CAPÍTULO III

FUNDAMENTOS TEÓRICOS DE LA TEORÍA DE FRACTALES

III.1 Definición Formal de Autosimilitud, Autosimilitud Estadística y Auto-afinidad

En esta sección hablaremos de las propiedades de invarianza (simetría) que tienen los objetos fractales. Sabemos que para un objeto euclidiano las propiedades de simetría pueden ser de traslación, rotación, escalamiento, reflexión, etc. Los fractales también presentan estas propiedades, las cuales nos ayudarán a clasificarlos.

Analicemos la curva de von Koch, figura 4. Esta curva es un conjunto limitado dado que su generación se define en un intervalo finito y es continua. Notamos que si reescalamos la etapa n por una razón r = 1/3 podemos cubrir la etapa (n + 1), al hacer uso de traslaciones así como de rotaciones. A esto se le denomina *autosimilitud*, lo que nos dice es que cierta parte del conjunto en la etapa (n + 1) tiene exactamente la misma forma como la etapa n, siendo la única diferencia la escala. Por lo que se sigue que la curva de von Koch es autosimilar.

Representemos con r la razón de escalamiento mencionada anteriormente, por S al conjunto fractal, y por r(S) al conjunto resultante al aplicar la operación r sobre el conjunto S. Una manera formal de definir la propiedad de autosimilitud es la siguiente:

Un conjunto limitado o no limitado S en el espacio es autosimilar con respecto a la razón r (razón de escalamiento) y a un entero N, cuando S es la unión de N subconjuntos que no se traslapan, cada uno de los cuales es congruente al conjunto r(S) escalado. Congruente significa idéntico en forma y no excluye desplazamientos y/o rotaciones.

Este tipo de propiedad puede ser observada en la curva de von Koch.

A continuación se dan un par de definiciones para otro tipos de conjuntos autosimilares.

Un conjunto limitado S es autosimilar, con respecto a un arreglo de razones $r_{(1)},\ldots,r_{(n)}$, cuando S es la unión de n subconjuntos S_n que no se traslapen, respectivamente congruentes al conjunto $r_{(n)}$ S.

Un conjunto limitado S es estadísticamente autosimilar, con respecto a la razón r, y un entero N cuando S es la unión de N subconjuntos S_n que no se traslapan, cada uno de los cuales es de la forma r (S_n), donde los N subconjuntos S_n son congruentes en distribución a S.

Este tipo de conjuntos aparecen, por ejemplo en una línea costera.

Existen conjuntos fractales que no son autosimilares. Por ejemplo, si queremos estudiar el movimiento browniano (fractal natural) de una partícula, siendo la posición y el tiempo cantidades físicas diferentes, no es posible escalar las dos cantidades con la misma razón de escalamiento; entonces no se puede aplicar el concepto de autosimilitud.

Para poder estudiar dicho tipo de conjuntos necesitamos introducir el concepto de auto-afinidad.

Una transformación afín transforma un punto $X = (x_1, ..., x_E)$ a $X' = (r_1 x'_1, ..., r_E x'_E)$ donde las razones de escalamiento $r_1, ..., r_E$ no son todas iguales. Así la auto-afinidad se define como:

Un conjunto limitado o no limitado S es auto-afin con respecto a la razón vectorial $r = (r_1, \ldots, r_E)$, si S es la unión de N subconjuntos que no se traslapan S_1, \ldots, S_E , cada uno de los cuales es congruente al conjunto r(S).

Este tipo de conjuntos se presentan en el movimiento browniano.

III.2 Dimensión Topológica

El concepto de dimensión no presenta grandes dificultades mientras se trata de figuras sencillas, tales como puntos, rectas, triángulos y poliedros. Un punto único o un conjunto finito de puntos tiene dimensión cero; un segmento rectílineo es unidimensional y la superficie de un triángulo o la de una esfera son bidimensionales. El conjunto de los puntos de un cubo sólido es tridimensional. Pero cuando se trata de extender este concepto a conjuntos más generales de puntos, surge la necesidad de dar una definición precisa.

En 1912, H. Poincaré Ilamó la atención acerca de la necesidad de analizar más profundamente y de dar una definición precisa del concepto de dimensión. Poincaré observó que la recta es unidimensional, debido a que podemos separar dos puntos cualesquiera de ella, cortándola en un solo punto (conjunto de dimensión cero), mientras que el plano es bidimensional, porque para separar dos cualquiera de sus puntos debemos cortarlo a lo largo de una curva cerrada (conjunto de dimensión 1). Esto nos sugiere la naturaleza inductiva de la dimensión topológica: un espacio es n-dimensional, si se pueden separar dos puntos cualesquiera de él suprimiendo un subconjunto de (n-1) dimensiones, mientras no siempre es posible obtener el mismo resultado suprimiendo un conjunto de menos dimensiones. En los Elementos de Euclides aparece una definición inductiva del concepto de dimensión, donde se dice que una figura unidimensional está formada por puntos; es aquella cuya frontera bidimensional si su frontera esta formada por curvas, y tridimensional, aquella figura cuya frontera se compone de superficies [16].

La invención de curvas cerradas que tienen longitud infinita así como curvas que llenan el espacio fue el mejor evento en el desarrollo del concepto de dimensión. Dichas curvas cuestionaban la percepción intuitiva de curvas como

objetos unidimensionales, pero que llenaban el plano. Esta contradicción fue parte de una polémica que llegó a durar varias décadas en el presente siglo. Cuando hablamos de fractales pensamos si existe alguna característica que sea invariante para dichos objetos ya sean matemáticos o naturales y la respuesta es el concepto de dimensión fractal. La dimensión fractal está basada en la definición de dimensión de Hausdorff. El concepto original radica en el estudio de la topología, rama de las matemáticas que esencialmente ha sido desarrollada en este siglo. En topología se estudia la forma y tamaño de conjuntos de puntos desde un punto de vista cualitativo. Existen dos nociones básicas en topología: dimensión y homomorfismo.

En topología una línea recta puede ser deformada y convertirse en una curva cerrada. Una línea recta, un triángulo, un círculo y la frontera de la curva de von Koch, topológicamente son equivalentes.

El número de huecos en un objeto es también topológicamente invariante, esto significa que una esfera puede transformarse en la superficie de una herradura, pero nunca en un toroide. A este tipo de transformaciones las llamamos homomorfismos y cuando se aplican no deben de cambiar las propiedades invariantes de los objetos. Así, una esfera y la superficie de un cubo son homomórficos, pero la esfera y el toroide no lo son.

Una línea recta tiene dimensión uno. Así, desde el punto de vista topológico debemos esperar que la curva de von Koch tenga dimensión uno.

La historia de las distintas nociones del concepto de dimensión, involucra grandes matemáticos de aquel tiempo como H. Poincaré, H. Lebesgue, L. E.J. Brouwer, G. Cantor, K. Menger, W. Huerewicz, P. Alexandroff, L. Pontrjagin, G. Peano, P.Urysohn, E. Cech y D. Hilbert [3].

La dimensión (en el sentido topológico) de un objeto ante una transformación se debía de conservar. Pero más tarde G. Cantor, G. Peano y D. Hilbert crearon conjuntos de puntos y curvas que no cumplían con lo anterior. Dichos objetos matemáticos no se pueden caracterizar por parámetros invariantes.

El problema con estos objetos matemáticos era que la noción de invarianza topológica estaba equivocada. Entre 1890 y 1910 aparecieron pruebas mostrando cómo un espacio de dimensión n y un espacio de dimensión m no son homomórficos cuando n = m. [16].

Existen diferentes nociones del concepto de dimensión , todas ellas son de naturaleza topológica. La más importante es la *dimensión de Hausdorff* y de aquí Mandelbrot se basa para su concepto de dimensión fractal. La dimensión de Hausdorff para una línea recta es uno y para la curva de von Koch es de log 4 / log 3. En otras palabras, la dimensión de Hausdorff sí logra cuantificar el cambio de una línea recta de dimensión uno a la curva de von Koch. Sin embargo log 4 / log 3 = 1.2619.... no es un número entero, la dimensión fraccionaria es típica de los objetos fractales.

