

CAPITULO III

MODELOS MATEMATICOS Y FUNCIONES DE TRANSFERENCIA

3-1.- MODELOS MATEMATICOS

La dinámica de un sistema de control cualquiera, sea éste de tipo eléctrico, electrónico, mecánico etc, se representa generalmente por medio de ecuaciones diferenciales. Para obtener estas ecuaciones diferenciales nos tenemos que basar en las leyes fundamentales ya conocidas, por ejemplo en la ley de Ohm o leyes de Kirchhoff para sistemas eléctricos o en las leyes de Newton para sistemas mecánicos.

La teoría del control es muy amplia y se puede aplicar a sistemas de todo tipo, por ejemplo sistemas hidráulicos, térmicos, biológicos, químicos, económicos etc. Logicamente y de acuerdo con el tipo de Carreras que se imparten en nuestra escuela, haremos hincapié en sistemas de control de tipo mecánico, eléctrico y electrónico.

A la ecuación o grupo de ecuaciones diferenciales que describen matemáticamente el comportamiento de un sistema de control físico, se le denomina "Modelo Matemático del Sistema".

Para poder analizar un sistema de control desde el punto de vista de ingeniería, es necesario primeramente elaborar su modelo matemático el cual nos representa en teoría al sistema real.

Obviamente el planteamiento del modelo matemático es un primer paso muy importante ya que todo el análisis posterior del sistema descansa sobre la base del modelo matemático seleccionado. De acuerdo con lo anterior es de suma importancia plantear un modelo matemático lo más apegado a la realidad, para que los resultados obtenidos del análisis también correspondan a la realidad esperada.

Por lo tanto la experiencia de una persona en determinado tipo de sistemas es muy valiosa para llegar a obtener un buen modelo matemático. Una vez obtenido el modelo matemático hay una diversidad muy grande de técnicas analíticas y computacionales para realizar un adecuado análisis al sistema de control.

Siempre cuando se desea plantear un modelo matemático de un sistema de control cualquiera, se enfrenta uno al siguiente dilema : que tan simple o complicado necesito el modelo, que tan exacto o que tanto error se puede tolerar en el sistema.

El modelo del sistema puede ser sencillo con una o dos ecuaciones o puede ser complicado con un gran número de ecuaciones. Cuando es simple su solución puede hacerse a mano, cuando se manejan muchas ecuaciones tal vez se requieran técnicas computacionales para resolver el problema matemático.

En general, al estudiar un sistema nuevo, encontraremos que es deseable primeramente construir un modelo sencillo, lo más simplificado posible, para poder tener una idea general de la solución. Después ya con cierta experiencia obtenida en el modelo simple se puede plantear un modelo matemático más complicado con lo cual se obtendrán resultados más completos y exactos.

Sistemas Lineales.- El concepto de sistema lineal es muy utilizado en el lenguaje de las matemáticas, pero que son los sistemas lineales. Los sistemas lineales se pueden definir como aquellos en los que las ecuaciones de su modelo matemático son lineales. Como la mayoría de los modelos matemáticos de sistemas de control se expresan con ecuaciones diferenciales, es muy importante definir que es una ecuación diferencial lineal.

Una ecuación diferencial es lineal si sus coeficientes son constantes, función de la variable independiente (t) o de la variable dependiente (x) a la primera potencia. Se aclara que en una ecuación diferencial siempre el tiempo es la variable independiente y la variable dependiente puede ser x, y, o z, generalmente.

Es importante que un sistema sea lineal porque solamente a los sistemas lineales se les pueden aplicar los siguientes dos principios:

- a) El principio de la Superposición y
- b) El principio de la Proporcionalidad.

El principio de la Superposición establece que cuando tengamos un sistema de control con varias señales de entrada (función excitación) actuando simultáneamente, podemos calcular la salida (función respuesta), trabajando con una entrada a la vez y sumando las salidas parciales obtenidas con cada entrada para calcular la salida total. Esto nos permite calcular la respuesta a diversas entradas, tratando una sola entrada a la vez y sumando los resultados parciales. En pocas palabras este principio nos permite analizar sistemas complicados con muchas entradas considerando una sola entrada a la vez, lo cual nos simplifica el problema.

El principio de la Proporcionalidad establece que en cualquier sistema de control lineal la señal de salida (función respuesta) es proporcional a la señal de entrada (función excitación). Lo anterior significa que si la entrada aumenta, la salida debe de aumentar en la misma proporción. Si la entrada disminuye, la salida lógicamente debe de disminuir en la misma proporción. La proporcionalidad cumple un sistema de control lineal una relación de causa-efecto con las entradas y las salidas.

Sistemas lineales invariables en el tiempo y sistemas lineales variables en el tiempo.- Los sistemas dinámicos que son lineales y están constituidos por componentes concentrados e invariables en el tiempo, pueden ser representados por ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo. Estos sistemas reciben el nombre de lineales invariantes en el tiempo (o lineales con coeficientes constantes). En seguida se representa una ecuación diferencial de un sistema lineal invariante en el tiempo.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5 \frac{dx}{dt} + 10x = 8$$

Los sistemas representados por ecuaciones diferenciales, cuyos coeficientes son funciones del tiempo reciben el nombre de sistemas lineales variables en el tiempo. Esto quiere decir que la ecuación diferencial en este caso cambia con el tiempo constantemente. Se representa en seguida una ecuación diferencial variable en el tiempo.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 6t \frac{dx}{dt} + 4x = 12$$

Como se puede ver en la ecuación anterior, el segundo término cambia constantemente con el tiempo.

Sistemas No Lineales.- Los sistemas de control generalmente se representan matemáticamente por medio de ecuaciones lineales, pero la verdad es que en la vida real la mayor parte de los sistemas son no lineales. En algunos sistemas lineales también dicha linealidad es restringida a un determinado rango de operación.

La linealidad se puede perder en un sistema de control, por ejemplo por saturación, cuando el nivel de señal de entrada o salida es muy elevado. También se puede perder la linealidad por haber una franja o zona muerta y por último también se puede perder la linealidad por algunos componentes cuya operación sea proporcional a relaciones cuadráticas o de orden superior.

La solución de sistemas no lineales es más complicada que los sistemas lineales, por lo que se desea siempre trabajar con sistemas lineales. La mayoría de las veces aunque el sistema sea no lineal, es posible linealizarlo aunque sea en un rango restringido de operación. Un poco más adelante se verán algunos métodos matemáticos para linealizar modelos matemáticos no lineales.

A continuación en la fig. 3-1 se representan algunas curvas características de sistemas no lineales.

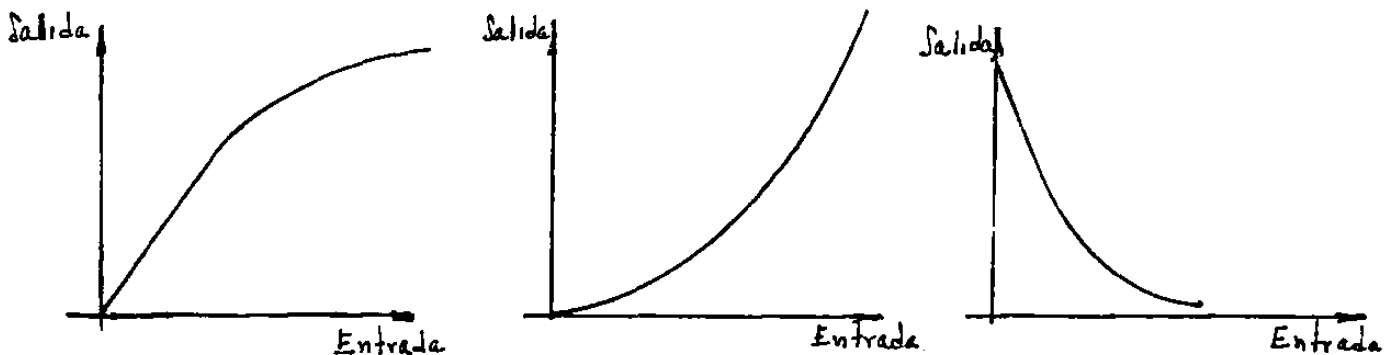


Fig. 3-1 Curvas características de Sistemas No Lineales

5-2.- FUNCIONES DE TRANSFERENCIA

La Función de Transferencia de un sistema de control lineal invariante en el tiempo se puede definir como la relación de la Transformada de Laplace de la salida (función respuesta) a la Transformada de Laplace de la entrada (función excitación), suponiendo que todas las condiciones iniciales son cero.

En seguida se calculará la Función de Transferencia de un sistema de control cuyo modelo matemático es la ecuación diferencial

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = b_0 x^{(m)} + b_1 x^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} x' + b_m x$$

En la ecuación anterior se supone que "x" es la señal de entrada y "y" es la señal de salida del sistema de control. Para obtener la Función de Transferencia del sistema de control se calculará la transformada de Laplace con condiciones iniciales igual a cero de la ecuación diferencial y después se despeja la relación de la salida a la entrada. Transformando ambos miembros de la ecuación

$$a_0 s^n Y(s) + a_1 s^{(n-1)} Y(s) + \dots + a_{n-1} s Y(s) + a_n Y(s) = b_0 s^m X(s) + b_1 s^{(m-1)} X(s) + \dots + b_{m-1} s X(s) + b_m X(s)$$

$$Y(s) [a_0 s^n + a_1 s^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} s + a_n] = X(s) [b_0 s^m + b_1 s^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} s + b_m]$$

$$\text{Función de Transferencia} = G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

Generalmente en una función de transferencia el orden del exponente "n" siempre es mayor que el exponente "m".

La Función de Transferencia de un sistema de control nos dá la relación de la señal de salida y de entrada, siendo el sistema lineal e invariante en el tiempo. Es importante hacer notar que aunque la Función de Transferencia relaciona la salida y la entrada de un sistema, ésta no depende ni de la entrada ni de la salida, ya que solo depende de los componentes internos del sistema de control.

Las unidades de la función de transferencia serán las que resulten de la relación de la salida a la entrada del sistema, sin embargo no nos dá ninguna información sobre la naturaleza física del sistema, por lo que sistemas de control de distinta naturaleza es posible que tengan la misma función de transferencia.

Cálculo de la Función de Transferencia.- Enseguida se calculará la Función de Transferencia de algunos sistemas de control mecánicos y eléctricos ampliamente utilizados en la práctica. El procedimiento general para obtener la Función de Transferencia consiste en desarrollar los siguientes pasos:

- 1.- Plantear el Modelo Matemático del Sistema que casi siempre es una o varias ecuaciones diferenciales.
- 2.- Calcular la Transformada de Laplace de la o las ecuaciones diferenciales que forman el Modelo Matemático, suponiendo condiciones iniciales igual a cero.
- 3.- Hallar la relación de la salida $Y(s)$ respecto a la entrada $X(s)$. Siendo ésta relación la Función de Transferencia.

Como se dijo anteriormente, para plantear el Modelo Matemático es muy importante tener conocimientos sobre el sistema en particular que se va a representar por medio de ecuaciones diferenciales. Por ejemplo si se va a estudiar circuitos eléctricos es necesario tener conocimiento de las principales leyes que gobiernan la operación de los circuitos (Ley de Ohm, Leyes de Kirchhoff, etc).

Sistema Mecánico de Traslación.- Se calculará la Función de Transferencia de un sistema mecánico muy conocido, llamado Sistema Masa-Resorte-Amortiguador por ser éstos tres elementos los componentes del sistema. Una de las principales y más conocida aplicación de este sistema mecánico es el Sistema de Suspensión de cualquier vehículo motorizado, llámese carro, camión, tren etc. Todos sabemos que los carros tienen una cierta cantidad de masa que se suspende por medio de resortes y/o muelles y amortiguadores de diferentes tipos.

El propósito de la suspensión de un coche es el proporcionar a sus ocupantes la máxima comodidad posible durante el viaje, amortiguando lo más que se pueda las irregularidades del camino o carretera.

Los amortiguadores son dispositivos que proveen mediante fricción viscosa el amortiguamiento. Consisten en un pistón y un cilindro relleno de aceite. Cualquier movimiento relativo entre el eje del pistón y el cilindro, encuentra resistencia producida por el aceite, debido a que éste debe fluir a través de pequeños orificios que tiene el pistón.

En la fig. 3-2 se representa un diagrama esquemático del sistema Masa-Resorte-Amortiguador.

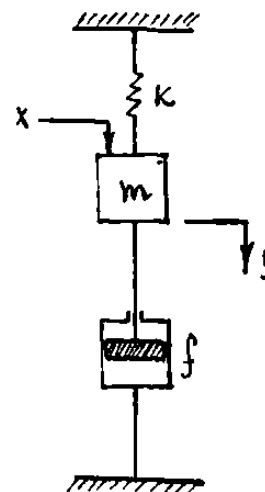


Fig. 3-2.- Sistema Mecánico Masa-Resorte-Amortiguador

... matemáticamente la operación del sistema mecánico. Para representar la acción de la fuerza de entrada "x" sobre la masa "m" se muestra en la figura 3-3 un diagrama de cuerpo libre de la masa. En este diagrama se muestran todas las fuerzas que se ejercen sobre la masa.

