CAPITULO 1

INTRODUCCION A LOS SISTEMAS DE CONTROL

1-1.- Introducción.

La Teoría del Control como ciencia es relativamente muy joven ya que a la fecha tiene menos de cien años de desarrollo, en comparación con otras ciencias como las matematicas, la fisica y la medicina que tienen una antiguedad de más de mil años.

Los sistemas de control se empezaron a desarrollar a partir de principios de éste siglo, con el fin de liberar al hombre de tareas manuales de tipo repetitivo que eran muy tediosas.

En un principio los primeros sistemas de control fueron muy sencillos, pero conforme se fué investigando más, se encontraron otras aplicaciones más complejas.

En la actualidad es común el uso de sistemas de control para controlar automaticamente muchos parametros, por ejemplo la presión, la temperatura, la viscosidad, la humedad, el voltaje, la velocidad, la frecuencia y muchos más.

Como una consecuencia lógica, al mejorar el control de los procesos industriales, se logró aumentar la calidad de los productos y el abaratamiento de los mismos, al poder aumentar el volumen de la producción. Muchos productos hoy son más baratos y de mejor calidad que antes, por ejemplo las calculadoras, los televisores, las computadoras etc, lo cual ha sido un gran incentivo para continuar la investigación con más intensidad en el campo de los sistemas de control.

Algunas personas piensan que el desarrollo de los sistemas de control ha sido el culpable de que muchos empleados estén perdiendo sus trabajos al ser substituidos por una máquina automática o un robot que puede pintar, soldar,colocar tornillos, etc. y en realidad ésto es un hecho que ha contribuido al desempleo masivo, pues la industria moderna cada vez requiere menos personal. El lado positivo de todo ésto es que el hombre tendrá que dedicarse a tareas más elevadas como el razonamiento, dejando las tareas repetitivas para las máquinas.

De acuerdo con todo lo anterior, a futuro la tendencia al uso de Sistemas de Control será cada vez mayor, tanto en cantidad como en complejidad, por lo que se requiere que los ingenieros tengan muy buenos fundamentos de lo que es la teoría del control.

1-2.- BREVE RESEÑA HISTORICA DEL DESARROLLO DE LA TEORIA DEL CONTROL.

Se considera que el primer sistema de control automático que se construyó fué el Regulador Centrifugo de James Watt, para el control de la velocidad de su maquina de vapor, construida en el siglo XVIII.

Sin embargo hasta la fecha no se ha encontrado ningún procedimiento matemático o diseño de ingeniería, que haya servido de base a James Watt para construir su regulador, por lo que se supone que la forma en la que se construyó este regulador fué totalmente empirica, sin ningún proyecto de ingeniería. A pesar de ello, este regulador es tan bueno que hoy, despues de 200 años de haber sido creado se sigue utilizando en el control de la velocidad de turbinas hidráulicas para la generación de energía eléctrica.

Los pioneros del desarrollo de la teoría del control como una ciencia son tres cientificos, Minorsky, Hazen y Nyquist, que a principios de este siglo hicieron aportaciones muy valiosas para el estudio de los sistemas decontrol. Minorsky en 1922, basandose en ecuaciones diferenciales demostró como se podía determinar la estabilidad de controles automáticos para direccionamiento de barcos de gran tamaño. Nyquist en 1934 dió a conocer un procedimiento para determinar la estabilidad de sistemas de control de lazo cerrado. Hazen en 1934 introduce por primera vez el término servomecanismo en los sistemas de control.

En 1940 se empezaron a desarrollar los métodos de respuesta a la frecuencia y unos años más tarde, los paises que entraron en acción a la II Guerra Mundial, destinaron muchos recursos a la investigación de los sistemas de control, lo que dió lugar a la creación de armas cada vez más mortíferas y más sofisticadas. Terminada la guerra, los descubrimientos de la teoría del control se fueron aplicando poco a poco con fines pacificos.

En 1950 Evans desarrolla y da a conocer su famoso método de analisis y diseño de sistemas de control llamado "Método del Lugar de las Raices". Este método junto con los métodos de respuesta a la frecuencia constituyen la parte más importante de la teoría clasica del control.

En virtud de que los sistemas de control se fueron complicando cada vez más, con múltiples entradas y salidas, la teoría del control clasica ha tenido que ser substituida por la teoría de control moderna basada en el dominio del tiempo con aplicación de variables de estado.

Actualmente la teoría de control moderna utiliza cada vez más las computadoras como parte integral del sistema de control, y lo más reciente en el desarrollo del control, son los sistemas de control óptimo, con adaptación y aprendizaje. Esto es, sistemas que trabajan en condiciones óptimas, con adaptación a diferentes condiciones de trabajo y con posibilidades de aprender, en una palabra sistemas con inteligencia muy semejante a la del hombre.

1-3.- TERMINOLOGIA ESPECIAL PARA SISTEMAS DE CONTROL.

Antes de iniciar el estudio de los sistemas de control,es necesario definir algunos términos que son ampliamente usados enesta materia. Algunos de éstos términos son conceptos utilizados en otras áreas de estudio, por lo que se hace la aclaración de que las definiciones serán dadas desde el punto de vista de la teoría del control.Es muy importante definir estos conceptos para evitar alguna confusión y que todos podamos hablar el mismo idioma o terminología del control.

PLANTA.- Desde el punto de vista del control, planta es cualquier objeto físico que se ha de controlar, por ejemplo un motor, un horno, una caldera, etc.

PROCESO.-Es un desarrollo natural o artificial, progresivamente contínuo, que se caracteriza por una serie de cambios graduales que tienden de una forma u otra hacia un determinado resultado final. Los procesos pueden ser mecánicos, eléctricos, químicos, etc.

SISTEMA.-Es una combinación de varios componentes que actuan en forma conjunta para lograr un determinado objetivo. El concepto de sistema se puede decir que es más amplio que el de proceso ya que se puede aplicar no solo a fenómenos físicos, sino a fenómenos abstractos como la economía.

PERTURBACION.-Es una señal indeseable que tiende a afectar adversamente el valor de la salida de un sistema. La perturbación puede ser interna si se genera dentro del sistema o externa si se genera fuera del mismo. Un ejemplo de perturbación lo tenemos en un rayo o descarga atmosferica que se induce como una pertubación en una red eléctrica de distribución. El rayo es por supuesto una perturbación externa ya que la red eléctrica no genera ni tiene nada que ver con la producción de los rayos. En éste caso una perturbación interna en la red eléctrica sería cualquier falla en algún componente de la misma, por ejemplo en un transformador, una cuchilla, un aislante, etc.

RETROALIMENTACION.- En sistemas de control es un término usado muy a menudo y significa regresar parte de una señal de salida hasta la entrada con el proposito de comparar ambas señales.

SISTEMA DE CONTROL RETROALIMENTADO.- Es un sistema que trata de mantener una relación preestablecida entre la salida y la entrada, comparando ambas señales y utilizando la diferencia para establecer el control.

Para aclarar este concepto veamos el siguiente ejemplo, si queremos obtener una cierta velocidad como señal de salida de un motor, hay que aplicarle una señal de entrada que sería un voltaje. Para comprobar que la salida efectivamente se alcanzó, es necesario retroalimentar o regresar parte de la señal de salida a la entrada para comparar y en base a ésta comparación se establecerási hay o no error en la salida. Más adelante hablaremos mucho más de éste concepto y veremos más ejemplos de aplicación. Para terminar diremos que el cuerpo humano quizás sea el sistema de control retroalimentado más complejo que existe ya que tiene una gran cantidad de sistemas totalmente automáticos para controlar la temperatura, la presión de la sangre, la cantidad de azucar en la sangre, pulsos del corazón, etc. Es tan importante la retroalimentación que algunos cientificos aseguran que las personas dementes no son más que sistemas de control que no tienen retroalimentación y por lo tanto no se dan cuenta de sus actos. Quizás algún día se pueda conectar la retroalimentación a éstas personas y volverían a la normalidad.

SERVOMECANISMO.-Textualmente significa máquina controlada. Tambien se puede definir como un sistema de control retroalimentado en el cual la salida puede ser una posición, velocidad o aceleración mecánica. Los servomecanismos desarrollan un papel muy importante en la industria moderna, por ejemplo en el funcionamiento totalmente automático de máquinas herramienta de control numérico.

SISTEMA DE REGULACION AUTOMATICA.-Es un sistema de control retroalimentado en el que la entrada y la salida son constantes o varían con el tiempo y en donde la función principal es mantener la salida en el nivel deseado apesar de las perturbaciones que se presenten.

SISTEMAS DE CONTROL DE PROCESOS.-Tienen una aplicación muy extensa en la industria moderna y son sistemas de regulación automáticaen donde la salida es una variable como la temperatura, la presión, el flujo, nivel de líquido o PH. La mayoría de los sistemas de control de procesos incluyen servomecanismos para llevar a cabo las diferentes funciones en forma totalmente automática.

1-4.- SISTEMAS DE CONTROL DE LAZO ABIERTO Y DE LAZO CERRADO.

Los sistemas de control pueden ser de lazo abierto o de lazo cerrado. Empezaremos dando la definición de cada una de ellos y posteriormente se estudiarán las caracteristicas y se verán ejemplos de ambos tipos de sistemas.

Sistemas de Control de Lazo Abierto.-Se puede definir como un sistema de control que no tiene retroalimentación y se representa por el siguiente diagrama de bloques.

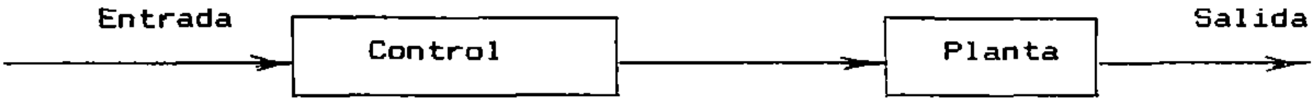


Fig. 1-1.- Sistema de Control de Lazo Abierto.

En éstos sistemas la salida no se mide ni se retroalimenta para compararla con la entrada. El sistema consta basicamente de dos partes una es el control, que es la inteligencia del sistema y la otra es la planta que es el onjeto a controlar.

Es importante que los sistemas de lazo abierto estén muy bien calibrados ya que el sistema por sí solo no tiene capacidad para auto-corregirse.

Se recomienda usar éstos sistemas solo cuando no hay perturbacio--nes ya que cualquier perturbación afectará seriamente y se reflejará como un error en la salida.

Practicamente cualquier sistema que funcione en base a tiempos es un sistema de lazo abierto, por ejemplo una lavadora de ropa. En éste caso no se mide realmente la salida ni se utiliza para controlar, ya que terminado el tiempo un reloj cambia o suspende la operación que se está realizando.

Los fabricantes les llaman a éstas, lavadoras automáticas, pero desde el punto de vista de control, para ser automáticas deberían medir la señal de salida que es la limpieza de la ropa y en función del grado de limpieza prolongar o acortar el ciclo de lavado hasta obtener la limpieza deseada. Debido a que es dificil medir la limpieza de la ropa ya que no hay ni escala ni unidades establecidas, lo que se hace es que una persona revisa la limpieza de la ropa y dependiendo de su juicio muy subjetivo se toma la decisión de sacar la ropa o volver a dar otro ciclo de lavado. Por todo lo anterior las lavadoras llamadas automáticas, a lo más que pueden aspirar es a ser sistemas de control semiautomáticos.

Otro ejemplo de sistemas de control de lazo abierto son los semáforos para control de tráfico, cuyo ajuste se hace en base a tiempos. Antes de instalar un semáforo en un crucero se hace un estudio del tráfico por las diferentes calles que concurren. Dico estudio es un conteo promedio del tráfico durante un tiempo que puede ser un mes aproximadamente. En base a los datos obtenidos en el conteo se ajustan los tiempos del verde, amariilo y rojo en cada caso.

Como es lógico pensar las condiciones del tráfico son muy variables, dependiendo del día y la hora de la semana, por lo que se necesitaría ajustar constantementelos tiempos del semáforo a las condiciones cambiantes del tráfico para que pudiera realmente ser un sistema de control automático de lazo cerrado.

Para ajustar los tiempos a las condiciones cambiantes del tráfico se requiere estar contando constantemente la cantidad de vehiculos y una computadora que esté tomando las decisiones para cambiar los tiempos cada determinado tiempo ya preestablecido. En la actualidad debido al alto costo que representa éste tipo de sistema, su uso solo se justifica en algunos cruceros de grandes ciudades donde el tráfico es muy intenso.

Sistemas de Control de Lazo Cerrado.- Son sistemas de control que si tienen retroalimentación. La salida en éste caso si se mide y se regresa para comparar con la entrada y de ésta comparación se toma una acción de control. El error que es la diferencia de las señales de entrada y de salida es de fundamental importancia para tomar una acción de control que tienda a reducir dicho error para llegar finalmente al valor deseado en la salida.

Un sistema de control de lazo cerrado se puede representar por medio del siguiente diagrama de bloques.

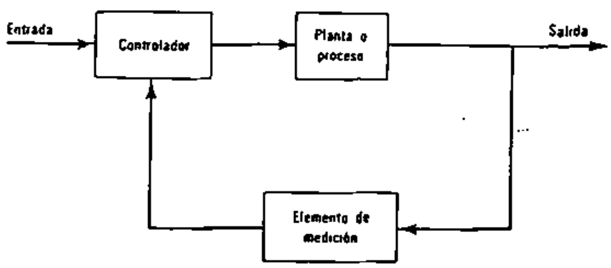


Fig. 1-2 Sistema de control de lazo cerrado

Además del controlador y la planta que tiene un sistema de lazo abierto, existe un elemento de medición en la retroalimentación. Este elemento de medición es precisamente el que mide la salida y la regresa en parte para comparar con la entrada.

El elemento de medición tambien es llamado transductor ya que casi siempre se requiere que éste cambie la señal de salida a otra señal de naturaleza distinta para que sea del mismo tipo de la señal de entrada y se pueda realizar la comparación de las dos señales.

Por ejemplo si la planta es un motor y la salida es una velocidad,el transductor o elemento de medición tiene que ser un generador tacometro que convierta la velocidad (señal de salida) a una señal de voltaje proporcional que es el tipo de señal de entrada.

En la práctica hay muchos transductores que convierten velocidad a voltaje, temperatura a voltaje, presión a voltaje, posición mecánica a voltaje etc, ya que la señal de entrada a los controladores generalmente es un voltaje.

Con el proposito de ilustrar un poco más el concepto de sistemas de control de lazo cerrado, veremos el sistema térmico que se ilustra en la figura 1-3. En el sistema ilustrado el objetivo es calentar agua hasta determinada temperatura y para ello se tiene un depósito de agua

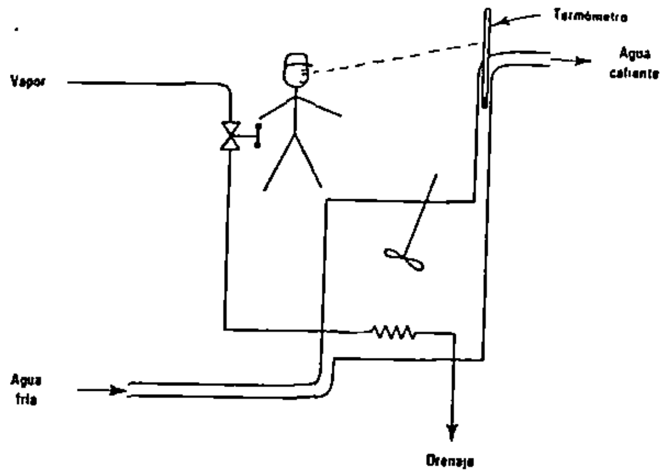


Fig 1-3 Control de retroalimentación manual de un sistema térmico

con un intercambiador de calor que funciona con vapor y un agitador para homogenizar la temperatura en el tanque. Además hay una válvula para controlar la entrada de vapor y un termometro para medir la temperatura del agua en la salida.

