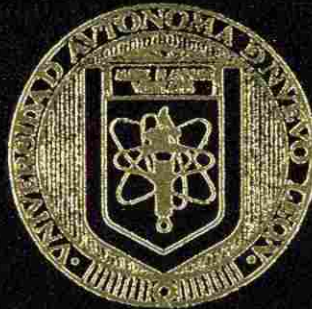


UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE FILOSOFIA Y LETRAS

DIVISION DE POSTGRADO



"LA TEORIA DE FRACTALES: APLICACION  
EXPERIMENTAL E IMPLICACIONES EN  
LA METODOLOGIA DE LA CIENCIA"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRIA EN METODOLOGIA DE LA CIENCIA

P R E S E N T A

RAUL RODRIGUEZ MIRANDA

CD. UNIVERSITARIA

AGOSTO DE 1995

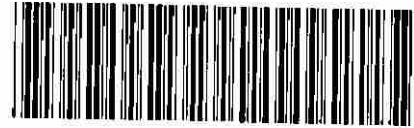
TM

Z7125

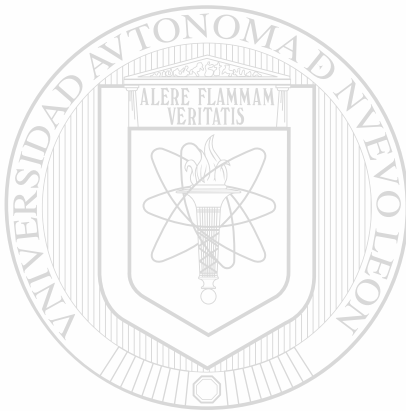
FFL

1995

R6



1020114994



# UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

**UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON**  
**FACULTAD DE FILOSOFIA Y LETRAS**  
**DIVISION DE ESTUDIOS DE POS-GRADO**



**"LA TEORIA DE FRACTALES :  
APLICACION EXPERIMENTAL E IMPLICACIONES  
EN LA METODOLOGIA DE LA CIENCIA "**

**UANL**

**TESIS**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE :  
MAESTRO EN METODOLOGIA DE LA CIENCIA**

**DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS**

**PRESENTA :  
RAUL RODRIGUEZ MIRANDA**

**CD. UNIVERSITARIA**

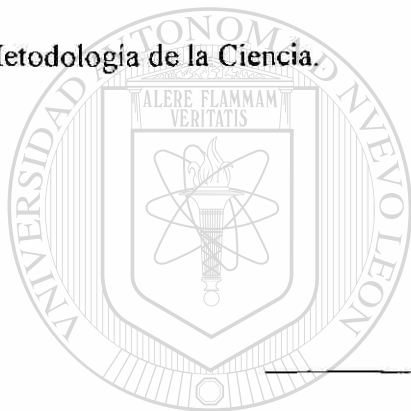
**AGOSTO DE 1995**

**UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON**

**FACULTAD DE FILOSOFIA Y LETRAS**

**DIVISION DE ESTUDIOS DE POST-GRADO**

Los integrantes del Comité de Tesis recomendamos que la presente tesis realizada por el Lic. Raúl Rodríguez Miranda sea aceptada como opción para obtener el grado de Maestro en Metodología de la Ciencia.



El comité de Tesis

M. C. Carlos Jesús García Meza

Asesor

Dr. Ubaldo Ortiz Méndez

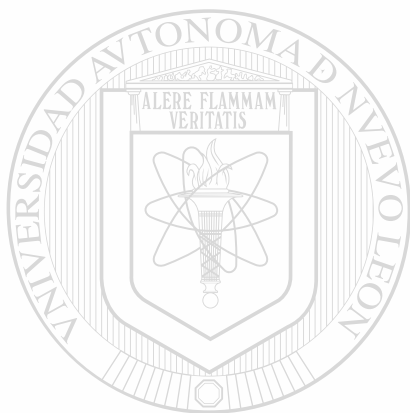
Revisor

M. C. José María Infante Bonfiglio

Revisor

MONTERREY, N. L.

AGOSTO DE 1995



# UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

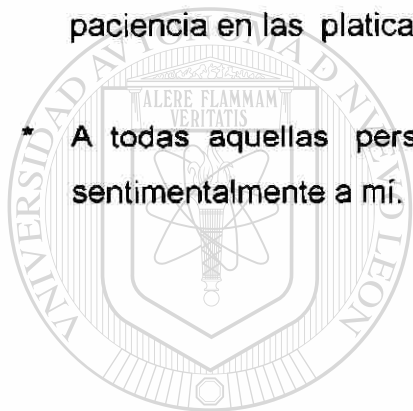


FONDO TESIS

# AGRADECIMIENTOS

- \* A la División de Estudios de Postgrado de la Facultad de Filosofía y Letras de la U.A.N.L.
- \* Al Programa Doctoral en Ingeniería de Materiales de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la U.A.N.L.
- \* A mi asesor Lic. Carlos J. García Meza, M. en C. por su amistad, su apoyo, su paciencia y uno de los iniciadores en mi curiosidad por el estudio de los sistemas dinámicos no-lineales.
- \* A mi maestro Dr. Ubaldo Ortiz Méndez, Coordinador del programa Doctoral en Ingeniería de Materiales de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la U.A.N.L. por haberme dado la oportunidad de incursionar en la aplicación de los sistemas dinámicos no-lineales, por sus enseñanzas, por sus consejos y por su gran apoyo en mi formación de postgrado, MUCHAS GRACIAS.
- \* A mi maestro Lic. José María Infante Bonfiglio, M. en C. Coordinador de la División de Postgrado de la Facultad de Filosofía y Letras de la U.A.N.L. por su apoyo y paciencia.
- \* A todos mis compañeros y maestros de la División de Estudios de Postgrado de la Facultad de Filosofía y Letras de la U.A.N.L.

- \* A todos mis maestros y compañeros del Programa Doctoral en Ingeniería de Materiales de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la U.A.N.L.
- \* A todos mis compañeros maestros de los Departamentos de Matemáticas, Física, Ingeniería Mecánica, Ingeniería de Sistemas, Sistemas de Conocimiento, Térmica y Control y a sus respectivos directores departamentales del I.T.E.S.M. por su apoyo.
- \* A mi hermano Lic. Rubén Rodríguez Miranda, M. en C, por su paciencia en las platicas cotidianas.
- \* A todas aquellas personas que de una u otra manera están unidas sentimentalmente a mí.



UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



# INDICE

<b>RESUMEN</b>	1
<b>INTRODUCCIÓN</b>	3
<b>CAPÍTULO I. DESARROLLO HISTÓRICO DE LA TEORÍA DE FRACTALES</b>	
I.1 Antecedentes	6
I.2 Cronología	6
I.2.1 Jean Baptiste Perrin	7
I.2.2 Norbert Wiener	8
I.2.3 Lewis Fry Richardson	9
I.2.4 Benoit B. Mandelbrot	10
<hr/>	
<b>CAPÍTULO II. FRACTALES</b>	
II.1 Antecedentes	12
II.2 Autosimilitud	14
II.3 Construcción de los Objetos Fractales Clásicos	15
II.3.1 Conjunto de Cantor	17
II.3.2 Triángulo de Sierpinski	19
II.3.3 Curva de von Koch	22
II.3.4 Curva de Peano	24
II.3.5 Curva de Hilbert	26

II.4	Conjunto de Mandelbrot	27
II.5	Fractal Matemático y Fractal Natural	34

### **CAPÍTULO III. FUNDAMENTOS TEÓRICOS DE LA TEORÍA DE FRACTALES**

III.1	Definición Formal de Autosimilitud, Autosimilitud Estadística y Auto-afinidad	42
III.2	Dimensión Topológica	45
III.3	Movimiento Browniano	48
III.4	Dimensión Fractal	52
	III.4.1 Definición	52
	III.4.2 Método de Conteo de Cuadros	55
	III.4.3 Diagramas de Richardson	56

### **CAPÍTULO IV. MEDICIÓN DE LA DIMENSIÓN FRACTAL. UNA APLICACIÓN A LA INGENIERÍA DE MATERIALES**

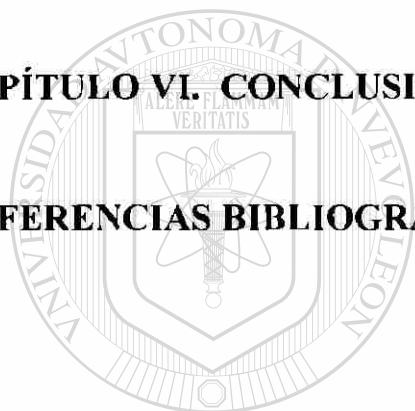
IV.1	Ingeniería de Materiales	63
IV.2	Fronteras de Grano	64
IV.3	Preparación de las Muestras	64
IV.4	Acero Inoxidable 316L	66
	IV.4.1 Composición Química	67
	IV.4.2 Ataque Químico	68
	IV.4.3 Dimensión Fractal	70

IV.5	Acero de Bajo Carbono	72
IV.5.1	Composición Química	72
IV.5.2	Ataque Químico	73
IV.5.3	Dimensión Fractal	74
IV.6	Discusión de Resultados	75

<b>CAPÍTULO V.</b>	<b>IMPLICACIONES METODOLÓGICAS DE LA TEORÍA DE FRACTALES</b>	<b>78</b>
--------------------	--	-----------

<b>CAPÍTULO VI.</b>	<b>CONCLUSIONES</b>	<b>84</b>
---------------------	---------------------	-----------

<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>87</b>
-----------------------------------	-----------



UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

# RESUMEN

De los últimos diez años a la fecha ha habido un gran auge en publicaciones tanto en artículos de divulgación como en libros con respecto a sistemas dinámicos no-lineales, específicamente, teoría de caos y fractales. La teoría de fractales ha sido aplicada con gran éxito en diferentes áreas de ciencia e ingeniería.

La presente tesis tiene por objetivo demostrar que los objetos fractales son consecuencia de la matemática de finales del siglo pasado. También mostraremos cómo B.B. Mandelbrot contribuyó enormemente a la creación de dicha teoría con la acuñación del término fractal.

El objetivo principal de la tesis es la aplicación de la metodología fractal a un área específica de la ingeniería para el estudio de los materiales.

Mostraremos también cómo la geometría de Euclides no es adecuada para la caracterización los objetos fractales y que la teoría de fractales no es una revolución científica en el sentido de Thomas S. Kuhn.

La tesis se divide en tres partes.

En la primera parte (Capítulos I, II,III) se da un breve repaso a la teoría de fractales y se analizan los principales conceptos que sustentan la metodología de los mismos. Se presentan los diferentes tipos de algoritmos que se utilizan para generar las figuras fractales clásicas. Se definen formalmente los conceptos de

autosimilitud, autosimilitud estadística y auto-afinidad. Se presenta el método de conteo de cuadros como una herramienta básica para la determinación de la dimensión fractal.

En la segunda parte (Capítulo IV) se aplica la teoría de fractales a la caracterización de dos tipos de materiales: aceros inoxidable y de bajo contenido de carbono. Se calcula la dimensión fractal de las fronteras de grano presentes en dichos aceros. Las muestras estudiadas se prepararon para un análisis metalográfico, se atacaron químicamente para revelar su microestructura y mediante microscopía óptica y un sistema de análisis de imágenes se midieron los perímetros de las fronteras de grano a diferentes magnificaciones. Se obtuvieron los valores promedio y desviaciones estándar de todas las muestras a diferentes magnificaciones. Se calculó la dimensión fractal a partir de la curva que se obtiene al graficar  $\log(\text{perímetro})$  vs.  $\log(\text{factor de calibración})$ .

En la tercera parte (Capítulo V y VI) se analizan las implicaciones metodológicas de la teoría de fractales y se presentan, a manera de sugerencia, algunas de las líneas de investigación que otros estudiantes de la Maestría de Metodología de la Ciencia o de cualquier área de Ingeniería pudieran investigar en el desarrollo teórico o en la aplicación de la la teoría de fractales.

# INTRODUCCIÓN

Para describir en forma completa ciertas irregularidades y patrones fragmentados de las formas que aparecen en la naturaleza tales como líneas costeras, nubes, montañas, etc., en 1977 B.B. Mandelbrot [1] generó una nueva geometría. Introdujo el término *fractal* para identificar la familia de formas descritas por esta geometría. Fenómenos físicos como difusión, movimiento browniano, etc., también muestran un comportamiento fractal. Mediante algoritmos matemáticos pueden generarse distintas formas geométricas con estructura fractal ideal.

El estudio de las propiedades de los materiales constituye una parte importante en el análisis de sistemas con estructura fractal. Los primeros trabajos sobre propiedades mecánicas, físicas y químicas en el área de ingeniería de materiales aplicando fractales datan de mediados de la década de los 80's [42,44,46,47]. Estos trabajos tienen como objetivo relacionar las propiedades de los materiales con los parámetros característicos del fractal o caracterizar su estructura fractal mediante la ayuda de microscopía óptica, espectroscopía óptica, sistema de análisis de imágenes, etc. [37,40,48,49].

Uno de los objetivos de la presente tesis es mostrar y describir los fundamentos de la teoría de los fractales, otro de los objetivos es la aplicación de la metodología fractal para calcular el grado de irregularidad que presentan algunos objetos naturales que particularmente en el área de ingeniería de materiales, los aceros inoxidables y los aceros de bajo contenido de carbono constituyen un ejemplo. Finalmente, se señalan las consecuencias que ha provocado en diferentes aspectos de la metodología de la ciencia.

## **Contenido de la tesis:**

El contenido de la tesis queda comprendido en seis capítulos, descritos a continuación:

### **Capítulo I**

#### **Desarrollo Histórico de la Teoría de Fractales**

En esta sección se hace una reseña histórica sobre las principales contribuciones a la teoría de fractales.

### **Capítulo II**

#### **Fractales**

Se presenta la construcción de los objetos matemáticos fractales clásicos. Dichas figuras son creadas por medio de algoritmos recursivos inventados en el siglo pasado para poder explicar de manera adecuada el concepto de dimensión.

### **Capítulo III**

#### **Fundamentos Teóricos de la Teoría de Fractales**

En este capítulo se definen formalmente algunos de los conceptos básicos de la teoría de los fractales. Se presenta el método de conteo de cuadros y los diagramas de Richardson, que son dos de los métodos más consistentes para la medición de la dimensión fractal.

### **Capítulo IV**

#### **Medición de la Dimensión Fractal. Una Aplicación a la Ingeniería de Materiales**

La metodología fractal se ha aplicado a diferentes campos de investigación, e Ingeniería de Materiales no ha sido la excepción. En este capítulo se explica lo que es una frontera de grano de un material, luego se seleccionan

dos materiales para medir la irregularidad de las mismas por medio de su dimensión fractal.

## **Capítulo V**

### **Implicaciones Metodológicas de la Teoría de Fractales**

Las teorías de los sistemas dinámicos no-lineales, caos y de fractales, han refutado la validez del determinismo científico o laplaciano. La teoría de fractales invalida la pretensión de la predecibilidad de los sistemas clásicos al introducir dinámicas complejas. La geometría clásica euclidiana deja de ser adecuada para el análisis de objetos fractales tanto matemáticos como naturales.

## **Capítulo VI**

### **Conclusiones**

En este capítulo se cotejan la geometría de Euclides y la fractal aplicadas a la caracterización de los objetos en general. Se concluye las ventajas y desventajas de cada una de las diferentes geometrías. Se menciona las consecuencias de la teoría de fractales en metodología de la ciencia. Se habla acerca de la ventaja de la geometría fractal a la aplicación en el área de ingeniería de materiales.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



# CAPÍTULO I

## DESARROLLO HISTÓRICO DE LA TEORÍA DE FRACTALES

### I.1 Antecedentes

La teoría de fractales no se desarrolló independiente de otras disciplinas, dicha teoría nace de consecuencias matemáticas que datan de finales del siglo pasado. El problema de dimensión era crucial para la caracterización de conjuntos de puntos, curvas, superficies y volúmenes. A medida que se definía este importante concepto, se creaban por los mismos matemáticos, conjuntos de puntos o curvas que contradecían dichas definiciones. Hombres como G. Cantor, W. Sierpinski, H. von Koch, G. Peano y D. Hilbert contribuyeron notablemente a elucidar el concepto de dimensión y al nacimiento de una nueva herramienta de investigación: *la teoría de fractales*, aunque ellos nunca lo supieron [3].

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

### I.2 Cronología

Los orígenes de la teoría de fractales se remontan al siglo XIX, con las ideas de Henri Poincaré, quien inició el estudio formal de los sistemas dinámicos. Posteriormente, diversos científicos y matemáticos trabajaron con distintos aspectos de esta teoría.

El desarrollo cronológico de los conceptos y técnicas que constituyen la teoría de fractales ocurrió desde diferentes vertientes. En el recorrido histórico que presentamos enseguida podemos constatar el carácter tan variado de esta nueva teoría. Por lo antes dicho, el desarrollo histórico dado a continuación no presenta una estructura estrictamente lineal. Veremos cómo la teoría de fractales se ha nutrido de la matemática (N. Wiener, B. Mandelbrot, L. F. Richardson), de la física (J.B. Perrin) y de otras disciplinas tan diversas que quedan contenidas en los trabajos de B. B. Mandelbrot [1].

### **I.2.1 Jean Baptiste Perrin**

Uno de los científicos que observaron y publicaron con respecto a objetos familiares de forma irregular o interrumpida fue el físico Jean B. Perrin (1870-1942). En el prólogo de su célebre obra, *Les Atomes* (Perrin 1913) [1], él expresa...

---

<<... si bien las funciones derivables son las más simples, las más fáciles de manejar, constituyen a su vez, la excepción, o bien, si se prefiere un lenguaje geométrico, las curvas que no admiten tangente son la regla, y las curvas regulares, tales como el círculo, son casos interesantes, pero particulares. Y como ocurre la mayoría de las veces, aquellas personas que se les habla de curvas sin tangente o funciones sin derivada piensan que la naturaleza no presenta tales complicaciones y que no nos sugiere esas ideas.

En la realidad experimental si miramos a través de un microscopio, observamos el movimiento browniano que agita cualquier pequeña partícula en suspensión en un fluido y queremos una tangente a su trayectoria, tendríamos que encontrar un límite, por lo menos aproximado, a la dirección

de la recta que une las posiciones de dicha partícula en dos instantes sucesivos muy próximos. Ahora bien, hasta donde permita llegar la experiencia, esta dirección varía localmente cuando se disminuye el tiempo transcurrido entre ambos instantes... >>.

## 1.2.2 Norbert Wiener

Hacia 1920, las ideas de Perrin las retomó el joven Norbert Wiener (1894-1964) y lo estimularían en la construcción de su modelo probabilístico del movimiento browniano. Wiener tenía afición para denominar una forma extrema del desorden natural. Él lo denominaba con la palabra "caos", y nos permite apreciar que Perrin hizo dos observaciones distintas. Por una parte que la geometría de la naturaleza es caótica y esta mal representada por el orden perfecto de las formas usuales de Euclides o del cálculo newtoniano. Por otra parte, que dicha geometría evoca la complicación de las matemáticas creadas hacia 1900. Fue la obra de Wiener la principal fuente de inspiración para la creación de los objetos fractales. El dominio fractal había emergido (sin nombre) cuando se estudiaron fenómenos reales (tales como la longitud de una costa) por medio de teoría matemática avanzada, que surgieron en estudios donde el azar estaba involucrado.

Fue hasta mucho más tarde (1967) que estos acontecimientos se fundieron en una nueva disciplina: la geometría fractal. Esta se caracteriza por dos aspectos importantes: la existencia de problemas en el caos de la naturaleza y la aplicación de la herramienta matemática para su caracterización.

Con su maduración progresiva, esas dos características han creado algo nuevo: entre el dominio del caos incontrolado y el orden excesivo de Euclides, hay a partir de ahora una nueva zona, la fractal.

### **I.2.3 Lewis Fry Richardson**

La variación de la longitud aproximada de las fronteras entre dos países o costas de algún país en particular fue estudiada empíricamente por el matemático inglés Lewis Fry Richardson (1881-1953), aunque su originalidad se tomara por excentricidad, y no haya alcanzado la celebridad que merecía. Rehuía los formalismos sin vacilar, empleaba conceptos finos y precisos allí donde él los creía útiles. Entre los papeles que dejó a su muerte se han encontrado las gráficas reproducidas en las figuras 17 y 18, que inducen a concluir que la longitud de una costa o frontera  $L$  es proporcional al factor de escala empleado en la medición  $\epsilon$  elevado a una potencia  $\alpha$ . El valor de dicha potencia depende de la costa elegida, y distintos tramos de la misma costa, considerados separadamente, dan a menudo distintos valores de la potencia. A los ojos de Richardson, dicha potencia, era un mero exponente, sin ningún significado particular. Pero su valor parece ser independiente del método elegido para estimar la longitud y, por lo tanto, el parámetro merece ser considerado con detenimiento.

Su obra de 1922, *Weather Prediction by Numerical Process*, fue la obra de un visionario práctico a quien, por desgracia, se le reprochó un error fundamental. En efecto, cuando aproximó las ecuaciones diferenciales de evolución de la atmósfera por ecuaciones en diferencias finitas, eligió para los intervalos de espacio y tiempo unos valores que estaban muy lejos de satisfacer un cierto criterio de seguridad del cálculo. Al no conocerse aún la

necesidad de tales normas, el error era apenas evitable, pero -debido a ello- la validez del principio del método de Richardson tuvo que esperar veinte años para ser reconocida.

Siguió con el estudio de la turbulencia, y sus trabajos le valieron ser elegido para la Royal Society. Su obra muestra cómo se puede estudiar la difusión por el viento sin tener que hablar de su velocidad. Alude a la función continua sin derivada de Weierstrass. Así, Richardson no disponía del elemento fractal, pero su razonamiento es fácilmente traducible en términos de la visión <<fractal>> de la turbulencia. Aparecieron dos volúmenes después de su muerte, así como algunos artículos, uno de los cuales salvó del olvido sus trabajos acerca de la longitud de las costas.

#### **1.2.4 Benoit B. Mandelbrot**

Mandelbrot es considerado como el padre de la geometría fractal. Sin embargo, se piensa que varios de los fractales y su descripción vienen de las matemáticas clásicas; de hecho, como veremos luego, varios matemáticos del siglo pasado inventaron algoritmos especiales para su creación, tales como G. Cantor (1872), G. Peano (1890), D. Hilbert (1891), H. von Koch (1904), W. Sierpinski (1916), G. Julia (1918), F. Hausdorff (1919), solo por nombrar unos pocos. Es verdad que aquella matemática jugó un papel importante en los conceptos de Mandelbrot para la creación de la nueva geometría. Pero también es verdad que aquellos matemáticos no pensaron que de dichos algoritmos se pudiese generar conceptos para una nueva geometría de la naturaleza. Dichos algoritmos que generaban objetos matemáticos "raros" fueron relegados como objetos excepcionales o "monstruos matemáticos".

En la obra de B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature* 1982, se citan 84 referencias debidas a él mismo que de una u otra forma influyeron para desarrollar el concepto de fractal [1]. Dichas publicaciones datan de 1951 a 1986. Mandelbrot es un experto en la aplicación de la probabilidad y la estadística a problemas concretos y reales en áreas tan diversas como termodinámica, sistemas de comunicación, teoría de la información, economía, psicología, climatología, cosmografía, mecánica de fluidos e ingeniería de materiales.

El concepto más importante para la teoría de fractales es el de *autosimilitud*, dicho concepto no aparece instantáneamente en los trabajos de Mandelbrot, va evolucionando a medida que aplica la herramienta matemática a las diferentes áreas arriba mencionadas y es hasta la década de los 60's donde habla por primera vez de autosimilitud [1].

Pero es hasta 1967 cuando ya había madurado bien el concepto y además pudo cuantificarlo [30].

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

# CAPITULO II

## FRACTALES

### II.1 Antecedentes

Un fractal, el cual fue inicialmente concebido por Benoit B. Mandelbrot [1], consta de fragmentos geométricos de orientación y tamaño variable, pero de aspecto similar. Los detalles de un fractal a cierta escala son semejantes (aunque no necesariamente idénticos) a los de las estructuras visibles a escala mayor o menor. Se confirma que son estadísticamente iguales (esto significa que si se mide alguna propiedad como la irregularidad, entonces el valor promedio y desviación estandar son iguales).

Todos los fractales poseen esta propiedad interna de parecerse a sí mismos a diferentes magnificaciones; esta propiedad recibe el nombre de *autosimilitud*.

Dado que un fractal está compuesto de estructuras similares cada vez más finas, su longitud depende de la magnificación y resolución del instrumento de medición. Cuando se intenta medir la longitud de una línea fractal con una determinada regla, algunos detalles serán siempre más finos de lo que la regla tiene posibilidad de medir. Así pues, conforme aumente la resolución del instrumento de medida, va creciendo también la longitud de un fractal.

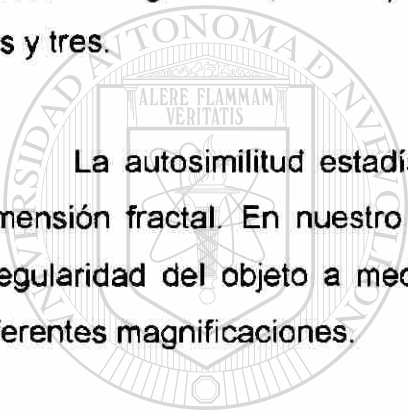
Ante esta situación se ha propuesto un número que se conoce como *dimensión fractal*, para cuantificar qué tanto llena el espacio un fractal. El

concepto de dimensión que nos es familiar se aplica a los objetos de la geometría clásica euclidiana. Así, las rectas tienen dimensión uno, los círculos son de dimensión dos y las esferas son de dimensión tres. En cambio los fractales pueden tener una dimensión con valores no necesariamente enteros.

