

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



MODELACION DE SISTEMAS DE POTENCIA EN  
EL DOMINIO ARMONICO DE HARTLEY

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS DE LA INGENIERIA ELECTRICA  
ESPECIALIDAD EN POTENCIA

PRESENTA

MANUEL MADRIGAL MARTINEZ

MONTERREY, N. L.

DICIEMBRE DE 1995

MODERNIZACION DE SISTEMAS DE POTENCIA EN  
EL DOMINICO ARMONICO DE HARTEY

TM  
Z5853  
.M2  
FIME  
1995  
M3

AN  
995

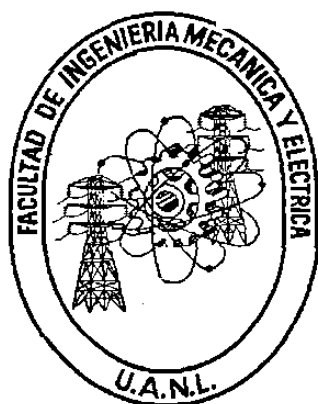


1020112530

**UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON**

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



**MODELACION DE SISTEMAS DE POTENCIA EN EL DOMINIO  
ARMONICO DE HARTLEY**

**TESIS**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS DE LA INGENIERIA ELECTRICA  
CON ESPECIALIDAD EN POTENCIA**

**PRESENTA**

**MANUEL MADRIGAL MARTINEZ**

**MONTERREY, N. L.**

**DICIEMBRE, 1995.**

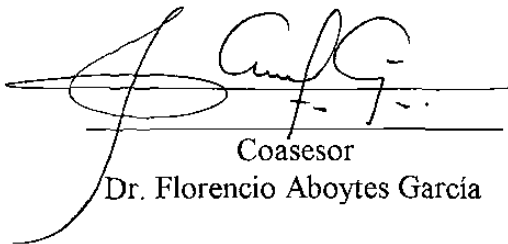
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON  
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis MODELACION DE SISTEMAS DE POTENCIA EN EL DOMINIO ARMONICO DE HARTLEY realizada por el Ing. Manuel Madrigal Martínez sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestro en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica con especialidad en Potencia.

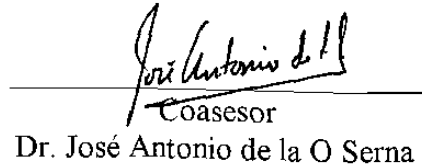
El Comité de Tesis



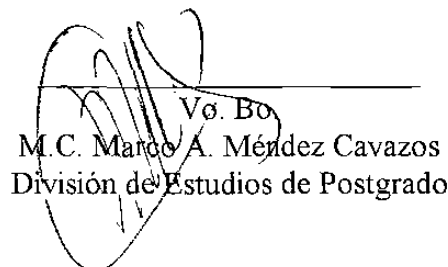
Asesor  
Dr. Salvador Acha Daza



Coasesor  
Dr. Florencio Aboytes García



Coasesor  
Dr. José Antonio de la O Serna



Vº. Bº  
M.C. Marco A. Méndez Cavazos  
División de Estudios de Postgrado

Monterrey, N.L., Diciembre de 1995



FONDO TESIS

## **DEDICO EL ESFUERZO REALIZADO**

### **A mis padres**

Marcelino Madrigal Pérez y Adelaida Martínez Duarte

### **A mis hermanos**

Susana, Gonzalo, Lourdes, Socorro, Rafael, Teresa, Marcelino y Esteban

### **A mis sobrinos**

Que son la alegría de la casa

**y a todas esas pequeñas cosas...**

*Los aprecio más que a la sal...*

## AGRADECIMIENTOS

A mi asesor Dr. Salvador Acha Daza por apoyarme desde el inicio de mis estudios de maestría.

A los profesores sinodales Dr. Florencio Aboytes García y Dr. José Antonio de la O Serna por sus comentarios y sugerencias de la tesis.

Al Dr. Enrique Acha y Jesús Rico por apreciar el trabajo realizado.

A los maestros y alumnos del Programa Doctoral en Ingeniería Eléctrica.

A mis amigos de siempre     *! No se dice rompido, se dice roto...!*

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT).

*Después de esto, luego a consecuencia de esto...*



*...it deals only in real numbers, which are the only kind of data we have in the world of experiments, and proceeds straight to the answers we need, which are also usually expressed in real terms, without the need to move into the domain of the complex.*

Ronald N. Bracewell

**RESUMEN**

**MODELACION DE SISTEMAS DE POTENCIA EN EL DOMINIO  
ARMONICO DE HARTLEY**

Publicación No. \_\_\_\_\_

Manuel Madrigal Martínez, M. C. en Ing. Eléctrica

Universidad Autónoma de Nuevo León, 1995

Profesor Asesor: Dr. Salvador Acha Daza

La presente tesis muestra los fundamentos y el desarrollo de la modelación y el análisis en estado estable de sistemas eléctricos de potencia ante condiciones desbalanceadas y señales periódicas no-sinusoidales.

La modelación presentada, se realiza en el dominio real armónico utilizando la transformada y series de Hartley. La modelación se hace en dos grupos, el primero incluye la parte lineal de los elementos y el segundo la parte no-lineal. La parte no-lineal se representa por un equivalente Norton linealizado.

En el trabajo se propone un modelo trifásico del generador síncrono el cual incluye el efecto de conversión de frecuencias y el efecto de saturación. Para obtener el modelo del transformador, se parte de un modelo monofásico y se deducen los modelos de bancos

trifásicos para estudios armónicos. Esta tesis se complementa con dos trabajos de investigación previos [1,2].

El análisis de Hartley es una herramienta nueva aplicada a la modelación de elementos del sistema de potencia, por lo cual se muestra en forma detallada su aplicación para estudios armónicos monofásicos y trifásicos, la cual presenta la característica primordial de usar solamente números reales. El software requerido para la implementación numérica de los modelos se desarrolló en MATLAB en una computadora PC compatible, por las múltiples ventajas que presenta para el desarrollo de este tipo de investigación.

## INDICE

<b>Resumen</b> .....	<b>vi</b>
<b>Indice de figuras</b> .....	<b>xii</b>
<b>Indice de tablas</b> .....	<b>xvi</b>
<b>1. INTRODUCCION</b> .....	<b>1</b>
1.1. Antecedentes del análisis armónico .....	<b>1</b>
1.2. Operación de los sistemas de potencia .....	<b>2</b>
1.3. Conceptos básicos sobre calidad de la energía y ubicación de esta tesis .....	<b>4</b>
1.4. Antecedentes sobre <i>modelación</i> y <i>análisis armónico</i> .....	<b>5</b>
1.5. Uso de la transformada Hartley .....	<b>6</b>
1.6. Introducción al análisis armónico .....	<b>6</b>
1.7. Objetivos de la tesis .....	<b>9</b>
1.8. Aportaciones de la tesis .....	<b>10</b>
1.9. Descripción por capítulos .....	<b>10</b>
<b>2. LA TRANSFORMADA HARTLEY Y SUS PROPIEDADES</b> .....	<b>12</b>
2.1. Introducción .....	<b>12</b>
2.2. La transformada Hartley .....	<b>12</b>
2.3. Simetría entre las transformadas de Hartley y de Fourier .....	<b>13</b>
2.4. Ejemplo numérico .....	<b>16</b>
2.5. Series de Hartley .....	<b>18</b>
2.6. La transformada discreta de Hartley .....	<b>19</b>

## INDICE (Continuación)

2.7. Características de la función $\cos(\cdot)$ .....	20
2.8. Resumen .....	20
<b>3. DEFINICIONES Y CONCEPTOS FUNDAMENTALES .....</b>	<b>21</b>
3.1. Introducción .....	21
3.2. Potencia instantánea .....	22
3.3. Potencia media .....	23
3.4. Valores rms .....	24
3.5. Potencia aparente .....	25
3.6. Factor de potencia .....	26
3.7. Volts-ampere no-activos (volts-ampere reactivos) .....	27
3.8. Resumen .....	29
<b>4. REPRESENTACION DE ELEMENTOS LINEALES Y NO-LINEALES EN EL DOMINIO HARTLEY .....</b>	<b>30</b>
4.1. Introducción .....	30
4.2. Representación de elementos lineales .....	31
4.3. Representación de la matriz de admitancias nodal de Hartley .....	33
4.4. Ejemplo numérico .....	34
4.4.1. Caso monofásico .....	34
4.4.2. Caso trifásico .....	35
4.5. Linealización de elementos no-lineales .....	38
4.6. Corriente de saturación en un elemento inductivo .....	42
4.7. Ejemplo numérico .....	43
4.8. Resumen .....	46

## INDICE (Continuación)

<b>5. REPRESENTACION DEL GENERADOR SINCRONO EN EL</b>	
<b>DOMINIO HARTLEY</b> .....	<b>47</b>
5.1. Introducción .....	47
5.2. Consideraciones preliminares .....	48
5.2.1. Operación del generador síncrono bajo condiciones desbalanceadas .....	49
5.3. Obtención de la matriz de admitancias de Hartley $Y_{dq0_h}$ .....	50
5.4. Obtención de la matriz de admitancias de Hartley $Y_{\alpha\beta\gamma_h}$ .....	52
5.5. Obtención de la matriz de admitancias de Hartley $Y_{abc_h}$ .....	57
5.6. Inclusión de una característica no-lineal .....	60
5.7. Conexión del generador al sistema de potencia .....	62
5.8. Resumen .....	64
<b>6. REPRESENTACION DEL TRANSFORMADOR EN EL DOMINIO HARTLEY</b> ..	<b>65</b>
6.1. Introducción .....	65
6.2. Modelo del transformador monofásico .....	65
6.3. Modelos de bancos trifásicos .....	67
6.4. Resumen .....	71
<b>7. REPRESENTACION DEL SISTEMA ELECTRICO DE POTENCIA EN EL</b>	
<b>DOMINIO HARTLEY</b> .....	<b>72</b>
7.1. Introducción .....	72
7.2. Método de solución .....	73
7.3. Ejemplos numéricos .....	75
7.3.1. Ejemplo 1 .....	75
7.3.2. Ejemplo 2 .....	77

## INDICE (Continuación)

7.3.3. Ejemplo 3 .....	81
7.3.4. Ejemplo 4 .....	84
7.3.5. Ejemplo 5 .....	85
7.3.6. Ejemplo 6 .....	87
7.4. Resumen .....	90
<b>8. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS .....</b>	<b>91</b>
8.1. Conclusiones .....	91
8.1.1. Principales características de la transformada de Hartley .....	91
8.1.2. Principales resultados del análisis de circuitos eléctricos usando análisis de Hartley .....	92
8.1.3. Principales resultados en la modelación para estudios armónicos utilizando análisis de Hartley .....	92
8.2. Aportaciones .....	93
8.3. Trabajos futuros .....	94
<b>REFERENCIAS .....</b>	<b>95</b>
<b>APENDICE A: OBTENCION DE LAS SERIES Y TRANSFORMADA DE HARTLEY A PARTIR DE LAS SERIES TRIGONOMETRICAS DE FOURIER .....</b>	<b>99</b>
<b>APENDICE B: LISTADOS DE LA TRANSFORMADA RAPIDA DE HARTLEY .....</b>	<b>105</b>
<b>APENDICE C: CARACTERISTICA POLINOMIAL DE LA CURVA DE MAGNETIZACION .....</b>	<b>108</b>
<b>APENDICE D: CARACTERISTICA NO-LINEAL DE LA MAGNETIZACION DE ELEMENTOS INDUCTIVOS .....</b>	<b>111</b>
<b>APENDICE E: DATOS DEL GENERADOR Y TRANSFORMADOR .....</b>	<b>117</b>

## INDICE DE FIGURAS

1.1.	a) Circuito alimentado por fuente no-sinusoidal. b) Forma de onda de la fuente. ....	7
1.2.	Forma de onda del voltaje en el capacitor. ....	8
2.1.	Circuito serie. ....	16
2.2.	Representación de la transformada de la función $v(t)$ . a) Transformada Hartley. b) Transformada de Fourier. ....	18
4.1.	Red lineal con una fuente de armónicas. ....	34
4.2.	Forma de la matriz de admitancias nodal de Hartley del sistema monofásico. ....	37
4.3.	Forma de la matriz de admitancias nodal de Hartley del sistema trifásico. ....	37
4.4.	Equivalente Norton en el dominio Hartley. ....	43
5.1.	Representación de los voltajes y corrientes en diferentes espacios. ....	49
5.2.	Representación de la máquina síncrona, mostrando los ejes $dq0$ , $\alpha\beta\gamma$ y $abc$ . ....	52
5.3.	Devanados del generador para estudios armónicos. ....	60
5.4.	Forma de la matriz de admitancias Hartley que representa al generador incluyendo el efecto de conversión de frecuencias y el efecto de saturación. ....	61
5.5.	Representación de los devanados del estator del generador. ....	62
5.6.	Generador conectado al sistema de potencia. a) Estrella. b) Delta. ....	62
5.7.	Equivalente de generador síncrono para estudios armónicos. a) Equivalente Norton. b) Equivalente Thévenin. ....	64
6.1.	Modelo del transformador monofásico para estudios armónicos. ....	66
6.2.	Equivalente del transformador monofásico para estudios armónicos. ....	66
6.3.	Equivalente de la parte lineal. ....	67
6.4.	Equivalente de la parte no-lineal. ....	67



## INDICE DE FIGURAS (Continuación)

6.5.	Conexión de un banco trifásico. ....	67
6.6.	Equivalente del banco de la Figura 6.5. ....	68
6.7.	Forma de la matriz de admitancias Hartley para la conexión delta-estrella aterrizada, incluyendo el efecto de saturación. ....	70
7.1.	Representación de la red eléctrica en parte lineal y parte linealizada. a) Red eléctrica. b) Equivalente. ....	72
7.2.	Diagrama de flujo. ....	74
7.3.	Carga trifásica. ....	75
7.4.	Voltaje en la carga. a) Sin considerar saturación. b) Considerando saturación y pérdidas en el núcleo. ....	76
7.5.	Magnitud de las armónicas de los voltajes. a) Sin considerar saturación, serie Hartley. b) Sin considerar saturación, serie Coseno. c) Considerando saturación y pérdidas en el núcleo, serie Hartley. d) Considerando saturación y pérdidas en el núcleo, serie Coseno. ....	77
7.6.	Generador-carga desbalanceada. ....	77
7.7.	Voltajes y corrientes de las fases. a) Fase a. b) Fase b. c) Fase c. ....	78
7.8.	Magnitud de las armónicas. a) Voltajes. b) Corrientes. ....	78
7.9.	Voltajes y corrientes de las fases. a) Fase a. b) Fase b. c) Fase c. ....	79
7.10.	Magnitud de las armónicas. a) Voltajes. b) Corrientes. ....	79
7.11.	Voltajes y corrientes de las fases. a) Fase a. b) Fase b. c) Fase c. ....	80
7.12.	Magnitud de las armónicas. a) Voltajes. b) Corrientes. ....	80
7.13.	Generador-transformador-carga. ....	81
7.14.	Voltajes. a) Lado delta del transformador. b) Lado estrella del transformador. ....	82
7.15.	Magnitud de las armónicas del voltaje. a) Lado delta del transformador. b) Lado estrella del transformador. ....	82

## INDICE DE FIGURAS (Continuación)

7.16.	Voltajes. a) Lado delta del transformador. b) Lado estrella del transformador. ....	83
7.17.	Magnitud de las armónicas del voltaje. a) Lado delta del transformador. b) Lado estrella del transformador. ....	83
7.18.	Voltajes del lado de alta del transformador. a) Hasta la séptima armónica. b) Hasta la quinceava armónica. ....	84
7.19.	Magnitud de las armónicas del voltaje del lado de alta del transformador. a) Hasta la séptima armónica. b) Hasta la quinceava armónica. ....	84
7.20.	Fuente de armónicas-transformador-carga. ....	85
7.21.	Formas de onda. a) Fuente de corriente. b) Voltaje en la delta del transformador. c) Voltaje en la estrella del transformador. ....	85
7.22.	Magnitud de las armónicas del voltaje. a)Lado delta. b)Lado estrella. ....	86
7.23.	Formas de onda de voltaje. a) Delta del transformador. b) Estrella del transformador. ....	86
7.24.	Magnitud de las armónicas del voltaje. a)Lado delta. b) Lado estrella. ....	86
7.25.	Voltajes y corrientes de las fases. a) Fase a. b) Fase b. c) Fase c. ....	87
7.26.	Magnitud de las armónicas. a) Voltajes. b) Corrientes. ....	88
7.27.	Voltajes considerando hasta la séptima armónica. a) Formas de onda. b) Magnitud de las armónicas. ....	88
7.28.	Voltajes considerando hasta la quinceava armónica. a) Formas de onda. b) Magnitud de las armónicas. ....	89
7.29.	Voltajes considerando hasta la trigésima primera armónica. a) Formas de onda. b) Magnitud de las armónicas. ....	89
C.1.	Característica experimental de un transformador trifásico moderno. ....	110
C.2.	Característica experimental y característica de ajuste polinomial. ....	110

## INDICE DE TABLAS

1.1.	Valores para cada armónica. ....	8
2.1.	Propiedades de la transformada de Fourier y de la transformada Hartley. ....	15
2.2.	Simplificación de la convolución en la transformada Hartley. ....	15
2.3.	Simplificación de los coeficientes de las series Hartley. ....	19
2.4.	Propiedades de la función $\text{cas}(\cdot)$ . ....	20

# CAPITULO 1

## INTRODUCCION

### 1.1. ANTECEDENTES DEL ANALISIS ARMONICO

El término “armónica” tiene sus orígenes en la acústica, donde una armónica es el sonido que se obtiene apoyando el dedo en una cuerda que vibra, o dicho de otra manera es la frecuencia que se obtiene como múltiplo de la frecuencia original con que la cuerda vibra (frecuencia fundamental). El término armónica tiene su significado muy similar en las matemáticas, donde en 1822 el matemático francés Jean-Baptiste-Joseph Fourier (1768-1830) en su trabajo *Théorie analytique de la chaleur* mostró que una función periódica de período T puede ser expresada en series trigonométricas como

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sen(n\omega_0 t))$$

donde  $\omega_0$  es la frecuencia fundamental  $\omega_0 = 2\pi/T_0$  y los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  son números reales asociados a  $f(t)$ , a cada término

$$a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sen(n\omega_0 t)$$

se le denominó “armónica n” de la función  $f(t)$ . Las armónicas comúnmente se le asocian a una magnitud  $c_n$  y a un ángulo  $\phi_n$  como

$$c_n \cos(n\omega_0 t - \phi_n)$$

donde  $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  y  $\phi_n = \text{tg}^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$

así, el análisis armónico se puede interpretar como el proceso de calcular las magnitudes y ángulos de la frecuencia fundamental y de orden superior de funciones periódicas que se llevan

a cabo en el dominio armónico, aunque estrictamente sería calcular las magnitudes  $a_n$  y  $b_n$  de las funciones armónicas de una función periódica.

El análisis armónico se asocia con el análisis de Fourier (análisis en el dominio de la frecuencia usando series complejas) el cual se lleva a cabo usando solamente los coeficientes de las armónicas y no interviene el tiempo. El análisis armónico empezó a tener importancia en los sistemas de eléctricos de potencia en Alemania, en los años 1920's y 1930's cuando debido a convertidores estáticos las formas de onda de voltaje presentaban distorsión por componentes armónicas, y a partir de entonces se ha hecho un intenso trabajo en lo referente al análisis armónico en los sistemas eléctricos de potencia.

## 1.2. OPERACION DE LOS SISTEMAS DE POTENCIA

Los sistemas eléctricos de potencia normalmente (ideales) se consideran balanceados y operando bajo señales sinusoidales (solamente frecuencia fundamental, 60 Hz.) y en estado estable. Pero la realidad es otra, dado que los sistemas de potencia operan bajo condiciones de operación desbalanceadas y ante señales no-sinusoidales (contenido de armónicas) además de estar sujetos a constantes cambios de operación. Con la presencia de señales no-sinusoidales en los sistemas de potencia se requiere que el sistema sea modelado en el dominio armónico.

El modelar los sistemas eléctricos bajo estas condiciones de operación, hace necesario considerar las siguientes características:

- La operación bajo condiciones desbalanceadas es debida a líneas de transmisión no transpuestas, cargas desbalanceadas, bancos de transformadores formados por unidades monofásicas distintas, etc. Estas condiciones hacen necesario una modelación trifásica del sistema.
- Las señales no-sinusoidales son debidas a elementos que introducen señales armónicas a la red, esto es, señales de corriente y/o voltaje con frecuencias distintas a la frecuencia fundamental del sistema, como son: convertidores de CD/CA, compensadores estáticos de

VARs (CEV's) que utilizan reactores controlados por tiristores (RCT's) y/o switcheo de capacitores por tiristores (CST's), hornos eléctricos, lámparas fluorescentes, otros elementos no-lineales (saturación del núcleo de elementos inductivos) y demás dispositivos de estado sólido, etc. Otra fuente de armónicas es el generador síncrono, el cual al alimentar cargas desbalanceadas presenta un efecto de conversión de frecuencias que provoca la inyección de corrientes armónicas en la red.

- El cambio constante de los sistemas de potencia se debe a aperturas de líneas, switcheo de capacitores, cambios de carga, cambios de generación, etc. Sin embargo se puede considerar que el sistema de potencia, en un determinado intervalo de tiempo, no presenta cambios significativos, considerándose entonces que opera en estado estable.

Encontrar la respuesta total (transitoria y estado estable) de los sistemas de potencia resulta muy complicado, dado que los sistemas de potencia son extremadamente no-lineales además de ser de gran dimensión, por lo que en la actualidad no existe método para resolver el problema en forma completa<sup>♦</sup>. De aquí la necesidad de dividir los problemas en estado transitorio y estado estable. En lo que respecta al análisis armónico, este cae dentro del análisis en estado estable para lo cual existen técnicas eficientes de solución como el análisis fasorial, que en forma más general es el análisis de Fourier. Así, la modelación de los elementos del sistema de potencia en estado estable se debe desarrollar en forma trifásica y en el dominio armónico para que sea una modelación más precisa y además elegante.

Estas técnicas de modelación y análisis en el dominio armónico vienen acompañadas con nuevos conceptos de potencia activa, potencia reactiva, factor de potencia, etc. dado que el sistema opera bajo condiciones de operación diferentes a los sistemas ideales. Algunos trabajos importantes referentes a conceptos nuevos para sistemas que operan bajo condiciones desbalanceadas y no-sinusoidales se reportaron en (1993-1994) [3,4,5,6,7] y una referencia significativa es [8].

---

<sup>♦</sup> M. Pavella, P. G. Murthy, *Transient Stability of Power Systems*, John Wiley & Sons, 1994.

### 1.3. CONCEPTOS BASICOS SOBRE CALIDAD DE LA ENERGIA Y UBICACION DE ESTA TESIS

Varias áreas de investigación se han desarrollado recientemente debido a las nuevas condiciones de operación de los sistemas eléctricos ante señales no-sinusoidales, estas áreas caen dentro del concepto de calidad de la energía eléctrica\* [9,10,12,23] la cual contempla las siguientes clasificaciones:

- Modelación y análisis: Obtención de modelos de los elementos de sistema usando el dominio armónico, métodos estocásticos, etc. análisis en el tiempo, o usando transformadas como Laplace, Fourier, Walsh y Hartley, técnicas de estimación, redes neuronales, etc.
- Instrumentación: Mediciones. analizadores de ondas, etc.
- Fuentes: Convertidores, rectificadores, FACT's, hornos eléctricos, lámparas fluorescentes, y demás elementos no-lineales.
- Solución: Filtros pasivos y activos, etc.
- Conceptos: Definiciones y estándares.
- Efectos: Sobrecarga de banco de capacitores, interferencia con el sistema carrier (5 a 50 kHz.) utilizado como canal de comunicación en las líneas de transmisión, pérdidas adicionales y sobrecalentamiento de máquinas síncronas y de inducción así como disminución de la velocidad y pares parásitos, sobrevoltajes y sobrecorrientes debido a efectos de resonancia (capacitores y líneas de transmisión) en el sistema, problemas en dieléctricos y aislantes de cables, interferencia inductiva con los sistemas de telecomunicaciones, error en medidores tipo inducción, problemas en los controles de excitación de unidades generadoras, operación incorrecta de dispositivos de protección, etc.

De lo anterior se establece la importancia del estudio de los sistemas de potencia ante señales no-sinusoidales. Este trabajo de tesis cae dentro de la modelación y el análisis de los sistemas eléctricos de potencia.

---

\* Calidad de la energía eléctrica significa *diferentes cosas para diferentes personas* [23].

#### 1.4. ANTECEDENTES SOBRE MODELACION Y ANALISIS ARMONICO

Trabajos referentes a la modelación y el análisis para estudios armónicos (no-sinusoidales) han sido numerosos y de gran importancia. Entre las principales publicaciones están las de Daozhi Xia y G.T. Heydt (1982) [41,42] y posteriormente J. Arrillaga, Bradley y Bodger publicaron en 1985 uno de los principales textos en el área [11]. Otra referencia, donde se describen en detalle los métodos existentes para la solución al problema de armónicas se presenta en [12].

Trabajos más recientes, referentes a la modelación de los sistemas eléctricos, para estudios armónicos fueron presentados por A. Semlyen, E. Acha y J. Arrillaga (1988) [13,14], quienes utilizaron series complejas de Fourier para representar al sistema en el dominio armónico complejo, esta modelación representa a los elementos no-lineales del sistema por un equivalente Norton; una vez que se ha linealizado en el dominio complejo armónico. E. Acha [14] muestra en forma detallada la representación de transformadores para estudios armónicos trifásicos. Otros trabajos referentes a la modelación trifásica para estudios armónicos fueron publicados en (1987) [15], donde se presenta el modelo equivalente del generador síncrono que incluye el efecto de conversión de frecuencias y el efecto de saturación. Posteriormente W. Xu, W. Dommel y J.R. Martí (1991) [16] obtienen un modelo similar al publicado en [15].

Modelos más exactos de los elementos del sistema de potencia en el dominio armónico complejo son reportados por A. Medina y J. Arrillaga (1993) [17,18] además de proporcionar técnicas más eficientes de solución. La modelación basada en el dominio armónico complejo requiere de gran capacidad de memoria computacional, y la aplicación de técnicas de dispersidad es muy importante debido a la gran dimensión de las ecuaciones lineales\* que representan a los sistemas eléctricos.

---

\* Para un sistema trifásico, de  $n$  nodos y considerando hasta la  $h$ -ésima armónica, la matriz de admitancias nodales que representa al sistema tiene dimensión de orden  $3n(2h+1) \times 3n(2h+1)$  y es altamente dispersa.



## 1.5. USO DE LA TRANSFORMADA HARTLEY

En 1942 apareció la transformada Hartley la cual se empezó a aplicar en estudios de señales de radiofrecuencia, y posteriormente, como lo hace evidente la literatura técnica referente a la transformada Hartley [24,26,27,28], se hace posible el tener aplicaciones en otras áreas de investigación. La bibliografía referente a la transformada Hartley entre 1991 y 1993, se puede dividir de acuerdo a las áreas en que se ha aplicado [19]: métodos de cálculo y la transformada rápida de Hartley (24.5%); teoría de la transformada Hartley (21%); ondas y aplicación a tratamiento de imágenes (11.5%); aplicaciones en ingeniería de potencia (10.5%); aplicaciones en biomedicina (9.5%); arquitectura de dos y tres dimensiones (6.5%); teoría de los números (2%); aplicaciones en redes neuronales artificiales (2%). Otras aplicaciones incluyen astronomía y la arquitectura VLSI.

En los años 1990's aparecen los primeros reportes con aplicaciones de la transformada Hartley al análisis de la propagación de armónicas en redes eléctricas monofásicas. Los trabajos presentados por G.T. Heydt, K.J. Olejniczak, R. Sparks y E. Viscito (1991-1994) [19,20,21] muestran la bondad de la transformada Hartley al trabajar solamente con números reales. Posteriormente G. T. Heydt [22,23] muestra que es posible representar los elementos pasivos de un circuito eléctrico por matrices reales, denominadas impedancias Hartley.

## 1.6. INTRODUCCION AL ANALISIS ARMONICO

El estudio armónico en un sistema eléctrico es un problema que se puede resolver mediante la descomposición de las fuentes no-sinusoidales en términos de sus armónicas. Esto hace necesario encontrar la respuesta de la red para cada armónica (siempre y cuando se trate de una red lineal), y obtener la respuesta total aplicando el principio de superposición. Estos principios básicos se muestran en el siguiente ejemplo ilustrativo.

Se desea encontrar la caída de tensión en estado estable del capacitor de 1 F, cuando está alimentado por una fuente no-sinusoidal, cuya forma de onda se muestra en la Figura 1.1.b.

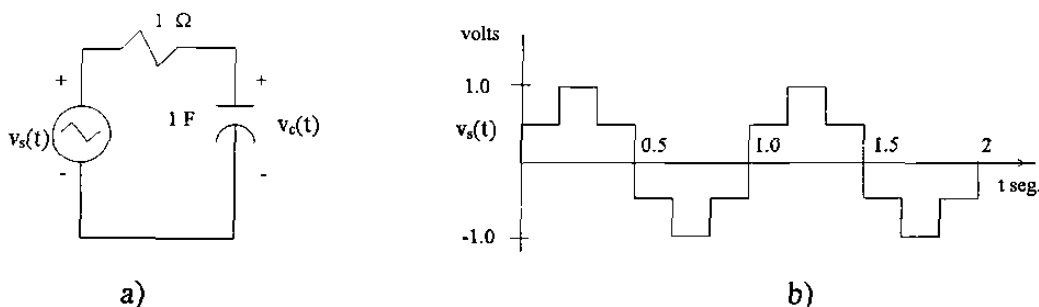


Figura. 1.1. a) Circuito alimentado por fuente no-sinusoidal. b) Forma de onda de la fuente.

La forma de onda de seis pulsos  $v_s(t)$  es representada por la serie de Fourier como:

$$v_s(t) = \text{sen}(\omega_0 t) + \frac{1}{5} \text{sen}(5\omega_0 t) - \frac{1}{7} \text{sen}(7\omega_0 t) - \frac{1}{11} \text{sen}(11\omega_0 t) + \frac{1}{13} \text{sen}(13\omega_0 t) + \dots \quad (1.1)$$

donde  $\omega_0 = 2\pi f_0$  con  $f_0 = 1$  Hz.