La persona que se indica en la figura hace las veces de controlador humano y su trabajo consiste en estar viendo constantemente la temperatura del termometro, si la temperatura del agua no se ha alcanzado, la válvula de vapor permanecerá abierta para seguir calentando el agua. Si la temperatura del agua en la salida se va aproximando a la temperatura deseada,.el hombre tendrá que ir cerrando poco a poco la válvula para no pasar de la temperatura que se desea alcanzar. Al utilizarse el agua caliente, la temperatura en la salida bajará y el hombre tendrá que abrir de nuevo la valvula de vapor. Como se ve, el trabajo del hombre es un trabajo muy repetitivo y tedioso ya que tiene que estar viendo durante ocho horas (o su turno de trabajo) el termometro y dependiendo de la temperatura abrir, cerrar o mantener la valvula de vapor.

En las condiciones que trabaja el sistema tiene una retroalimentación, pero ésta se hace por el hombre, por lo que el sistema no es automático sino de retroalimentación manual.

Es relativamente fácil substituir al hombre por un controlador automático como se puede ver en la fig. 1-4.

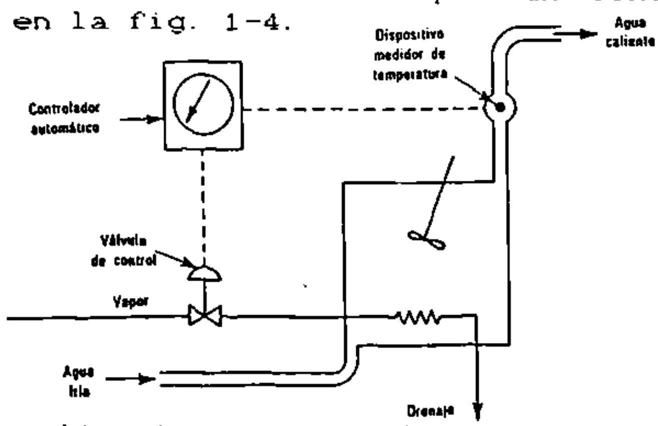


Fig. 1-4 Control con retroalimentación automática de un sistema térmico

Una vez modificado el sistema con el controlador automático, solo se requiere colocar la perilla del controlador en la temperatura deseada, lo cual será la entrada de referencia para el sistema.

El dispositivo medidor de la temperatura del agua (termopar) retroalimenta una señal de voltaje al controlador dependiendo de la temperatura del agua en la salida. De la comparación de éstas dos señales, la de retroalimentación y la de referencia surge una señal de error que se aplica a la válvula de control operada electricamente, para abrirla, cerrarla o mantenerla en su misma posición.

Como es lógico, el sistema automático presenta muchas ventajas en comparación con el de operación manual, el control automático es más eficiente, más barato, más preciso y sobre todo releva al hombre de realizar éste tipo de trabajos para que se dedique a labores mucho más complejas.

Los sistemas de control de lazo cerrado por sus ventajas son muy utilizados tanto en la industria como en el hogar, donde podemos mencionar algunas aplicaciones muy conocidas, por ejemplo los refrigeradores, los calentadores de agua automáticos (Boilers), los sistemas de alimentación de agua hidroneumáticos, sistemas de acondicionamiento de ambiente o clima artificial, etc.

Comparación entre Sistemas de Lazo Abierto y de Lazo Cerrado

No se puede decir que un sistema es definitivamente mejor que otro, ya que mucho depende de la aplicación. Los dos sistemas se aplican mucho en la práctica e incluso algunas veces se combinan en un mismo sistema de control el lazo abierto y el lazo cerrado.

Con el fin de comparar ambos sistemas analizaremos las características de uno y otro en el siguiente cuadro:

Sistemas de Lazo Cerrado	Sistemas de Lazo Abierto
1.- Se recomienda usarlos cuando el sistema estará sujeto a perturbaciones internas o externas.	1.- Se recomienda usarlos solo cuando no haya perturbación.
2.- Tienen capacidad para corregir errores o autocorregirse.	2.- No tienen capacidad para autocorregirse.
3.- Se pueden utilizar componentes no muy exactos y por lo tanto económicos.	3.- Se tienen que utilizar componentes muy exactos y por lo tanto caros.
4.- Es posible que se presenten problemas con la estabilidad por su tendencia a corregir los errores, lo cual puede provocar que el sistema oscile.	4.- No hay ningún problema con la estabilidad.
5.- Su diseño generalmente es más complicado.	5.- Su diseño es relativamente sencillo.

Además de los sistemas de control de lazo abierto y cerrado en la teoría del control se manejan otros conceptos de sistemas, como los sistemas de control directo e indirecto, sistemas de control adaptados y sistemas de control con aprendizaje.

Sistemas de Control Directo e Indirecto.- Para lograr mejores resultados en el control es necesario siempre tratar de medir y retroalimentar la variable deseada en forma directa, por ejemplo la temperatura, la presión, la velocidad, etc. Sin embargo en el control de procesos algunas veces se desea medir y controlar por ejemplo la calidad de un producto, lo cual puede ser un problema difícil ya que no es fácil encontrar un medidor de calidad, por lo que se deberán medir y controlar en este caso las variables más directamente relacionadas a la calidad del producto.

Sistemas de Control Adaptados.- Cuando un sistema de control tiene mucho tiempo trabajando, es posible que algunas componentes sufran deterioro o desgaste. Si el sistema tiene capacidad para adaptarse a las nuevas condiciones y trabajar satisfactoriamente, se dice que este es un sistema de control adaptado. Este tipo de sistemas logicamente son de mucha calidad y gran confiabilidad ya que fácilmente se adaptan a las condiciones del sistema.

Sistemas de Control con Aprendizaje.- Muchos sistemas de control de lazo abierto se pueden convertir en sistemas de lazo cerrado colocando a un hombre que sirva de retroalimentación, sobre todo en casos en donde la variable de salida sea difícil de medir con algun aparato.

Al considerar a un hombre como parte del sistema de control, se complica el problema de escribir una ecuación que represente la operación que realiza el hombre. Uno de los factores que complica el problema es la capacidad que tiene el hombre para aprender, ya que al ir adquiriendo experiencia la persona se convierte en un mejor elemento del sistema de control. Este tipo de sistemas que tienen capacidad de aprender recibe el nombre de sistemas de control con aprendizaje.

Para terminar con éste tema diremos que los sistemas de control se pueden clasificar de la siguiente forma:

a) Sistemas de Control Lineales y No Lineales.
b) Sistemas de Control Invariante en el Tiempo y Variante en el Tiempo.
c) Sistemas de Control de Tiempo Continuo y de Tiempo Discreto.
d) Sistemas de Control de una Salida y de varias Salidas.
e) Sistemas de Control con parametros concentrados y con parametros distribuidos.
f) Sistemas de Control Determinísticos y Estocásticos.

a) Sistemas de Control Lineales y No Lineales.- Son sistemas lineales aquellos cuya operación se puede representar por medio de ecuaciones lineales. Desgraciadamente la mayoria de los sistemasde control que se tienen en la vida real son no lineales. Sin embargo aunque un sistema sea no lineal, frecuentemente se puede convertir a lineal cuando se opera en un cierto rango limitado. A éste procedimiento se le llama linealización de sistemas no lineales y más adelante se verá un procedimiento matemático para ello. Es muy importante tratar de linealizar un sistema ya que su estudio y analisis es más sencillo debido a que solo a los sistemas lineales se les puede aplicar el principio de la superposición y el de la proporcionalidad.

b) Sistemas de Control Invariantes en eltiempo y Variantes en el tiempo.-Son sistemas invariantes en el tiempo aquellos cuyas ecuaciones matemáticas o modelo matemático no cambia con el tiempo y variables son aquellos cuyo modelo si se modifica al cambiar el tiempo. En forma general se puede decir que en los sistemas variantes en el tiempo, la forma de la ecuación o sus coeficientes dependen de, o son función del tiempo, mientras que en los sistemas invariantes, las ecuaciones son independientes del tiempo.

c) Sistemas de Control de Tiempo Continuo y de Tiempo Discreto.- Enun sistema de control de tiempo continuo, todas las variables son función de un tiempo continuo, por ejemplo la medición de voltaje o corriente con un multímetro en forma analógica. En los sistemas de control de tiempo discreto, las variables son conocidas solo en instantes discretos de tiempo, por ejemplo cualquier medición digital o en forma de tren de pulsos.

d) Sistemas de Control de una entrada y demúltiples entradas.- Un sistema de control simple tiene una sola entrada y una sola salida. Cuando un sistema de control es más grande y complejo, puede tener gran cantidad de entradas y salidas, por ejemplo un sistema de control de procesos industriales, donde se requiere controlar temperaturas, presiones, velocidades, posiciones, etc.

e) Sistemas de Control con parámetros concentrados y parametros distribuidos.-Los sistemas de control con parámetros concentrados son aquellos que se pueden representar por medio de ecuaciones diferenciales ordinarias, por ejemplo al plantear ecuaciones para un circuito eléctrico, en el que se consideran concentrados los parámetros resistivos, inductivos y capacitivos.

Los sistemas de control con parámetros distribuidos son más complicados y requieren para su representación de ecuaciones diferenciales parciales, por ejemplo al plantear ecuaciones para un circuito eléctrico en el que se considera que la resistencia, la inductancia y la capacitancia están distribuidas en todo el circuito.

f) Sistemas de Control Determinísticos y Estocásticos.- En los sistemas de control Determinísticos, siempre la respuesta a una entrada se puede determinar con seguridad, por lo que se puede decir que la respuesta es predecible y además repetible. Pero cuando la respuesta a una entrada no se puede predecir con toda seguridad, el sistema de control se dice que es Estocástico, por lo que su respuesta en éste caso solo es probable. Los sistemas Estocásticos tambien se les llama probabilísticos.

1-5
EJEMPLOS DE SISTEMAS DE CONTROL.

Se presentarán a continuación algunos ejemplos de sistemas de control utilizados ampliamente en la industria. El objetivo de ésta sección es que el estudiante que se inicia en el estudio de los sistemas de control, vea aunque sea en forma muy general y superficial algunas aplicaciones importantes de los sistemas de control de velocidad, presión, temperatura, posición,etc.

Sistema de Control de Presión y Temperatura.- Como es ya conocido, en las ollas de cocimiento a presión, debido a la presión interna, los alimentos requieren menor tiempo de cocimiento, con el consiguiente ahorro tanto en tiempo como en combustible.

Este mismo principio es aplicado a nivel industrial en hornos de recalentamiento y de fundición, incrementando la presión interna y reduciendo el tiempo de calentamiento y la cantidad de combustible. Si a nivel domestico ésto representa un ahorro al consumir menos combustible, a nivel industrial el ahorro que se logra es mayor ya que los consumos de combustible son mucho mayores.

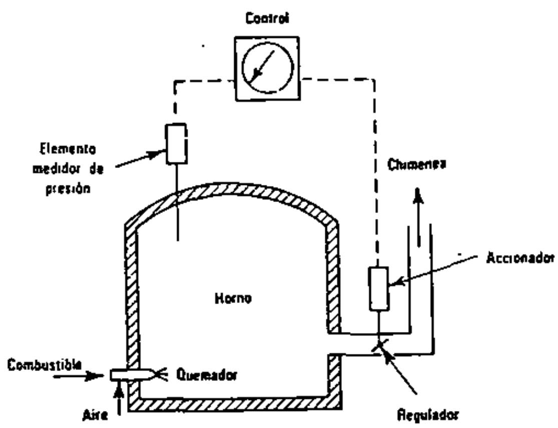


Fig.1-5 Control de Presión en un Horno

En la figura se representa el diagrama esquemático de un horno de recalentamiento en donde se desea controlar la presión interna a cierto valor. El valor de la presión deseada se ajusta en el control por medio de una perilla, siendo ésta la señal de entrada de referencia para el sistema.

A medida que el horno se va calentando, los gases de combustión y el calentamiento van aumentando la presión interna paulatinamente. En estas condiciones la válvula reguladora permanece cerrada para incrementar la presión y el elemento medidor de presión envia la señal de retroalimentación al control para establecer un error, de la comparación de ésta señal y la de referencia.

A medida que la presión interna se va aproximando a la presión deseada, el error va tendiendo a cero y el control dará una orden al accionador para abrir un poco la válvula reguladora y evitar que la presión sobrepase el valor deseado.

Este control, por lo tanto se encarga de mantener la presión interna del horno a un valor constante o nominal de diseño.

De acuerdo con las leyes del gobierno mexicano y por seguridad para todos, estos equipos industriales que trabajan a presión, deberán contar con válvulas de alivio ajustadas a una presión un poco arriba de la presión normal de diseño. Se entiende que las válvulas de alivio solo deberán trabajar en caso de falla del sistema de control, por lo que se considera esto como una situación de emergencia para evitar la explosión del equipo y posibles accidentes al personal.

Asi como se controla la presión, tambien se puede controlar en forma semejante la temperatura del horno. Algunos procesos industriales requieren del calentamiento gradual o sostenido de materiales, y esto se puede lograr con un control de temperatura.

Cuando la temperatura que se desea obtener es constante, el control es semejante al de presión ya analisado. Sin embargo cuando el proceso de calentamiento debe seguir cierta secuencia, el control es más complicado ya que se requiere programar los cambios de temperatura de acuerdo con la secuencia deseada.

Para controlar la temperatura a un valor deseado, se ajusta dicha temperatura como señal de referencia en el control y con un termopar se mide y se retroalimenta la señal de la temperatura real dentro del horno. De la comparación de estas dos señales, se tendrá una señal de error que será la base para controlar la temperatura, controlando en tal caso la cantidad de combustible que se alimenta al horno.

Sistema de Control de Velocidad.- La figura representa el diagrama esquemático del regulador de velocidad de James Watt.

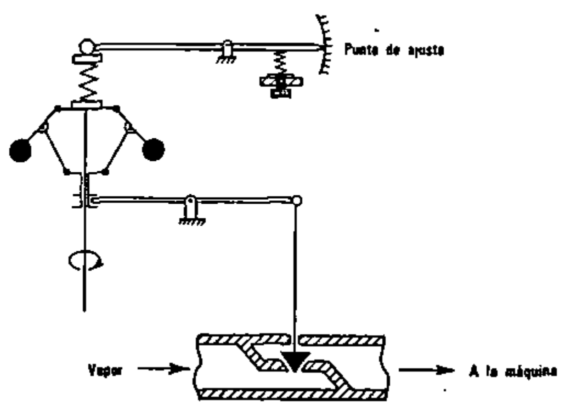


Fig. 1-6 Sistema de Control de Velocidad

El alma del sistema de control es un mecanismo de esferas que al girar por acción de la fuerza centrifuga se alejan o se acercan a su eje de giro.

La velocidad deseada se fija mediante un tornillo que está colocado en la parte superior del diagrama, lo que constituye el punto de ajuste o señal de referencia.

El mecanismo de esferas está acoplado mecanicamente al eje de la turbina de vapor para que su velocidad sea igual o proporcional a la velocidad que se desea controlar.