Mientras que una línea euclidiana, llena exacta y precisamente un espacio unidimensional, una línea fractal se desparrama en un espacio bidimensional.

En consecuencia, una línea fractal tiene dimensión comprendida entre uno y dos. Análogamente, una superficie fractal tiene una dimensión intermedia entre dos y tres.

La autosimilitud estadística puede ser caracterizada por el concepto de dimensión fractal. En nuestro caso la autosimilitud implica que la rugosidad o irregularidad del objeto a medir no es una función de escala y persistirá para diferentes magnificaciones.



UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



## II.2 Autosimilitud

Este concepto es fundamental en todos los fractales. Se refiere a aquellos objetos que presentan características parecidas cuando son observados a diferente magnificación. Así, dado un objeto con características de autosimilitud, si se le hace una sucesión de fracciones en diferentes tamaños, las fracciones del objeto resultante tendrán características en general similares. Esta autosimilitud se puede llevar hasta tres o cuatro estados antes que la estructura sea muy pequeña para una disección posterior. En una idealización matemática, la propiedad de autosimilitud de un fractal puede continuar infinitamente por muchos estados, como las imágenes muy populares del conjunto de Mandelbrot [7].

El conjunto de Cantor, el triángulo de Sierpinski, la curva de von Koch, la curva de Peano, la curva de Hilbert y todas las figuras geométricas que emanan de ellas presentan características de autosimilitud.

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

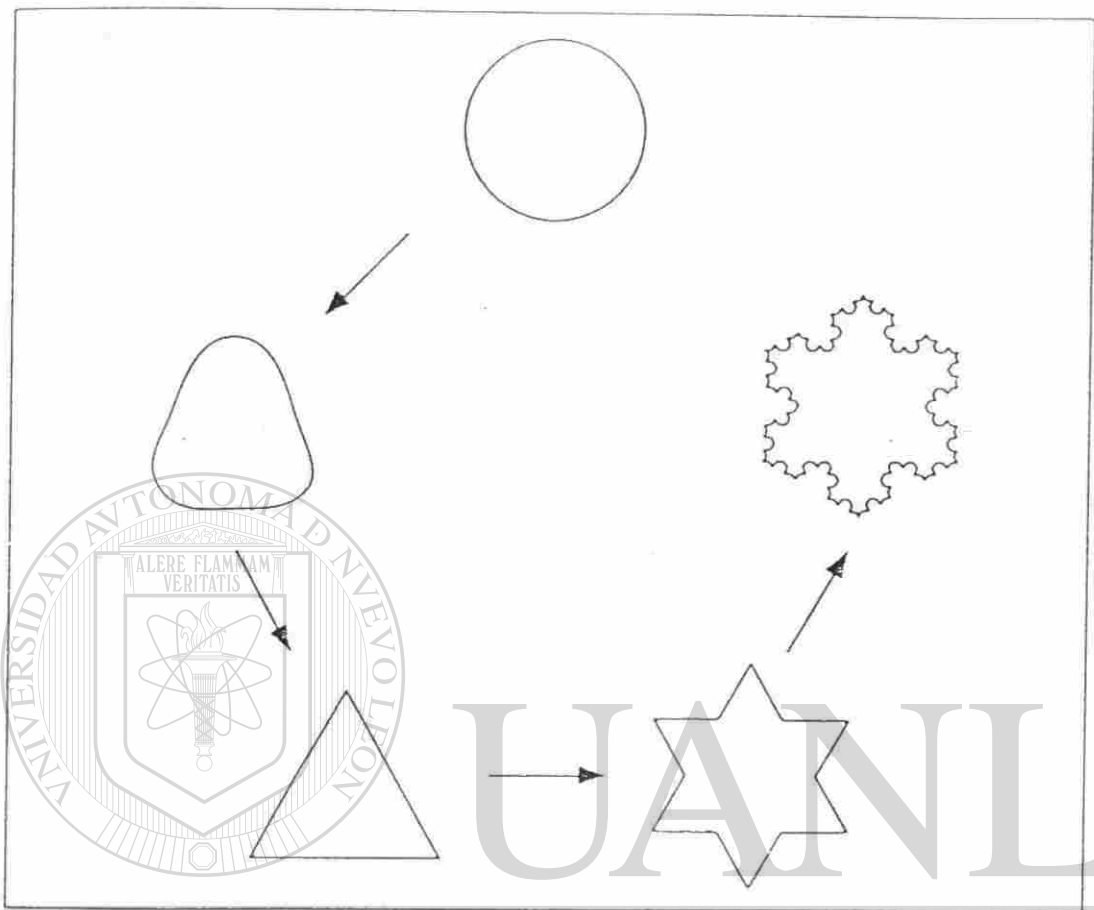
## II.3 Construcción de los Objetos Fractales Clásicos

En este punto se presentan las reglas para la construcción de figuras geométricas que fueron las primeras en presentar características de autosimilitud.

Dichas figuras fueron creadas entre los años 1883-1916. En aquellos años los matemáticos no les prestaron ninguna atención, pues se pensaba que no tenían aplicación práctica; en ese tiempo no se les pudo caracterizar por algún parámetro invariante. Matemáticos como G. Cantor, W. Sierpinski, H. von Koch, G. Peano y D. Hilbert fueron los que crearon estas figuras. Dichos acontecimientos contribuyeron a la crisis matemática de 1875-1925.

A algunos matemáticos no les convencía la respuesta de los topólogos, por ejemplo, una línea recta, un triángulo, un círculo y la curva de von Koch son equivalentes y llenan el espacio en la misma cantidad, esto significa que para todas ellas la dimensión es uno, ver figura 1. Es por esto que el *Análisis Matemático* y específicamente la *Teoría de la Medida* desarrollaron conceptos adecuados y más formales para poder ser aplicados a cualquier conjunto de puntos o figura geométrica.

En el año 1919 el gran matemático F. Hausdorff (1868-1942) publica el concepto más riguroso y formal que existe hasta hoy de lo que es la dimensión de un objeto, aunque no es aplicable prácticamente. Fue en el año de 1967 cuando B. Mandelbrot, basándose en la definición de dimensión de Hausdorff, desarrolló un concepto más práctico de dimensión; lo que se conoce hoy como *dimensión fractal* [30].



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Figura 1. Un círculo puede ser deformado a un triángulo. Un triángulo puede ser deformado hasta convertirse en una curva de von Koch. Todas las figuras son topológicamente equivalentes [3].

## II.3.1 Conjunto de Cantor

George Cantor (1845-1918) fue un matemático alemán de la Universidad de Halle, fue el fundador de lo que se conoce hoy en día como *Teoría de Conjuntos*. El conjunto de Cantor fue publicado en 1883 [3]. Dicho conjunto juega un papel importante en varias ramas de las matemáticas, específicamente en el área de *Sistemas Dinámicos Caóticos* y sirve de modelo esencial para la interpretación de otros objetos fractales.

Este conjunto es un conjunto infinito de puntos en el intervalo unitario  $[0,1]$ . El conjunto puede ser interpretado como un conjunto de ciertos números, por ejemplo,  $\{0, 1, 1/3, 2/3, 1/9, 2/9, 7/9, 8/9, 1/27, \dots\}$ . El conjunto de Cantor es el más importante para recordar la construcción clásica de conjuntos.

Empezamos con el intervalo  $[0,1]$ . Ahora tomamos el intervalo abierto  $(1/2, 2/3)$ , esto es, quitamos la parte de enmedio del intervalo  $[0,1]$  pero no los números  $1/3$  y  $2/3$ . Los intervalos  $[0, 1/3]$  y  $[2/3, 1]$  tienen una longitud de  $1/3$  cada uno y completa la construcción básica del conjunto. Ahora repetimos el procedimiento anterior. Continuamos para  $n$  pasos, así en ese momento tendremos  $2n$  intervalos con una longitud cada uno de  $1/3^n$ . En la figura 2 se muestra la construcción de dicho conjunto.

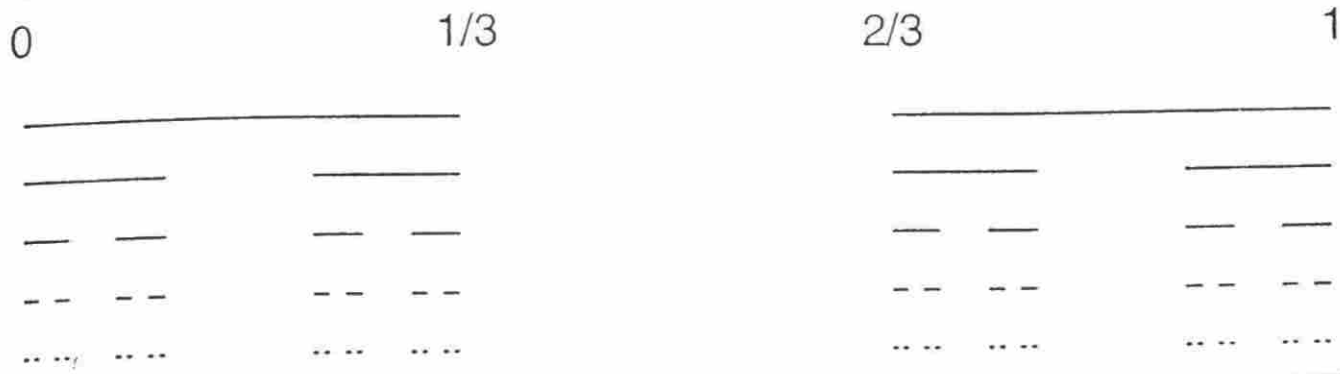
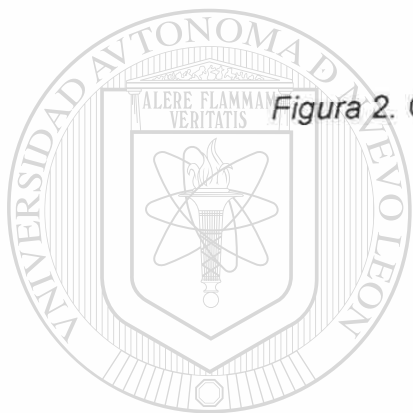


Figura 2. Construcción del conjunto de Cantor [3].



UANL

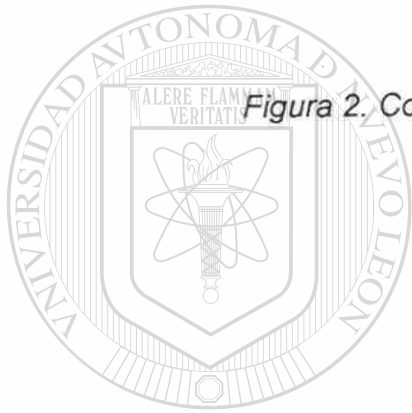
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

®



Figura 2. Construcción del conjunto de Cantor [3].



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



## II.3.2 Triángulo de Sierpinski

Otro fractal clásico es 40 años más joven que el conjunto de Cantor. Dicho fractal fue introducido por el gran matemático polaco Waclam Sierpinski (1862-1969) en 1916.

Para la construcción del triángulo de Sierpinski procedemos de la siguiente manera. Dado un triángulo equilátero, aplicamos la siguiente regla: colóquense tres reducciones a la mitad de la original en los extremos de dicho triángulo. Si volvemos a hacer uso de la misma regla se obtiene una ordenación triangular de tres ordenaciones triangulares reducidas, y así sucesivamente. Al cabo de seis repeticiones o iteraciones se empieza a observar con claridad la figura que caracteriza a este ejemplo. La denominamos figura límite, ya que se trata de un valor frontera matemático (el límite) resultante de la sucesión infinita de repeticiones de la regla sobre una determinada figura original. En la figura 3 se presenta la construcción de este fractal clásico.

---

Los objetos que presentan autosimilitud se caracterizan por poseer la siguiente propiedad: al tomar una porción del objeto por pequeña que ésta sea, contiene una figura que, ampliada suficientemente, nos proporciona de nuevo la figura original. Si tomamos o escogemos tres objetos diferentes y le aplicamos la misma regla, vuelve a proporcionarnos al cabo de seis iteraciones una imagen que es prácticamente la misma, aunque difieren en pequeños detalles, pero la figura límite es siempre igual. Queda determinada por el algoritmo elegido [17]. Lo anterior queda claramente ilustrado en la figura 4.

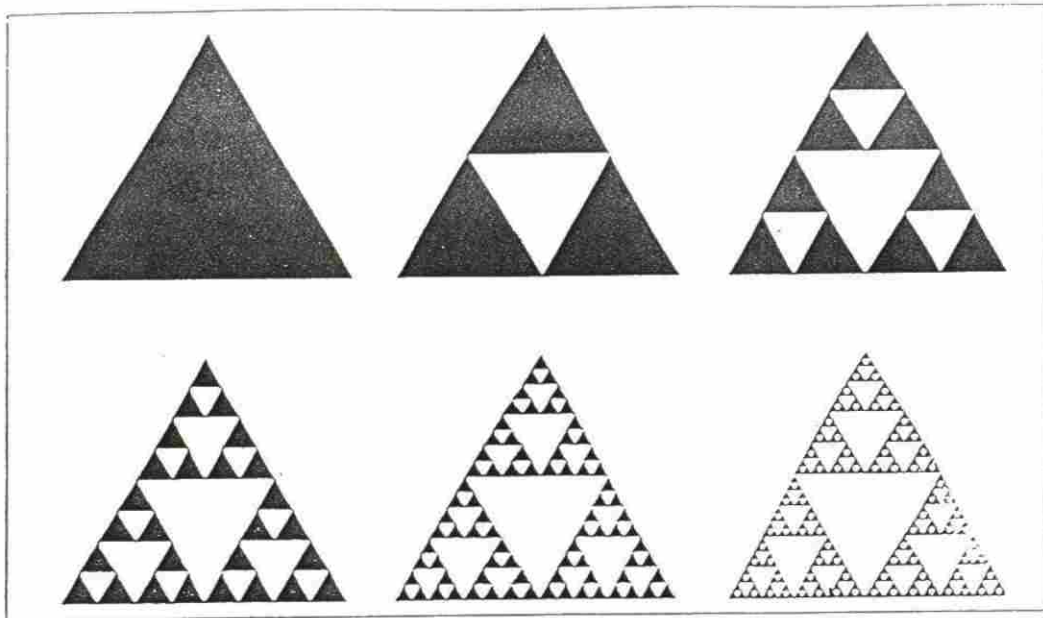
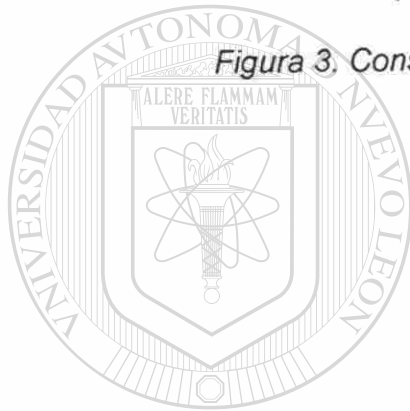


Figura 3. Construcción del triángulo de Sierpinski [3].



# UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

®



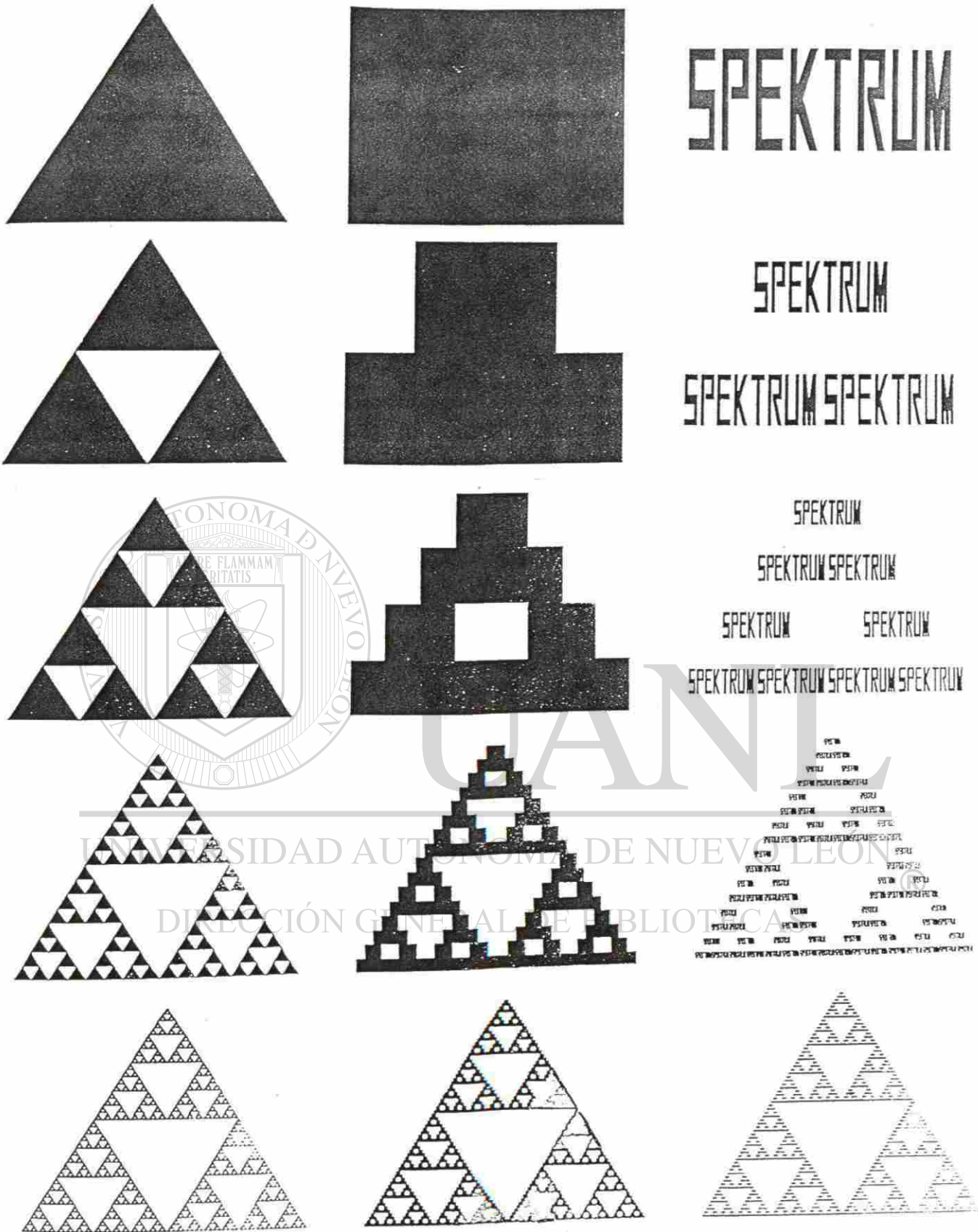


Figura 4. Independientemente de la figura a la que se le aplique el algoritmo, la figura limite es la misma [17].

### II.3.3 Curva de von Koch

Helge von Koch fue un matemático sueco quien, en 1904, introdujo lo que ahora se conoce como curva de von Koch; también conocida como curva copo de nieve o isla de von Koch.

Existe un método para la construcción geométrica simple de la curva de von Koch. Empezamos con una línea recta, este es el objeto inicial y es llamado *el iniciador*. Luego se corta en tres partes iguales. Luego se reemplaza la parte central por un triángulo equilátero y se toma esa parte como base. Esto completa la construcción básica. Una reducción de esta figura, hecha de cuatro partes, será reusada para el siguiente estado. A esto le llamamos *el generador*. Así, ahora repetimos tomando cada uno de los segmentos iniciales del generador y volvemos a duplicar el proceso. En la figura 5 se presenta la construcción de este fractal matemático.

Si el algoritmo anterior es aplicado sobre una línea recta la figura nunca se cierra sobre sí misma. Para obtener la curva de von Koch cerrada es necesario aplicar el algoritmo a un triángulo equilátero.

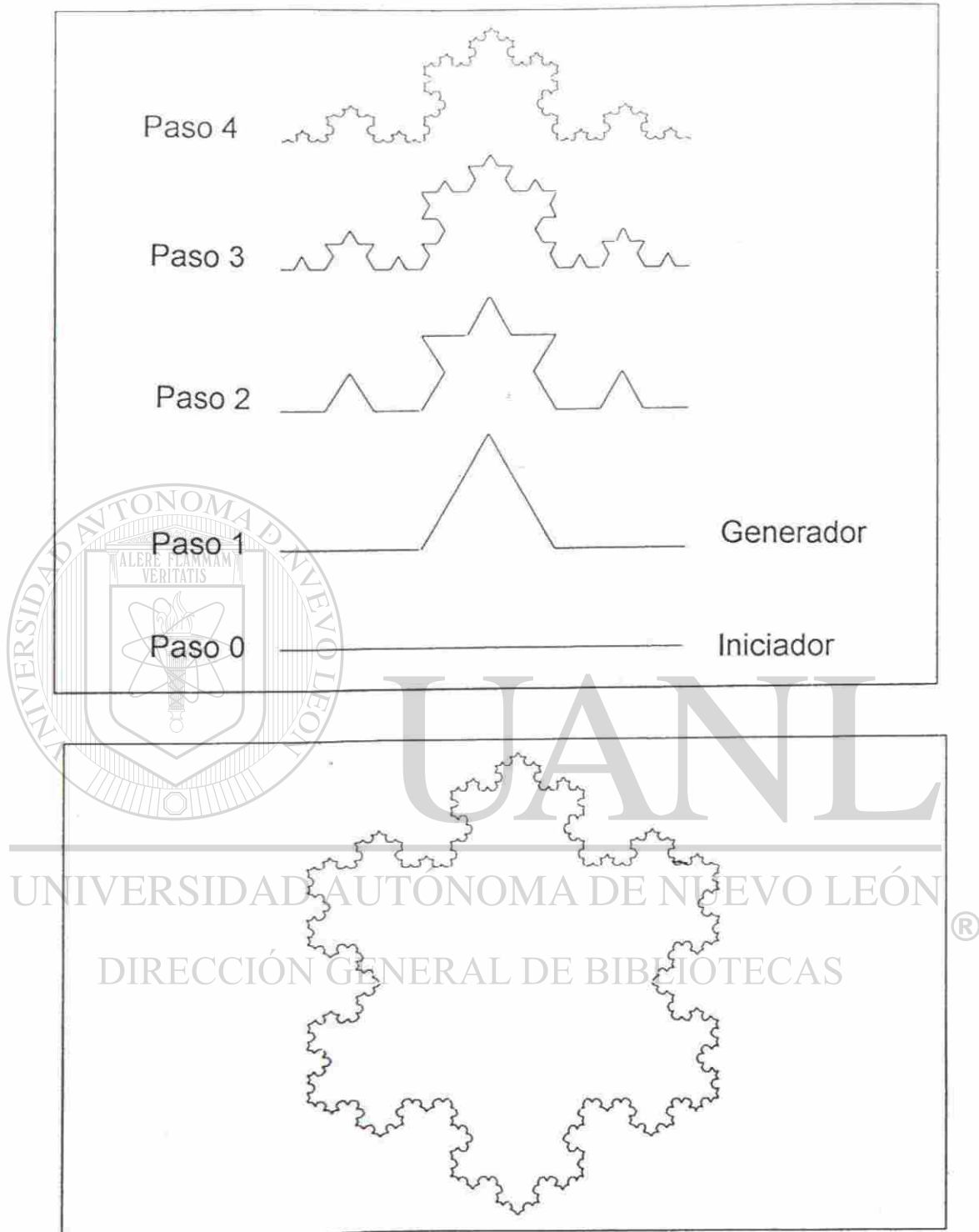


Figura 5. Generación de la curva de von Koch [3].

## II.3.4 Curva de Peano

En 1890 Giuseppe Peano (1858-1932), e inmediatamente después en 1891 David Hilbert (1862-1943) discuten las curvas que se encuentran en un plano y bajo ciertas reglas iterativas llegan a llenar completamente dicho plano, dramáticamente demuestran que nuestra idea con respecto a las curvas es bastante limitada. Estos dos matemáticos fueron, en esa época, los únicos que se percataron de la importancia de dichas curvas desde un punto de vista más riguroso para formalizar la manera de caracterizar su cuantificación. Pasaron cerca de 100 años para que los matemáticos las estudiaran formalmente debido al trabajo de Mandelbrot [1] y la introducción del concepto de *fractal*.

Para la construcción de la curva de Peano, empezamos con una línea recta simple, el iniciador, luego sustituimos el segmento por una curva generadora. Aparentemente el generador tiene dos puntos de auto-intersección, más precisamente, la curva se toca a sí misma en dos puntos. Observamos que la curva generadora se ajusta bien dentro de un cuadrado, que se muestra por las líneas punteadas. Tomamos cada pedazo de la línea recta y la reemplazamos por un generador con una adecuada escala. El factor de escala es tres. Hay un total de 32 puntos de auto-intersección en la curva. Después repetimos, en los siguientes pasos el mismo procedimiento, así cada segmento de línea tiene un factor de tres, por lo tanto, en el paso  $n$ -ésimo el segmento de línea tiene una longitud de  $1/3^n$  y este número rápidamente decrece. Luego cada segmento de línea es reemplazado por nueve segmentos de  $1/3$  de longitud de la línea previa, podemos fácilmente calcular la longitud de la curva en cada paso. Asumimos que la longitud del segmento original constituye el iniciador con longitud 1, luego en el siguiente paso 1: la longitud es  $9(1/3) = 3$ , y en el siguiente paso 2: la longitud es  $9(9)(1/32) = 9$ . Expresado como una regla general, en cada paso de construcción

la curva incrementa su longitud por un factor de 3. En el paso  $n$ -ésimo, la longitud es  $3^n$ . En la siguiente figura se presenta la generación de la curva de Peano.