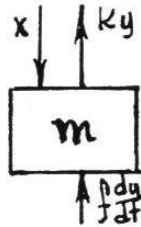


Fig. 3-3 Diagrama de cuerpo libre de la masa.

En la fig. 3-3, se puede ver que se tienen tres fuerzas aplicadas a la masa, una es la fuerza "x" que representa la señal de entrada o señal de excitación, otra es la fuerza que ejerce el resorte "y" que es igual al producto de la constante del resorte "k" por el desplazamiento de la masa "y". La tercera fuerza es la que ejerce el amortiguador y es igual al producto del coeficiente de fricción viscosa "f" del amortiguador por la velocidad de la masa.

La ecuación fundamental que se aplica en este sistema mecánico es la segunda Ley de Newton que se representa matemáticamente como sigue:

$$\sum F = m \cdot a \quad \text{en donde:}$$

- m = masa en kilogramos
- a = aceleración en metros/seg²
- $\sum F$ = suma de fuerzas en Newtons

Aplicando la segunda Ley de Newton al sistema mecánico de traslación tenemos:

$$x - k y - f \frac{dy}{dt} = m \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + f \frac{dy}{dt} - k y = x$$

Transformando por Laplace la ecuación anterior:

$$m [s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0)] + f [s Y(s) - y(0)] + k Y(s) = X(s)$$

Considerando condiciones iniciales igual a cero, la ecuación transformada se simplifica y puede escribirse como sigue:

$Y(s)[ms^2 + fs + k] = X(s)$ de donde ya se puede obtener la función de transferencia.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{m s^2 + \tau s + k}$$

Figura 2-4-1.- Sistema Mecánico de Rotación. Este sistema mecánico de rotación está formado por un rotor con momento de inercia J y un eje con coeficiente de fricción viscosa f . El rotor está sometido a un par mecánico T y a un torque de fricción $f\omega$. El momento de inercia J y el coeficiente de fricción viscosa f están representados en el sistema mecánico de rotación. Los símbolos que se indican en la figura representan:

- J = Momento de Inercia del Rotor en kg-m^2
- f = Coeficiente de fricción viscosa en kgm^2/seg
- ω = Velocidad angular en rad/seg
- T = Par aplicado al rotor en Newtonm

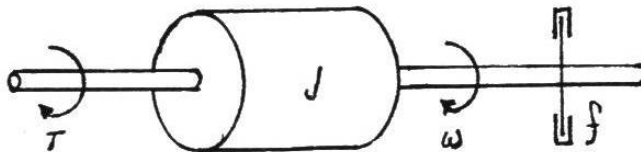


Fig. 2-4-1.- Sistema Mecánico de Rotación

La segunda Ley de Newton para sistemas giratorios establece que

$$\Sigma T = J \alpha$$

donde

- J = momento de inercia en kg-m^2
- α = Aceleración Angular en rad/seg^2
- T = Par Mecánico en Newtonm

Aplicando la Ley de Newton del sistema que se está analizando, se obtiene:

$$T - f \omega = J \alpha = J \frac{d\omega}{dt}$$

Si transformamos la ecuación por Laplace, tenemos:

$$T(s) - f \Omega(s) = J s \Omega(s)$$

$$\Omega(s) [J s + f] = T(s)$$

Tomando el par mecánico $T(s)$ como señal de entrada y la velocidad $\Omega(s)$ como señal de salida, la función de transferencia será:

$$\frac{\Omega(s)}{T(s)} = \frac{1}{J s + f}$$

$\Omega(s)$ = La transformada de Laplace de $[\omega(t)]$

$T(s)$ = La transformada de Laplace de $[T(t)]$

La transferencia de energía de un sistema de potencia a otro se analiza en el capítulo 4. El circuito está formado por una resistencia R , una inductancia L y un condensador C . Se considera como señal de entrada e_i y señal de salida e_o .

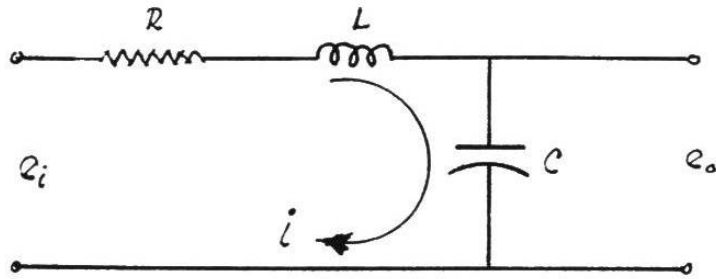


Fig. 3-5.- Circuito Electrico R-L-C.

Aplicando suma de voltajes al circuito (leyes de Kirchoff) se llega a las siguientes ecuaciones para las señales de entrada y salida

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = e_i \quad (3-1)$$

$$\frac{1}{C} \int i dt = e_o \quad (3-2)$$

Transformando con Laplace las ecuaciones (3-1) y (3-2) resulta

$$LsI(s) + Ri(s) + \frac{1}{Cs} I(s) = E_i(s) \quad (3-3)$$

$$\frac{1}{Cs} I(s) = E_o(s)$$

Considerando como ya se mencionó a $E_i(s)$ como señal de entrada y $E_o(s)$ como señal de salida, la función de transferencia del circuito será:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \quad (3-4)$$

Conociendo la función de transferencia cuyo valor depende de R-L-C y sabiendo el valor de la señal de entrada, se puede calcular fácilmente la salida o respuesta del circuito, ya sea en función de la frecuencia o del tiempo.

Si se observa la ecuación (1), con el denominador, se puede ver que la impedancia en el denominador es la suma de las impedancias en serie de la impedancia de la bobina y la impedancia del condensador, esto es, la transformada de Laplace.

Si se observa la ecuación (1), con el denominador, se puede ver que la impedancia en el denominador es la suma de las impedancias en serie de la impedancia de la bobina y la impedancia del condensador, esto es, la transformada de Laplace.

En la fig. 1 se muestra el circuito eléctrico con impedancias complejas. La función de transferencia del circuito de la fig. 1 es:

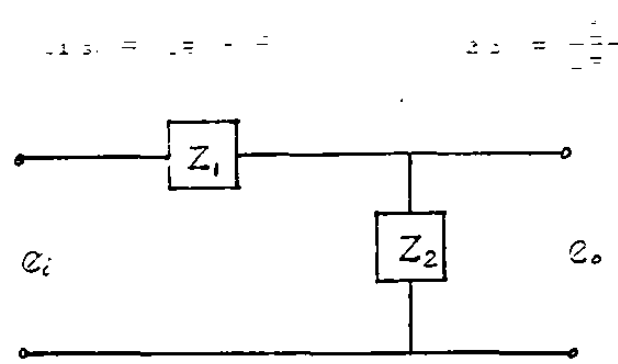


Fig. 1. Circuito eléctrico con impedancias complejas.

La función de transferencia del circuito de la fig. 1 es:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}$$

Substituyendo los valores de $Z_1(s)$ y $Z_2(s)$ en la ecuación anterior:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{\frac{1}{Cs}}{Ls + R + \frac{1}{Cs}} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Por supuesto la función de transferencia anterior es idéntica a la que ya se había obtenido anteriormente, en la ecuación 3-4.

elementos pasivos y elementos activos.- En todos los sistemas, los elementos pasivos son aquellos que no aportan energía al sistema, los activos son los que sí aportan energía para poder en algún momento, por ejemplo, en el circuito eléctrico, las baterías y condensadores son pasivos no aportan energía al sistema, que las fuentes de voltaje son los elementos activos, ya que aportan energía al sistema, los condensadores pueden almacenar energía y posteriormente entregarla al sistema, estos elementos no pueden aportar más energía que la que previamente se les haya proporcionado.

Otros ejemplos de elementos pasivos son las masas, los resortes y los amortiguadores en un sistema mecánico. Elementos activos son por ejemplo las fuerzas, los pares, los amplificadores electrónicos etc.

Sistemas Análogos.- En la práctica son muy utilizadas las técnicas de simulación, para estudiar por ejemplo algún sistema mecánico representando el mismo con un circuito eléctrico cuya función de transferencia sea equivalente. Muchos sistemas de naturaleza natural son simulados experimentalmente con circuitos eléctricos o electrónicos análogos ya que esto trae muchas ventajas, por ejemplo un sistema eléctrico generalmente es muy fácil de construir, es muy barato y se dispone de gran cantidad de instrumentos de medición para medir y registrar prácticamente todas las señales de entrada y de salida, esto no se puede decir para otro tipo de sistemas.

A continuación se estudiarán algunos sistemas análogos mecánicos y eléctricos.

Analogía Fuerza-Tensión.- Para demostrar la analogía Fuerza-Tensión, nos basaremos en los sistemas eléctrico y mecánico de las figuras 3-7a y 3-7b. Las ecuaciones diferenciales que representan matemáticamente la operación de dichos sistemas son:

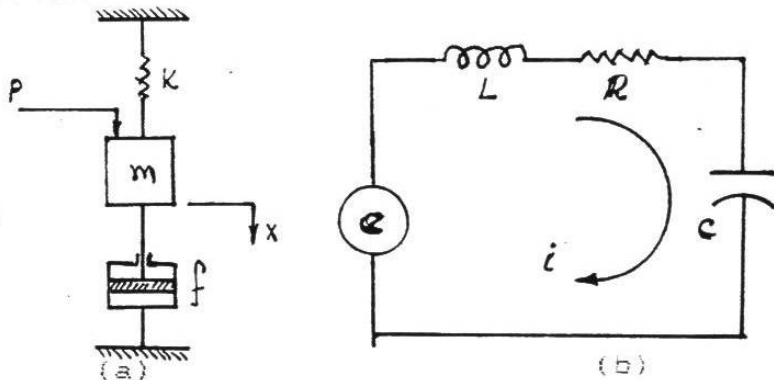


Fig. 3-7. (a) Sistema mecánico
(b) Sistema Eléctrico

$$\text{para el sistema mecánico} \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + kx = p \quad (3-5)$$

$$\text{para el circuito eléctrico} \quad L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = e \quad (3-6)$$

La ecuación 3-6 se puede transformar en la siguiente ecuación si sustituimos la corriente eléctrica $i = dq/dt$.

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = e \quad (3-7)$$

Si se comparan las ecuaciones 3-5 y 3-7 se puede ver que son de forma idéntica, pues sólo las literales son diferentes. De la comparación anterior de las ecuaciones se puede obtener el siguiente cuadro de analogías fuerza-tensión, siendo estos parámetros los elementos activos de ambos sistemas mecánico y eléctrico.

Tabla 3-1 Cuadro de Analogías Fuerza-Tensión

Sistema mecánico	Sistema eléctrico
fuerza p (par T)	tensión e
masa m (momento de inercia J)	inductancia L
coeficiente de fricción viscosa f	resistencia R
constante de resorte k	recíproca de capacitancia $1/C$
desplazamiento x (ángulo θ)	carga q
velocidad x' (velocidad angular θ')	corriente i

Analogía fuerza-corriente.- Esta es otra analogía que también se puede utilizar entre sistemas eléctricos y mecánicos, tomando como elementos activos la fuerza en el sistema mecánico y la corriente en el circuito eléctrico.

Para demostrar ésta analogía nos basaremos en los sistemas mecánico y eléctrico representados en la fig. 3-8 a y b.

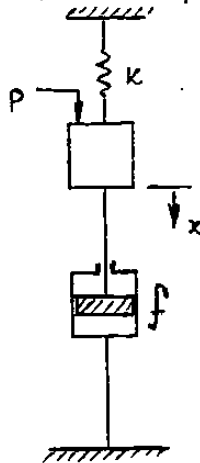


Fig. 3-8 a

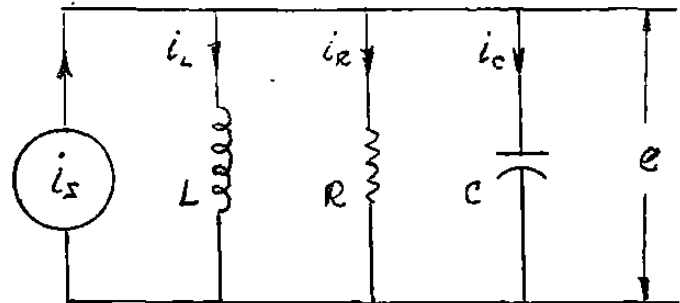


Fig. 3-8 b

Para el sistema mecánico masa-resorte-amortiguador, el modelo matemático que lo representa es la misma ecuación anterior 3-5.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + kx = p \quad (3-8)$$

Para el circuito eléctrico en paralelo y aplicando la ley de corrientes de Kirchhoff tenemos:

$$iL + iR + iC = i_s$$

$$\frac{1}{L} \int e dt + \frac{e}{R} + C \frac{de}{dt} = i_s \quad (3-9)$$

Substituyendo $e = \frac{d\psi}{dt}$ en la ecuación anterior 3-9 tenemos:

$$\frac{1}{L} \int \frac{d\psi}{dt} dt + \frac{d\psi}{dt} \left(\frac{1}{R} \right) + C \frac{d^2\psi}{dt^2} = i_s$$

Reordenando la ecuación se puede escribir en la siguiente forma:

$$C \frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{d\psi}{dt} + \frac{1}{L} \psi = i_s \quad (3-10)$$

Comparando las ecuaciones 3-10 y 3-8 se puede ver que son ecuaciones de sistemas análogos. Esta analogía se denomina analogía fuerza-corriente. En la tabla 3-2 se representa el cuadro de analogías completo comparando elemento por elemento.