III.3 Movimiento Browniano

A principios del siglo XIX, el botánico escocés Robert Brown (1773-1858) descubrió una gota de agua dentro de un trozo de cuarzo. El agua, pensó Brown, debía de haber permanecido inaccesible durante siglos al polen y las esporas transportadas por el viento o la Iluvia. Al enfocar dicha gota en un microscopio, observó trazas de partículas suspendidas en la misma que oscilaban sin cesar con un movimiento completamente irregular. Este movimiento le resultaba familiar a Brown: había observado antes semejante tipo de oscilaciones en sus estudios de granos de polen en agua. Brown concluyó con razón que la agitación de las partículas atrapadas en el interior del cuarzo debía de ser un fenómeno físico y no biológico, pero no pudo llegar a mayores precisiones.

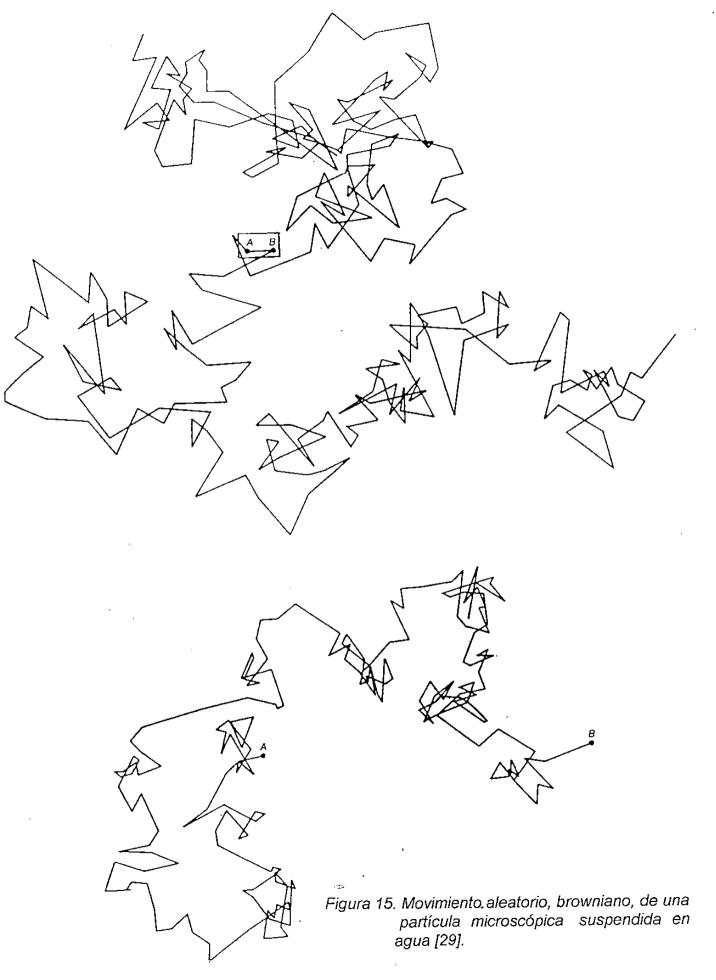
La explicación del movimiento browniano se encuentra hoy bien asentada. Un grano de polen o de polvo suspendido en un fluído se ve sometido al bombardeo continuo de las moléculas de éste. Una sola molécula difícilmente podría tener suficiente impetu para que su efecto sobre la partícula en suspensión lo recogiera el microscopio. Pero cuando muchas moléculas chocan con la partícula en la misma dirección, simultáneamente, producen una reflexión observable de su trayectoria. El movimiento browniano es un efecto doblemente aleatorio: la trayectoria de partícula en suspensión deviene imprevisiblemente en razón de las fluctuaciones arbitrarias de la velocidad de las moléculas circundantes. Por otro lado, como el microscopio es esencialmente un filtro que sólo pone de manifiesto los efectos de fluctuaciones de cierta magnitud en el entorno molecular local, el movimiento observado sólo insinúa la complejidad de la trayectoria real. Si el poder de resolución del microscopio se incrementa en un factor de 10, 100 o 1000, se detectarán los efectos del bombardeo por grupos

progresivamente menores de moléculas. A un mayor aumento, partes de la trayectoria de la partícula que inicialmente habían aparecido como rectas se observarán ahora dotadas de una estructura quebrada e irregular. La trayectoria de una partícula en el movimiento browniano fue uno de los primeros fenómenos naturales en los que se reconoció una autosimilitud a cada grado de aumento, una propiedad clave de los objetos geométricos que Benoit B. Mandelbrot ha denominado fractales [1].

Desde el principio de siglo, el estudio del movimiento browniano ha ejercido una poderosa influencia en física, química y matemática. En manos de Albert Einstein se convirtió en un método de observación concluyente para la confirmación de la teoría atómica de la materia. A. Einstein demostró, además, que la medición de ciertas propiedades del movimiento browniano de las partículas determinaban diversas constantes físicas de importancia: las masas de los átomos, de las moléculas y el valor del número de Avogadro (unidad química estándar de cualquier sustancia). El movimiento browniano también ha contribuido a una comprensión teórica más honda de los principios de la termodinámica, formulados con anterioridad sobre lo que resultaron ser generalizaciones empíricas [29].

En fechas recientes, el estudio del movimiento browniano ha conducido a la invención de importantes técnicas matemáticas para la investigación general de procesos probabilísticos. Dichas técnicas se han aplicado al control del "ruido" electromagnético y han contribuido a la comprensión de la dinámica de agregación estelar, la evolución de ecosistemas y el comportamiento de los precios del mercado [17, 18].

En la figura 15 se reproduce la trayectoria de una partícula con movimiento browniano. En la ilustración superior se muestra tal como fue representada en 1912 por Jean Baptiste Perrin [29]. El diagrama de Perrin registra la posición de la partícula cada 30 segundos; tales diagramas, como él hizo observar, "sólo dan una idea muy pobre de la extraordinaria complejidad de la trayectoria real". Si se considera con más detalle parte de la trayectoria y si la posición de la partícula se registra con una frecuencia 100 veces mayor se producirá la complejidad de la trayectoria inicial. El diagrama inferior se basa en una simulación numérica hecha por B. H. Lavenda [29]. Se trata aquí de un proceso físico y no sólo de un modelo matemático: cada segmento une artificialmente las posiciones sucesivas, en el plano focal de un microscopio, de una partícula sometida a choques moleculares. Si se mira la trayectoria con más detalle, en instantes doblemente próximos, cada salto será reemplazado por dos saltos de longitud total superior. En el modelo matemático, dicho alargamiento continúa indefinidamente y, en consecuencia, la longitud total de la trayectoria es infinita. Por otra parte su superficie es nula. No obstante su dimensión es D=2 y (en cierto sentido) recubre el plano de manera uniforme. Así, el "caos" representado por el movimiento browniano es homogéneo [1].



III.4 Dimensión Fractal

Una característica fundamental de los fractales es su dimensión fractal. Con total independencia del hecho de considerar figuras geométricas obtenidas mediante iteraciones sucesivas, las figuras fractales límite pueden caracterizarse por medio de un concepto de dimensión que es una generalización natural de la idea que todos tenemos de una dimensión espacial.

III.4.1 Definición

Existen varias definiciones distintas del concepto de dimensión fractal, todas las cuales, sin embargo, emanan en mayor o menor medida de un trabajo publicado por Felix Hausdorff (1868-1942) en 1919 [3]. El concepto de dimensión Hausdorff, que trataremos a continuación en forma abreviada es la siguiente: consideremos para empezar objetos familiares, como segmentos de línea, cuadrados y cubos, que tienen dimensión topológica igual a 1, 2 y 3, respectivamente. Dividamos ahora cada uno de ellos en varias partes iguales y establezcamos una relación entre el número a de las partes resultantes y del factor de escala s que convierte a cualquiera de las partes en el todo.

La figura 16 muestra la ley de escala $\mathbf{a} = \mathbf{s}^{\mathbf{p}}$. Si dividimos un segmento en, por ejemplo, tres partes iguales, el total es tres veces más largo que cada porción. Si dividimos un cuadrado en partes iguales, de manera que el lado del cuadrado total sea tres veces mayor que el de los cuadrados en que se divide, se obtienen 32, es decir 9 porciones. Para un cubo obtenemos $\mathbf{a} = 33$ cubitos componentes iguales. La dimensión de la geometría euclídea clásica, dada por un

exponente entero, aparece también en las unidades de longitud usuales: metro lineal = m^{1} , metro cuadrado = m^{2} , metro cúbico = m^{3} .