Usando análisis fasorial se tiene que la tensión en el capacitor está dada por:

$$V_c(\omega) = H(\omega)V_s(\omega) \quad (1.2)$$

donde  $H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}$

La ecuación (1.2) se puede resolver por superposición al aplicar cada una de las componentes de  $V_s(\omega)$ , obteniéndose la siguiente expresión:

$$V_c(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \{H(n\omega_0)V_s(n\omega_0)\} \quad n = 1, 5, 7, 11, 13, \dots \quad (1.3)$$

al resolver para las armónicas  $n = 1, 5, 7, 11, 13$ , se tiene la Tabla 1.1.

Tabla 1.1. Valores para cada armónica.

n	$H(n\omega_0)$	$V_s(n\omega_0)$	$V_c(n\omega_0)$
1	$0.15718 \angle -80.95^\circ$	$1 \angle 0^\circ$	$0.15718 \angle -80.95^\circ$
5	$0.03181 \angle -88.17^\circ$	$\frac{1}{5} \angle 0^\circ$	$0.00636 \angle -88.17^\circ$
7	$0.02273 \angle -80.7^\circ$	$\frac{1}{7} \angle 180^\circ$	$0.00325 \angle 91.3^\circ$
11	$0.01447 \angle -89.17^\circ$	$\frac{1}{11} \angle 180^\circ$	$0.00132 \angle 90.83^\circ$
13	$0.01224 \angle -89.29^\circ$	$\frac{1}{13} \angle 0^\circ$	$0.00094 \angle -89.29^\circ$

De los resultados obtenidos en forma fasorial se regresa al dominio del tiempo para conocer la forma de la onda de la tensión en el capacitor, la cual resulta ser:

$$v_c(t) = 0.15718 \text{sen}(\omega_0 t - 80.95^\circ) + 0.00639 \text{sen}(5\omega_0 t - 88.17^\circ) + 0.00325 \text{sen}(7\omega_0 t + 91.3^\circ) + 0.00132 \text{sen}(11\omega_0 t + 90.83^\circ) + 0.00094 \text{sen}(13\omega_0 t - 89.29^\circ)$$

la onda de voltaje  $v_c(t)$  del capacitor se presenta en la Figura 1.2, donde se puede apreciar el suavizamiento que existe, respecto a la señal de excitación  $v_s(t)$ .

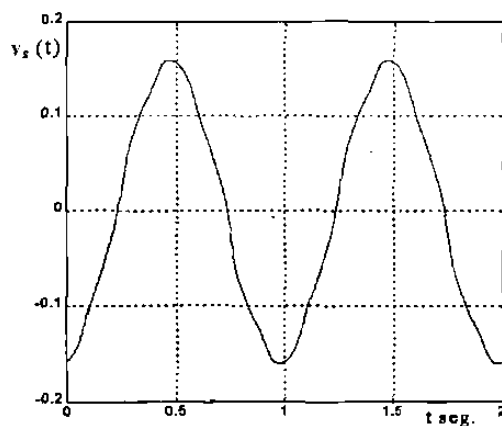


Figura 1.2. Forma de onda del voltaje en el capacitor.

De este ejemplo ilustrativo se puede partir para comprender el principio del análisis armónico. De aquí en adelante toda la notación usada en esta tesis se hará en el dominio Hartley, al menos que se especifique lo contrario.

## 1.7. OBJETIVOS DE LA TESIS

El modelado de los elementos en el dominio armónico complejo y el uso de la transformada Hartley en el análisis de propagación de armónicas dio lugar a la presente investigación, la cual conjunta las técnicas de modelación seguidas por A. Semlyen, J. Arrillaga, E. Acha, J. F. Eggleston y A. Medina y las técnicas de análisis de Hartley inicialmente propuestas en estudios de calidad de energía por G.T. Heydt, K.J. Olejniczak, R. Sparks y E. Viscito. Así el presente trabajo de investigación pretende cumplir con los siguientes objetivos:

- Analizar las características de la transformada Hartley para su aplicación en los sistemas eléctricos de potencia para estudios armónicos.
- Obtener modelos de los elementos lineales y no-lineales usando el dominio de Hartley.
- Tratar el problema de armónicas desde el punto de vista trifásico en el dominio Hartley.
- *Obtener el modelo del generador síncrono en el dominio de Hartley para estudios armónicos incluyendo el efecto de conversión de frecuencias y el efecto de saturación.*
- Obtener el modelo del transformador para estudios trifásicos armónicos considerando el efecto de saturación.
- Mostrar la forma de integrar estos modelos para representar un sistema eléctrico de potencia usando el análisis de Hartley.
- Visualizar posibles aplicaciones futuras de la transformada Hartley en los sistemas eléctricos de potencia.

## 1.8. APORTACIONES DE LA TESIS

Se considera que la tesis aporta una nueva visión para el modelado de los sistemas de potencia en estado estable, y en general para el análisis de circuitos eléctricos en estado estable usando notación con números reales (dominio Hartley) solamente.

En especial:

- Muestra modelos detallados de los elementos lineales y no-lineales en el dominio armónico de Hartley.
- Presenta un modelo del generador síncrono para estudios trifásicos armónicos el cual incluye el efecto de conversión de frecuencias y el efecto de saturación.
- Desarrolla una forma de obtener modelos de bancos de transformadores para estudios armónicos.
- Presenta una forma general de representar al sistema eléctrico de potencia en el dominio real haciendo uso de la transformada y las series Hartley para análisis armónico.
- Se desarrollaron las rutinas para la transformada Rápida de Hartley.

## 1.9. DESCRIPCION POR CAPITULOS

La tesis está organizada en capítulos cuyo contenido se describe a continuación.

**Capítulo 2.** Se describen las características principales de la transformada de Hartley y su semejanza con la transformada de Fourier, así como algunas de sus propiedades principales.

**Capítulo 3.** En este capítulo se presentan los principales conceptos de potencias activa y reactiva y factor de potencia para sistemas excitados por señales no-sinusoidales; haciendo uso de las series de Hartley.

**Capítulo 4.** Se muestra el procedimiento y la forma matricial que presentan los elementos lineales de un circuito eléctrico al ser representados en el dominio de Hartley. Se obtiene un equivalente Norton linealizado en el dominio de Hartley que representa a los elementos no-lineales. En forma particular se obtiene un equivalente Norton para la característica de saturación de un elemento inductivo, así como un procedimiento para incluir las pérdidas en el núcleo.

**Capítulo 5.** En el se obtiene un modelo equivalente del generador síncrono para estudios armónicos trifásicos, el cual incluye el efecto de conversión de frecuencias y el efecto de saturación.

**Capítulo 6.** Desarrolla un equivalente del transformador monofásico para estudios armónicos, así como un procedimiento para la formación de bancos trifásicos; tomando como base el equivalente monofásico.

**Capítulo 7.** Muestra en forma simple el procedimiento para representar a un sistema eléctrico en el dominio de Hartley y así poder realizar estudios armónicos. Se presentan ejemplos ilustrativos a fin de visualizar el proceso de modelación y los elementos que intervienen en el análisis.

**Capítulo 8.** Presenta las principales conclusiones del trabajo, las aportaciones más relevantes de la investigación y posibles trabajos futuros en el análisis de redes eléctricas usando el dominio de Hartley.

## CAPITULO 2

### LA TRANSFORMADA HARTLEY Y SUS PROPIEDADES

#### 2.1. INTRODUCCION

El análisis de Fourier ha sido desde hace un siglo y medio la principal herramienta para los estudios armónicos. Para señales discretas en el tiempo se desarrolló la transformada discreta de Fourier [24] dando lugar, a mediados del presente siglo, a la transformada rápida de Fourier. Una de las principales características de la transformada y de las series de Fourier es la utilización de números complejos.

En 1942 el ingeniero y matemático norteamericano Ralph Vinton Lyon Hartley (1890-1970) [25] propuso una nueva integral denominada transformada Hartley, la cual, a diferencia de la transformada de Fourier, trabaja con números reales. En el presente capítulo se parte de la definición y se revisan sus principales propiedades, aplicables en el análisis de sistemas de potencia.

#### 2.2. LA TRANSFORMADA HARTLEY

R. V. Hartley introdujo el siguiente par de integrales [27]:

$$H(v) = \int_{-\infty}^{\infty} V(t) \text{cas}(vt) dt \quad (2.1)$$

$$V(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(v) \text{cas}(vt) dv \quad (2.2)$$

donde  $\nu = 2\pi f$  es la frecuencia angular en rad/seg. y  $f$  es la frecuencia en Hz. La función  $\text{cas}(\cdot)$  está definida como:

$$\text{cas}(\theta) = \cos(\theta) + \text{sen}(\theta) \quad (2.3)$$

A la ecuación (2.1) se le conoce como la transformada Hartley de  $V(t)$  y a (2.2) como la transformada inversa de Hartley de  $H(\nu)$ . Se debe observar que tanto (2.1) como (2.2) contienen el mismo kernel  $\text{cas}(\cdot)$ .

La única relación directa que existe entre la transformada de Hartley y la transformada de Fourier es que mantienen algunas simetrías, las cuales pueden relacionarse entre sí.

### 2.3. SIMETRÍA ENTRE LAS TRANSFORMADAS DE HARTLEY Y DE FOURIER

La transformada de Fourier se puede representar de la siguiente manera[27]:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} V(t) \cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} V(t) \text{sen}(\omega t) dt \quad (2.4)$$

donde  $V(t)$  se descompone en sus partes par  $V_e(t)$  e impar  $V_o(t)$

$$V(t) = V_e(t) + V_o(t) \quad (2.5)$$

sustituyendo (2.5) en (2.4) se tiene:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} V_e(t) \cos(\omega t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} V_o(t) \cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} V_e(t) \text{sen}(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} V_o(t) \text{sen}(\omega t) dt \quad (2.6)$$



Al integrar una función par, donde el integrando es impar, como  $V_o(t) \cos(\omega t)$  o viceversa, como  $V_e(t) \sin(\omega t)$ , dicha integral resulta ser cero, entonces (2.6) se reduce a:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} V_e(t) \cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} V_o(t) \sin(\omega t) dt = R(\omega) + jX(\omega) \quad (2.7)$$

Al comparar con la transformada Hartley, (2.1) puede representarse como:

$$\begin{aligned} H(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} V(t) \cos(\nu t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} V(t) \sin(\nu t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} V_e(t) \cos(\nu t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} V_o(t) \cos(\nu t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} V_e(t) \sin(\nu t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} V_o(t) \sin(\nu t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} V_e(t) \cos(\nu t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} V_o(t) \sin(\nu t) dt = E(\nu) + O(\nu) \end{aligned} \quad (2.8)$$

De lo anterior se concluye que la transformada de Fourier está formada por la parte par de la transformada de Hartley menos  $j$  (complejo) veces la parte impar, y la transformada Hartley está formada por la parte real de la transformada de Fourier menos la parte imaginaria, esto es:

$$\begin{aligned} H(\nu) &= (R(\omega) - X(\omega)) \Big|_{\omega=\nu} \\ F(\omega) &= (E(\nu) - jO(\nu)) \Big|_{\nu=\omega} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Se puede citar algunas otras propiedades de la transformada de Fourier y la transformada Hartley; como se muestra en la Tabla 2.1.

Tabla 2.1. Propiedades de la transformada de Fourier y de la transformada Hartley.

Teorema	$V(t)$	$F(\omega)$	$H(v)$
Similaridad	$V(t/T)$	$ T F(T\omega)$	$ T H(Tv)$
Adición	$V_1(t)+V_2(t)$	$F_1(\omega) + F_2(\omega)$	$H_1(v) + H_2(v)$
Negativo	$V(-t)$	$F(-\omega)$	$H(-v)$
desplazada	$V(t-T)$	$e^{-j\omega T}F(\omega)$	$\text{sen}(vT)H(-v) + \text{cos}(vT)H(v)$
Modulación	$V(t)\text{Cos}(\omega_0 t)$	$\frac{1}{2}F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}F(\omega + \omega_0)$	$\frac{1}{2}H(v - v_0) + \frac{1}{2}H(v + v_0)$
Convolución	$V_1(t)*V_2(t)$	$F_1(\omega)F_2(\omega)$	$\frac{1}{2}[H_1(v)H_2(v) - H_1(-v)H_2(-v) + H_1(v)H_2(-v) + H_1(-v)H_2(v)]$
Autocorrelación	$V_1(t)*V_2(t)$	$ F(\omega) ^2$	$\frac{1}{2}[H^2(v) + H^2(-v)]$
Producto	$V_1(t)V_2(t)$	$F_1(\omega) * F_2(\omega)$	$\frac{1}{2}[H_1(v) * H_2(v) - H_1(-v) * H_2(-v) + H_1(v) * H_2(-v) + H_1(-v) * H_2(v)]$
Derivada	$V'(t)$	$j\omega F(\omega)$	$-vH(-v)$
2ª derivada	$V''(t)$	$-\omega^2 F(\omega)$	$-v^2 H(v)$

Tabla 2.2. Simplificación de la convolución en la transformada Hartley.

$H_1(v)$	$\mathcal{H}\{f_1(t) * f_2(t)\}$
Par	$H_1(v)H_2(v)$
Impar	$H_1(v)H_2(-v)$
$H_2(v)$	$\mathcal{H}\{f_1(t) * f_2(t)\}$
Par	$H_1(v)H_2(v)$
Impar	$H_1(-v)H_2(v)$

## 2.4. EJEMPLO NUMERICO

Se desea encontrar la corriente que circula por el circuito mostrado en la Figura 2.1, utilizando la transformada de Fourier y la transformada Hartley. Se supone una excitación  $v(t)=10e^{-t}u(t)$ .

Solución:

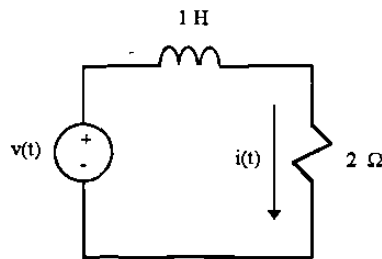


Figura 2.1. Circuito serie.

por LVK se tiene:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = v(t) \quad (2.10)$$

utilizando la transformada de Fourier, (2.10) queda como:

$$j\omega I(\omega) + 2I(\omega) = V(\omega) \quad (2.11)$$

de donde se obtiene una expresión de convolución en la frecuencia para la corriente  $I(\omega)$ :

$$I(\omega) = H(\omega)V(\omega) = \left( \frac{1}{2+j\omega} \right) \left( \frac{10}{1+j\omega} \right) \quad (2.12)$$

y al desarrollar (2.12):

$$I(\omega) = \frac{10}{1 + j\omega} - \frac{10}{2 + j\omega} \quad (2.13)$$

Aplicando la antitransformada se escribe la expresión de la corriente en el tiempo:

$$i(t) = \mathcal{F}^{-1}\{I(\omega)\} = 10e^{-t}u(t) - 10e^{-2t}u(t) \quad (2.14)$$

Como la transformada de Fourier existe, se puede obtener la transformada Hartley, aplicando (2.9):

$$\begin{aligned} H(v) &= \left( \operatorname{Re}\{H(\omega)\} - \operatorname{Im}\{H(\omega)\} \right) \Big|_{\omega=v} = \frac{2+v}{4+v^2} \\ V(v) &= \left( \operatorname{Re}\{V(\omega)\} - \operatorname{Im}\{V(\omega)\} \right) \Big|_{\omega=v} = 10 \frac{1+v}{1+v^2} \end{aligned} \quad (2.15)$$

así, se tiene que la convolución de  $H(v)$  con  $V(v)$  para obtener la corriente en el dominio de Hartley, de acuerdo a la Tabla 2.1:

$$I(v) = \frac{1}{2} [H(v)V(v) - H(-v)V(-v) + H(v)V(-v) + H(-v)V(v)] \quad (2.16)$$

y desarrollando resulta en

$$\begin{aligned} I(v) &= \frac{10}{2} \left\{ \left( \frac{2+v}{4+v^2} \right) \left( \frac{1+v}{1+v^2} \right) - \left( \frac{2-v}{4+v^2} \right) \left( \frac{1-v}{1+v^2} \right) + \left( \frac{2+v}{4+v^2} \right) \left( \frac{1-v}{1+v^2} \right) + \left( \frac{2-v}{4+v^2} \right) \left( \frac{1+v}{1+v^2} \right) \right\} \\ &= 10 \left( \frac{2+3v-v^2}{(4+v^2)(1+v^2)} \right) = 10 \left( \frac{1+v}{1+v^2} \right) - 10 \left( \frac{2+v}{4+v^2} \right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Aplicando la transformada inversa se expresa la respuesta de la corriente en el dominio del tiempo:

$$i(t) = \mathcal{H}^{-1}\{I(v)\} = 10e^{-t}u(t) - 10e^{-2t}u(t) \quad (2.18)$$

Como se puede observar se tiene el mismo resultado si se usa la transformada de Fourier o la transformada de Hartley. En forma gráfica se muestra la transformada de la función  $v(t)$  en la Figura 2.2.

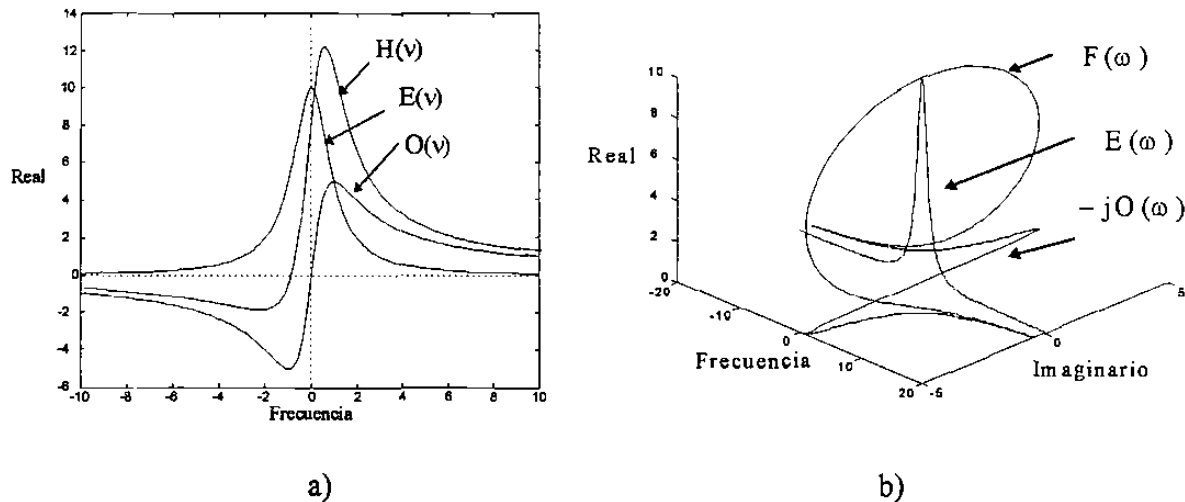


Figura 2.2. Representación de la transformada de la función  $v(t)$ . a) Transformada Hartley. b) Transformada de Fourier.

## 2.5. SERIES DE HARTLEY

Al igual que en las series de Fourier, existen expresiones para las series de Hartley. Toda función periódica  $f(t)=f(t+T)$ , con período  $T$ , continua por tramos e integrable sobre cualquier intervalo, se puede representar por series de Hartley:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n \text{cas}(nvt) \quad \forall n \quad (2.16)$$

donde  $v = 2\pi/T$  rad/seg., y los coeficientes  $S_n$ , están dados por:

$$S_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \text{cas}(nvt) dt \quad \forall n \quad (2.17)$$

La Tabla 2.3. presenta algunas simplificaciones para los coeficientes de las series Hartley.

Tabla 2.3. Simplificación de los coeficientes de las series Hartley.

Simetría	Coefficientes de Hartley
Par $f(t)=f(-t)$	$S_n = S_{-n}$
Impar $f(t)=-f(-t)$	$S_n = -S_{-n}$
Media onda impar $f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right)$	$S_n = 0$ para n par
non	no simplificación

## 2.6. LA TRANSFORMADA DISCRETA DE HARTLEY

La transformada discreta de Hartley para una función  $v(t)$  está dada por:

$$H(k\Delta v) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} V(i\Delta T) \text{cas}(ik\Delta v\Delta T) \quad k=0,1,\dots,N-1 \quad (2.18)$$

$$V(k\Delta T) = \sum_{i=0}^{N-1} H(i\Delta v) \text{cas}(ik\Delta v\Delta T) \quad k=0,1,\dots,N-1 \quad (2.19)$$

A (2.18) se le conoce como la transformada discreta de Hartley y a (2.19) como la transformada inversa discreta de Hartley.

donde:

$N$  número de puntos de muestreo.  $N=2^n$  donde  $n$  es el número de armónicas a considerar.

$T_{\text{total}}$  tiempo total por período (por ejemplo, señal de 60 Hz, para un ciclo  $T_{\text{total}} = 16.67$  ms.)

$\Delta T = \frac{T_{\text{total}}}{N}$  tiempo de muestreo.

$\Delta v = \Delta\omega = \frac{2\pi}{N\Delta T}$  frecuencia de muestreo.

## 2.7. CARACTERISTICAS DE LA FUNCION CAS(.)

La función  $\text{cas}(\cdot)$ , definida por  $\text{cas}(\cdot) = \cos(\cdot) + \text{sen}(\cdot)$  tiene las propiedades que se muestran en la Tabla 2.4.

Tabla 2.4. Propiedades de la función  $\text{cas}(\cdot)$ .

$\text{cas}(-\alpha) = \cos(\alpha) - \text{sen}(\alpha)$	$\cos(\alpha) = \frac{1}{2}(\text{cas}(\alpha) + \text{cas}(-\alpha))$
$\text{sen}(\alpha) = \frac{1}{2}(\text{cas}(\alpha) - \text{cas}(-\alpha))$	$\text{cas}(\pm\alpha) = \sqrt{2} \cos(\alpha \mp \pi/4)$
$\text{cas}(\alpha)\text{cas}(-\alpha) = \cos(2\alpha)$	$\text{cas}^2(\alpha) - \text{cas}^2(-\alpha) = 2 \text{sen}(2\alpha)$
$\text{cas}^2(\alpha) + \text{cas}^2(-\alpha) = 2$	$\text{cas}^2(\alpha)\text{cas}^2(\alpha) = 2(1 + \text{sen}(2\alpha))$
$\text{cas}(2\alpha) = \text{cas}^2(\alpha) - 2 \text{sen}^2(\alpha)$	$\text{cas}(\alpha + \pi/2) = \text{cas}(-\alpha)$
$\frac{d(\text{cas}(\alpha t))}{dt} = \alpha \text{cas}(-\alpha t)$	$\frac{d(\text{cas}(-\alpha t))}{dt} = -\alpha \text{cas}(\alpha t)$
$\int \text{cas}(\alpha t) dt = -\frac{1}{\alpha} \text{cas}(-\alpha t)$	$\int \text{cas}(-\alpha t) dt = \frac{1}{\alpha} \text{cas}(\alpha t)$
$\text{cas}(\alpha + \beta) = \cos(\beta)\text{cas}(\alpha) + \text{sen}(\beta)\text{cas}(-\alpha)$	
$e^{j\alpha} = \frac{1}{2}(\text{cas}(\alpha) + \text{cas}(-\alpha)) + \frac{1}{2}j(\text{cas}(\alpha) - \text{cas}(-\alpha))$	
$\text{cas}(\alpha)\text{cas}(\beta) = \frac{1}{2}[\text{cas}(\alpha + \beta) + \text{cas}(\alpha - \beta) + \text{cas}(-\alpha + \beta) - \text{cas}(-\alpha - \beta)]$	
$\cos(\alpha)\text{cas}(\beta) = \text{cas}(-\alpha + \beta) + \text{cas}(\alpha + \beta)$	
$\text{sen}(\alpha)\text{cas}(\beta) = \text{cas}(\alpha - \beta) - \text{cas}(-\alpha - \beta)$	

## 2.8. RESUMEN

En este capítulo se mostraron las características principales de la transformada Hartley, así como un ejemplo para ilustrar su uso en el análisis de circuitos eléctricos. El hecho de poder representar casi cualquier función periódica mediante las series de Hartley da la posibilidad de hacer un uso extensivo para el análisis de circuitos eléctricos que operan en estado estable sinusoidal y no-sinusoidal. La obtención de las series y de la transformada Hartley se presentan en forma detallada en el Apéndice A; otras propiedades y aplicaciones pueden consultarse en [24,27,34].

## CAPITULO 3

### DEFINICIONES Y CONCEPTOS FUNDAMENTALES

#### 3.1. INTRODUCCION

Como se mencionó en la presentación de este trabajo de investigación es de vital importancia establecer conceptos básicos para sistemas que operan bajo señales no-sinusoidales. En este capítulo se hace uso de las series de Hartley para revisar conceptos como potencia instantánea, media, valores rms, potencia aparente y factor de potencia, voltios amperes no-activos y el factor de distorsión.

En general cualquier forma de onda periódica puede representarse por las series de Hartley, así la respuesta de corriente en una carga lineal o no-lineal, ante una señal periódica de voltaje está dada por:

$$v(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} V_m \text{cas}(mvt) \quad (3.1)$$

$$i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \text{cas}(nvt) \quad (3.2)$$

donde se tiene que  $n=m$  si la carga es lineal y  $n \neq m$  si la carga es no-lineal [8].

Si se tiene una carga lineal excitada por una fuente de voltaje que sólo contiene la frecuencia fundamental y no contiene una componente de c.d., entonces el voltaje y la corriente estarán representadas por las siguientes expresiones:



$$v(t) = V_{-1} \text{cas}(-vt) + V_{+1} \text{cas}(vt) \quad (3.3)$$

$$i(t) = I_{-1} \text{cas}(-vt) + I_{+1} \text{cas}(vt) \quad (3.4)$$

donde los valores  $V_{\pm 1}$  y  $I_{\pm 1}$  son los coeficientes de la serie de Hartley de  $v(t)$  e  $i(t)$  respectivamente. En [1,23] se denomina a estos valores como las componentes positiva y negativa de frecuencia fundamental. A continuación se abordarán algunos conceptos importantes para el análisis de elementos eléctricos ante señales no-sinusoidales [1,8].

### 3.2. POTENCIA INSTANTANEA

Por definición la potencia instantánea está dada por:

$$p(t) = v(t)i(t) \quad (3.5)$$

al substituir (3.1) y (3.2) en (3.5)

$$p(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} V_m \text{cas}(mvt) \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \text{cas}(nvt) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_m I_n \text{cas}(mvt) \text{cas}(nvt) \quad (3.6)$$

al desarrollar (3.6) , y aplicar propiedades de la Tabla 2.4, se tiene:

$$p(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{V_m I_n}{2} \{ \text{cas}(m+n)vt + \text{cas}(m-n)vt + \text{cas}(-m+n)vt - \text{cas}(-m-n)vt \} \quad (3.7)$$

### 3.3. POTENCIA MEDIA

La potencia media está definida por la integral en un período  $T$  de la potencia instantánea  $p(t)$ :

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} p(t) dt \quad (3.8)$$

sustituyendo (3.7) en (3.8) se tiene:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{\substack{m=-\infty \\ n \neq m}}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{V_m I_n}{2} \{ \cos(m+n)vt + \cos(m-n)vt + \cos(-m+n)vt - \cos(-m-n)vt \} dt \\ &+ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{\substack{m=-\infty \\ n=m}}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{V_m I_n}{2} \{ \cos(m+n)vt + 1 + 1 - \cos(-m-n)vt \} dt \end{aligned} \quad (3.9)$$

y al resolver (3.9) se tiene:

$$P = \sum_{\substack{m=-\infty \\ n=m}}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_m I_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} V_m I_m \quad (3.10)$$

La ecuación (3.10) expresa que la potencia media o potencia activa está dada por la suma de los productos de los coeficientes de la serie Hartley de la misma componente armónica.

Por ejemplo, si  $v(t)$  e  $i(t)$  están dados por (3.3) y (3.4) se tendrá que:

$$P = V_{-1} I_{-1} + V_{+1} I_{+1} \quad (3.11)$$

a su vez, si  $v(t) = V \sin(vt)$  e  $i(t) = I \sin(vt + \phi)$ , con valores máximos  $V$  e  $I$ , entonces:

$$V_{+1} = \frac{V}{2}; \quad V_{-1} = -\frac{V}{2}; \quad I_{+1} = \frac{I}{2} \cos(-\varphi); \quad I_{-1} = -\frac{I}{2} \cos(\varphi) \quad (3.12)$$

que al substituir (3.12) en (3.11) se obtiene:

$$P = \frac{VI}{2} \cos(\varphi) \quad (3.13)$$

así, se puede representar a (3.10) en una forma más familiar como:

$$P = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{V_i I_i}{2} \cos(\varphi_i) \quad (3.14)$$

donde los coeficientes  $i$ 's pertenecen a la serie Coseno.

### 3.4. VALORES RMS

El valor eficaz o rms de una función periódica está definido por:

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v^2(t) dt} \quad (3.15)$$

usando (3.1) se tiene que:

$$v^2(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} V_m^2 \cos^2(mvt) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq m}}^{\infty} V_m V_n \cos(mvt) \cos(nvt) \quad (3.16)$$

sustituyendo (3.16) en (3.15):

$$\begin{aligned}
 V_{\text{rms}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} V_m^2 \cos^2(mvt) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} V_m^2 \{1 + \cos(mvt) \sin(mvt)\} dt} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} V_m^2 dt}
 \end{aligned}
 \tag{3.17}$$

asi

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{\sum_{m=-\infty}^{\infty} V_m^2}
 \tag{3.18}$$

La ecuación (3.18) establece que el valor rms de una señal periódica, está dada por la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los coeficientes de la serie de Hartley.