Tabla 3-2 Cuadro de Analogías fuerza-corriente

Sistema mecánico	Sistema eléctrico
fuerza p (par T)	corriente i
masa m (inercia J)	capacitancia C
coeficiente de fricción viscosa f	reciproca de resistencia 1/R
constante de resorte k	reciproca de inductancia 1/L
desplazamiento x (ángulo θ)	enlace de flujo magnético ψ
velocidad x' (vel. angular θ')	tensión e

Los sistemas análogos son importantes en la práctica ya que nos permiten simular un sistema analizando otro sistema de naturaleza distinta. Por ejemplo se puede simular un sistema mecánico mediante un circuito eléctrico análogo. Generalmente se prefiere estudiar circuitos eléctricos análogos porque tienen una serie de ventajas en comparación con otros sistemas como el mecánico. El circuito eléctrico es muy barato, fácil de construir, fácil para variar cualquier elemento (resistencia variable, condensador variable etc) y se dispone de gran cantidad de aparatos para medir fácilmente cualquier señal de voltaje, corriente, forma de onda en osciloscopio o dibujarla en un graficador. Se debe tener cuidado al aplicar analogías entre dos sistemas trabajando en una región de operación muy amplia, pues se debe recordar que las ecuaciones diferenciales son aproximaciones matemáticas a lo que sucede en la realidad.

3-3.- LINEALIZACION DE MODELOS MATEMATICOS NO LINEALES.

Como ya se dijo anteriormente siempre se desea trabajar con sistemas lineales. Sin embargo la mayoría de los sistemas reales son no lineales por lo que hay necesidad de linealizar un modelo aunque sea en un rango de operación pequeño. A continuación se verá un procedimiento matemático para linealizar un modelo no lineal.

La base de este procedimiento es el desarrollo de una función en una serie matemática denominada serie de Taylor. Si tenemos un sistema de control en el que la señal de entrada sea $x(t)$ y la salida $y(t)$. Si la relación entre ambas señales está dada por la siguiente ecuación:

$$y = f(x) \quad (3-11)$$

Siendo x y y las condiciones normales o nominales de operación, la ecuación 3-11 puede ser desarrollada en serie de Taylor alrededor de este punto en la siguiente forma:

$$y = f(x) = f(\bar{x}) + \frac{df}{dx} (x - \bar{x}) + \frac{1}{2!} \frac{d^2f}{d^2x} (x - \bar{x})^2 + \dots \quad (3-12)$$

las derivadas df/dx , d^2f/dx^2 se calculan en $x = \bar{x}$.

Considerando que en la ecuación 3-12 la diferencia entre x y \bar{x} es pequeña, dicha diferencia pequeña elevada al cuadrado sería mas pequeña, por lo que el término que tiene la segunda derivada y los siguientes se pueden despreciar sin incurrir en mucho error. La ecuación 3-12 se simplifica a la siguiente forma:

$$y = \bar{y} + K(x - \bar{x})$$

$$\text{o bien} \quad y - \bar{y} = K(x - \bar{x}) \quad (3-13)$$

$$\text{donde} \quad \bar{y} = f(\bar{x}) \quad K = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\bar{x}}$$

La ecuación 3-13 es una ecuación lineal de una recta que se obtuvo de la ecuación 3-11 la cual es no lineal. La única limitación es que el valor de x no debe ser muy diferente de \bar{x} . Lo anterior significa que el rango de operación del sistema debe ser estrecho.

A continuación se estudiará un sistema de control no lineal cuya salida es "y" con dos entradas x_1 y x_2 . La relación entre la salida y las entradas es la siguiente relación no lineal :

$$y = f(x_1, x_2) \quad (3-14)$$

Con el fin de linealizar en forma aproximada el modelo no lineal, desarrollaremos en serie de Taylor la ecuación 3-14 alrededor del punto normal de operación x_1, x_2 .

La ecuación 3-14 desarrollada continúa en serie de Taylor en el punto (\bar{x}_1, \bar{x}_2)

$$\begin{aligned}
 &= f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} (x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2} (x_2 - \bar{x}_2) \right] \\
 &+ \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} (x_1 - \bar{x}_1)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} (x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} (x_2 - \bar{x}_2)^2 \right] \\
 &+ \dots
 \end{aligned}$$

La ecuación desarrollada continúa su desarrollo en una serie infinita, sin embargo sólo se toman en cuenta los primeros términos de la misma se pueden despreciar sus valores en mucho menor grado a los que son demasiado pequeños. La variación de y se aproxima por un valor de y muy cercano a \bar{y} , la diferencia de los valores de y es muy pequeña, además una cantidad pequeña al cuadrado es más pequeña y dividida entre dos, la cantidad es más pequeña, por lo que se consideran despreciables los términos de la segunda derivada parcial en adelante.

De acuerdo con lo anterior, la ecuación desarrollada en serie de Taylor resulta ser:

$$y = \bar{y} = f_1(x_1 - \bar{x}_1) + f_2(x_2 - \bar{x}_2) \quad (3-15)$$

en donde: $f_1 = f(x_1, \bar{x}_2)$

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\bar{x}_1, x_2=\bar{x}_2}$$

$$f_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_{x_1=\bar{x}_1, x_2=\bar{x}_2}$$

La ecuación 3-15 como se puede ver ya es una ecuación lineal, siendo la ecuación de una recta en tres dimensiones, con lo cual se ha linealizado la función que originalmente era no lineal.

Servomotor Hidráulico.— En la fig. 3-9 se representa un Servomotor Hidráulico, el cual es un equipo ampliamente utilizado en la industria como amplificador de potencia hidráulico, controlado por una válvula piloto. La válvula piloto controla la entrada y la salida del aceite al cilindro de potencia. La posición de la válvula piloto se puede controlar por medio de bobinas eléctricas en los lados de la válvula o en forma electrónica con un dispositivo especial llamado LVDT por sus iniciales en inglés (transformador diferencial de voltaje lineal). El movimiento de la válvula piloto generalmente es muy pequeño de unos cuantos milímetros.

A continuación se explica el funcionamiento del servomotor: cuando se desplaza la válvula piloto a la derecha, el aceite a presión entra al cilindro de potencia a la cámara P1, moviendo al cilindro de potencia la carga a la derecha y evacuando el aceite que se encuentre en la cámara P2. Si la válvula piloto se mueve a la izquierda, el aceite entra a la cámara P2 y sale el aceite que se encuentre en P1.

La ventaja del Servomotor Hidráulico consiste en que con una pequeña señal de control que se aplica eléctricamente o electrónicamente para mover la válvula piloto, el sistema puede mover una carga de gran tamaño. Las principales variables que entran en juego en el Servomotor son:

- Q = Cantidad de aceite al cilindro de potencia en Kg/seg.
- $\Delta P = P_2 - P_1 =$ Dif. de Presión sobre el pistón de potencia en Kg/cm²
- x = Desplazamiento de la válvula piloto en cm.

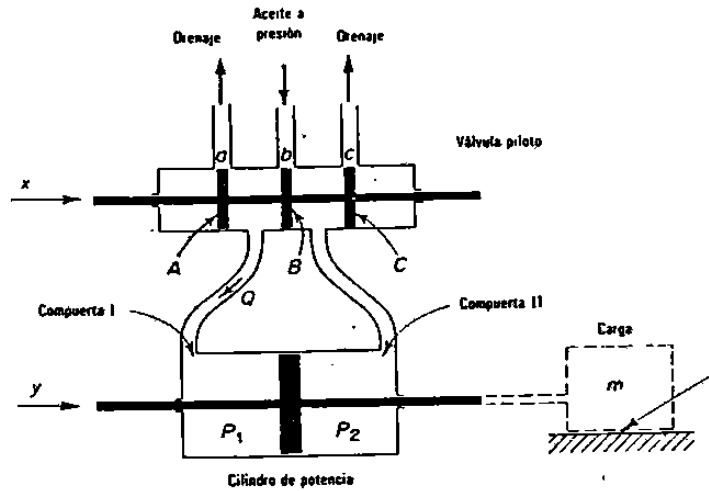


Fig. 3-9 Diagrama esquemático de un servomotor hidráulico.

En la fig. 3-9 se puede ver que la cantidad de aceite Q depende o es función del desplazamiento " x " y de la dif. de presión ΔP . Se relacionan las tres variables con la siguiente ecuación no lineal;

$$Q = f(x, \Delta P)$$

Si se linealiza ésta ecuación trabajando el sistema cerca del punto normal de operación \bar{Q} , \bar{x} , $\Delta \bar{P}$, la ecuación se convierte en :

$$Q - \bar{Q} = K_1(x - \bar{x}) - K_2(\Delta P - \Delta \bar{P}) \quad 3-16$$

donde

$$\bar{Q} = f(\bar{x}, \Delta \bar{P})$$

$$K_1 = \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}, \Delta P=\Delta \bar{P}}$$

$$K_2 = - \left. \frac{\partial Q}{\partial \Delta P} \right|_{x=\bar{x}, \Delta P=\Delta \bar{P}}$$

Para éste sistema en particular, la condición normal de operación es $\bar{x} = 0$, $\Delta \bar{P} = 0$ y $\bar{Q} = 0$. Por lo tanto substituyendo éstas condiciones normales en la ecuación 3-16, se obtiene

$$Q = K_1 x - K_2 \Delta P \quad 3-17$$

En el cilindro hidráulico el volumen de líquido que se comprime es muy pequeño y se puede considerar que el volumen de líquido que se comprime es igual al volumen de líquido que se descomprime. Por lo tanto, el volumen de líquido que se comprime es igual al volumen de líquido que se descomprime. Cuando el pistón se mueve un desplazamiento x , el volumen de líquido que se comprime es $A_1 x$ y el volumen de líquido que se descomprime es $A_2 x$. Por lo tanto, se tiene:

$$A_1 x = A_2 x$$

$$\text{de donde } \delta = \rho_0 \frac{A_1}{A_2}$$

Substituyendo el gaso δ en la ecuación (3-17) tenemos:

$$A_0 \frac{dV}{dt} = K_1 x + K_2 \Delta P$$

$$\text{de donde } \Delta P = \frac{A_0}{K_2} [K_1 x + A_0 \frac{dV}{dt}]$$

La fuerza F desarrollada por el pistón de potencia es igual al incremento de presión ΔP multiplicada por el área del pistón A , o sea:

$$F = A \cdot \Delta P = \frac{A}{K_2} [K_1 x + A_0 \frac{dV}{dt}]$$

Esta fuerza F que desarrolla el pistón debe ser capaz de vencer la inercia de la carga y la fricción. La suma de estas fuerzas debe dar lugar a la siguiente ecuación:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} = \frac{A}{K_2} [K_1 x + A_0 \frac{dV}{dt}]$$

Reordenando la ecuación anterior tenemos:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + [f + \frac{A^2 \rho_0}{K_2}] \frac{dx}{dt} = \frac{AK_1}{K_2} x \quad (3-18)$$

En la ecuación 3-18, m es la masa que está moviendo el pistón hidráulico y f es el coeficiente de fricción viscosa de la carga.