Como el factor de escala \mathbf{s} es 3 en cada dimensión, resulta una ley del tipo $\mathbf{a} = \mathbf{s}^{\mathbf{p}}$, en el que \mathbf{D} es la dimensión. Tomando logaritmos a ambos lados de esta igualdad y despejando \mathbf{D} , obtenemos la dimensión como cociente de dos logaritmos:

$$D = \log a / \log s$$

Lo interesante de esta igualdad es el hecho de que la definición de dimensión no queda limitada a la consideración de espacios n dimensionales ordinarios (con n entero), ni a elementos de la geometría euclidiana, sino que abarca de manera inmediata todo tipo de objetos autosimilares.

La figura 17 muestra algunos fractales clásicos. Dividamos los objetos en partes iguales y expresemos el número de partes en función del factor de escala de acuerdo con la ley $\mathbf{a} = \mathbf{s}^{\mathbf{p}}$. Despejando \mathbf{D} obtenemos $\mathbf{D} = \log \mathbf{a} / \log \mathbf{s}$. Aquí se ilustra este resultado para los casos particulares del conjunto de Cantor, de la curva de Koch, del triángulo de Sierpinski y, finalmente, de una curva que llena el plano, la llamada curva de Peano. Como puede observarse en la tabla de la figura 17, la dimensión que corresponde a la mayoría de estos objetos es fraccionaria (de ahí el nombre de fractales). Esta es, pues, la razón del nombre que les dio Mandelbrot en los años setenta y que hace referencia a la palabra fracción, derivada a su vez del verbo latino *frangere*, que significa romper.

		NUM: PO a	F: TC: DE - / As	LEY
<u></u>	SEGMENTO	3	30	3.0' = 3
	CUADRADO	G	3,0	3,0 ² = 9
	CUBO	27	0 د	3.0 ³ = 27

Figura 16. Concepto intuitivo de dimensión [17]

	NUMERO a	FACT R DE ESCALA s	DIMENSION D
CONJUNTO DE CANTOR	2	3.0	log 2/log 3 = 0,631
CURVA DE KOCH	4	3.0	log 4/log 3 = 1,262
TRIANGULO DE SIERPINSKI	3	2.0	log 3/log 2 = 1.585
CURVA DE PEANO	9	3.0	log 9/log 3 = 2.0

Figura 17. Dimensión fraccionaria como exponente [17].

III.4.2 Método de Conteo de Cuadros

Introducción

Este método de conteo de cuadros desarrollado por Mandelbrot para obtener la dimensión fractal está basado en el concepto fundamental de dimensión de Hausdorff, dicho método es el que más aplicaciones tiene en ciencias e ingeniería.

El método de conteo de cuadros está relacionado con el concepto de autosimilitud, esté método es un proceso de medición sistemático que se aplica a cualquier estructura.

Procedimiento

La idea fundamental que asumiremos es que dos cantidades -longitud, superficie o volumen por un lado y la escala por otro- no varían arbitrariamente, sino que están relacionadas por una ley. Dicha ley es relevante para nuestra definición de dimensión fractal y es una ley de potencia de la forma $\mathbf{a} = \mathbf{s}^p$. Existen varias formas de determinar la dimensión fractal de un objeto. La más práctica para nuestros fines es la que está basada en el *método de conteo de cuadros*.

Para calcular la dimensión fractal con este método, ponemos la estructura dentro de una malla regular con un tamaño de malla de arista **s** y simplemente contamos el número de cuadros que contienen algo de la estructura, esto nos da un número, digamos **N**, el cual depende de cómo hallamos escogido el tamaño **s**.

Luego podemos escribir N(s). Procedemos a cambiar s a tamaños progresivamente más pequeños y contamos el número correspondiente N(s). Graficamos las mediciones en un diagrama:

$$\log N(s)$$
 vs. $\log(s)$

denotando al eje horizontal por log(s) y al eje vertical por log(s), en dicha gráfica se obtiene un conjunto de puntos que si se dispersan aproximadamente sobre una línea recta entonces el objeto que se mide presenta características fractales.

III.4.3 Diagramas de Richardson

El método clásico para la medición de la dimensión fractal de una frontera sobre una sección plana es producir un diagrama de Richardson. Gráficas de este tipo se muestran en las figuras 18 y 19. Obsérvese en la figura 18, cómo la longitud de algunas fronteras entre países tiende a infinito a medida que decrece la unidad de medida, dichas gráficas fueron publicadas por primera vez en 1961 [1]. En la figura 19 se presenta una versión modificada de la diagramas de Richardson.

Para el cálculo del perímetro de una frontera de grano, el perfil puede ser digitalizado y archivado en la memoria de una computadora. Trazando el perímetro con la máxima resolución posible, se producen un conjunto de coordenadas que son aproximada e igualmente espaciadas a lo largo de la línea en la frontera. Se obtiene la distancia a lo largo del perímetro para diferentes magnificaciones.

Continuando con el proceso, se producen una serie de puntos en el diagrama de Richardson, se toma el valor de la pendiente y así la dimensión fractal se obtiene [17,39]. Este proceso se ilustra en la figura 20 y en la figura 21.

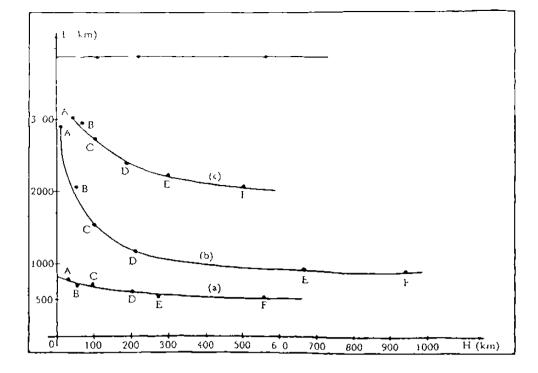


Figura 18. Valores de la longitud L de varias curvas al cambiar la longitud de la unidad de medida H, según L. F. Richardson [1].

- (a) Frontera entre Portugal y España.
- (b) Costa occidental de Gran Bretaña.
- (c) Frontera terrestre alemana (1900).
- (d) Perimetro de un circulo.

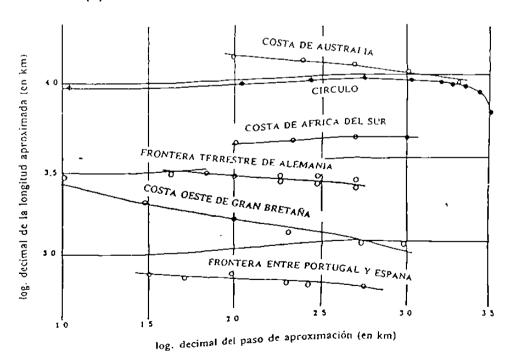


Figura 19. Gráfica tipo Richardson, log-log, la pendiente de cada gráfica es 1-D, donde D es la dimensión fractal [1].

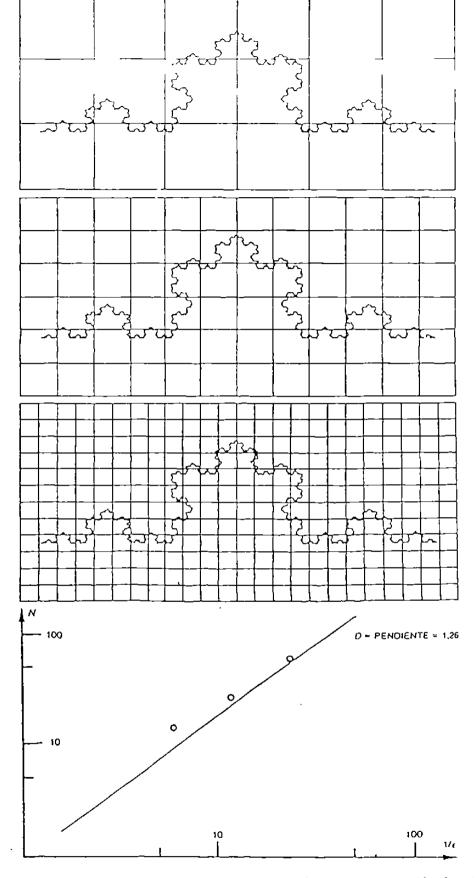


Figura 20. Ilustración para la determinación de la dimensión fractal por el método de conteo de cuadros [17].