Si  $v(t) = V \sin(vt)$  entonces  $V_{\pm}$  están dados por (3.12), y el voltaje rms como:

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{\left(-\frac{V}{2}\right)^2 + \left(\frac{V}{2}\right)^2} = \frac{V}{\sqrt{2}}
 \tag{3.19}$$

### 3.5. POTENCIA APARENTE

La magnitud de la potencia aparente está definida por:

$$S = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}
 \tag{3.20}$$

sustituyendo (3.18) en (3.20) se obtiene:

$$S = \sqrt{\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_m^2 I_n^2}
 \tag{3.21}$$

### 3.6. FACTOR DE POTENCIA

El factor de potencia está definido por medio de la relación:

$$F.P = \frac{P}{S} = \frac{\text{potencia media}}{\text{potencia aparente}} \quad (3.22)$$

sustituyendo (3.10) y (3.21) en (3.22), se tiene:

$$F.P = \frac{\sum_{m=-\infty}^{\infty} V_m I_m}{\sqrt{\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_m^2 I_n^2}} \quad (3.23)$$

o bien:

$$F.P = \frac{\left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} V_m I_m \right)^2}{\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_m^2 I_n^2} \quad (3.24)$$

La ecuación (3.24) expresa que sólo existe un factor de potencia y no significa que el factor de potencia es el ángulo de desfase entre voltaje y corriente de la misma armónica.

Si  $v(t) = V \sin(\omega t)$  entonces (3.23) queda como:

$$F.P = \frac{\frac{VI}{2} \cos(\varphi_1)}{\sqrt{(V_{-1}^2 + V_{+1}^2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n^2}} = \frac{\frac{VI}{2} \cos(\varphi_1)}{\frac{V}{\sqrt{2}} \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n^2}} = \frac{\frac{I}{\sqrt{2}} \cos(\varphi_1)}{\sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n^2}} = \frac{I_{rms_1}}{\sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n^2}} \cos(\varphi_1) \quad (3.25)$$

De (3.25) se puede definir el factor de desplazamiento y el factor de distorsión como:

$$\cos(\varphi_1) \quad \text{factor de desplazamiento} \quad (3.26)$$

$$\sqrt{\frac{I_{-1}^2 + I_{+1}^2}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n^2}} \quad \text{factor de distorsión} \quad (3.27)$$

Las definiciones (3.26) y (3.27) sólo existen cuando se trata de la respuesta de una carga no-lineal ante condiciones sinusoidales de voltaje.

Se puede hacer notar que no existe relación de (3.27) para cuando  $v(t)$  contiene armónicas, esto se muestra en (3.28)

$$F.P = \frac{V_{rms_1} I_{rms_1} \cos(\varphi_1) + V_{rms_2} I_{rms_2} \cos(\varphi_2) + \dots}{\sqrt{(V_{rms_1}^2 + V_{rms_2}^2 + \dots) \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n^2}} \quad (3.28)$$

### 3.7. VOLTS-AMPERES NO-ACTIVOS (volts-amperes reactivos)

Los volts-amperes reactivos se definen a partir de la potencia aparente donde:

$$S^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_m^2 I_n^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} V_m^2 I_m^2 + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq m}}^{\infty} V_m^2 I_n^2 \quad (3.29)$$

En (3.29) se pueden identificar dos grupos de términos:

$$S^2 = \left( \begin{array}{l} \text{grupo de términos que} \\ \text{involucran productos de la} \\ \text{misma frecuencia} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} \text{grupo de términos que} \\ \text{involucran productos} \\ \text{cruzados de frecuencia} \end{array} \right)$$

la expresión (3.29) se puede descomponer, como se muestra enseguida:

$$S^2 = \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} V_m I_m \right)^2 + \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} V_m^2 I_{-m}^2 - \sum_{m=-\infty}^{\infty} V_m I_m V_{-m} I_{-m} \right) + \left( \sum_{\substack{m=-\infty \\ n \neq m}}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_m^2 I_n^2 \right) \quad (3.30)$$

la cual se puede representar por:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2 + D^2} \quad (3.31)$$

La ecuación (3.31) establece que la potencia aparente está dada por la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las potencias P, Q y D, a su vez expresadas por los coeficientes de las series de Hartley:

- P Potencia activa dada por la suma de los productos de voltaje y corriente de la misma armónica.
- Q Potencia no-activa (reactiva) dada por la suma de los productos cruzados de voltajes y corrientes de la misma armónica.
- D Potencia no-activa (potencia de distorsión) dada por la suma de los productos de voltaje y corriente de diferentes armónicas. Esta potencia existe sólo cuando las armónicas son  $m \neq n$  que es el caso de elementos no-lineales.

Así, R se define como los volts-amperes no-activos:

$$R^2 = S^2 - P^2 = Q^2 + D^2 \quad (3.32)$$

Como ejemplo, tomando (3.30) cuando  $m=n=1$  (circuito lineal a frecuencia fundamental), se tiene que:

$$S^2 = (V_{-1}I_{-1} + V_{+1}I_{+1})^2 + V_{-1}^2I_{+1}^2 + V_{+1}^2I_{-1}^2 - 2V_{-1}I_{-1}V_{+1}I_{+1} = P^2 + Q^2 \quad (3.33)$$

substituyendo (3.12) en (3.33) se obtiene:

$$S^2 = \left(\frac{VI}{2} \cos(\varphi)\right)^2 + \left(\frac{VI}{2} \text{sen}(\varphi)\right)^2 \quad (3.34)$$

si  $m = n$  (circuito lineal), (3.30) queda como:

$$S^2 = \left( \frac{V_1 I_1}{2} \cos(\varphi_1) + \frac{V_2 I_2}{2} \cos(\varphi_2) + \dots \right)^2 + \left( \frac{V_1 I_1}{2} \operatorname{sen}(\varphi_1) + \frac{V_2 I_2}{2} \operatorname{sen}(\varphi_2) + \dots \right)^2 \quad (3.35)$$

donde no existe potencia de distorsión  $D$ .

Si  $m=1$  y  $n=2$  en el caso de un circuito no-lineal, (3.30) queda como:

$$\begin{aligned} S^2 &= (V_{-1} I_{-1} + V_{+1} I_{+1})^2 + (V_{-1}^2 I_{+1}^2 + V_{+1}^2 I_{-1}^2 - 2V_{-1} I_{-1} V_{+1} I_{+1}) + \\ &\quad (V_{-1}^2 I_{-2}^2 + V_{-1}^2 I_{+2}^2 + V_{+1}^2 I_{-2}^2 + V_{+1}^2 I_{+2}^2) \\ &= P^2 + Q^2 + D^2 \end{aligned} \quad (3.36)$$

que al substituir (3.12) en (3.36) se tiene:

$$S^2 = \left( \frac{V_1 I_1}{2} \cos(\varphi_1) \right)^2 + \left( \frac{V_1 I_1}{2} \operatorname{sen}(\varphi_1) \right)^2 + \left( \frac{V_1 I_2}{2} \right)^2 \quad (3.37)$$

este caso ya muestra potencia de distorsión  $D$ .

### 3.8. RESUMEN

En este capítulo se presentaron conceptos básicos sobre la definición de potencia en circuitos eléctricos con excitaciones no-sinusoidales. Como se puede apreciar existen diferencias entre los conceptos básicos de potencia para estudios sinusoidales y los estudios no-sinusoidales, así es importante no aplicar directamente los conceptos básicos a circuitos alimentados por fuentes no-sinusoidales. Para mayor información sobre el comportamiento de circuitos ante señales no-sinusoidales se recomienda ampliamente la referencia [8].



## CAPITULO 4

### REPRESENTACION DE ELEMENTOS LINEALES Y NO-LINEALES EN EL DOMINIO HARTLEY

#### 4.1. INTRODUCCION

El uso de los números complejos para el análisis sinusoidal de circuitos eléctricos lineales en estado estable fue inicialmente propuesto por Kenelly [40] en 1893. Posteriormente, en 1964 P. Moon y D. E. Spencer [40], mostraron una forma de representar a los elementos lineales de un circuito por matrices reales. En la actualidad el uso de la notación compleja en el análisis de circuitos eléctricos está vigente y su uso se ha extendido mediante el uso de técnicas de Fourier a los sistemas no-sinusoidales. En este capítulo se muestra una forma diferente de representar los elementos lineales en los circuitos eléctricos, mostrando también, la forma general para el análisis no-sinusoidal usando el dominio Hartley. El análisis del caso sinusoidal se muestra en detalle en [1], además de mostrar que todas las técnicas de análisis de circuitos eléctricos son válidas en el dominio de Hartley. Se puede mostrar que elementos no-lineales ante condiciones puramente sinusoidales dan como respuesta una señal periódica no-sinusoidal. Asimismo, ante señales periódicas no-sinusoidales su respuesta es una señal periódica no-sinusoidal. Esto muestra que la función de transferencia entre voltaje y corriente presenta acoplamiento entre armónicas, lo que hace posible obtener un equivalente similar al obtenido para elementos lineales, dicho equivalente se puede interpretar como un equivalente Norton linealizado.

En forma general se tiene que la respuesta de una carga eléctrica, ante señales periódicas no-sinusoidales, está dada por las siguientes ecuaciones de voltaje y corriente:

$$v(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} V_m \text{cas}(mvt) \quad (4.1)$$

$$i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \text{cas}(nvt) \quad (4.2)$$

Los subíndices  $m$  y  $n$  de (4.1) y (4.2) dependen del tipo de la carga, donde  $n=m$  si se trata de una carga lineal y  $n \neq m$  si se trata de una carga no-lineal. La representación de elementos para el análisis armónico se ha hecho desde inicios de siglo en el plano complejo [11], aquí se tratará su representación en el plano real; trabajando con las series de Hartley.

#### 4.2. REPRESENTACION DE ELEMENTOS LINEALES

Se considera que los elementos pasivos de una red eléctrica (resistores, inductores y capacitores), tienen la siguiente respuesta de voltaje ante señales periódicas de corrientes no-sinusoidales de la forma (4.2):

Voltaje en un resistor  $R$

$$v_R(t) = Ri(t) = R \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \text{cas}(nvt) \quad (4.3)$$

Voltaje en un inductor  $L$

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = L \sum_{n=-\infty}^{\infty} nv I_n \text{cas}(-nvt) \quad (4.4)$$

Voltaje en un capacitor  $C$

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt = \frac{1}{C} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{-1}{nv} I_n \text{cas}(-nvt) \quad (4.5)$$

los voltajes  $v_R(t)$ ,  $v_L(t)$  y  $v_C(t)$  tienen la forma (4.1). Las ecuaciones (4.3), (4.4) y (4.5) se pueden escribir en forma matricial para todo el rango de  $m$  y  $n$ , eliminando los términos  $\text{cas}(\cdot)$ , dado que son comunes en ambos lados de la ecuación, obteniendo lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ V_{R_{-2}} \\ V_{R_{-1}} \\ V_{R_0} \\ V_{R_1} \\ V_{R_2} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ & R & & & & 0 \\ & & R & & & \\ & & & R & & \\ 0 & & & & R & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ I_{-2} \\ I_{-1} \\ I_0 \\ I_1 \\ I_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ V_{L_{-2}} \\ V_{L_{-1}} \\ V_{L_0} \\ V_{L_1} \\ V_{L_2} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ & 0 & & & & 2vL \\ & & 0 & & & vL \\ & & & 0 & & \\ -2vL & & -vL & & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ I_{-2} \\ I_{-1} \\ I_0 \\ I_1 \\ I_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ V_{C_{-2}} \\ V_{C_{-1}} \\ V_{C_0} \\ V_{C_1} \\ V_{C_2} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ & 0 & & & & -1/2vC \\ & & \infty & & & -1/vC \\ & & & 1/vC & & \\ 1/2vC & & & & & \\ & & & & & 0 \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ I_{-2} \\ I_{-1} \\ I_0 \\ I_1 \\ I_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Definiendo así a la matriz de impedancia de Hartley como  $Z_H$ , representada por:

$$Z_H = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ & R & & & & X_2 \\ & & R+X_0 & & & X_1 \\ & & & R & & \\ X_{-2} & & & & & \\ & X_{-1} & & & & \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$Y_H = Z_H^{-1} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ & G_{-2} & & & & B_2 \\ & & G_{-1} & & & B_1 \\ & & & G_0+B_0 & & \\ B_{-2} & & & & & \\ & B_{-1} & & & & G_1 \\ & & & & & G_2 \\ & & & & & B_2 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$







$$Z_{abc_g} = \begin{bmatrix} z_g & m_g & m_g \\ m_g & z_g & m_g \\ m_g & m_g & z_g \end{bmatrix}; \quad Z_{abc_t} = \begin{bmatrix} z_t & m_t & m_t \\ m_t & z_t & m_t \\ m_t & m_t & z_t \end{bmatrix}; \quad Z_{abc_l} = \begin{bmatrix} z_l & m_l & m_l \\ m_l & z_l & m_l \\ m_l & m_l & z_l \end{bmatrix};$$

$$Z_{abc_c} = \begin{bmatrix} z_c & m_c & m_c \\ m_c & z_c & m_c \\ m_c & m_c & z_c \end{bmatrix} \quad m_g = \frac{1}{10} z_g, \quad m_t = \frac{1}{10} z_t, \quad m_l = \frac{1}{10} z_l, \quad m_c = \frac{1}{10} z_c$$

$$v_{1_{abc}}(t) = [\cos(\omega t) \quad \cos(\omega t - 120^\circ) \quad \cos(\omega t + 120^\circ)]^T$$

$$i_{2_{abc}} = \left[ \sum_{n=-h}^h I_{a_n} \cos(n\omega t) \quad \sum_{n=-h}^h I_{b_n} \cos(n\omega t) \quad \sum_{n=-h}^h I_{c_n} \cos(n\omega t) \right]^T$$

En el dominio Hartley y hasta la tercera armónica:

$$Z_{abc_G} = \begin{bmatrix} Z_G & M_G & M_G \\ M_G & Z_G & M_G \\ M_G & M_G & Z_G \end{bmatrix}; \quad Y_{abc_G} = Z_{abc_G}^{-1}; \quad Z_{abc_T} = \begin{bmatrix} Z_T & M_T & M_T \\ M_T & Z_T & M_T \\ M_T & M_T & Z_T \end{bmatrix}; \quad Y_{abc_T} = Z_{abc_T}^{-1}$$

$$Z_{abc_L} = \begin{bmatrix} Z_L & M_L & M_L \\ M_L & Z_L & M_L \\ M_L & M_L & Z_L \end{bmatrix}; \quad Y_{abc_L} = Z_{abc_L}^{-1}; \quad Z_{abc_C} = \begin{bmatrix} Z_C & M_C & M_C \\ M_C & Z_C & M_C \\ M_C & M_C & Z_C \end{bmatrix}; \quad Y_{abc_C} = Z_{abc_C}^{-1}$$

$$V_{1_{abc}} = \left[ 0 \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{-\sqrt{3}-1}{4} \quad 0 \quad \frac{\sqrt{3}-1}{4} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{\sqrt{3}-1}{4} \quad 0 \quad \frac{-\sqrt{3}-1}{4} \quad 0 \quad 0 \right]^T;$$

$$I_{2_{abc}} = [I_{a_{-3}} \quad I_{a_{-2}} \quad I_{a_{-1}} \quad I_{a_0} \quad I_{a_1} \quad I_{a_2} \quad I_{a_3} \quad I_{b_{-3}} \quad I_{b_{-2}} \quad I_{b_{-1}} \quad I_{b_0} \quad I_{b_1} \quad I_{b_2} \quad I_{b_3} \quad I_{c_{-3}} \quad I_{c_{-2}} \quad I_{c_{-1}} \quad I_{c_0} \quad I_{c_1} \quad I_{c_2} \quad I_{c_3}]^T$$

La matriz nodal de admitancias Hartley de la red trifásica está dada por:

$$Y_{123_{abc_h}} = \begin{bmatrix} Y_{abc_G} + Y_{abc_T} & -Y_{abc_T} & 0 \\ -Y_{abc_T} & Y_{abc_T} + Y_{abc_L} & -Y_{abc_L} \\ 0 & -Y_{abc_L} & Y_{abc_L} + Y_{abc_C} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

y tiene dimensiones de  $9(2h+1) \times 9(2h+1)$  donde  $h=3$ .

La forma de las matrices (4.15) y (4.16) se muestran en las Figuras 4.2 y 4.3.

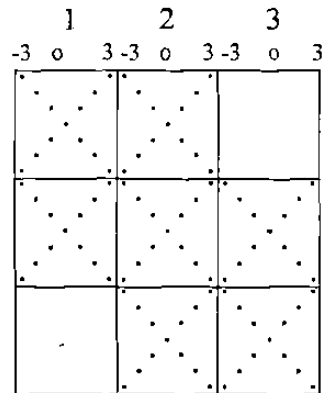


Figura 4.2. Forma de la matriz de admitancias nodal de Hartley del sistema monofásico.

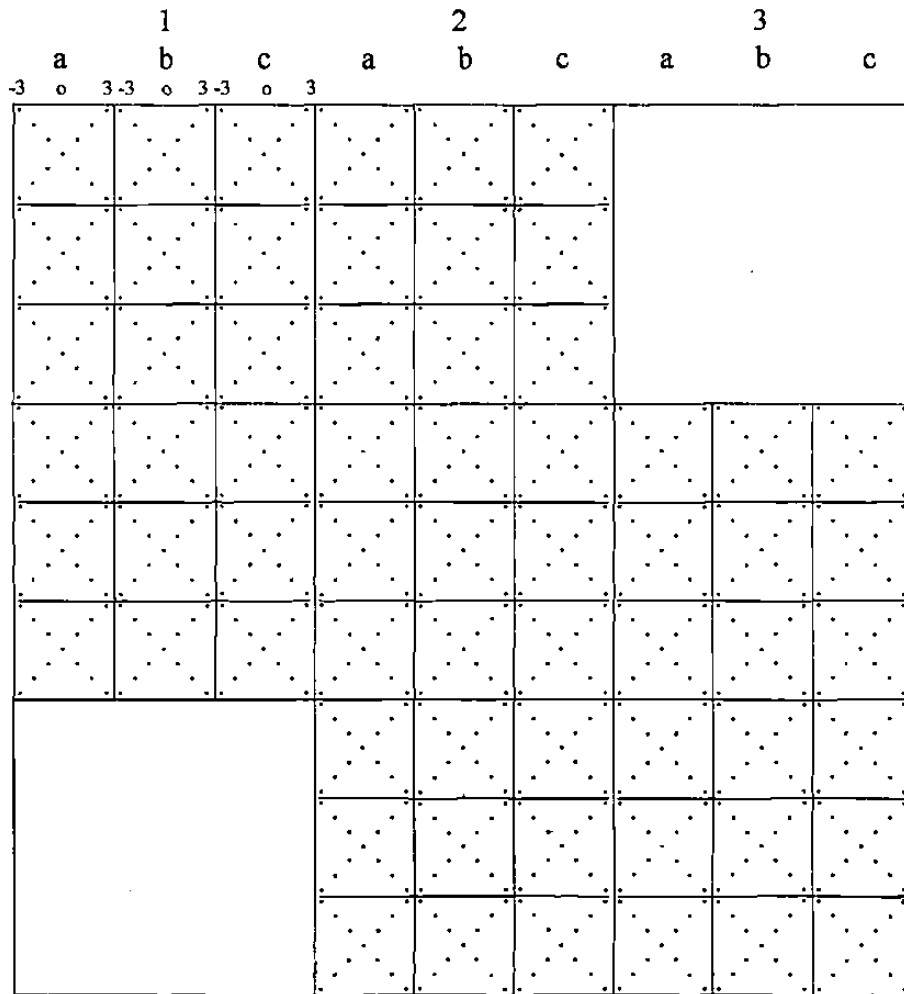


Figura 4.3. Forma de la matriz de admitancias nodal de Hartley del sistema trifásico.



#### 4.5. LINEALIZACION DE ELEMENTOS NO-LINEALES

Un procedimiento común para representar elementos no-lineales en redes eléctricas ha sido utilizando equivalentes Norton. Diferentes trabajos se han publicado al respecto, algunos de estos trabajos representan los elementos no-lineales por un equivalente Norton linealizado en el espacio armónico complejo [13,14]. En esta sección se usa la misma metodología utilizada en [13,14] con la diferencia de que se trabaja en el espacio armónico real, cualidad obtenida al trabajar con la transformada Hartley.

El comportamiento general de un elemento no-lineal puede representarse por:

$$y(t) = f(x(t)) \quad (4.17)$$

donde las variables  $y(t)$  y  $x(t)$  son funciones periódicas representadas por las series siguientes:

$$x(t) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} X_h \text{cas}(hvt) \quad (4.18)$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_k \text{cas}(kvt) \quad (4.19)$$

Si (4.17) es diferenciable, entonces la forma incremental de primer orden se expresa mediante:

$$\Delta y(t) = f'(x_b(t)) \Delta x(t) \quad (4.20)$$

donde:

$$\Delta x(t) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \Delta X_h \text{cas}(hvt) \quad (4.21)$$

$$\Delta y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta Y_k \text{cas}(kvt) \quad (4.22)$$

$$f'(x_b(t)) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} C_i \text{cas}(i\omega t) \quad (4.23)$$

sustituyendo (4.21), (4.22) y (4.23) en (4.20) se obtiene:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta Y_k \text{cas}(k\omega t) = \frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{h=-\infty}^{\infty} C_i \Delta X_h [\text{cas}((i+h)\omega t) + \text{cas}((i-h)\omega t) + \text{cas}((-i+h)\omega t) - \text{cas}((-i-h)\omega t)] \quad (4.24)$$

al desarrollar (4.24), se puede identificar los coeficientes de la misma armónica de ambos lados de la ecuación, obteniendo las siguientes relaciones: cada coeficiente de  $\Delta Y_k$  es igual a la suma de los siguientes cuatro coeficientes dados por:

$$C_i \Delta X_h \text{ donde } k=i+h \quad (4.25.a)$$

$$C_i \Delta X_h \text{ donde } k=i-h \quad (4.25.b)$$

$$C_i \Delta X_h \text{ donde } k=-i+h \quad (4.25.c)$$

$$-C_i \Delta X_h \text{ donde } k=-i-h \quad (4.25.d)$$

Tomando una armónica en particular de (4.21)  $h=j$ , expresando (4.24) en forma matricial y haciendo uso de (4.25) queda como:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \Delta Y_{-2} \\ \Delta Y_{-1} \\ \Delta Y_0 \\ \Delta Y_1 \\ \Delta Y_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \vdots \\ C_{-2-j} \\ C_{-1-j} \\ C_{0-j} \\ C_{1-j} \\ C_{2-j} \\ \vdots \end{bmatrix} \Delta X_j + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \vdots \\ C_{-2+j} \\ C_{-1+j} \\ C_{0+j} \\ C_{1+j} \\ C_{2+j} \\ \vdots \end{bmatrix} \Delta X_j + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \vdots \\ C_{2+j} \\ C_{1+j} \\ C_{0+j} \\ C_{-1+j} \\ C_{-2+j} \\ \vdots \end{bmatrix} \Delta X_j - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \vdots \\ C_{2-j} \\ C_{1-j} \\ C_{0-j} \\ C_{-1-j} \\ C_{-2-j} \\ \vdots \end{bmatrix} \Delta X_j \quad (4.26)$$

$k \qquad i=k-j \qquad i=k+j \qquad i=-k+j \qquad i=-k-j$

Agrupando (4.26)

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \Delta Y_{-2} \\ \Delta Y_{-1} \\ \Delta Y_0 \\ \Delta Y_1 \\ \Delta Y_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ C_{(-2,h)} \\ C_{(-1,h)} \\ C_{(0,h)} \\ C_{(1,h)} \\ C_{(2,h)} \\ \vdots \end{bmatrix} \Delta X_h \quad (4.27)$$

donde

$$C_{(k,h)} = \frac{1}{2} (C_{k+h} + C_{k-h} + C_{-k+h} - C_{-k-h}) \quad (4.28)$$

y para todos los términos de  $h$ , la expresión (4.27) puede ser representada en forma matricial por:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \Delta Y_{-2} \\ \Delta Y_{-1} \\ \Delta Y_0 \\ \Delta Y_1 \\ \Delta Y_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & & & \\ \ddots & C_{(-1,-2)} & C_{(-2,-1)} & C_{(-2,0)} & C_{(-2,1)} & C_{(-2,2)} & \\ \ddots & C_{(-1,-1)} & C_{(-1,0)} & C_{(-1,1)} & C_{(-1,2)} & & \\ C_{(0,-2)} & C_{(0,-1)} & C_{(0,0)} & C_{(0,1)} & C_{(0,2)} & & \\ C_{(1,-2)} & C_{(1,-1)} & C_{(1,0)} & C_{(1,1)} & C_{(1,2)} & \ddots & \\ C_{(2,-2)} & C_{(2,-1)} & C_{(2,0)} & C_{(2,1)} & C_{(2,2)} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \Delta X_{-2} \\ \Delta X_{-1} \\ \Delta X_0 \\ \Delta X_1 \\ \Delta X_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

y en forma compacta como

$$\Delta Y = F \Delta X \quad (4.30)$$

donde

$\Delta X$  : vector formado por los coeficientes de la serie dada por (4.21).

$\Delta Y$  : vector formado por los coeficientes de la serie dada por (4.22).

$F$  : matriz formada por coeficientes de la serie dada por (4.23).

De esta manera (4.30) representa a (4.20) en forma linealizada en el plano armónico real. Observando (4.28) y (4.29) se tiene que la matriz  $F$  es real y simétrica. Estrictamente  $F$  es



y  $U$  es la matriz identidad.

(4.35)

Retomando la expresión (4.20), la cual fue linealizada alrededor del punto  $(x_b(t), y_b(t))$  y donde  $\Delta X = X - X_b$  y  $\Delta Y = Y - Y_b$ , entonces (4.30) está dada por la forma que representa la nueva condición de operación, en términos de una matriz  $F$  con un vector valuado en el punto base  $(x_b(t), y_b(t))$ . Si  $Y$  representa una inyección y  $X$  es una tensión nodal tal expresión se puede modelar por medio de un equivalente Norton,

$$Y = FX + Y_N \quad (4.36)$$

donde:

$$Y_N = Y_b - FX_b \quad (4.37)$$

#### 4.6. CORRIENTE DE SATURACION EN UN ELEMENTO INDUCTIVO

La corriente de saturación de un elemento inductivo está dada por la ecuación no-lineal de la corriente en función del flujo magnético  $\varphi(t)$ .

$$i(t) = f(\varphi(t)) \quad (4.38)$$

Aplicando (4.36) y (4.37) a (4.38) se obtiene la siguiente representación:

$$I = F\Psi + I_N \quad (4.39)$$

$$I_N = I_b - F\Psi_b \quad (4.40)$$

Como  $v(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}$ , entonces:

$$V = \dot{\Psi} = D\Psi \quad (4.41)$$

donde:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & & & 2v \\ & v & & \\ & & 0 & \\ -2v & -v & & 0 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

sustituyendo (4.41) en (4.39) y (4.40):

$$I = BV + I_N \quad (4.43)$$

$$I_N = I_b - BV_b \quad (4.44)$$

donde:  $B = FD^{-1}$  (4.45)

y B representa una matriz de admitancias Hartley la cual presenta acoplamientos entre armónicas.

La Figura 4.4 representa al equivalente Norton en el dominio Hartley.

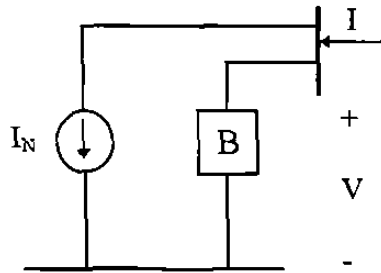


Figura 4.4. Equivalente Norton en el dominio Hartley.