Para obtener la función de transferencia del servomotor se calcula la transformada de Laplace de la ecuación 3-18.

$$m s^2 Y(s) + [f + \frac{A^2 \rho_0}{K_2}] s Y(s) = \frac{AK_1}{K_2} X(s)$$

Considerando el desplazamiento x como la señal de entrada y el desplazamiento "y" del pistón de potencia como salida, la función de transferencia para el servomotor hidráulico es:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{AK_1/K_2}{m s^2 + [f + A^2 \rho_0/K_2] s} = \frac{AK_1/K_2}{s [ms + f + A^2 \rho_0/K_2]}$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s \left[\frac{ms^2}{K_1} + \frac{Ts}{AK_1} + \frac{A}{K_1} \right]}$$

Dividimos de nuevo la fracción anterior entre la constante de denominador

$$\left[\frac{TK_2}{AK_1} + \frac{A}{K_1} \right] \text{ tenemos } \lambda$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{1}{\left[\frac{TK_2}{AK_1} + \frac{A}{K_1} \right]}}{\frac{ms^2}{AK_1} + \frac{TK_2}{AK_1} + \frac{A}{K_1}} = \frac{k}{s \left[Ts + 1 \right]}$$

$$\frac{TK_2}{AK_1} + \frac{A}{K_1}$$

donde : $k = \frac{1}{\frac{TK_2}{AK_1} + \frac{A}{K_1}}$ $\lambda = \frac{mK_2}{TK_2 + A^2\rho}$

La constante λ se le denomina ganancia del Servomotor y la constante T es llamada constante de tiempo de Servomotor. Generalmente es conveniente tener en un sistema el más alto valor de k y el más bajo valor de T ya que así se lograra una elevada ganancia y un tiempo de respuesta pequeño.

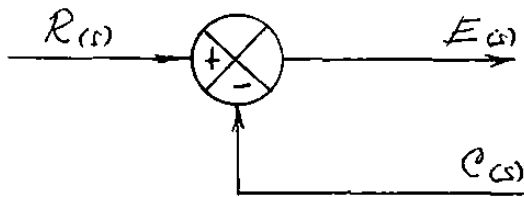


Fig. 4-2.- Detector de Error o Sumador.

Como se puede ver en la fig. 4-2, el Sumador tiene dos entradas y una salida. La salida viene siendo la suma algebraica de las entradas. Cada entrada tiene un signo que se representa en el sumador.

Normalmente las entradas se representan con las letras $R(s)$ y $C(s)$ y la salida con la letra $E(s)$. La entrada $R(s)$ es llamada entrada de referencia, la señal $C(s)$ es una señal de retroalimentación, que se compara con $R(s)$ y de dicha comparación se origina la señal de salida $E(s)$ llamada señal de error.

Las señales de entrada del Sumador o Detector tienen que ser de la misma naturaleza ya que de otra manera no se pueden sumar o comparar. Por ejemplo no podemos sumar una señal de voltaje con una señal de velocidad.

Diagrama de Bloques de un sistema de lazo cerrado.- En la fig. 4-3 se representa el diagrama de bloques de un sistema de control de lazo cerrado. A ésta representación también se le llama forma canónica de un sistema de lazo cerrado. Se le llama lazo cerrado porque la señal realmente forma un lazo al retroalimentarse de la salida a través de $H(s)$ hasta el sumador.

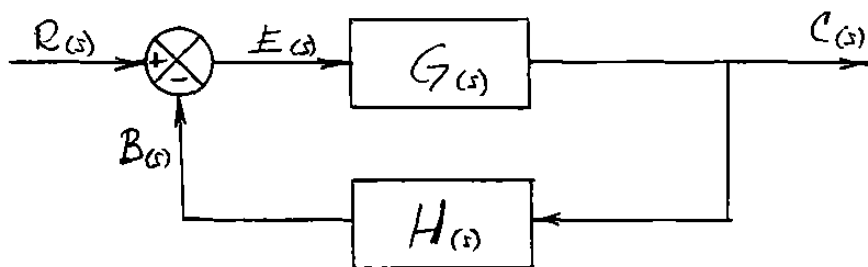


Fig. 4-3 Sistema de Lazo Cerrado.

Al bloque $G(s)$ se le llama Función de transferencia de lazo abierto y es igual a :

$$G(s) = \frac{C(s)}{E(s)}$$

Al bloque $H(s)$ se le llama Función de transferencia de la retroalimentación y es igual a :

$$H(s) = \frac{B(s)}{C(s)}$$

Al producto de $G(s)H(s)$ se le llama Función de Transferencia de Lazo Abierto y es igual a :

$$G(s)H(s) = \frac{B(s)}{E(s)}$$

A la relación de la salida $C(s)$ y la entrada $R(s)$ del diagrama de bloques se le llama Función de Transferencia de Lazo Cerrado y se calcula de la siguiente forma. Tomando como base la figura 4-3:

$$C(s) = G(s)E(s) \quad (4-1)$$

$$E(s) = R(s) - B(s) \quad (4-2)$$

Substituyendo $E(s)$ de la ecuación 4-2, en la ecuación 4-1, se obtiene:

$$C(s) = G(s)[R(s) - B(s)] \quad (4-3)$$

Partiendo de la Función de Transferencia de la Retroalimentación, podemos despejar $B(s) = H(s)C(s)$. Ahora substituyendo este valor de $B(s)$ en la ecuación 4-3, tenemos:

$$C(s) = G(s)[R(s) - H(s)C(s)] = G(s)R(s) - G(s)H(s)C(s)$$

$$\text{o tambien} \quad C(s) + G(s)H(s)C(s) = G(s)R(s)$$

$$C(s)[1 + G(s)H(s)] = G(s)R(s)$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (4-4)$$

La ecuación anterior (4-4) es la Función de Transferencia de Lazo Cerrado y es de suma importancia en cualquier sistema de control con retroalimentación. La Función de Transferencia de Lazo Cerrado relaciona la señal de salida y la entrada del sistema, pero no depende ni de la entrada, ni de la salida, sino que depende únicamente de las componentes internas del sistema de control que se analice.

De la ecuación 4-4 se puede despejar el valor de la señal de salida $C(s)$ como sigue:

$$C(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} R(s) \quad (4-5)$$

La ecuación 4-5 nos indica que la salida de un sistema de control de lazo cerrado depende de la entrada $R(s)$ y de las componentes internas del sistema de control. Este resultado es el más lógico que se podía esperar.

Sistemas de Lazo Cerrado Sometidos a una Perturbación.- Ya se dijo con anterioridad que cuando un sistema de lazo abierto se somete a una perturbación, ésta afecta adversamente el valor de la señal de salida, ya que la perturbación evita que se obtenga la salida deseada. Pero si la misma perturbación se presenta en un sistema de lazo cerrado, éste tiene la capacidad de minimizar el efecto de dicha perturbación y evitar que la salida sea afectada.

Esta capacidad de poder absorber los efectos de las perturbaciones de los sistemas de lazo cerrado es una de las grandes ventajas que se tiene al utilizar lazo cerrado en lugar de lazo abierto.

Para demostrar lo anterior se analizará un sistema de control de lazo cerrado sometido a una perturbación como se indica en el diagrama de bloques de la fig. 4-4.

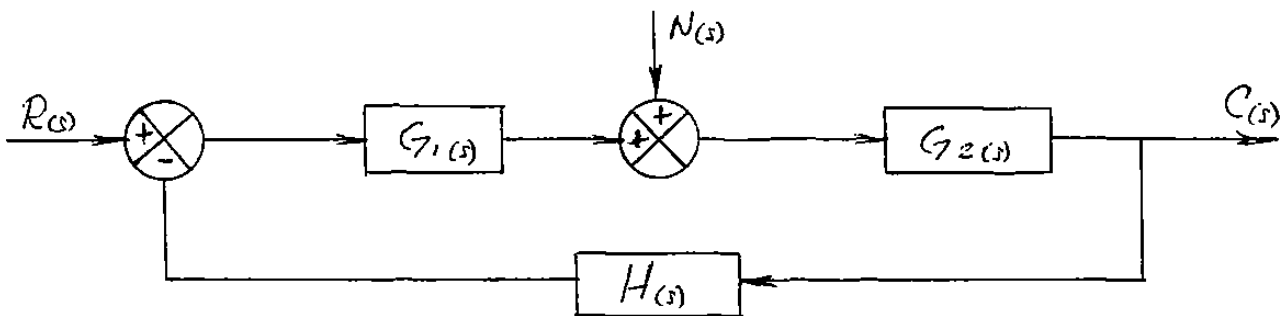


Fig. 4-4.- Sistema de Lazo Cerrado sometido a una perturbación.

Como se puede ver, el sistema de control tiene dos entradas, una es la entrada normal $R(s)$ o entrada de referencia y la otra es una señal de entrada indeseable $N(s)$ o perturbación. Para obtener la salida total $C(s)$, se analizará el sistema aplicando el principio de la superposición. Primeramente se considerará sólo la entrada $R(s)$ con lo cual se obtendrá una salida parcial que llamaremos $C_1(s)$. Después se aplicará sólo la entrada $N(s)$ lo cual producirá otra salida parcial que llamaremos $C_2(s)$. La suma de las dos salidas parciales $C_1(s)$ y $C_2(s)$ nos dará la salida total $C(s)$.

Aplicando solamente la entrada $R(s)$, el diagrama de bloques se indica en la siguiente figura 4-5.

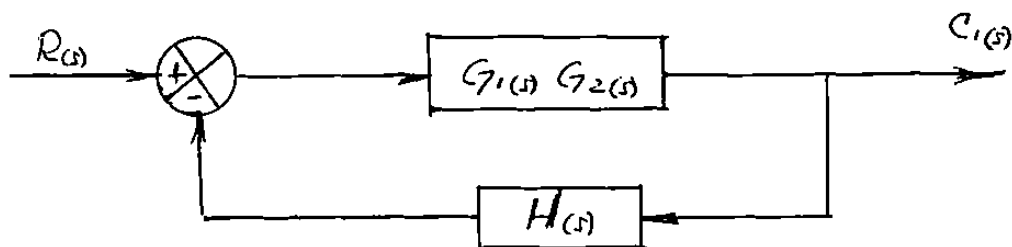


Fig. 4-5.- Diagrama de Bloques aplicando sólo la entrada $R(s)$

De la fig. 4-5 se puede calcular la función de transferencia $C_1(s)/R(s)$, aplicando para ello la fórmula de la ecuación 4-4.

$$\frac{C_1(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \quad (4-6)$$

Ahora considerando únicamente la entrada $N(s)$, el diagrama de bloques del sistema de lazo cerrado se tiene como sigue:

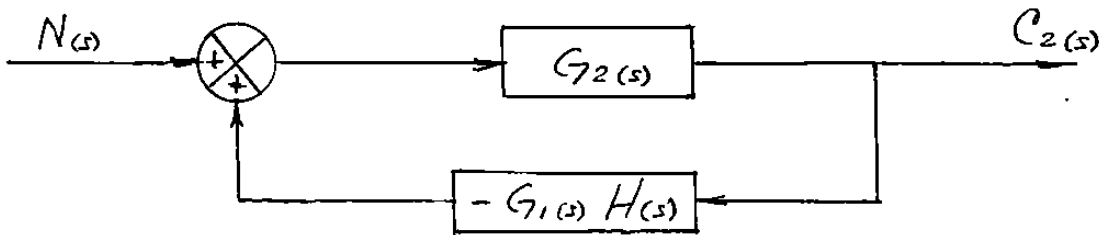


Fig. 4-6.- Diagrama de bloques aplicando sólo la entrada $N(s)$

De la fig 4-6 y aplicando de nuevo la ecuación 4-4, la función de transferencia de lazo cerrado que se obtiene es:

$$\frac{C_2(s)}{N(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \quad (4-7)$$

De las ecuaciones 4-6 y 4-7 se puede despejar $C_1(s)$ y $C_2(s)$, cuya suma nos dará la salida total $C(s)$.

$$C(s) = C_1(s) + C_2(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)R(s) + G_2(s)N(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \quad (4-8)$$

Con el propósito de minimizar el efecto de la perturbación $N(s)$ se hará que $|G_1(s)H(s)| \gg 1$ y $|G_1(s)G_2(s)H(s)| \gg 1$. Si se cumplen estas dos condiciones, la función de transferencia $C_2(s)/N(s)$, expresada en la ecuación 4-7 se hace muy pequeña, prácticamente despreciable.

Por otro lado al substituir las mismas dos condiciones en la ecuación 4-6, la misma no se elimina sino que nos queda en la siguiente forma:

$$\frac{C_1(s)}{R(s)} = \frac{1}{H(s)} \quad (4-9)$$

La conclusión importante de todo el análisis anterior es que es posible eliminar los efectos nocivos de la entrada de perturbación, ya que la salida parcial $C_2(s)$ se puede hacer despreciable, con lo que la salida prácticamente solo dependerá de la entrada de referencia $R(s)$.

Cuando no es posible eliminar una perturbación se puede eliminar casi por completo su efecto en la salida. Esta es una de las grandes ventajas que tienen los sistemas de control de lazo cerrado.

Procedimiento para trazar diagramas de bloques.- Para llegar a trazar el diagrama de bloques de un sistema de control el procedimiento consiste en plantear las ecuaciones diferenciales que representen matemáticamente el comportamiento de cada componente del sistema, luego se calcula la transformada de Laplace de cada ecuación suponiendo condiciones iniciales igual a cero y se representa cada ecuación ya transformada en forma de bloques. Finalmente se integran todos los diagramas parciales de cada ecuación en un sólo diagrama de bloques completo.