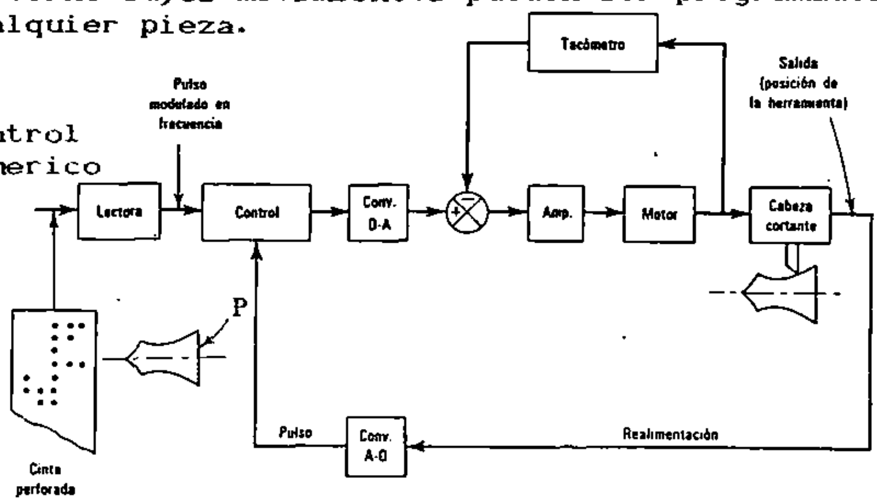
Cuando la velocidad de la máquina sobrepasa el valor deseado, las esferas se alejan del eje de giro debido a la fuerza centrifuga y éste movimiento finalmente provoca un estrangulamiento de la válvula de vapor, reduciendose la velocidad.

Al contrario, cuando la velocidad de la máquinabaja de su valor nominal, las esferas se acercan al eje y éste movimiento provoca la apertura de la válvula de vapor para aumentar la velocidad.

A pesar de que éste sistema tiene ya casi 200 años de haber sido inventado por James Watt, para controlar su famosa máquina de vapor, en la actualidad aun se sigue utilizando para controlar la velocidad de cualquier sistema de rotación, por ejemplo turbinas hidráulicas, de vapor, de gas etc.

Sistemas de Control Numérico.- Este tipo de control es ampliamente usado en la industria para controlar los movimientos y posiciones de gran cantidad de máquinas industriales. En este caso el sistema se aplica a un torno cuyos movimientos pueden ser programados para que se fabrique cualquier pieza.

Fig. 1-7 Control Numerico



En el diagrama indicado en la figura,la señal de entrada es un programa que se puede elaborar en una cinta perforada, una cinta magnetica o un diskette.

Dicho programa es elaborado por un operador que le señala por medio de claves, los movimientos que la máquina debe realizar para elaborar la pieza deseada. Esta información se lee y se graba en una lectora. La lectora electrónica va proporcionando información en forma de tren de pulsos al control, el cual tiene dos entradas.

En un principio cuando se inicia la operación del sistema, la posición de la herramienta es cero, señal que se retroalimenta al control, por lo que la unica señal en el control es la de la lectora.

La salida del control se aplica a un convertidor Digital-Analógico que convierte el tren de pulsos en un voltaje continuo proporcional. Este voltaje se aplica al sumador y de ahí a un amplificador ya que en el control se manejan voltajes de señal pequeños. Una vez amplificado el voltaje se aplica a un motor que finalmente mueve la cabeza cortante a la posición requerida. Esta posición de la cabeza es constantemente retroalimentada através de un convertidor Analógico-Digital para comparar con la señal de entrada.

Se requiere el convertidor Analógico-Digital para poder comparar la señal de tren de pulsos de la entrada con una señal de la misma naturaleza (pulsos) en la retroalimentación.

Generalmente este tipo de sistemas es de respuesta muy rápida, por lo que en un segundo, el sistema puede retroalimentarse y corregir la posición de la cabeza cortante 60 veces o más.

Sistemas de Control por Computadora.- En los últimos años se ha venido desarrollando la aplicación de computadoras para el control de procesos industriales. En seguida se analisará la aplicación de una computadora para controlar el proceso en un Alto Horno.

Monclova Coahuila es de las pocas ciudades no solo a nivel nacional sino a nivel mundial que cuenta con una empresa siderúrgica que tiene varios Altos Hornos(en México sólo existen Altos Hornos en Monclova Coah. y en Lázaro Cardenas Michoacan). Estos equipos son de proporciones gigantescas pues tienen una altura aproximada de 75 metros y procesan cantidades enormes de materias primas continuamente durante las 24 horas del día y los 365 días del año. Para darnos una idea de las cantidades de materias primas que se manejan por día citaremos las siguientes cifras: Un Alto Horno moderno (por ejemplo el Alto Horno No 5 de la Sid. No 2) tiene capacidad para producir aproximadamente 4000 toneladas diarias de arrabio o acero de primera fusión, y debido al proceso de fundición, debe ser mantenido funcionando permanentemente.

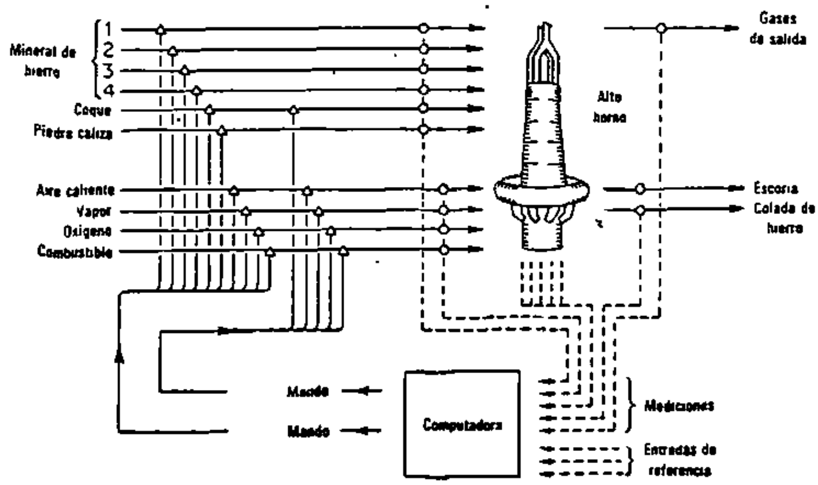


Fig 1-8 Control de un Alto Horno por Computadora

Para producir una tonelada de arrabio se necesita alimentar por la parte superior del Horno (tragante) aproximadamente 2 toneladas de mineral de hierro, 1 tonelada de coque (carbón coquizado) y 1/2 tonelada de fundente. Además se necesita alimentar por la Dona unas 4.5 toneladas de aire caliente. Este aire es calentado en estufas especiales de gran tamaño antes de introducirlo al Alto Horno.

El calor para el proceso se obtiene de la combustion del coque, de la cual se produce monóxido de carbono gaseoso. Este gas, junto con el coque reducen en el Alto Horno el mineral de hierro, mientras que la piedra caliza actua como fundente formando la escoria con todas las impurezas del mineral. El hierro fundido o arrabio escurre através del colchón de aire de las toberas y ocupa el fondo del horno llamado crisol, mientras que la escoria formada por las impurezas flota en la superficie del crisol. Periodicamente se vacia primero la escoria através de un orificio llamado piquera de escoria, hacia un lugar llamado piletas de escoria, en donde se enfria la escoria con agua rociada para posteriormente tirarse en camiones en algun otro lugar alejado de la planta. Luego se vacia el arrabio por otro orificio llamado piquera de arrabio por medio de canales especiales hacia carros termo que conducen el arrabio al siguiente proceso que es el de aceración.

En virtud de la cantidad tan enorme de materias primas que se procesan continuamente y de que la presencia de impurezas como el carbono, manganeso, silicio, azufre, fosforo etc, depende de la composición del mineral, del coque y de la caliza utilizados, es bastante dificil que una sola persona pueda controlar la composición química del arrabio que se obtiene en cada colada del Alto Horno.

Además hay una gran cantidad de información que se maneja en la operación del Horno, por ejemplo las temperaturas en diferentes puntos del horno, la presión interna, los análisis químicos del arrabio y la escoria, análisis químicos del gas Alto Horno, las cantidades de materiales alimentados, las cantidades de aire, vapor, oxigeno etc.

Hasta hace algunos años, los Altos Hornos eran operados por una o varias personas que de acuerdo con su experiencia de varios años, daban ordenes para indicar la mejor forma de trabajar el Horno y poder llegar a obtener arrabio de cierta calidad. Actualmente con el control por computadora, se introduce periodicamente a la misma gran cantidad de información que se va obteniendo sobre la composición del arrabio, la escoria, los gases y las temperaturas y presión del horno. La computadora con toda esta información realiza complicados cálculos para determinar las cantidades optimas a alimentar y los ajustes en temperaturas y presión, para lograr la calidad deseada en el arrabio.

Para este tipo de procesos en donde intervienen tantas variables, tanto de entrada como de salida, hay necesidad de establecer modelos matemáticos, partiendo para ello de las experiencias de personas conocedoras del proceso y que nos sirvan de base para la programación de la computadora. Desarrollar los modelos matemáticos puede ser un problema dificil porque no se conocen con precisión todos los factores que afectan el proceso y su dinámica. Además tambien es dificil la medición de todas las variables requeridas para el control por computadora, en cuyo caso es necesario que dichas variables sean estimadas aplicando métodos estadísticos.

1-6 Requerimientos Generales de un Sistema de Control.

Para que un sistema de control cualquiera pueda ser utilizado en la práctica tiene que cumplir basicamente con tres requerimientos:

1) Estabilidad Absoluta
2) Estabilidad Relativa
3) Exactitud

Estabilidad Absoluta.- Significa que el sistema tiene que ser capaz de obtener una respuesta estable, apesar de las perturbaciones que se presenten. En los siguientes capitulos se verá como determinar matematicamente la estabilidad o inestabilidad de un sistema.

Estabilidad Relativa.- No basta con tener estabilidad absoluta, en un sistema tambien es importante que la respuesta estable se obtenga lo más rapidamente posible. Algunas veces un sistema puede ser estable pero está muy cerca de perder la estabilidad, por lo que se debe calcular la estabilidad relativa, mediante la aplicación de criterios y métodos apropiados.

Exactitud.- Es muy importante que el sistema pueda reducir a cero o al minimo valor posible los errores. Se estudiarán para ello algunos criterios de error.

Si un sistema cumple con estos requisitos se puede utilizar, de otra forma si no cumple habrá necesidad de modificar algo en el sistema para poder aplicarlo en la práctica.

No siempre se puede cumplir con todos los requisitos en un sistema, por ejemplo la estabilidad relativa razonable y la exactitud en regimen permanente tienden a ser incompatibles. Al mejorar un requerimiento, el otro tiende a empeorar, por lo que es necesario al proyectar un sistema de control establecer un compromiso entre los dos requerimientos.

CAPITULO 2
La Transformada de Laplace

2-1.- Introducción

La gran mayoria de los sistemas de control se pueden representar matematicamente por medio de una o varias ecuaciones diferenciales, por lo que es muy comun el tener que resolver éstas ecuaciones para poder calcular la respuesta de un sistema de control. La Transformada de Laplace desarrollada por Pierre Simon Laplace (1749-1827), constituye un método muy poderoso para resolver todo tipo de ecuaciones diferenciales, por lo que es una herramienta o base matemática indispensable para estudiar sistemas de control y es la razón por la que se incluye este tema de las matemáticas en todos los cursos de Teoria de control para personas que se inician en ésta area de estudio. Sín tener esta base matemática, dificilmente se puede analizar un sistema de control desde el punto de vista teórico que se requiere en ingeniería.

La Transformada de Laplace es un método operacional que consiste en convertir las ecuaciones diferenciales que estan en función del tiempo a otra función, llamada función compleja "s". La variable compleja "s",se denomina asi porque como cualquier número complejo está formada por dos partes, la parte real y la parte imaginaria. Esta transformación se puede realizar en dos formas distintas, aplicando la llamada integral de Laplace, (lo cual constituye el método riguroso de las matemáticas), o aplicando las tablas de la Transformada de Laplace (que es un procedimiento más práctico el cual se utiliza más ampliamente para resolver problemas por éste método).

Una vez transformada una ecuación diferencial, esta se convierte en una ecuación algebraica, es decir las derivadas desaparecen en el nuevo plano complejo de "s" y la ecuación es mucho más facil de manejar y resolver.

El transformar una ecuación diferencial por Laplace es como si nuestro problema en función del tiempo o en el plano del tiempo (en el cual la solución es dificil), lo trasladamos al plano de la variable compleja "s", donde paradojicamente nuestro problema se puede resolver en una forma relativamente más sencilla.

El procedimiento de la transformación se utiliza en otras areas de las matemáticas para hacer más sencillos algunos cálculos. Por ejemplo mediante la aplicación de los logaritmos(que es una transformación matemática) las operaciones de división se convierten en restas y la multiplicación en suma.

Una vez resuelto el problema en el plano complejo hay necesidad de regresar de nuevo al plano del tiempo, que es donde tenemos realmente el problema. El procedimiento utilizado se denomina la Transformada inversa o antitransformada de Laplace, lo cual se logra utilizando las tablas de la Transfomadade Laplace en sentido inverso. Esto último es muy semejante al procedimiento inverso que se realiza con los logaritmos, llamado antilogaritmo.

La Transformada de Laplace nos proporciona muchas ventajas ya que nos permite predecir el comportamiento de un sistema de control, utilizando para ello tecnicas gráficas o métodos de respuesta a la frecuencia que se verán en capitulos posteriores. Ademas la Transformada de Laplace nos resuelve completamente una ecuación diferencial, dándonos simultaneamente la respuesta transitoria y la respuesta en estado de regimen permanente de un sistema de control.

Breve repaso de numeros, variables y funciones complejas.- Antes de entrar de lleno a la Transformada de Laplace de una funcion del tiempo f(t), es necesario refrescar un poco algunos conceptos de números, variables y funciones complejas.

Un número complejo se define matematicamente como un número que tiene dos partes, la parte real y la parte imaginaria. Muchos estudiantes piensan que los números complejos son muy dificiles de manejar ya que asocian el nombre que se les dió (complejos) con la forma de operarlos. Sin embargo así como se les llamo complejos se les podia haber llamado números simples o números sencillos, por lo que es conveniente eliminar de una vez por todas el tabú que pueda crear el nombre de números complejos.

Los números complejos se pueden representar de tres formas diferentes:

a) Forma Rectangular
b) Forma Polar
c) Forma Exponencial

En la forma rectangular el número complejo se expresa en dos partes, su parte real y su parte imaginaria. La parte real se expresa por un numero real simple y la parte imaginaria se expresa por un número real precedido de la letra "j", donde la letra "j" equivale a $\sqrt{-1}$. Por ejemplo en el numero complejo (3 + j4), la parte real es 3 y la parte imaginaria es j4.