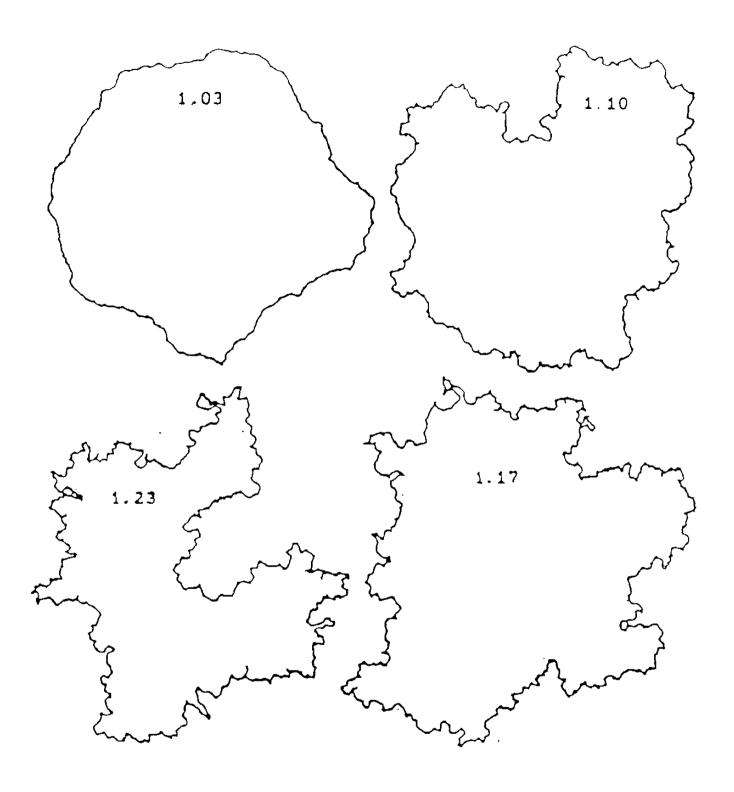


Figura 21. Diferente grado de rugosidad o irregularidad en la frontera y su correspondiente dimensión fractal [40].

En la figura 22 se muestra un ejemplo típico de una forma irregular. La medida del perímetro o área de un objeto se obtiene contando el numero de cuadros unitarios o el total de cuadros a través de una sección de la fronters de grano. Los resultados de las formas irregulares se encuentra que dependen del grado de calibración o del tamaño del pixel que es usado, dentro de un dominio dado. La geometría euclidiana convencional no es adecuada para describir objetos irregulares.

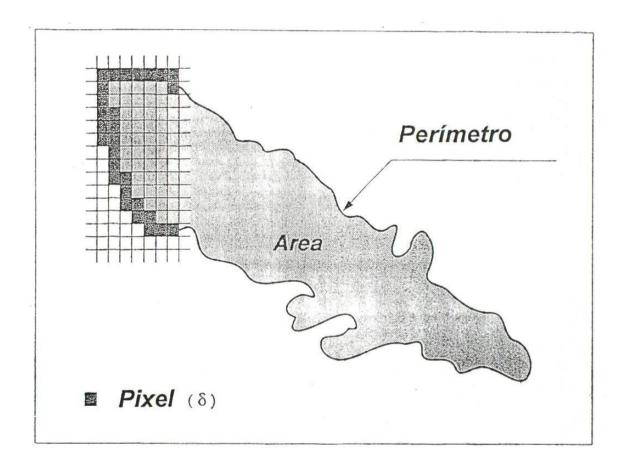


Figura 22. Ilustración de la medida del perímetro y del área de una forma irregular usando pixeles de tamaño δ [49].

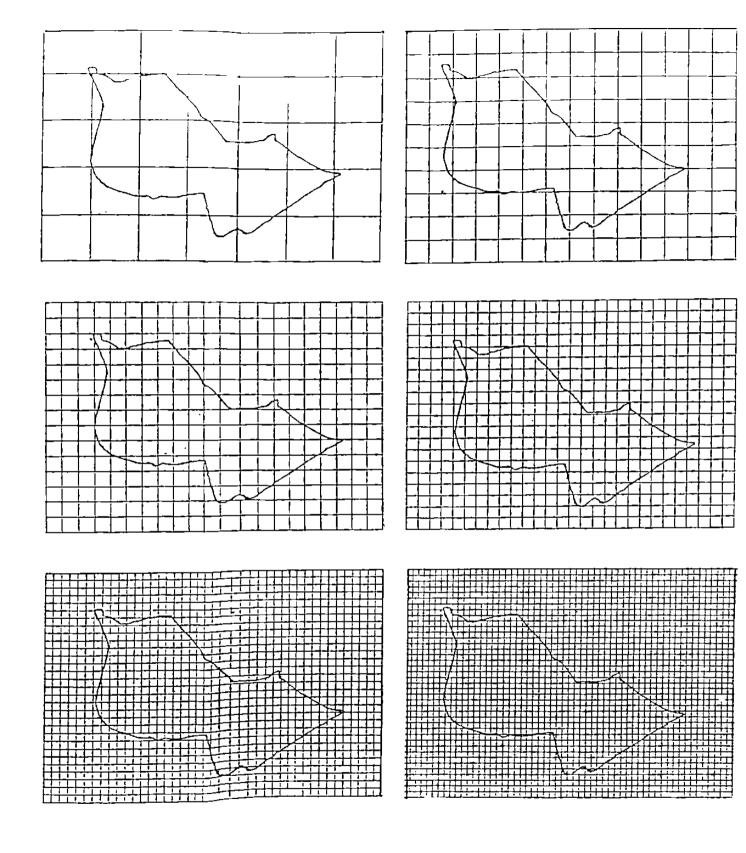


Figura 23. Ilustración del método de conteo de cuadros en la medición del perímetro de la frontera de grano de una aleación AISI 316L.

CAPÍTULO IV

MEDICIÓN DE LA DIMENSIÓN FRACTAL. UNA APLICACIÓN A LA INGENIERÍA DE MATERIALES

IV.1 Ingeniería de Materiales

En Ingeniería de Materiales es importante conocer las propiedades mecánicas, físicas y químicas de los materiales y sus aleaciones. Para tal fin es necesario conocer la microestructura de los mismos, esto se logra por medio de estudios y análisis basados en técnicas de microscopía óptica, microscopía electrónica de barrido, microscopía de tunelamiento, microscopía de fuerza atómica, etc. En la figura 25 y 29 se pueden observar diferentes tipos de microestructura para diferentes materiales; por medio de técnicas cuantitativas se puede predecir las propiedades de los mismos. Los materiales cuando solidifican presentan diferentes tipos de defectos tales como grietas, poros, huecos, etc. Uno de los defectos de importancia para la predicción de las propiedades es lo que se conoce como fronteras de grano.

IV.2 Fronteras de Grano

Los materiales cuando solidifican lo hacen por conglomerados de moléculas de algún material específico, dichos conglomerados crecen en diferente dirección, al chocar (puesto que su dirección no coincide) se crea un defecto que se conoce como frontera de grano. Lo importante ahora es tener un parámetro que caracterice dicha frontera. Para observar, analizar y medir las fronteras de grano es necesario preparar algunas muestras de los materiales a estudiar.

IV.3 Preparación de las Muestras

Se prepararon las muestras de acero inoxidable 316L, según el procedimiento siguiente: se cortan pequeños pedazos del material a estudiar, aproximadamente un área de 1cm² es suficiente. Se pulen las muestras con lijas de diferente calibre hasta que se les da un acabado espejo. Se atacaron con un reactivo químico conocido como Beraha (0.5 gramos de bisulfito sódico, NaHSO3, 15 ml de ácido clorhídrico, HCI, 35 ml de agua, H₂O) y ácido oxálico electrolítico (10 gramos de ácido oxálico, 100 ml de agua, fuente de voltaje 6 volts), con estos ataques se revelaron adecuadamente las fronteras de grano; las muestras del acero bajo carbono se atacaron con nital al 2% (2% ácido nítrico, alcohol etílico). Se eligieron algunos granos a diferentes magnificaciones, las imágenes de estos fueron digitalizadas y archivadas. Con un sistema de análisis de imágenes automático, QUANTIMET 520, se midieron las estructuras. La

ventaja de dicho sistema es su alta resolución, ya que el rango del factor de calibración es de 1.9 a 0.2 micrones por pixel, mientras que otros, por ejemplo el sistema LECO 2001 tiene un rango de 3.2 a 0.3 micrones por pixel, para el mismo grado de magnificación [50]. El muestreo de la población se hizo de manera aleatoria. Posteriormente se eligió una imagen de un grano en alguna de las magnificaciones. Se prepara la imagen delineando adecuadamente la frontera, se calibra el analizador de imágenes de acuerdo a la magnificación en cuestión y se mide la longitud de la frontera de grano. Se repite la operación para cada una de las otras magnificaciones. Se toman como coordenadas el factor de calibración y la longitud de la frontera de grano, estas coordenadas son presentadas en una gráfica log-log. Se mide luego la pendiente de la recta la cual corresponde a la dimensión fractal de la frontera de grano.