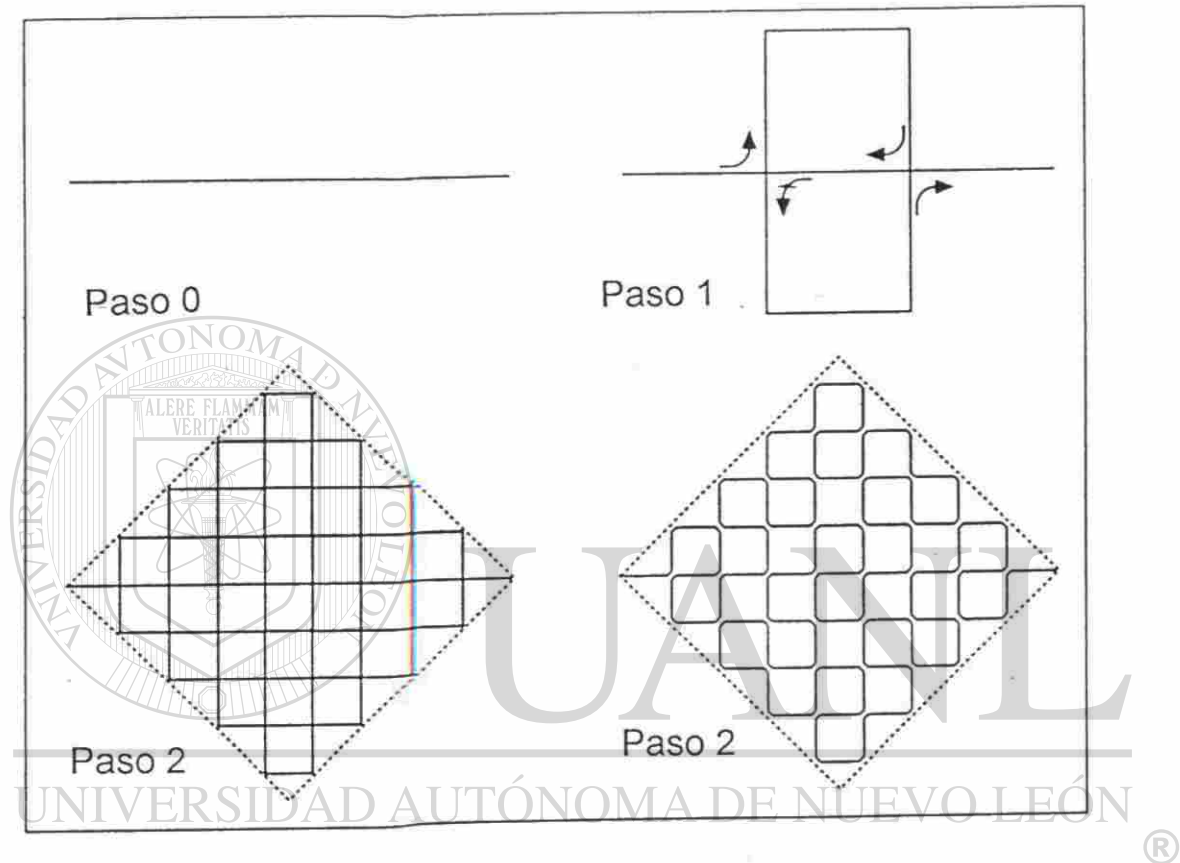


Figura 6. Construcción de la curva de Peano. En cada paso un segmento de línea es reemplazado por 9 segmentos bajo un factor de escala 3 [3].

## II.3.5 Curva de Hilbert

David Hilbert dio una explicación de la construcción de la curva de Peano basándose en un algoritmo parecido al de Peano. Con este nuevo algoritmo se construye lo que hoy se conoce como *curva de Hilbert*. En la figura 7 se presenta el algoritmo o regla que genera la curva de Hilbert.

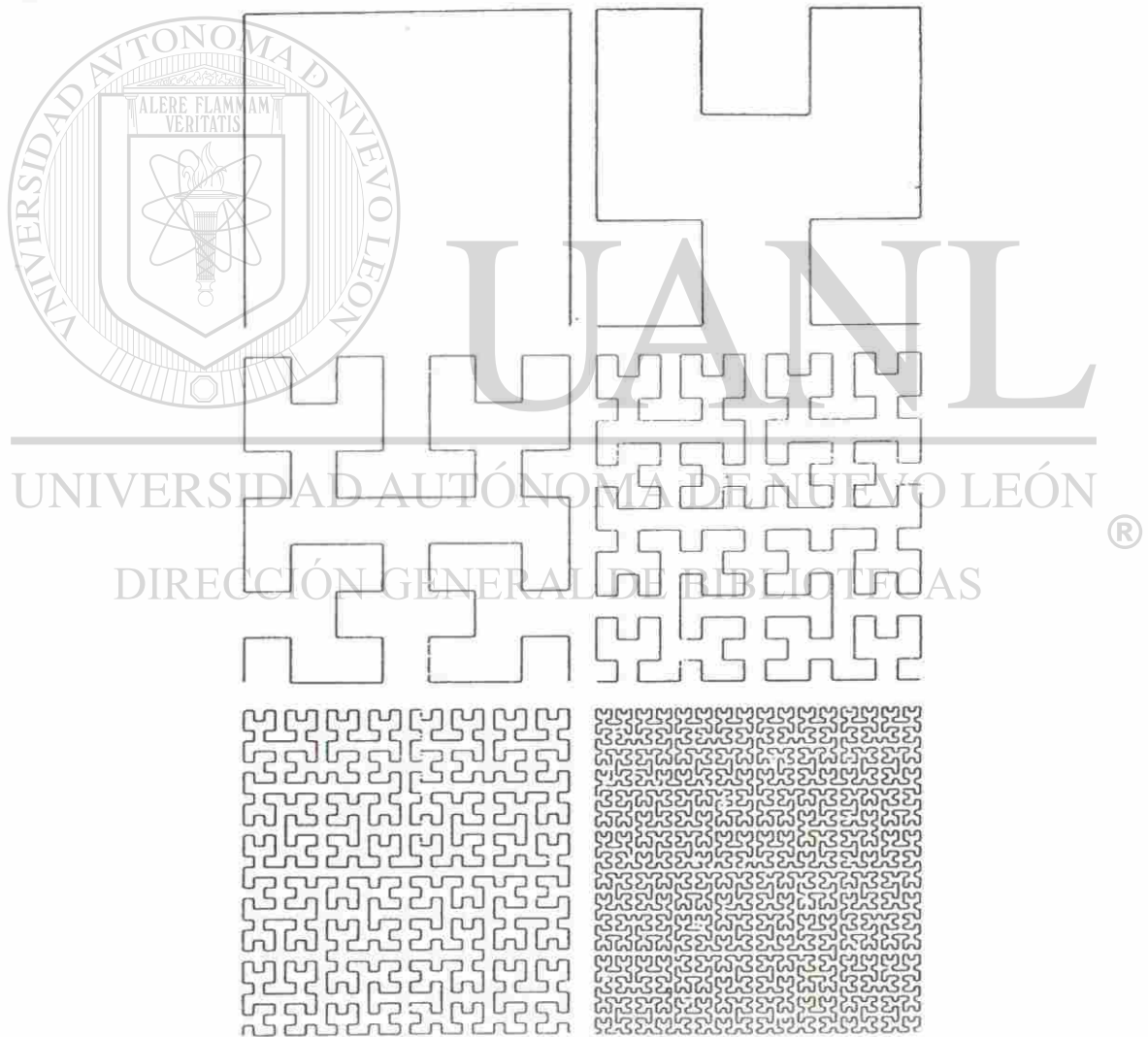


Figura 7. Construcción de la curva de Hilbert [7].

## II.4 Conjunto de Mandelbrot

Los algoritmos o reglas que se usaron para la construcción de las figuras geométricas anteriores son lineales. Para figuras geométricas más complejas el número de algoritmos no-lineales es infinitamente grande. Lo que se conoce hoy como dialecto cuadrático está estrechamente relacionado con la teoría de caos y sus elementos pueden obtenerse de una ecuación matemática sencilla.

Las raíces de la teoría matemática correspondiente se remontan a la obra del matemático francés Gaston Julia (1893-1978), quien la escribió en 1918, así como de su contemporáneo Pierre Fatou (1878-1929), dichas obras se hicieron populares tras la obra de Mandelbrot [1].

Julia y Fatou se plantearon el problema de determinar qué sucede con un punto  $z$  del plano complejo cuando se le aplica iterativamente la transformación

---

$$g(z) = z^2 + c$$

### DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

El número complejo  $c$  es aquí un parámetro de control que se puede ajustar arbitrariamente. En casos sencillos, al aplicar  $g(z)$  iterativamente sobre los puntos de un entorno del origen de coordenadas, éstos se concentran sobre un punto dado (punto fijo de aplicación  $g$ ), mientras que los puntos más alejados del origen se dispersan, dirigiéndose al infinito. Cada uno de estos dos puntos constituye una región; en medio queda una frontera infinitamente delgada, que hoy se conoce con el nombre de *Conjunto de Julia*. Al ir aplicando  $g$  iterativamente, los puntos de ambas regiones se van alejando del conjunto de Julia, hacia dentro o hacia afuera, respectivamente. Se puede intentar efectuar el

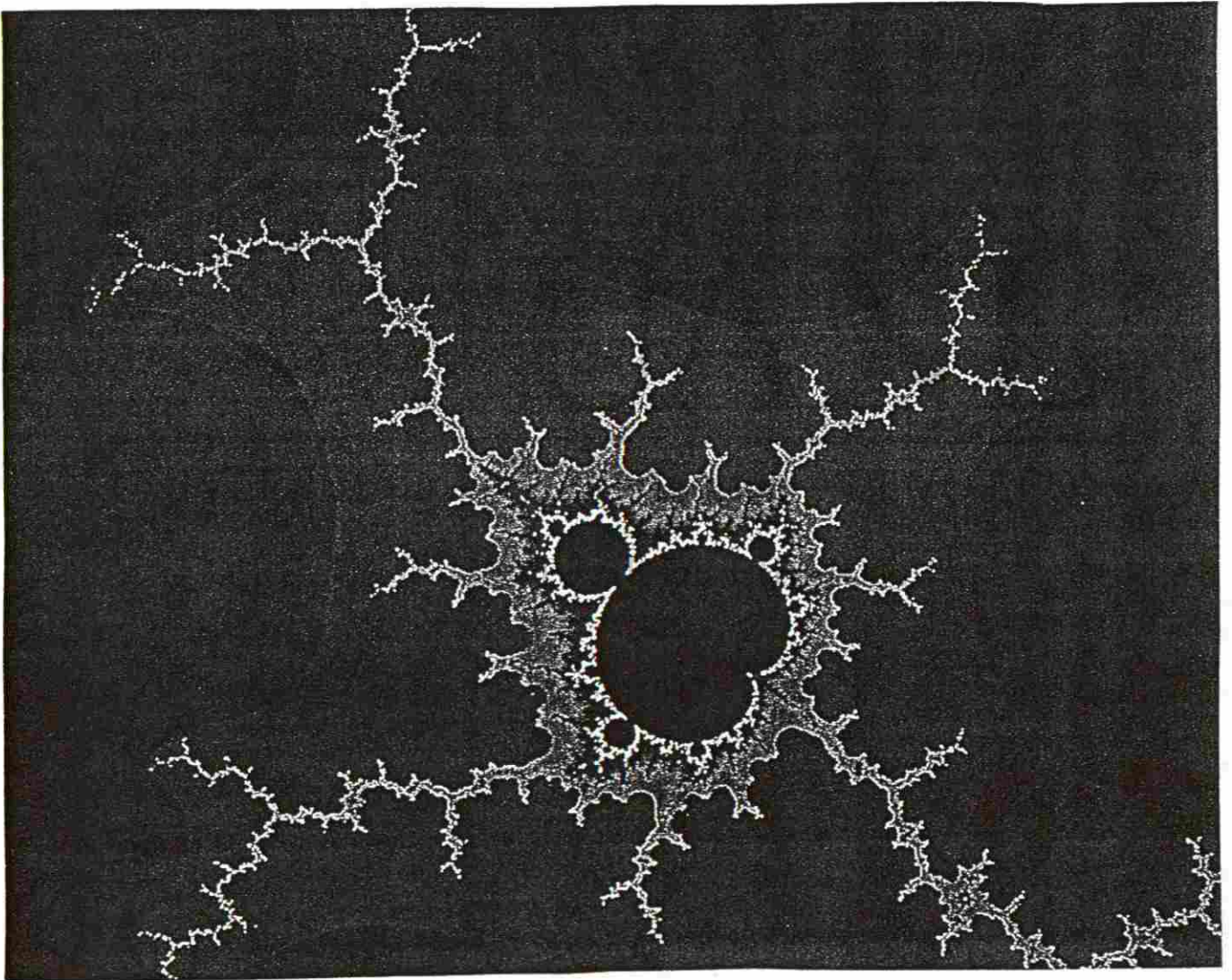
proceso inverso al de la huída de los puntos, con lo que nos acercáramos a él . Para ello aplicamos la transformación inversa de  $g$  (es decir  $g^{-1}$ ). Por efecto iterativo de esta transformación inversa cualquiera de los puntos arbitrariamente elegidos por dentro o por fuera de los conjunto de Julia irán cayendo hacia el mismo. Uno de las enigmas más difíciles y, al mismo tiempo, más fascinantes de la geometría fractal es que no se sabe si existe un principio de ordenación de la clase infinita de los conjuntos de Julia. La respuesta nos conduce a uno de los descubrimientos más bellos de la matemática experimental. La idea de la solución se basa en el hecho, ya conocido por Julia y Fatou, de que, para todo parámetro de control  $c$ , la figura resultante corresponde necesariamente a uno de los casos siguientes: (a) El conjunto de Julia es conexo, es decir, de una sola pieza; (b) el conjunto de Julia es completamente inconexo, como una nube de polvo formada por infinitos puntos (denominados conjunto de Cantor).

Con ello, podemos ya representar el conjunto de Mandelbrot. Se define como el conjunto de todos los puntos  $c$  del plano complejo que dan origen a un conjunto de Julia conexo. Es decir para obtener una gráfica por computadora del conjunto de Mandelbrot, lo que hay que hacer es marcar un punto negro en el plano complejo para cada valor de  $c$  que origine un conjunto de Julia conexo.

Cada una de las partes del conjunto de Mandelbrot caracteriza una familia de conjuntos de Julia afines. Aunque el conjunto de Mandelbrot no es exactamente autosimilar, como lo eran las anteriores figuras geométricas, comparte con ellas una propiedad: con una ampliación suficiente, es posible descubrir en su frontera infinidad de minúsculas copias del propio conjunto.



La propiedad sin duda más fascinante del conjunto de Mandelbrot es que puede considerársele como un almacén infinitamente eficaz de figuras, ello se debe a que el conjunto de Mandelbrot no sólo clasifica a los conjuntos de Julia en conexos y no conexos, sino que es un índice gráfico directo de una infinidad de conjuntos de Julia distintos. En figura 8 se presenta el conjunto de Mandelbrot y algunos detalles del mismo.



*Figura 8. Conjunto de Mandelbrot [7].*

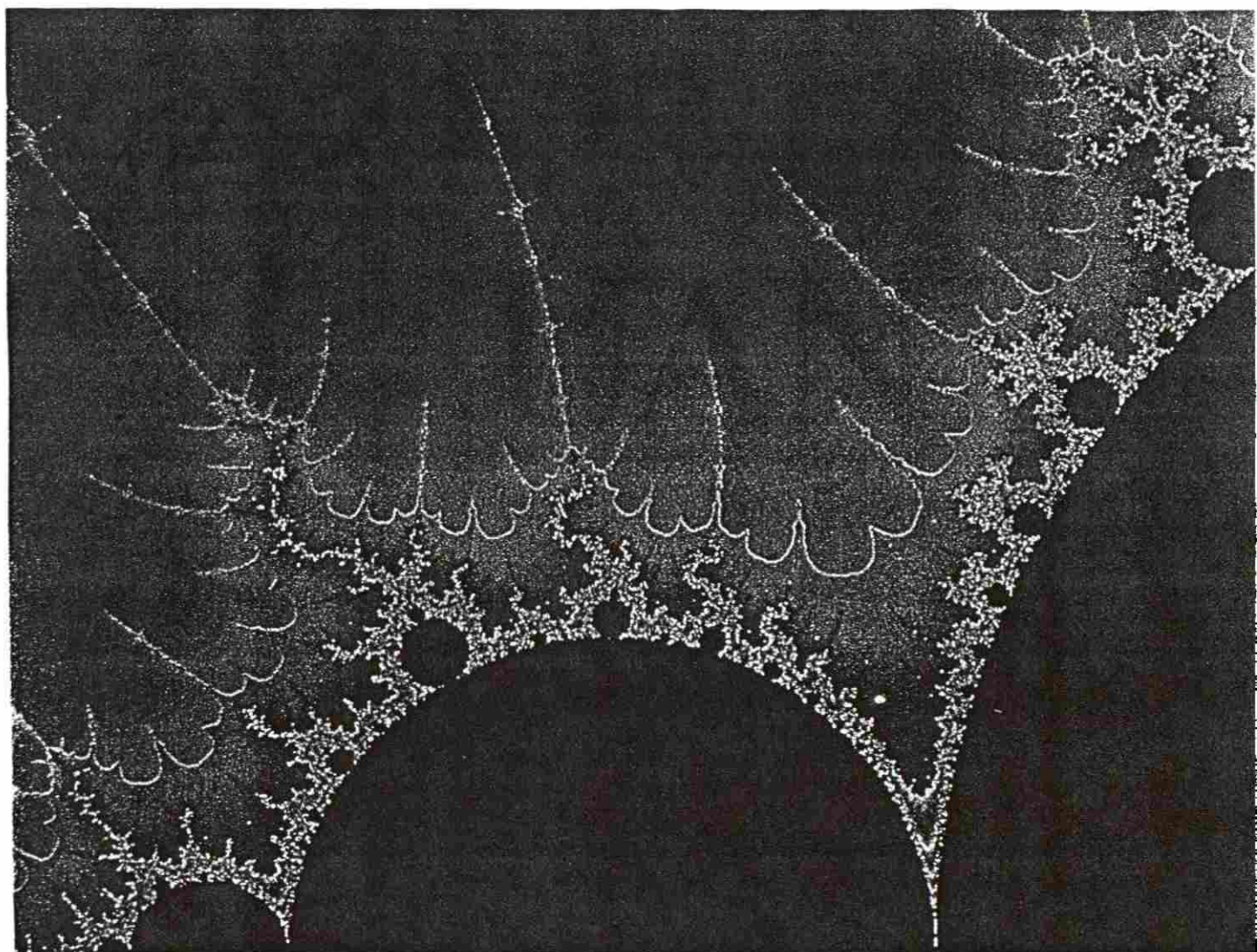
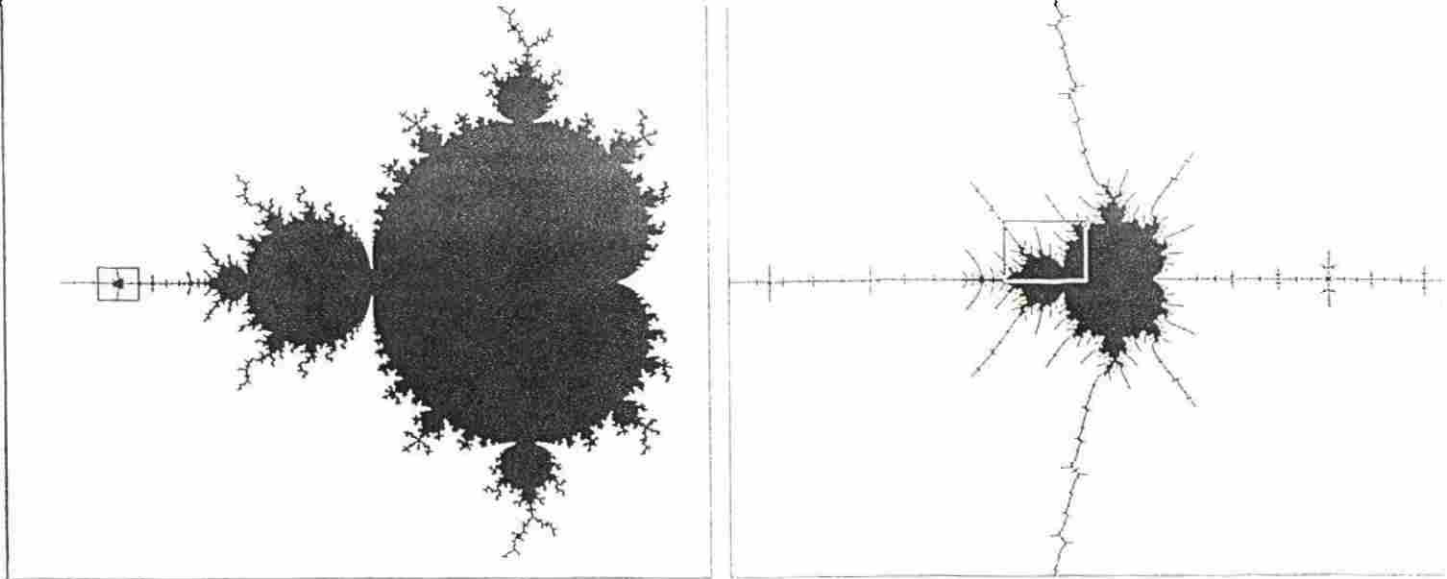


Figura 8. (Continuación). Observese los detalles de los recuadros del conjunto de Mandelbrot [7].

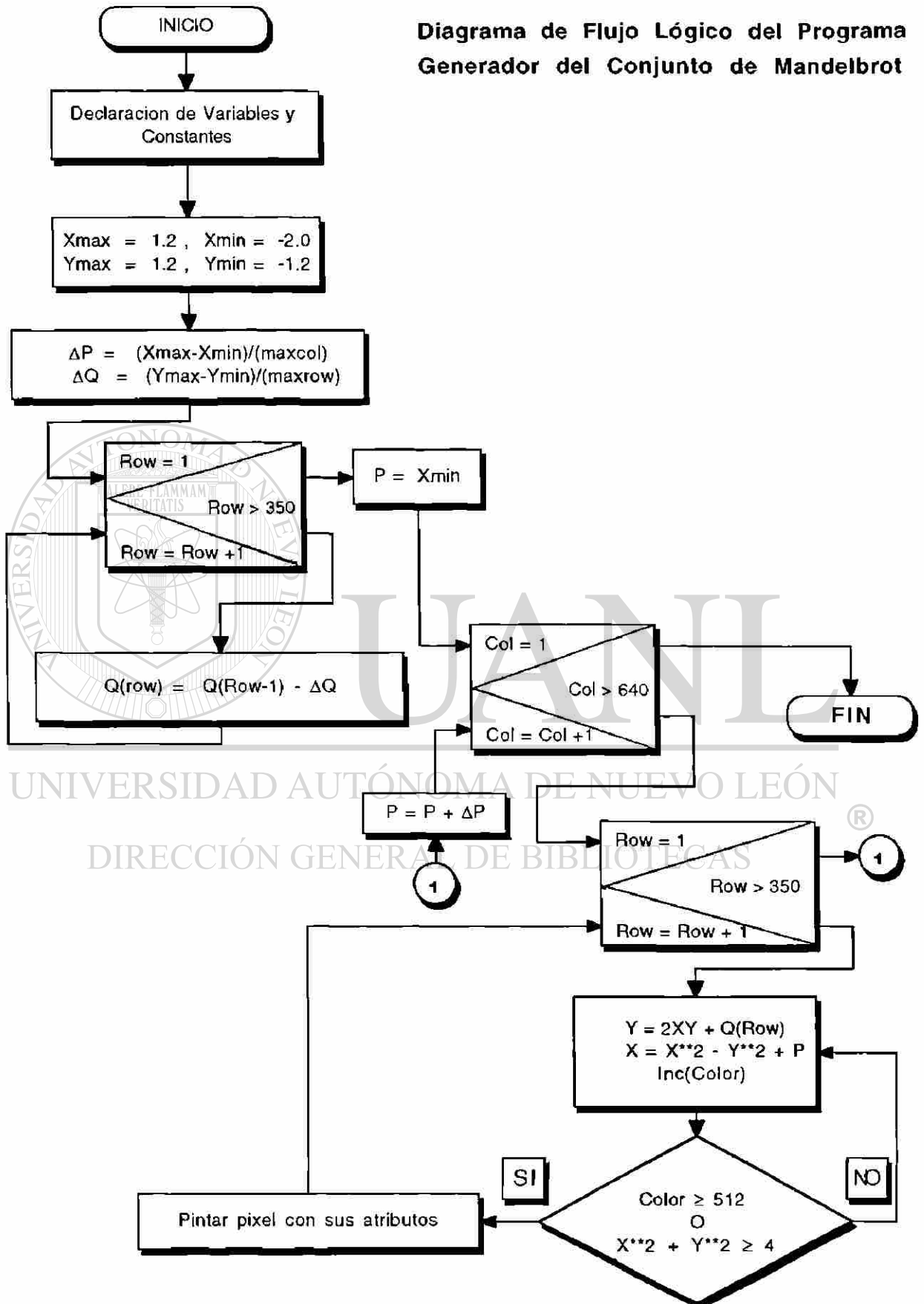
La imagen del conjunto de Mandelbrot, viene dada por la función:  $Z_{n+1} = Z_n^2 + C$  donde cada valor de  $Z$  es calculado a partir del anterior, debido a que  $Z$  y  $C$  son números complejos, y que el número de iteraciones necesarias para que la imagen que representa a el conjunto de Mandelbrot es mayor a 512, el proceso es lento, por lo tanto se empleó una computadora para observar la imagen.