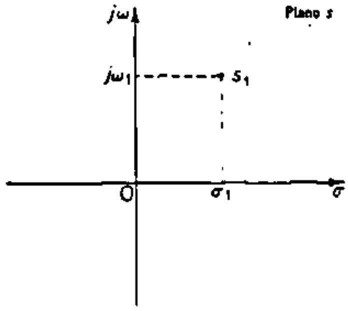
En la forma polar el número complejo se expresa por medio de una magnitudy un ángulo, por ejemplo $A\angle\phi$,en donde "A" es la magnitud y ϕ es el ángulo. Se puede transformar facilmente de la forma rectangular a la polar o visceversa utilizando las siguientes formulas:

Forma Rectangular	Forma Polar
$\sigma + j\omega$	$A\angle\phi$
$\sigma = A\,\mathrm{Cos}\phi \qquad \omega = A\,\mathrm{Sen}\phi$	$A = \sqrt{(\sigma)^2 + (\omega)^2} \qquad \phi = (\mathrm{Tan})^{-1}\omega/\sigma$

La forma exponencial de un número complejo se expresa por medio de una magnitud y una cantidad exponencial, por ejemplo $A\,e^{j\theta}$, donde A es la magnitud, igual que en la forma polar, "e" es la base de los logaritmos naturales y el angulo θ es generalmente expresado en radianes. Para transformar de la forma exponencial a la rectangular se puede utilizar la formula de Euler que establece lo siguiente:

$$A\,e^{j\theta} = A\,(\,\mathrm{Cos}\theta + j\,\mathrm{Sen}\theta\,) = \sigma + j\,\omega$$

Las variables complejas al igual que los números complejos tienen una parte real y una parte imaginaria. La variable compleja se representa por la letra "s", la componente real con la letra "σ" y la componente imaginaria "$j\omega$", o sea $s = \sigma + j\omega$. Se puede representar una variable compleja s por un punto en el plano complejo s. En la figura 2-1 se representa el plano complejo y un punto $s_1 = \sigma_1 + j\omega_1$.



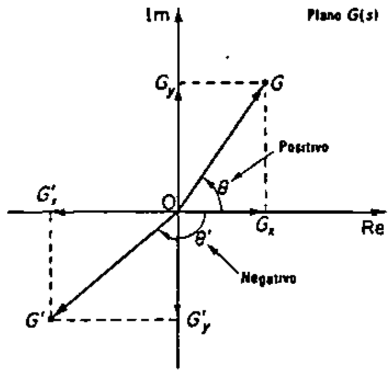


Fig. 2-1. Plano complejo con un punto representativo

Una función compleja, al igual que los números y las variables complejas, tienen una parte real y una parte imaginaria. La función compleja G(s) tiene una parte real Gx y una parte imaginaria jGy, o sea $G(s) = Gx + jGy$. Las cantidades Gx y Gy son cantidades reales. Al igual que los números complejos, la magnitud de una función compleja queda determinada con las siguientes relaciones: la magnitud de una función compleja está dada por $\sqrt{Gx^2 + Gy^2}$ y el angulo $\theta = \mathrm{Tan}^{-1}(Gx/Gy)$.

El complejo conjugado de una función compleja $G(s) = Gx + jGy$ se representa como $\bar{G}(s)$ y es igual a $Gx - JGy$. De acuerdo con lo anterior una cantidad compleja y su conjugada tienen la misma parte real, pero la parte imaginaria cambiada de signo.

Derivada de una Funcion Compleja.- La derivada de una función compleja se obtiene por medio de límites como la derivada de cualquier función real. En seguida se representa matematicamente la derivada de una función compleja G(s) :

$$\frac{d}{ds}G(s) = \lim_{\Delta s \to o} \frac{G(s + \Delta s) - G(s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to o} \frac{\Delta G}{\Delta s}$$

Una función compleja G(s) se define como una función analítica cuando existe la función en el plano complejo y además existen sus derivadas. La derivada de una función compleja es independiente del camino que siga el Δs. Debido a que el $\Delta s = \Delta\sigma + j\,\Delta\omega$, el Δs puede tender a cero cuando el $\Delta\sigma$ tienda a cero o cuando el $j\Delta\omega$ tambien tienda a cero. La tendencia a cero seria entonces paralela al eje horizontal o vertical.

Si se deriva la función compleja G(s) considerando que el $\Delta s = \Delta\sigma$ lo cual significa que el recorrido es paralelo al eje real y $j\Delta\omega$ es constante, aparecerán inmediatamente derivadas parciales como se representa en la siguiente ecuación :

$$\frac{d}{ds}G(s) = \lim_{\Delta\sigma \to 0} \left(\frac{\Delta Gx}{\Delta \sigma} + j\frac{\Delta Gy}{\Delta \sigma} \right) = \frac{\partial Gx}{\partial \sigma} + j\frac{\partial Gy}{\partial \sigma}$$

Si se considera el $\Delta s = j\,\Delta\omega$,lo cual corresponde al recorrido paralelo al eje imaginario, siendo el $\Delta\sigma$ una constante, la derivada de la función compleja quedará como sigue :

$$\frac{d}{ds}G(s) = \lim_{j\Delta\omega \to 0} \left(\frac{\Delta Gx}{j\,\Delta\omega} + j\frac{\Delta Gy}{j\,\Delta\omega} \right) = -j\frac{\partial Gx}{\partial \omega} + \frac{\partial Gy}{\partial \omega}$$

Igualando las dos derivadas, puesto que se trata de la derivada de la misma función compleja, el resultado sería la siguiente ecuacion de derivadas parciales :

$$\frac{\partial Gx}{\partial \sigma} + j\frac{\partial Gy}{\partial \sigma} = \frac{\partial Gy}{\partial \omega} - j\frac{\partial Gx}{\partial \omega}$$

Si se satisfacen las siguientes dos condiciones :

$$\frac{\partial Gx}{\partial \sigma} = \frac{\partial Gy}{\partial \omega} \qquad y \qquad \frac{\partial Gy}{\partial \sigma} = -\frac{\partial Gx}{\partial \omega}$$

la derivada de la función compleja dG(s)/ds queda determinada univocamente. Estas dos condiciones en las matemáticas son conocidas como las condiciones de Cauchy-Riemann.

A manera de ejemplo y para aplicar las condiciones de Cauchy a una función compleja, se verá si la función propuesta cumple con estas condiciones.

$$G(s) = \frac{1}{s + 1}$$

Como primer paso para poder aplicar las condiciones de Cauchy, se debe de obtener los valores de Gx y Gy de la función compleja G(s). El procedimiento que se utilizará será primero substituir $s = \sigma + j\omega$ y posteriormente multiplicar y dividir la función G(s) por el conjugado complejo del denominador como se indica a continuación:

$$G(\sigma + j\omega) = \frac{1}{s + 1} = \frac{1}{\sigma + j\omega + 1} = \frac{1 \quad (\sigma + 1 - j\omega)}{(\sigma + j\omega + 1)(\sigma + 1 - j\omega)}$$

$$= \frac{\sigma + 1 - j\omega}{(\sigma + 1)^2 + \omega^2}$$

$$G_x = \frac{\sigma + 1}{(\sigma + 1)^2 + \omega^2} \qquad\qquad G_y = \frac{-\omega}{(\sigma + 1)^2 + \omega^2}$$

$$\frac{\partial G_x}{\partial \sigma} = \frac{(\sigma + 1)^2 + \omega^2 - (\sigma + 1)[\,2(\sigma + 1)\,]}{[(\sigma + 1)^2 + \omega^2]^2} = \frac{\omega^2 - (\sigma + 1)^2}{[(\sigma + 1)^2 + \omega^2]^2}$$

$$\frac{\partial G_y}{\partial \omega} = \frac{[(\sigma + 1)^2 + \omega^2](-1) + \omega\,(2\omega)}{[(\sigma + 1)^2 + \omega^2]^2} = \frac{\omega^2 - (\sigma + 1)^2}{[(\sigma + 1)^2 + \omega^2]^2}$$

Como se puede comprobar al analizar los resultados de las dos ecuacionesdiferenciales anteriores, con excepción del valor de $s=-1$ la función compleja satisface la primera condicion de Cauchy-Riemann, se deja como ejercicio para el estudiante la comprobación de la segunda condición de Cauchy.

Aplicando derivadas parciales, la derivada de la funcion compleja $G(s)$ se representa en la siguiente ecuacion:

$$\frac{dG_{(s)}}{ds} = \frac{\partial G_x}{\partial \sigma} + \frac{j\,\partial G_y}{\partial \sigma} = \frac{\omega^2 - (\sigma + 1)^2}{[(\sigma + 1)^2 + \omega^2]^2} + \frac{j\,2\omega\,(\sigma + 1)}{[(\sigma + 1)^2 + \omega^2]^2}$$

$$= \frac{-[(\sigma + 1)^2 - 2j\omega(\sigma + 1) + j^2\omega^2]}{[(\sigma + 1)^2 + \omega^2]^2} = \frac{-[(\sigma + 1) - j\omega]^2}{[(\sigma + 1)^2 + \omega^2]^2}$$

$$= \frac{-[(\sigma + 1) - j\omega]^2}{[(\sigma + 1)^2 + j^2\omega^2]} = \frac{-[(\sigma + 1) - j\omega]^2}{\{[(\sigma + 1) + j\omega][(\sigma + 1) - j\omega]\}^2}$$

$$= \frac{-1}{(\sigma + 1 + j\omega)^2} = \frac{-1}{(s + 1)^2}$$

Por otro lado derivando la función compleja $G_{(s)}$ como una función real, aplicando las fórmulas de las derivadas comunes tenemos lo siguiente:

$$\frac{d}{ds}\frac{1}{(s+1)} = \frac{0-1(1)}{(s+1)^2} = \frac{-1}{(s+1)^2}$$

Resultado que coincide exactamente con el valor de la derivada de la función $G_{(s)}$ que se habia obtenido anteriormente aplicando derivadas parciales.

Ya se ha definido lo que es una función analítica, en seguida se definirán lo que son los puntos ordinarios y puntos singulares en el plano complejo:

Puntos Ordinarios => Puntos del plano complejo en donde la funcion compleja $G_{(s)}$ es analítica.

Puntos Singulares => Puntos del plano complejo en donde la funcion compleja $G_{(s)}$ no es analítica.

La mayoría de las funciones complejas en la práctica se expresan como una fracción de la forma siguiente:

$$G_{(s)} = \frac{k(s+z_1)(s+z_2)}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)}$$

donde la letra K es una constante que representa una ganancia, y los valores z_1, z_2, p_1, p_2 y p_3 son valores muy importantes llamados ceros y polos respectivamente de la función compleja.

Cuando $s = -z_1$, por ejemplo, la función compleja se hace igual a cero, lo cual ocurre tambien cuando $s = -z_2$. Por otro lado, cuando el valor de $s = -p_1$, por ejemplo, la función compleja tiende a un valor infinito. De acuerdo a lo anterior podemos definir lo que son polos y ceros.

Polos => Son puntos del plano complejo en donde la funcion compleja $G_{(s)}$ tiende a infinito.

Ceros => Son puntos del plano complejo en donde la funcion compleja $G_{(s)}$ se hace igual a cero.

En el ejemplo que se ha dado se tienen dos ceros y tres polos definidos. Normalmente casi todas las funciones complejas tienen más polos que ceros definidos. Teoricamente una función compleja debe tener igual numero de ceros que de polos, ya que como se verá más adelante cuando se estudie el método del Lugar de las Raices, las gráficas que representan una función compleja en el plano complejo se inician siempre en los polos y terminan en los ceros. Aplicando el principio de la filosofia que establece que todo lo que tiene un principio tiene tambien un final, deberá haber tantos polos como ceros en cualquier función compleja. Cuando una función compleja tiene más polos que ceros, se dice que los ceros faltantes existen pero no se representan porque no están definidos y por lo tanto se dice que están en el infinito.

2-2.- La Transformada de Laplace.

Pierre Simon, marques de Laplace, famoso astrónomo y matemático francés, desarrolló la teoria matemática que hoy conocemos como la Transformada de Laplace en tiempos de Napoleón en Francia. Además de la Transformada, su obra maestra ha sido Mecánica Celeste. Por su gran capacidad matemática ha sido calificado como el Isaac Newton francés.

Matematicamente la Transformada de Laplace se define por la siguiente ecuación integral :

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}dt[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}dt$$

donde las literales utilizadas en ésta ecuación se definen como :

$\mathcal{L}$ = Simbolo operacional que indica que la cantidad que le sigue ha de ser transformada por la integral de Laplace $\int_0^{\infty} e^{-st}dt$

$f(t)$= Una función del tiempo t tal que $f(t) = 0$ para $t < 0$.

$F(s)$= Transformada de Laplace de $f(t)$.

s = Variable compleja.

Si una función del tiempo $f(t)$ está multiplicada por una constante y aparece en forma general como $Af(t)$ donde A es la constante, la transformada de Laplace de $Af(t)$ se podrá calcular así :

$$\mathcal{L}[Af(t)] = A\mathcal{L}[f(t)]$$

Cuando una función del tiempo sea la suma algebraica de varias funciones del tiempo, $f_1(t)$, $f_2(t)$...., la transformada de laplace de ésta suma de funciones se calculará de la siguiente forma :

$$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] + \mathcal{L}[f_2(t)]$$

En seguida se calculará la transformada de laplace de varias funciones ampliamente utilizadas en los sistemas de control y se estudiarán algunos teoremas importantes de la transformada. Cuando ya se tenga cierto dominio en el manejo de la transformada, se aplicarán directamente las tablas de la transformada sin necesidad de integrar matematicamente. Este último llamado el método de las tablas es el que más se utiliza en la práctica por ser el más sencillo y el más rápido.

Las funciones que se estudiaran en seguida con el objeto de conocer la función y además calcular su transformada de Laplace por el método de la integral de Laplace son la función escalon, la rampa, la senoide, el pulso,y el impulso.

Función Escalon.- La función escalon se puede definir matematicamente en la siguiente forma:

$$f(t) = 0 \qquad \text{para } t < 0$$
$$f(t) = A = \text{Constante} \qquad \text{para } t > 0$$

En la figura 2-2 se representa graficamente la función escalon. Se puede observar que antes de cero la función es cero y despues de cero la función es igual a una cantidad constante A. Exactamente en cero la funcion no está definida por lo que puede tener cualquier valor entre cero y A.

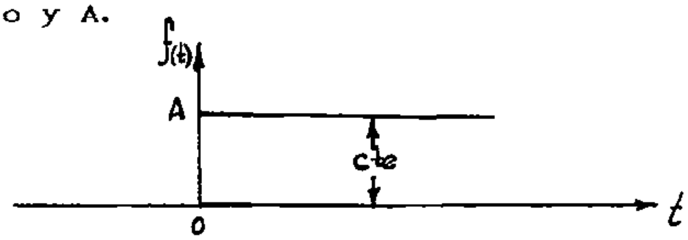


Fig. 2-2 Gráfica de una función escalón

En la práctica la función escalón se puede generar en forma muy aproximada a la función matemática, pero no exactamente igual. La diferencia estriba en que en la práctica una función no puede cambiar de cero a otro valor en un tiempo cero como ocurre con la función escalón teórica. Necesariamente tiene que transcurrir un tiempo por pequeño que este sea. Sin embargo debido a que generalmente el tiempo de cambio es muy pequeño se desprecia considerandolo igual a cero.

Un ejemplo práctico de la función escalón es la aplicación de un voltaje de corriente directa a cualquier circuito resistivo, pues en forma casi instantanea el voltaje y la corriente crecen de cero a otro valor ya sea positivo o negativo.

Una vez que ya se conoce la forma, algunas caracteristicas y una aplicación práctica de la función escalón, en seguida se calculara su transformada de Laplace.