#### 4.7. EJEMPLO NUMERICO

A fin de ilustrar la aplicación de los desarrollos presentados en la sección anterior, usando el espacio armónico complejo [9], y el espacio armónico real (transformada Hartley), se desea linealizar la función  $i(t)$ , alrededor del punto:

$$\varphi_b(t) = \text{sen}(\omega t) \quad (4.46)$$

donde

$$i(t) = f(\varphi(t)) = \varphi(t) + \varphi^3(t) \quad (4.47)$$

Solución:

$$f(\varphi_b(t)) = \varphi_b(t) + \varphi_b^3(t) = \text{sen}(\omega t) + \text{sen}^3(\omega t) \quad (4.48)$$

$$f'(\varphi_b(t)) = 1 + 3\varphi_b^2(t) = 1 + 3\text{sen}^2(\omega t) \quad (4.49)$$

Usando el espacio armónico complejo se requiere la identidad de Euler:

$$f(\varphi_b(t)) = \frac{1}{8}je^{3j\omega t} - \frac{7}{8}je^{j\omega t} + \text{conjugado} \quad (4.50)$$

$$f'(\varphi_b(t)) = \frac{5}{2} - \frac{3}{4}e^{2j\omega t} - \frac{3}{4}e^{-2j\omega t} \quad (4.51)$$

formando  $I = F\Delta\Psi + I_b$  con los coeficientes de (4.50) y (4.51) se tiene:

$$\begin{bmatrix} I_{-3} \\ 0 \\ I_{-1} \\ 0 \\ I_1 \\ 0 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 & 0 & -3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & 0 & -3/4 & 0 & 0 & 0 \\ -3/4 & 0 & 5/2 & 0 & -3/4 & 0 & 0 \\ 0 & -3/4 & 0 & 5/2 & 0 & -3/4 & 0 \\ 0 & 0 & -3/4 & 0 & 5/2 & 0 & -3/4 \\ 0 & 0 & 0 & -3/4 & 0 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3/4 & 0 & 5/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\Psi_{-3} \\ 0 \\ \Delta\Psi_{-1} \\ 0 \\ \Delta\Psi_1 \\ 0 \\ \Delta\Psi_3 \end{bmatrix} + \frac{j}{8} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

$$\text{si } \Delta\varphi(t) = \frac{1}{8}\text{sen}^3(\omega t) = \frac{1}{64}je^{3j\omega t} - \frac{3}{64}je^{j\omega t} + \text{conjugado}$$

entonces

$$\Delta\Psi = \frac{j}{64} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ substituyendo en (4.52) se tiene } I = \frac{j}{64} \begin{bmatrix} -12.75 \\ 0 \\ 66.5 \\ 0 \\ -66.5 \\ 0 \\ 0 \\ 12.75 \end{bmatrix}$$

donde la corriente linealizada es

$$\begin{aligned} i(t) &= I_{-3}e^{-3j\omega t} + I_{-1}e^{-j\omega t} + I_1e^{j\omega t} + I_3e^{3j\omega t} \\ &= \frac{1}{32}(66.5 \text{ sen}(\omega t) - 12.75 \text{ sen}(3\omega t)) \end{aligned} \quad (4.53)$$

Usando el espacio armónico real se tiene en términos de la identidad  $\text{cas}(\cdot)$ :

$$f(\varphi_b(t)) = -\frac{1}{8} \text{cas}(3\omega t) + \frac{1}{8} \text{cas}(-3\omega t) + \frac{7}{8} \text{cas}(\omega t) - \frac{7}{8} \text{cas}(-\omega t) \quad (4.54)$$

$$f'(\varphi_b(t)) = \frac{5}{2} - \frac{3}{4} \text{cas}(2\omega t) - \frac{3}{4} \text{cas}(-2\omega t) \quad (4.55)$$

formando  $I = F\Delta\Psi + I_b$  con los coeficientes de (4.54) y (4.55) se tiene: Como  $f'(\varphi_b(t))$  es una función par, se calcula la matriz  $F$  de una manera directa.

$$\begin{bmatrix} I_{-3} \\ 0 \\ I_{-1} \\ 0 \\ I_1 \\ 0 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 & 0 & -3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & 0 & -3/4 & 0 & 0 & 0 \\ -3/4 & 0 & 5/2 & 0 & -3/4 & 0 & 0 \\ 0 & -3/4 & 0 & 5/2 & 0 & -3/4 & 0 \\ 0 & 0 & -3/4 & 0 & 5/2 & 0 & -3/4 \\ 0 & 0 & 0 & -3/4 & 0 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3/4 & 0 & 5/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\Psi_{-3} \\ 0 \\ \Delta\Psi_{-1} \\ 0 \\ \Delta\Psi_1 \\ 0 \\ \Delta\Psi_3 \end{bmatrix} - \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

si  $\Delta\varphi(t) = \frac{1}{8} \text{sen}^3(\omega t) = \frac{1}{64}(-\text{cas}(3\omega t) + \text{cas}(-3\omega t) + 3\text{cas}(\omega t) - 3\text{cas}(-\omega t))$ , entonces



$$\Delta\Psi = -\frac{1}{64} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{substituyendo en (4.66) se tiene } I = -\frac{1}{64} \begin{bmatrix} -12.75 \\ 0 \\ 66.5 \\ 0 \\ -66.5 \\ 0 \\ 12.75 \end{bmatrix}$$

donde la corriente linealizada es

$$\begin{aligned} i(t) &= I_{-3} \cos(-3\omega t) + I_{-1} \cos(-\omega t) + I_1 \cos(\omega t) + I_3 \cos(3\omega t) \\ &= \frac{1}{32} (66.5 \operatorname{sen}(\omega t) - 12.75 \operatorname{sen}(3\omega t)) \end{aligned} \quad (4.57)$$

Como se observa se obtiene el mismo resultado al usar las dos metodologías con la diferencia importante de usar números reales en el dominio Hartley en lugar de usar números complejos, lo cual es el caso para el análisis tradicional en el dominio complejo de Fourier.

#### 4.8. RESUMEN

Se mostró la forma de representar a los sistemas monofásicos y trifásicos para estudios armónicos lineales. Se puede observar que las matrices resultantes representan a los elementos lineales y tienen las mismas dimensiones que al usar el análisis en el dominio complejo, la diferencia estriba en trabajar con números reales solamente al usar el dominio armónico de Hartley.

Se obtuvo un equivalente que representa, en una forma linealizada, a los elementos no-lineales. En un caso particular la no-linealidad puede representar el efecto de saturación del núcleo de un elemento inductivo, pudiendo incluirse las pérdidas en el núcleo (Apéndice D). En este modelo se observa el acoplamiento entre armónicas el cual se esperaba debido a la no-linealidad. Este equivalente Norton en el dominio Hartley tiene las mismas dimensiones que al usar el análisis complejo armónico con la diferencia importante de trabajar con números reales.

## CAPITULO 5

### REPRESENTACION DEL GENERADOR SINCRONO EN EL DOMINIO HARTLEY

#### 5.1. INTRODUCCION

El generador síncrono es un elemento del sistema eléctrico de potencia que contribuye a la aportación de armónicas a la red de dos formas principales<sup>\*</sup> :

- Por la característica de conversión de frecuencias y
- Por la característica no-lineal debido a saturación.

La característica de conversión de frecuencia se presenta cuando se tiene conectado al generador un sistema desbalanceado, este desbalance representa una circulación de corriente de secuencia negativa<sup>\*</sup>, lo que provoca que en el rotor del generador se induzcan corrientes de doble frecuencia, estas a su vez inducen en la armadura del generador corrientes de triple frecuencia, y así sucesivamente inyectando armónicas al sistema [6]. Las características no-lineales que puede presentar el generador, debido a la saturación del hierro del rotor, provoca también la generación de armónicas.

En este capítulo se analizará la conversión de frecuencias, mientras que los efectos no-lineales que presenta el generador se pueden modelar en el espacio de las fases abc [18] por equivalentes Norton como ya se ha descrito en el capítulo anterior.

---

<sup>\*</sup> Despreciando las armónicas producidos por los devanados y ranuras del rotor y estator.

<sup>\*</sup> Secuencia negativa se refiere al espacio conocido como de secuencias + - y 0.

Existen diferentes modelos del generador síncrono para estudios armónicos, los principales trabajos aparecen en las referencias [15,16,18,31]. En la presente investigación se utilizó la metodología seguida por A. Semlyen, J. F. Eggleston, J. Arrillaga y A. Medina [15,17,18], con la diferencia de que en el presente trabajo se usa el dominio armónico real utilizando las series Hartley; en lugar de usar el dominio armónico complejo que utiliza las series de Fourier.

## 5.2. CONSIDERACIONES PRELIMINARES

El modelo de la máquina síncrona parte de las siguientes consideraciones:

- Se desprecia la saturación. Se usa superposición de los campos magnéticos, y se asume que las inductancias propias y mutuas son independientes de las corrientes que circulan en los devanados.
- La f.m.m. en el entrehierro y los flujos son representados por la componente fundamental, considerando una distribución simétrica respecto al eje magnético de los devanados.
- Se desprecia el efecto de ranuras. Se considera distribución de los devanados con conductores finamente acomodados y despreciando diámetro de conductores.
- Conmutación ideal. Se desprecian el ancho de las escobillas y de los segmentos del conmutador, la corriente opuesta durante la conmutación se considera instantánea.
- Se considera que el material magnético está libre de corrientes de Eddy y pérdidas por histéresis.

Estas consideraciones se toman en cuenta para poder obtener el equivalente del generador síncrono dado por la ecuación (5.4) [31] la cual será usada para estudios en estado estable.

### 5.2.1. Operación del generador síncrono bajo condiciones desbalanceadas

Al operar bajo condiciones desbalanceadas se tiene que las corrientes  $I_{dq0} = P I_{abc}$  tienen dependencia del tiempo y que en un caso general pueden ser representadas por series de Hartley, por lo que  $\frac{d}{dt} I_{dq0} \neq 0$ , donde P es la transformada de Park dada por:

$$P = S^T T \quad (5.1)$$

donde:

$$S = \begin{bmatrix} \cos \omega_r t & -\text{sen} \omega_r t & 0 \\ \text{sen} \omega_r t & \cos \omega_r t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$$T = \sqrt{2/3} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

En este capítulo se obtendrá el modelo del generador síncrono en el espacio de las fases abc de tal manera que no tenga dependencia del tiempo. Para esto se hace el proceso inverso, o sea que partiendo del modelo dq0 se va hacia el modelo abc. Este proceso de transformación se puede describir como lo muestra la Figura 5.1.

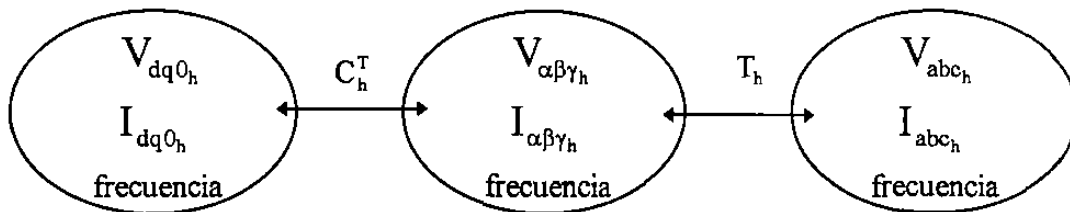


Figura 5.1. Representación de los voltajes y corrientes en diferentes espacios.

Donde  $Y_{dq0h}$ ,  $C_h^T$  y  $T_h$  son reales y no dependen del tiempo, entonces  $Y_{\alpha\beta\gamma h}$  y  $Y_{abc_h}$  son reales sin dependencia del tiempo. Este proceso se desarrolla en las siguientes tres secciones.

### 5.3. OBTENCION DE LA MATRIZ DE ADMITANCIAS DE HARTLEY $Y_{dq0}$

Debido a que generalmente se conocen los datos de los generadores en el espacio dq0, de aquí se parte para obtener un modelo del generador síncrono en el espacio de las fases abc. Para estudios armónicos se parte del modelo dq0 de la máquina síncrona.

Las ecuaciones que describen a la máquina síncrona están dadas por:

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \\ v_0 \\ v_f \\ v_s \\ v_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_t \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} L_d & 0 & 0 & M_{df} & M_{ds} & 0 \\ 0 & L_q & 0 & 0 & 0 & M_{qt} \\ 0 & 0 & L_0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{df} & 0 & 0 & L_f & M_{fs} & 0 \\ M_{ds} & 0 & 0 & M_{fs} & L_s & 0 \\ 0 & M_{qt} & 0 & 0 & 0 & L_t \end{bmatrix} + \omega_r \begin{bmatrix} 0 & -L_q & 0 & 0 & 0 & -M_{qt} \\ L_d & 0 & 0 & M_{df} & M_{ds} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \\ i_f \\ i_s \\ i_t \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Donde  $p=d/dt$ , y para condiciones en estado estable la velocidad  $\omega_r$  del rotor es constante y  $v_s=v_t=0$ , considerando, además, que el voltaje de campo  $v_f$  es completamente de c.d. (sin rizado alguno). Utilizando el modelo (5.4) sólo para estudios armónicos, esto es, omitiendo el modelo para estudios a frecuencia fundamental, dado que este se obtiene en un estudio de flujos convencional; por lo tanto se considera a  $v_f=0$ . Así, se tiene que (5.4) en forma compacta se puede representar por:

$$\begin{bmatrix} V_{dq0} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} + \omega_r \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{dq0} \\ I_{fst} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

o en forma más abreviada:

$$\begin{bmatrix} V_{dq0} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{dq0} \\ I_{fst} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

donde:

$$\begin{aligned} Z_{11} &= R_{11} + pL_{11} + \omega_r J_{11} & Z_{12} &= pL_{12} + \omega_r J_{12} \\ Z_{21} &= pL_{21} & Z_{22} &= R_{22} + pL_{22} \end{aligned} \quad (5.7)$$

así, se obtiene:

$$I_{dq0} = Y_{dq0} V_{dq0} \quad (5.8)$$

donde:

$$Y_{dq0} = \{Z_{11} - Z_{12}Z_{22}^{-1}Z_{21}\}^{-1} \quad (5.9)$$

En el dominio Hartley, (5.9) se representa por:

$$\begin{aligned} Z_{11} &= \begin{bmatrix} R_{11} + \omega_r J_{11} & h\omega L_{11} \\ -h\omega L_{11} & R_{11} + \omega_r J_{11} \end{bmatrix} & Z_{12} &= \begin{bmatrix} \omega_r J_{12} & h\omega L_{12} \\ -h\omega L_{12} & \omega_r J_{12} \end{bmatrix} \\ Z_{21} &= \begin{bmatrix} 0 & h\omega L_{21} \\ -h\omega L_{21} & 0 \end{bmatrix} & Z_{22} &= \begin{bmatrix} R_{22} & h\omega L_{22} \\ -h\omega L_{22} & R_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.10)$$

así, para una armónica específica  $n$ , la matriz de admitancias para dicha armónica tendrá la siguiente forma:

$$Y_{dq0n} = \begin{bmatrix} G_n & -B_n \\ B_n & G_n \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

$G$  y  $B$  son matrices de  $3 \times 3$ , y  $Y_{dq0}$  para todo un rango de armónicas tendrá la forma de la matriz (4.10), donde cada elemento es una matriz de  $3 \times 3$ . Además se tiene que  $\omega_r = \omega = v = \text{cte} = 1.0$  p.u. Así, se tiene que :

$$I_{dq0h} = Y_{dq0h} V_{dq0h} \quad (5.12)$$

donde la matriz  $Y_{dq0h}$  es una matriz de admitancia Hartley de dimensiones  $(2h+1) \times (2h+1)$  correspondientes a las armónicas desde  $-h$  a  $h$ . Los vectores  $I_{dq0h}$  y  $V_{dq0h}$  están formados por los coeficientes de las series Hartley que representan a  $I_{dq0}$  y  $V_{dq0}$  respectivamente.

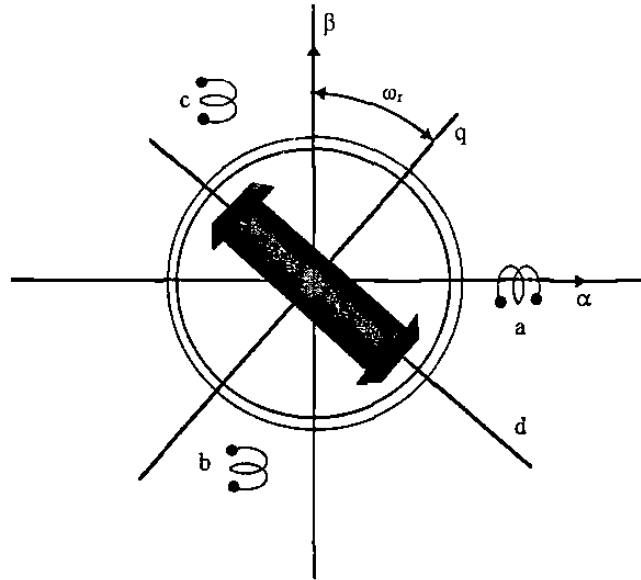


Figura 5.2. Representación de la máquina síncrona, mostrando los ejes  $dq0$ ,  $\alpha\beta\gamma$ , y  $abc$ .

#### 5.4. OBTENCION DE LA MATRIZ DE ADMITANCIAS DE HARTLEY $Y_{\alpha\beta\gamma h}$

La transformación del espacio  $dq0$  al espacio  $\alpha\beta\gamma$  es la siguiente:

$$V_{\alpha\beta\gamma} = S V_{dq0} \quad (5.13)$$

y cumple con  $S^{-1} = S^T$ . Bajo condiciones desbalanceadas, y en general bajo condiciones no sinusoidales, los voltajes  $V_{dq0}$  están dados por:

$$v_d(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_{d_n} \text{cas}(nvt) \quad (5.14)$$

$$v_q(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} V_{q_m} \text{cas}(mvt) \quad (5.15)$$

$$v_o(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} V_{o_i} \text{cas}(ivt) \quad (5.16)$$

entonces

$$v_\alpha(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} V_{\alpha_k} \text{cas}(kvt) \quad (5.17)$$

$$v_\beta(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} V_{\beta_j} \text{cas}(jvt) \quad (5.18)$$

$$v_\gamma(t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} V_{\gamma_r} \text{cas}(rvt) \quad (5.19)$$

igualando  $\omega_r = v$  y desarrollando (5.13), mediante una serie de manipulaciones algebraicas se llega a:

$$v_\alpha(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_{d_n} \text{cas}(n+1)vt + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_{d_n} \text{cas}(n-1)vt + \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} V_{q_m} \text{cas}(-m-1)vt - \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} V_{q_m} \text{cas}(-m+1)vt \quad (5.20)$$

$$v_\beta(t) = -\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_{d_n} \text{cas}(-n-1)vt + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_{d_n} \text{cas}(-n+1)vt + \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} V_{q_m} \text{cas}(m+1)vt + \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} V_{q_m} \text{cas}(m-1)vt \quad (5.21)$$

$$v_\gamma(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} V_{o_i} \text{cas}(ivt) \quad (5.22)$$

Comparando (5.17), (5.18) y (5.19) con (5.20), (5.21) y (5.22) respectivamente, al desarrollar estas últimas tres ecuaciones, e identificar coeficientes de la misma armónica con el objetivo de no trabajar con los términos  $\text{cas}(\cdot)$ , en forma matricial se tiene:



$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 V_{\alpha_{-3}} \\
 V_{\alpha_{-2}} \\
 V_{\alpha_{-1}} \\
 V_{\alpha_0} \\
 V_{\alpha_1} \\
 V_{\alpha_2} \\
 V_{\alpha_3} \\
 \vdots
 \end{array}
 = \frac{1}{2} \begin{array}{c} \vdots \\ V_{d_{-4}} \\ V_{d_{-3}} \\ V_{d_{-2}} \\ V_{d_{-1}} \\ V_{d_0} \\ V_{d_1} \\ V_{d_2} \\ V_{d_3} \\ V_{d_4} \\ \vdots \end{array}
 + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \vdots \\ V_{d_{-2}} \\ V_{d_{-1}} \\ V_{d_1} \\ V_{d_2} \\ V_{d_3} \\ V_{d_4} \\ \vdots \end{array}
 + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \vdots \\ V_{q_2} \\ V_{q_1} \\ V_{q_0} \\ V_{q_{-1}} \\ V_{q_{-2}} \\ V_{q_{-3}} \\ V_{q_{-4}} \\ \vdots \end{array}
 - \frac{1}{2} \begin{array}{c} \vdots \\ V_{q_4} \\ V_{q_3} \\ V_{q_2} \\ V_{q_1} \\ V_{q_0} \\ V_{q_{-1}} \\ V_{q_{-2}} \\ \vdots \end{array}
 \quad (5.23)$$

$k \qquad n=k-1 \qquad n=k+1 \qquad m=-k-1 \qquad m=-k+1$

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 V_{\beta_{-3}} \\
 V_{\beta_{-2}} \\
 V_{\beta_{-1}} \\
 V_{\beta_0} \\
 V_{\beta_1} \\
 V_{\beta_2} \\
 V_{\beta_3} \\
 \vdots
 \end{array}
 = -\frac{1}{2} \begin{array}{c} \vdots \\ V_{d_2} \\ V_{d_1} \\ V_{d_0} \\ V_{d_{-1}} \\ V_{d_{-2}} \\ V_{d_{-3}} \\ V_{d_{-4}} \\ \vdots \end{array}
 + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \vdots \\ V_{d_4} \\ V_{d_3} \\ V_{d_2} \\ V_{d_1} \\ V_{d_0} \\ V_{d_{-1}} \\ V_{d_{-2}} \\ \vdots \end{array}
 + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \vdots \\ V_{q_{-4}} \\ V_{q_{-3}} \\ V_{q_{-2}} \\ V_{q_{-1}} \\ V_{q_0} \\ V_{q_1} \\ V_{q_2} \\ \vdots \end{array}
 + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \vdots \\ V_{q_{-2}} \\ V_{q_{-1}} \\ V_{q_0} \\ V_{q_1} \\ V_{q_2} \\ V_{q_3} \\ V_{q_4} \\ \vdots \end{array}
 \quad (5.24)$$

$j \qquad n=-j-1 \qquad n=-j+1 \qquad m=j-1 \qquad m=j+1$

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 V_{\gamma_{-3}} \\
 V_{\gamma_{-2}} \\
 V_{\gamma_{-1}} \\
 V_{\gamma_0} \\
 V_{\gamma_1} \\
 V_{\gamma_2} \\
 V_{\gamma_3} \\
 \vdots
 \end{array}
 = \begin{array}{c} \vdots \\ V_{0_{-3}} \\ V_{0_{-2}} \\ V_{0_{-1}} \\ V_{0_0} \\ V_{0_1} \\ V_{0_2} \\ V_{0_3} \\ \vdots \end{array}
 \quad (5.25)$$

$r \qquad i=r$



Se tiene además que:

$$C_h^T C_h = \begin{bmatrix} X & & & & & & & & & Y^T \\ & U & & & & & & & & 0 \\ & & \ddots & & & & & & & \vdots \\ & & & U & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & 0 & & & & & & & & U \\ Y & \vdots & & & & & & & & X \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

donde:

$$X = \frac{1}{2}W + \frac{1}{2}D \quad U = W + \frac{1}{2}D = \text{identidad} \quad Y = \frac{1}{2}M \quad (5.31)$$

La ecuación (5.30) será de gran utilidad dado que al trabajar con  $h+1$  armónicas, se tiene que (5.30) se puede truncar en la  $h$ -ésima armónica, y así trabajar con una matriz identidad. Con esta suposición se tiene de (5.29) y (5.30) que:

$$C_{h+1}^T V_{\alpha\beta\gamma_{h+1}} = C_{h+1}^T C_{h+1} V_{dq0_{h+1}} \quad (5.32)$$

si se trunca (5.32) hasta la  $h$ -ésima armónica se obtiene:

$$V_{dq0_h} = C_h^T V_{\alpha\beta\gamma_h} \quad (5.33)$$

De la ecuación (5.26), si los voltajes  $v_d(t)$  y  $v_q(t)$  no contienen armónicas, o sea es que sólo existen sus componentes  $V_{d_0}$  y  $V_{q_0}$  (componentes de c.d.), esto es equivalente a operación del generador en condiciones balanceadas, y se obtiene que:

$$\begin{aligned} V_{\alpha_{-1}} &= \frac{1}{2}(V_{d_0} + V_{q_0}) \\ V_{\beta_{-1}} &= \frac{1}{2}(-V_{d_0} + V_{q_0}) \\ V_{\alpha_1} &= \frac{1}{2}(V_{d_0} - V_{q_0}) \\ V_{\beta_1} &= \frac{1}{2}(V_{d_0} + V_{q_0}) \end{aligned} \quad (5.34)$$

de donde se obtienen las componentes  $\alpha$  y  $\beta$

$$\begin{aligned} v_{\alpha}(t) &= \frac{1}{2}(V_{d_0} + V_{q_0})\cos(-vt) + \frac{1}{2}(V_{d_0} - V_{q_0})\cos(vt) = V_{d_0}\cos(vt) - V_{q_0}\sin(vt) \\ v_{\beta}(t) &= \frac{1}{2}(-V_{d_0} + V_{q_0})\cos(-vt) + \frac{1}{2}(V_{d_0} + V_{q_0})\cos(vt) = V_{d_0}\sin(vt) + V_{q_0}\cos(vt) \end{aligned} \quad (5.35)$$

el cual es un resultado esperado al usar (5.13). De manera similar que la relación (5.33) se cumple que:

$$I_{dq0_h} = C_h^T I_{\alpha\beta\gamma_h} \quad (5.36)$$

sustituyendo (5.33) y (5.36) en (5.12) se llega a (5.38)

$$\begin{aligned} C_h^T I_{\alpha\beta\gamma_h} &= Y_{dq0_h} C_h^T V_{\alpha\beta\gamma_h} \\ I_{\alpha\beta\gamma_h} &= C_h Y_{dq0_h} C_h^T V_{\alpha\beta\gamma_h} \\ I_{\alpha\beta\gamma_h} &= Y_{\alpha\beta\gamma_h} V_{\alpha\beta\gamma_h} \end{aligned} \quad (5.37)$$

donde:

$$Y_{\alpha\beta\gamma_h} = C_h Y_{dq0_h} C_h^T \quad (5.38)$$

## 5.5. OBTENCION DE LA MATRIZ DE ADMITANCIAS DE HARTLEY $Y_{abc_h}$

Para pasar del espacio  $\alpha\beta\gamma$  al espacio de las fases  $abc$ , se tiene la siguiente transformación:

$$\begin{aligned} V_{\alpha\beta\gamma} &= T V_{abc} \\ I_{\alpha\beta\gamma} &= T I_{abc} \end{aligned} \quad (5.39)$$

la cual cumple con  $T^{-1} = T^T$ . Considerando  $h$  armónicas se tiene el arreglo matricial  $T_h$ .

$$\mathbf{T}_h = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & \mathbf{T} & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

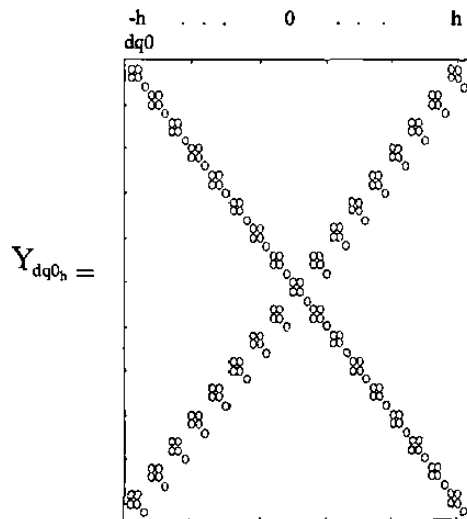
Sustituyendo (5.39) en (5.37) y usando (5.40) para  $h$  armónicas, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_h \mathbf{I}_{abc_h} &= \mathbf{Y}_{\alpha\beta\gamma_h} \mathbf{T}_h \mathbf{V}_{abc_h} \\ \mathbf{I}_{abc_h} &= \mathbf{T}_h^T \mathbf{Y}_{\alpha\beta\gamma_h} \mathbf{T}_h \mathbf{V}_{abc_h} \\ \mathbf{I}_{abc_h} &= \mathbf{Y}_{abc_h} \mathbf{V}_{abc_h} \end{aligned} \quad (5.41)$$

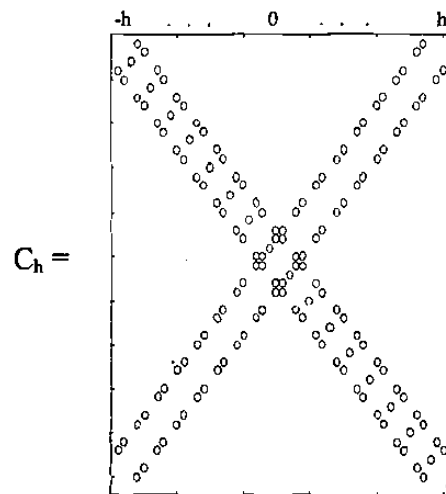
donde:

$$\mathbf{Y}_{abc_h} = \mathbf{T}_h^T \mathbf{Y}_{\alpha\beta\gamma_h} \mathbf{T}_h \quad (5.42)$$

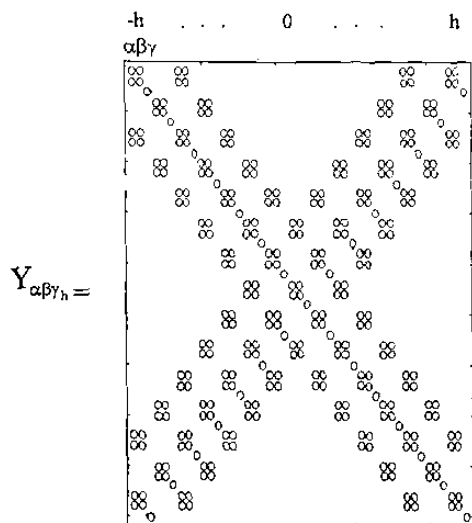
estas matrices de admitancias y de transformación tienen las siguientes estructuras (5.43-5.48) formadas por números reales.



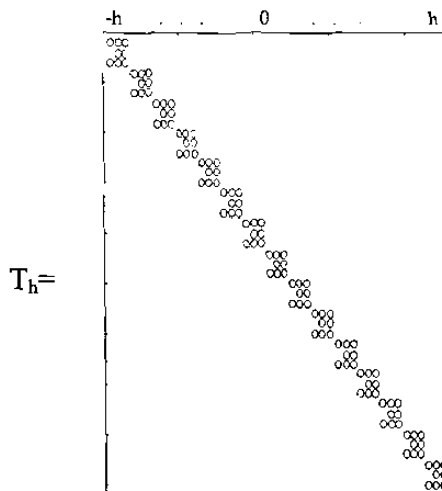
(5.43)



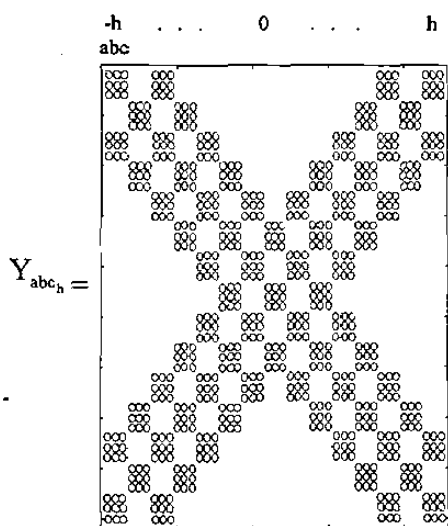
(5.44)



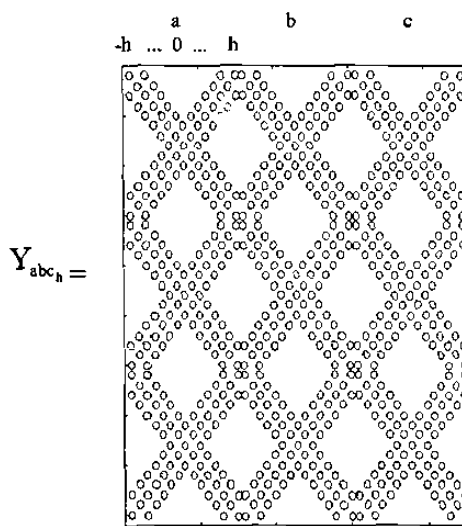
(5.45)



(5.46)



(5.47)



(5.48)

La ecuación (5.45) establece que para una armónica  $h$  en particular se tiene que  $I_{\alpha\beta\gamma h}$  depende de  $V_{\alpha\beta\gamma h}$  y  $V_{\alpha\beta\gamma h\pm 2}$  lo cual significa que el voltaje  $V_{\alpha\beta\gamma h}$  provoca una corriente  $I_{\alpha\beta\gamma h}$  y una corriente  $I_{\alpha\beta\gamma h\pm 2}$ ; lo mismo sucede con (5.47). Estos resultados de conversión de frecuencias coinciden con lo presentado en la literatura [11,16]. Además se observa de (5.45) que los equivalentes  $\gamma$  no intervienen en el proceso de conversión de frecuencias.