Se desglosa la ecuación anterior y se sustituye con  $X$  y  $Y$  la parte real e imaginaria respectivamente, desarrollando los cuadrados y reagrupando se tiene que  $X_n = X_{n-1}^2 - Y_{n-1}^2 + p$  representa la parte real y,  $Y_n = 2 X_{n-1} Y_{n-1} + q$ , representa la parte imaginaria donde  $p$  y  $q$  son constantes. Así, con estas dos ecuaciones, se facilita los calculos iterativos para mostrar el comportamiento de la función original.

El algoritmo que genera la imagen del conjunto de Mandelbrot contiene tres ciclos **FOR** y un ciclo **REPEAT-UNTIL**. El primer ciclo **FOR** calcula incrementos para cada valor imaginario dado por  $Y$  y son almacenados en memoria, el segundo y tercer ciclo **FOR** hacen que a cada pixel le sean asignadas las coordenadas correspondientes para poder pintarlo en pantalla. El ciclo **REPEAT-UNTIL** ejecuta las iteraciones sucesivas de las ecuaciones hasta que la magnitud de los cuadrados de la función es mayor que 4 (condición inicial) o hasta que el número de iteraciones rebase 512 (condición inicial), lo que ocurra primero. La palabra **row** representa los renglones en el monitor y toma el valor entre 0 y 350 y la palabra **col** representa las columnas en el monitor y varía entre 0 y 640.

Los colores en la imagen de la función indican la velocidad con la cual la función se está aproximado al infinito, basado sobre el número de iteraciones que son requeridas para que la magnitud no sea mayor que 4. A continuación se presenta el diagrama de flujo y el programa en turbo pascal que genera la imagen del conjunto de Mandelbrot.

## Diagrama de Flujo Lógico del Programa Generador del Conjunto de Mandelbrot



## Programa Generador del Conjunto de Mandelbrot

```

Program Mandel;                                     {En lenguaje turbo pascal}
Uses CRT,Graph;
Const                                               {Declaración de constantes}
    maxcol = 640;
    maxrow = 350;
    max_colors = 16;
    max_iterations = 512;
    max_size = 4 ;
Var                                                 {Declaración de variables}
    Q: array [0..349] of Real ;
    Xmax,Ymax,Xmin,Ymin: Real ;
    P,deltaP,deltaQ, X,Y,Xsquare,Ysquare:Real ;
    i,color,row,col,GraphDriver,GraphMode: Integer;
    ch: Char;
Begin
    Xmax:=1.2;
    Xmin:=-2.0;
    Ymax:=1.2;
    YMin:=-1.2;
    GraphDriver := 4;
    GraphMode :=EGAHi;
    InitGraph(Graphdriver,GraphMode,"");
    deltaP :=(Xmax-Xmin)/(maxcol);
    deltaQ :=(Ymax-Ymin)/(maxrow);
    Q[0] := Ymax ;
    FOR row :=1 to maxrow do                         {Inicia ciclo para calcular los incrementos y guardarlos}
        Q[row] :=Q[row-1]-deltaQ;
        P:=Xmin;
        FOR col :=0 to maxcol do                     {Control de lectura de columnas}
            Begin
                IF Keypressed Then
                    exit;
                FOR row := 0 to maxrow do           {Control de lectura de renglones}
                    Begin
                        X :=0.0;
                        Y :=0.0;
                        Xsquare :=0.0 ;
                        Ysquare :=0.0 ;
                        color :=1;
                        Repeat                       {Control de iteraciones, hasta cumplir las condiciones}
                            Xsquare :=X*X;
                            Ysquare :=Y*Y;
                            Y := 2*X*Y + Q[row];
                            X := Xsquare - Ysquare + P;
                            Inc (color);
                        Until (color >=Max_iterations ) or (Xsquare +Ysquare >= Max_size);
                        Putpixel(col,row,(color mod max_colors)); {Especifica atributos del pixel para pintarlo}
                    End;
                    P := P + deltaP;
                End;
            End;
        Ch := Readkey;
    End.

```

## II.5 Fractal Matemático y Fractal Natural

Como consecuencia del estudio del concepto de dimensión algunos matemáticos crearon conjuntos de puntos y curvas que ponían en tela de juicio la noción inductiva de lo que era la dimensión de figuras geométricas. Figuras geométricas como: el conjunto de Cantor, el triángulo de Sierpinski, la curva de von Koch, la curva de Peano, la curva de Hilbert y la gran variedad que de ellas emanan, eran difíciles de caracterizar por medio de algún parámetro invariante.

Un fractal ideal es una figura geométrica que los matemáticos crean por medio de un algoritmo iterativo o regla repetitiva que tiene una forma, bien sea sumamente irregular, bien sumamente interrumpida o fragmentada, y sigue siendo así a cualquier escala que se produzca el examen. Los fractales matemáticos cumplen con la propiedad de autosimilitud.

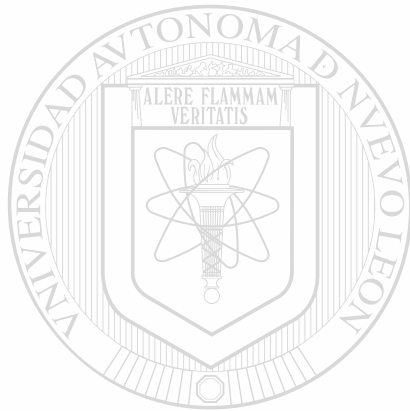
---

Desde hace aproximadamente cien años, los matemáticos se habían ocupado de algunos de esos conjuntos, pero no habían edificado ninguna teoría acerca de ellos, y no habían necesitado de un término específico para designarlos. Una vez que Mandelbrot demuestra que en la naturaleza abundan objetos cuyas mejores representaciones son conjuntos fractales, es necesario disponer de una palabra apropiada que no sea compartida con ningún otro significado.

En la naturaleza abundan objetos fractales. Se pueden distinguir dos tipos de objetos fractales naturales: por una parte aquellos que cumplen con la propiedad de autosimilitud estadística (por ejemplo líneas costeras), y aquellos

otros que cumplen con la propiedad de auto-afinidad (por ejemplo movimiento browniano).

Tanto los objetos fractales matemáticos como los naturales quedan caracterizados por su dimensión fractal, la cual es un *parámetro invariante a cualquier cambio de escala* de observación. En las figuras de la 9 a la 14 se presentan algunos fractales matemáticos y naturales.



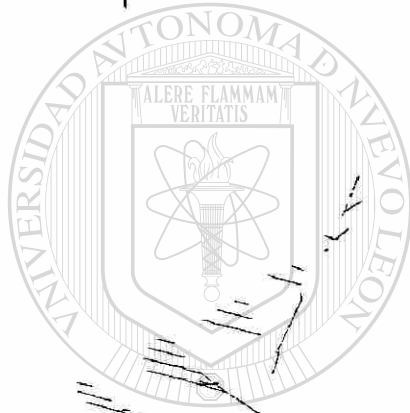
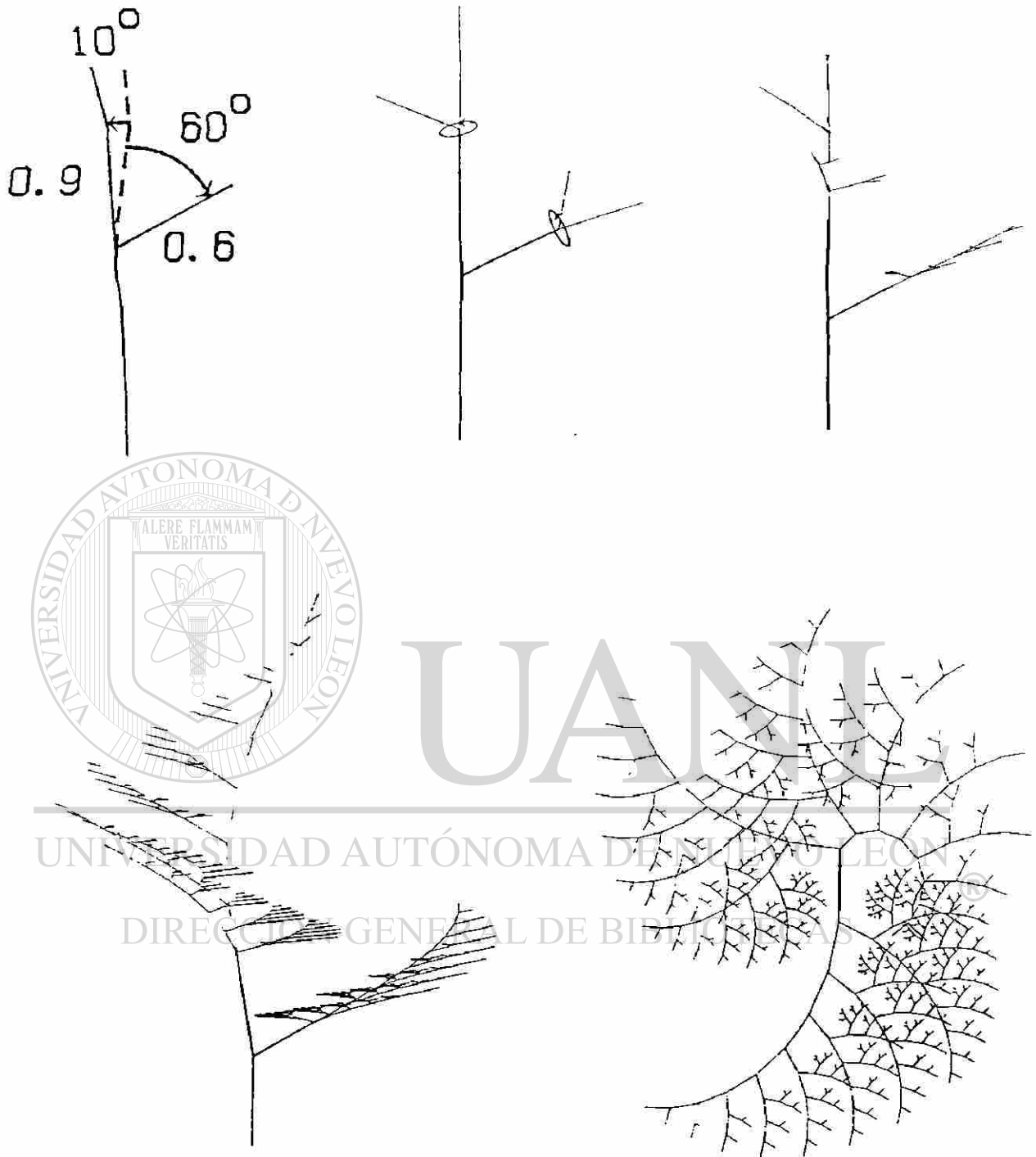
# UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS





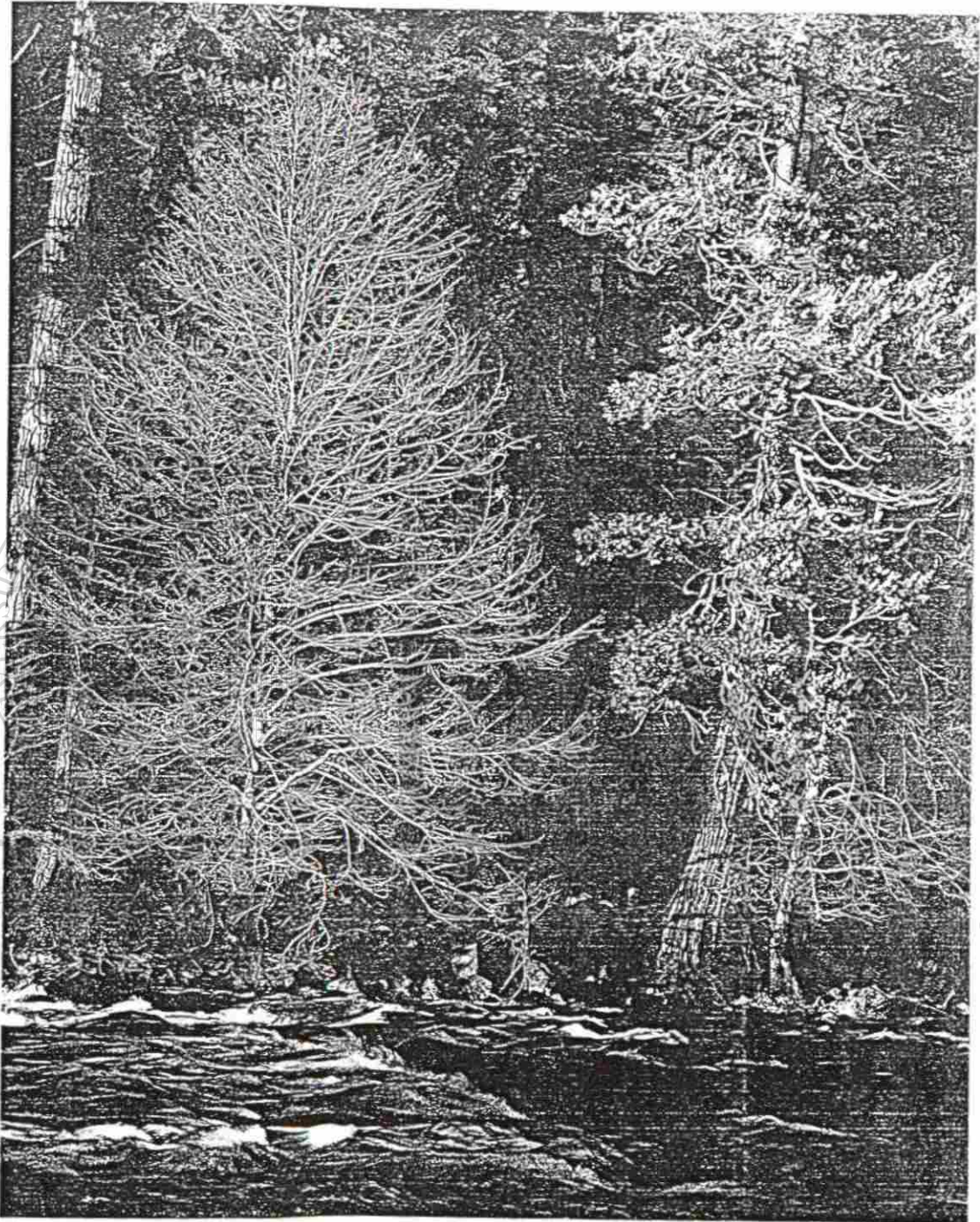
UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

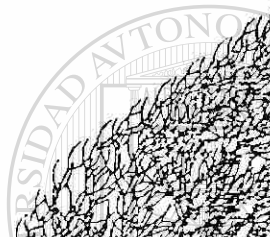
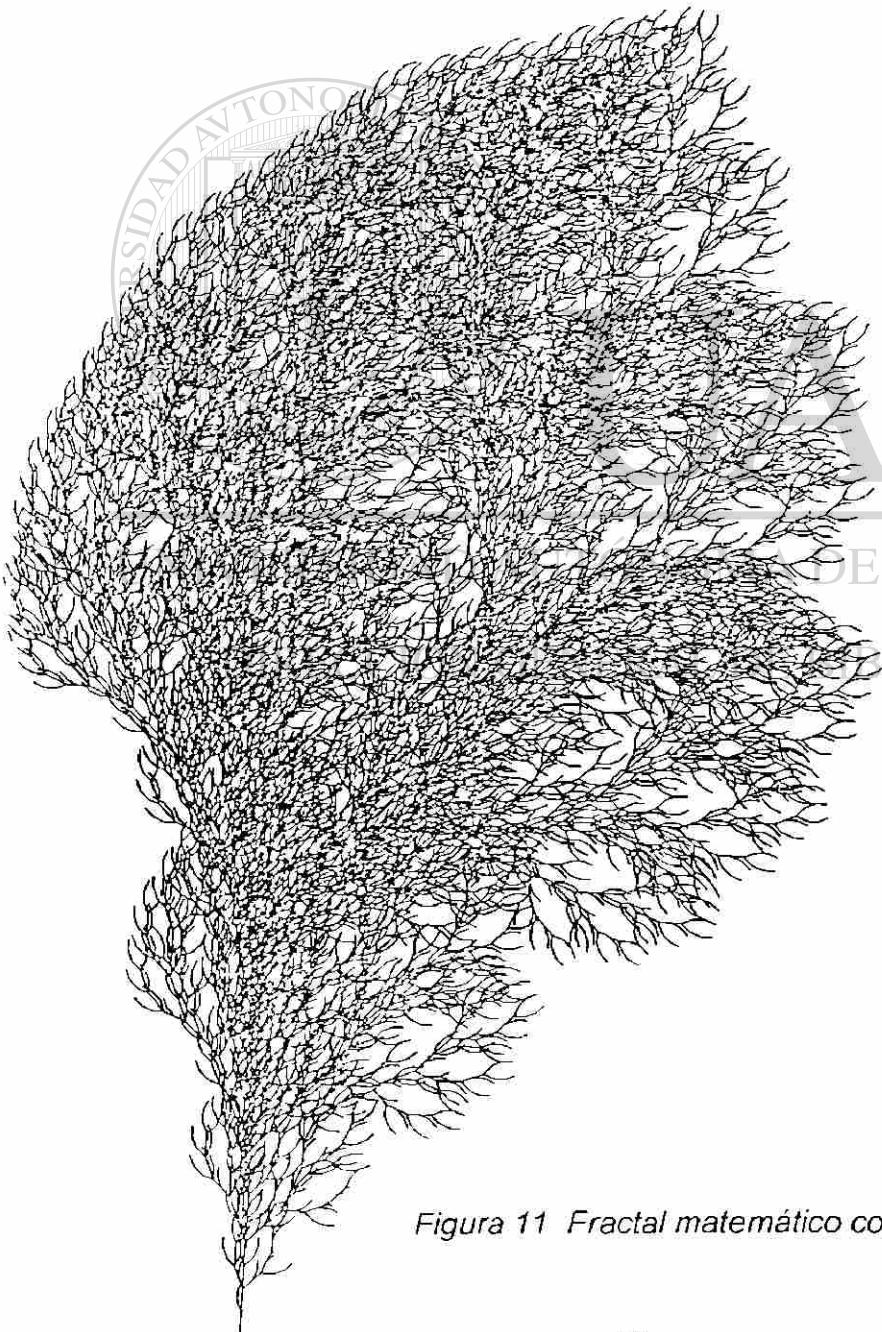
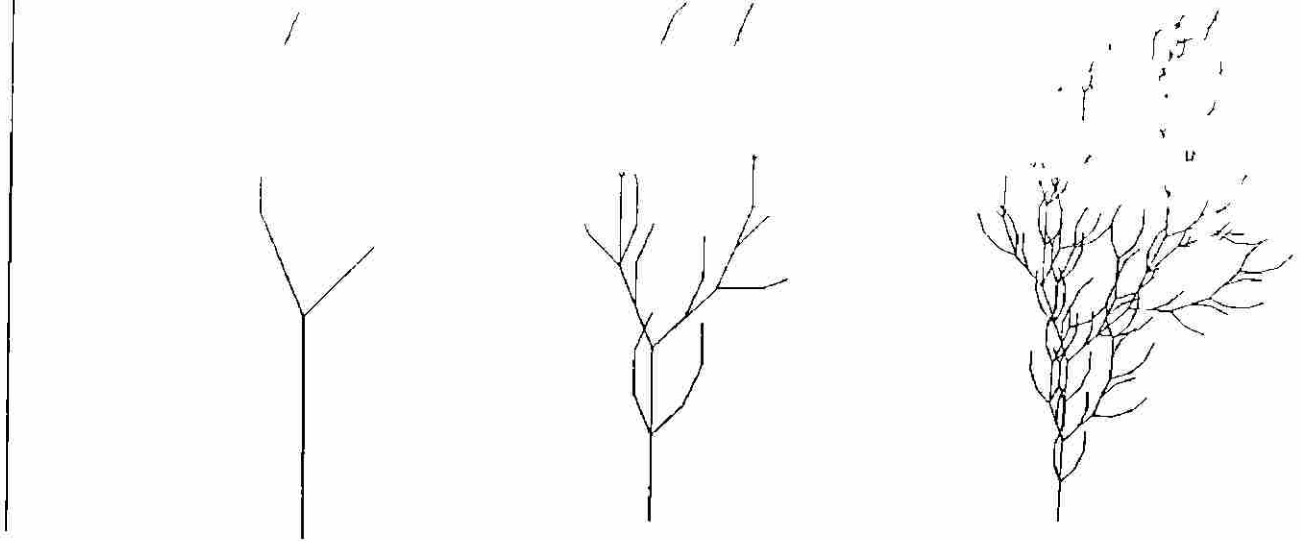
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Figura 9. Aquí se muestra un fractal matemático, el algoritmo se aplica iterativamente hasta obtener una figura límite [15].





*Figura 10. Arboles en el río Merced, Yosemite, California [15].*



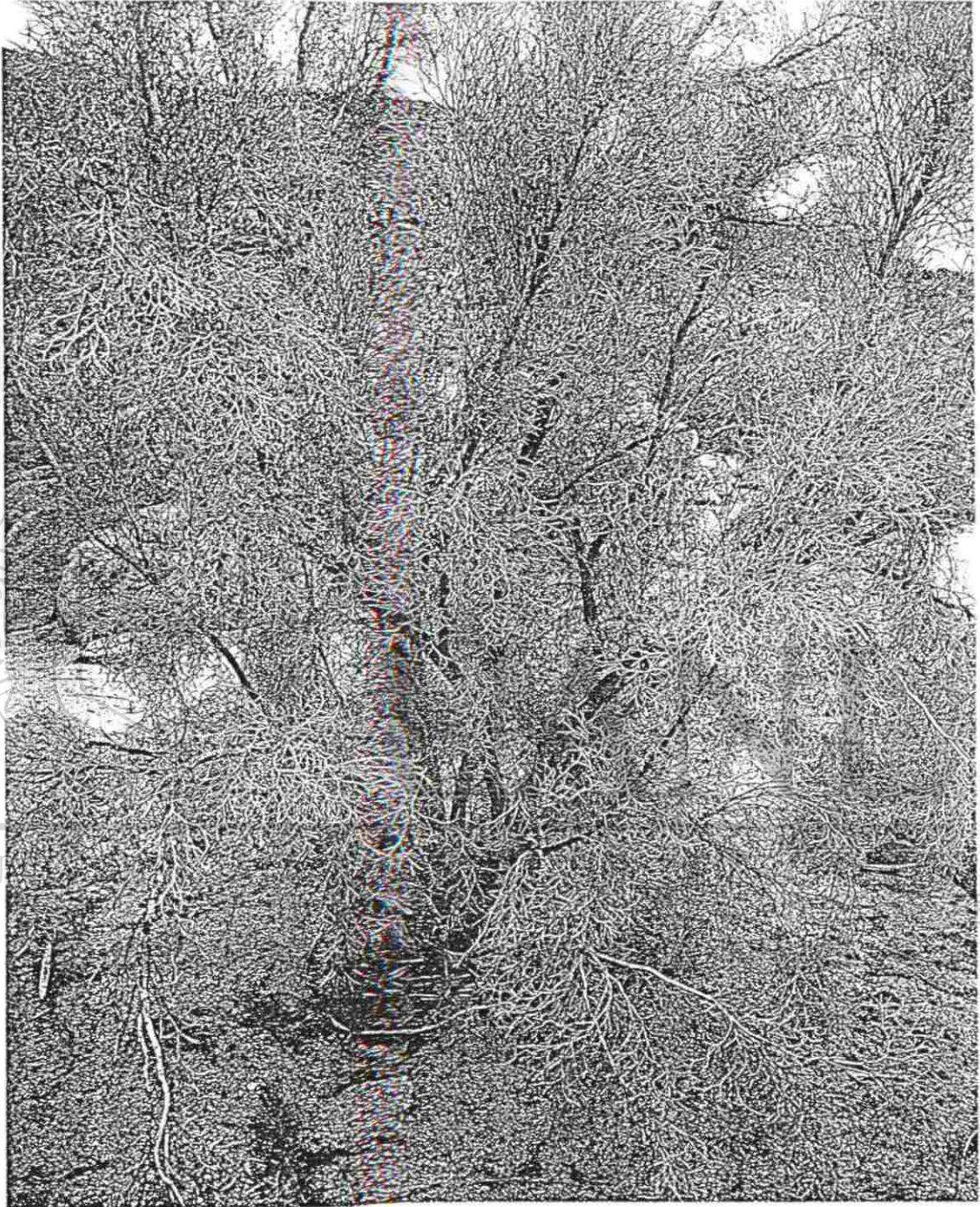
ANL

DE NUEVO LEÓN

LIOTECAS



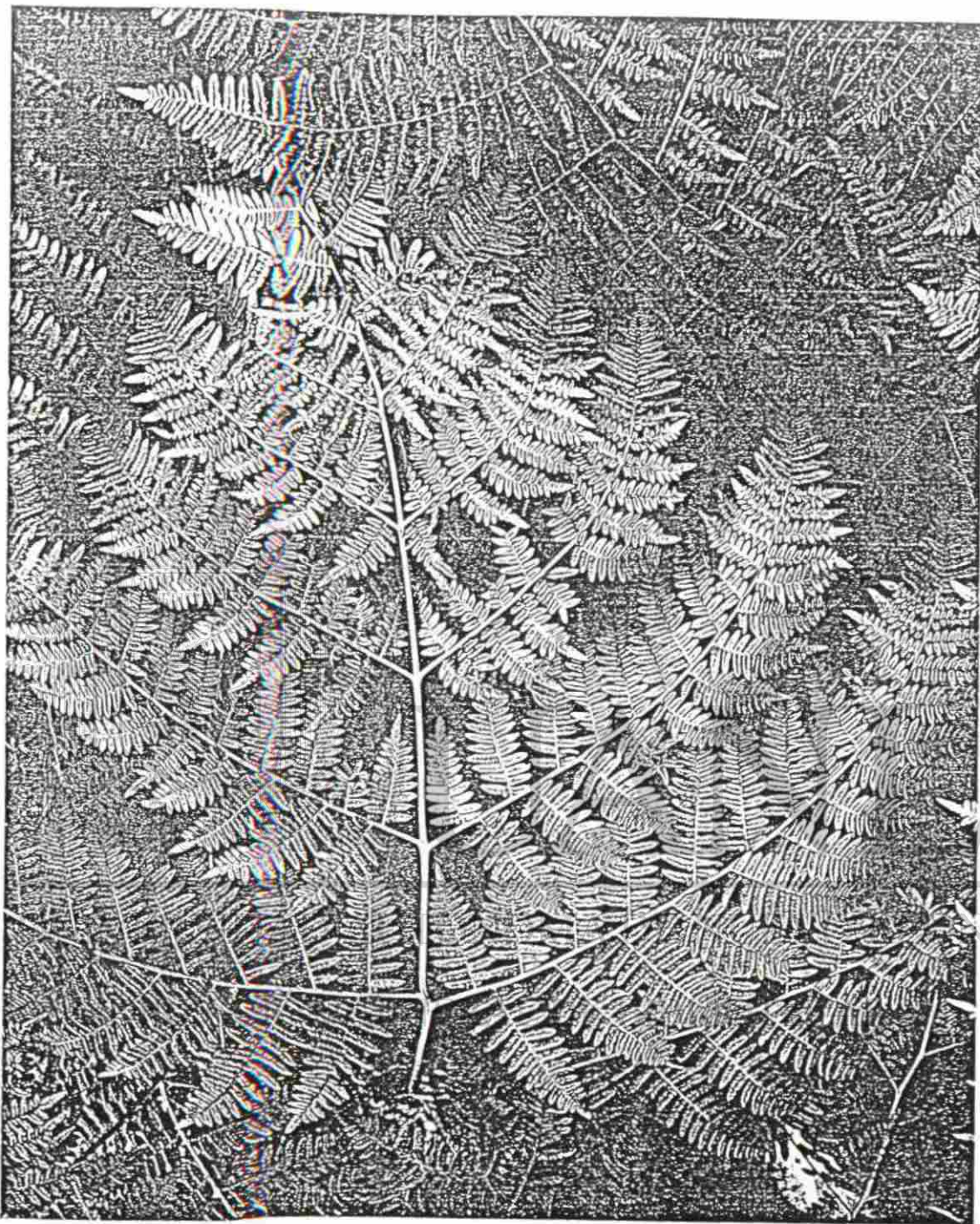
Figura 11 Fractal matemático con su figura límite correspondiente [15]