Si $f(t) = A$ entonces $\mathcal{L}[\, f(t) \,] = \int_0^{\alpha} Ae^{-st}dt = \int_0^{\alpha} Ae^{u}[-\frac{du}{s}]$

donde $u = -st$

$du = -sdt$

$dt = \frac{-du}{s}$

$$F(s) = -A/s\int e^{u}du = -A/s[\, e^{-st}]_0^{\alpha}$$

$$F(s) = -A/s[\, 1/\alpha - 1/1 \,] = \underline{A/s}$$

Función Exponencial.-La función exponencial se puede expresar matematicamente en la siguiente forma :

$$f(t) = 0 \qquad \text{para } t < 0$$

$$f(t) = A\, e^{-\alpha t} \qquad \text{para } t \geq 0$$

Si $f(t) = Ae^{-\alpha t}$ entonces $\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\alpha} Ae^{-\alpha t}e^{-st}dt$

$$F(s) = A\int_0^{\alpha} e^{-(\alpha + s)t}dt = A\int_0^{\alpha} e^{u}\left[\frac{du}{-(\alpha + s)}\right]$$

donde $u = -(\alpha + s)t$
$du = -(\alpha + s)\ dt$

$$dt = \frac{du}{-(\alpha + s)}$$

$$F(s) = -\frac{A}{\alpha + s}\int_0^{\alpha} e^{u}du = -\frac{A}{\alpha + s}\left[\ e^{u}\ \right]_0^{\alpha}$$

$$F(s) = -\frac{A}{\alpha + s}\left[\ e^{-(\alpha + s)t}\right]_0^{\alpha}$$

$$F(s) = -\frac{A}{\alpha + s}[1/e^{\alpha} - 1/e^{0}] = \frac{A}{\alpha + s}$$

La funcion exponencial que se ha transformado por Laplace, se puede obtener en la práctica con la descarga de un condensador. Es interesante observar que la ecuación exponencial original al ser transformada se convierte en una fracción algebraica relativamente simple. La forma fraccionaria y algebraica del resultado obtenido se irá repitiendo en las siguientes funciones. Con esto se empieza a ver que la transformación de Laplace convierte una función exponencial en una función algebraica mas fácil de manejar.

En la figura 2-3 se representa una gráfica de la función exponencial que se ha analizado. Se puede ver que en $t = 0$ la funcion vale A, y conforme crece el tiempo, la funcion decrece tendiendo a cero. Si la función exponencial tuviera signo positivo, se iniciaría tambien con un valor A, y al crecer el tiempo la funcion creceria muy rapidamente sin límite, lo que resultaría ser una funcion completamente inestable.

$f(t) = Ae^{-\alpha t}$

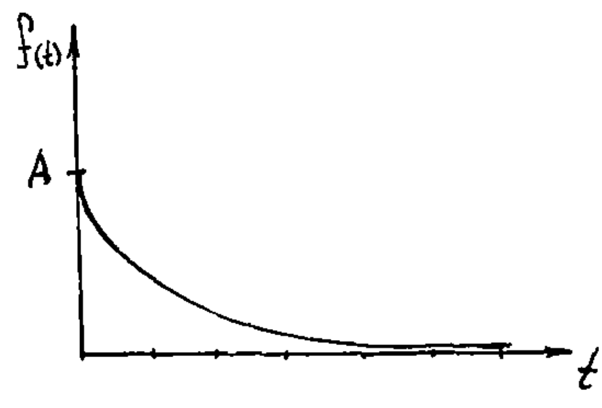


Fig. 2-3 Gráfica de una Función Exponencial

Funcion Rampa.-La funcion rampa matematicamente se puede expresar en la siguiente forma:

$$f(t) = 0 \quad \text{para } t < 0$$
$$f(t) = At \quad \text{para } t \geq 0$$

En la figura 2-4 se representa la gráfica de una función rampa. Se puede ver que la gráfica inicia en cero cuando t = 0 y va aumentando gradualmente conforme crece el tiempo. La función rampa es un plano inclinado cuya inclinación depende del valor de A. Esta funcion es muy utilizada en los controles electrónicos de la velocidad de motores eléctricos industriales, a los cuales se les aplica el voltaje en forma de rampa para que el motor vaya aumentando su velocidad gradualmente y no sea sometido a grandes esfuerzos mecánicos y eléctricos.

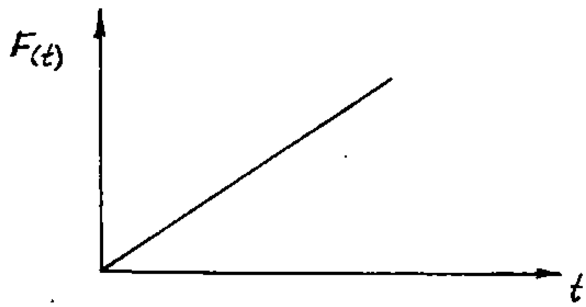


Fig. 2-4 Gráfica de una Funcion Rampa $F(t) = At$

A continuacion se calculara la transformada de Laplace de la funcion rampa:

Si $f(t) = At$ entonces $[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} At e^{-st} dt = A\int_0^{\infty} t e^{-st} =$

Utilizando integración por partes $F(s) = A \int udv = A [\ uv - \int vdu\ ]$

donde $u = t \qquad dv = e^{-st}dt$

$du = dt \qquad v = \int e^{-st}dt$

Antes de substituir los valores de u y v en la integración por partes se resolverá la integral para encontrar el valor de v.

Si $u_1 = -st$

$du_1 = -sdt \qquad v = \int e^{u_1}[-\frac{d\ u_1}{s}] = -1/s\int e^{u_1}du_1 = -1/s[e^{u_1}] =$

$dt = -\frac{d\ u_1}{s} \qquad v = -1/s[\ e^{-st}]$

Substituyendo los valores de u y v en la integración por partes tenemos lo siguiente:

$$A\int udv = A\,[\,uv - \int vdu\,] = A\,[\,t(-\frac{1}{s}e^{-st}) - \int(-\frac{1}{s}e^{-st})dt\,] =$$

$$= A\,[\,-\frac{t}{s}e^{-st} + \frac{1}{s}\int e^{-st}dt\,]$$

La integral de la ecuación anterior es idéntica al cálculo que se hizo para encontrar el valor de v, por lo que se substituirá dicho valor.

$$= A\,[\,-\frac{t}{s}e^{-st} + \frac{1}{s}(-\frac{1}{s}e^{-st})] = A\,[\,-\frac{t}{s}e^{-st} - \frac{1}{s^2}(e^{-st})]_0^{\alpha}$$

$$= A\,[-0 -0 - (0 - 1/s^2)] = A/s^2$$

$$F(s) = A/s^2$$

Función Senoidal.- La función senoidal se define matemáticamente por la siguiente ecuación:

$$f(t) = 0 \qquad \text{para } t<0$$
$$f(t) = A \text{ Sen } \omega t \qquad \text{para } t\geq 0$$

donde A " es la magnitud o valor maximo de la funcion senoidal y "ω" es llamada velocidad angular siendo ambos términos cantidades constantes.

La función senoidal es ampliamente utilizada en la práctica en todos aquellos equipos que funcionan con corriente eléctrica alterna, además de gran cantidad de equipo electrónico de comunicaciones, cuya señal de transmisión es una senoide (Radio, TV, Radar, Microondas). Lo anterior justifica plenamente la importancia de la función senoidal en una gran cantidad de aplicaciones prácticas.

La fig. 2-5 representa la forma gráfica de una función senoidal, que como se puede apreciar es una función periódica cuyo ciclo se repite continuamente.

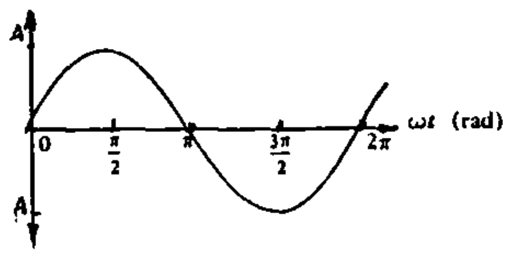


Fig. 2-5 Gráfica de una Función Senoidal $F(t) = A \text{ Sen } \omega t$

Para calcular la Transformada de la función senoidal se va a utilizar la forma exponencial del seno ya que ésto nos permitirá aplicar la transformada de Laplace de la función exponencial que ya es conocida. En seguida se aplica la integral de Laplace.

$$\mathcal{L}[\ A \text{ Sen } \omega t\ ] = A \int_0^{\alpha} \text{Sen } \omega t\ (e^{-st})\ dt$$

substituyendo el $\text{Sen } \omega t = \frac{1}{2\ j} [\ e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\ ]$ tenemos:

$$F(s) = A \int_0^{\alpha} [\frac{1}{2\ j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})]\ e^{-st} dt =$$

$$= \frac{A}{2\ j} \int_0^{\alpha} e^{(j\omega - s)t} dt - \frac{A}{2\ j} \int_0^{\alpha} e^{-(j\omega + s)t} dt =$$

$$= \frac{A}{2\ j} \int_0^{\alpha} e^{-(s - j\omega)t} dt - \frac{A}{2\ j} \int_0^{\alpha} e^{-(s + j\omega)t} dt =$$

Aplicando la fórmula de la transformada de una función exponencial

$$\mathcal{L}[\ A\ e^{-\alpha t}] = A \int_0^{\alpha} [\ e^{-(s+\alpha)t}]\ dt = \frac{A}{\alpha + s} \quad \text{tenemos :}$$

$$\mathcal{L}[\ A \text{ Sen } \omega t\ ] = \frac{A}{2\ j} [\frac{1}{s - j\omega}] - \frac{A}{2\ j} [\frac{1}{s + j\omega}]$$

$$\mathcal{L}[\ A \text{ Sen } \omega t\ ] = \frac{A}{2\ j} [\frac{(s + j\ \omega) - (s - j\ \omega)}{(s - j\omega)(s + j\omega)} = \frac{2\ A\ j\omega}{2\ j\ (s^2 + \omega^2)}$$

$$\mathcal{L}[\ A \text{ Sen } \omega t\ ] = \frac{A\ \omega}{s^2 + \omega^2}$$

Teoremas de la Transformada de Laplace.

Despues de haber calculado la transformada de Laplace de algunas funciones del tiempo muy utilizadas en los sistemas de control, es necesario estudiar varios teoremas relacionados con la transformada de laplace que nos ayudarán a profundizar un poco más en la teoria de la transformada para tener mejores bases y posteriormente aplicar estos teoremas cuando veamos el método de las tablas de la transformada que como ya se dijo es más directo que el método de integración que se ha aplicado hasta ahora.

En seguida se estudiarán un par de teoremas llamados primera y segunda propiedad de la traslación.

Teorema de la Primera Propiedad de la Traslación.
Este teorema establece que :

Si $\mathcal{L}[\ f(t)\ ] = F(s)$ entonces $\mathcal{L}[\ e^{\alpha t}\ f(t)\ ] = F(s-\alpha)$

Para demostrar éste teorema nos basaremos en la fórmula general de la transformada de laplace, que se vio cuando se dió la definición de la transformada.

$$\mathcal{L}[\ f(t)\ ] = \int_0^{\alpha} e^{-st} f(t)\, dt = F(s)$$

$$\mathcal{L}[\ e^{\alpha t}\ f(t)\ ] = \int_0^{\alpha} e^{-st} e^{\alpha t}\ f(t)\, dt = \int_0^{\alpha} e^{-(s-\alpha)} f(t)\, dt =$$

$$\mathcal{L}[\ e^{\alpha t}\ f(t)\ ] = F(s-\alpha)$$

que es lo que se quería demostrar.

El teorema de la primera propiedad de la traslación se puede aplicar en todos aquellos casos en donde se conozca la transformada de laplace de una función del tiempo y ésta esté multiplicada por una cantidad exponencial.

Teorema de la Segunda Propiedad de la traslación.
El teorema establece que :

Si $\mathcal{L}[\ f(t)\ ] = F(s)$ entonces $\mathcal{L}[\ f(t-\alpha)\ ] = e^{-\alpha s}\ F(s)$

Antes de demostrar el teorema es importante comprender la diferencia entre una $f(t)$ y una $f(t-\alpha)$. La función $f(t)$ es cualquier función del tiempo que inicia cuando $t = 0$, mientras que la $f(t-\alpha)$ es la misma función del tiempo, pero inicia en $t = \alpha$.

En la figura 2-6 se puede observar graficamente la diferencia entre las dos funciones del tiempo, una de las cuales se encuentra trasladada fuera del origen. Si la función es $f(t+\alpha)$, ésta se inicia antes de cero, si la función es $f(t)$, empieza en cero y si es $f(t-\alpha)$, la función inicia despues de cero.

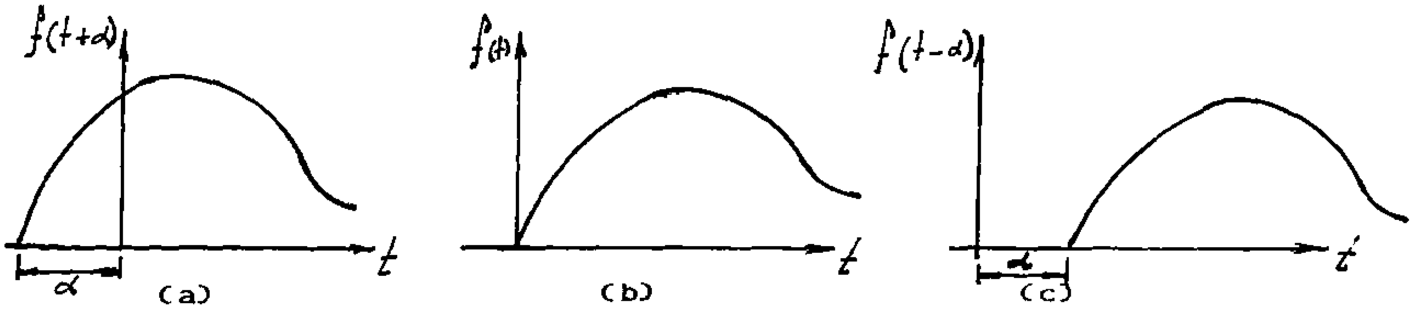


Fig 2-6 Funciones del tiempo que inician en diferentes tiempos.
(a) $f(t+\alpha)$ (b) $f(t)$ c) $f(t-\alpha)$

A continuación se demuestra el teorema de la segunda propiedad de la traslación de la transformada de Laplace.

Si $\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\alpha} e^{-st} f(t)\,dt = F(s)$ entonces

$$\mathcal{L}[f(t-\alpha)] = \int_0^{\alpha} e^{-st} f(t-\alpha)\,dt$$

para facilitar la integral se hará el siguiente cambio de variable

$$u = t - \alpha \quad \text{de donde} \quad t = u + \alpha \quad y \quad dt = du$$

substituyendo en la integral la nueva variable u , tenemos:

$$\mathcal{L}[f(t-\alpha)] = \int_0^{\alpha} e^{-s(u+\alpha)} f(u)\,du = e^{-s\alpha} \int_0 e^{-su} f(u)\,du = e^{-s\alpha} F(s)$$

que es lo que se queria demostrar.

Funcion Pulso .- La función pulso se puede definir matematicamente en la siguiente forma:

$$f(t) = A = \text{constante} \quad \text{para} \quad 0 < t < t_o$$
$$f(t) = 0 \quad \text{para} \quad t_o < t < 0$$

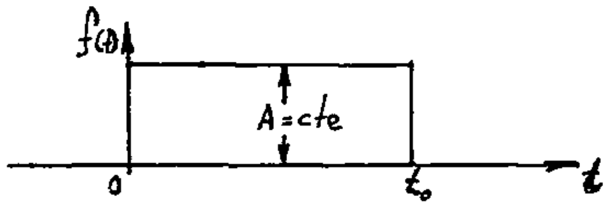


Fig. 2-7 Gráfica de la funcion pulso

En la figura 2-7 se representa una gráfica de la funcion pulso, la cual inicia en t=0 y termina en t=to.

