \leq \lambda_{\max}(H(L)) + \lambda_{\max}(H(P_k))$$

It can be seen in the above expression that since  $H(P_k) \geq 0$ , then by the fact 2.3,

$$\rho(H(P_k)) = \lambda_{\max}(H(P_k)) \text{ so}$$

$$\lambda_{\max}(H(M_k)) \leq \lambda_{\max}(H(L)) + \rho(H(P_k))$$

now by the fact 2.3,  $\rho(H(P_k)) \leq \rho(H(P))$

then

$$\lambda_{\max}(H(M_k)) \leq \lambda_{\max}(H(L)) + \rho(H(P))$$

using  $\lambda_{\max}$  instead of  $\rho$ , we have finally

$$\lambda_{\max}(H(M_k)) \leq \lambda_{\max}(H(L)) + \lambda_{\max}(H(P)) = \xi \quad \forall k = 1,2,\dots,2^{mn}$$

**Remark 3.4** The proposed test just checks the eigenvalues of the hermitian parts of two matrices, they are  $L$  and  $P$ , it means that the procedure of checking the  $2^{mn}$  corner matrices is drastically reduced. The cost of this reduction is that this test is more conservative than test all the vertex matrices.

#### IV Numerical examples

In this section we present two examples to illustrate how simple is the test. In both cases it will be shown in the figures, the eigenvalues of the hermitian part of the  $2^{mn}$  corners of  $[L,U]$ , the eigenvalues of the matrices generated by Mansour in [4, theorem 20] and the upper bound  $\xi$

##### Example 1

Let  $M = [L,U]$  where  $U, L$  and  $P$  are given by

$$U = \begin{bmatrix} -8.8 & -3.5 & -2.3 \\ -3.1 & -8.7 & -2.7 \\ -2.7 & -2.8 & -8.9 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} -9.0 & -3.9 & -3.2 \\ -3.1 & -9.3 & -3.0 \\ -3.5 & -3.6 & -9.2 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.9 \\ 0.0 & 0.6 & 0.3 \\ 0.8 & 0.8 & 0.3 \end{bmatrix}$$

computing the upper bound,  $\xi = -4.155$

##### Example 2

Let  $M = [U,L]$  where  $U, L$  and  $P$  are given by

$$U = \begin{bmatrix} -3.38 & 0.05 & -0.44 \\ -0.71 & -1.77 & -0.27 \\ -1.31 & -0.97 & -1.88 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} -3.39 & -0.65 & -0.63 \\ -1.12 & -2.71 & -0.59 \\ -1.34 & -1.27 & -2.72 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.70 & 0.19 \\ 0.41 & 0.94 & 0.32 \\ 0.03 & 0.30 & 0.84 \end{bmatrix}$$

in this case  $\xi = -0.3852$

In both cases the values of  $\xi$  is  $< 0$ , then according to the theorem 3.3 the interval matrices are stable.

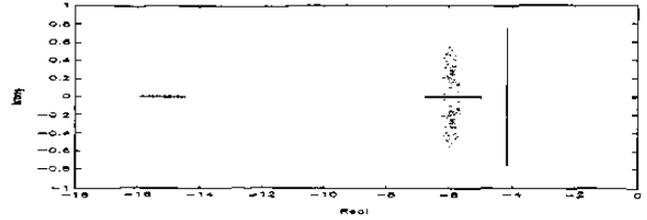


Figure 1. Eigenvalues of: (x) the matrices of Mansour, (.) the matrices of all corners. The upper bound  $\xi$  is expressed by the vertical line.

#### V Conclusions and Future work

In this work sufficient conditions for the stability of a linear time-invariant system, where the uncertainty is expressed by an interval matrix, have been shown. Based on the eigenvalues of the hermitian parts of two matrices, an upper bound  $\xi$  is obtained. As a consequence the application of the test is very simple, avoiding to check up to  $2^{n-1}$  corner matrices, the proposed test gives a more conservative bound for stability than [4] or [8]. This result represents the simplest test among various result with sufficient conditions reported in the literature. We think this result is a suitable choice to determine the stability of a general interval matrix. We believe that making further research by this mean would yield an improved bound.

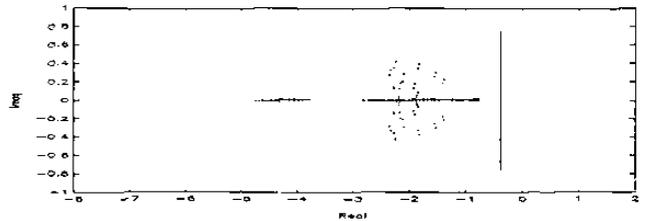


Figure 2. Eigenvalues of:(x) the matrices of Mansour, (.) the matrices of all corners. The upper bound  $\xi$  is expressed by the vertical line.

#### References

- [1] R. A. Horn and C. R. Johnson. *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press, New York (1991).
- [2] Y.T.Juang, C.S. Shao. Stability Analysis of Dynamic Interval Systems. *Int. Journal Control*, Vol 49, No. 4, pp. 1401. 1989.
- [3] J. A. Heinen. Sufficient conditions for stability of Interval Matrices. *Int. Journal Control*, Vol 39, No. 6, pp. 1323-1328. 1984.
- [4] M. Mansour. Robust Stability of Interval Matrices. *Proc. of the 28th IEEE Conf. Decis. and Control*, Vol 1, pp. 46-51. 1989.
- [5] J. Rohn. Stability of interval matrices: The real eigenvalue case. *IEEE Trans on Autom. Contr.* Vol 37, No. 10, pp. 1604-1605. 1992.
- [6] P. Lancaster and M. Tismenetsky. *The Theory of Matrices with Applications. 2nd Ed.* Academic Press, San Diego (1985).
- [7] R. A. Horn and C. R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, New York (1985).
- [8] K. Wang and A. N. Michel: On sufficient conditions for the stability of interval matrices. *System and Control letters* pp. 345-351. 1993.