Se ha visto que la ley de potencia para cuando dividimos objetos en partes iguales es

$$a = sD$$

donde

a : número de partes que forman el objeto total

s: factor de escala

D: dimensión fractal

En 1961, L. F. Richardson [1] descubrió, cuando media la longitud de las fronteras entre países, una ecuación matemática de manera empírica que relaciona la longitud de una frontera con irregularidad pronunciada y la longitud de la unidad de medición, dicha ecuación tiene la siguiente forma:

$$L(\varepsilon) = \varepsilon 1-D$$

donde

 $L(\varepsilon)$: longitud total de la frontera

ε: longitud de la unidad de medida

D: constante empírica que depende de la frontera que se mida.

Mandelbrot ha demostrado [1] que las dos ecuaciones anteriores son equivalentes y que la constante empírica de Richardson es en realidad lo que él llama dimensión fractal

En el presente trabajo se sigue la metodología tipo Richardson para el cálculo de la dimensión fractal, puesto que se va a medir fronteras de grano con cierta irregularidad.

IV.4 Acero Inoxidable 316L

Los aceros inoxidables son aleaciones base hierro con diferente porcentaje de cromo. Con el incremento de cromo se logra una resistencia adecuada a la corrosión.

Existen cinco familias de aceros inoxidables de acuerdo a su estructura cristalográfica: ferríticos, austeníticos, dúplex, martensíticos y los endurecidos por precipitación. En el presente trabajo se caracteriza un acero inoxidable AISI 316L (American Institute Steel Iron) con grano austenítico, con una estructura cúbica centrada en las caras. También se caracteriza un acero de bajo contenido de carbono.

De un tubo de 4 pulgadas de diámetro se obtuvieron varias probetas de acuerdo a la norma ASTM A370. Las muestras fueron preparadas metalográficamente para su análisis. Las magnificaciones usadas fueron 50, 100, 200 y 400X y los factores de calibración fueron 1.904, 0.952, 0.479 y 0.236 micrones por pixel, respectivamente.

IV.4.1 Composición Química

Los porcentajes en peso de los elementos constitutivos del acero AISI 316L son los siguientes:

Cr	Ni Ni	Мо	Mn	С
17	12.7	2.1	1.5	0.01

Algunas muestras fueron atacadas con cloruro férrico y otras con ácido pícrico. Dichos ataques no fueron apropiados pues no revelaban adecuadamente la frontera de grano, como se puede observar en la figura 24.



Figura 24. Acero AISI 316L, ácido pícrico, 100X.

IV.4.2 Ataque Químico

Después de que se prepararon las muestras adecuadamente se procedió al ataque químico. Los reactivos más adecuados fueron Beraha y ácido oxálico electrolítico. Esto se muestra en la figura 25, figura 26 y figura 27.



Figura 25. Acero AISI 316L, Beraha, 200X.

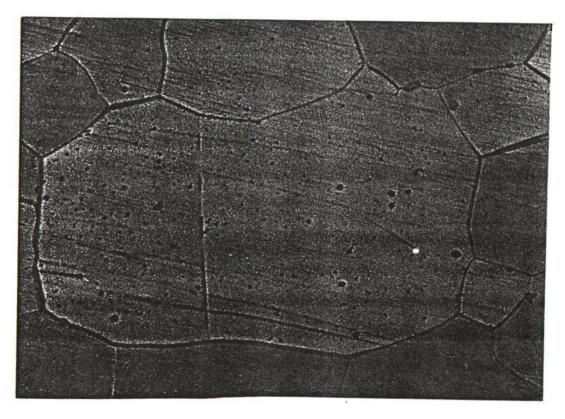


Figura 26. Acero AISI 316L, Beraha, 400X.

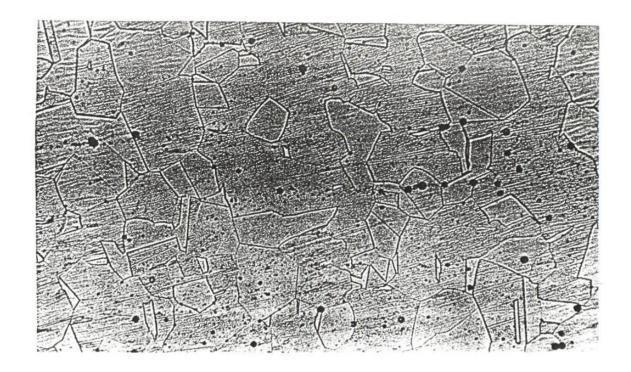


Figura 27. Acero AISI 316L, oxálico electrolítico, 100X.

IV.4.3 Dimensión fractal

La dimensión fractal del acero AISI 316L se presenta en la figura 28.

En dicha figura se grafica la longitud del perímetro de la frontera de grano vs. el factor de calibración, obtenidos ambos parámetros del sistema de análisis de imágenes automático. Los cuatro puntos marcados en cada una de las gráficas corresponden a la medición hecha de los perímetros de frontera de grano para cada unas de las magnificaciones empleada (50, 100, 200, 400X).

En la tabla 1 se presentan los resultados de la regresión obtenidos de los valores de la longitud a diferentes magnificaciones . También se muestra en dicha

tabla las magnitudes de factor de ca bración en micrones por pixel correspondiendo cada valor a las diferentes magnificaciones. También se presentan las longitudes de los perímetros de la frontera de grano en micrones para cada una de las magnificaciones correspondientes.

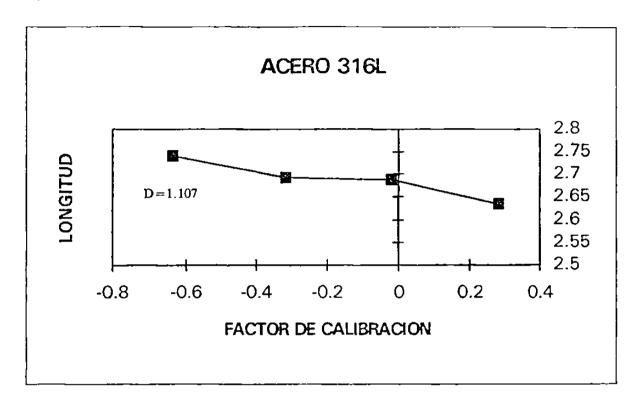


Figura 28. Gráfica Richardson log-log ilustrando la dimensión fractal del acero AISI 316-L

Di	atos	Resultados de la Regresión.				
Factor de	Longitud de					
Calibración (µ/Pixel)	Frontera (µ)				Coeficientes	Error Estándar
1.916	430	R	0.96245185	Intersección	2.670000002	0.0081334
0.958	487	Error Estándar	0.01453101	x1	-0.10674669	0.02128895
0.485	492				***************************************	
0.231	550					

Tabla 1. Resultados de la regresión de la gráfica anterior.

IV.5 Acero de Bajo Carbono

Las muestras para las mediciones para el acero bajo carbono se obtuvieron de lámina rolada en caliente.

IV.5.1 Composición Química

Los porcentajes en peso de los elementos que forman el acero bajo carbono son los siguientes:

С	Mn	Р	S	Cu	Ni	Cr
 0.04	0.21	0.012	0.031	0.09	0.04	0.053

IV.5.2 Ataque Químico

El reactivo para el ataque químico más adecuado fue nital al 2% y se obtuvo la microestructura que se muestra en la figura 29.

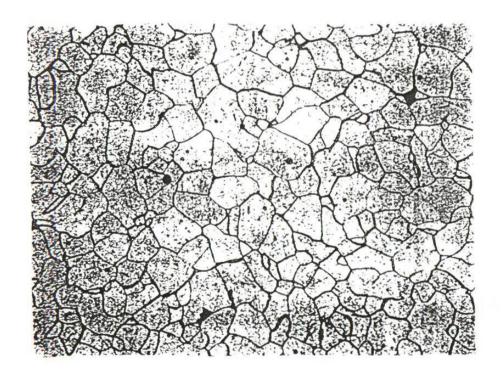


Figura 29. Acero bajo carbono, nital al 2%, 100X.

IV.5.3 Dimensión Fractal

La dimensión fractal para el acero bajo carbono se presenta en la figura 30.