La función pulso al igual que las funciones ya estudiadas tiene una aplicación enorme en todo tipo de circuitos digitales, por ejemplo en calculadoras electrónicas, computadoras digitales, relojes digitales y una gran cantidad de equipos electrónicos industriales.

Debido a su gran aplicación en la práctica, es importante conocer tanto la función como la transformada de laplace de la misma.

Para facilitar el cálculo de la transformada de Laplace de la función pulso, ésta se representará como la suma gráfica de dos funciones escalón. En la fig. 2-8 se representan las dos funciones escalón de cuya suma gráfica resulta la función pulso.

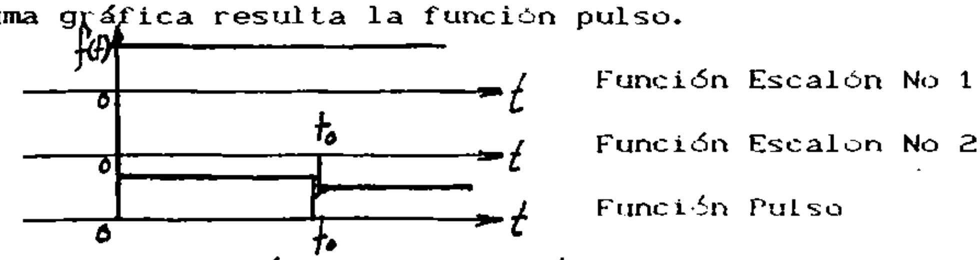


Fig. 2-8 Formación de una Función Pulso

De acuerdo con la gráfica 2-8, la función pulso se puede representar como la suma de las dos funciones escalón.

$$f(t) = f(\text{Pulso}) = f(\text{Escalon No 1}) + f(\text{Escalon No 2})$$

$$f(t) = f(\text{Pulso}) = A1(t) - A1(t-t_o)$$

La transformada de Laplace de $f(t)$ se obtiene como

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[A1(t)] - \mathcal{L}[A1(t-t_o)]$$

$$= \frac{A}{s} - \frac{A}{s}e^{-st_o} = \frac{A}{s}[1 - e^{-st_o}]$$

Como se puede observar, para obtener la transformada de laplace de la función pulso se necesitó aplicar el teorema de la segunda propiedad de la traslación.

Función Impulso.- La función impulso tiene semejanza con la función pulso. Se puede decir que el impulso es un caso limite de la función pulso, en donde la magnitud tiende a infinito y el tiempo de duración es muy pequeño, por lo que se dice que tiende a cero.

La Función impulso se puede definir matematicamente en la siguiente forma:

$$f(t) = \lim_{t_o \to 0} \frac{A}{t_o} \qquad \text{para } 0 < t < t_o$$

$$= 0 \qquad \text{para } t_o < t < 0$$

La fig 2-9 representa una gráfica de la función impulso. En ella se puede ver que la magnitud del impulso es el limite de A/t_o y la duracion es t_o. Como el tiempo tiende a cero, la magnitud tiende a infinito, pero el producto de la magnitud por el tiempo , que es el area bajo el impulso permanece siempre igual a A. Esta area igual a A es la que nos da en realidad la dimensión del impulso.

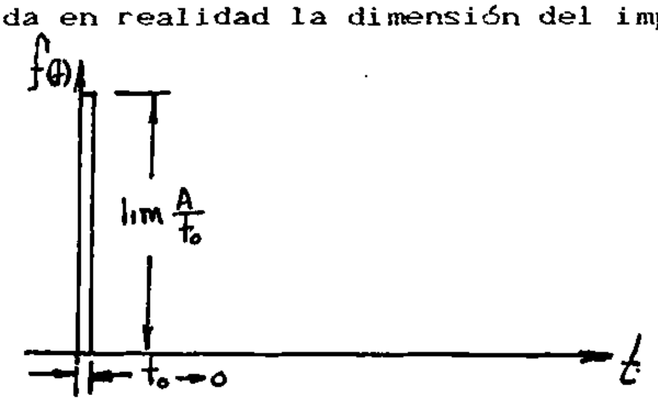


Fig. 2-9 Gráfica de la Funcion Impulso.

La funcion impulso se puede aplicar en la práctica para cualquier señal que aparezca y desaparezca en forma repentina, con una duración de tiempo minima.

Se puede calcular la transformada de Laplace de la funcion impulso, basándonos en la transformada de Laplace de la funcion pulso que ya se conoce, aprovechando la semejanza entre las dos funciones.

Si la transformada de laplace de la función pulso es:

$$\mathcal{L}[\ f(t)\ ] = \frac{A}{s}[1 - e^{-st_0}]$$

Entonces la transformada de laplace de la función impulso es semejante, solamente habrá que cambiarla magnitud que en el caso del pulso es A y en impulso es el lim de A/t_0 cuando $t_0 \to 0$.

Haciendo los cambios señalados, la transformada del impulso es:

$$\mathcal{L}[\ f(impulso)] = \lim_{t_0 \to 0} \frac{A}{t_0\ s}[1 - e^{-st_0}]$$

La transformada de laplace de la función impulso resulta ser un limite. Si substituimos el valor del tiempo tendiendo a cero, no llegamos aalgun valor definido ya que todo se nos convierte a infinito. Con el propósito de obtener un valor definido para la transformada de laplace del impulso, se aplicara la Regla de L'Hopital a fin de romper con la indeterminación. La Regla de L'Hopital consiste en derivar con respecto a t_0 y por separado el numerador y el denominador de la funcion límite. Una vez terminada la derivada, se substituye de nuevo el valor de t_0 tendiendo a cero y se comprueba si se llega a un valor o sigue la indeterminación. En nuestro caso la aplicación de la Regla de L'Hopital sería:

$$\mathcal{L}[\ f(impulso)] = \lim_{t_0 \to 0} \frac{\dfrac{d}{dt_0}[\ A(1 - e^{-st_0})]}{\dfrac{d}{d\ t_0}(\ t_0 s\ )}$$

$$= \frac{A\ s}{s} = A$$

El resultado obtenido nos dice que la transformada de Laplace de una función impulso, es igual al area bajo el impulso.

La función impulso cuya área es igual a la unidad, recibe el nombre de función impulso unitario o función delta de Dirac y se representa como $\delta(t)$. Obviamente la transformada de Laplace de la función impulso unitario es igual a uno.

La función impulso que tiene una magnitud infinita y una duración cero no existe en la realidad y solamente existe en la teoria matemática. Sin embargo cualquier señal que tenga una duración muy corta y una magnitud elevada, se puede comparar en forma aproximada a la función impulso.

Teorema del Cambio de Escala de Tiempos.- A veces es necesario modificar la escala de tiempos de una función del tiempo para poder calcular la transformada de Laplace con mayor facilidad.

Supongamos que conocemos la transformada de Laplace de una $f(t)$ y que deseamos calcular la transformada de Laplace de una $f(t/\alpha)$. El siguiente procedimiento matemático nos indica como lograrlo:

$$\mathcal{L}[f(t/\alpha)] = \int_0^\alpha f(t/\alpha)\, e^{-st} dt$$

para facilitar la integración se harán dos cambios de variable:

$$t_1 = t/\alpha \qquad y \qquad s = s_1/\alpha$$

$$t = t_1\alpha \quad y \quad dt = \alpha\, dt_1$$

haciendo las substituciones en función de las nuevas variables:

$$\mathcal{L}[f(t/\alpha)] = \int_0^\alpha f(t/\alpha)\, e^{-st} dt = \int_0^\alpha f(t_1)\, e^{-(s_1/\alpha)(t_1\alpha)} d(\alpha t_1)$$

$$= \alpha \int_0^\alpha f(t_1)\, e^{-s_1 t_1} dt_1 = \alpha\, F(s_1) = \alpha\, F(\alpha s)$$

Transformada de Laplace de las Derivadas.-En virtud de que la mayoria de los modelos matemáticos de sistemas de control físicos son expresados con ecuaciones diferenciales, es muy importante estudiar la transformada de Laplace de dichas ecuaciones. En seguida se calculará la transformada de Laplace de la primera y de la segunda derivada.

Transformada de Laplace de la primera derivada.- Si tenemos una función del tiempo tal que:

$$f(t) = x \quad \text{entonces} \quad f'(t) = dx/dt$$

por lo tanto $[dx/dt] = [f'(t)] = \int_0^\alpha e^{-st} f'(t) dt$

utilizando integración por partes :

$$u = e^{-st} \qquad dv = f'(t)dt = [dx/dt]dt = dx$$

$$du = -s\, e^{-st} dt \qquad v = x = f(t)$$

Substituyendo en la integración por partes :

$$[\,dx/dt\,] = uv - \int vdu = e^{-st}f_{(t)}\Big]_{0}^{\alpha} - \int_{0}^{\alpha} f_{(t)}[-se^{-st}dt]$$

$$= e^{-\alpha}f_{(t)} - e^{-0}f_{(0)} + s\int_{0}^{\alpha} e^{-st}f_{(t)}dt$$

$$= -f_{(0)} + sF_{(s)} = sF_{(s)} - f_{(0)}$$

Transformada de Laplace de la Segunda Derivada.- Para demostrar la fórmula de la transformada de Laplace de la segunda derivada, tomaremos como referencia la fórmula anterior de la transformada de Laplace de la primera derivada. Mediante un artificio matemático consistente en un cambio de función del tiempo se obtendrá la transformada de Laplace de la segunda derivada, apoyándonos en la primera derivada.

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2} f_{(t)}\right] = \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} g_{(t)}\right]$$

Siendo $g_{(t)} = \frac{d}{dt} f_{(t)}$

Por lo tanto:
$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2} f_{(t)}\right] = s\,\mathcal{L}[\,g_{(t)}\,] - g_{(0)}$$

$$= s\,\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} f_{(t)}\right] - f'_{(0)}$$

$$= s\,[\,sF_{(s)} - f_{(0)}\,] - f'_{(0)}$$

$$= s^2\,F_{(s)} - s\,f_{(0)} - f'_{(0)}$$

La Transformada de Laplace de la tercera derivada y de orden superior, se pueden calcular siguiendo el mismo procedimiento. En las tablas de la Transformada de Laplace se indica una fórmula general para obtener la transformada de Laplace de la derivada de orden "n". Sin embargo se aclara que las derivadas más usuales en la práctica son la primera y la segunda que son las que se han calculado.

Tomando como referencia la transformada de Laplace de la primera derivada, se estudiarán dos teoremas más , llamados Teorema del Valor Final y Teorema del Valor Inicial. Estos teoremas se aplican cuando se desea calcular el valor de una función del tiempo cuando el tiempo es igual a cero o cuando el tiempo tiende a infinito.

Frecuentemente el valor de una funcion del tiempo se hace infinito o queda indeterminada cuando el tiempo es cero o tiende a infinito.

Algunas veces se puede romper ésta indeterminación aplicando alguno de los dos teoremas, ya que el cálculo de la función del tiempo se realiza en funcion de la variable compleja "s".

TEOREMA DEL VALOR FINAL.- Partiendo de la transformada de Laplace de la primera derivada, se demostrará a continuacion éste teorema.

$$\int_0^{\alpha}\left[\frac{d}{d\,t}\,f(t)\right]\,e^{-st}dt = sF(s) + f(o)$$

Si calculamos el límite de la ecuación anterior cuando s--0

$$\lim_{s\to 0}\int_0^{\alpha}\left[\frac{d}{d\,t}\,f(t)\right]\,e^{-st}dt = \lim_{s\to 0}\,[\,sF(s) - f(o)]$$

debido a que el límite de $e^{-st} = 1$ cuando $s \to 0$, entonces

$$\int_0^{\alpha}\left[\frac{d}{d\,t}\,f(t)\right]dt = \int_0^{\alpha}d\,f(t) = f(t)\Big]_0^{\alpha} = f(\alpha) - f(o)$$

por lo tanto:

$$f(\alpha) - f(o) = \lim_{s\to 0}\,[\,sF(s)] - f(o)$$

$$f(\alpha) = \lim_{t\to\alpha} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

TEOREMA DEL VALOR INICIAL.- Este teorema tiene mucha semejanza con el anterior e igualmente partiremos de la transformada de Laplace de la primera derivada para su demostración.

$$\int_0^{\alpha}\left[\frac{d}{d\,t}\,f(t)\right]\,e^{-st}dt = sF(s) - f(o)$$

Si ahora se calcula el límite de la ecuación cuando $s \to \alpha$, el termino e^{-st} se hace igual a cero y con ello toda la integral se iguala a cero. Por lo tanto la ecuación quedará como sigue:

$$0 = \mathrm{Lim}\; sF(s) - f(o) \quad \text{o lo que es lo mismo}$$

$$f(o) = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\alpha} sF(s)$$

TRANSFORMADA DE LAPLACE DE LAS INTEGRALES.-Como último teorema de la Transformada de Laplace, demostraremos la transformada de Laplace de las integrales, la cual se aplica cuando hay que transformar una ecuación integral o integrodiferencial.

Al igual que en los dos teoremas anteriores (del valor final y del valor inicial) la ecuación de referencia de la cual partiremos será la ecuación de la transformada de Laplace de la primera derivada.

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = ?$$

$$\text{Si} \quad g(t) = \int_0^t f(t)dt \quad \text{entonces}$$

$$g'(t) = \frac{d\,g(t)}{d\,t} = \frac{d}{d\,t}\int_0^t f(t)dt = f(t)$$

Aplicando la transformada de Laplace de la primera derivada.

$$\mathcal{L}[g'(t)] = s\,\mathcal{L}[g(t)] - g(o)$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = s\,\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] - g(o)$$

$$F(s) = s\,\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] - g(o)$$

Despejando la transformada de Laplace de la integral que es lo que nos interesa conocer, tenemos:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{g(o)}{s}$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \int_0^t \frac{f(o)dt}{s}$$

TABLAS DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE.—En las figuras 2-10 y 2-11 hay una lista de fórmulas de la transformada de Laplace. Las tablas que se presentan aquí son las más usuales en sistemas de control.

	$f(t)$	$F(s)$
1	impulso unitario $\delta(t)$	1
2	escalón unitario $1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
5	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
6	sen ωt	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
7	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
8	$t^n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
9	$t^n e^{-at} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
10	$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
11	$\frac{1}{b-a}(be^{-bt} - ae^{-at})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
12	$\frac{1}{ab}\left[1 + \frac{1}{a-b}(be^{-at} - ae^{-bt})\right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
13	e^{-at} sen ωt	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
14	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
15	$\frac{1}{a^2}(at - 1 + e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
16	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen} \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\, t$	$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$
17	$\frac{-1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen} (\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\, t - \phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{s}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$
18	$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\, t + \phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$

Fig. 2-10.- Tablas de la Transformada de Laplace.

1	$\mathcal{L}[Af(t)] = AF(s)$
2	$\mathcal{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$
3	$\mathcal{L}_\pm\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0\pm)$
4	$\mathcal{L}_\pm\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = s^2F(s) - sf(0\pm) - \dot{f}(0\pm)$
5	$\mathcal{L}_\pm\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k}\overset{(k-1)}{f}(0\pm)$ donde $\overset{(k-1)}{f}(t) = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}f(t)$
6	$\mathcal{L}_\pm\left[\int f(t)\,dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{\left[\int f(t)\,dt\right]_{t=0\pm}}{s}$
7	$\mathcal{L}_\pm\left[\iint f(t)\,dt\,dt\right] = \frac{F(s)}{s^2} + \frac{\left[\int f(t)\,dt\right]_{t=0\pm}}{s^2} + \frac{\left[\iint f(t)\,dt\,dt\right]_{t=0\pm}}{s}$
8	$\mathcal{L}_\pm\left[\int\cdots\int f(t)\,(dt)^n\right] = \frac{F(s)}{s^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{s^{n-k+1}}\left[\int\cdots\int f(t)\,(dt)^k\right]_{t=0\pm}$
9	$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$
10	$\mathcal{L}[f(t-a)\,1(t-a)] = e^{-as}F(s)$
11	$\mathcal{L}[t\,f(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$
12	$\mathcal{L}\left[\frac{1}{t}f(t)\right] = \int_s^\infty F(s)\,ds$
13	$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = a\,F(as)$

Fig. 2-11.- Tablas de la Transformada de Laplace.