*Figura 12. Arbusto en el desierto de Anza Borrego, California [15].*



*Figura 13. Los algoritmos matemáticos pueden aplicarse a cualquier figura geométrica y el resultado es el mismo [15]*



*Figura 14 Helecho, en la Sierra Nevada, California [15].*

## CAPÍTULO III

### FUNDAMENTOS TEÓRICOS DE LA TEORÍA DE FRACTALES

#### III.1 Definición Formal de Autosimilitud, Autosimilitud Estadística y Auto-afinidad

En esta sección hablaremos de las propiedades de invarianza (simetría) que tienen los objetos fractales. Sabemos que para un objeto euclidiano las propiedades de simetría pueden ser de traslación, rotación, escalamiento, reflexión, etc. Los fractales también presentan estas propiedades, las cuales nos ayudarán a clasificarlos.

Analicemos la curva de von Koch, figura 4. Esta curva es un conjunto limitado dado que su generación se define en un intervalo finito y es continua. Notamos que si reescalamos la etapa  $n$  por una razón  $r = 1/3$  podemos cubrir la etapa  $(n + 1)$ , al hacer uso de traslaciones así como de rotaciones. A esto se le denomina *autosimilitud*, lo que nos dice es que cierta parte del conjunto en la etapa  $(n + 1)$  tiene exactamente la misma forma como la etapa  $n$ , siendo la única diferencia la escala. Por lo que se sigue que la curva de von Koch es autosimilar.

Representemos con  $r$  la razón de escalamiento mencionada anteriormente, por  $S$  al conjunto fractal, y por  $r(S)$  al conjunto resultante al aplicar la operación  $r$  sobre el conjunto  $S$ . Una manera formal de definir la propiedad de autosimilitud es la siguiente:

*Un conjunto limitado o no limitado  $S$  en el espacio es autosimilar con respecto a la razón  $r$  (razón de escalamiento) y a un entero  $N$ , cuando  $S$  es la unión de  $N$  subconjuntos que no se traslapan, cada uno de los cuales es congruente al conjunto  $r(S)$  escalado. Congruente significa idéntico en forma y no excluye desplazamientos y/o rotaciones.*

Este tipo de propiedad puede ser observada en la curva de von Koch.

A continuación se dan un par de definiciones para otro tipo de conjuntos autosimilares.

*Un conjunto limitado  $S$  es autosimilar, con respecto a un arreglo de razones  $r_{(1)}, \dots, r_{(m)}$ , cuando  $S$  es la unión de  $n$  subconjuntos  $S_n$  que no se traslapan, respectivamente congruentes al conjunto  $r_{(m)} S$ .*

*Un conjunto limitado  $S$  es estadísticamente autosimilar, con respecto a la razón  $r$ , y un entero  $N$  cuando  $S$  es la unión de  $N$  subconjuntos  $S_n$  que no se traslapan, cada uno de los cuales es de la forma  $r(S_n)$ , donde los  $N$  subconjuntos  $S_n$  son congruentes en distribución a  $S$ .*

---

Este tipo de conjuntos aparecen, por ejemplo en una línea costera. ®

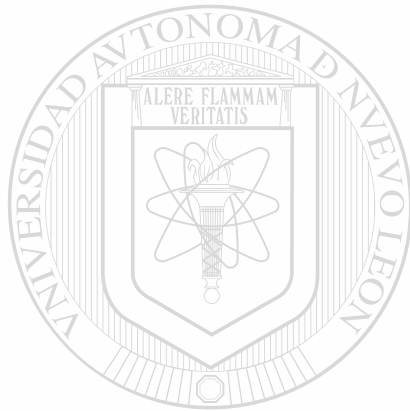
Existen conjuntos fractales que no son autosimilares. Por ejemplo, si queremos estudiar el movimiento browniano (fractal natural) de una partícula, siendo la posición y el tiempo cantidades físicas diferentes, no es posible escalar las dos cantidades con la misma razón de escalamiento; entonces no se puede aplicar el concepto de autosimilitud.

Para poder estudiar dicho tipo de conjuntos necesitamos introducir el concepto de *auto-afinidad*.

Una transformación afín transforma un punto  $X = (x_1, \dots, x_E)$  a  $X' = (r_1 x'_1, \dots, r_E x'_E)$  donde las razones de escalamiento  $r_1, \dots, r_E$  no son todas iguales. Así la auto-afinidad se define como:

*Un conjunto limitado o no limitado  $S$  es auto-afín con respecto a la razón vectorial  $r = (r_1, \dots, r_E)$ , si  $S$  es la unión de  $N$  subconjuntos que no se traslapan  $S_1, \dots, S_E$ , cada uno de los cuales es congruente al conjunto  $r(S)$ .*

Este tipo de conjuntos se presentan en el movimiento browniano.



# UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



## III.2 Dimensión Topológica

El concepto de dimensión no presenta grandes dificultades mientras se trata de figuras sencillas, tales como puntos, rectas, triángulos y poliedros. Un punto único o un conjunto *finito* de puntos tiene dimensión cero; un segmento rectilíneo es unidimensional y la superficie de un triángulo o la de una esfera son bidimensionales. El conjunto de los puntos de un cubo sólido es tridimensional. Pero cuando se trata de extender este concepto a conjuntos más generales de puntos, surge la necesidad de dar una definición precisa.

En 1912, H. Poincaré llamó la atención acerca de la necesidad de analizar más profundamente y de dar una definición precisa del concepto de dimensión. Poincaré observó que la recta es unidimensional, debido a que podemos separar dos puntos cualesquiera de ella, cortándola en un solo punto (conjunto de dimensión cero), mientras que el plano es bidimensional, porque para separar dos cualquiera de sus puntos debemos cortarlo a lo largo de una curva cerrada (conjunto de dimensión 1). Esto nos sugiere la naturaleza inductiva de la dimensión topológica: un espacio es  $n$ -dimensional, si se pueden separar dos puntos cualesquiera de él suprimiendo un subconjunto de  $(n-1)$  dimensiones, mientras no siempre es posible obtener el mismo resultado suprimiendo un conjunto de menos dimensiones. En los *Elementos* de Euclides aparece una definición inductiva del concepto de dimensión, donde se dice que una figura unidimensional es aquella cuya frontera está formada por puntos; bidimensional si su frontera esta formada por curvas, y tridimensional, aquella figura cuya frontera se compone de superficies [16].

La invención de curvas cerradas que tienen longitud infinita así como curvas que llenan el espacio fue el mejor evento en el desarrollo del concepto de dimensión. Dichas curvas cuestionaban la percepción intuitiva de curvas como

objetos unidimensionales, pero que llenaban el plano. Esta contradicción fue parte de una polémica que llegó a durar varias décadas en el presente siglo. Cuando hablamos de fractales pensamos si existe alguna característica que sea invariante para dichos objetos ya sean matemáticos o naturales y la respuesta es el concepto de *dimensión fractal*. La dimensión fractal está basada en la definición de *dimensión de Hausdorff*. El concepto original radica en el estudio de la topología, rama de las matemáticas que esencialmente ha sido desarrollada en este siglo. En topología se estudia la forma y tamaño de conjuntos de puntos desde un punto de vista cualitativo. Existen dos nociones básicas en topología: *dimensión y homomorfismo*.

En topología una línea recta puede ser deformada y convertirse en una curva cerrada. Una línea recta, un triángulo, un círculo y la frontera de la curva de von Koch, topológicamente son equivalentes.

El número de huecos en un objeto es también topológicamente invariante, esto significa que una esfera puede transformarse en la superficie de una herradura, pero nunca en un toroide. A este tipo de transformaciones las llamamos homomorfismos y cuando se aplican no deben de cambiar las propiedades invariantes de los objetos. Así, una esfera y la superficie de un cubo son homomórficos, pero la esfera y el toroide no lo son.

Una línea recta tiene dimensión uno. Así, desde el punto de vista topológico debemos esperar que la curva de von Koch tenga dimensión uno.

La historia de las distintas nociones del concepto de dimensión, involucra grandes matemáticos de aquel tiempo como H. Poincaré, H. Lebesgue, L. E.J. Brouwer, G. Cantor, K. Menger, W. Hurewicz, P. Alexandroff, L. Pontrjagin, G. Peano, P. Urysohn, E. Čech y D. Hilbert [3].

La dimensión (en el sentido topológico) de un objeto ante una transformación se debía de conservar. Pero más tarde G. Cantor, G. Peano y D. Hilbert crearon conjuntos de puntos y curvas que no cumplían con lo anterior. Dichos objetos matemáticos no se pueden caracterizar por parámetros invariantes.

El problema con estos objetos matemáticos era que la noción de invarianza topológica estaba equivocada. Entre 1890 y 1910 aparecieron pruebas mostrando cómo un espacio de dimensión  $n$  y un espacio de dimensión  $m$  no son homomórficos cuando  $n \neq m$ . [16].

Existen diferentes nociones del concepto de dimensión, todas ellas son de naturaleza topológica. La más importante es la *dimensión de Hausdorff* y de aquí Mandelbrot se basa para su concepto de dimensión fractal. La dimensión de Hausdorff para una línea recta es uno y para la curva de von Koch es de  $\log 4 / \log 3$ . En otras palabras, la dimensión de Hausdorff sí logra cuantificar el cambio de una línea recta de dimensión uno a la curva de von Koch. Sin embargo  $\log 4 / \log 3 = 1.2619\dots$  no es un número entero, la dimensión fraccionaria es típica de los objetos fractales.

### III.3 Movimiento Browniano

A principios del siglo XIX, el botánico escocés Robert Brown (1773-1858) descubrió una gota de agua dentro de un trozo de cuarzo. El agua, pensó Brown, debía de haber permanecido inaccesible durante siglos al polen y las esporas transportadas por el viento o la lluvia. Al enfocar dicha gota en un microscopio, observó trazas de partículas suspendidas en la misma que oscilaban sin cesar con un movimiento completamente irregular. Este movimiento le resultaba familiar a Brown: había observado antes semejante tipo de oscilaciones en sus estudios de granos de polen en agua. Brown concluyó con razón que la agitación de las partículas atrapadas en el interior del cuarzo debía de ser un fenómeno físico y no biológico, pero no pudo llegar a mayores precisiones.

La explicación del movimiento browniano se encuentra hoy bien asentada. Un grano de polen o de polvo suspendido en un fluido se ve sometido al bombardeo continuo de las moléculas de éste. Una sola molécula difícilmente podría tener suficiente ímpetu para que su efecto sobre la partícula en suspensión lo recogiera el microscopio. Pero cuando muchas moléculas chocan con la partícula en la misma dirección, simultáneamente, producen una reflexión observable de su trayectoria. El movimiento browniano es un efecto doblemente aleatorio: la trayectoria de partícula en suspensión deviene imprevisiblemente en razón de las fluctuaciones arbitrarias de la velocidad de las moléculas circundantes. Por otro lado, como el microscopio es esencialmente un filtro que sólo pone de manifiesto los efectos de fluctuaciones de cierta magnitud en el entorno molecular local, el movimiento observado sólo insinúa la complejidad de la trayectoria real. Si el poder de resolución del microscopio se incrementa en un factor de 10, 100 o 1000, se detectarán los efectos del bombardeo por grupos

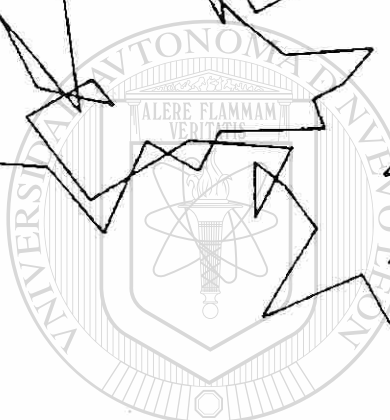
progresivamente menores de moléculas. A un mayor aumento, partes de la trayectoria de la partícula que inicialmente habían aparecido como rectas se observarán ahora dotadas de una estructura quebrada e irregular. La trayectoria de una partícula en el movimiento browniano fue uno de los primeros fenómenos naturales en los que se reconoció una autosimilitud a cada grado de aumento, una propiedad clave de los objetos geométricos que Benoit B. Mandelbrot ha denominado fractales [1].

Desde el principio de siglo, el estudio del movimiento browniano ha ejercido una poderosa influencia en física, química y matemática. En manos de Albert Einstein se convirtió en un método de observación concluyente para la confirmación de la teoría atómica de la materia. A. Einstein demostró, además, que la medición de ciertas propiedades del movimiento browniano de las partículas determinaban diversas constantes físicas de importancia: las masas de los átomos, de las moléculas y el valor del número de Avogadro (unidad química estándar de cualquier sustancia). El movimiento browniano también ha contribuido a una comprensión teórica más honda de los principios de la termodinámica, formulados con anterioridad sobre lo que resultaron ser generalizaciones empíricas [29].

En fechas recientes, el estudio del movimiento browniano ha conducido a la invención de importantes técnicas matemáticas para la investigación general de procesos probabilísticos. Dichas técnicas se han aplicado al control del "ruido" electromagnético y han contribuido a la comprensión de la dinámica de agregación estelar, la evolución de ecosistemas y el comportamiento de los precios del mercado [17, 18].

En la figura 15 se reproduce la trayectoria de una partícula con movimiento browniano. En la ilustración superior se muestra tal como fue representada en 1912 por Jean Baptiste Perrin [29]. El diagrama de Perrin registra la posición de la partícula cada 30 segundos; tales diagramas, como él hizo observar, “sólo dan una idea muy pobre de la extraordinaria complejidad de la trayectoria real”. Si se considera con más detalle parte de la trayectoria y si la posición de la partícula se registra con una frecuencia 100 veces mayor se producirá la complejidad de la trayectoria inicial. El diagrama inferior se basa en una simulación numérica hecha por B. H. Lavenda [29]. Se trata aquí de un proceso físico y no sólo de un modelo matemático: cada segmento une artificialmente las posiciones sucesivas, en el plano focal de un microscopio, de una partícula sometida a choques moleculares. Si se mira la trayectoria con más detalle, en instantes doblemente próximos, cada salto será reemplazado por dos saltos de longitud total superior. En el modelo matemático, dicho alargamiento continúa indefinidamente y, en consecuencia, la longitud total de la trayectoria es infinita. Por otra parte su superficie es nula. No obstante su dimensión es  $D=2$  y (en cierto sentido) recubre el plano de manera uniforme. Así, el “caos” representado por el movimiento browniano es homogéneo [1].

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



U A N L

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

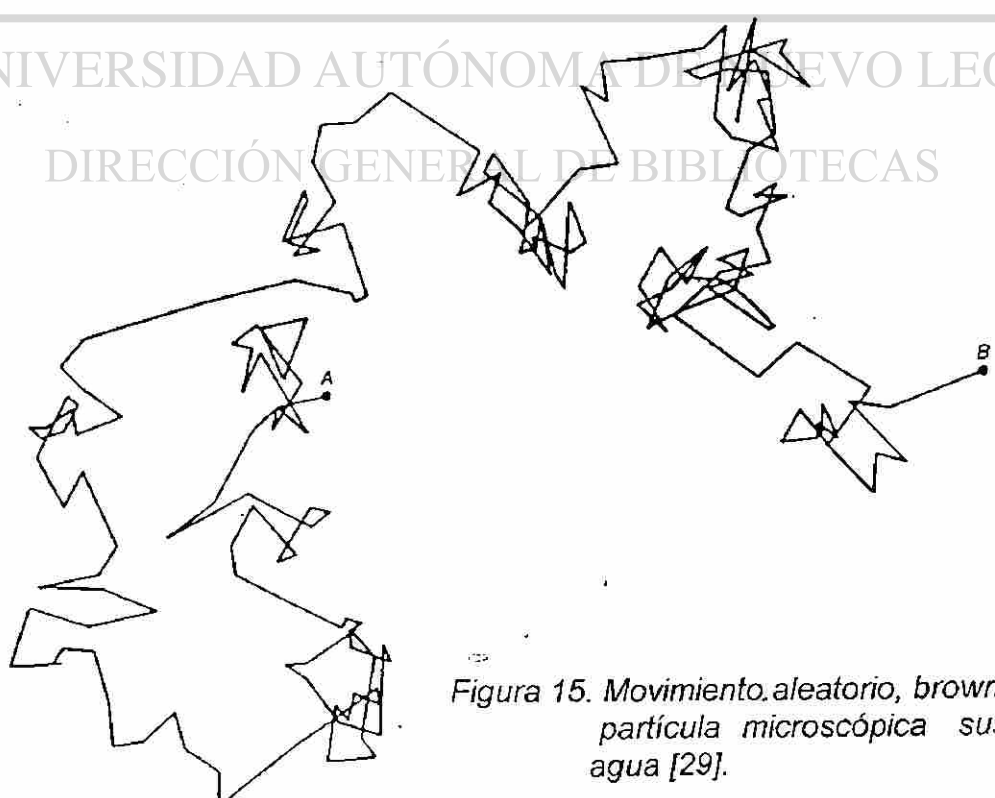


Figura 15. Movimiento aleatorio, browniano, de una partícula microscópica suspendida en agua [29].

## III.4 Dimensión Fractal

Una característica fundamental de los fractales es su dimensión fractal. Con total independencia del hecho de considerar figuras geométricas obtenidas mediante iteraciones sucesivas, las figuras fractales límite pueden caracterizarse por medio de un concepto de dimensión que es una generalización natural de la idea que todos tenemos de una dimensión espacial.

### III.4.1 Definición

Existen varias definiciones distintas del concepto de dimensión fractal, todas las cuales, sin embargo, emanan en mayor o menor medida de un trabajo publicado por Felix Hausdorff (1868-1942) en 1919 [3]. El concepto de dimensión Hausdorff, que trataremos a continuación en forma abreviada es la siguiente: consideremos para empezar objetos familiares, como segmentos de línea, cuadrados y cubos, que tienen dimensión topológica igual a 1, 2 y 3, respectivamente. Dividamos ahora cada uno de ellos en varias partes iguales y establezcamos una relación entre el número  $a$  de las partes resultantes y del factor de escala  $s$  que convierte a cualquiera de las partes en el todo.

La figura 16 muestra la ley de escala  $a = s^D$ . Si dividimos un segmento en, por ejemplo, tres partes iguales, el total es tres veces más largo que cada porción. Si dividimos un cuadrado en partes iguales, de manera que el lado del cuadrado total sea tres veces mayor que el de los cuadrados en que se divide, se obtienen 3<sup>2</sup>, es decir 9 porciones. Para un cubo obtenemos  $a = 3^3$  cubitos componentes iguales. La dimensión de la geometría euclídea clásica, dada por un



exponente entero, aparece también en las unidades de longitud usuales: metro lineal =  $m^1$ , metro cuadrado =  $m^2$ , metro cúbico =  $m^3$ .

Como el factor de escala  $s$  es 3 en cada dimensión, resulta una ley del tipo  $a = s^D$ , en el que  $D$  es la dimensión. Tomando logaritmos a ambos lados de esta igualdad y despejando  $D$ , obtenemos la dimensión como cociente de dos logaritmos:

$$D = \log a / \log s$$

Lo interesante de esta igualdad es el hecho de que la definición de dimensión no queda limitada a la consideración de espacios  $n$  dimensionales ordinarios (con  $n$  entero), ni a elementos de la geometría euclidiana, sino que abarca de manera inmediata todo tipo de objetos autosimilares.

La figura 17 muestra algunos fractales clásicos. Dividamos los objetos en partes iguales y expresemos el número de partes en función del factor de escala de acuerdo con la ley  $a = s^D$ . Despejando  $D$  obtenemos  $D = \log a / \log s$ . Aquí se ilustra este resultado para los casos particulares del conjunto de Cantor, de la curva de Koch, del triángulo de Sierpinski y, finalmente, de una curva que llena el plano, la llamada curva de Peano. Como puede observarse en la tabla de la figura 17, la dimensión que corresponde a la mayoría de estos objetos es fraccionaria (de ahí el nombre de fractales). Esta es, pues, la razón del nombre que les dio Mandelbrot en los años setenta y que hace referencia a la palabra fracción, derivada a su vez del verbo latino *frangere*, que significa romper.


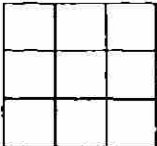
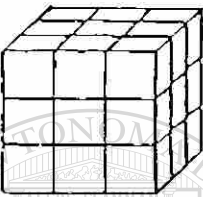
	NUMERO $a$	FACT. DE ESCALAS	LEY
 SEGMENTO	3	3.0	$3.0^1 = 3$
 CUADRADO	9	3.0	$3.0^2 = 9$
 CUBO	27	3.0	$3.0^3 = 27$

Figura 16. Concepto intuitivo de dimensión [17]



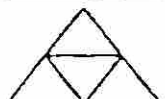
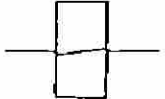
	NUMERO $a$	FACT. DE ESCALAS	DIMENSION $D$
 CONJUNTO DE CANTOR	2	3.0	$\log 2 / \log 3 = 0,631$
 CURVA DE KOCH	4	3.0	$\log 4 / \log 3 = 1,262$
 TRIANGULO DE SIERPINSKI	3	2.0	$\log 3 / \log 2 = 1,585$
 CURVA DE PEANO	9	3.0	$\log 9 / \log 3 = 2,0$

Figura 17. Dimensión fraccionaria como exponente [17].

## III.4.2 Método de Conteo de Cuadros

### Introducción

Este método de conteo de cuadros desarrollado por Mandelbrot para obtener la dimensión fractal está basado en el concepto fundamental de dimensión de Hausdorff, dicho método es el que más aplicaciones tiene en ciencias e ingeniería.

El método de conteo de cuadros está relacionado con el concepto de autosimilitud, este método es un proceso de medición sistemático que se aplica a cualquier estructura.

### Procedimiento

La idea fundamental que asumiremos es que dos cantidades -longitud, superficie o volumen por un lado y la escala por otro- no varían arbitrariamente, sino que están relacionadas por una ley. Dicha ley es relevante para nuestra definición de dimensión fractal y es una ley de potencia de la forma  $a = s^D$ . Existen varias formas de determinar la dimensión fractal de un objeto. La más práctica para nuestros fines es la que está basada en el *método de conteo de cuadros*.