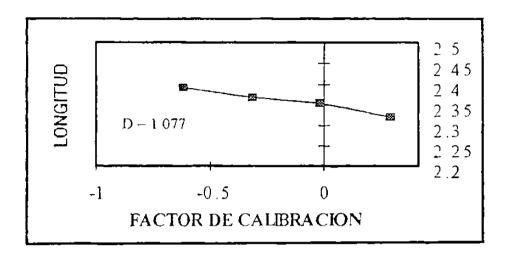


Figura 30. Grafico de Richardson log-log ilustrando la dimensión fractal del acero de bajo carbono sin deformación.

D	atos	Resultados de la Regresión.				
Factor de	Longitud de					
Calibración (J/Pixel)	(در) Frontera	•		Ī	Coeficientes	Error Estándar
1.916	209	R	0.98847265	Intersección	2 34580171	0 00316269
0 958	226	Error Estándar	0 0056786	x1	-0 07754555	0 0083985
0 485	234					
0 231	247					

Tabla 2 . Resultados del análisis de regresión utilizado para el cálculo de la dimensión fractal reportada en la figura anterior.

IV.6 Discusión de Resultados

En el presente capítulo se analizaron y se caracterizaron por geometría fractal dos tipos de aceros: AISI 316L y acero bajo carbono.

Existen gran variedad de reactivos con los que se puede atacar al acero inoxidable. No cualquier ataque es adecuado para revelar fronteras de grano en dicho acero. En este trabajo se aplicaron los siguientes reactivos: Villela, óxido férrico, ácido pícrico, Beraha y oxálico electrolítico. Los ataques que revelaron mejor la frontera de grano fueron el Beraha y el oxálico electrolítico. Se eligieron las muestras atacadas con este último reactivo por presentar una mejor contrastación negro-blanco en la frontera de grano y en el grano mismo, respectivamente. Esto facilita la medición en el sistema analizador de imágenes automático.

Al hacer el ataque con ácido oxálico electrolítico se inició con concentración de 3 gramos de ácido por 100 ml de agua. El ataque fue adecuado, pero muy lento. Se cambió de concentración a 6 gramos de ácido oxálico con la misma cantidad de agua; se delineaba más rápido la frontera de grano pero simultáneamente se presentaban imperfecciones tales como picaduras en la frontera y en el grano mismo. Esto no es adecuado cuando se hacen mediciones en un sistema de análisis de imágenes. Luego se cambió a concentraciones mayores, 10 gramos de ácido oxálico por 100 ml de agua; las fronteras de grano se delineaban bien pero aparecían de forma inmediata picaduras profundas. Se decidió atacar el acero inoxidable con la primer concentración.

Las fronteras de grano observadas, analizadas y medidas tanto para el acero inoxidable como para el acero bajo carbono presentan características propias diferentes. En las fronteras de grano del acero inoxidable se observó una geometría más regular que en el acero bajo carbono. Esto coincide con los resultados cuantitativos obtenidos. Se eligieron aleatoriamente diferentes zonas de granos tanto del acero inoxidable como del acero bajo carbono para realizar el estudio.

Para ambos aceros se eligieron cuatro imágenes de frontera de grano para cada magnificación, 50, 100, 200 y 400X. El cálculo de la media y de la desviación estándar de la dimensión fractal se obtuvo de 9 granos a los cuales se les midió su frontera de grano para cada uno de ellos. Se hizo dicho cálculo al especímen sin deformación. En total se analizaron y se midieron perímetros de frontera de grano de 56 imágenes considerando también las imágenes del acero al bajo carbono.

La microestructura austenita del acero inoxidable 316L, así como la microestructura ferrita de un acero bajo carbono presentan en la frontera de grano características de irregularidad las cuales pueden ser caracterizadas por medio de fractales. En el presente trabajo no se consideró ningún tipo de imperfección para la caracterización de los mismos. Se eligieron los granos mejor delineados en su frontera, ello facilita el cálculo de la longitud de la frontera puesto que deben elegirse granos sin imperfecciones por ataque químico.

Las mediciones de los perímetros de las fronteras de grano realizadas en aceros AISI 316L y de bajo carbono nos muestran que dichos aceros presentan características fractales.

Lo que se observa en la figura 28, es un resumen del comportamiento de la dimensión fractal para el acero inoxidable sin deformacion. Nótese que la gráfica ha sido obtenida de un diagrama de Richardson, log-log, en el cual se relaciona de manera aproximadamente lineal el perímetro o longitud de frontera de grano contra factor de calibración.

El cálculo estadístico muestra una media en la dimensión fractal para el acero AISI 316L de 1.078±0.0006 con una desviación estándar de 0.00087. Y para el acero bajo carbón una media en la dimensión fractal de 1.100±0.002 con una desviación estándar de 0.0019 (ver figura 28). Dichos resultados son indicadores de un grado de irregularidad mayor en el acero bajo carbono que en el acero AISI 316L.

CAPÍTULO V

IMPLICACIONES METODOLÓGICAS DE LA TEORÍA DE FRACTALES

La teoría de fractales ha sido aplicada en diferentes áreas de la ciencia e ingeniería con bastante aceptación. La teoría de fractales es una disciplina en crecimiento, que se sigue enriqueciendo con nuevas aportaciones surgidas de diversas investigaciones. La lista de publicaciones que reportan resultados positivos crece cada día, aunque la teoría de fractales aún se encuentra lejos de tener una forma acabada, e igualmente sus alcances están por descubrirse.

El gran desarrollo tecnológico de los últimos años, en lo que se refiere a física del estado sólido y como consecuencia de ello a la electrónica, ha influído para que existan sistemas de medición y procesamiento de información más adecuados para la obtención de resultados más exactos y con mayor rapidez. Sin este desarrollo tecnológico la teoría de fractales hubiera tardado más en ver la luz. Los objetos fractales ya estaban implícitos en la matemática de la gran crisis 1875-1925, el problema de la dimensión matemática ya estaba resuelto por Hausdorff en 1919; el desarrollo de las de las computadoras (capacidad de memoria y velocidad de procesado) era necesario para que emergieran los objetos fractales.

La matemática de finales del siglo pasado estaba completamente basada en la axiomatización de la geometría de Euclides, todas las áreas de la matemática emanaban de dicha metodología. Cuando se crean curvas que no tienen derivadas en ningún punto o curvas que no son rectificables (Cantor, Sierpinski, von Koch Peano, Hilbert, etc.), la geometría euclidiana no puede resolver el problema de caracterizarlas por medio de un parámetro invariante. Es

necesario una generalización más amplia y adecuada del concepto de dimensión. En este sentido decimos que los objetos fractales estaban ya implícitos en la matemática. Al final del siglo XIX se crean nuevas geometrías para elucidar problemas que con la geometría de Euclides no era posible resolver; por un lado el matemático ruso Nikolai Ivanovich Lobachevski (1793-1856) quien publica su obra en 1829 y el matemático húngaro Janos Bolyai (1802-1860) exponía sus ideas en 1826. El matemático alemán Georg Friedrich Riemann (1826-1866) creó en 1854 otro tipo de geometría no euclidiana diferente a la concebida por los matemáticos anteriores. Aun así dichas geometrías no resolvían el problema de determinar cuánto espacio es llenado por conjuntos de puntos, curvas, superficies o volúmenes. El gran mérito de Mandelbrot fue la aplicación del concepto de dimensión debido a Hausdorff, y es así como nace una nueva geometría y una gran herramienta para caracterizar determinados objetos.

La teoría de fractales ha puesto en tela de juicio a la axiomatización euclidiana, la cual prevaleció por más de veinte siglos e influyó en el desarrollo de todas las áreas de las matemáticas. Esta teoría viene a complementar el hueco que había en matemáticas con respecto a la caracterización de objetos con cierto grado de irregularidad.

Dos de los acontecimientos que marcaron un cambio radical en la forma de pensar de los científicos, en el área de ciencias naturales, es el nacimiento y desarrollo de la mecánica cuántica y de la teoría especial de la relatividad. En seguida se hace un breve resumen de las implicaciones metodológicas de ambas teorías para después cotejarlas con las implicaciones de la teoría de fractales.