EJERCICIOS DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE.- A continuación se resolverán algunos ejercicios de la Transformada de Laplace y aplicaremos para ello algunas fórmulas de las tablas de la transformada y tambien varios teoremas. Cuando la fórmula de la tabla es igual que nuestro problema, el problema es muy sencillo y se trata sólo de substituir los valores del problema en la formula general. Pero cuando nuestro problema no aparece en las fórmulas, entonces se requiere aplicar algun teorema o artificio matemático para poder adecuar nuestro problema particular a las tablas que son de aplicación general.

Ejercicio 2-1.- Calcular la transformada de Laplace de la siguiente funcion del tiempo:

$$f(t) = 5\ e^{-2t}$$

Solución : Aplicando la Fórmula de la transformada de Laplace de una función exponencial:

$$\mathcal{L}[A\ e^{-\alpha t}] = \frac{A}{\alpha + s} \qquad \mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \frac{5}{2+s}$$

Ejercicio 2-2.- Calcular la transformada de Laplace de $f(t)=t^3$

Solucion : Aplicando la Formula No 8 de la tabla:

$$\mathcal{L}[t^3] = \frac{3!}{s^{3+1}} = \frac{6}{s^4}$$

Ejercicio 2-3.- Calcular la transformada de Laplace de la siguiente función del tiempo.

$$f(t)=5t^3e^{-2t}$$

Solución : Este ejercicio lo podemos resolver en dos formas, una es aplicando la primera propiedad de la traslación y la otra es aplicando directamente la formula No 9.

Aplicando la primera propiedad de la traslacion:

Si $\mathcal{L}[t^3] = \frac{6}{s^4}$ entonces :

$$\mathcal{L}[5t^3e^{-2t}] = \frac{5\text{x}\ 6}{(s+3)^4} = \frac{30}{(s+3)^4}$$

Aplicando directamente la fórmula No. [illegible]

$$\mathcal{L}[\,\cdot\, e^{-at}] = [illegible]$$

Lógicamente los resultados son idénticos con ambos métodos.

Ejercicio 2-4.- Calcular la transformada de Laplace de la siguiente función del tiempo:

$$f_{(t)} = 8 \text{ Sen } 5t$$

Solución : Aplicando directamente la fórmula No 5 de las tablas:

$$F_{(s)} = \mathcal{L}[\,f_{(t)}] = \mathcal{L}[\,8 \text{ Sen } 5t] = \frac{8 \times 5}{s^2+5^2} = \frac{40}{s^2+25}$$

Ejercicio 2-5.- Calcular la transformada de Laplace de la siguiente ecuación diferencial :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 10x = 8 \text{ Sen } 6t$$

Cond. iniciales $x_{(0)} = 3 \quad y \quad \dot{x}_{(0)} = 2$

Solución : Aplicando las fórmulas de las tablas término a término iniciamos con la transformada de la segunda derivada.

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}x\right] = s^2X_{(s)} - sx_{(0)} - \dot{x}_{(0)} = s^2X_{(s)} - 3s - 2$$

$$\mathcal{L}\left[5\frac{dx}{dt}\right] = 5[\,sX_{(s)} - x_{(0)}] = 5sX_{(s)} - 15$$

$$\mathcal{L}[\,10x\,] = 10\; X_{(s)}$$

$$\mathcal{L}[\,8 \text{ Sen}6t] = \frac{8\times 6}{s^2+6^2} = \frac{48}{s^2+36}$$

Sumando todos los términos ya transformados.

$$s^2X_{(s)} - 3s - 2 + 5sX_{(s)} - 15 + 10\;X_{(s)} = \frac{48}{s^2+36}$$

$$X_{(s)}[\,s^2+5s+10] = \frac{48}{s^2+36} + 3s + 17 = \frac{48 + 3s(s^2+36) + 17(s^2+36)}{s^2+36}$$

$$[illegible]\left[\ [illegible]\ \right] = \frac{[illegible]}{s^2 + [illegible]}$$

$$F_{(s)} = \frac{[illegible]s^3 + [illegible]7s^2 + [illegible]6s + [illegible]}{s^2 + 36}$$

[illegible] LA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE.

La transformada inversa de Laplace es el procedimiento matemático de pasar de una expresión compleja en función de "s" a una función del tiempo. La forma de representar matemáticamente la transformada inversa se indica en la siguiente ecuación:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\ F_{(s)}\ \right] = f_{(t)}$$

El problema de la transformada inversa consiste por lo tanto en pasar de una $F_{(s)}$ a una $f_{(t)}$. Notese que siempre se utilizan mayúsculas para representar funciones complejas y minúsculas para las funciones del tiempo.

El procedimiento utilizado para obtener la transformada inversa de Laplace es la aplicación de las tablas de la transformada en su [illegible] inverso al que se usó para obtener la transformada de las [illegible]. Cuando la $F_{(s)}$ que deseamos transformar inversamente coincide con las formulas de las tablas, el problema se resuelve sencillamente con la sustitución de la formula adecuada. Pero cuando nuestra función compleja $F_{(s)}$ no coincide con ninguna formula, lo cual es el caso mas común, entonces se requiere descomponer nuestra funcion compleja en dos o más funciones complejas cuya suma sea igual a la funcion compleja que queremos resolver.

Si la funcion compleja que tenemos es la suma de varias funciones complejas.

$$F_{(s)} = F_{1(s)} + F_{2(s)} + \ldots + F_{n(s)}$$

y si las funciones $F_{1(s)}$, $F_{2(s)}$ etc están en las tablas, entonces:

$$\mathcal{L}^{-1}[F_{(s)}] = \mathcal{L}^{-1}[F_{1(s)}] + \mathcal{L}^{-1}[F_{2(s)}] + \ldots + \mathcal{L}^{-1}[F_{n(s)}]$$

$$= f_{1(t)} + f_{2(t)} + \ldots + f_{n(t)}$$

donde $f_{1(t)}, f_{2(t)}, \ldots, f_{n(t)}$ son las transformadas de Laplace inversas de $F_{1(s)}, F_{2(s)}, \ldots, F_{n(s)}$, respectivamente.

En virtud de que la mayoría de las funciones complejas que se manejan en sistemas de control son de forma fraccionaria, entonces será necesario descomponer una fracción compleja grande en la suma de varias fracciones parciales más pequeñas y cuya transformada inversa si podamos encontrar en las tablas.

Las funciones complejas $F(s)$ de sistemas de control generalmente son de la forma

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

donde $B(s)$ y $A(s)$ son polinomios en s, y en donde el grado de $A(s)$ es mayor que el de $B(s)$. Si el grado de $B(s)$ es mayor que el de $A(s)$, se requiere realizar la división algebraica antes de desarrollar las fracciones parciales.

Antes de descomponer la fracción compleja en varias fracciones parciales se necesita conocer el tipo de raices del polinomio $A(s)$ del denominador. Estas raices sólo pueden ser de tres tipos:

a) Raices reales y distintas
b) Raices reales y multiples
c) Raices complejas conjugadas

Dependiendo del tipo de raices que se tengan es el método que se aplica para desarrollar en fracciones parciales.

Las funciones complejas $F(s)$ normalmente se expresan de la siguiente forma:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)}$$

donde K es una constante e indica la ganancia del sistema, $z_1, z_2, \ldots z_m$ son los ceros y $p_1, p_2 \ldots p_n$, son los polos de la funcion compleja.

Desarrollo de Fracciones parciales cuando la función compleja $F(s)$ contiene unicamente polos reales y distintos.- Cuando se presenta éste tipo de función compleja, ésta se puede representar como la suma de varias fracciones parciales más simples, como sigue:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{a_1}{s+p_1} + \frac{a_2}{s+p_2} + \ldots + \frac{a_n}{s+p_n}$$

donde $a_1, a_2, \ldots a_n$ son constantes que se pueden calcular, como sigue. Primeramente se calcula el valor de a_1, multiplicando toda la función compleja por $(s+p_1)$ y se hace $s = -p_1$. Posteriormente se calcula a_2 en forma semejante, multiplicando $F(s)$ por $(s+p_2)$ y haciendo $s = -p_2$.

Multiplicando todos los términos de la función por (s + p_1) tenemos:

$$\left[F_{(s)}\,(s + p_1)\right]_{s=-p_1} = \left[\frac{a_1}{s+p_1}(s+p_1) + \frac{a_2}{s+p_2}(s+p_1) + \ldots + \frac{a_n}{s+p_n}\right]_{s=-p_1}$$

Al substituir en la ecuación el valor de $s=-p_1$, todos los términos a la derecha de la igualdad se hacen cero, con excepción del primero, el cual se hace igual a "a_1", que es el valor que se desea conocer. Por lo tanto:

$$a_1 = \left[F_{(s)}\,(s + p_1)\right]_{s=-p_1}$$

El mismo procedimiento se puede utilizar para calcular la constante a_2... a_n, por lo que en forma general:

$$a_n = \left[F_{(s)}\,(s + p_n)\right]_{s=-p_n}$$

Una vez que se calculan los valores de a_1, a_2, etc, se substituyen en el desarrollo de fracciones parciales y posteriormente se aplica la formula No 4 para una funcion exponencial:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a_n}{s+p_n}\right] = a_n\, e^{-p_n t}$$

De donde se obtiene $f_{(t)} = \mathcal{L}^{-1}[F_{(s)}]$ como sigue:

$$f_{(t)} = a_1\, e^{-p_1 t} + a_2\, e^{-p_2 t} + \ldots + a_n\, e^{-p_n t}$$

Ejercicio 2-6.- Calcular la transformada inversa de Laplace de

$$F_{(s)} = \frac{s + 4}{(s + 2)(s + 6)}$$

Solución :Como la función compleja tiene dos polos reales y distintos, se puede descomponer en la suma de dos fracciones parciales

$$F_{(s)} = \frac{a_1}{s+2} + \frac{a_2}{s+6}$$

Donde $a_1 = \left[\frac{s + 4}{(s + 2)(s + 6)}(s + 2)\right]_{s=-2} = \left[\frac{s + 4}{s + 6}\right]_{s=-2} = \frac{-2+4}{-2+6} = \frac{1}{2}$

$$a_2 = \left[\frac{s + 4}{(s + 2)(s + 6)}(s + 6)\right]_{s=-6} = \left[\frac{s + 4}{s + 2}\right]_{s=-6} = \frac{-6+4}{-6+2} = \frac{1}{2}$$

Substituyendo los valores de a_1 y a_2 tenemos

$$f_{(t)} = \mathcal{L}^{-1}[F_{(s)}] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{0.5}{s+2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{0.5}{s+6}\right] = 0.5\, e^{-2t} + 0.5\, e^{-6t}$$

Desarrollo de fracciones parciales cuando tiene polos complejos conjugados.- Cuando la funcion compleja tiene dos polos p_1 y p_2 complejos conjugados, el desarrollo de la funcion compleja en fracciones parciales se realiza en la siguiente forma:

$$F_{(s)} = \frac{\alpha_1 s + \alpha_2}{(s + p_1)(s + p_2)} + \frac{a_3}{(s + p_3)} + \ldots\ldots + \frac{a_n}{s + p_n}$$

Los polos $p_3 \ldots p_n$ son polos reales y distintos, por lo que los valores de a_3 hasta a_n se calculan por el método anterior.

Los valores de α_1 y α_2 se pueden obtener multiplicando todos los terminos de la ecuación de $F_{(s)}$ por $(s + p_1)(s + p_2)$ y haciendo $s = -p_1$

$$\left[F_{(s)}(s+p_1)(s+p_2) \right]_{s=-p_1} = \left[(\alpha_1 s+\alpha_2) + \frac{a_3}{s+p_3}(s+p_1)(s+p_2) + \ldots + \frac{a_n}{s+p_n}(s+p_1)(s+p_2) \right]_{s=-p_1}$$

Al hacer $s=-p_1$ se eliminan todos los términos a la derecha de la igualdad con excepción del término $(\alpha_1 s + \alpha_2)$, entonces

$$(\alpha_1 s + \alpha_2)_{s=-p_1} = \left[F_{(s)}(s + p_1)(s + p_2) \right]_{s=-p_1}$$

Debido a que p_1 es una cantidad compleja, la ecuacion anterior es una ecuacion compleja que tiene términos reales y términos imaginarios.Por lo tanto de la ecuacion compleja se pueden obtener dos ecuaciones independientes, una con las partes reales y otra con las partes imaginarias. De estas dos ecuaciones se obtienen los valores de α_1 y α_2.En el siguiente ejemplo se ilustra el método de polos complejos.

Ejercicio 2-7.- Calcular la transformada inversa de Laplace de

$$F_{(s)} = \frac{s + 1}{s(s^2 + s + 1)}$$

Solución : Como se puede ver la función compleja tiene tres polos, uno en el origen y los otros dos se deberminarán aplicando la fórmula general de segundo grado

$$s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$s = -0.5 \pm j\,0.866$$

Los dos valores de "s" nos indican que tenemos polos complejos conjugados, por lo que la $F_{(s)}$ se desarrollara de la siguiente forma:

$$F_{(s)} = \frac{s + 1}{s(s^2 + s + 1)} = \frac{a}{s} + \frac{\alpha_1 s+\alpha_2}{s^2+s + 1} \qquad (2-1)$$

Substituyendo los valores de las raíces complejas conjugadas, el trinomio $s^2 + s + 1$ queda factorizado en la siguiente forma:

$$s^2 + s + 1 = (s + 0.5 + j0.866)(s + 0.5 - j0.866)$$

por lo que la $F_{(s)}$ de la ecuación 2-1 queda como sigue:

$$F_{(s)} = \frac{a}{s} + \frac{\alpha_1 s + \alpha_2}{(s + 0.5 + j0866)(s + 0.5 - j0.866)} \qquad (2-2)$$

Para calcular el valor de la constante "a" se multiplican todos los términos de la ecuación 2-1 por "s" y se hace $s = 0$.

$$\frac{s + 1}{s(s^2 + s + 1)}(s) = \frac{a}{s}(s) + \frac{\alpha_1 s + \alpha_2}{s^2 + s + 1}(s) \quad \text{haciendo } s=0$$

$$a = \left[\frac{s(s + 1)}{s(s^2 + s + 1)}\right]_{s=0} = 1$$

Para calcular el valor de las constantes α_1 y α_2, se multiplican todos los términos de la ecuación 2-2 por $(s+0.5+j0.866)(s+0.5-j0.866)$ y se le da el valor a $s= -0.5-j0.866$, con lo cual se llega a la siguiente ecuación:

$$\left[\frac{s + 1}{s}\right]_{s=-0.5-j0.866} = [\alpha_1 s + \alpha_2]_{s=-0.5-j0.866}$$

$$\frac{0.5 - j0.866}{-0.5 - j0.866} = \alpha_1[-0.5 - j0.866] + \alpha_2$$

simplificando la ecuación anterior llegamos a

$$0.5 - j0.866 = \alpha_1[0.25 + j0.866 - 0.75] + \alpha_2[-0.5 - j0.866]$$

de ésta ecuación compleja podemos obtener dos ecuaciones independientes, una con las partes reales (P.R.) y otra con las partes imaginarias (P.I.).