Para calcular la dimensión fractal con este método, ponemos la estructura dentro de una malla regular con un tamaño de malla de arista  $s$  y simplemente contamos el número de cuadros que contienen algo de la estructura, esto nos da un número, digamos  $N$ , el cual depende de cómo hallamos escogido el tamaño  $s$ .

Luego podemos escribir  $N(s)$ . Procedemos a cambiar  $s$  a tamaños progresivamente más pequeños y contamos el número correspondiente  $N(s)$ . Graficamos las mediciones en un diagrama:

$\log N(s)$  vs.  $\log(s)$

denotando al eje horizontal por  $\log(s)$  y al eje vertical por  $\log N(s)$ , en dicha gráfica se obtiene un conjunto de puntos que si se dispersan aproximadamente sobre una línea recta entonces el objeto que se mide presenta características fractales.

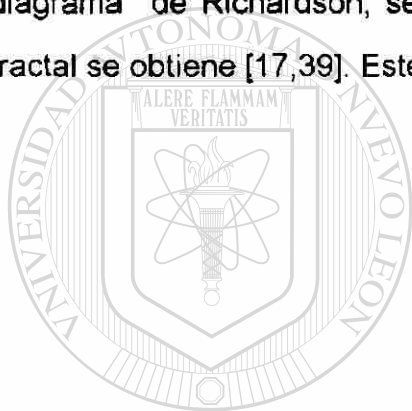
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

### III.4.3 Diagramas de Richardson

El método clásico para la medición de la dimensión fractal de una frontera sobre una sección plana es producir un diagrama de Richardson. Gráficas de este tipo se muestran en las figuras 18 y 19. Obsérvese en la figura 18, cómo la longitud de algunas fronteras entre países tiende a infinito a medida que decrece la unidad de medida, dichas gráficas fueron publicadas por primera vez en 1961 [1]. En la figura 19 se presenta una versión modificada de la diagramas de Richardson.

Para el cálculo del perímetro de una frontera de grano, el perfil puede ser digitalizado y archivado en la memoria de una computadora. Trazando el perímetro con la máxima resolución posible, se producen un conjunto de coordenadas que son aproximada e igualmente espaciadas a lo largo de la línea en la frontera. Se obtiene la distancia a lo largo del perímetro para diferentes magnificaciones.

Continuando con el proceso, se producen una serie de puntos en el diagrama de Richardson, se toma el valor de la pendiente y así la dimensión fractal se obtiene [17,39]. Este proceso se ilustra en la figura 20 y en la figura 21.



# UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

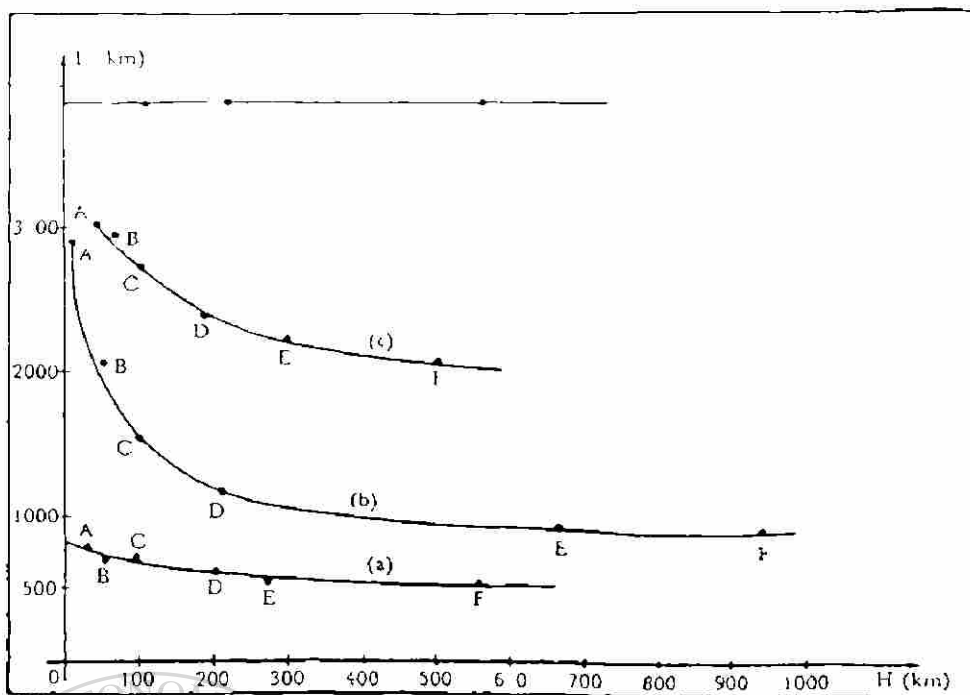


Figura 18. Valores de la longitud  $L$  de varias curvas al cambiar la longitud de la unidad de medida  $H$ , según L. F. Richardson [1].

- (a) Frontera entre Portugal y España.
- (b) Costa occidental de Gran Bretaña.
- (c) Frontera terrestre alemana (1900).
- (d) Perímetro de un círculo.

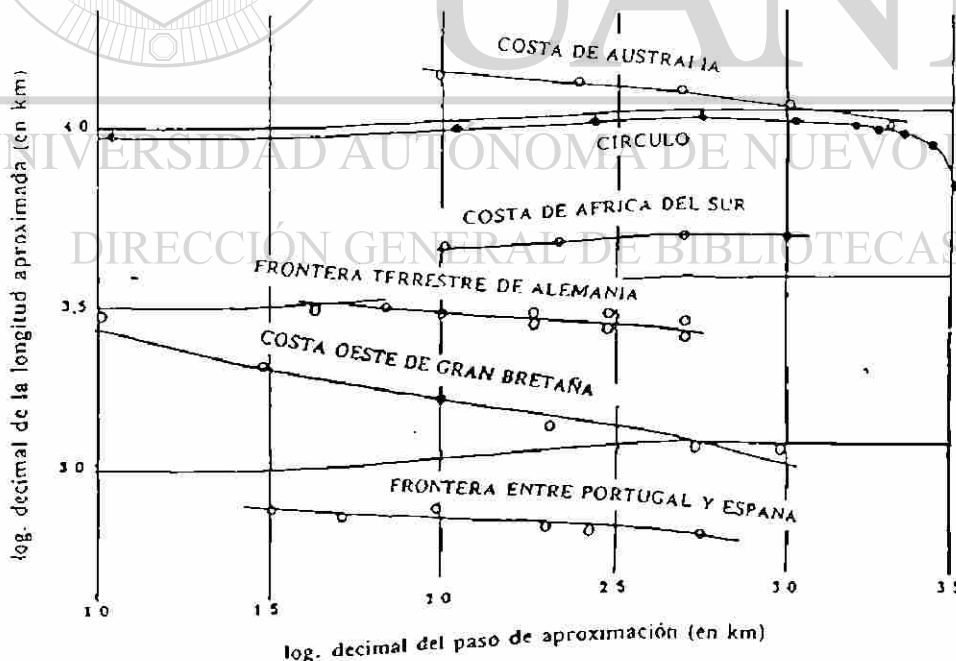


Figura 19. Gráfica tipo Richardson, log-log, la pendiente de cada gráfica es  $1-D$ , donde  $D$  es la dimensión fractal [1].

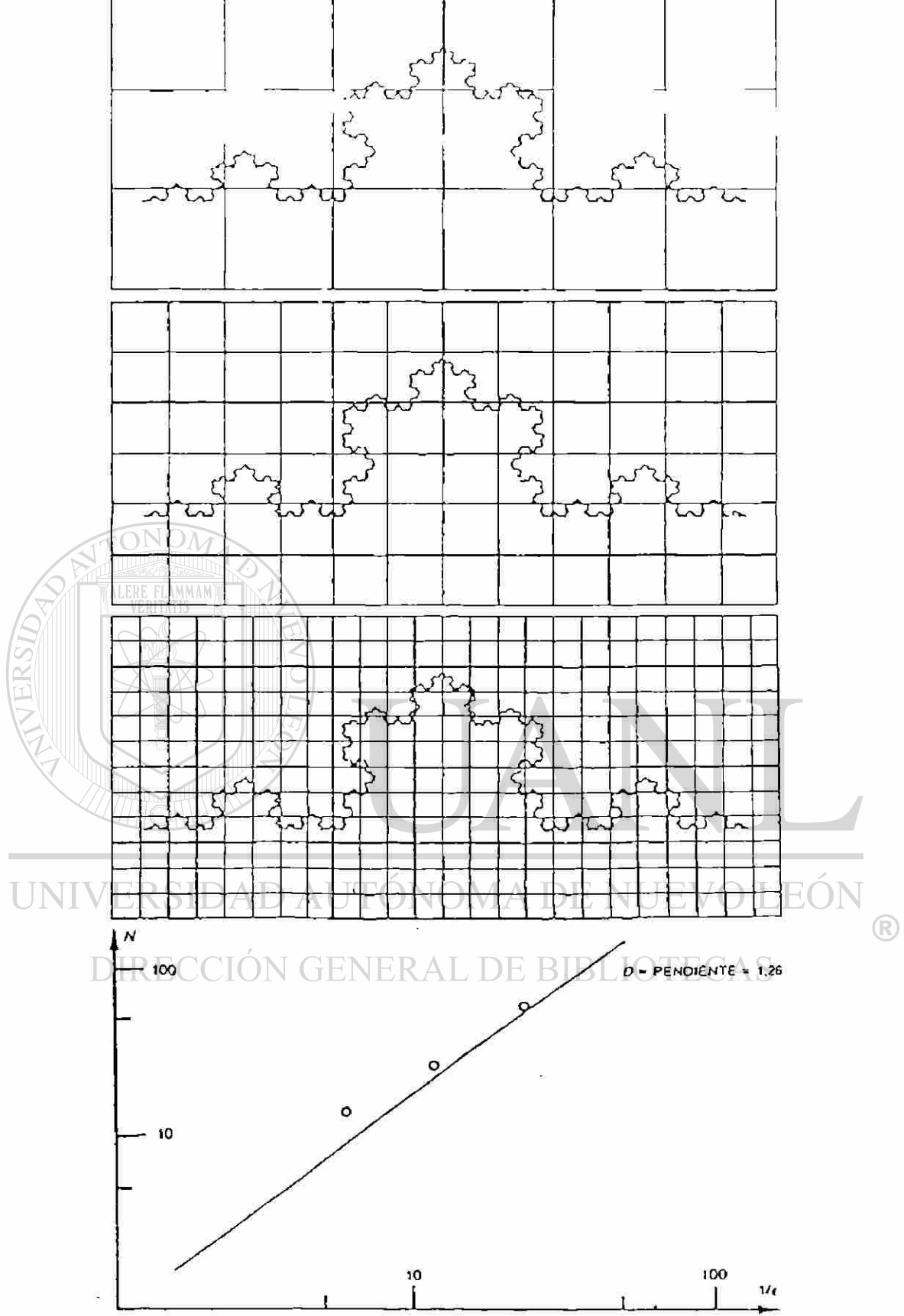
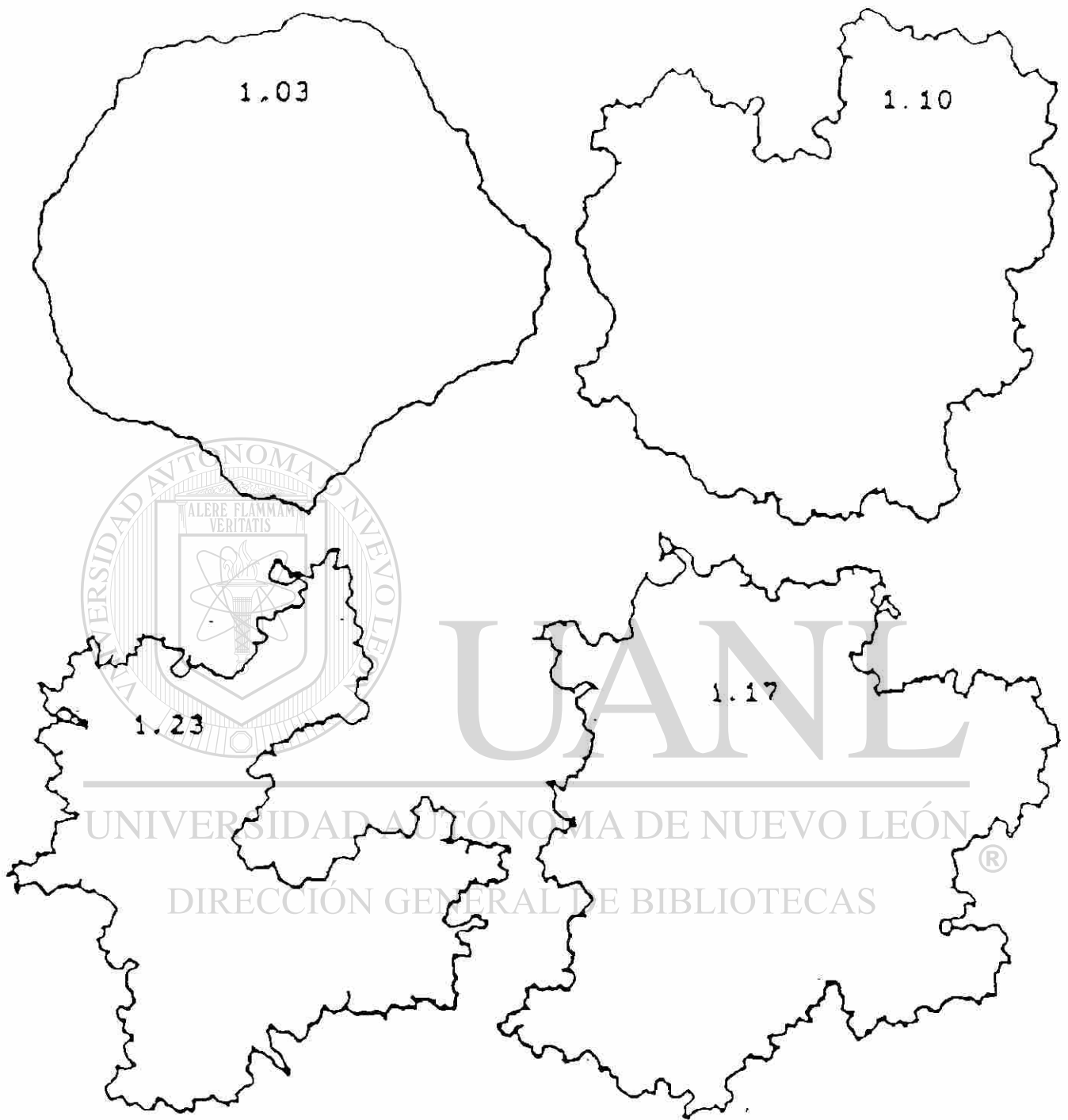


Figura 20. Ilustración para la determinación de la dimensión fractal por el método de conteo de cuadros [17].



*Figura 21. Diferente grado de rugosidad o irregularidad en la frontera y su correspondiente dimensión fractal [40].*



En la figura 22 se muestra un ejemplo típico de una forma irregular. La medida del perímetro o área de un objeto se obtiene contando el número de cuadros unitarios o el total de cuadros a través de una sección de la frontera de grano. Los resultados de las formas irregulares se encuentra que dependen del grado de calibración o del tamaño del pixel que es usado, dentro de un dominio dado. La geometría euclidiana convencional no es adecuada para describir objetos irregulares.

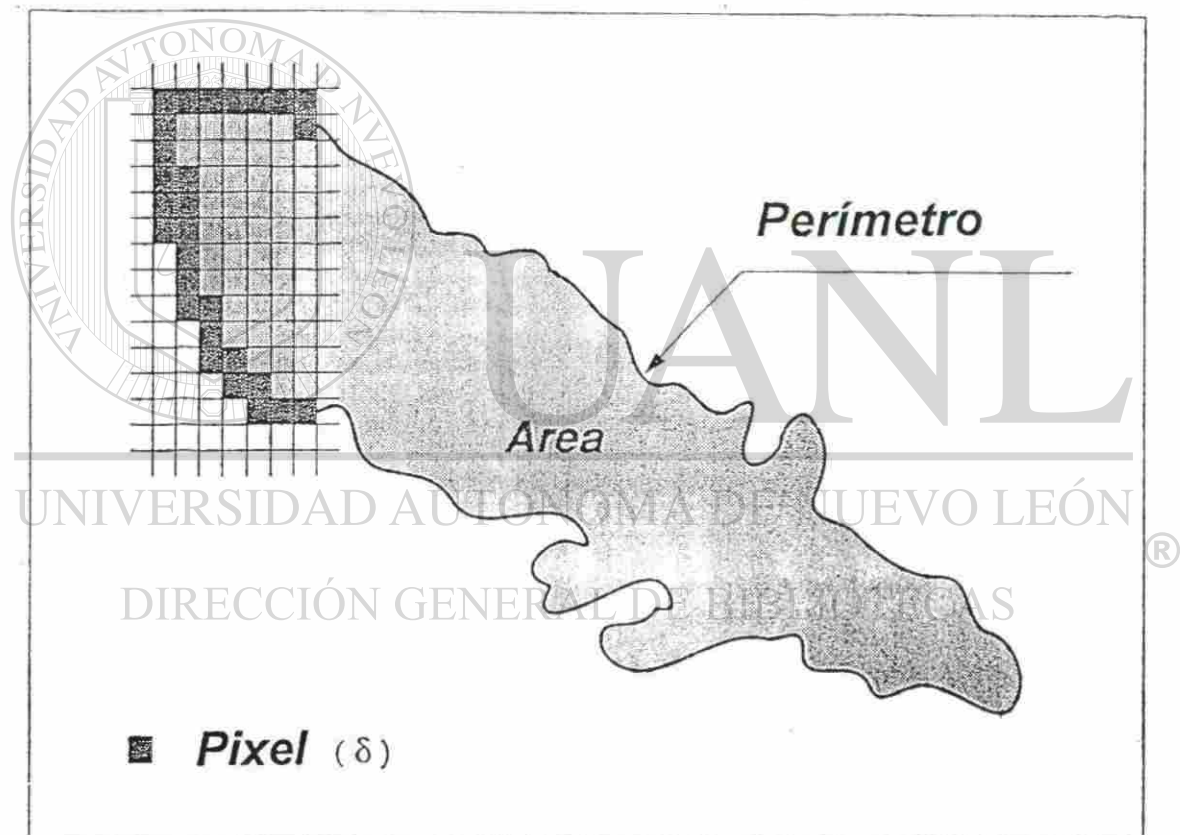


Figura 22. Ilustración de la medida del perímetro y del área de una forma irregular usando pixeles de tamaño  $\delta$  [49].

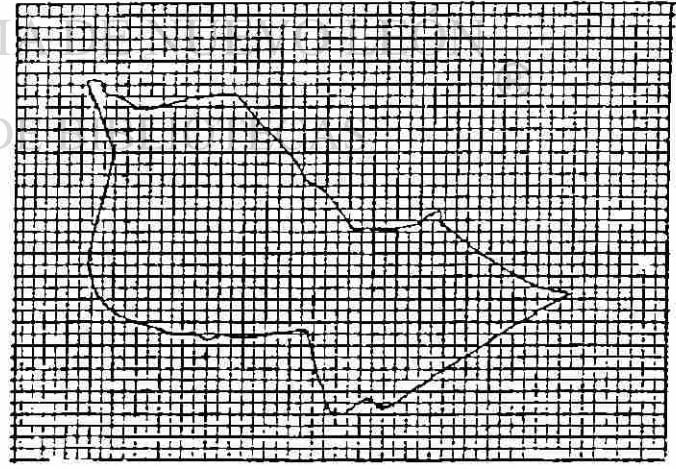
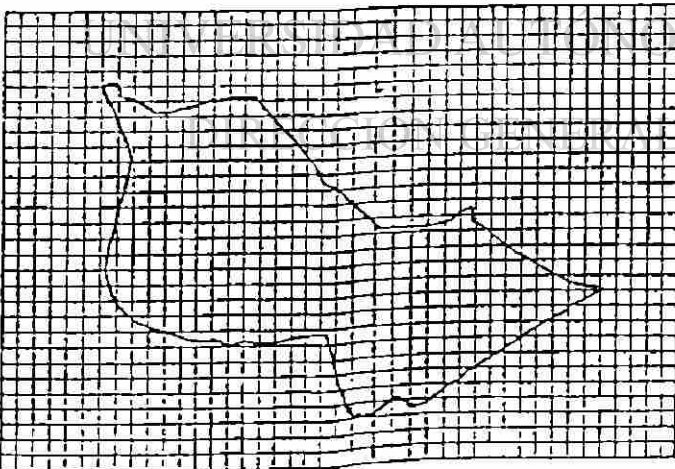
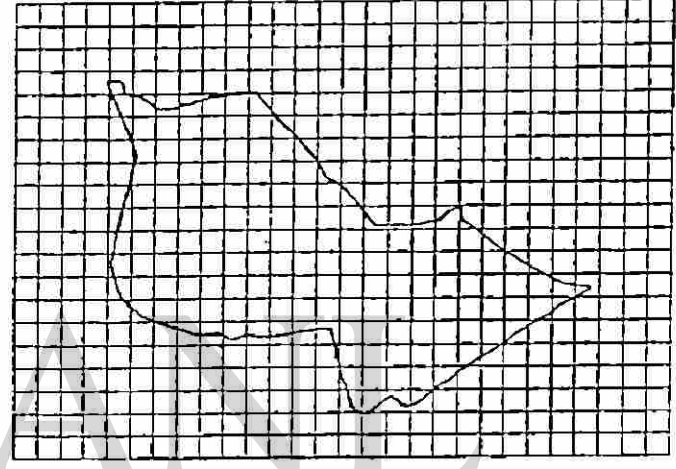
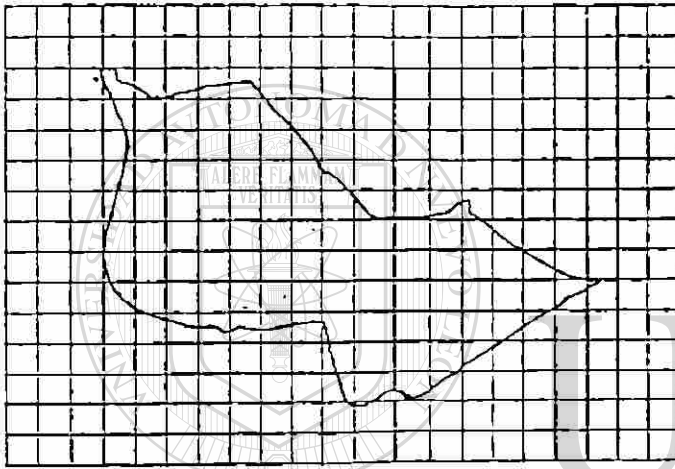
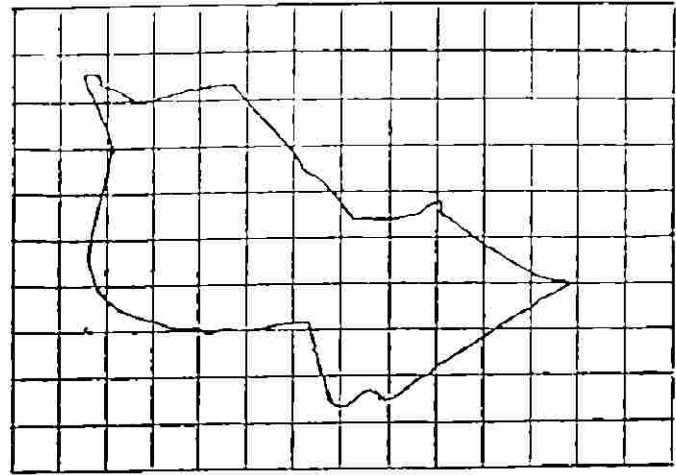
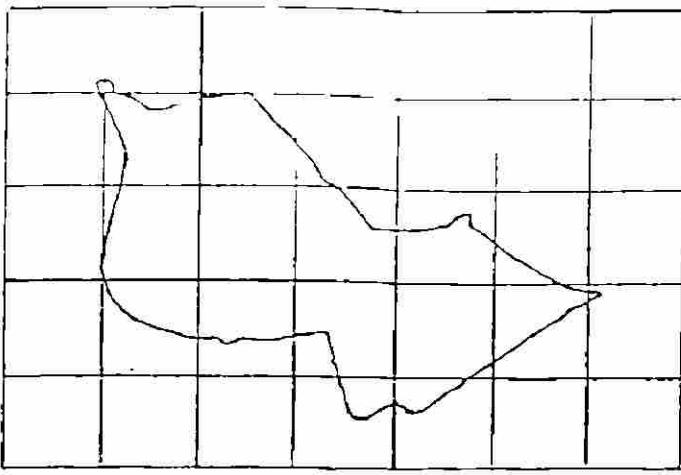


Figura 23. Ilustración del método de conteo de cuadros en la medición del perímetro de la frontera de grano de una aleación AISI 316L.

## CAPÍTULO IV

### MEDICIÓN DE LA DIMENSIÓN FRACTAL. UNA APLICACIÓN A LA INGENIERÍA DE MATERIALES

#### IV.1 Ingeniería de Materiales

En Ingeniería de Materiales es importante conocer las propiedades mecánicas, físicas y químicas de los materiales y sus aleaciones. Para tal fin es necesario conocer la microestructura de los mismos, esto se logra por medio de estudios y análisis basados en técnicas de microscopía óptica, microscopía electrónica de barrido, microscopía de tunelamiento, microscopía de fuerza atómica, etc. En la figura 25 y 29 se pueden observar diferentes tipos de microestructura para diferentes materiales; por medio de técnicas cuantitativas se puede predecir las propiedades de los mismos. Los materiales cuando solidifican presentan diferentes tipos de defectos tales como grietas, poros, huecos, etc. Uno de los defectos de importancia para la predicción de las propiedades es lo que se conoce como *fronteras de grano*.