La teoría cuántica nace como una consecuencia de la catástrofe ultravioleta, la cual es explicada a continuación

La capacidad de un cuerpo para emitir radiación está estrechamente relacionada con su capacidad para absorberla, ya que un cuerpo a temperatura constante está en equilibrio térmico con su medio ambiente y debe de absorber energía en la misma proporción con que la emite. Así, un cuerpo ideal se define radiación como aguel absorbe toda la que incide sobre que independientemente de las frecuencias con que se emitan. Un cuerpo tal recibe el nombre de cuerpo negro. Un cuerpo negro, al absorber todas las frecuencias de luz cuando se calienta, las debe emitir, pero se encontró que el número de frecuencias es más grande en la extensión de las altas que de las bajas. Si un cuerpo negro emitía radiaciones electromagnéticas de todas las frecuencias entonces, toda la energía se irradiaría virtualmente en alta frecuencia . A este fenómeno se le conoce como la <<catástrofe ultravioleta>>, porque la radiación emitida a frecuencias muy altas, dentro del espectro de la luz visible es el violeta. W. Wien (1864-1928) v J. Rayleigh (1842-1919) trataron de establecer ecuaciones que explicaran cómo se distribuía la radiación del cuerpo negro. La ecuación de Wien se ajustaba perfectamente a las frecuencias altas, pero no a las bajas. Por el contrario, la de Rayleigh se ajustaba a las bajas pero no a las altas. Una acción atrevida, debido a la desesperación de Max Karl Ernest Ludwing Planck (1858-1947) trajo la solución .

En 1900 Planck se las arregló para conseguir una ecuación relativamente simple que describía con precisión la distribución de emisión de radiación de las diversas frecuencias. Se basaba en la suposición decisiva de que la energía no es divisible indefinidamente. Como la materia estaba formada por partículas, Planck les dió a estos paquetes de energía el nombre de cuantos (del latín quantus) o en singular, cuanto.

La repercusión que tuvo este hecho dentro de la metodología de la física clásica fue de efectos revolucionarios, y cambió radicalmente la forma de pensar de los científicos. Luego, la corroboración de este acontecimiento por parte de A.

Einsten (efecto fotoeléctrico) y de N. Bohr (líneas espectrales del átomo de hidrógeno) trajo como consecuencia la revisión de la forma de concebir el universo según la física clásica.

Albert Einstein (1879-1955) con su Teoría Especial de la Relatividad publicada en 1905, parte de la invarianza de la velocidad de la luz, y con ello echó por abajo el concepto de *el éter*. Después explica los resultados negativos del experimento de Michelson-Morley; explicó también el efecto de la contracción de FitzGerald y el efecto de aumento de masa de Lorentz. Con la Teoría de la Relatividad Especial, la cual establece que <<todo movimiento es relativo >>, deja de existir el concepto de sistema de referencia absoluto. Esta teoría establece también que el transcurso del tiempo de algún evento variaba con la velocidad del movimiento del sistema de referencia y así se tenía que prescindir de las nociones de simultaneidad. Así, el espacio y el tiempo se desvanecieron como entidades separadas, fundiéndose en una sola: <<espacio-tiempo>>.

La teoría de fractales no trae cambios tan drásticos como las teorías arriba mencionadas, no se tienen que revisar conceptos básicos dentro de la matemática ni de la física, ni de ninguna otra ciencia.

La teoría de fractales trae como consecuencia una nueva geometría la cual es más adecuada para el análisis de la naturaleza. Después de conocer la teoría de fractales cambia nuestra manera de ver el mundo. Muchas estructuras naturales (como, por ejemplo, las nubes, las montañas, las líneas de las costas o las grietas tectónicas, los pequeñisimos capilares sanguíneos, las superficies de ruptura de los materiales, etc.) que aparentan tener una complejidad extraordinaria, poseen en realidad una misma regularidad geométrica la cual es caracterizada por la dimensión fractal.

Actualmente se aplica la teoría de fractales a diversas áreas tales como ingeniería de materiales, especificamente: microestructura de metales, superficies de ruptura, rugosidad de superficies por desgaste, caracterización de partículas finas, ya sean polvos metálicos o cerámicos. En biología se ha aplicado en la caracterización de: el crecimiento de colonias de bacterias, retina humana, área superficial de la masa del cerebro. En el arte, por medio de fractales, se han analizado imágenes artisticas de diferentes pintores. En fisiología se ha caracterizado: la flora intestinal, el espacio ocupado por las arterias del cuerpo humano, las neuronas, etc. En percepción remota se ha empleado para la caracterización de: uso de suelo, montañas, valles, etc. En química se ha aplicado en: absorción, catálisis, agregación limitada por difusión, crecimiento de depósitos electrolíticos, etc. [3].

En 1962 Thomas S. Kuhn publicó una de las obras más influyentes en la filosofía de la ciencia, *The Structure of Scientific Revolutions* [50]. Su tesis central es:

Las revoluciones científicas son aquellos episodios de desarrollo no acumulativos en los cuales un paradigma anterior es reemplazado, todo o en parte, por un paradigma nuevo e incompatible

donde los paradigmas se definen como

ejemplos aceptados de la práctica científica en curso - ejemplos que incluyen leyes, teoría, aplicaciones e instrumentación - que proporcionan modelos de los cuales surgen tradiciones coherentes particulares de investigación científica.

Por todo lo anterior, se puede decir que la teoría de fractales no representa una revolución científica en el sentido de Thomas S. Kuhn, pero sí representa un nuevo paradigma en el sentido que le otorga dicho autor.

CAPÍTULO VI

CONCLUSIONES

La geometría de Euclides no es adecuada para la caracterización de los objetos fractales matemáticos y naturales pues en dicha geometría se define de un forma muy limitada el concepto de dimensión.

La geometría fractal es una nueva geometría más completa que la euclidiana, define adecuadamente el concepto de dimensión el cual es aplicado a todo clase de objetos: matemáticos, naturales, regulares e irregulares.

No todos los objetos presentan características fractales. Para afirmar que un objeto es fractal es necesario aplicar la geometría adecuada y así determinar su dimensión fractal. Así, esta nueva geometría es la adecuada para la caracterización de los objetos que presentan diferentes grados de irregularidad.

Con el análisis de curvas matemáticas en el año de 1890, que presentaban características tales como: longitud infinita, se inicia la formalización del concepto de dimensión que culmina con la definición debida a Hausdorff en 1919. Al aplicar de una manera concreta dicha definición emergen los objetos fractales.

La teoría de fractales como parte de sistemas dinámicos no-lineales viene a complementar las matemáticas clásicas las cuales no se apegaban a fenómenos naturales reales. Los modelos matemáticos anteriores al desarrollo de dichas disciplinas, eran meras aproximaciones a condiciones ideales.

La teoría de fractales se ha aplicado a diferentes disciplinas con resultados positivos. Se han ido formalizando en lenguaje matemático los conceptos que sustentan la dicha teoría. Nuevas definiciones para la caracterización de objetos matemáticos y naturales han emergido, las cuales no existían hasta el descubrimiento de los objetos fractales.

En ingeniería de materiales se estudian las propiedades mecánicas, físicas y químicas de las diferentes aleaciones que existen. En la formación de los materiales se presentan diversos defectos. Se decidió elegir la geometría fractal por ser la más adecuada para la caracterización de las fronteras de grano en dos materiales diferentes.

Por técnicas y procedimientos empleados en ingeniería de materiales se llegó a determinar que el acero inoxidable AISI 316L y el acero de bajo contenido de carbono AISI 1006 presentan características fractales puesto que se determinó su dimensión fractal.

El nacimiento y desarrollo de la teoría cuántica tuvo como consecuencia que las ideas clásicas de determinismo, continuidad de energía, interacción de la luz con la materia y el fenómeno de irradiación llegaran a ser modificadas drásticamente. Así, dichos fenómenos fueron explicados por los nuevos conceptos introducidos por dicha teoría. La teoría de la relatividad especial ataca las ideas clásicas de acción a distancia, simultaneidad, sistema de referencia absoluto, etc. La creación de esta nueva teoría influye en los científicos a revisar los antiguos conceptos de espacio y tiempo y adaptar las nuevas ideas para la explicación de los fenómenos reales que existen tanto a nivel microscópico como macroscópico. La teoría de fractales, a diferencia de las teorías arriba mencionadas, es consecuencia de estudios bien definidos y caracterizados en el área de matemática pura y aplicada. Dicha teoría no cambia ningún concepto antiguo y se basa en el concepto de dimensión, el cual ya estaba completamente

caracterizado en 1919. Es importante hacer notar que la teoría de fractales es una nueva herramienta para poder explicar fenómenos que anteriormente era dificil de caracterizar por el grado de irregularidad que presentaban. La teoría de fractales viene a redondear la geometría que era necesaria para elucidar fenómenos reales que presentaban un grado de complejidad elevado, pero aún no podemos predecir la magnitud de su aplicación ni su alcance explicativo.