(partes reales) $\qquad 0.5 = -0.5\alpha_1 - 0.5\alpha_2$

(partes imaginarias) $\qquad -j0.866 = j0.866\alpha_1 - j0.866\alpha_2$

las dos ecuaciones anteriores se pueden transformar para facilitar su manejo como se indica en seguida:

(P.R.) $\qquad \alpha_1 + \alpha_2 = -1$

(P.I.) $\qquad \alpha_1 - \alpha_2 = -1$

Resolviendo las dos ecuaciones de partes reales y partes imaginarias por cualquier método se obtienen los siguientes resultados

$$\alpha_1 = -1 \quad y \quad \alpha_2 = 0$$

Substituyendo los valores de las tres constantes α_1, α_2 y a en la ecuación 2-2 la función compleja $F_{(s)}$ toma la siguiente forma:

$$F_{(s)} = \frac{1}{s} + \frac{-s + 0}{(s + 0.5 + j0.866)(s + 0.5 - j0.866)}$$

$$F_{(s)} = \frac{1}{s} + \frac{-s}{[(s + 0.5) + j0.866][(s + 0.5) - j0.866]}$$

El denominador de la fracción más grande de $F_{(s)}$ si se observa es el producto de dos binomios conjugados que se puede convertir en una diferencia de cuadrados como se indica

$$F_{(s)} = \frac{1}{s} + \frac{-s}{[(s + 0.5)^2 - (j0.866)^2]}$$

Para poder adecuar nuestro problema a las tablas de la transformada de Laplace, sumamos y restamos al numerador de la segunda fracción la cantidad de 0.5.

$$F_{(s)} = \frac{1}{s} + \frac{-s + 0.5 - 0.5 -}{[(s + 0.5)^2 + (0.866)^2]}$$

$$F_{(s)} = \frac{1}{s} - \frac{s + 0.5}{[(s + 0.5)^2 + (0.866)^2]} + \frac{0.5\left[\frac{0.866}{0.866}\right]}{[(s + 0.5)^2 + (0.866)^2]}$$

Aplicando las fórmulas de las tablas de la transformada de Laplace a la ecuación anterior tenemos:

$$f_{(t)} = \mathcal{L}^{-1}[F_{(s)}] = 1 - e^{-0.5t}\text{Cos } 0.866t + 0.578\, e^{-0.5t}\text{Sen } 0.866t$$

Desarrollo de fracciones parciales [illegible]
[illegible] se escribe en la siguiente forma:

$$F_{(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{(s + p_1)^r}$$

El binomio $(s + p_1)^r$ nos indica que la función compleja tiene "r" polos múltiples ubicados en el punto $s = -p_1$. El desarrollo en fracciones parciales de la función compleja se indica enseguida

$$F_{(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_r}{(s + p_1)^r} + \frac{b_{r-1}}{(s + p_1)^{r-1}} + \ldots\ldots + \frac{b_1}{(s + p_1)} \qquad 2\text{-}3$$

La constante b_r se puede calcular multiplicando todos los términos de la ecuación 2-3 por $(s + p_1)^r$ y haciendo $s = -p_1$, de donde

$$b_r = [F_{(s)}(s + p_1)^r]_{s=-p_1}$$

Para calcular b_{r-1} se deriva con respecto a "s" la ecuación 2-3, multiplicada por $(s + p_1)^r$ y se hace de igual manera $s = -p_1$

$$\left[\frac{d}{ds}F_{(s)}(s + p_1)^r\right]_{s=-p_1} = \frac{d}{ds}\left[\frac{b_r(s + p_1)^r}{(s + p_1)^r}\right]_{s=-p_1} + \frac{d}{ds}\left[\frac{b_{r-1}(s + p_1)^r}{(s + p_1)^{r-1}}\right]_{s=-p_1} + \ldots + \frac{d}{ds}\left[\frac{b_1(s + p_1)^r}{(s + p_1)}\right]_{s=-p_1}$$

Todos los términos a la derecha de la igualdad se eliminan con excepción del segundo término, el cual se hace igual a b_{r-1}, que es el término que deseamos conocer, de tal manera que

$$b_{r-1} = \left\{\frac{d}{ds}[F_{(s)}(s + p_1)^r]\right\}_{s=-p_1}$$

Las demás constantes b_{r-2}, b_{r-3}, hasta b_1 se obtienen calculando la segunda derivada, y la tercera derivada sucesivamente, siguiendo éste procedimiento se llega a obtener una fórmula general para cualquier constante b_{r-j} hasta b_1. Los valores de las constantes son:

$$b_{r-j} = \frac{1}{j!}\left\{\frac{d^j}{ds^j}[F_{(s)}(s + p_1)^r]\right\}_{s=-p_1}$$

$$b_1 = \frac{1}{(r - 1)!}\left\{\frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}}[F_{(s)}(s + p_1)^r]\right\}_{s=-p_1}$$

Una vez obtenidas todas las constantes b_r, $b_{r-1}, \ldots, b_1$ se substituyen en la ecuación 2-3 y se aplican las fórmulas adecuadas de las tablas de la transformada de Laplace para calcular la transformada inversa.

A continuación se resolverá un ejercicio de la transformada inversa de Laplace de una función compleja que tiene polos múltiples con el fin de aplicar el método descrito anteriormente.

Ejercicio 2-8.- Hallar la transformada de Laplace inversa de la siguiente función compleja $F_{(s)}$:

$$F_{(s)} = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s + 1)^3}$$

Solución: Si observamos el denominador de $F_{(s)}$ podemos inmediatamente darnos cuenta que la función compleja tiene tres polos en $s=-1$, por ser un binomio al cubo, y por lo tanto se trata de un caso de polos múltiples. De acuerdo con lo anterior la $F_{(s)}$ desarrollada en varias fracciones parciales queda como sigue:

$$F_{(s)} = \frac{b_3}{(s + 1)^3} + \frac{b_2}{(s + 1)^2} + \frac{b_1}{(s + 1)} \qquad (2\text{-}4)$$

El primer paso es el cálculo de las constantes b_3, b_2 y b_1, para lo cual se aplicarán las fórmulas que ya se tienen para b_r, b_{r-1} y b_1 respectivamente.

$$b_3 = b_r = [F_{(s)}(s + 1)^3]_{s=-1} = (s^2 + 2s + 3)_{s=-1} = 2$$

$$b_2 = \{\frac{d}{ds}[F_{(s)}(s + 1)^3]\}_{s=-1} = [\frac{d}{ds}(s^2 + 2s + 3)]_{s=-1} =$$

$$b_2 = (2s + 2)_{s=-1} = 0$$

$$b_1 = \frac{1}{(3 - 1)!}\{\frac{d^2}{ds^2}[F_{(s)}(s + 1)^3]\}_{s=-1}$$

$$= \frac{1}{2!}[\frac{d^2}{ds^2}(s^2 + 2s + 3)]_{s=-1} = \frac{1}{2}(2) = 1$$

Substituyendo los valores de b_3, b_2 y b_1 en la ecuación 2-4 tenemos:

$$F_{(s)} = \frac{2}{(s + 1)^3} + \frac{1}{(s + 1)}$$ y la transformada inversa es:

$$f_{(t)} = \mathcal{L}^{-1}[F_{(s)}] = \mathcal{L}^{-1}[\frac{2}{(s + 1)^3}] + \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(s + 1)}] = (t^2 + 1)e^{-t}$$

[illegible]

diferencial es importante conocer y saber aplicar la transformada de Laplace para resolver las ecuaciones diferenciales. A continuación se plantean y resuelven algunas ecuaciones diferenciales por el método de la transformada de Laplace.

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación diferencial por el método de la transformada de Laplace.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 4x = 10 \qquad x(0) = 4 \qquad x'(0) = 3$$

Solución: Aplicando las fórmulas de las tablas de la transformada de Laplace tenemos:

$$s^2X(s) - s\,x(0) - x'(0) + 5[sX(s) - x(0)] + 4X(s) = \frac{10}{s}$$

sustituyendo las condiciones iniciales de la ecuación diferencial

$$s^2X(s) - 4s - 3 + 5sX(s) - 20 + 4X(s) = \frac{10}{s}$$

sacando como factor común el término X(s)

$$X(s)[s^2 + 5s + 4] = \frac{10}{s} + 4s + 23 = \frac{10 + 4s^2 + 23s}{s}$$

$$X(s) = \frac{4s^2 + 23s + 10}{s[s^2 + 5s + 4]}$$

Para completar la solución hay que calcular la transformada inversa de Laplace. Como se puede ver la función X(s) tiene tres polos uno en el origen y los otros dos hay que localizarlos aplicando la fórmula general de segundo grado.

$$s = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4\times4}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} \qquad s_1 = -1 \qquad s_2 = -4$$

De tal manera que $s^2 + 5s + 4 = (s + 1)(s + 4)$

De acuerdo con las raíces calculadas s_1 y s_2, los polos de X(s) son reales y distintos. La X(s) se factoriza en la siguiente forma:

$$X(s) = \frac{4s^2 + 23s + 10}{s(s + 1)(s + 4)} = \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s + 1} + \frac{a_3}{s + 4}$$

Los valores de las constantes a_1, a_2 y a_3 se calculan [illegible]

$$a_1 = [X(s)s]_{s=0} = \frac{4s^2 + 23s + 10}{(s+1)(s+4)}_{s=0} = \frac{0 + 0 + 10}{1 \times 4} = 2.5$$

$$a_2 = [X(s)(s+1)]_{s=-1} = \frac{4s^2 + 23s + 10}{s(s+4)}_{s=-1} = \frac{4 - 23 + 10}{-1(-1+4)} = \frac{-9}{-3} = 3$$

$$a_3 = [X(s)(s+4)]_{s=-4} = \frac{4s^2 + 23s + 10}{s(s+1)}_{s=-4} = \frac{64 - 92 + 10}{-4(-4+1)} = \frac{-18}{12} = -1.5$$

Substituyendo los valores de las constantes a_1, a_2 y a_3 en $X(s)$

$$X(s) = \frac{2.5}{s} + \frac{3}{s+1} + \frac{-1.5}{s+4}$$

Aplicando las tablas para calcular la transformada inversa

$$\mathcal{L}^{-1} X(s) = x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2.5}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1.5}{s+4}\right]$$

$$x(t) = 2.5 - 3e^{-t} - 1.5e^{-4t}$$

Ejercicio 2-10.- Resolver la siguiente ecuación diferencial por el método de la transformada de Laplace.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 8x = 10 \qquad x' = 3 \qquad x(0) = 4$$

Solución: Transformando por Laplace tenemos:

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + 4sX(s) - 4x(0) + 8X(s) = \frac{10}{s}$$

$$s^2X(s) - 4s - 3 + 4sX(s) - 16 + 8X(s) = \frac{10}{s}$$

$$X(s)[s^2 + 4s + 8] = \frac{10}{s} + 4s + 19 = \frac{4s^2 + 19s + 10}{s}$$

El trinomio $(s^2 + 4s + 8)$ se factoriza aplicando la fórmula general de segundo grado;

$$s = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 8}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 32}}{2} = -2 \pm j2$$

De acuerdo con los valores de [illegible]
saber que tenemos un caso de polos complejos conjugados [illegible]
trinomio s^2+4s+8 queda factorizado de la siguiente manera:

$$s^2+4s+8 = (s+2-j2)(s+2+j2) \quad [illegible]$$

$$X_{(s)} = \frac{4s^2+19s+10}{s(s^2+4s+8)} = \frac{4s^2+19s+10}{s(s+2-j2)(s+2+j2)}$$

El siguiente paso es desarrollar $X_{(s)}$ en fracciones parciales como se indica a continuación:

$$X_{(s)} = \frac{a}{s} + \frac{\alpha_1 s + \alpha_2}{(s+2-j2)(s+2+j2)} \qquad 2\text{-}5$$

En seguida se calculan los valores de las constantes a, α_1 y α_2

$$a = \frac{4s^2+19s+10}{s(s^2+4s+8)}(s)\Big]_{s=0} = \frac{0+0+10}{0+0+8} = 1.25$$

$$\alpha_1 s + \alpha_2 = \frac{4s^2+19s+10}{s}\Big]_{s=-2+j2}$$

$$\alpha_1 s^2 + \alpha_2 s = 4s^2+19s+10\,\Big]_{s=-2-j2}$$

$$\alpha_1(-2+j2)^2 + \alpha_2(-2+j2) = 4(-2+j2)^2 + 19(-2+j2) + 10$$

$$\alpha_1(4-j8-4) - 2\alpha_2 + j2\alpha_2 = 4(4-j8-4) - 38 + j38 + 10$$

$$-j8\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2j\alpha_2 = -32j + 38j - 28$$

De la ecuación compleja anterior se plantean dos, una con las partes reales y otra con las partes imaginarias.

(partes reales) $\qquad -2\alpha_2 = -28$

(partes imaginarias) $\qquad -8\alpha_1 + 2\alpha_2 = 6$

de donde $\alpha_1 = 2.75$ y $\alpha_2 = 14$

Substituyendo los valores de las constantes en la ecuación 2-5

$$X_{(s)} = \frac{1.25}{s} + \frac{2.75s+14}{[(s+2)-j2][(s+2)+j2]}$$

$$X_{(s)} = \frac{1.25}{s} + \frac{2.75(s+2)}{(s+2)^2+4} + \frac{(14-5.5)\left[-\frac{2}{2}\right]}{(s+2)^2+4}$$

$$x_{(t)} = 1.25 + 2.75\,e^{-2t}\,\mathrm{Cos}\,2t + 4.25\,e^{-2t}\,\mathrm{Sen}\,2t$$

PROBLEMAS

2-1.- [illegible]

a) $f(t) = 5$ Sen [illegible]

b) $f(t) = e^{-3t}$ Cos $10t$

c) $f(t) = e^{2t}(3$ Sen $4t - 4$ Cos $4t)$

d) $f(t) = [$Sen $t -$ Cos $t]^2$

e) $f(t) = 5\dfrac{d^2x}{dt^2} + 10\dfrac{dx}{dt} + x - 3t$ $\qquad x(o)=10 \qquad x'(o)= 4$

2-2.- Aplicar los teoremas de los valores inicial y final a las siguientes funciones complejas:

a) $F(s) = \dfrac{1}{s^2 + 1}$ $\qquad$ c) $F(s) = \dfrac{100}{(s + 5)^4}$

b) $F(s) = \dfrac{10}{s(s^2 + 2s + 5)}$ $\qquad$ d) $F(s) = \dfrac{s + 5}{s(s + 1)^2(s^2 + 2s + \ldots)}$

2-3.- Encontrar la transformada inversa:

a) $F(s) = \dfrac{1}{s + 1} - \dfrac{3}{s + 10} + \dfrac{6}{s^2 + 2s + 6}$

b) $F(s) = \dfrac{100}{s^2(s + 4)^3}$

c) $F(s) = \dfrac{6s + 3}{s(s + j8)(s - j8)}$

2-4.- Aplicando la transformada de Laplace, resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 3\dfrac{dx}{dt} + 2x = 10$ $\qquad x(o)= 2 \qquad x'(o)= 4$

b) $\dfrac{d^2z}{dt^2} + 2\dfrac{dz}{dt} + z = 80$ Sen $2t$ $\qquad z(o) = 1 \qquad z'(o) = 3$