La ecuación (5.47) tiene por cada armónica  $h$  las tres fases  $abc$ , y por lo expuesto en el capítulo anterior se hace necesario, antes de incluir el equivalente matricial del generador al sistema, acomodar la información de manera que tenga la forma especificada en el capítulo anterior. Así, la matriz (5.47) toma la forma de (5.48). Por tanto, la matriz de admitancias nodal (5.48) representa al generador síncrono para estudios armónicos incluyendo el efecto de conversión de frecuencia. El efecto de saturación se puede tratar de la manera como se expuso en el capítulo 4.

## 5.6. INCLUSION DE UNA CARACTERISTICA NO-LINEAL

Los tres devanados del generador pueden ser representados por el equivalente de la Figura 5.3. Los equivalentes incluyen la característica no-lineal en las fases  $abc$ , debido a la saturación.

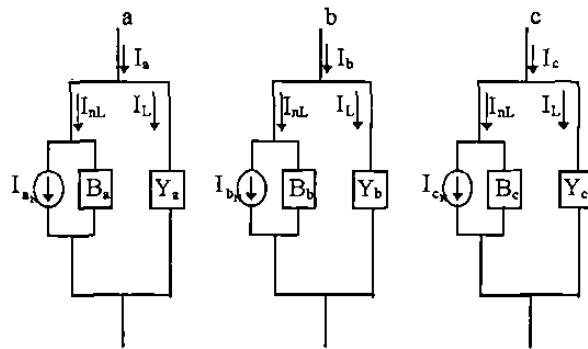


Figura 5.3. Devanados del generador para estudios armónicos.

Las matrices  $B$  son de orden  $(2h+1) \times (2h+1)$  donde  $h$  es el número de armónicas a considerar y representan la parte no-lineal de los devanados del generador y tiene la forma (4.45). En tanto el equivalente lineal está representado por la matriz  $Y_{abc_h}$  de la forma (5.48). La matriz que representa el efecto no-lineal está dada por:

$$B_{abc_h} = \begin{bmatrix} B_a & & \\ & B_b & \\ & & B_c \end{bmatrix} \quad I_N = \begin{bmatrix} I_{aN} \\ I_{bN} \\ I_{cN} \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

El sistema de ecuaciones que representa al generador, incluyendo el efecto de conversión de frecuencias y el efecto de saturación, está dado por:

$$I_{abc_h} = (Y_{abc_h} + B_{abc_h})V_{abc_h} + I_N \quad (5.50)$$

$$\text{o} \quad I_{abc_h} = Y_{eq_h} V_{abc_h} + I_N \quad (5.51)$$

donde  $Y_{eq_h} = Y_{abc_h} + B_{abc_h}$  es una matriz de admitancias que contiene dichos efectos.

La matriz de admitancias nodal de (5.51) tiene una estructura como en la Figura 5.4.

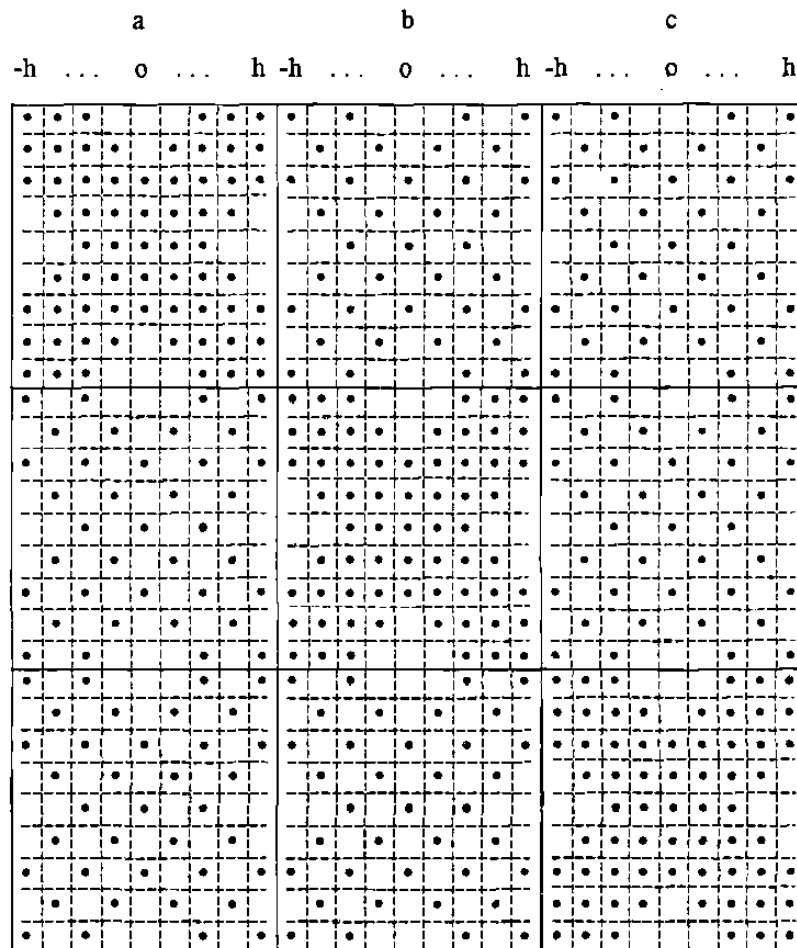


Figura 5.4. Forma de la matriz de admitancias Hartley que representa al generador incluyendo el efecto de conversión de frecuencias y el efecto de saturación .



## 5.7. CONEXION DEL GENERADOR AL SISTEMA DE POTENCIA

La matriz de admitancias Hartley  $Y_{eqh}$  de (5.51) incluye el efecto de conversión de frecuencias, está implícito el efecto lineal de los devanados, y el efecto de la saturación. Es importante retomar el concepto de dónde se obtuvo esta matriz de admitancias. Esta matriz de admitancias se obtiene de un equivalente en el espacio dq0, el cual a su vez se obtuvo de un equivalente en el espacio de las fases abc; representado por la Figura 5.5, y matemáticamente por el sistema de ecuaciones (5.51) [31].

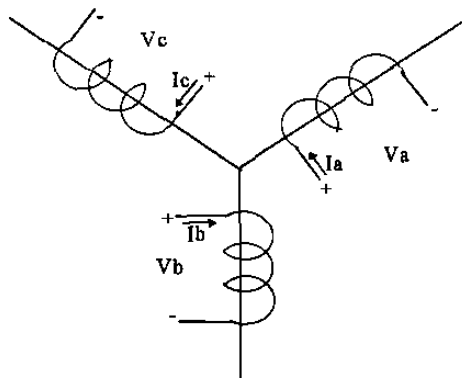


Figura 5.5. Representación de los devanados del estator del generador.

El generador de la Figura 5.5. al ser conectado al sistema, puede presentar las conexiones de la Figura 5.6.

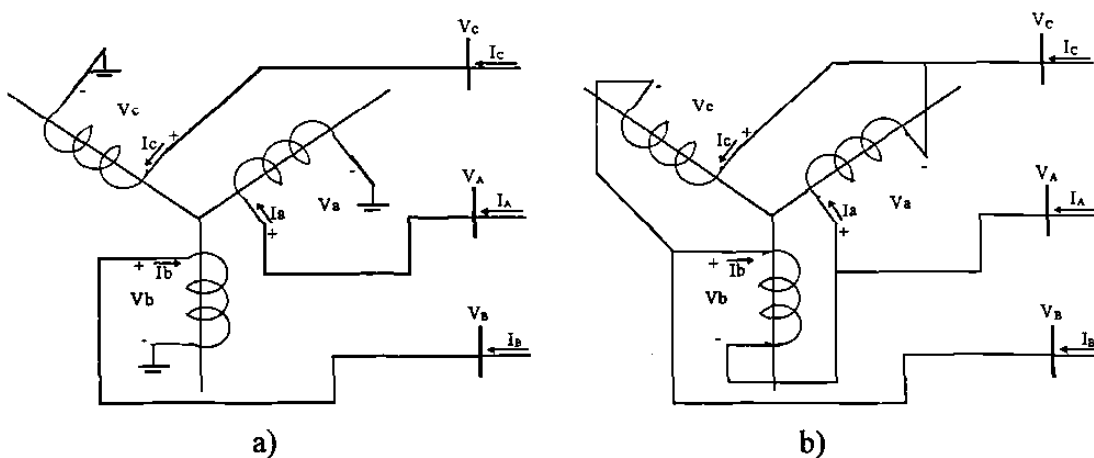


Figura 5.6. Generador conectado al sistema de potencia. a) Estrella. b) Delta.

En la Figura 5.6 el sistema ve el siguiente equivalente:

$$I_{ABC_h} = Y_{ABC_h} V_{ABC_h} + I_{sN} \quad (5.52)$$

donde  $I_{sN}$  son las inyecciones debido a la saturación del generador. Observando la Figura 5.6.a se tiene que  $I_{ABC_h} = I_{abc_h}$ ,  $I_{sN} = I_N$  y  $V_{ABC_h} = V_{abc_h}$  por tanto, la matriz de admitancias a conectar al sistema está dada por:

$$Y_{ABC_h} = Y_{eq_h} = Y_{abc_h} + B_{abc_h} \quad (5.53)$$

Para la conexión delta del generador se tiene el equivalente de la Figura 5.6.b

$$I_{ABC_h} = Q I_{abc_h}, \quad I_{sN} = Q I_N \quad \text{y} \quad V_{abc_h} = Q^T V_{ABC_h}$$

$$\text{donde } Q = \begin{bmatrix} U & -U & 0 \\ 0 & U & -\tilde{U} \\ -\tilde{U} & 0 & U \end{bmatrix} \text{ y } U \text{ es la matriz identidad.}$$

premultiplicando (5.51) por  $Q$  y sustituyendo  $V_{abc_h}$ , se tiene:

$$I_{ABC_h} = Q Y_{eq_h} Q^T V_{ABC_h} + I_{sN} \quad (5.54)$$

así, la matriz de admitancias a conectar al sistema está dada por:

$$Y_{ABC_h} = Q Y_{eq_h} Q^T = Q Y_{abc_h} Q^T + Q B_{abc_h} Q^T \quad (5.55)$$

Se puede, por tanto, representar al generador como se muestra en la Figura 5.7. Para simplificar la notación se supone una conexión del generador en estrella sólidamente aterrizada donde  $Y_g = Y_{ABC_h} = Y_{abc_h}$  y  $B_g = B_{ABC_h} = B_{abc_h}$ .

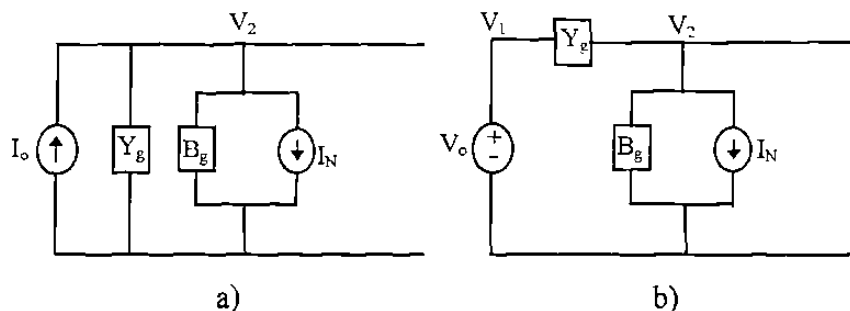


Figura 5.7. Equivalente del generador síncrono para estudios armónicos. a) Equivalente Norton. b) Equivalente Thévenin.

La ecuación de inyecciones de corriente que representa al equivalente Thévenin está dada por:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ -I_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_g & -Y_g \\ -Y_g & Y_g + B_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

donde  $I_N$  y  $V_1$  son conocidos. Si se conecta una carga  $Y_L$  al generador se tiene que (5.56) queda modifica como se muestra a continuación.

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ -I_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_g & -Y_g \\ -Y_g & Y_g + B_g + Y_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

## 5.8. RESUMEN

El modelo del generador obtenido en este capítulo representa al generador síncrono, y se considera apropiado para estudios trifásicos armónicos en el dominio Hartley. Se mostró en forma detallada la obtención del equivalente, así como el procedimiento para su inclusión al sistema eléctrico de potencia; en conjunto con otros elementos del sistema.

## **CAPITULO 6**

### **REPRESENTACION DEL TRANSFORMADOR EN EL DOMINIO HARTLEY**

#### **6.1. INTRODUCCION**

Se han desarrollado en capítulos anteriores los modelos de elementos lineales, no-lineales y del generador síncrono para estudios armónicos. La línea de transmisión, como se mostró en el ejemplo del capítulo 4, se puede representar por equivalentes lineales aunque con ciertas limitaciones, en realidad la línea de transmisión debe incluir la dependencia de la frecuencia. En el presente capítulo se obtendrá un modelo del transformador para estudios armónicos.

Se parte del modelo del transformador monofásico para estudios en estado estable, incluyendo la característica no-lineal [14], y se obtiene el modelo del transformador monofásico para estudios armónicos. A partir del modelo monofásico se forman bancos trifásicos para ser usados en estudios armónicos.

#### **6.2. MODELO DEL TRANSFORMADOR MONOFASICO**

Partiendo del modelo del transformador monofásico de dos devanados [32,33] e incluyendo la rama de excitación [14]; se obtiene el modelo del transformador monofásico para estudios armónicos.

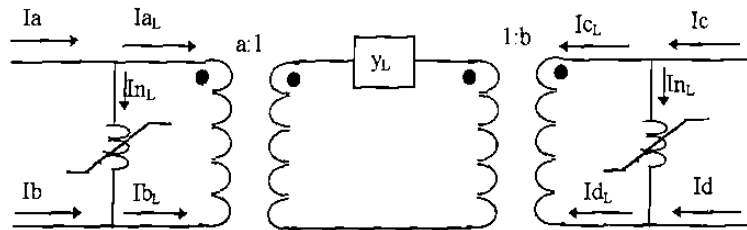


Figura 6.1. Modelo del transformador monofásico para estudios armónicos.

De la Figura 6.1 considerando las relaciones de transformación  $a=1$  y  $b=1$  se obtiene el circuito de celosía equivalente de la Figura 6.2, donde la parte no-lineal se modela por el equivalente Norton.

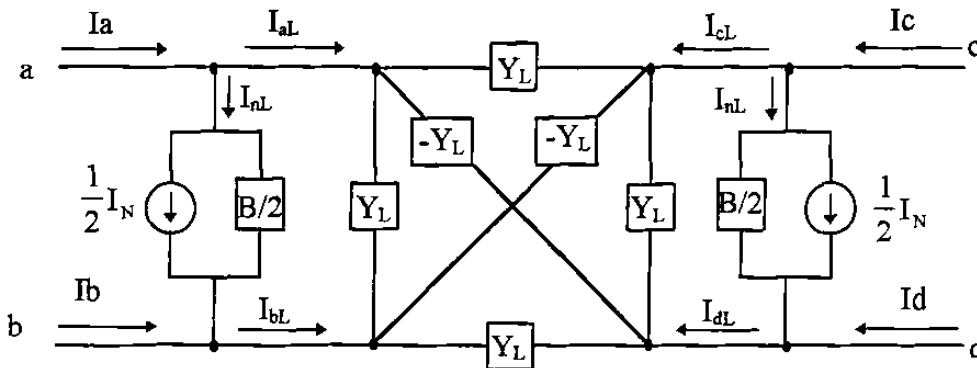


Figura 6.2. Equivalente del transformador monofásico para estudios armónicos.

Las matrices de admitancias  $Y_L$  y  $B$  son de orden  $(2h+1) \times (2h+1)$  donde  $h$  es el número de armónicas a considerar, y tiene la forma de (4.10) y (4.45), respectivamente. La ecuación de inyecciones nodales que representa al equivalente de la Figura 6.2 está dada por:

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_L + \frac{1}{2}B & -Y_L - \frac{1}{2}B & -Y_L & Y_L \\ -Y_L - \frac{1}{2}B & Y_L + \frac{1}{2}B & Y_L & -Y_L \\ -Y_L & Y_L & Y_L + \frac{1}{2}B & -Y_L - \frac{1}{2}B \\ Y_L & -Y_L & -Y_L - \frac{1}{2}B & Y_L + \frac{1}{2}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \\ V_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}I_N \\ -\frac{1}{2}I_N \\ \frac{1}{2}I_N \\ -\frac{1}{2}I_N \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

El equivalente de la Figura 6.2 se puede representar por su parte lineal y su parte no-lineal por separado, como se muestra en la Figura 6.3 y 6.4.

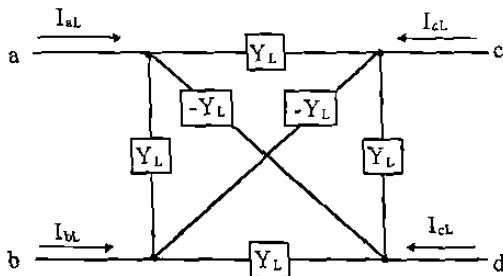


Figura 6.3. Equivalente de la parte lineal.

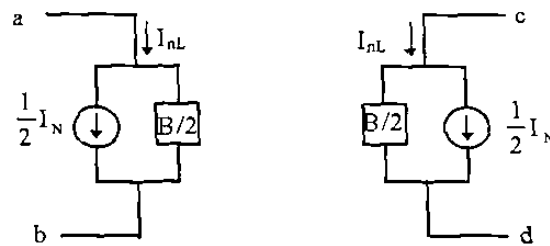


Figura 6.4. Equivalente de la parte no-lineal.

### 6.3. MODELOS DE BANCOS TRIFASICOS

Los bancos de transformadores se forman a partir de conexiones de transformadores monofásicos. Por ejemplo, la conexión delta estrella aterrizada que se muestra en la Figura 6.5, se obtiene de la conexión de los tres devanados monofásicos. La Figura 6.6 presenta el equivalente correspondiente.

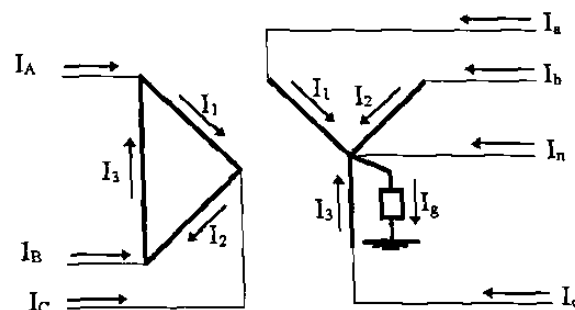


Figura 6.5. Conexión de un banco trifásico.

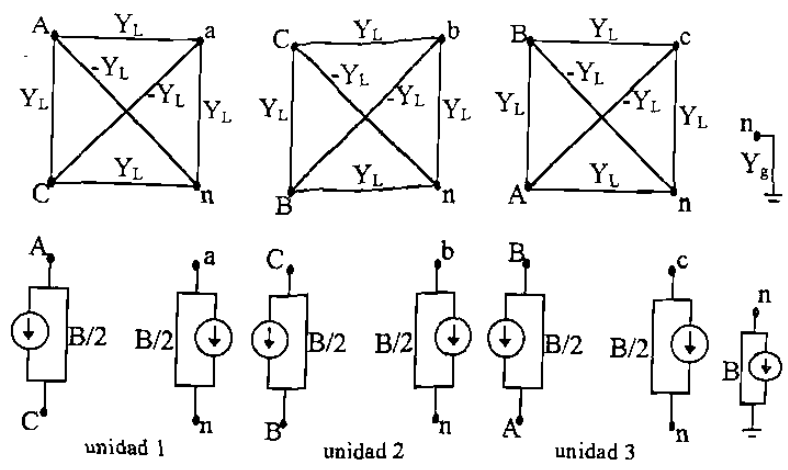


Figura 6.6. Equivalente del banco de la Figura 6.5.

Del circuito de la Figura 6.6 se obtiene la ecuación de inyecciones nodales. Las formas matriciales (6.4) y (6.5) representan las matrices de admitancia nodal armónica para la parte lineal y la no-lineal del circuito, respectivamente.

$$I_{\text{Lineal}_h} = \begin{bmatrix} I_{AL} \\ I_{BL} \\ I_{CL} \\ I_{aL} \\ I_{bL} \\ I_{cL} \\ I_{nL} \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

$$I_{\text{noLineal}_h} + I_N = \begin{bmatrix} I_{AnL} \\ I_{BnL} \\ I_{CnL} \\ I_{anL} \\ I_{bnL} \\ I_{cnL} \\ I_{nnL} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I_{1N} - I_{3N} \\ I_{3N} - I_{2N} \\ I_{2N} - I_{1N} \\ I_{1N} \\ I_{2N} \\ I_{3N} \\ -I_{1N} - I_{2N} - I_{3N} + 2I_{nN} \end{bmatrix} \tag{6.3}$$

$$Y_{\text{Lineal}_h} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}Y_L & -\frac{1}{3}Y_L & -\frac{1}{3}Y_L & -\frac{1}{\sqrt{3}}Y_L & & \frac{1}{\sqrt{3}}Y_L \\ -\frac{1}{3}Y_L & \frac{2}{3}Y_L & -\frac{1}{3}Y_L & \frac{1}{\sqrt{3}}Y_L & -\frac{1}{\sqrt{3}}Y_L & \\ -\frac{1}{3}Y_L & -\frac{1}{3}Y_L & \frac{2}{3}Y_L & & \frac{1}{\sqrt{3}}Y_L & -\frac{1}{\sqrt{3}}Y_L \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}Y_L & \frac{1}{\sqrt{3}}Y_L & & Y_L & & -Y_L \\ & -\frac{1}{\sqrt{3}}Y_L & \frac{1}{\sqrt{3}}Y_L & & Y_L & -Y_L \\ \frac{1}{\sqrt{3}}Y_L & & -\frac{1}{\sqrt{3}}Y_L & & & Y_L \\ & & & -Y_L & -Y_L & -Y_L \\ & & & & & 3Y_L + Y_g \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

$$Y_{\text{noLineal}_h} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} B_1 + B_3 & -B_3 & -B_1 & & & \\ -B_3 & B_2 + B_3 & -B_2 & & & \\ -B_1 & -B_2 & B_1 + B_2 & & & \\ & & & B_1 & & -B_1 \\ & & & & B_2 & -B_2 \\ & & & & & B_3 \\ & & & & & -B_3 \\ & & & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ & & & & & B_1 + B_2 + B_3 + 2B_g \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

Agrupando las ecuaciones se tiene que:

$$\begin{aligned} I_{\text{ABC,abc,n}_h} &= I_{\text{Lineal}_h} + I_{\text{noLineal}_h} + I_N = Y_{\text{Lineal}_h} V_{\text{ABC,abc,n}_h} + Y_{\text{noLineal}_h} V_{\text{ABC,abc,n}_h} + I_N \\ I_{\text{ABC,abc,n}_h} &= Y_{\text{ABC,abc,n}_h} V_{\text{ABC,abc,n}_h} + I_N \end{aligned} \quad (6.6)$$

donde:

$$Y_{\text{ABC,abc,n}_h} = Y_{\text{Lineal}_h} + Y_{\text{noLineal}_h} \quad (6.7)$$

De (6.2) y (6.3) se observa que las inyecciones de corriente  $I_{nL}$  e  $I_{nnL}$  son cero, no así la inyección de corriente  $I_{nN}$  de (6.3) la cual es diferente de cero, por lo que no se puede efectuar





#### 6.4. RESUMEN

El modelo del transformador presentado en este capítulo puede ser usado para estudios trifásicos armónicos, considerando el efecto de saturación. Como se puede apreciar, el efecto de saturación se incluye directamente a la matriz de admitancias nodal de Hartley que representa a la parte lineal del transformador. Además, se puede obtener la matriz de admitancias de Hartley para cualquier banco de transformadores trifásicos, ya sea autotransformador, transformador defasador u otras conexiones especiales [14,32,33]. El modelo será empleado al formar parte de un sistema de potencia con varios elementos en el próximo capítulo.

# CAPITULO 7

## REPRESENTACION DEL SISTEMA ELECTRICO DE POTENCIA EN EL DOMINIO HARTLEY

### 7.1. INTRODUCCION

En este capítulo se muestra un método de solución, así como algunos ejemplos que ilustran el modelado y la aplicación de las técnicas desarrolladas en capítulos anteriores. Partiendo de que una red se puede modelar por su parte lineal más su parte no-lineal la cual es representada por equivalentes Norton en el dominio Hartley. Como lo muestra la Figura 7.1.a, se puede formar un circuito equivalente de la red, Figura 7.1.b. La Figura 7.1.b sugiere el uso de un método iterativo para resolver el problema de armónicos.

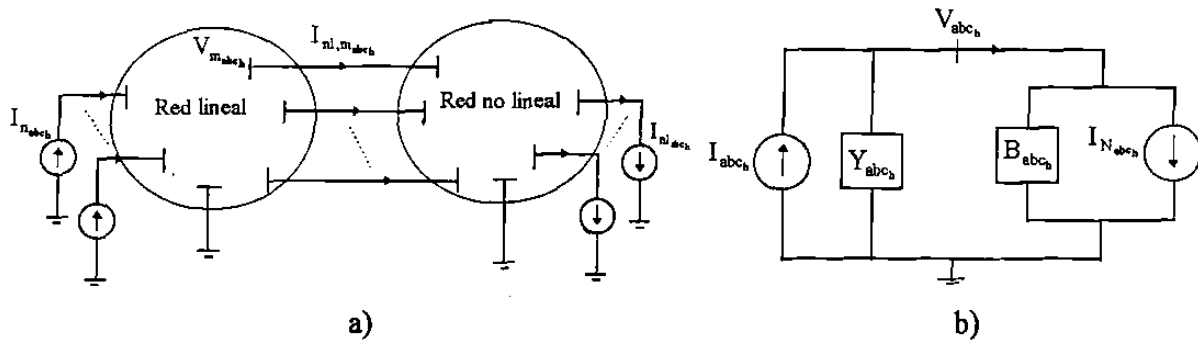


Figura 7.1. Representación de la red eléctrica en parte lineal y parte linealizada. a) Red eléctrica. b) Equivalente.

## 7.2. METODO DE SOLUCION

El método de solución para el equivalente de la Figura 7.1.b, para estudios armónicos, se muestra en el diagrama de flujo de la Figura 7.2. El diagrama se describe a continuación.

1. Se obtiene un equivalente Norton de la parte lineal de la red, formado por la matriz de admitancias de Hartley  $Y_{abc_h}$ , la cual no presenta acoplamientos entre armónicas; y por el vector de inyecciones de corriente constante de Hartley representadas por  $I_{abc_h}$ . El vector de corrientes sólo presenta valores diferentes de cero para las armónicas  $\pm 1$  a menos de que se haya considerado alguna fuente constante de inyección de armónicas
2. Se inicia un proceso iterativo con los valores de voltaje  $v_{abc}(t)$ , del nodo que une la parte lineal y no-lineal. Los voltajes son obtenidos de un estudio de flujo de carga a frecuencia fundamental. Se utiliza la transformada rápida de Hartley FHT para obtener su valor correspondiente en la frecuencia  $V_{abc_h}$ , o simplemente se trabaja mediante identidades trigonométricas.
3. Una vez obtenido  $V_{abc_h}$  se calcula el equivalente Norton linealizado de la parte no-lineal representado por  $B_{abc_h}$  e  $I_{N_{abc_h}}$ .
4. Se calcula el nuevo voltaje  $V_{abc_h}$ .
5. Se prueba convergencia. Si no cumple la tolerancia especificada se va al paso 3 y si no se pasa al 6.
6. Una vez terminado el proceso iterativo se tiene que  $V_{abc_h}$  contiene armónicas y su representación en el tiempo se encuentra mediante la transformada inversa de Hartley IFHT o mediante sustitución de los coeficientes (armónicas) en la serie de Hartley.

Se puede hacer mención que esta es sólo una forma de plantear el problema, y se puede plantear formas diferentes.

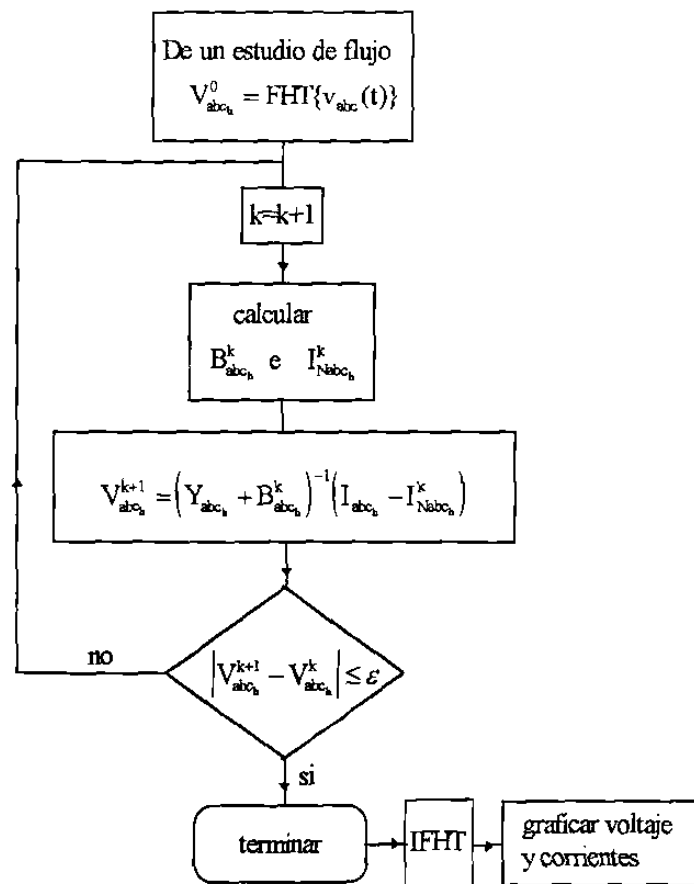


Figura 7.2. Diagrama de flujo.