## IV.2 Fronteras de Grano

Los materiales cuando solidifican lo hacen por conglomerados de moléculas de algún material específico, dichos conglomerados crecen en diferente dirección, al chocar (puesto que su dirección no coincide) se crea un defecto que se conoce como *frontera de grano*. Lo importante ahora es tener un parámetro que caracterice dicha frontera. Para observar, analizar y medir las fronteras de grano es necesario preparar algunas muestras de los materiales a estudiar.

## IV.3 Preparación de las Muestras

Se prepararon las muestras de acero inoxidable 316L, según el procedimiento siguiente: se cortan pequeños pedazos del material a estudiar, aproximadamente un área de  $1\text{cm}^2$  es suficiente. Se pulen las muestras con lijas de diferente calibre hasta que se les da un acabado espejo. Se atacaron con un reactivo químico conocido como Beraha (0.5 gramos de bisulfito sódico,  $\text{NaHSO}_3$ , 15 ml de ácido clorhídrico,  $\text{HCl}$ , 35 ml de agua,  $\text{H}_2\text{O}$ ) y ácido oxálico electrolítico (10 gramos de ácido oxálico, 100 ml de agua, fuente de voltaje 6 volts), con estos ataques se revelaron adecuadamente las fronteras de grano; las muestras del acero bajo carbono se atacaron con nital al 2% (2% ácido nítrico, alcohol etílico). Se eligieron algunos granos a diferentes magnificaciones, las imágenes de estos fueron digitalizadas y archivadas. Con un sistema de análisis de imágenes automático, QUANTIMET 520, se midieron las estructuras. La

ventaja de dicho sistema es su alta resolución, ya que el rango del factor de calibración es de 1.9 a 0.2 micrones por pixel, mientras que otros, por ejemplo el sistema LECO 2001 tiene un rango de 3.2 a 0.3 micrones por pixel, para el mismo grado de magnificación [50]. El muestreo de la población se hizo de manera aleatoria. Posteriormente se eligió una imagen de un grano en alguna de las magnificaciones. Se prepara la imagen delineando adecuadamente la frontera, se calibra el analizador de imágenes de acuerdo a la magnificación en cuestión y se mide la longitud de la frontera de grano. Se repite la operación para cada una de las otras magnificaciones. Se toman como coordenadas el factor de calibración y la longitud de la frontera de grano, estas coordenadas son presentadas en una gráfica log-log. Se mide luego la pendiente de la recta la cual corresponde a la dimensión fractal de la frontera de grano.

Se ha visto que la ley de potencia para cuando dividimos objetos en partes iguales es

$$a = s^D$$

donde

**a** : número de partes que forman el objeto total

**s** : factor de escala

**D** : dimensión fractal

En 1961, L. F. Richardson [1] descubrió, cuando medía la longitud de las fronteras entre países, una ecuación matemática de manera empírica que relaciona la longitud de una frontera con irregularidad pronunciada y la longitud de la unidad de medición, dicha ecuación tiene la siguiente forma:

$$L(\varepsilon) = \varepsilon^{1-D}$$

donde

$L(\varepsilon)$  : longitud total de la frontera

$\varepsilon$  : longitud de la unidad de medida

$D$  : constante empírica que depende de la frontera que se mida.

Mandelbrot ha demostrado [1] que las dos ecuaciones anteriores son equivalentes y que la constante empírica de Richardson es en realidad lo que él llama dimensión fractal.

En el presente trabajo se sigue la metodología tipo Richardson para el cálculo de la dimensión fractal, puesto que se va a medir fronteras de grano con cierta irregularidad.

#### **IV.4 Acero Inoxidable 316L**

Los aceros inoxidables son aleaciones base hierro con diferente porcentaje de cromo. Con el incremento de cromo se logra una resistencia adecuada a la corrosión.

Existen cinco familias de aceros inoxidables de acuerdo a su estructura cristalográfica: ferríticos, austeníticos, dúplex, martensíticos y los endurecidos por precipitación. En el presente trabajo se caracteriza un acero inoxidable AISI 316L (American Institute Steel Iron) con grano austenítico, con una estructura cúbica centrada en las caras. También se caracteriza un acero de bajo contenido de carbono.

De un tubo de 4 pulgadas de diámetro se obtuvieron varias probetas de acuerdo a la norma ASTM A370. Las muestras fueron preparadas metalográficamente para su análisis. Las magnificaciones usadas fueron 50, 100, 200 y 400X y los factores de calibración fueron 1.904, 0.952, 0.479 y 0.236 micrones por pixel, respectivamente.

#### IV.4.1 Composición Química

Los porcentajes en peso de los elementos constitutivos del acero AISI 316L son los siguientes:

Cr	Ni	Mo	Mn	C
17	12.7	2.1	1.5	0.01

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Algunas muestras fueron atacadas con cloruro férrico y otras con ácido pícrico. Dichos ataques no fueron apropiados pues no revelaban adecuadamente la frontera de grano, como se puede observar en la figura 24.



Figura 24. Acero AISI 316L, ácido pícrico, 100X.

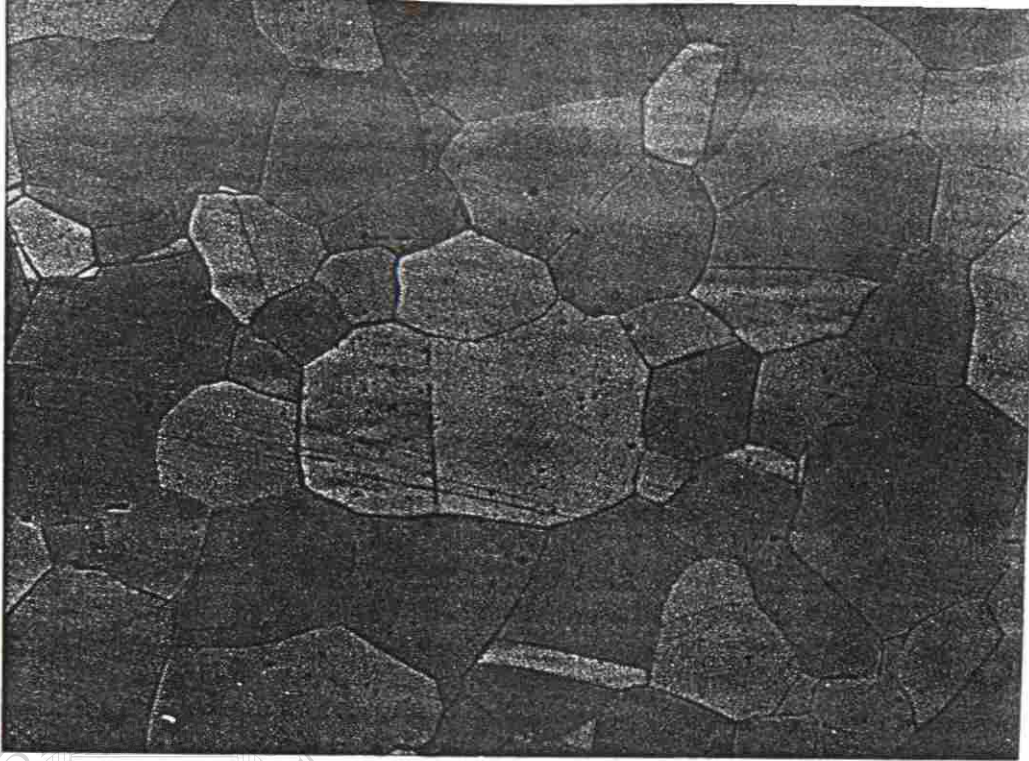
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

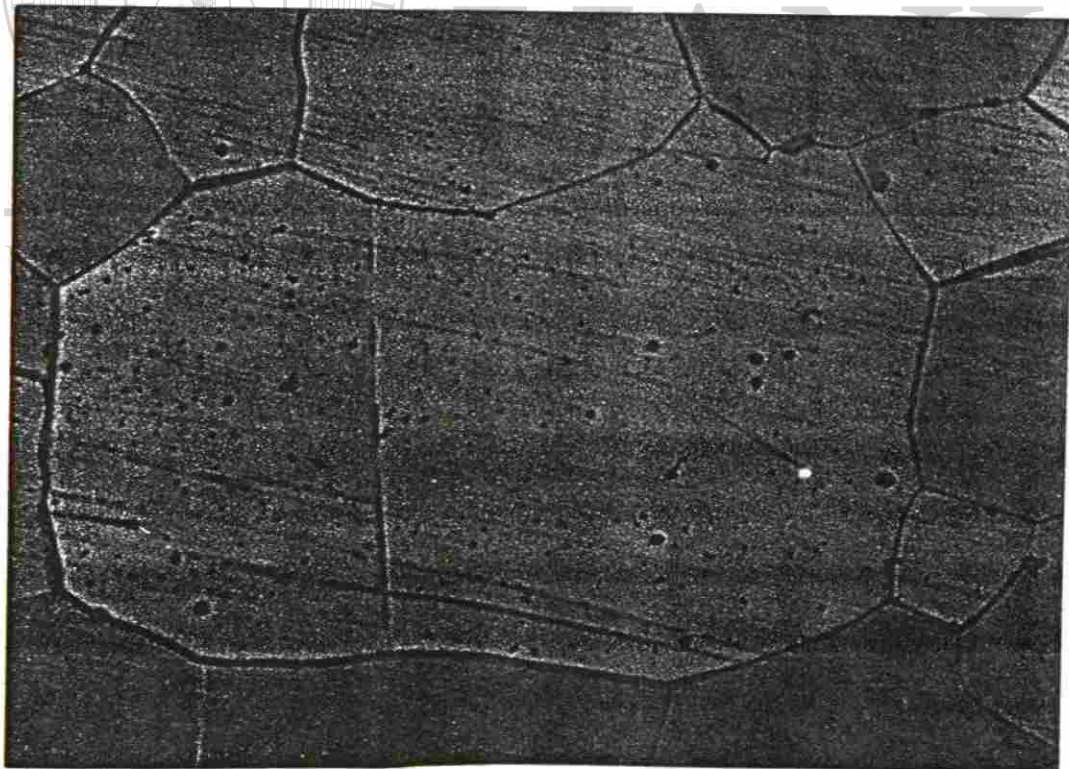
#### IV.4.2 Ataque Químico

Después de que se prepararon las muestras adecuadamente se procedió al ataque químico. Los reactivos más adecuados fueron Beraha y ácido oxálico electrolítico. Esto se muestra en la figura 25, figura 26 y figura 27.





*Figura 25. Acero AISI 316L, Beraha, 200X.*



*Figura 26. Acero AISI 316L, Beraha, 400X.*

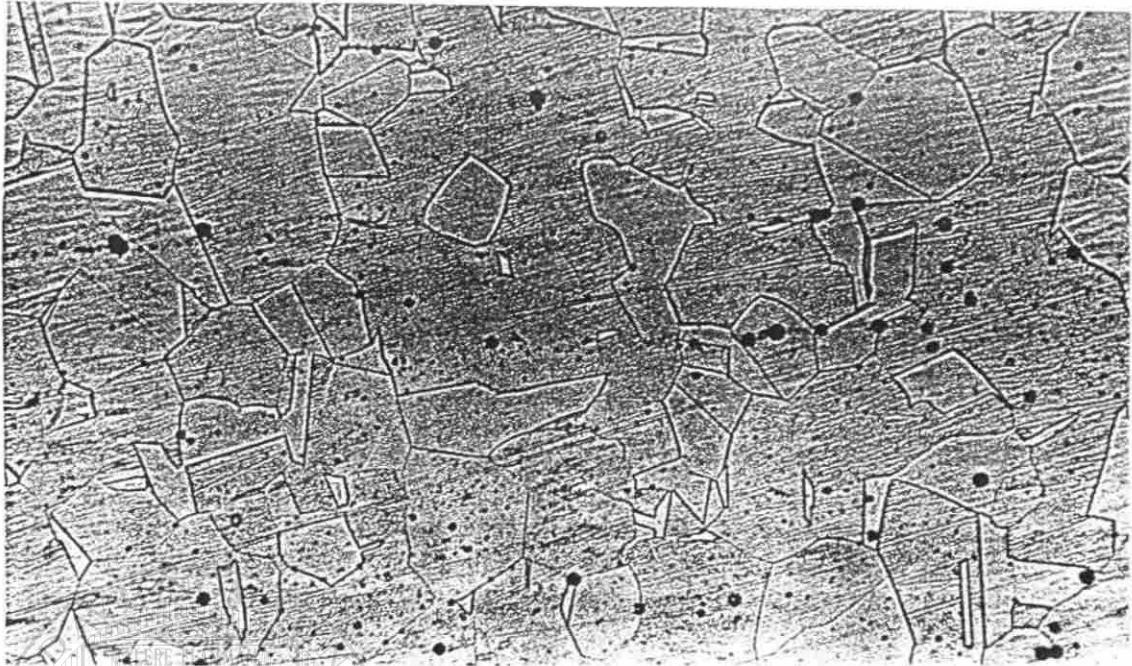


Figura 27. Acero AISI 316L, oxálico electrolítico, 100X.

#### IV.4.3 Dimensión fractal

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

La dimensión fractal del acero AISI 316L se presenta en la figura 28. <sup>®</sup>

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

En dicha figura se grafica la longitud del perímetro de la frontera de grano vs. el factor de calibración, obtenidos ambos parámetros del sistema de análisis de imágenes automático. Los cuatro puntos marcados en cada una de las gráficas corresponden a la medición hecha de los perímetros de frontera de grano para cada una de las magnificaciones empleada (50, 100, 200, 400X).

En la tabla 1 se presentan los resultados de la regresión obtenidos de los valores de la longitud a diferentes magnificaciones . También se muestra en dicha

tabla las magnitudes de factor de calibración en micrones por pixel correspondiendo cada valor a las diferentes magnificaciones. También se presentan las longitudes de los perímetros de la frontera de grano en micrones para cada una de las magnificaciones correspondientes.

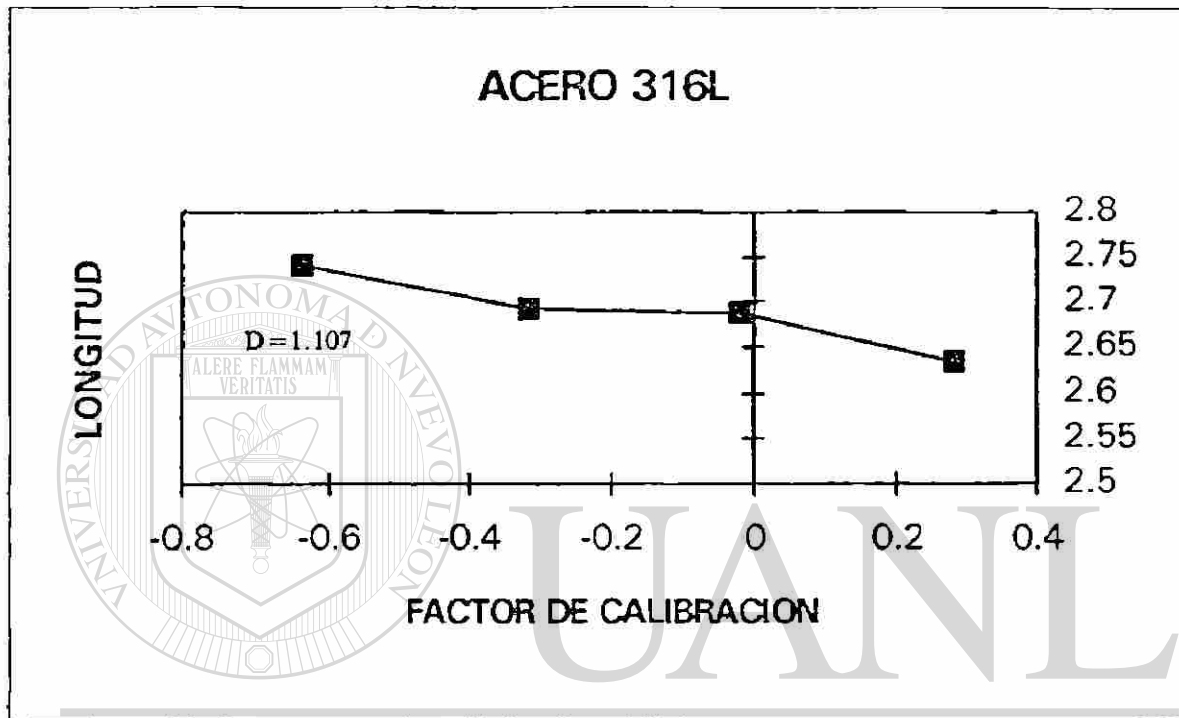


Figura 28. Gráfica Richardson log-log ilustrando la dimensión fractal del acero AISI 316-L

Datos		Resultados de la Regresión.			
Factor de Calibración (μ/Pixel)	Longitud de Frontera (μ)			Coefficientes	Error Estándar
1.916	430	R	0.96245185	Intersección	2.670000002
0.958	487	Error Estándar	0.01453101	x1	-0.10674669
0.486	492				0.0081334
0.231	550				0.02128895

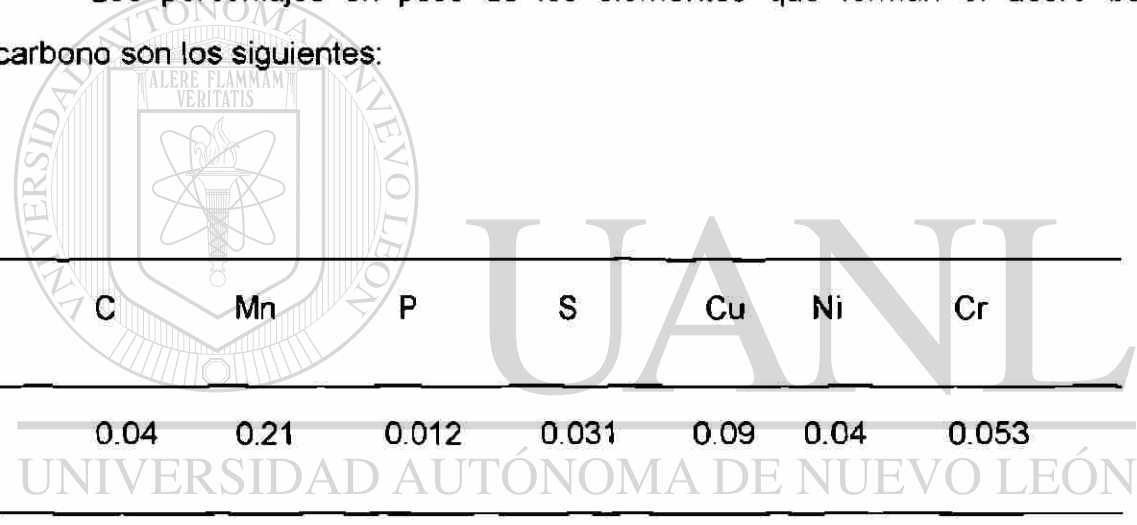
Tabla 1. Resultados de la regresión de la gráfica anterior.

## IV.5 Acero de Bajo Carbono

Las muestras para las mediciones para el acero bajo carbono se obtuvieron de lámina rolada en caliente.

### IV.5.1 Composición Química

Los porcentajes en peso de los elementos que forman el acero bajo carbono son los siguientes:

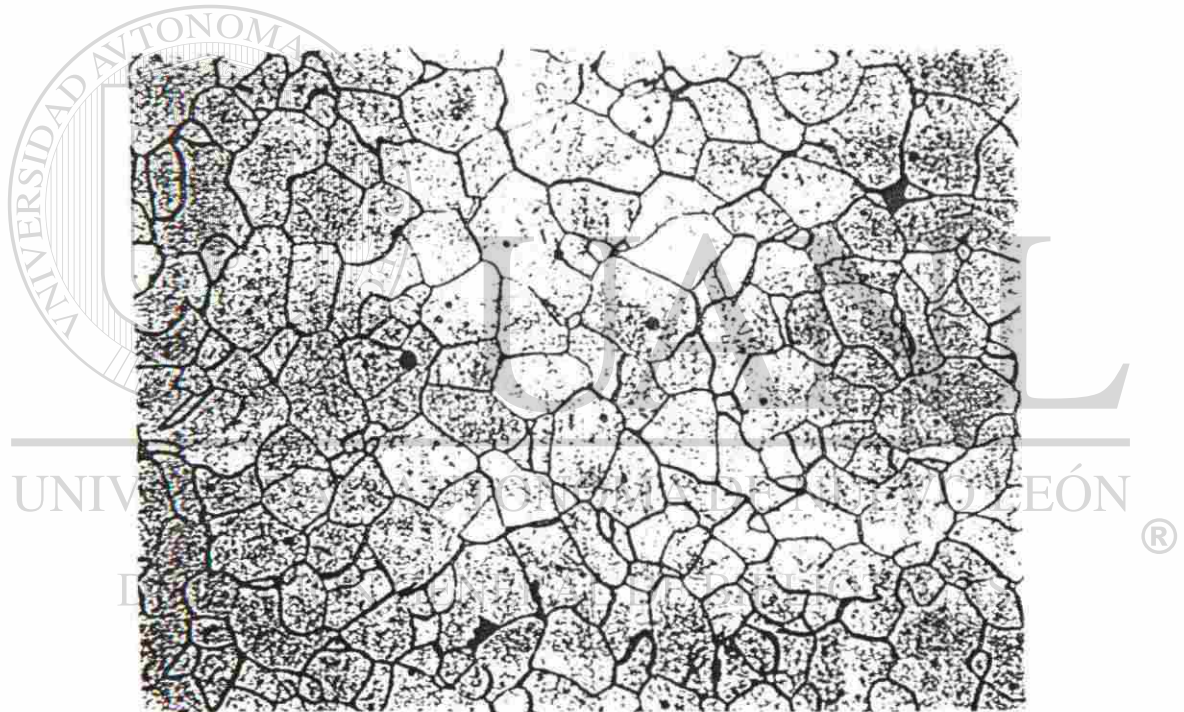


C	Mn	P	S	Cu	Ni	Cr
0.04	0.21	0.012	0.031	0.09	0.04	0.053

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN®  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## IV.5.2 Ataque Químico

El reactivo para el ataque químico más adecuado fue nital al 2% y se obtuvo la microestructura que se muestra en la figura 29.



*Figura 29. Acero bajo carbono, nital al 2%, 100X.*

### IV.5.3 Dimensión Fractal

La dimensión fractal para el acero bajo carbono se presenta en la figura 30.

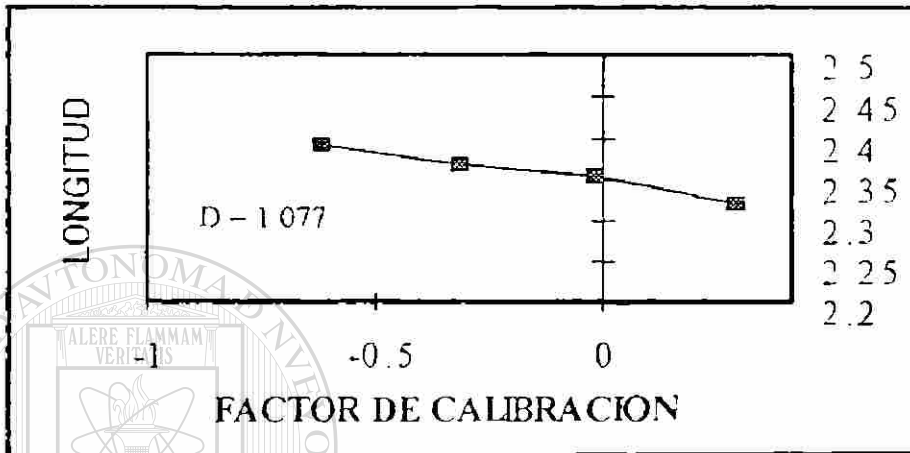


Figura 30. Grafico de Richardson log-log ilustrando la dimensión fractal del acero de bajo carbono sin deformación.

Datos		Resultados de la Regresión.					
Factor de Calibración (μ/Pixel)	Longitud de Frontera (μ)	R	0.98847265	Intersección	2.34560171	Error Estándar	0.00316269
1.916	209	Error Estándar	0.0056786	x1	-0.07754555		0.0083985
0.958	226						
0.485	234						
0.231	247						

Tabla 2. Resultados del análisis de regresión utilizado para el cálculo de la dimensión fractal reportada en la figura anterior.

## IV.6 Discusión de Resultados

En el presente capítulo se analizaron y se caracterizaron por geometría fractal dos tipos de aceros: AISI 316L y acero bajo carbono.

Existen gran variedad de reactivos con los que se puede atacar al acero inoxidable. No cualquier ataque es adecuado para revelar fronteras de grano en dicho acero. En este trabajo se aplicaron los siguientes reactivos: Vilela, óxido férrico, ácido pícrico, Beraha y oxálico electrolítico. Los ataques que revelaron mejor la frontera de grano fueron el Beraha y el oxálico electrolítico. Se eligieron las muestras atacadas con este último reactivo por presentar una mejor contrastación negro-blanco en la frontera de grano y en el grano mismo, respectivamente. Esto facilita la medición en el sistema analizador de imágenes automático.