A continuación se trazará el diagrama de bloques de un circuito eléctrico sencillo RC como el que se representa en la fig. 4-7(a).

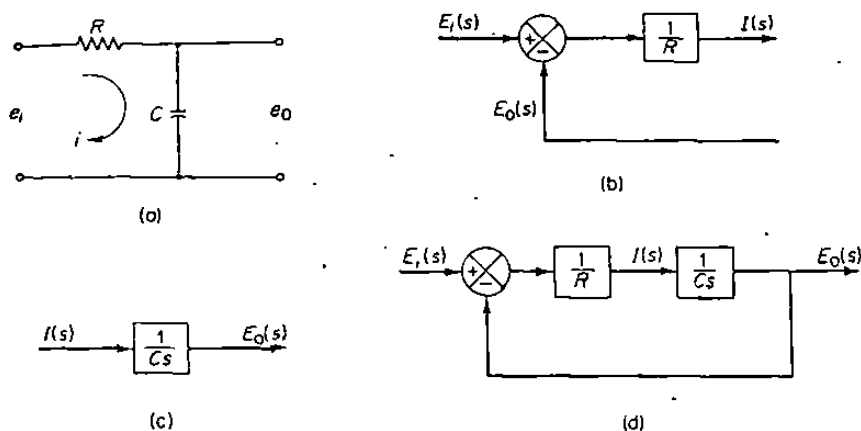


Fig. 4-7. (a) Circuito RC (b) Diagrama de bloques de la Ec. (4-12)
 (c) Diagrama de bloques de la Ec. (4-13)
 (d) Diagrama de bloques del circuito completo RC.

Las ecuaciones que representan al circuito eléctrico RC de la fig. 4-7, son:

$$i = \frac{1}{R} [e_i - e_o] \quad (4-10)$$

$$e_o = \frac{1}{C} \int i dt \quad (4-11)$$

Calculando la transformada de Laplace de las Ecs. (4-10) y (4-11) tenemos:

$$I(s) = \frac{1}{R} [E_i(s) - E_o(s)] \quad (4-12)$$

$$E_o(s) = \frac{1}{Cs} I(s) \quad (4-13)$$

Las ecuaciones 4-12 y 4-13 se representan en forma de diagramas de bloques en las figuras 4-7 (b) y (c). Finalmente en la fig. 4-7 (d) se representa el diagrama de bloques completo del circuito RC, el cual se obtiene integrando los dos diagramas parciales (b) y (c).

Reducción de diagramas de bloques.- Cuando un diagrama de bloques es grande y contiene varios lazos de retroalimentación, es posible simplificar el diagrama hasta obtener un diagrama más sencillo y que sea equivalente. La máxima simplificación se logra cuando se obtiene un sólo bloque equivalente a todo el diagrama.

Para poder simplificar un diagrama es necesario aplicar ciertas reglas del álgebra de diagramas de bloques. A continuación se estudiarán trece reglas del álgebra de bloques que nos permitirán lograr la simplificación de cualquier diagrama de bloques sin alterar el diagrama original.

La demostración de las reglas del álgebra de bloques es muy simple ya que se puede hacer un análisis de señales de entrada y de salida en cada diagrama original y equivalente. Si las señales de entrada y de salida coinciden en los dos diagramas, la equivalencia está demostrada lógicamente.

	Diagramas de bloques originales	Diagramas de bloques equivalentes
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

Tabla 4-1. Reglas del álgebra de diagramas de bloques.

	Diagramas de bloques originales	Diagramas de bloques equivalentes
8		
9		
10		
11		
12		
13		

Tabla 4-1. Reglas del Algebra de Diagramas de Bloques (cont.)

Aplicación de las Reglas del álgebra de Bloques.- En seguida se aplicarán las reglas del álgebra de bloques para simplificar algunos diagramas hasta su forma canónica o hasta un sólo bloque equivalente. Un diagrama con muchos bloques y lazos de retroalimentación casi siempre se puede simplificar en dos o más formas. La estrategia que se sigue en la simplificación de diagramas de bloques es:

- 1) Primeramente estudiar el diagrama original para ver el número de lazos de retroalimentación que contiene.
- 2.-En seguida se debe ver la ubicación de los diferentes lazos. Casi siempre los diferentes lazos no están anidados. Se llaman lazos anidados aquellos que están uno totalmente dentro del otro.
- 3.-El siguiente paso es realizar algunos cambios aplicando las reglas en el diagrama original con el fin de lograr que todos los lazos queden anidados. Quizás éste sea el paso más importante para lograr la simplificación
- 4.-Finalmente se inicia la simplificación del diagrama por los lazos más pequeños, o dicho de otra forma desde los lazos internos hasta los lazos externos que son generalmente los más grandes.
- 5.-Cuando el diagrama de bloques tiene dos o más entradas y dos o más salidas, la simplificación del diagrama se obtiene aplicando el método de la superposición. El procedimiento consiste en aplicar una entrada y una salida solamente, con lo cual se obtiene un resultado o una salida parcial. Se obtienen todas las diferentes salidas parciales, cuya sumatoria nos dá la salida total.
- 6.-Independientemente del camino que se siga para lograr la simplificación, al final el resultado de dicha simplificación obviamente debe ser exactamente el mismo.

Ejemplo 4-1.- Simplificar el diagrama de bloques de la fig. 4-8 hasta obtener un sólo bloque equivalente.

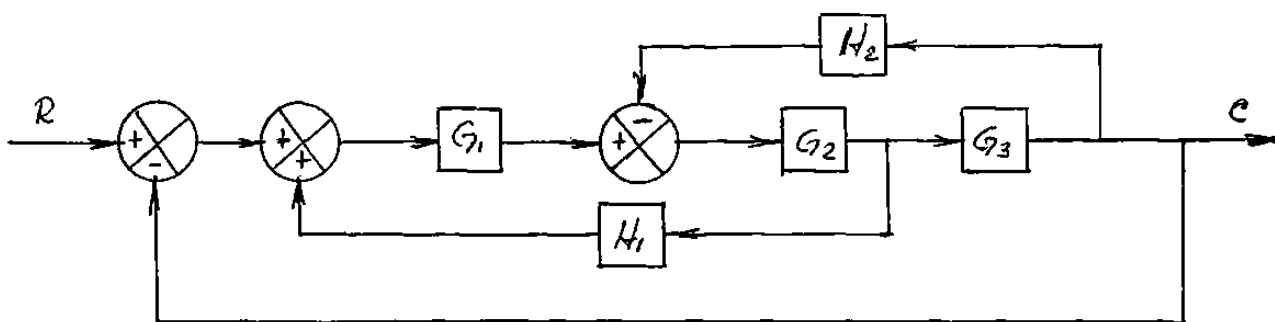


Fig. 4-8. Diagrama de bloques original

Como se puede ver en la fig. 4-8, el diagrama tiene tres lazos. El lazo más grande es de retroalimentación unitaria y contiene a los otros dos. Los lazos con retroalimentación H_1 y H_2 no están anidados y tienen una rama común que es G_2 y un sumador.

Para lograr anidar los lazos H_1 y H_2 se puede aplicar la regla #9 a la retroalimentación H_1 , brincando el bloque G_3 .

Después de aplicar la regla #9, se logra anidar los lazos en el diagrama. El lazo con H_2 en la retroalimentación es el más pequeño, luego el lazo con H_1 y finalmente el lazo con retroalimentación unitaria es el más grande.

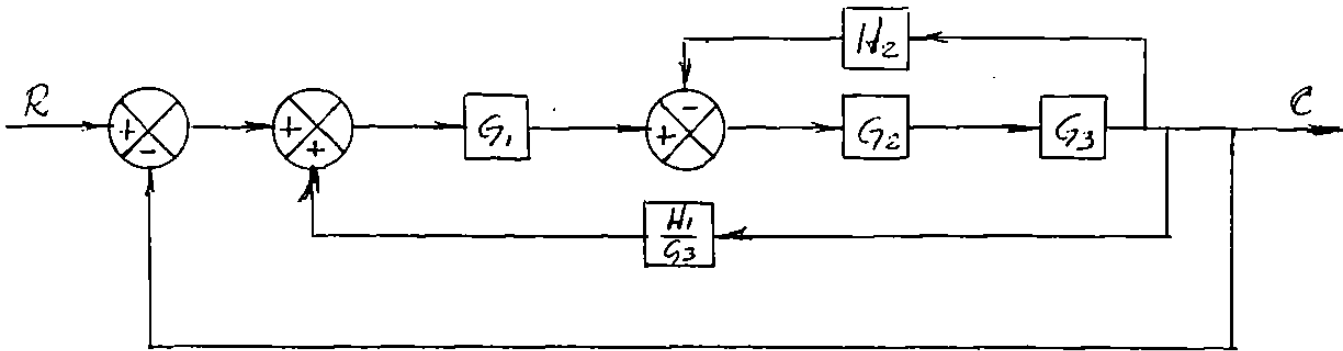


Fig. 4-8-(a). Diagrama de bloques después de aplicar la regla #9

Una vez que se logra anidar los lazos, el siguiente paso es iniciar la simplificación por el lazo más pequeño, en este caso con retroalimentación H_2 . La aplicación de las reglas #4 y #13 nos da el siguiente diagrama :

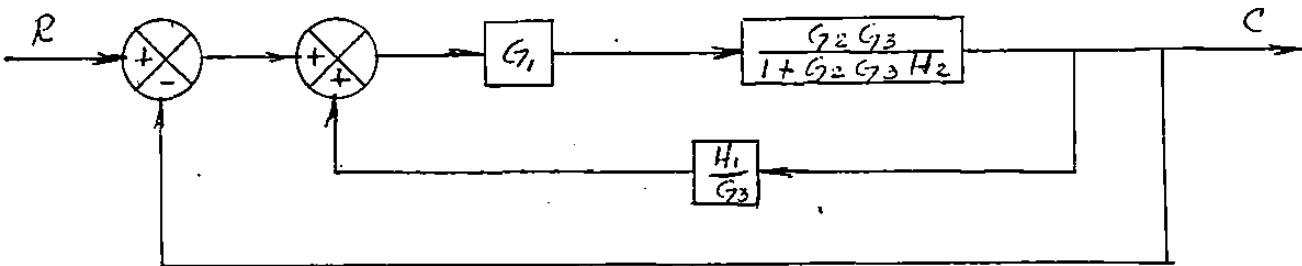


Fig. 4-8-(b). Diagrama de bloques después de aplicar la regla #4 y #13

En seguida se continúa aplicando al diagrama de la fig 4-8-(b) las reglas #4 y #13, para simplificar el lazo con retroalimentación H_1 de lo cual resulta el siguiente diagrama:

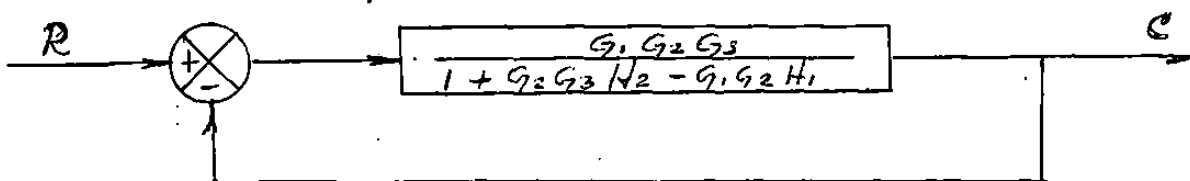


Fig. 4-8-(c). Reducción del diagrama de la fig. 4-8-(b).

Finalmente aplicando de nuevo la regla #13 al diagrama de la fig. 4-8-(c) logramos la simplificación máxima al obtener un sólo bloque equivalente a todo el diagrama original.

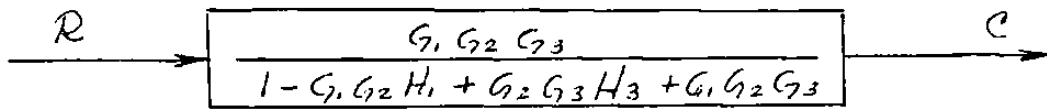


Fig. 4-8-(d). Bloque equivalente al diagrama original.

Ejemplo 4-2.-Reducir el diagrama de bloques de la fig. 4-9 hasta obtener la forma canónica del diagrama, conservando unicamente la retroalimentación H1.