El procedimiento para obtener la matriz  $B_{abc_h}$  e  $I_{N_{abc_h}}$  se basa en la sección 4.6. del capítulo 4, el cual se explica a continuación:

1.  $\Psi_{abc_h} = D^{-1}V_{abc_h}$  Se obtiene el flujo magnético en el dominio armónico.
2.  $\phi_{abc}(t) = \text{IFHT}\{\Psi_{abc_h}\}$  Se obtiene el flujo magnético en el dominio del tiempo.
3.  $i_{nl_{abc}}(t) = f(\phi_{abc}(t))$  Se encuentra la respuesta de la corriente respecto al flujo la cual presenta una característica no-lineal.

4.  $I_{nl_{abc_h}} = \text{FHT}\{i_{nl_{abc}}(t)\}$  Se obtiene la corriente en el dominio armónico, aquí la corriente ya presenta armónicas diferentes a los del flujo magnético, lo que explica que existe acoplamiento entre armónicas.
5.  $f'(\varphi_{abc}(t)) = \frac{i_{nl_{abc}}(t + \Delta t) - i_{nl_{abc}}(t)}{\varphi_{abc}(t + \Delta t) - \varphi_{abc}(t)}$  Se obtiene la derivada de la característica no-lineal en forma numérica en el tiempo si no se conoce en forma exacta.
6.  $F'(\varphi_{abc}(t)) = \text{FHT}\{f'(\varphi_{abc}(t))\}$  Se obtienen las armónicas de la derivada de la característica no-lineal.
7. Construir  $F_{abc_h}$  A partir de las armónicas obtenidas en 6, se forma la matriz que presenta acoplamiento entre armónicas.
8.  $B_{abc_h} = F_{abc_h} D^{-1}$  Se calcula la matriz de admitancias del equivalente Norton.
9.  $I_{N_{abc_h}} = -B_{abc_h} V_{abc_h} + I_{nl_{abc_h}}$  Se encuentra la corriente Norton.

Este procedimiento puede cambiar ligeramente cuando se trate de un elemento no-lineal y presente dependencia de otras variables, sin embargo el procedimiento es similar y no debe causar confusión.

### 7.3. EJEMPLOS NUMERICOS

**7.3.1. Ejemplo 1.** Carga no-lineal conectada a una fuente. En este primer caso se trata de ilustrar el comportamiento del voltaje nodal cuando la carga es un elemento que puede tener saturación e incluso pérdidas en el núcleo.

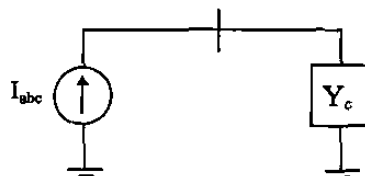


Figura 7.3. Carga trifásica.

Fuente: Fuente de corriente trifásica balanceada,  $I_{\max} = 1.0$  p.u.,  $f = 60$  Hz.

Carga: Carga trifásica balanceada, en estrella aterrizada, con reactancia inductiva de 1.0 p.u.

Característica de saturación  $i(t) = (\varphi(t) + \varphi^7(t)) / 4$ .

Pérdidas en el núcleo  $R=5$  p.u.

Aplicando el procedimiento de solución de la Figura 7.2. se tienen los siguientes resultados:

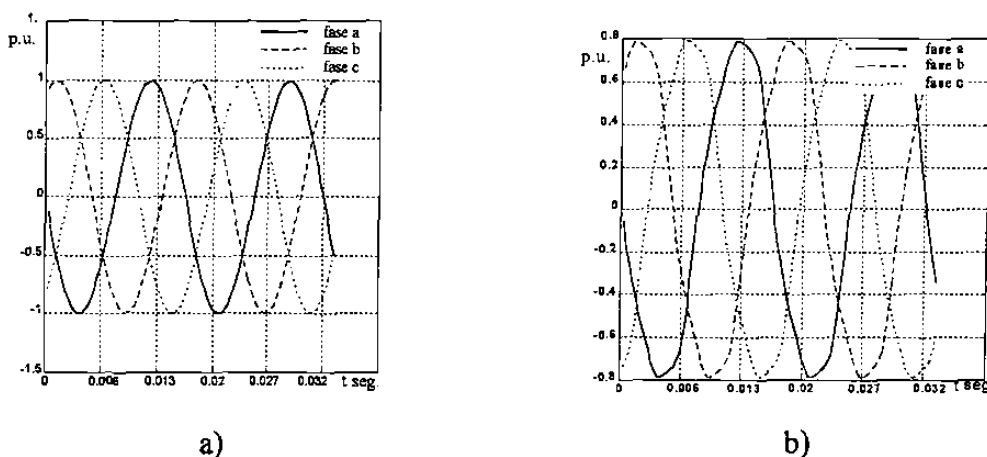
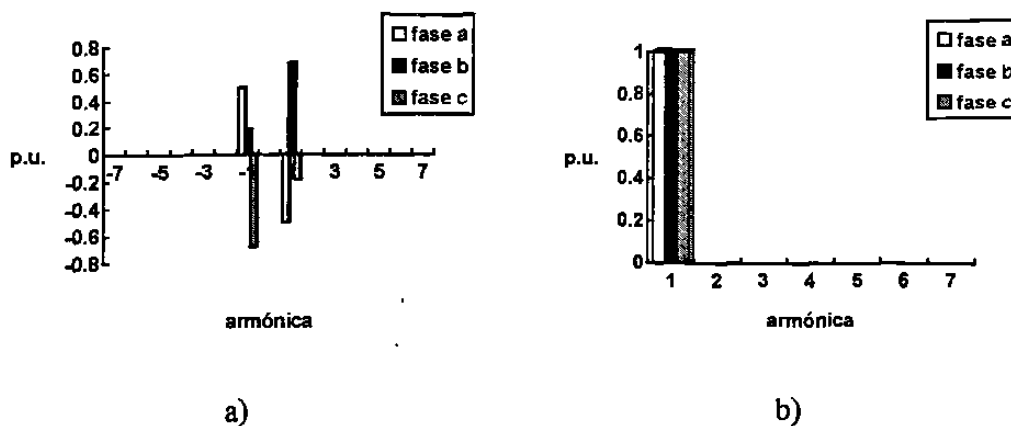


Figura 7.4. Voltaje en la carga. a) Sin considerar saturación. b) Considerando saturación y pérdidas en el núcleo.



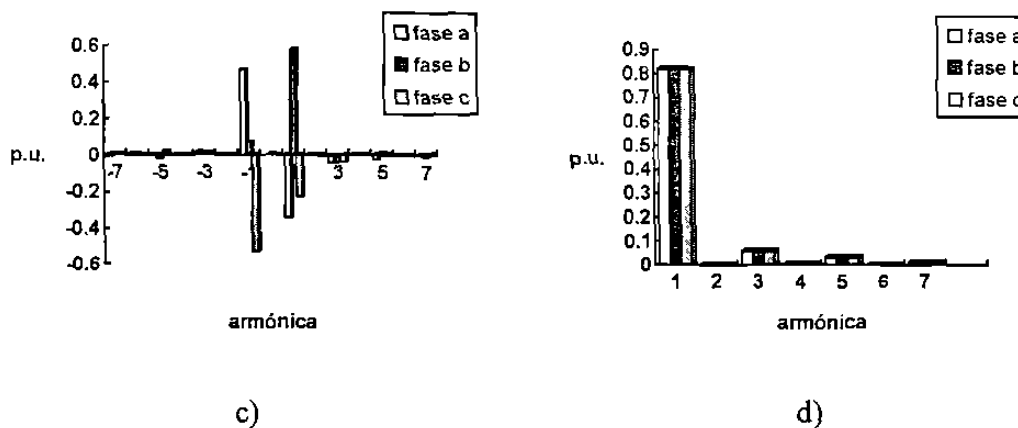


Figura 7.5. Magnitud de las armónicas de los voltajes. a) Sin considerar saturación, serie Hartley. b) Sin considerar saturación, serie Coseno<sup>\*</sup>. c) Considerando saturación y pérdidas en el núcleo, serie Hartley. d) Considerando saturación y pérdidas en el núcleo, serie Coseno.

Las gráficas anteriores muestran claramente el efecto de la saturación en la generación de armónicas. Se puede apreciar claramente que se generaron armónicas impares<sup>†</sup> además de ser balanceadas debido a que el sistema es balanceado.

De aquí en adelante sólo se mostrará la gráfica de las series Coseno con el fin de apreciar mejor los resultados.

**7.3.2. Ejemplo 2.** Efecto de conversión de frecuencias y saturación en el generador. En el siguiente ejemplo el objetivo es mostrar fenómenos que se presentan en el generador síncrono; los cuales se resuelven separadamente para ilustrar el comportamiento debido a cada uno.

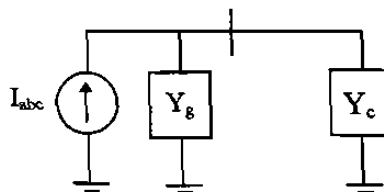


Figura 7.6. Generador-carga desbalanceada.

<sup>\*</sup> Los coeficientes de la serie Coseno se obtienen a partir de los coeficientes de la serie de Hartley como se muestra en el Apéndice A, ecuación (A.24).

<sup>†</sup> Apéndice C.



Generador: Datos en Apéndice E. Conexión estrella sólidamente aterrizada.

Carga: Carga en estrella aterrizada con R de 1 p.u. en la fase a, L de 1 p.u. en la fase b y C de 1 p.u. en la fase c.

a) Efecto de conversión de frecuencias. Los resultados de este caso, se muestran en las Figuras 7.7 y 7.8, en los cuales se aprecia la conversión de frecuencias. Se inducen en el sistema armónicas de orden  $h$  y  $h \pm 2$  lo que concuerda con la teoría. Estos resultados se compararon con los de la referencia [16]; obteniéndose prácticamente los mismos resultados. Por lo anterior se concluye que el modelado y el procedimiento propuesto dan resultados satisfactorios.

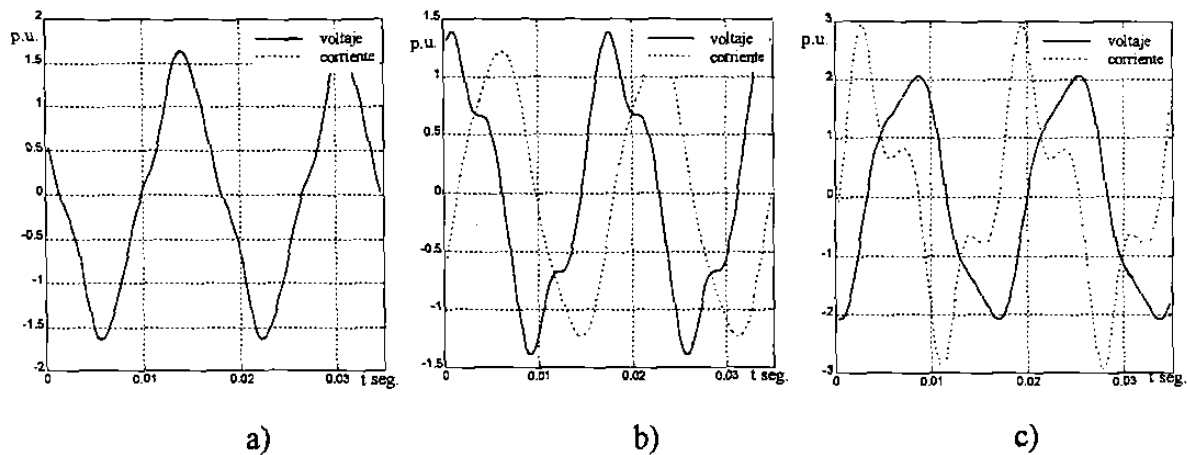


Figura 7.7. Voltajes y corrientes de las fases. a) Fase a. b) Fase b. c) Fase c.

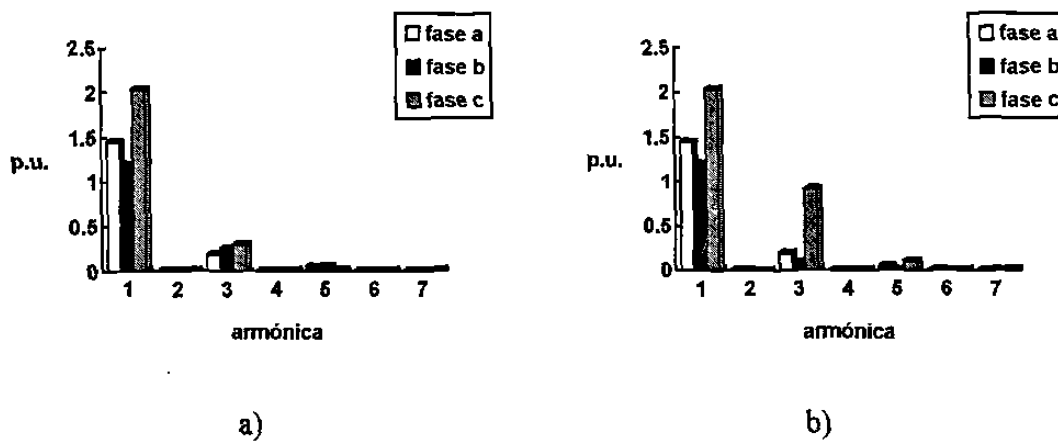


Figura 7.8. Magnitud de las armónicas. a) Voltajes. b) Corrientes.

b) Efecto de conversión de frecuencias y saturación. Este ejemplo consiste en incluir al ejemplo anterior el efecto que produce la saturación en el generador. Los resultados que muestran las Figuras 7.9 y 7.10 reflejan claramente que la saturación ayuda a la generación de armónicas. En este resultado la saturación incrementa las magnitudes de las armónicas<sup>▼</sup>.

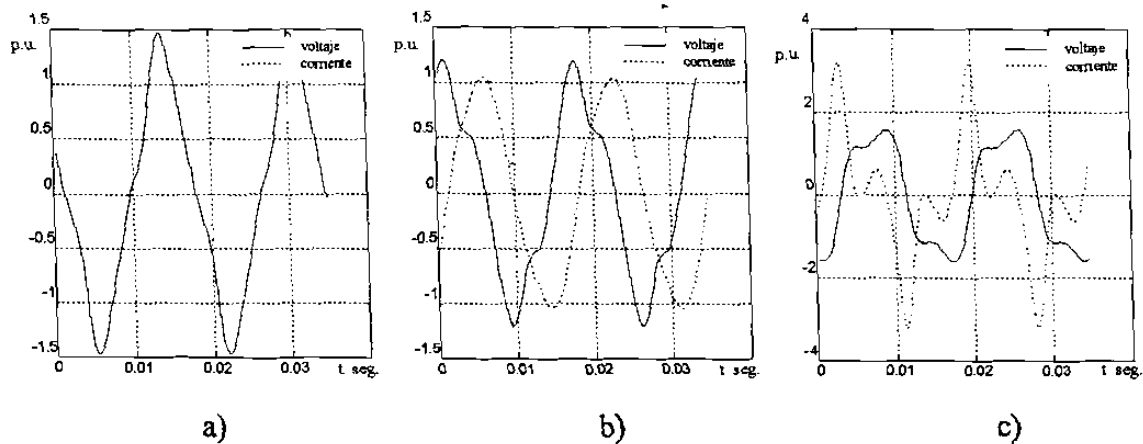


Figura 7.9. Voltajes y corrientes de las fases. a) Fase a. b) Fase b. c) Fase c.

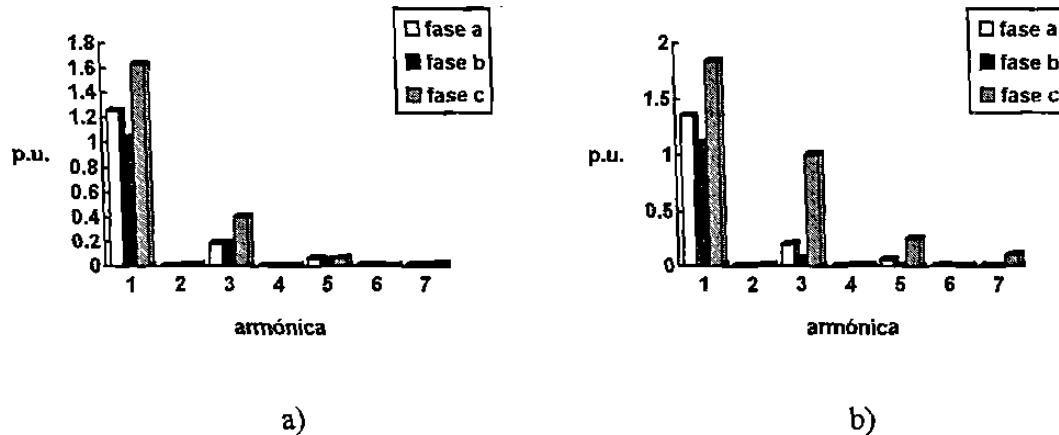


Figura 7.10. Magnitud de las armónicas. a) Voltajes. b) Corrientes.

▼ Aparecen sólo las armónicas impares debido a la conversión de frecuencia y saturación. Capítulo 5 y Apéndice C.

c) En este ejemplo se combina el efecto de conversión de frecuencias y la saturación, además se incluye una resistencia  $R$  de 1.0 p.u. en paralelo en cada fase de la carga. La finalidad de adicionar este elemento es mostrar que al tener cargas más balanceadas existe menos generación de armónicas, debido a la conversión de frecuencias por parte del generador. Los resultados se muestran en las Figuras 7.11 y 7.12.

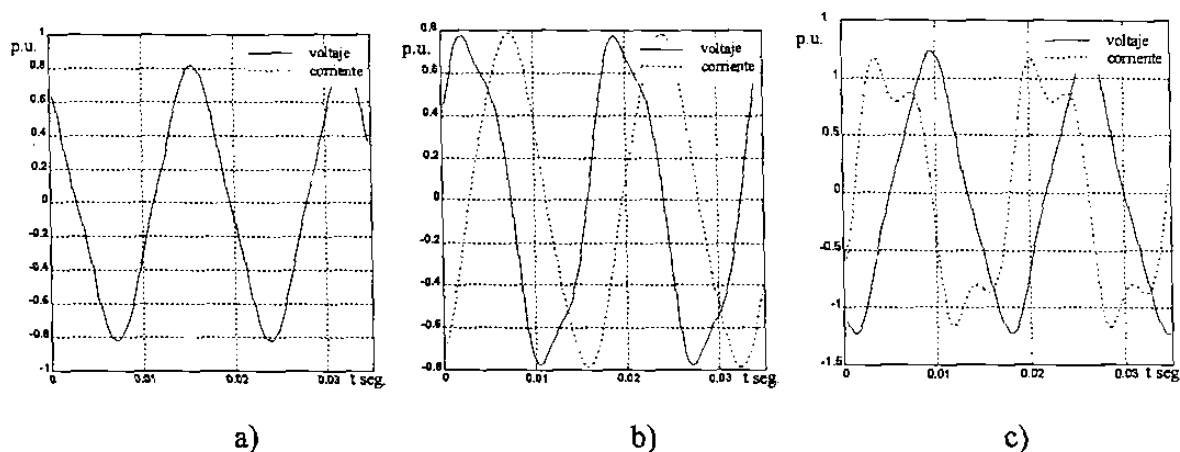


Figura 7.11. Voltajes y corrientes de las fases. a) Fase a. b) Fase b. c) Fase c.

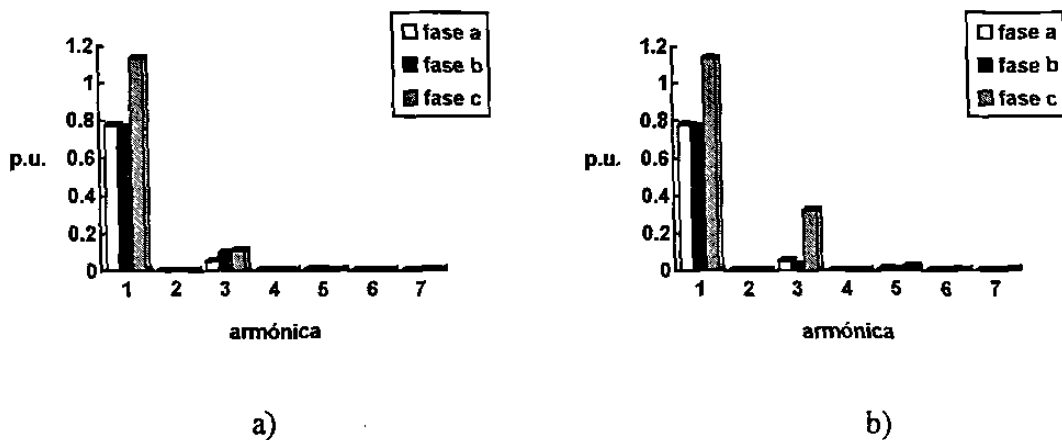


Figura 7.12. Magnitud de las armónicas. a) Voltajes. b) Corrientes.

En general comparando los resultados de las gráficas de 7.10 y 7.12 se observa que mientras se tenga una carga más balanceada se tendrá menos generación de armónicas por parte del generador.

**7.3.3. Ejemplo 3.** El siguiente ejemplo incluye una red, generador-transformador-carga. El propósito es observar el comportamiento de las armónicas al tener un transformador en el sistema.

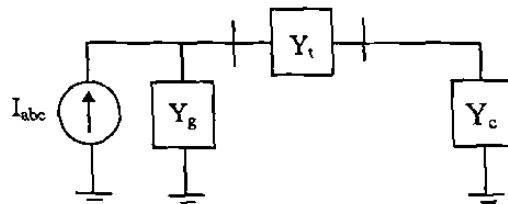


Figura 7.13. Genarador-transformador-carga.

Generador: Datos en el Apéndice E. Conexión estrella sólidamente aterrizada.

Transformador: Datos en el Apéndice E. Conexión delta-estrella sólidamente aterrizada.

Carga: Carga en estrella aterrizada con R de 1 p.u. en la fase a, L de 1 p.u. en la fase b y C de 1 p.u. en la fase c.

a) Efecto de conversión de frecuencias. En este ejemplo solamente se incluye el efecto de conversión de frecuencias en el generador con el propósito de observar el comportamiento del transformador.

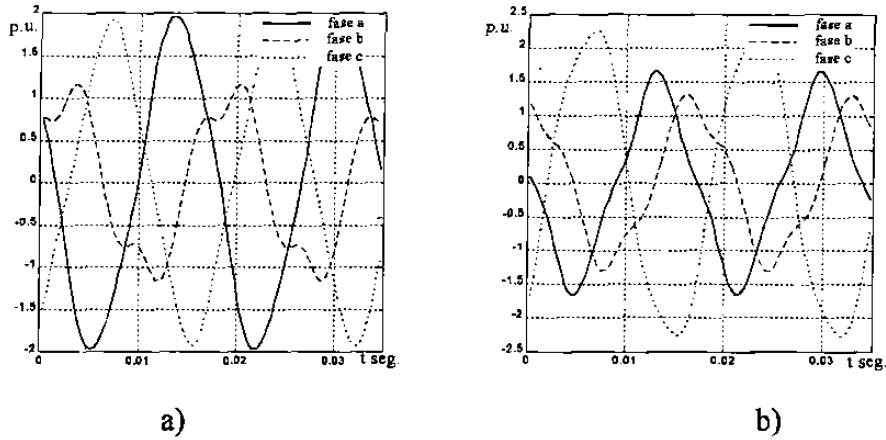


Figura 7.14. Voltajes. a) Lado delta del transformador. b) Lado estrella del transformador.

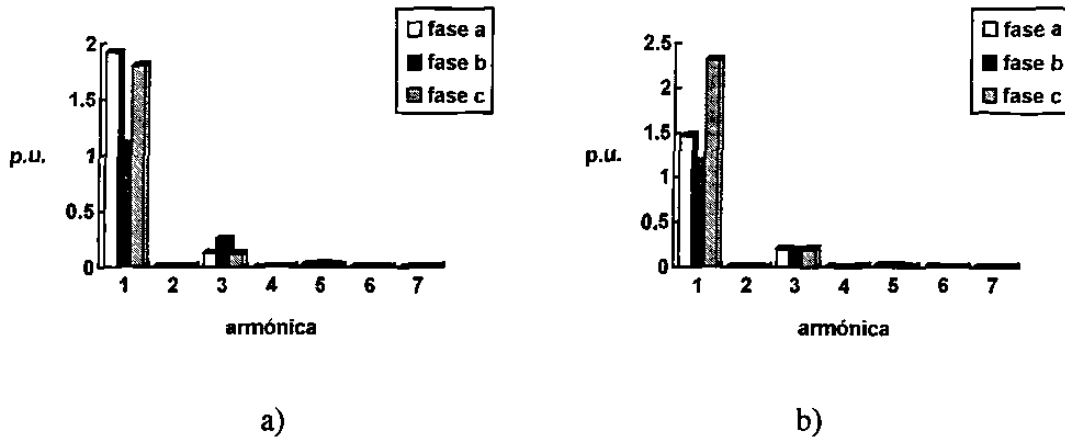


Figura 7.15. Magnitud de las armónicas del voltaje . a) Lado delta del transformador. b) Lado estrella del transformador.

b) Efecto de conversión de frecuencias, y saturación en el generador. Se adiciona el problema de saturación en el generador. Los resultados se observan en las Figuras 7.16 y 7.17.

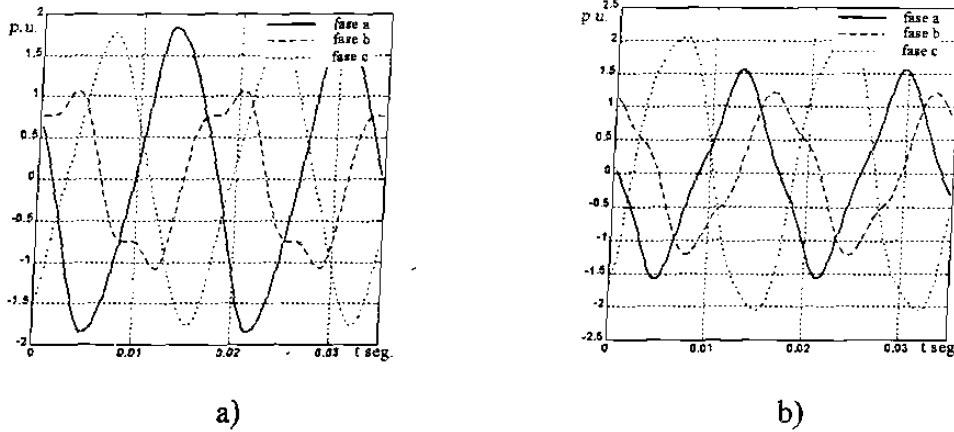


Figura 7.16. Voltajes. a) Lado delta del transformador. b) Lado estrella del transformador.

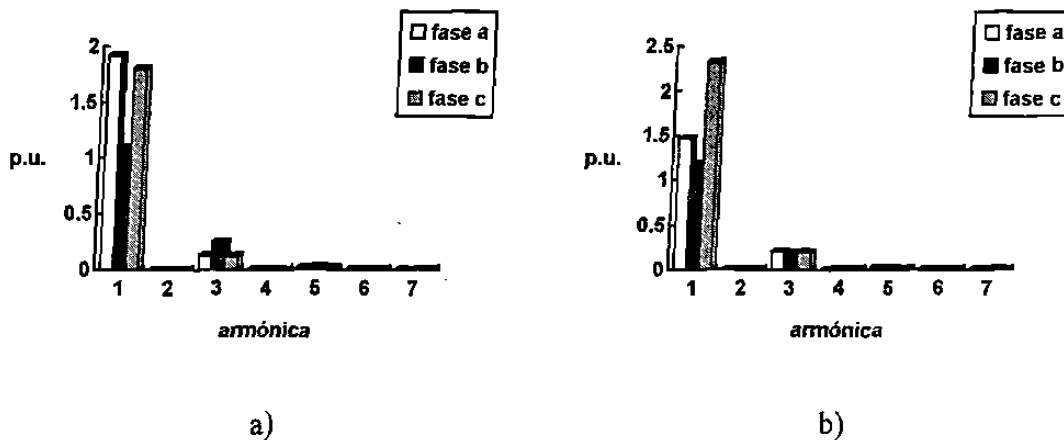


Figura 7.17. Magnitud de las armónicas del voltaje . a) Lado delta del transformador. c) Lado estrella del transformador.

Comparando los resultados de las Figuras 7.10 con 7.17 se observa que el transformador en delta-estrella ayuda a la reducción de la magnitud de las armónicas. Se observa también que las armónicas múltiplos de tres no quedan atrapadas en la delta del transformador debido a que están desbalanceadas.

**7.3.4. Ejemplo 4.** Transformador estrella-estrella sólidamente aterrizado, en vacío. El objetivo de este ejemplo es observar la generación de armónicas debido a la saturación en un transformador.

Fuente: Fuente balanceada de voltaje de 1.5 p.u. detrás de una reactancia inductiva de 0.08 p.u.

Transformador: Datos en el Apéndice E incluyendo saturación y pérdidas en el núcleo.

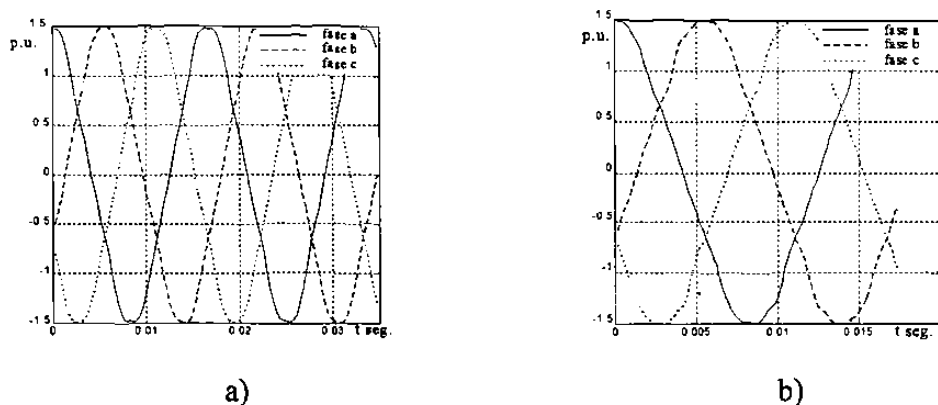


Figura 7.18. Voltajes del lado de alta del transformador. a) Hasta la séptima armónica.  
b) Hasta la quinceava armónica.