Al hacer el ataque con ácido oxálico electrolítico se inició con concentración de 3 gramos de ácido por 100 ml de agua. El ataque fue adecuado, pero muy lento. Se cambió de concentración a 6 gramos de ácido oxálico con la misma cantidad de agua; se delineaba más rápido la frontera de grano pero simultáneamente se presentaban imperfecciones tales como picaduras en la frontera y en el grano mismo. Esto no es adecuado cuando se hacen mediciones en un sistema de análisis de imágenes. Luego se cambió a concentraciones mayores, 10 gramos de ácido oxálico por 100 ml de agua; las fronteras de grano se delineaban bien pero aparecían de forma inmediata picaduras profundas. Se decidió atacar el acero inoxidable con la primer concentración.

Las fronteras de grano observadas, analizadas y medidas tanto para el acero inoxidable como para el acero bajo carbono presentan características propias diferentes. En las fronteras de grano del acero inoxidable se observó una geometría más regular que en el acero bajo carbono. Esto coincide con los resultados cuantitativos obtenidos. Se eligieron aleatoriamente diferentes zonas de granos tanto del acero inoxidable como del acero bajo carbono para realizar el estudio.

Para ambos aceros se eligieron cuatro imágenes de frontera de grano para cada magnificación, 50, 100, 200 y 400X. El cálculo de la media y de la desviación estándar de la dimensión fractal se obtuvo de 9 granos a los cuales se les midió su frontera de grano para cada uno de ellos. Se hizo dicho cálculo al espécimen sin deformación. En total se analizaron y se midieron perímetros de frontera de grano de 56 imágenes considerando también las imágenes del acero al bajo carbono.

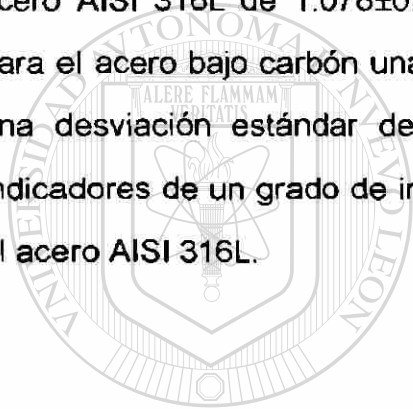
La microestructura austenita del acero inoxidable 316L, así como la microestructura ferrita de un acero bajo carbono presentan en la frontera de grano características de irregularidad las cuales pueden ser caracterizadas por medio de fractales. En el presente trabajo no se consideró ningún tipo de imperfección para la caracterización de los mismos. Se eligieron los granos mejor delineados en su frontera, ello facilita el cálculo de la longitud de la frontera puesto que deben elegirse granos sin imperfecciones por ataque químico.

Las mediciones de los perímetros de las fronteras de grano realizadas en aceros AISI 316L y de bajo carbono nos muestran que dichos aceros presentan características fractales.



Lo que se observa en la figura 28, es un resumen del comportamiento de la dimensión fractal para el acero inoxidable sin deformación. Nótese que la gráfica ha sido obtenida de un diagrama de Richardson, log-log, en el cual se relaciona de manera aproximadamente lineal el perímetro o longitud de frontera de grano contra factor de calibración.

El cálculo estadístico muestra una media en la dimensión fractal para el acero AISI 316L de  $1.078 \pm 0.0006$  con una desviación estándar de 0.00087. Y para el acero bajo carbón una media en la dimensión fractal de  $1.100 \pm 0.002$  con una desviación estándar de 0.0019 (ver figura 28) . Dichos resultados son indicadores de un grado de irregularidad mayor en el acero bajo carbono que en el acero AISI 316L.



# UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

# CAPÍTULO V

## IMPLICACIONES METODOLÓGICAS DE LA TEORÍA DE FRACTALES

La teoría de fractales ha sido aplicada en diferentes áreas de la ciencia e ingeniería con bastante aceptación. La teoría de fractales es una disciplina en crecimiento, que se sigue enriqueciendo con nuevas aportaciones surgidas de diversas investigaciones. La lista de publicaciones que reportan resultados positivos crece cada día, aunque la teoría de fractales aún se encuentra lejos de tener una forma acabada, e igualmente sus alcances están por descubrirse.

El gran desarrollo tecnológico de los últimos años, en lo que se refiere a física del estado sólido y como consecuencia de ello a la electrónica, ha influido para que existan sistemas de medición y procesamiento de información más adecuados para la obtención de resultados más exactos y con mayor rapidez. Sin este desarrollo tecnológico la teoría de fractales hubiera tardado más en ver la luz. Los objetos fractales ya estaban implícitos en la matemática de la gran crisis 1875-1925, el problema de la dimensión matemática ya estaba resuelto por Hausdorff en 1919; el desarrollo de las de las computadoras (capacidad de memoria y velocidad de procesado) era necesario para que emergieran los objetos fractales.

La matemática de finales del siglo pasado estaba completamente basada en la axiomatización de la geometría de Euclides, todas las áreas de la matemática emanaban de dicha metodología. Cuando se crean curvas que no tienen derivadas en ningún punto o curvas que no son rectificables (Cantor, Sierpinski, von Koch Peano, Hilbert, etc.), la geometría euclidiana no puede resolver el problema de caracterizarlas por medio de un parámetro invariante. Es

necesario una generalización más amplia y adecuada del concepto de dimensión. En este sentido decimos que los objetos fractales estaban ya implícitos en la matemática. Al final del siglo XIX se crean nuevas geometrías para elucidar problemas que con la geometría de Euclides no era posible resolver; por un lado el matemático ruso Nikolai Ivanovich Lobachevski (1793-1856) quien publica su obra en 1829 y el matemático húngaro Janos Bolyai (1802-1860) exponía sus ideas en 1826. El matemático alemán Georg Friedrich Riemann (1826-1866) creó en 1854 otro tipo de geometría no euclidiana diferente a la concebida por los matemáticos anteriores. Aun así dichas geometrías no resolvían el problema de determinar cuánto espacio es llenado por conjuntos de puntos, curvas, superficies o volúmenes. El gran mérito de Mandelbrot fue la aplicación del concepto de dimensión debido a Hausdorff, y es así como nace una nueva geometría y una gran herramienta para caracterizar determinados objetos.

La teoría de fractales ha puesto en tela de juicio a la axiomatización euclidiana, la cual prevaleció por más de veinte siglos e influyó en el desarrollo de todas las áreas de las matemáticas. Esta teoría viene a complementar el hueco que había en matemáticas con respecto a la caracterización de objetos con cierto grado de irregularidad.

Dos de los acontecimientos que marcaron un cambio radical en la forma de pensar de los científicos, en el área de ciencias naturales, es el nacimiento y desarrollo de la mecánica cuántica y de la teoría especial de la relatividad. En seguida se hace un breve resumen de las implicaciones metodológicas de ambas teorías para después cotejarlas con las implicaciones de la teoría de fractales.

La teoría cuántica nace como una consecuencia de la catástrofe ultravioleta, la cual es explicada a continuación

La capacidad de un cuerpo para emitir radiación está estrechamente relacionada con su capacidad para absorberla, ya que un cuerpo a temperatura constante está en equilibrio térmico con su medio ambiente y debe de absorber energía en la misma proporción con que la emite. Así, un cuerpo ideal se define como aquel que absorbe toda la radiación que incide sobre él independientemente de las frecuencias con que se emitan. Un cuerpo tal recibe el nombre de *cuerpo negro*. Un cuerpo negro, al absorber todas las frecuencias de luz cuando se calienta, las debe emitir, pero se encontró que el número de frecuencias es más grande en la extensión de las altas que de las bajas. Si un cuerpo negro emitía radiaciones electromagnéticas de todas las frecuencias entonces, toda la energía se irradiaría virtualmente en alta frecuencia. A este fenómeno se le conoce como la <<catástrofe ultravioleta>>, porque la radiación emitida a frecuencias muy altas, dentro del espectro de la luz visible es el violeta. W. Wien (1864-1928) y J. Rayleigh (1842-1919) trataron de establecer ecuaciones que explicaran cómo se distribuía la radiación del cuerpo negro. La ecuación de Wien se ajustaba perfectamente a las frecuencias altas, pero no a las bajas. Por el contrario, la de Rayleigh se ajustaba a las bajas pero no a las altas. Una acción atrevida, debido a la desesperación de Max Karl Ernest Ludwig Planck (1858-1947) trajo la solución.

En 1900 Planck se las arregló para conseguir una ecuación relativamente simple que describía con precisión la distribución de emisión de radiación de las diversas frecuencias. Se basaba en la suposición decisiva de que la energía no es divisible indefinidamente. Como la materia estaba formada por partículas, Planck les dió a estos paquetes de energía el nombre de cuantos (del latín *quantus*) o en singular, *cuanto*.

La repercusión que tuvo este hecho dentro de la metodología de la física clásica fue de efectos revolucionarios, y cambió radicalmente la forma de pensar de los científicos. Luego, la corroboración de este acontecimiento por parte de A.

Einsten (efecto fotoeléctrico) y de N. Bohr (líneas espectrales del átomo de hidrógeno) trajo como consecuencia la revisión de la forma de concebir el universo según la física clásica.

Albert Einstein (1879-1955) con su Teoría Especial de la Relatividad publicada en 1905, parte de la invarianza de la velocidad de la luz, y con ello echó por abajo el concepto de *el éter*. Después explica los resultados negativos del experimento de Michelson-Morley; explicó también el efecto de la contracción de FitzGerald y el efecto de aumento de masa de Lorentz. Con la Teoría de la Relatividad Especial, la cual establece que <<todo movimiento es relativo >>, deja de existir el concepto de sistema de referencia absoluto. Esta teoría establece también que el transcurso del tiempo de algún evento variaba con la velocidad del movimiento del sistema de referencia y así se tenía que prescindir de las nociones de simultaneidad. Así, el espacio y el tiempo se desvanecieron como entidades separadas, fundiéndose en una sola: <<espacio-tiempo>>.

— La teoría de fractales no trae cambios tan drásticos como las teorías arriba mencionadas, no se tienen que revisar conceptos básicos dentro de la matemática ni de la física, ni de ninguna otra ciencia.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

La teoría de fractales trae como consecuencia una nueva geometría la cual es más adecuada para el análisis de la naturaleza. Después de conocer la teoría de fractales cambia nuestra manera de ver el mundo. Muchas estructuras naturales (como, por ejemplo, las nubes, las montañas, las líneas de las costas o las grietas tectónicas, los pequeñísimos capilares sanguíneos, las superficies de ruptura de los materiales, etc.) que aparentan tener una complejidad extraordinaria, poseen en realidad una misma regularidad geométrica la cual es caracterizada por la dimensión fractal.

Actualmente se aplica la teoría de fractales a diversas áreas tales como ingeniería de materiales, específicamente: microestructura de metales, superficies de ruptura, rugosidad de superficies por desgaste, caracterización de partículas finas, ya sean polvos metálicos o cerámicos. En biología se ha aplicado en la caracterización de: el crecimiento de colonias de bacterias, retina humana, área superficial de la masa del cerebro. En el arte, por medio de fractales, se han analizado imágenes artísticas de diferentes pintores. En fisiología se ha caracterizado: la flora intestinal, el espacio ocupado por las arterias del cuerpo humano, las neuronas, etc. En percepción remota se ha empleado para la caracterización de: uso de suelo, montañas, valles, etc. En química se ha aplicado en: absorción, catálisis, agregación limitada por difusión, crecimiento de depósitos electrolíticos, etc. [3].

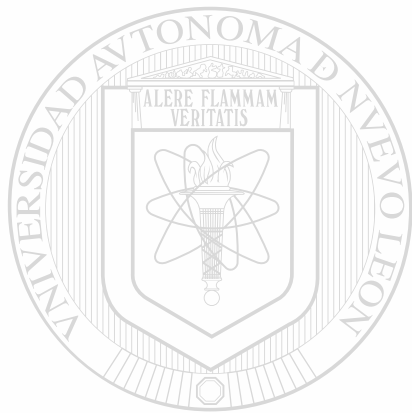
En 1962 Thomas S. Kuhn publicó una de las obras más influyentes en la filosofía de la ciencia, *The Structure of Scientific Revolutions* [50]. Su tesis central es:

*Las revoluciones científicas son aquellos episodios de desarrollo no acumulativos en los cuales un paradigma anterior es reemplazado, todo o en parte, por un paradigma nuevo e incompatible*

donde los paradigmas se definen como

*ejemplos aceptados de la práctica científica en curso - ejemplos que incluyen leyes, teoría, aplicaciones e instrumentación - que proporcionan modelos de los cuales surgen tradiciones coherentes particulares de investigación científica.*

Por todo lo anterior, se puede decir que la teoría de fractales no representa una revolución científica en el sentido de Thomas S. Kuhn, pero sí representa un nuevo paradigma en el sentido que le otorga dicho autor.



# UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

# CAPÍTULO VI

## CONCLUSIONES

La geometría de Euclides no es adecuada para la caracterización de los objetos fractales matemáticos y naturales pues en dicha geometría se define de un forma muy limitada el concepto de dimensión.

La geometría fractal es una nueva geometría más completa que la euclídiana, define adecuadamente el concepto de dimensión el cual es aplicado a todo clase de objetos: matemáticos, naturales, regulares e irregulares.

No todos los objetos presentan características fractales. Para afirmar que un objeto es fractal es necesario aplicar la geometría adecuada y así determinar su dimensión fractal. Así , esta nueva geometría es la adecuada para la caracterización de los objetos que presentan diferentes grados de irregularidad.

Con el análisis de curvas matemáticas en el año de 1890, que presentaban características tales como: longitud infinita, se inicia la formalización del concepto de dimensión que culmina con la definición debida a Hausdorff en 1919. Al aplicar de una manera concreta dicha definición emergen los objetos fractales.

La teoría de fractales como parte de sistemas dinámicos no-lineales viene a complementar las matemáticas clásicas las cuales no se apegaban a fenómenos naturales reales. Los modelos matemáticos anteriores al desarrollo de dichas disciplinas, eran meras aproximaciones a condiciones ideales.



La teoría de fractales se ha aplicado a diferentes disciplinas con resultados positivos. Se han ido formalizando en lenguaje matemático los conceptos que sustentan la dicha teoría. Nuevas definiciones para la caracterización de objetos matemáticos y naturales han emergido, las cuales no existían hasta el descubrimiento de los objetos fractales.

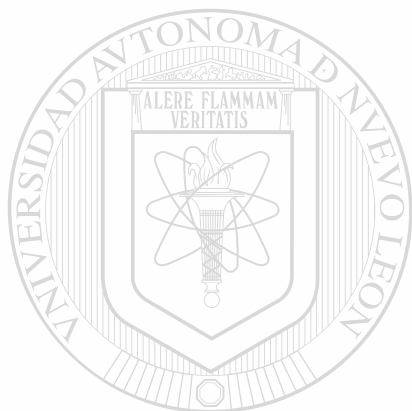
En ingeniería de materiales se estudian las propiedades mecánicas, físicas y químicas de las diferentes aleaciones que existen. En la formación de los materiales se presentan diversos defectos. Se decidió elegir la geometría fractal por ser la más adecuada para la caracterización de las fronteras de grano en dos materiales diferentes.

Por técnicas y procedimientos empleados en ingeniería de materiales se llegó a determinar que el acero inoxidable AISI 316L y el acero de bajo contenido de carbono AISI 1006 presentan características fractales puesto que se determinó su dimensión fractal.

El nacimiento y desarrollo de la teoría cuántica tuvo como consecuencia que las ideas clásicas de determinismo, continuidad de energía, interacción de la luz con la materia y el fenómeno de irradiación llegaran a ser modificadas drásticamente. Así, dichos fenómenos fueron explicados por los nuevos conceptos introducidos por dicha teoría. La teoría de la relatividad especial ataca las ideas clásicas de acción a distancia, simultaneidad, sistema de referencia absoluto, etc. La creación de esta nueva teoría influye en los científicos a revisar los antiguos conceptos de espacio y tiempo y adaptar las nuevas ideas para la explicación de los fenómenos reales que existen tanto a nivel microscópico como macroscópico. La teoría de fractales, a diferencia de las teorías arriba mencionadas, es consecuencia de estudios bien definidos y caracterizados en el área de matemática pura y aplicada. Dicha teoría no cambia ningún concepto antiguo y se basa en el concepto de dimensión, el cual ya estaba completamente

caracterizado en 1919. Es importante hacer notar que la teoría de fractales es una nueva herramienta para poder explicar fenómenos que anteriormente era difícil de caracterizar por el grado de irregularidad que presentaban. La teoría de fractales viene a redondear la geometría que era necesaria para elucidar fenómenos reales que presentaban un grado de complejidad elevado, pero aún no podemos predecir la magnitud de su aplicación ni su alcance explicativo.

Cotejando la teoría de fractales con las teorías antes mencionadas, por ser las más actuales, dicha teoría no representa una revolución científica en el sentido de T. S. Kuhn.



# UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

# BIBLIOGRAFÍA

## 1.- LIBROS

- [1] Mandelbrot, B. B. ; *The Fractal Geometry of Nature*; W.H Freeman and Company New York (1983).
- [2] Barnsley, M. ; *Fractals Everywhere*; Academic Press, Inc, (1988).
- [3] Peitgen, H. O.; Jurgens, H.; Saupe, D.; *Chaos and Fractals*; Springer-Verlag, (1992).
- [4] Peitgen, H - O. ; Jurgens, H. ; Saupe, D.; Maletsky, E.; Perciante, T.; Yunker, L.; *Fractals for the Classroom: Strategic Activities. Vol I y II*; Springer-Verlag, (1991).
- [5] Devaney, R. L.; *Chaos, Fractals and Dynamics*; Addison-Wesley, (1990).
- [6] Barnsley, M. F.; Devaney, R. L.; Mandelbrot, B. B.; Peitgen, H - O.; Saupe, D.; Voss, R. F.; *The Science of Fractals Images*; Springer-Verlag, (1988).
- [7] Peitgen, H - O.; Richter, P. H.; *The Beauty of Fractals*; Springer-Verlag, (1986).
- [8] Falconer, K.; *Fractal Geometry*; John Wiley and Sons, (1990).

- [9] Rietman, E.; *Exploring the Geometry of Nature*; John Wiley and Sons (1989).
- [10] Thompson, J. M. T.; Stewart, H. B.; *Nolinear Dynamics and Chaos*; John Wiley and Sons, (1986).
- [11] Kiseliov, A.; Kransmov, M.; Makarenko, G.; *Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*; Editorial Mir, (1984).
- [12] Elsgoltz, L.; *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional*; Editorial Mir (1975).
- [13] Simmons, F.; *Ecuaciones Diferenciales*, (1977). McGraw-Hill.
- [14] Abraham, R. H.; Shaw, Ch.; *Dynamics: The Geometry of Behavior*, Aerial Press, Santa Cruz. Second edition Addison-Wesley, (1992).
- 
- UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS
- [15] MacGuire, M., *An Eye for Fractals*, Addison-Wesley, Redwood City, 1991.
- [16] Courant R. y Robbins H.; *Qué es la Matemática ?*, Editorial Aguilar, quinta edición-primera reimpresión-1971.

## 2.- ARTÍCULOS DE DIVULGACIÓN

- [17] Jurgens, H.; Peitgen, H - O.; Saupe, D.; *El Lenguaje de los Fractales*; Investigación y Ciencia, Agosto 1990.

- [18] Sander, L.; *Crecimiento Fractal*; Investigación y Ciencia. Abril 1991.
- [19] Goldberger, A. L.; Rigney, D. R. y West, B. J.; *Caos y Fractales en la Fisiología Humana*. Agosto 1992.
- [20] Dewdney, A. K.; *Juegos de Ordenador, Belleza y Profundidad: el conjunto de Mandelbrot y una hueste de primos suyos de apellidos Julia*; Investigación y Ciencia. Enero 1988.
- [21] Dewdney, A. K.; *Juegos de Ordenador., Un microscopio computarizado escudriña el objeto más complejo de la matemática*; Investigación y Ciencia. Octubre 1989.
- [22] Hages, B.; *Juegos de Ordenador. El autómatas celular ofrece un modelo del mundo y es un mundo por sí mismo*. Investigación y Ciencia. Mayo 1984.
- [23] Dewdney, A. K.; *Juegos de Ordenador, Capturas del día: biformos sobre feselas, con guarnición de palomitas y caracoles*. Investigación y Ciencia. Septiembre 1989.
- [24] Crutchfield, J. P.; Framer, D.; Packard, N. H.; Shaw, R. S.; *Caos*; Investigación y Ciencia. Enero 1985.
- [25] Vivaldi, F.; *An experiment with mathematics*; New Scientist. Octubre 1989

- [26] Butler, A.; *A Methodological Approach to Chaos: Are Economists Missing. The Point?*; Federal Reserve Bank of St. Louis. March-April 1990.
- [27] Bining, G.; Rohrer, H.; *El Microscopio de Efecto Túnel*; Investigación y Ciencia. Octubre 1985.
- [28] Robinson, G. M.; Perry, D. M.; Peterson, W. R.; *Interferometría Óptica de Superficies*; Investigación y Ciencia. Septiembre 1991.
- [29] Lavenda, B. H.; *El movimiento Browniano*; Investigación y Ciencia. Abril 1985.
- [30] Mandelbrot, B. B.; *How Long is the Coast of Britain?. Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension*; Science. Mayo 1967.
- [31] Majumdar, A.; Brushan, B.; *Role of Fractal Geometry in Roughness; Characterization and Contact Mechanics of Surfaces*. Journal of Tribology , Vol. 112, Num. 2, Abril 1990.
- [32] Ingersoll, A. P.; *Models of Jovian Vortices*; Nature, Vol. 331. Febrero 1988.
- [33] Cairns, J.; Overbaugh, J. y Miller, S.; *The Origin of Mutants*; Nature. Vol. 335. September 1988.
- [34] Mont, X. G.; *Un enfoque a los sistemas dinámicos*; Ciencia (1989) 40.

[35] Rañada, A. F.; *Movimiento Caótico*; Investigación y Ciencia. Mayo 1986.

### 3.- ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

[36] Lefebre, Y.; *Surface Fractal Dimensions of Zone Industrial Minerals from Gas: phase adsorption isotherms*. Journal of Materials Research, Vol. 7, Num. 7, Julio 1992.

[37] Hormbogen, E.; *Fractals in Microestructure of Metals*. International Materials Reviews. Vol 34. 1989.

[38] Dubuc, B.; Quimiou, F. B.; Roques-Carmes, C.; Tricot, C.; Zucker, S.W.; *Evaluating the Fractal Dimension of Profiles*; Physical Review. Vol. 39, Num 3. February 1989.

[39] Pfeifer, P.; *Fractal Dimension as Working Tool for Surface-Roughness Problems*. Applications of Surface Science 18 (1984).

[40] Russ, J. C.; *Surface Caracterizacion: Fractal Dimensions, Hurst Coefficients and Frecuency Transforms.*; Journal of Computer - Assisted Microscopy, Vol 2, Num. 3, 1990.

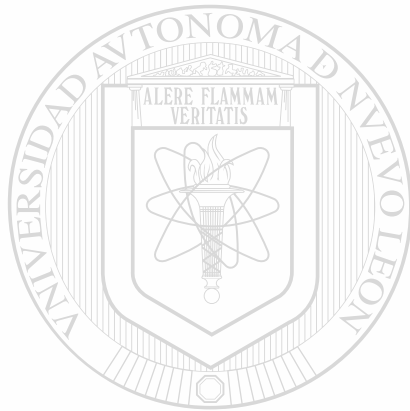
[41] Scott, P. J.; *Nolinear Dynamic Systems in Surface Metrology*; Surface Topography 2 (1989) 345-366.

- [42] Mandelbrot, B. B.; Gafen, Y.; Aharony, A. y Peyriere, J.; *Fractals: Their Transfer Matrices and their Eigen - Dimensional Sequence*. J. Phys. A. Math. Gen. 18 (1985) 335-354. Printed in Great Britain.
- [43] Mitchell, M. W.; Bonnell, D. A.; *Quantitative Topographic Analysis of Fractal Surfaces by Scanning Tunneling Microscopy*; Journal of Materials Research. Vol. 5, Num. 10, October 1990.
- [44] Voss, R. F.; *Random Fractals: Characterization and Measurement; Scaling Phenomena in Disordered Systems*. Vol. 133, 1985.
- [45] Russ, J. C.; *Feature Specific Measurement of Surface Roughness in SEM Images*; Part. Charact. Octubre 1987.
- [46] Kaye, B. H.; *Multifractal Description of Rugged Fineparticle Profile*. Particle Characterizations. (1984)
- 
- [47] Mandelbrot, B. B.; Passoja, D. E.; Paullay, A. J.; *Fractal Character of Fracture Surfaces of Metals*; Nature, Vol. 308, April 1984.
- [48] Srinivasan, S.; Russ, J. C.; Scattergood, R. O.; *Fractal Analysis of Erosion Surfaces*; Journal of Materials Research, Vol. 5, Num. 11, November 1990.
- [49] Shu-Zu Lu ; A. Hellawell ; *An Application of Fractal Geometry to Complex Microstructures: Numerical Characterization of Graphite in Cast Irons*. Acta Metallurgica et Materialia, Vol. 42 , Num.12, Dezember 1994.



#### 4.- TESIS

- [50] García, M. C. J.; *La teoría de caos: algunas implicaciones en el área de la metodología de la ciencia*; Facultad de Filosofía y Letras. División de Estudios de Graduados. U. A. N. L. Enero 1993.



# UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