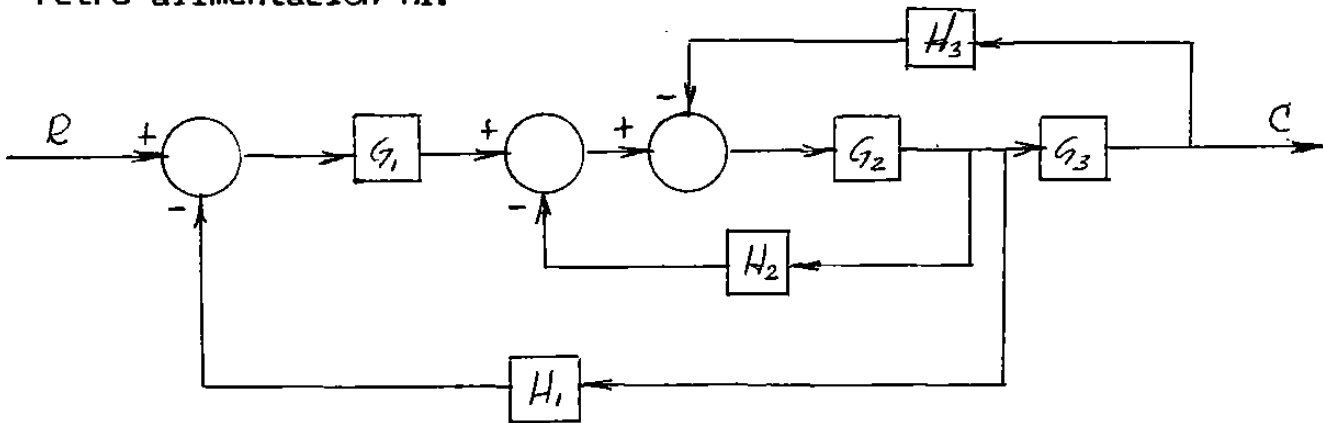
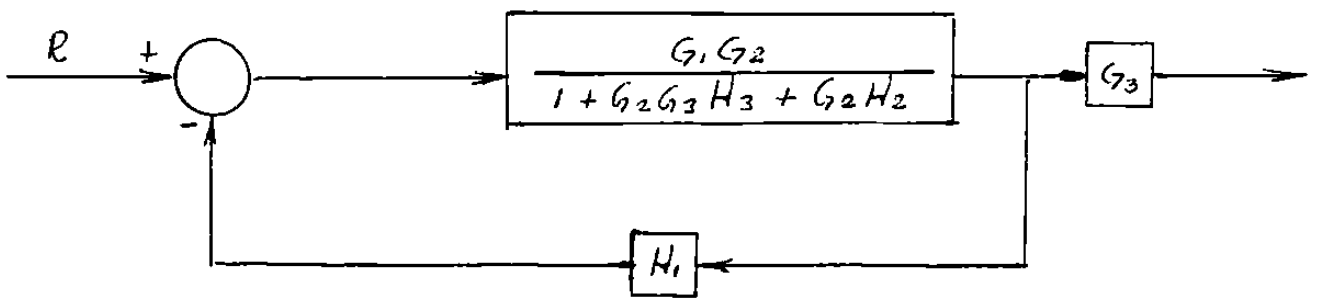
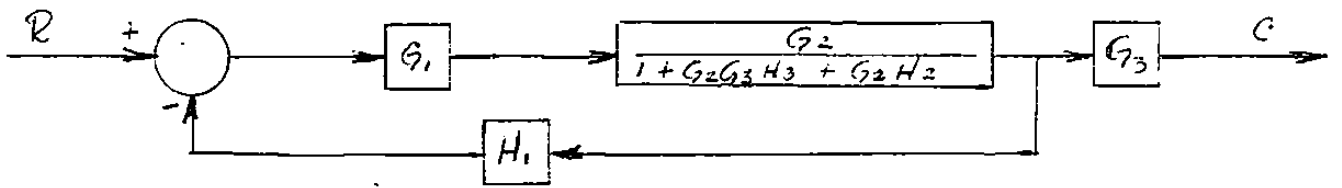
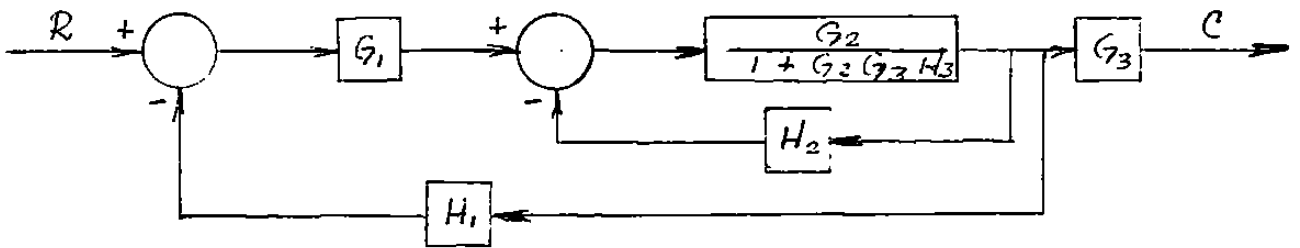
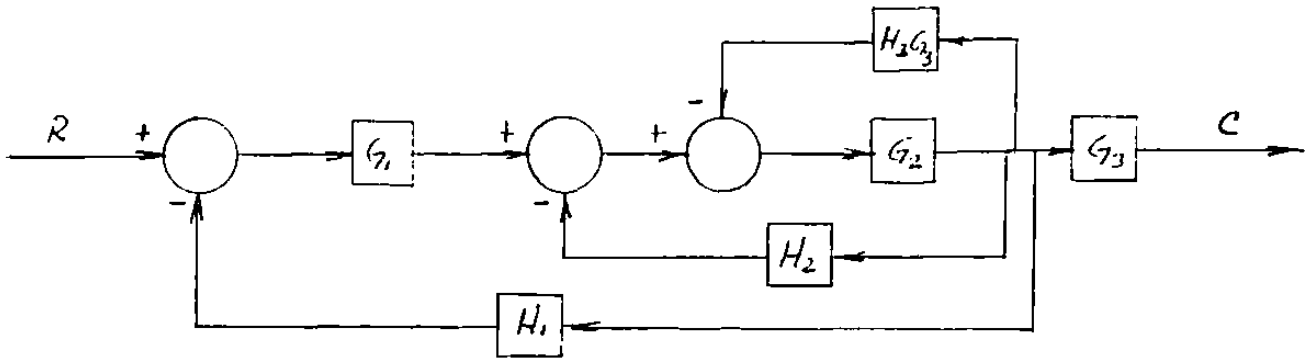


Fig. 4-9.- Diagrama de bloques original.

Como se vé el diagrama de la fig. 4-9 contiene tres lazos. Los lazos con H1 y H2 en la retroalimentación están anidados, pero el H3 no. Con el fin de anidar el lazo H3 dentro de H2 se puede aplicar la regla #8 para mover la retroalimentación de H3 de la derecha de G3 a la izquierda de G3. Realizando éste movimiento, los lazos quedarán anidados, siendo el más pequeño el lazo con H3 en la retroalimentación.

Una vez que se logra tener los lazos anidados, como ya se dijo se inicia la simplificación del diagrama por el lazo más pequeño H3, luego se continúa con H2, conservando la retroalimentación H1 como se está solicitando en la forma canónica.

En las siguientes figuras se detallan los movimientos realizados para lograr la simplificación del diagrama.



Ejemplo 4-3.- Determinar la salida C para el sistema de control representado en la fig. 4-10.

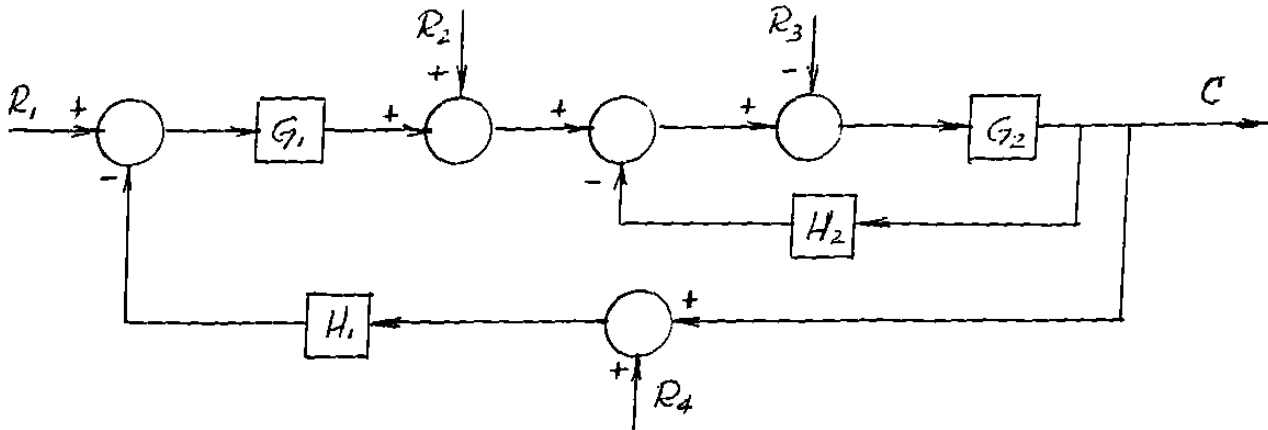
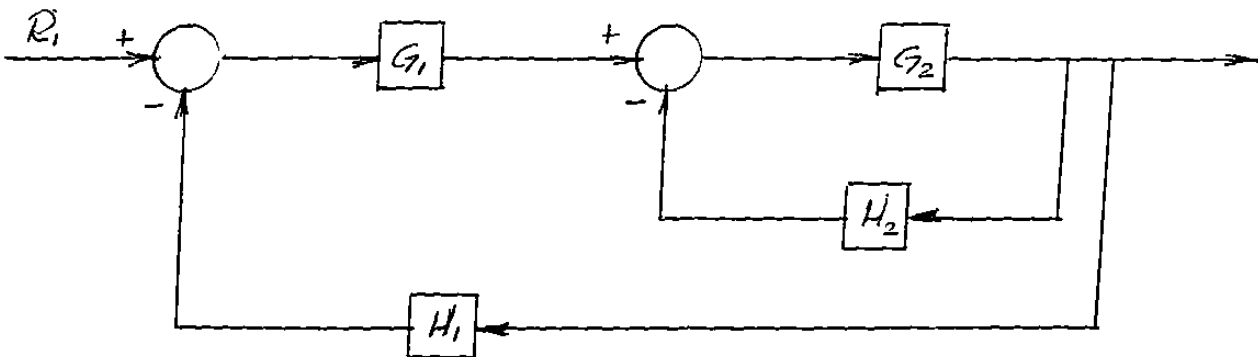
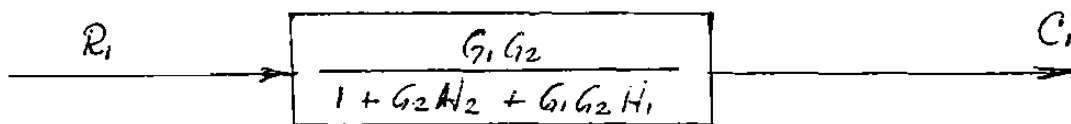
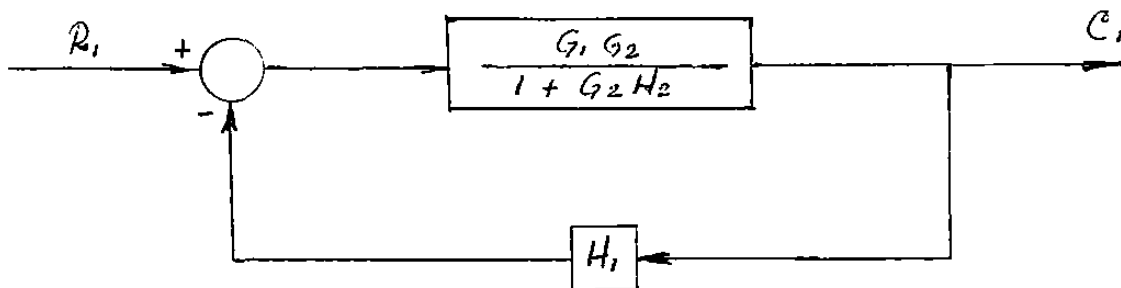
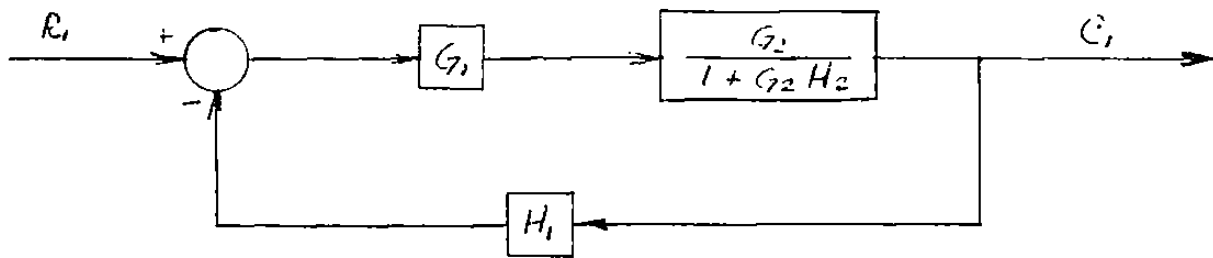