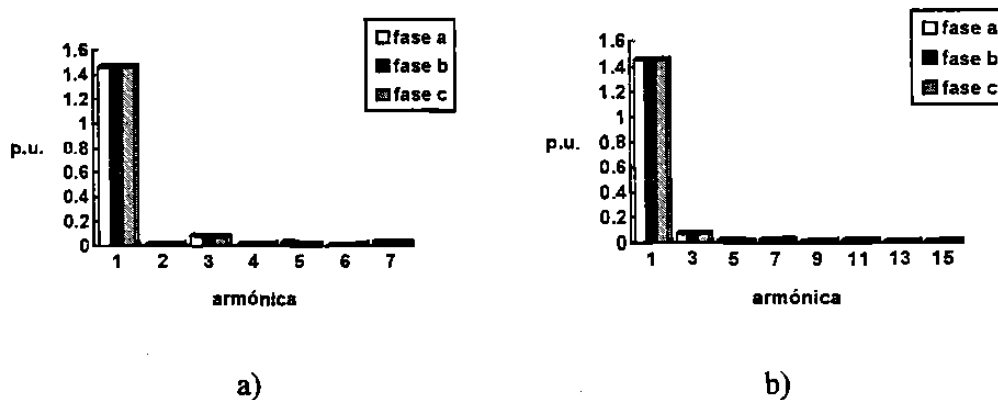


Figura 7.19. Magnitud de las armónicas del voltaje del lado de alta del transformador. a) Hasta la séptima armónica. b) Hasta la quinceava armónica.

**7.3.5. Ejemplo 5.** Transformador en delta-estrella alimentando una carga. El propósito de este ejemplo es observar el papel que juega un transformador con conexión delta-estrella en la eliminación de armónicas.

Fuente: Fuente de corriente balanceada con la componente fundamental de 1.5 p.u.

conteniendo el 3 (13.78%)\* , 5 (5.03%), 7 (2.59%), 9 (1.57%), 11 (1.05%), 13 (0.75%) y 15 (0.57%) armónica, en paralelo con una reactancia inductiva equivalente de 0.085 p.u. por fase.

Transformador: Datos en el Apéndice E sin incluir saturación ni pérdidas en el núcleo.

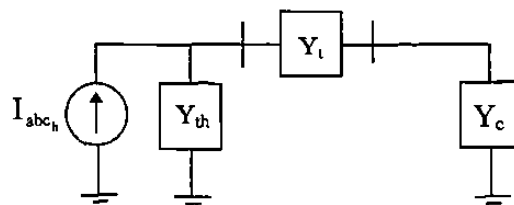


Figura 7.20. Fuente de armónicas-transformador-carga.

a) Carga resistiva. Carga en estrella aterrizada, con  $R=1.0$  p.u., balanceada.

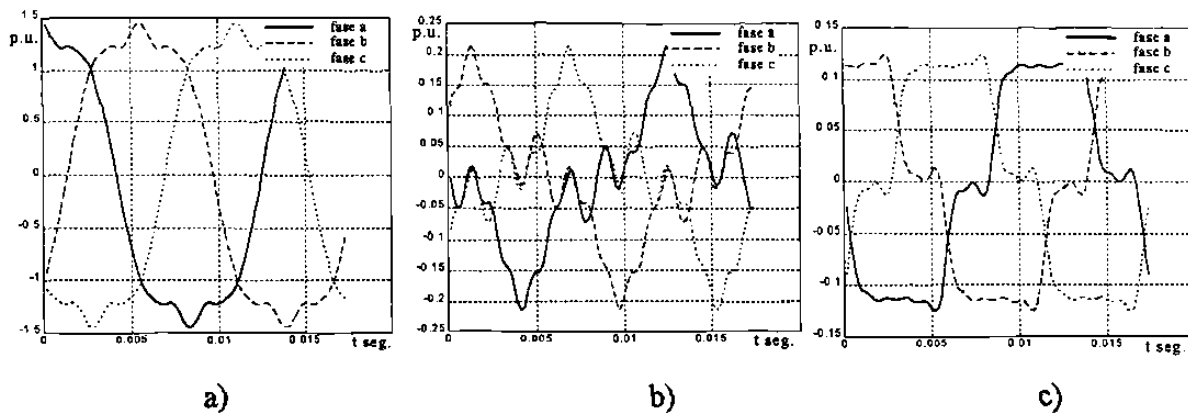


Figura 7.21. Formas de onda. a) Fuente de corriente. b) Voltaje en la delta del transformador. c) Voltaje en la estrella del transformador.

\* Valor en % de la fundamental de 1.5 p.u.



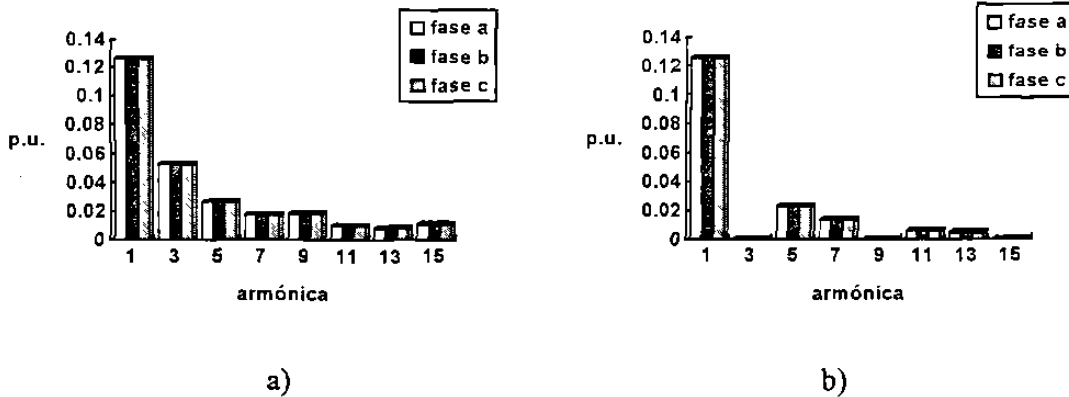


Figura 7.22. Magnitud de las armónicas del voltaje . a) Lado delta. b) Lado estrella.

b) Carga desbalanceada: Carga en estrella aterrizada con R de 1 p.u. en la fase a, L de 1 p.u. en la fase b y C de 1 p.u. en la fase c.

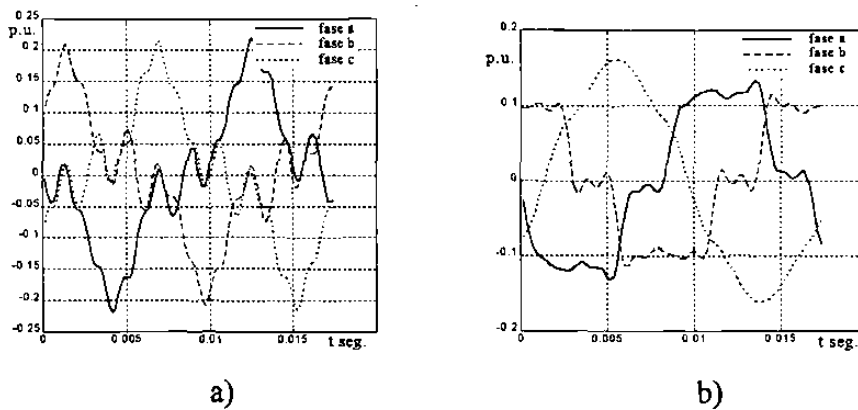


Figura 7.23. Formas de onda de voltaje. a) Delta de transformador. b) Estrella del transformador.



Figura 7.24. Magnitud de las armónicas del voltaje. a) Lado delta. b) Lado estrella.

Se observa que las armónicas múltiplos de tres quedan atrapadas completamente en la delta del transformador en ambos casos, debido a que en ambos casos son armónicas balanceadas\* en el lado de la delta. El caso b es interesante donde a pesar de que la carga es desbalanceada quedan atrapadas en la delta del transformador las armónicas múltiplos de tres, esto es debido a que la fuente de armónicas es constante y balanceada por lo que las armónicas múltiplos de tres siempre quedarán atrapadas en la delta sin importar la carga. Por otra parte el resto de las armónicas son desbalanceadas, pues éstas interactúan con la carga la cual provoca su desbalance. El ejemplo 3 muestra el caso opuesto en el cual todas las armónicas son desbalanceadas, pues dependen de la carga.

**7.3.6. Ejemplo 6.** Se toma inicialmente el ejemplo 2, el cual tiene el caso severo de alimentar una carga desbalanceada, considerando además saturación y el efecto de conversión de frecuencias en el generador. El problema muestra el efecto del acoplamiento entre armónicas.

a) Se simula hasta la quinceava armónica.

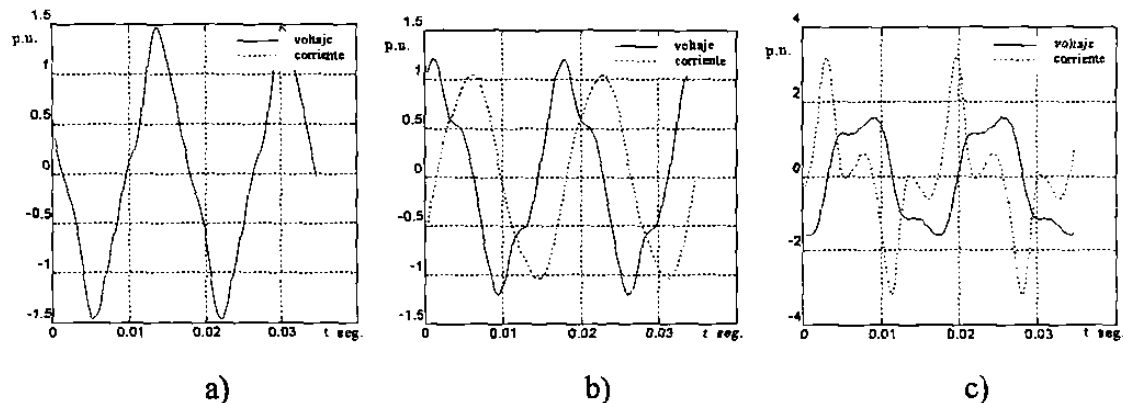


Figura 7.25. Voltajes y corrientes de las fases. a) Fase a. b) Fase b. c) Fase c.

\* Las frecuencias múltiplos de tres cuando están balanceadas se les relaciona con la secuencia cero. Ej. si  $h=3$  entonces  $v_a = V_m \cos(3\omega t)$ ,  $v_b = V_m \cos(3(\omega t - 120^\circ)) = v_a$ ,  $v_c = V_m \cos(3(\omega t + 120^\circ)) = v_a$ , por lo que las secuencias se relacionan con las armónicas balanceadas como:

secuencia	+	-	0	+	-	0	...
armónica	1	2	3	4	5	6	...

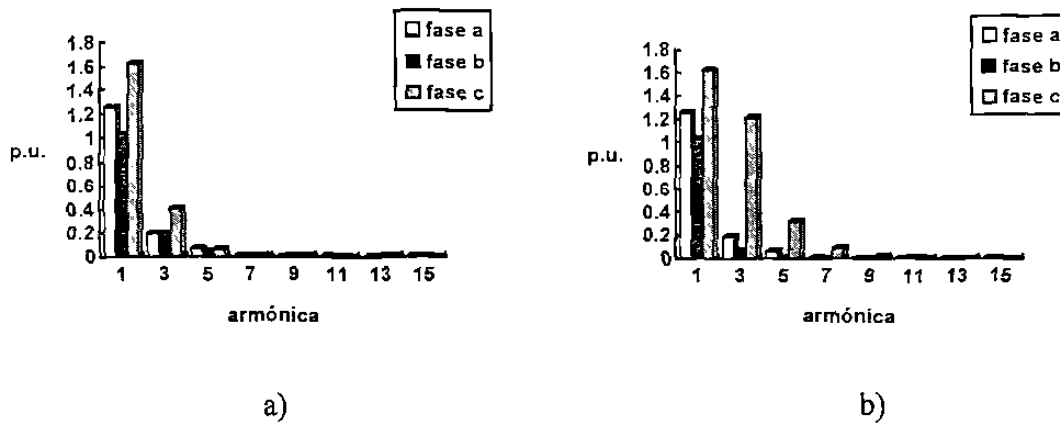


Figura 7.26. Magnitud de las armónicas. a) Voltajes. b) Corrientes.

En este ejemplo se aprecia que para la condición propuesta basta con modelar hasta la séptima armónica, pues se obtienen los mismos resultados que en el ejemplo 2 b.

b) Este caso es igual que el ejemplo anterior con la diferencia de cambiar la reactancia capacitiva de la carga de 1.0 p.u. a 0.5 p.u. Se obtienen los siguientes resultados, mostrados en las Figuras 7.27, 7.28 y 7.29 para diferentes consideraciones de armónicas.

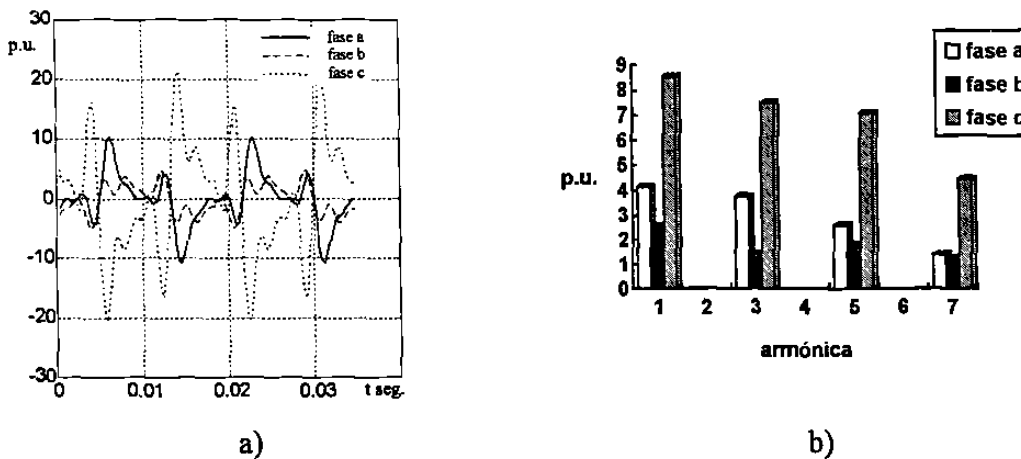


Figura 7.27. Voltajes considerando hasta la séptima armónica. a) Formas de onda. b) Magnitud de las armónicas.

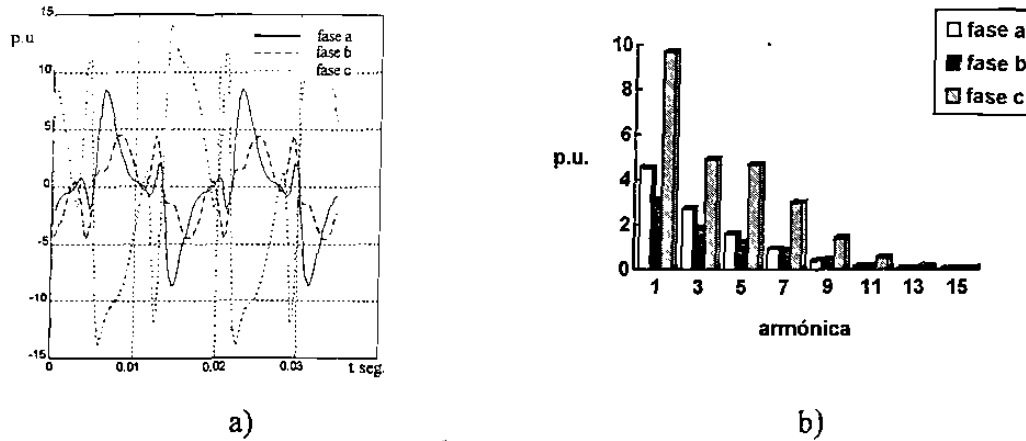


Figura 7.28. Voltajes considerando hasta la quinceava armónica. a) Formas de onda. b) Magnitud de las armónicas.

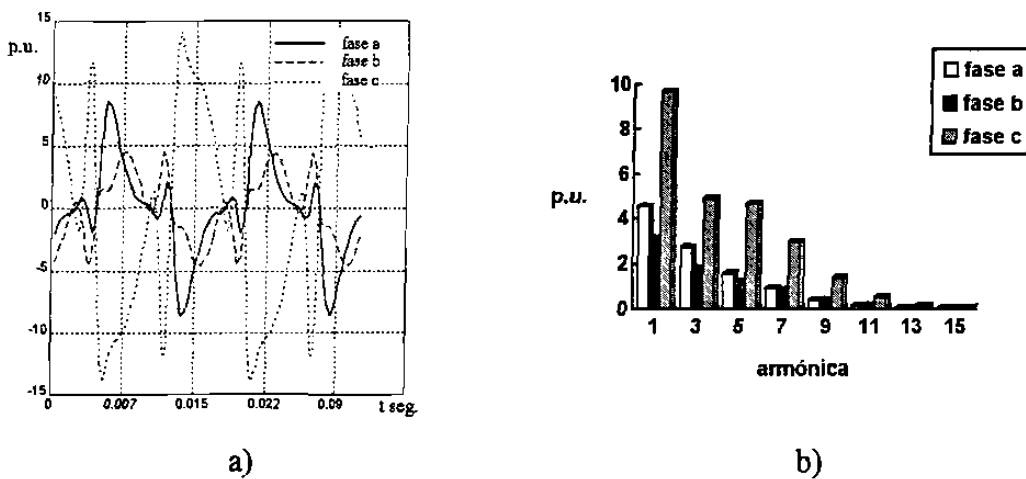


Figura 7.29. Voltajes considerando hasta la trigésima primera armónica. a) Formas de onda. b) Magnitud de las armónicas.

Este ejemplo es un caso severo que sirve para ilustrar la interacción que existe entre armónicas, esta interacción se puede comprender al saber que una armónica generada por saturación interviene en el efecto de conversión de frecuencias con el generador provocando la generación de nuevas armónicas, éstas a su vez, generan nuevas armónicas al entrar a la característica de saturación, y así sucesivamente hasta que se llega a un equilibrio en el cual ya no se generan armónicas o se ajustan magnitudes de las existentes.

Del ejemplo se puede observar que cuando la magnitud de la última armónica que se considera en la modelación no es despreciable para el caso no-lineal, se hace necesario incluir más armónicas en el análisis, dado que éstas influyen directamente en la magnitud de las armónicas anteriores. En este ejemplo al considerar sólo hasta la séptima armónica los resultados son erróneos por lo que es recomendable considerar hasta la quinceava armónica, pues sus resultados son iguales que el incluir hasta la trigésima primera armónica.

#### **7.4. RESUMEN**

En este capítulo se ilustró con casos especiales y de una forma simple la representación de un sistema de potencia para estudios armónicos trifásicos.

Se presentó una serie de ejemplos con el fin de probar, por medio de simulaciones, los modelos obtenidos en los capítulos anteriores. Los resultados obtenidos de las simulaciones son adecuados para análisis armónico dado que se pudieron observar los siguientes resultados: El efecto de saturación en los elementos inductivos genera armónicas impares que son inyectadas a la red; el efecto de conversión de frecuencias en el generador genera armónicas impares cuando alimenta a una carga desbalanceada y no ocurre este fenómeno cuando la carga es balanceada. La conexión delta de los transformadores disminuye la propagación de armónicas en la red o elimina por completo las armónicas múltiplos de tres cuando éstas son balanceados. El efecto de acoplamiento entre armónicas, existe debido a los elementos no-lineales, esto hace que se requiera considerar en el análisis al menos hasta la quinceava armónica; según se desprende de los casos estudiados en el presente capítulo y de los reportados en [18].

## **CAPITULO 8**

### **CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS**

El análisis armónico complejo, utilizando notación matricial, es considerado como una herramienta elegante y más precisa de análisis y modelación, esto da lugar a que el análisis armónico real, usando el dominio Hartley, cuenta con éstas dos características además de eliminar redundancia de información existente en el análisis complejo.

En el presente trabajo se abordaron los principales conceptos para el modelado y el análisis de los sistemas eléctricos de potencia en el dominio armónico real usando las series y la transformada de Hartley.

#### **8.1. CONCLUSIONES**

Las conclusiones que aquí se citan fueron obtenidas en el transcurso de la investigación así como en la bibliografía especializada, y se pueden dividir de la siguiente manera.

##### **8.1.1. Principales características de la transformada de Hartley**

- Utiliza solamente números reales, esto significa que elimina la redundancia que existe en la transformada de Fourier por usar notación con números complejos.
- Presenta las mismas características que la transformada de Fourier, por lo que se puede aplicar donde se usa la transformada de Fourier sin perder información.
- Existe, siempre que exista la transformada de Fourier y viceversa.

- Se puede obtener a partir de la transformada de Fourier y viceversa.
- El uso de la transformada rápida de Hartley requiere de un menor esfuerzo computacional respecto de la transformada rápida de Fourier, mismo que se ve reducido por mitad [34].

### **8.1.2. Principales resultados del análisis de circuitos eléctricos usando análisis de Hartley**

- El análisis de Hartley puede ser usado para la solución de circuitos eléctricos al igual que el análisis con números complejos.
- Toda la teoría de análisis de circuitos eléctricos es aplicable en el dominio de Hartley.

### **8.1.3. Principales resultados en la modelación para estudios armónicos utilizando análisis de Hartley**

- Los elementos del sistema de potencia son representados por matrices con las mismas dimensiones a las utilizadas en el espacio armónico complejo pero la diferencia es el trabajar con matrices reales, lo que le da una característica peculiar e interesante a la formulación.
- Las características de elementos no-lineales pueden ser representadas por un equivalente Norton linealizado.
- El efecto de conversión de frecuencias en los generadores síncronos puede ser modelado.
- Un modelo del transformador fue obtenido.
- El sistema eléctrico de potencia se representa por dos matrices de admitancias Hartley, una que representa la parte lineal y otra la parte no-lineal; así como dos vectores de inyecciones de corriente que representan la parte lineal y la parte no-lineal.

## 8.2. APORTACIONES

Este trabajo de investigación muestra que es posible hacer la modelación y el análisis de los sistemas de potencia en el dominio de los números reales, haciendo uso de la transformada y series de Hartley. La modelación se hace para estudios en estado estable, considerando que el sistema de potencia opera bajo condiciones desbalanceadas y ante señales no-sinusoidales. Las aportaciones principales de esta tesis son:

En general:

- Los resultados mostrados reflejan que no se hace necesario una notación con números complejos para obtener modelos completos de los principales elementos del sistema de potencia.
- La representación matricial y el uso del dominio armónico hacen que la modelación sea elegante y fácil de implementar.

En particular:

- Muestra modelos detallados de los elementos lineales y no-lineales en el dominio armónico de Hartley, mostrando el caso particular de saturación en elementos inductivos.
- Obtiene un modelo del generador síncrono para estudios trifásicos armónicos el cual incluye el efecto de conversión de frecuencias y el efecto de saturación.
- Desarrolla una forma de obtener modelos de bancos de transformadores para estudios armónicos.
- Se desarrollaron las rutinas para la transformada rápida de Hartley.



### 8.3. TRABAJOS FUTUROS

La modelación y el análisis de los sistemas eléctricos en el dominio Hartley es un área de investigación totalmente nueva, por lo que cualquier aplicación es interesante, sin embargo las más apropiadas para realizarse en trabajos posteriores son:

- Modelar otros elementos del sistema eléctrico de potencia en el dominio Hartley, tal como: Líneas de transmisión, CEV's (RCT's, CST's), convertidores CD/CA, hornos eléctricos, etc.
- Aplicar las transformadas rápidas de Hartley para estudios de propagación de armónicas en redes de distribución aprovechando la rapidez de cálculo que ésta presenta.
- Utilizar las series y transformada de Hartley para el análisis de señales y algoritmos de relevadores digitales de protección.
- Extender el estudio de las propiedades de convergencia que se pueden presentar al usar el dominio Hartley para estudios armónicos.

## REFERENCIAS

- [1] Manuel Madrigal Martínez, Salvador Acha, *La Transformada Hartley en el Análisis de Redes Eléctricas*, Reporte de investigación DIE-02-95, DIE FIME UANL, Marzo de 1995.
- [2] Manuel Madrigal Martínez, Salvador Acha, *La Transformada Hartley en la Modelación y Análisis de Redes Eléctricas en Condiciones Periódicas No-sinusoidales en Estado Estable*, reporte de investigación DIE-04-95, DIE FIME UANL, Agosto de 1995.
- [3] Leszek S. Czarnecki, "Misinterpretations of Some Power Properties of Electric Circuits," *IEEE Trans. on Power Delivery*, vol. 9, no. 4, October 1994, pp. 1760-1769.
- [4] P.S. Filipski, Y. Baghzouz, M.D. Cox, "Discussion of Power Definitions Contained in the IEEE Dictionary," *IEEE Trans. on Power Delivery*, vol. 9, no. 3, July 1994, pp. 1237-1244.
- [5] Alexander Eigeles Emanuel, "On the Definitions of Power Factor and Apparent Power in Unbalanced Polyphase Circuits with Sinusoidal Voltage and Currents," *IEEE Trans. on Power Delivery*, vol. 8, no. 3, July 1993, pp. 841-852.
- [6] Renato Sandelli, Gian Carlo Montanari, "Compensable Power Electrical Systems in Nonsinusoidal Conditions," *IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement*, vol. 43, no. 4, August 1994, pp. 592-598.
- [7] Leszek S. Czarnecki, "Physical Reasons of Currents RMS Value Increase in Power Systems with Nonsinusoidal Voltage," *IEEE Trans. on Power Delivery*, vol. 8, no. 1, January 1993, pp. 437-447.
- [8] W. Shepherd & P. Zand, *Energy Flow and Power Factor in Nonsinusoidal Circuits*, Cambridge University Press, 1979.

## REFERENCIAS (continuación)

- [9] A. Domijan, G. T. Heydt, A. P. S. Meliopoulos, "Directions of Research on Electric Power Quality," *IEEE Trans. on Power Delivery*, vol. 8, no. 1, January 1993, pp. 429-436.
- [10] "Power Quality-Two Different Perspectives", A paper prepared by the IEEE Working Group on Voltage Flicker and Service to Critical Load. Daniel J. Ward, Chairman. Contributing Members: J.J. Burke, D.C. Griffith, D.J. Ward. *IEEE Trans. on Power Delivery*, vol. 5, no. 3, July 1990, pp. 1501-1513.
- [11] J. Arrillaga, D. A. Bradley, P.S. Bodger, *Power Systems Harmonics*, John Wiley & Sons, 1989.
- [12] A. A. Mahmoud (Editor), W. M. Grady, M.F. McGranaghan (Co-Editors), *Power Systems Harmonics, IEEE Tutorial Course*, 1984.
- [13] A. Semlyen, E. Acha, J. Arrillaga, "Newton-Type Algorithms for the Harmonics Phasor Analysis of Non-Linear Power Circuits in Periodical Steady State with Special Reference to Magnetic Non-Linearities," *IEEE Trans. on Power Delivery*, July 1988, pp. 1090-1098.
- [14] Enrique Acha Daza, *Modelling of Power Systems Transformers in the Complex Conjugate Harmonic Space*, Ph. D. Thesis, University of Canterbury, New Zealand, 1988.
- [15] A. Semlyen, J. F. Eggleston, J. Arrillaga, "Admittance Matrix Model of a Synchronous Machine for Harmonics Analysis," *IEEE Trans. on Power Systems*, November 1987, pp. 833-840.
- [16] Wilson W. Xu, Hermann W. Dommel, Jose R. Marti, "A Synchronous Machine Model for Three-Phase Harmonic Analysis and EMTP Initialization," *IEEE Trans. on Power Systems*, November 1991, pp. 1530-1538.
- [17] A. Medina, J. Arrillaga, "Harmonics Iteration Between Generation and Transmission Systems," *IEEE Trans. on Power Delivery*, October 1993, pp. 1981-1987.

## REFERENCIAS (continuación)

- [18] J. Aurelio Medina Ríos, *Power Systems Modelling in the Harmonics Domain*, Ph. D. Thesis, University of Canterbury, New Zealand, 1992.
- [19] K. J. Olejniczak, G. T. Heydt, "Scanning the special section on the Hartley Transform," *Proc. IEEE*, vol. 82, no. 3, March 1994, pp. 372-380.
- [20] G. T. Heydt, K. J. Olejniczak, R. Spark, E. Viscinto, "Application of the Hartley Transform for the Analysis of the Propagation of Nonsinusoidal Waveforms in Power Systems," *IEEE Trans. on Power Delivery*, vol. 6, no. 4, October 1991, pp. 1862-1868.
- [21] G. T. Heydt, J. Olejniczak, "The Hartley Series and its Application to Power Quality Assessment," *IEEE Trans. on Industry Application*, vol. 29 no. 3, May/June 1993, pp. 522-527.
- [22] G. T. Heydt, "System Analysis Using Hartley Impedance," *IEEE Trans. on Power Delivery*, vol. 8, no. 2, April 1993, pp. 518-523.
- [23] G. T. Heydt, *Electric Power Quality*, Stars in a Circle Publications, 1991.
- [24] R. N. Bracewell, *The Fourier Transform and its Application*, McGraw-Hill, 1965.
- [25] R. V. L. Hartley, "A More Symmetrical Fourier Analysis Applied to Transmission Problems," *Proc. IRE*, vol. 30, 1942.
- [26] S. Goldman, *Frequency Analysis Modulation and Noise*, McGraw-Hill, 1948.
- [27] R. N. Bracewell, *The Hartley Transform*, Oxford University Press, 1986.
- [28] R. N. Bracewell, "The Fast Hartley Transform," *Proc. IEEE*, Vol. 72, 1984.
- [29] G. T. Heydt, "The Fast Hartley Transform used in the Analysis of Electrical Transients in Power System," *Proc. IEEE, Int. Symp. on Circuits and Systems*, 1990.
- [30] J. Rohan Lucas, Peter G. McLaren, "B-H Loop Representation for Transient Studies," *Int. J. Elect. Enging. Educ.*, Manchester U. P., vol. 28, 1991, pp. 261-270.
- [31] O'Kelly, S. Simmons, *Introduction to Generalized Machine Theory*, Mc.Graw-Hill, London, 1968.