Cotejando la teoría de fractales con las teorías antes mencionadas, por ser las más actuales, dicha teoría no representa una revolución científica en el sentido de T. S. Kuhn.

BIBLIOGRAFÍA

1.- LIBROS

- [1] Mandelbrot, B. B.; *The Fractal Geometry of Nature*; W.H Freeman and Company New York (1983).
- [2] Barnsley, M.; Fractals Everywhere; Academic Press, Inc, (1988).
- [3] Peitgen, H. O.; Jurgen, H.; Saupe, D.; Chaos and Fractals; Springer-Verlag, (1992).
- [4] Peitgen, H O.; Jurgen, H.; Saupe, D.; Maletsky, E.; Perciante, T.; Yunker, L.; Fractals for the Classroom: Strategic Activities. Vol I y II; Springer-Verlag, (1991).
- [5] Devaney, R. L.; Chaos, Fractals and Dynamics; Addison-Wesley, (1990).
- [6] Barnsley, M. F.; Devaney, R. L.; Mandelbrot, B. B.; Peitgen, H O.; Saupe, D; Voss, R. F.; *The Science of Fractals Images*; Springer-Verlag, (1988).
- [7] Peitgen, H O.; Ritcher, P. H.; *The Beauty of Fractals*; Springer-Verlag, (1986).
- [8] Falconer, K.; Fractal Geometry; John Wiley and Sons, (1990).

- [9] Rietman, E.; Exploring the Geometry of Nature; John Wiley and Sons (1989).
- [10] Thompson, J. M. T.; Stewart, H. B.; *Nolinear Dynamics and Chaos*; John Wiley and Sons, (1986).
- [11] Kiseliov, A.; Kransmov, M.; Makarenko, G.; *Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*; Editorial Mir, (1984).
- [12] Elsgoltz, L.; Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional; Editorial Mir (1975).
- [13] Simmons, F.; Ecuaciones Diferenciales, (1977). McGraw-Hill.
- [14] Abraham, R. H.; Shaw, Ch.; *Dynamics: The Geometry of Behavior*, Aerial Press, Santa Cruz. Second edition Addison-Wesley, (1992).
- [15] MacGuire, M., An Eye for Fractals, Addison-Wesley, Redwood City, 1991.
- [16] Courant R. y Robbins H.; Qué es la Matemática?, Editorial Aguilar, quinta edición-primera reimpresión-1971.

2.- ARTÍCULOS DE DIVULGACIÓN

[17] Jurgens, H.; Peitgen, H - O.; Saupe, D.; El Lenguaje de los Fractales; Investigación y Ciencia, Agosto 1990.

- [18] Sander, L.; Crecimiento Fractal; Investigación y Ciencia. Abril 1991.
- [19] Goldberger, A. L.; Rigney, D. R. y West, B. J.; Caos y Fractales en la Fisiología Humana. Agosto 1992.
- [20] Dewdney, A. K.; Juegos de Ordenador, Belleza y Profundidad: el conjunto de Mandelbrot y una hueste de primos suyos de apellidos Julia; Investigación y Ciencia. Enero 1988.
- [21] Dewdney, A. K.; Juegos de Ordenador., Un microscopio computarizado escudriña el objeto más complejo de la matemática; Investigación y Ciencia. Octubre 1989.
- [22] Hages, B.; Juegos de Ordenador. El autómata celular ofrece un modelo del mundo y es un mundo por sí mismo. Investigación y Ciencia. Mayo 1984.
- [23] Dewdney, A. K.; Juegos de Ordenador, Capturas del día: bimorfos sobre teselas, con guarnición de palomitas y caracoles. Investigación y Ciencia. Septiembre 1989.
- [24] Crutchfield, J. P.; Framer, D.; Packard, N. H.; Shaw, R. S.; Caos; Investigación y Ciencia. Enero 1985.
- [25] Vivaldi, F.; An experiment with mathematics; New Scientist. Octubre 1989

- [26] Butler, A.; A Methodological Approach to Chaos: Are Economists

 Missing. The Point?; Federal Reserve Bank of St. Louis. March-April 1990.
- [27] Bining, G.; Rohrer, H.; El Microscopio de Efecto Túnel; Investigación y Ciencia. Octubre 1985.
- [28] Robinson, G. M.; Perry, D. M.; Peterson, W. R.; Interferometría Óptica de Superficies; Investigación y Ciencia. Septiembre 1991.
- [29] Lavenda, B. H.; *El movimiento Browniano*; Investigación y Ciencia. Abril 1985.
- [30] Mandelbrot, B. B.; How Long is the Coast of Britain?. Statistical Self Similarity and Fractional Dimension; Science. Mayo 1967.
- [31] Majumdar, A.; Brushan, B.; Role of Fractal Geometry in Roughness; Characterizacion and Contact Mechanics of Surfaces. Journal of Tribology, Vol. 112, Num. 2, Abril 1990.
- [32] Ingersoll, A. P.; Models of Jovian Vortices; Nature, Vol. 331. Febrero 1988.
- [33] Cairms, J.; Overbaugh, J. y Miller, S.; *The Origin of Mutants*; Nature.Vol. 335. September 1988.
- [34] Mont, X. G.; Un enfoque a los sistemas dinámicos; Ciencia (1989) 40.

[35] Rañada, A. F.; Movimiento Caótico; Investigación y Ciencia. Mayo 1986.

3.- ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

- [36] Lefebre, Y.; Surface Fractal Dimensions of Zone Industrial Minerals from Gas: phase adsorption isotherms. Journal of Materials Research, Vol. 7, Num. 7, Julio 1992.
- [37] Hormbogen, E.; Fractals in Microestructure of Metals. International Materials Reviews. Vol 34, 1989.
- [38] Dubuc, B.; Quimiou, F. B.; Roques-Carmes, C.; Tricot, C; Zucker, S.W.; Evaluating the Fractal Dimension of Profiles; Physical Review. Vol. 39, Num 3. February 1989.
- [39] Pfeifer, P.; Fractal Dimension as Working Tool for Surface-Roughness Problems. Applications of Surface Science 18 (1984).
- [40] Russ, J. C.; Surface Characterizacion: Fractal Dimensions, Hurst Coefficients and Frecuency Transforms.; Journal of Computer - Assisted Microscopy, Vol 2, Num. 3, 1990.
- [41] Scott, P. J.; Nolinear Dynamic Systems in Surface Metrology; Surface Topography 2 (1989) 345-366.

- [42] Mandelbrot, B. B.; Gafen, Y.; Aharony, A. y Peyriere, J.; Fractals: Their Transfer Matrices and their Eigen - Dimensional Sequence. J. Phys. A. Math. Gen. 18 (1985) 335-354. Printed in Great Britain.
- [43] Mitchell, M. W.; Bonnell, D. A.; Quantitative Topographic Analysis of Fractal Surfaces by Scanning Funneling Microscopy; Journal of Materials Research. Vol. 5, Num. 10, October 1990.
- [44] Voss, R. F.; *Random Fractals*: Characterization and Measurement; Scaling Phenomena in Disordered Systems. Vol. 133, 1985.
- [45] Russ, J. C.; Feature Specific Measurement of Surface Roughness in SEM Images; Part.Charact. Octubre 1987.
- [46] Kaye, B. H.; Multifractal Description of Rugged Fineparticle Profile.

 Particle Characterizacions. (1984)
- [47] Mandelbrot, B. B.; Passoja, D. E.; Paullay, A. J.; Fractal Character of Fracture Surfaces of Metals; Nature, Vol. 308, April 1984.
- [48] Srinivasan, S.; Russ, J. C.; Scattergood, R. O.; Fractal Analysis of Erosion Surfaces; Journal of Materials Research, Vol. 5, Num. 11, November 1990.
- [49] Shu-Zu Lu; A. Hellawell; An Application of Fractal Geometry to Complex Microstructures: Numerical Characterization of Graphite in Cast Irons.

 Acta Metallurgica et Materialia, Vol. 42, Num.12, Dezember 1994.

4.- TESIS

[50] García, M. C. J.; La teoría de caos: algunas implicaciones en el área de la metodología de la ciencia; Facultad de Filosofía y Letras. División de Estudios de Graduados. U. A. N. L. Enero 1993.