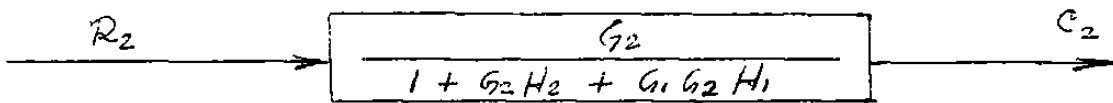
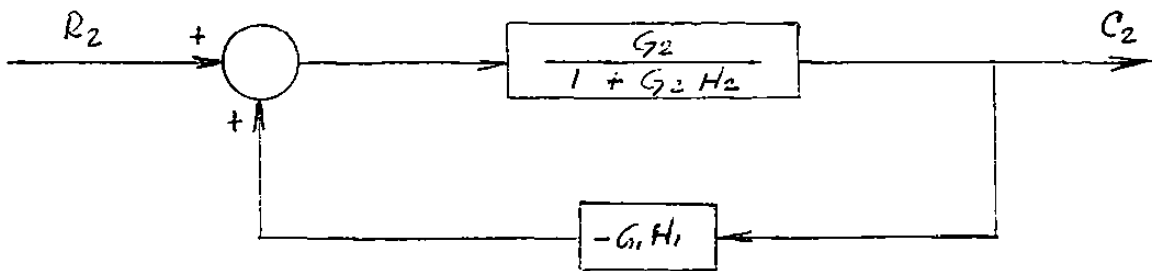
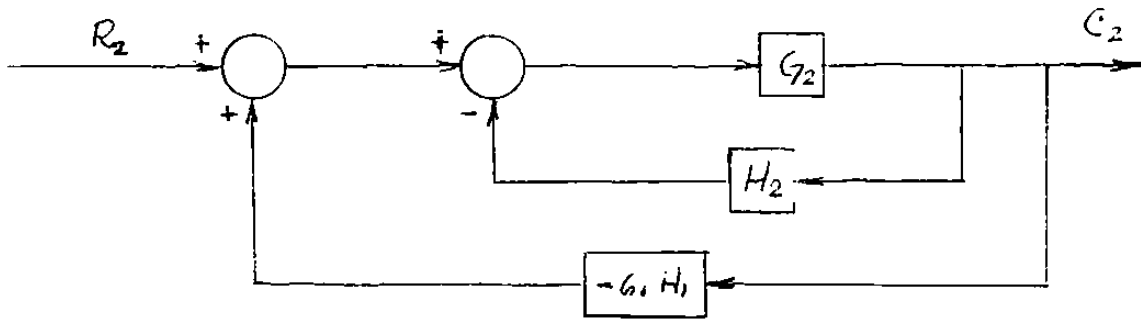
Fig. 4-10. Diagrama de Bloques Original.

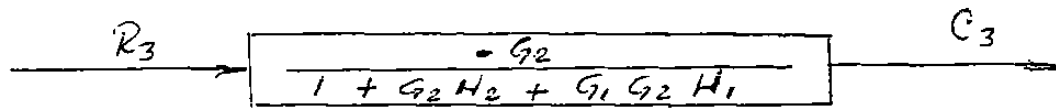
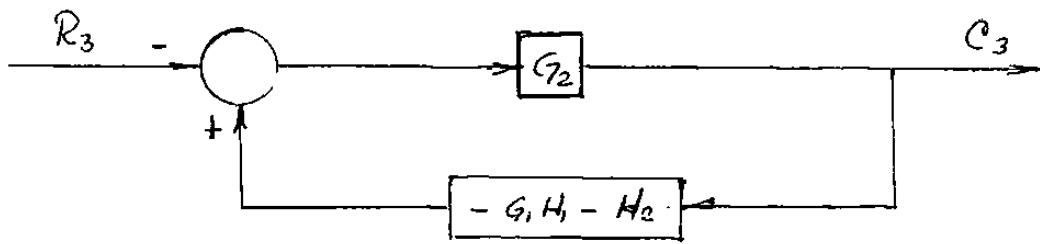
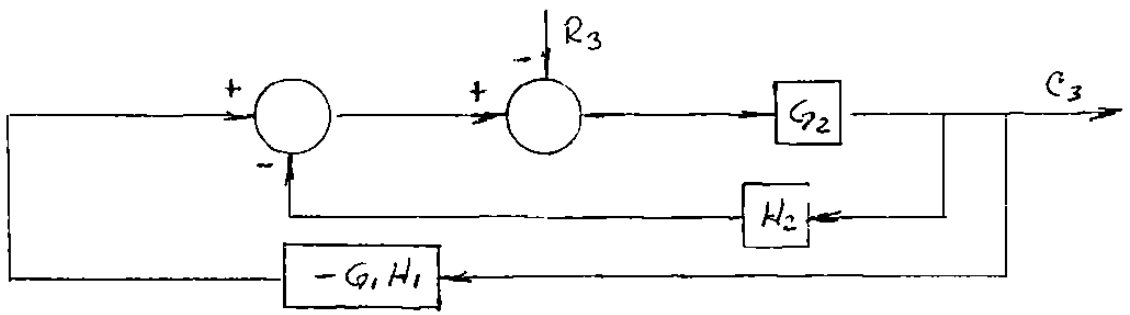
Como se vé, el diagrama de bloques tiene cuatro entradas y una salida. El diagrama por lo tanto se simplificará aplicando el principio de la superposición. Primero se considerará unicamente la entrada R_1 , con lo cual se obtendrá una salida parcial C_1 , luego se aplicará la entrada R_2 , con lo cual se tendrá otra salida parcial C_2 . Continuando en la misma forma con las entradas R_3 y R_4 se obtendrán las salidas C_3 y C_4 . La salida total C será la sumatoria de las cuatro salidas parciales.

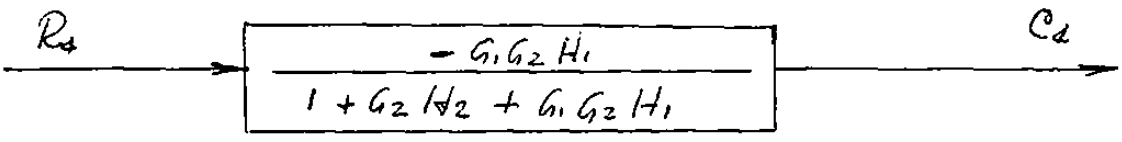
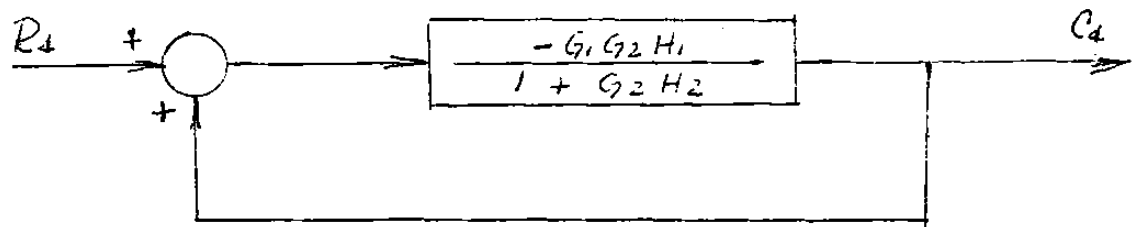
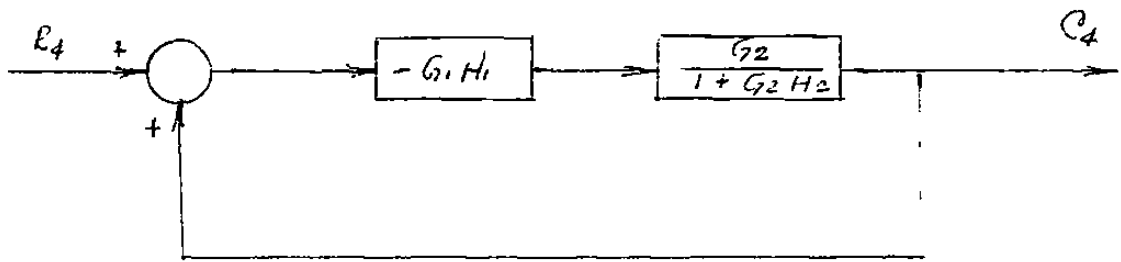
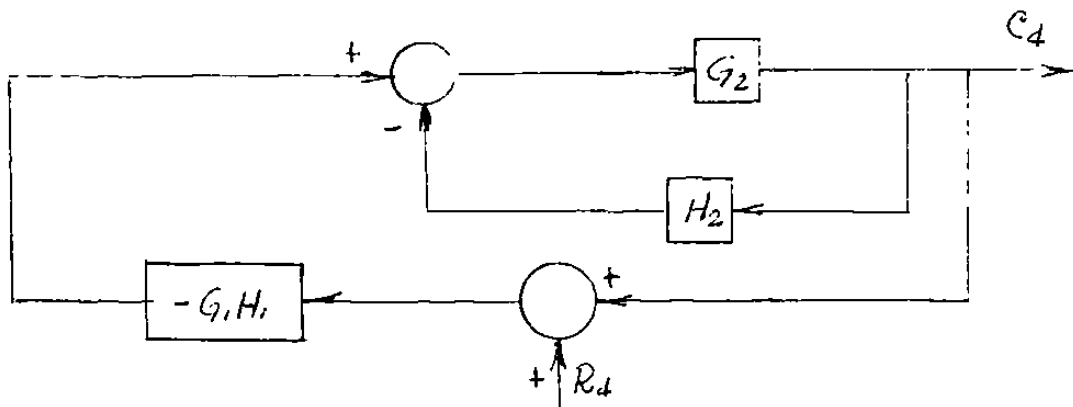
Aplicando unicamente la entrada R_1 al sistema de control:











De acuerdo con los cuatro resultados parciales que se tienen, la salida total del sistema será la sumatoria.

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$$

$$C = \frac{G_1 G_2 R_1 + G_2 R_2 - G_2 R_3 - G_1 G_2 H_1 R_4}{1 + G_2 H_2 + G_1 G_2 H_1}$$

4-2.- Cálculo de Funciones de Transferencia de Sistemas Físicos.

Los sistemas de control pueden estar formados por componentes de distintos tipos, tales como eléctricos, electrónicos, mecánicos, hidráulicos, neumáticos, térmicos. El ingeniero de control debe conocer las leyes fundamentales de éstos componentes para poder plantear las ecuaciones que representen matemáticamente la operación de los sistemas. Transformando éstas ecuaciones se obtienen las Funciones de Transferencia que relacionan la entrada y la salida.

Servomotores.- Se estudiarán a continuación tres tipos de servomotores electricos:

- a) Servomotor de dos fases de C.A.
- b) Servomotor de C.D. controlado por Inducido.
- c) Servomotor de C.D. controlado por Inductor.

Los servomotores se pueden definir como motores eléctricos con control de posición o velocidad basicamente. Antes de analizar cada servomotor, veremos un efecto muy importante que se presenta en los servomotores, llamado el efecto de carga en la dinamica de los servomotores.

Efecto de la carga en la dinámica de los Servomotores.- La mayoría de los servomotores eléctricos están acoplados a la carga através de un tren de engranes, bandas o cadenas como se indica en la fig. 4-11.

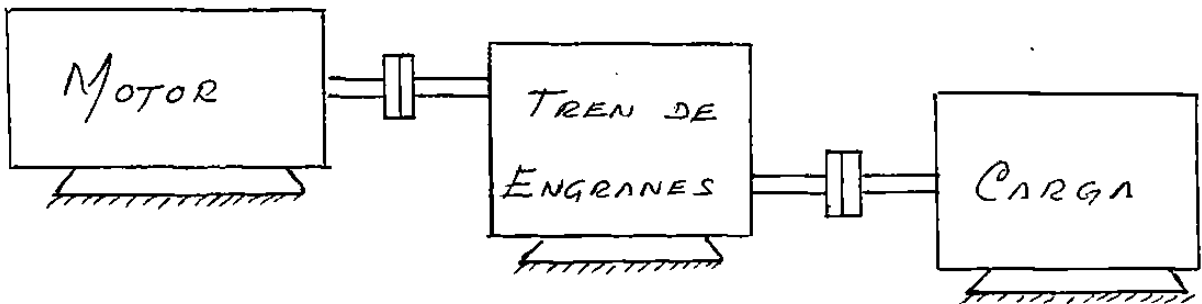


Fig. 4-11.- Servomotor acoplado a una carga.