**REFERENCIAS (continuación)**

- [32] L. D. Aréchiga, *Modelos Generalizados de Unidades de Transformación para el Análisis de Sistemas Eléctricos de Potencia*, Tesis de maestría, DIE FIME UANL, 1989.
- [33] Manuel Madrigal Martínez, *Modelación Generalizada de Componentes del Sistema Eléctrico de Potencia para Análisis en Estado Estable*, Tesis de Licenciatura, Instituto Tecnológico de Morelia, 1993.
- [34] Mark A. O'Neill, "Faster Than Fast Fourier", *BYTE*, April 1988, pp. 293-299.
- [35] Juan Marcos García Martínez, *Formulación Trifásica Multifrecuencias para el Estudio de Redes Eléctricas en Estado Estable*, Tesis Doctoral, DIE FIME UANL, 1995.
- [36] N. Balabanian, Bickart, S. Seshu, *Electrical Network Theory*, John Wiley and Sons, 1969.
- [37] W. H. Hayt, Jack E. Kemmerly, *Análisis de Circuitos Eléctricos*, McGraw-Hill, 1975.
- [38] Desoer, E. Kuh, *Basic Circuit Theory*, Mc.Graw-Hill, 1969.
- [39] Hwei P. Hsu, *Análisis de Fourier*, Addison-Wesley Iberoamerica, 1987.
- [40] M.A. Murray-Lasso, "A General Transformation with Applications to Circuit Theory," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 285, no. 2, February 1968.
- [41] Daozhi Xia, G. T. Heydt, "Harmonic Power Flow Studies part I- Formulation and Solution," *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, vol. 101, no. 6, June 1982, pp. 1257-1265.
- [42] Daozhi Xia, G. T. Heydt, "Harmonic Power Flow Studies part II- Implementation and Practical Application," *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, vol. 101, no. 6, June 1982, pp. 1266-1270.

**APENDICE A**  
**OBTENCION DE LAS SERIES Y TRANSFORMADA DE HARTLEY A**  
**PARTIR DE LAS SERIES TRIGONOMETRICAS DE FOURIER**

## APENDICE A

### OBTENCION DE LAS SERIES Y TRANSFORMADA DE HARTLEY A PARTIR DE LAS SERIES TRIGONOMETRICAS DE FOURIER

La transformada Hartley, como se observo en el capítulo 3, es una forma simétrica de representar a la transformada de Fourier, por lo que todas las características que posee la transformada de Fourier las tiene la transformada Hartley.

#### A.1. SERIES DE HARTLEY

Partiendo de las series trigonométricas de Fourier donde toda función periódica  $f(t)$  con período  $T$  que cumpla con la condición de Dirichlet, es decir, que  $f(t)$  es continua por tramos e integrable sobre cualquier intervalo, se puede representar mediante una serie de Fourier como:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sen(n\omega t)) \quad (\text{A.1})$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt \quad (\text{A.2})$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sen(n\omega t) dt \quad (\text{A.3})$$

desarrollando la ecuación (A.1), se obtiene:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} (a_n + b_n) \text{cas}(n\omega t) + \frac{1}{2} (a_n - b_n) \text{cas}(-n\omega t) \right\} \quad (\text{A.4})$$

donde  $\text{cas}(\theta) = \cos(\theta) + \sen(\theta)$

Observando (A.2) y (A.3) se tiene que:

$$\begin{aligned} a_{-n} &= a_n \\ b_{-n} &= -b_n \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

reordenando (A.4) y haciendo uso de (A.5), se obtiene:

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n + b_n) \text{cas}(n\omega t) \quad (\text{A.6})$$

llamando

$$S_n = \frac{1}{2} (a_n + b_n) \quad (\text{A.7})$$

y sustituyendo (A.7) en (A.6):

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n \text{cas}(n\omega t) \quad (\text{A.8})$$

sustituyendo (A.2) y (A.3) en (A.7):

$$S_n = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt + \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \text{sen}(n\omega t) dt \right\} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \text{cas}(n\omega t) dt \quad (\text{A.9})$$

Obteniéndose así la serie de Hartley dada por:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n \text{cas}(n\omega t) \quad (\text{A.10})$$

$$S_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \text{cas}(n\omega t) dt \quad (\text{A.11})$$

Se puede observar que los coeficientes de las series trigonométricas de Fourier  $a_n$  y  $b_n$  se pueden obtener a partir de los coeficientes de las series de Hartley, donde:

$$a_n = S_{-n} + S_n \quad (\text{A.12})$$

$$b_n = -S_{-n} + S_n \quad (\text{A.13})$$



De la misma manera se obtienen las series de Fourier en forma compleja, donde:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega t} \quad (\text{A.14})$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega t} dt \quad (\text{A.15})$$

$$C_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \quad (\text{A.16})$$

Los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  se pueden obtener de la siguiente manera:

$$a_n = C_{-n} + C_n \quad (\text{A.17})$$

$$b_n = j(-C_{-n} + C_n) \quad (\text{A.18})$$

o

$$a_n = 2 \text{Real}\{C_n\} \quad (\text{A.19})$$

$$b_n = -2 \text{Imag}\{C_n\} \quad (\text{A.20})$$

La ecuación (A.1) puede representarse por una serie de cosenos, de la siguiente manera:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t - \phi_n) \quad (\text{A.21})$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (\text{A.22})$$

$$\phi_n = \tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \quad (\text{A.23})$$

Las ecuaciones (A.21), (A.22) y (A.23) son de gran importancia dado que  $c_n$  representa la magnitud y  $\phi_n$  el ángulo de la armónica  $n$  (fasor). Así se puede obtener dicha magnitud y ángulo usando las series de Hartley o las series de Fourier en forma rectangular.

Usando las series de Hartley:

$$c_n = \sqrt{2} \sqrt{S_{-n}^2 + S_n^2} \quad (\text{A.24})$$

$$\phi_n = \tan^{-1} \left( \frac{-S_{-n} + S_n}{S_{-n} + S_n} \right) \quad (\text{A.25})$$

Usando las series de Fourier en forma rectangular:

$$C_n = |C_n| \angle \phi_n \quad (\text{A.26})$$

$$c_n = \sqrt{2} |C_n| \quad (\text{A.27})$$

$$\phi_n = \angle \phi_n \quad (\text{A.28})$$

Otra relación importante se puede obtener, donde:

$$C_n = \frac{1}{2} (S_{-n} + S_n) - j \frac{1}{2} (-S_{-n} + S_n) \quad (\text{A.29})$$

$$C_{-n} = \frac{1}{2} (S_{-n} + S_n) + j \frac{1}{2} (-S_{-n} + S_n) \quad (\text{A.30})$$

## A.2. TRANSFORMADA DE HARTLEY

Partiendo de que una función  $f(t)$  periódica con periodo  $T$ ; cuando  $T$  se aproxima al infinito,  $f(t)$  se convierte en una función no periódica, la cual tendrá su representación en el análisis de Hartley como una integral.

A partir de las series de Hartley se puede obtener la transformada de Hartley, así, sustituyendo (A.11) en (A.10) se tiene:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \text{cas}(n\omega x) dx \right] \text{cas}(n\omega t) \quad (\text{A.31})$$

haciendo que  $T \rightarrow \infty$  entonces  $n\omega = n\Delta\omega \rightarrow \omega$  y como  $T = 2\pi/\omega$  (A.31) queda como:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \text{cas}(n\Delta\omega x) dx \right] \text{cas}(n\Delta\omega t) \Delta\omega \quad (\text{A.32})$$

el límite cuando  $T \rightarrow \infty$ ,  $\Delta\omega \rightarrow d\omega$  y la sumatoria se convierte en una integral sobre  $\omega$  quedando (A.32) como:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \text{cas}(\omega x) dx \right] \text{cas}(\omega t) d\omega \quad (\text{A.33})$$

definiendo:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{cas}(\omega t) dt \quad (\text{A.34})$$

entonces (A.33) se convierte en:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \text{cas}(\omega t) d\omega \quad (\text{A.35})$$

A las ecuaciones (A.34) y (A.35) se les conoce como la transformada Hartley de la función  $f(t)$  y la transformada inversa de Hartley respectivamente.

Las condiciones para que exista la transformada Hartley de una función  $f(t)$  son las mismas que para existir la transformada de Fourier\* .

---

\*  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$  ó  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \infty$  para funciones periódicas.

**APENDICE B**  
**LISTADOS DE LA TRANSFORMADA RAPIDA DE HARTLEY**

## APENDICE B

### LISTADOS DE LA TRANSFORMADA RAPIDA DE HARTLEY

#### TRANSFORMADA RAPIDA DE HARTLEY

```

function L=FHT(R);
% OBTIENE VALOR DE N Y P
N=size(R);
if N(1)==1
    N=N(2);
else N=N(1);
end

P=log2(N);
if (round(P)-P)~0
    fprintf('El número de valores a permutar debe ser
una potencia de 2 ');
    break;
end

for j=1:N,
    L(j)=0;
end

% PERMUTACION
for j=1:(P-1),
    X=N/(2^j);
    for k=0:2^(j-1)-1,
        m=1+2*k*X;
        r=m;
        for n=0:X-1,
            L(m)=R(2*m-1-(r-1));
            L(X+m)=R(2*m-(r-1));
            m=m+1;
        end
        R=L;
    end
end

% PASO 1
j=1;
for k=1:N/2,
    L(j)=R(j)+R(j+1);
    L(j+1)=R(j)-R(j+1);
    j=2*k+1;
end
R=L;

% PASO 2
j=1;
for k=1:N/4,
    L(j)=R(j)+R(j+2);
    L(j+1)=R(j+1)+R(j+3);
    L(j+2)=R(j)-R(j+2);
    L(j+3)=R(j+1)-R(j+3);
    j=4*k+1;
end
R=L;

% PASO 3,4,....,P
for s=3:P,
    m=2^s;
    for j=1:m,
        C(j)=cos(2*pi*(j-1)/m);
        S(j)=sin(2*pi*(j-1)/m);
    end
    for k=1:N/m,
        j=1;
        q=j+(k-1)*m;
        L(q)=R(q)+C(j)*R(m/2+q);
        L(m/2+q)=R(q)+C(m/2+j)*R(m/2+q);
        for j=2:m/2,
            q=j+(k-1)*m;
            L(q)=R(q)+C(j)*R(m/2+q)+S(j)*R((2*k-
1)*m+2-q);

            L(m/2+q)=R(q)+C(m/2+j)*R(m/2+q)+S(m/2+j)*
R((2*k-1)*m+2-q);
        end
        end
        R=L;
    end
    L=L/N;
end

```

**TRANSFORMADA INVERSA RAPIDA DE  
HARTLEY**

```
function R=IFHT(L)
```

```
% función que obtiene la Transformada %Inversa  
Rapida de Hartley  
% ver la función FHT
```

```
% OBTIENE VALOR DE N Y P
```

```
N=size(L);  
if N(1)==1  
    N=N(2);  
else N=N(1);  
end
```

```
P=log2(N);  
if (round(P)-P)~0  
    fprintf('El número de valores a permutar debe ser  
una potencia de 2 ');  
    break;  
end
```

```
R=fht(L);  
R=N*R;
```

```
end
```

**APENDICE C**  
**CARACTERISTICA POLINOMIAL DE LA CURVA DE**  
**MAGNETIZACION**

## APENDICE C

### CARACTERISTICA POLINOMIAL DE LA CURVA DE MAGNETIZACION

Existen diferentes formas de representar la característica experimental de magnetización, esta característica es representada por segmentos lineales o combinaciones de líneas con funciones cuadráticas.

Una forma más de representar la característica de magnetización es mediante una ecuación de ajuste polinomial [14], de la forma:

$$i = a\phi + b\phi^n \quad (C.1)$$

donde los coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $n$  son determinados de la característica experimental sin pérdidas haciendo uso de los siguientes datos:

- Coordenadas de la rodilla de la curva de magnetización.
- Coordenadas del máximo punto a considerar.
- Pendiente de la parte lineal.

Tomando la característica de magnetización experimental de la Figura C.1 se tiene que:

- Coordenada de la rodilla,  $\phi_{nom} = 1.0$  p.u. ,  $i_{nom} = 0.008$  p.u.
- Punto máximo a considerar  $\phi_{max} = 1.2$  p.u. ,  $i_{max} = 0.026$  p.u.
- Pendiente de la parte lineal  $M=1700$ .



sustituyendo los valores máximos con  $M=1/a$  en (C.1) y despejando  $b$ , se tiene:

$$b = \frac{i_{\max} - a\phi_{\max}}{\phi_{\max}^n} \quad (C.2)$$

en forma iterativa se calcula  $b$  para diferentes valores de  $n$

$n$	$b$	$i_{\text{nom}} = a\phi_{\text{nom}} + b\phi_{\text{nom}}^n$
3	0.014638	0.0152
5	0.0101165	0.01075
7	0.007059	0.0076
9	0.00490217	0.0054

La mejor característica se obtiene cuando  $i_{\text{nom}}$  se aproxima más a su valor real, para este caso sucede con  $n=7$  y  $b=0.007059$ , así se tiene que la característica de magnetización se puede representar por:

$$i = \frac{1}{1700}\phi + 0.0079059\phi^7 \quad (C.3)$$

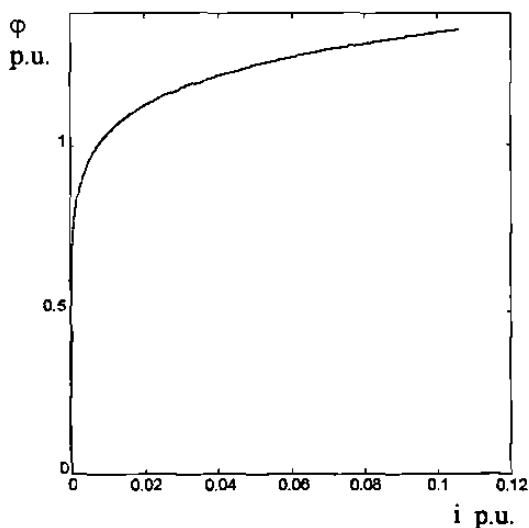


Figura C.1. Característica experimental de un transformador trifásico moderno.

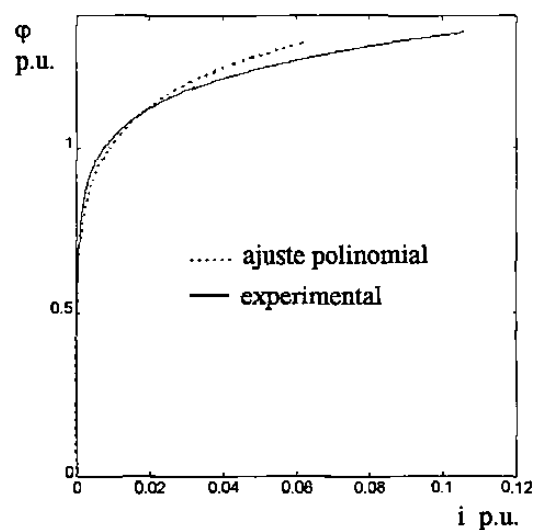


Figura C.2. Característica experimental y característica de ajuste polinomial.

**APENDICE D**  
**CARACTERISTICA NO-LINEAL DE LA MAGNETIZACION DE**  
**ELEMENTOS INDUCTIVOS**

## APENDICE D

### CARACTERISTICA NO-LINEAL DE LA MAGNETIZACION DE ELEMENTOS INDUCTIVOS

#### D.1. CARACTERISTICA FLUJO-CORRIENTE

La característica no-lineal de magnetización que presentan los elementos inductivos se muestran en los siguientes tres casos [30,11].

Caso 1: La curva de magnetización sin considerar ningún tipo de pérdidas, muestra la siguiente forma no-lineal.

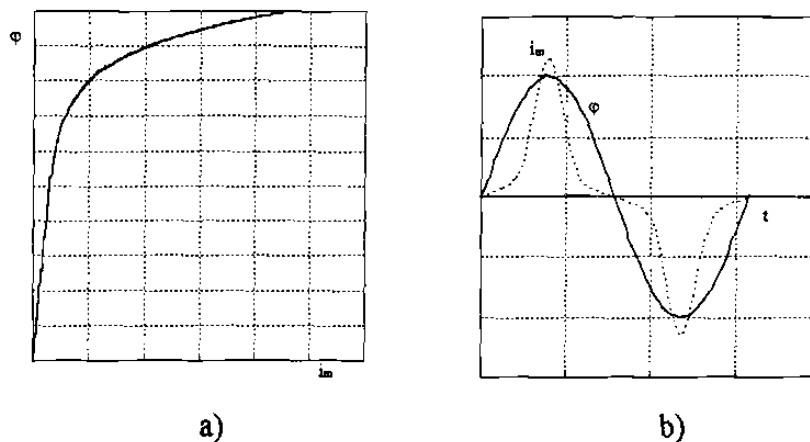


Figura D.1. Característica de magnetización. a) Curva de saturación. b) Formas de onda del flujo y corriente.

Donde :

$\phi$ : Simétrico, y en fase con la corriente de magnetización  $i_m$ .

$i_m$ : Simétrica, y contiene solamente armónicas impares (1,3,5,7,9,...) <sup>▼</sup>.

<sup>▼</sup> Toda función con simétrica de media onda,  $f(t)=-f(t+T/2)$ , contiene solamente las armónicas impares [39,11].

Caso 2: Considerando el lazo de histéresis.

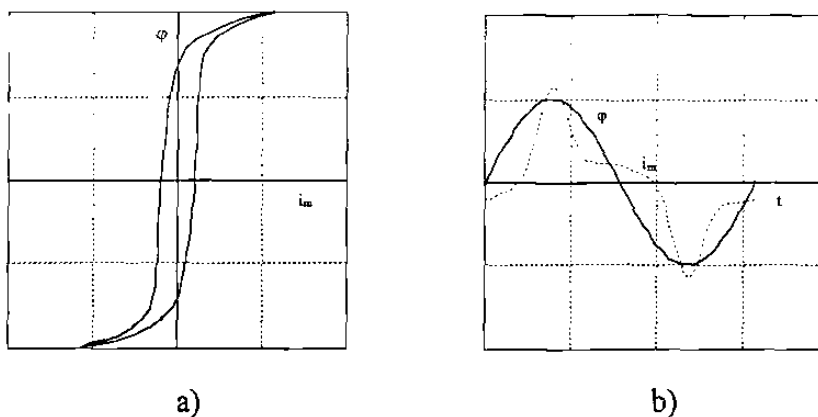


Figura D.2. Característica de magnetización. a) Ciclo de histéresis. b) Formas de onda del flujo y corriente.

Donde :

$\phi$  : Simétrico, y en desfase con la corriente de magnetización  $i_m$ .

$i_m$  : Simétrica, y contiene solamente armónicas impares (1,3,5,7,9....).

Caso 3: Considerando el lazo de histéresis y un flujo asimétrico.

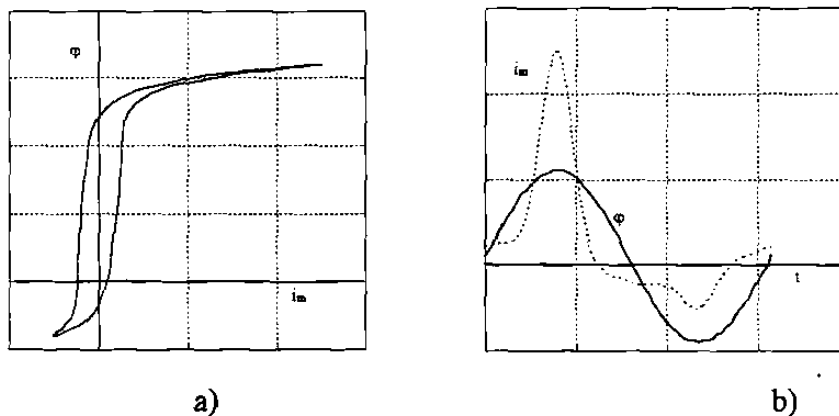


Figura D.3. Característica de magnetización. a) Ciclo de histéresis. b) Formas de onda del flujo y corriente.

Donde :

$\phi$  : Asimétrico, y en desfase con la corriente de magnetización  $i_m$ .

$i_m$  : Asimétrico, y contiene todas las armónicas (pares e impares: 1,2,3,4,5,7,6,8,9....).

## D.2. MODELACION DE LOS CASOS ANTERIORES

La corriente  $i_\varphi$  puede ser representada por segmentos de rectas o como se mostro en el Apéndice C.

Caso 1:

$$v(t) = V_m \text{sen}(\omega t)$$

$$\varphi = \int v(t) dt$$

(D.1)

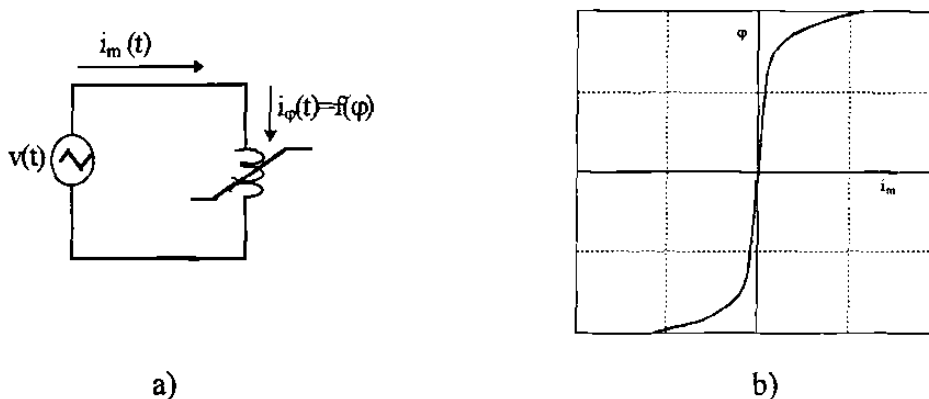


Figura D.4. Representación de la característica de magnetización.

a) Circuito equivalente. b) Curva de magnetización.

Caso 2:

$$v(t) = V_m \text{sen}(\omega t)$$

$$\varphi = \int v(t) dt$$

(D.2)

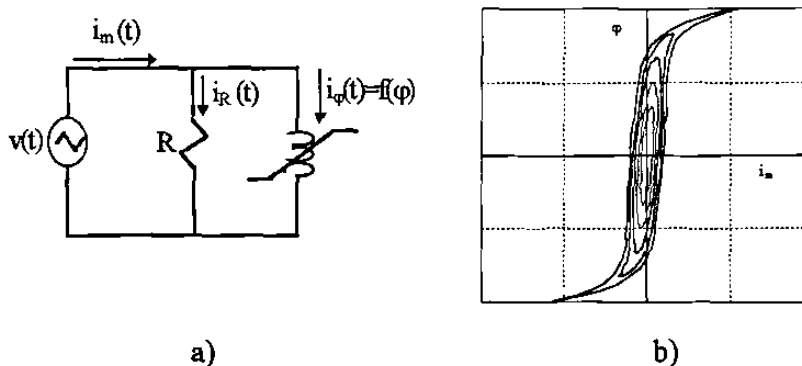


Figura D.5. Representación del ciclo de histéresis. a) Circuito equivalente. b) Ciclo de histéresis. Variando  $V_m$ .

Caso 3:

$$v(t) = (V_m - E_{cd})\text{sen}(\omega t) + E_{cd}$$

$$\varphi = \int v(t) dt$$

(D.3)

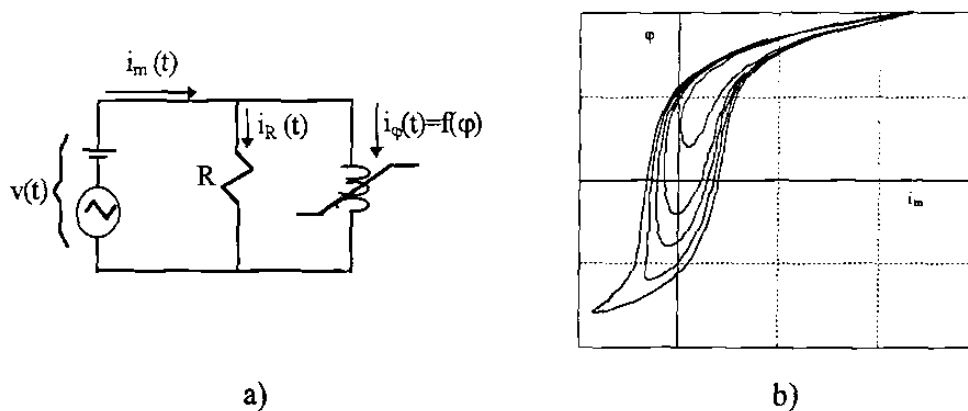


Figura D.6. Representación del ciclo de histéresis. a) Circuito equivalente. b) Ciclo de histéresis. Variando  $E_{cd}$ .

### D.3. CARACTERIZACION DE EFECTOS

Caso 1: La curva de flujo-corriente es debido a la magnetización del acero usado en el núcleo de la bobina. Al saturarse el núcleo por exceso de flujo magnético, se tiene que para pocos incrementos de flujo se requiera grandes magnitudes de corriente.

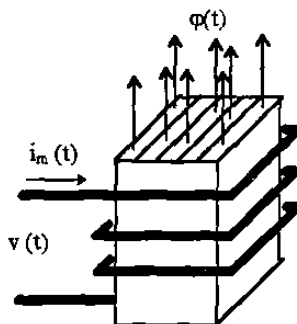


Figura D.7. Esquema de una bobina.

Caso 2: El ciclo de histéresis aparece debido a las pérdidas por corrientes de Eddy. Las corrientes de Eddy son corrientes circulantes que se generan por el paso del flujo por las laminaciones del núcleo, provocando calentamiento del núcleo y por tanto pérdidas.

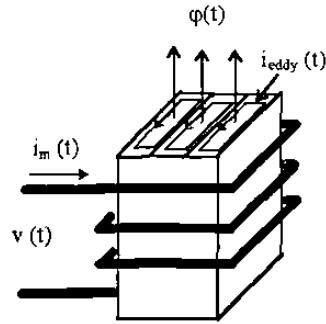


Figura D.8. Esquema de una bobina.

Caso 3: La asimetría del flujo es provocado por el flujo remanente en el núcleo por magnetizaciones previas. Esta asimetría sólo se presenta durante los primeros ciclos después de ser energizada la bobina, dado que cuando alcanza el estado estable, el flujo tiene simetría. Un ejemplo de este efecto es la energización de un transformador donde la corriente de “inrush” o avalancha alcanza, al momento de energizar, valores muy altos, ésto es debido principalmete al flujo remanente.

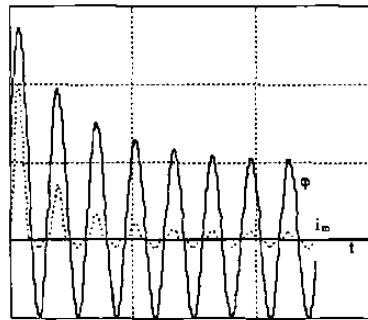


Figura D.9. Energización de un transformador en vacío.

Otra posibilidad de que el flujo magnético sea asimétrico es que la fuente que alimenta al elemento no-lineal contenga una fuente de c.d. Esta componente puede ser producida principalmente por problemas de diseño de rectificadores, como puede ser desbalance en los ángulos de disparo de un rectificador o compensador trifásico .

Con estos resultados es posible modelar no-linealidades de elementos mediante un equivalente Norton como en (4.43), que representa la característica de saturación e incluir el ciclo de histéresis , mediante R representada por (4.6).

**APENDICE E**  
**DATOS DEL GENERADOR Y TRANSFORMADOR**



## APENDICE E

### DATOS DEL GENERADOR Y TRANSFORMADOR

Los siguientes datos (en p.u.) corresponden al generador usado en los ejemplos de este trabajo de investigación.

$$\begin{array}{lll}
 R_d = R_q = R_0 = 0.05 & R_f = 0.02 & R_s = R_t = 0.01 \\
 L_d = 1.0 & L_q = 0.8 & L_o = 0.08 \\
 L_f = 1.1 & L_b = 0.9 & L_t = 1.0 \\
 M_{df} = M_{ds} = M_{fs} = 0.8 & M_{qt} = 0.6 & 
 \end{array}$$

Corriente interna  $I_{abc}$  : Trifásica balanceada con  $I_{max} = 1.5$  p.u. y  $f=60$  Hz.

Característica de saturación:  $i = \varphi / 28.75 + 0.001526\varphi^9$  amp.

Reactancia del transformador: 0.115 p.u.

Pérdidas en el núcleo:  $R_{pérdidas} = 620$  p.u.

Característica de saturación del transformador:  $M_1 = 289.7$   $M_2 = 0.9431$   $\varphi_{nom} = 1.0$  p.u.

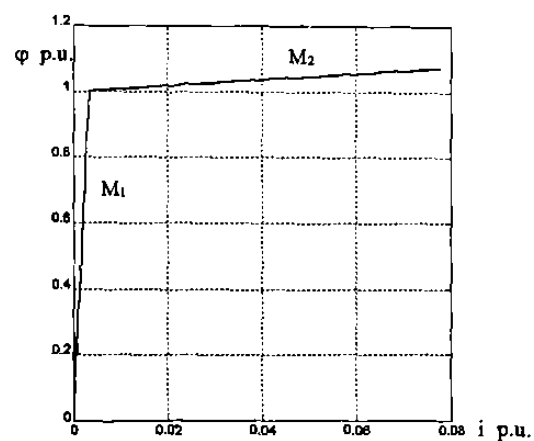
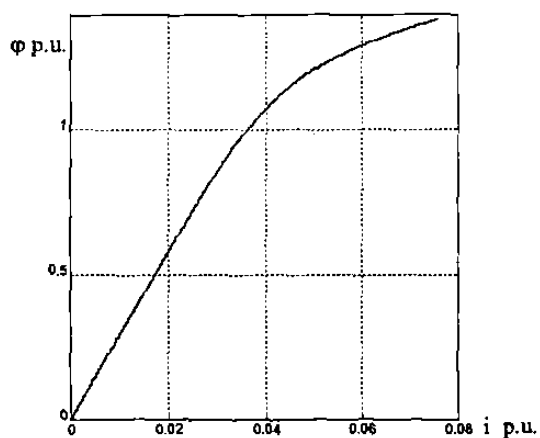


Figura E.1. Característica del generador.      Figura E.2. Característica del transformador.