Como se puede ver en la fig. 4-11, el motor tiene una velocidad, diferente a la velocidad de la carga, un motor con rotor diferente al rotor de la carga, lo cual nos indica que las condiciones dinámicas de motor y carga son muy diferentes. Hay dos características muy importantes en la dinámica del servomotor, el momento de inercia J y la fricción f . Por un lado el motor tiene un determinado momento de inercia J_m y una fricción f_m , por otro lado la carga tiene otro momento de inercia J_l y otra fricción f_l . El momento de inercia depende de la masa y del radio de giro del rotor y la fricción depende del tipo de rodamiento que se utilice.

Cuando se desea calcular el momento de inercia total del servomotor o la fricción total no se puede sumar directamente los dos momentos de inercia o los dos coeficientes de fricción porque las condiciones dinámicas de una y otra parte no son iguales. Para calcular el momento de inercia y el coeficiente de fricción equivalente de todo el servomotor completo referidos al lado del eje del motor se pueden utilizar las siguientes ecuaciones:

$$J_{eq} = J_m + n^2 J_L \quad n < 1 \quad (4-14)$$

$$f_{eq} = f_m + n^2 f_L \quad n < 1 \quad (4-15)$$

donde n es la relación de engranes entre el motor y la carga.

El efecto de la carga en los servomotores es semejante a otro efecto que se presenta en los circuitos eléctricos cuando hay un transformador. Si se tiene una impedancia Z en el lado del primario del transformador, la misma impedancia conectada en el secundario, pero vista desde el primario no mide Z ohms, sino $n^2 Z$. A esta impedancia $n^2 Z$ se le llama impedancia del secundario reflejada al lado del primario. La cantidad n en el transformador representa la relación de vueltas entre el primario y el secundario.

Servomotores de dos fases.- La fig. 4-12 representa el diagrama esquemático de un servomotor de dos fases. La parte eléctrica del servomotor está formada por dos devanados, uno de los devanados es llamado fase fija y se energiza con un voltaje senoidal cuya tensión y frecuencia es constante. La fase fija es necesaria pero no suficiente para mover el servomotor. Para mover el servomotor se requiere aplicar un voltaje a la otra fase llamada fase de control. Los voltajes de control y fase fija están defasados 90 grados eléctricos para lograr un mayor par mecánico en el servomotor.

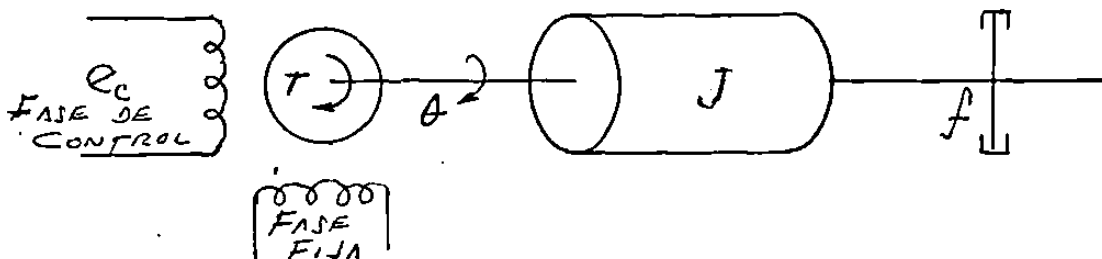


Fig. 4-12. Servomotor de dos fases

En la misma fig. 4-12 se representa el par mecánico T , el desplazamiento angular del rotor θ , el momento de inercia del rotor J y el coeficiente de fricción f .

Los devanados del estator se deben energizar por medio de una fuente de alimentación de dos fases. Si no se cuenta con una, se puede lograr el defasamiento por medio de un condensador, el cual producirá el defase de 90 grados.

Si se incrementa el voltaje de control E_c , el par generado T se aumenta, pero el par disminuye al incrementarse la velocidad. Esta relación se puede representar matemáticamente con la sig. ecuación:

$$T = K_c E_c - K_n \frac{d\theta}{dt} \quad (4-16)$$

donde:

- T = Par Mecánico del Servomotor.
- K_c = Constante de proporcionalidad del voltaje de control.
- E_c = Voltaje de control.
- K_n = Constante de proporcionalidad de la velocidad angular.
- $d\theta/dt$ = Velocidad angular del Rotor.

Por otro lado el par mecánico generado debe ser capaz de vencer dos obstáculos para mover el servomotor, la inercia J y el rozamiento f , por lo que se puede plantear otra ecuación puramente mecánica como sigue:

$$T = J \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt} \quad (4-17)$$

Las ecuaciones 4-16 y 4-17 se pueden igualar y de dicha igualación surge la siguiente ecuación:

$$K_c E_c - K_n \frac{d\theta}{dt} = J \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt}$$

reacomodando la ecuación tenemos:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + (f + K_n) \frac{d\theta}{dt} = K_c E_c$$

transformando por Laplace la ecuación anterior:

$$J s^2 \theta(s) + (f + K_n) s \theta(s) = K_c E_c(s)$$

tomando a E_c como señal de entrada y θ como señal de salida, la función de transferencia del servomotor será:

$$\frac{\theta(s)}{E_c(s)} = \frac{K_c}{J s^2 + (f + K_n) s} = \frac{\frac{K_c}{(f + K_n)}}{J s^2 + (f + K_n) s} = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)}$$

donde

$K_m = K_c / (f + K_n)$ = Constante de ganancia del motor.

$T_m = J / (f + K_n)$ = Constante de tiempo del motor.

En la fig. 4-13 se representa el diagrama de bloques del servomotor de dos fases. Lo ideal es que el valor de la constante K_m sea lo más grande posible ya que con un pequeño voltaje de control E_c se obtendría un gran desplazamiento angular θ . Por lo contrario el valor de T_m conviene que sea el más pequeño posible ya que entre menor sea su valor, el sistema tendrá una respuesta más rápida. Los valores de estas constantes K_m y T_m generalmente son datos que el fabricante de estos equipos proporciona a los usuarios.

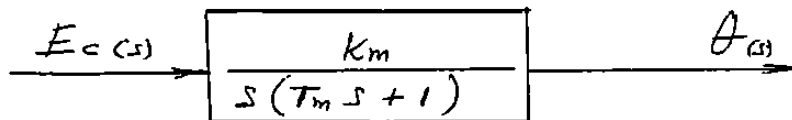


Fig. 4-13 Diagrama de bloques del Servomotor de dos fases.

Servomotor de corriente continua controlado por inducido.- Cuando se requiere desarrollar mayor potencia en un servomotor, se prefiere uno de corriente directa en lugar de uno de C.A. de dos fases. En la Fig. 4-14 se representa el diagrama esquemático de un motor de corriente directa controlado por inducido.

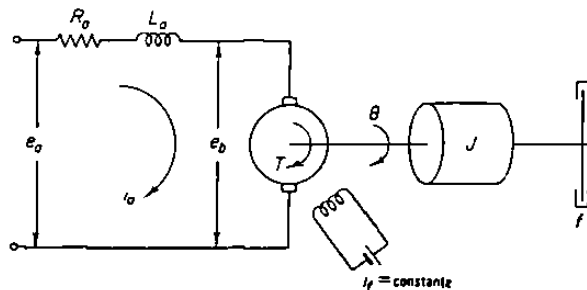


Fig. 4-14. Diagrama esquemático de un motor de CC controlado por el inducido.

En seguida se enumeran las partes principales de un motor de CC controlado por inducido:

- R_a = Resistencia del devanado del inducido en ohmios.
- L_a = Inductancia del devanado del inducido en henrios.
- i_a = Corriente del devanado del inducido en amperios.
- i_f = Corriente del devanado de campo en amperios.
- e_a = Voltaje aplicado al inducido en voltios.

- e_b = Fuerza contraelectromotriz en voltios.
- θ = Desplazamiento angular del eje del motor en radianes.
- T = Par desarrollado por el motor en Kg-m.
- J = Momento de inercia equivalente del motor y la carga con referencia al eje del motor en kg-m^2 .
- f = Coeficiente de fricción viscosa equivalente del motor y carga referido al eje del motor en Kg-m/rad/seg.

Quando se aplica un voltaje de entrada e_c al inducido, se origina una corriente de inducido i_a . Hay una caída de voltaje en R_a y L_a y el motor genera un voltaje llamado fuerza contraelectromotriz e_b . El voltaje e_b depende de la velocidad del motor y del campo magnético del inductor. Como la corriente i_f es constante, el campo es constante y la FCEM e_b básicamente depende de la velocidad del motor, por lo que matemáticamente la FCEM o voltaje e_b se puede expresar como sigue:

$$e_b = K_b \, d\theta/dt \quad (4-18)$$

El par desarrollado por el motor es proporcional a la corriente de campo i_f y a la corriente del inducido i_a , por lo tanto:

$$T = K_f i_f K_1 i_a$$

Donde K_1 es una constante de proporcionalidad. Debido a que i_f es una corriente constante, K_f y K_1 también son constantes, las tres constantes se pueden agrupar en una sola constante $k = K_f i_f K_1$.

$$T = K i_a \quad \text{donde } k \text{ es llamada constante de par motor.}$$

Sumando las caídas de voltaje del inducido en el diagrama de la fig 4-14 tenemos:

$$L_a \, di_a/dt + R_a i_a + e_b = e_c \quad (4-19)$$

Sustituyendo e_b de la ecuación 4-18 en la ecuación 4-19:

$$L_a \, di_a/dt + R_a i_a + K_b \, d\theta/dt = e_c \quad (4-20)$$

La corriente del inducido i_a genera el par mecánico T que debe vencer la inercia y el rozamiento. La ecuación del par mecánico T es:

$$T = J \, d^2\theta/dt^2 + f \, d\theta/dt = K i_a \quad (4-21)$$

Transformando por Laplace las ecuaciones 4-20 y 4-21 se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$L_a s I_a(s) + R_a I_a(s) + K_b s \, \theta(s) = E_c(s) \quad (4-22)$$

$$J s^2 \theta(s) + f s \theta(s) = K I_a(s) \quad (4-23)$$

Considerando a $E_c(s)$ como señal de entrada, $\theta(s)$ como señal de salida, y basandonos en las ecuaciones anteriores desde la Ec. 4-18 hasta la Ec. 4-23 se puede trazar el diagrama de bloques que se representa en la fig. 4-15.

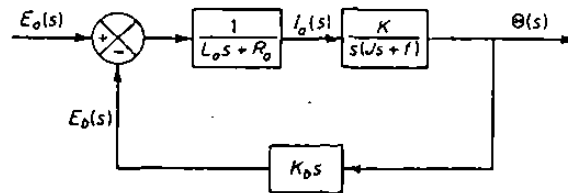


Fig. 4-15. Diagrama de bloques del Motor de CC controlado por el inducido

Para obtener la función de transferencia del motor de CC nos podemos basar en el diagrama de bloques de la fig. 4-15, o en las ecuaciones 4-22 y 4-23, de donde:

$$\frac{\theta(s)}{E_a(s)} = \frac{\frac{K}{(L_a s + R_a)s(Js + f)}}{1 + \frac{KK_b s}{(L_a s + R_a)s(Js + f)}} = \frac{K}{s(L_a s + R_a)(Js + f) + KK_b s}$$

En la mayoría de los motores de CC controlados por inducido, la inductancia L_a es muy pequeña con respecto a R_a , por lo que se puede despreciar sin incurrir en mucho error. Haciendo $L_a = 0$ en la ecuación anterior tenemos:

$$\frac{\theta(s)}{E_a(s)} = \frac{K}{sR_a(Js + f) + KK_b s} = \frac{K}{s[R_a Js + (R_a f + KK_b)]} \quad (4-24)$$

Dividiendo la ecuación 3-40 entre la constante $(R_a f + KK_b)$

$$\frac{\theta(s)}{E_a(s)} = \frac{\frac{K}{(R_a f + KK_b)}}{\frac{s[R_a Js + (R_a f + KK_b)]}{(R_a f + KK_b)}} = \frac{K_m}{s [T_m s + 1]} \quad (4-25)$$

En la ecuación anterior (4-25) los valores de las constantes K_m y T_m son:

$$K_m = K/(R_a f + KK_b) = \text{Constante de Ganancia del Motor.}$$

$$T_m = R_a J/(R_a f + KK_b) = \text{Constante de Tiempo del Motor.}$$

Si comparamos la ecuación 4-25 con la función de transferencia del servomotor de dos fases, se puede ver que son idénticas en su forma, aunque por supuesto las constantes K_m y T_m son diferentes en cada caso. Al igual que en el servomotor de dos fases, lo ideal es tener un valor lo mas grande posible para K_m y lo más pequeño posible para T_m .

Servomecanismo Posicional.- Como un ejemplo de aplicación del motor de CC controlado por inducido, se estudiará un sistema de control denominado servomecanismo posicional. Este servomecanismo se representa esquemáticamente en la fig. 4-16.

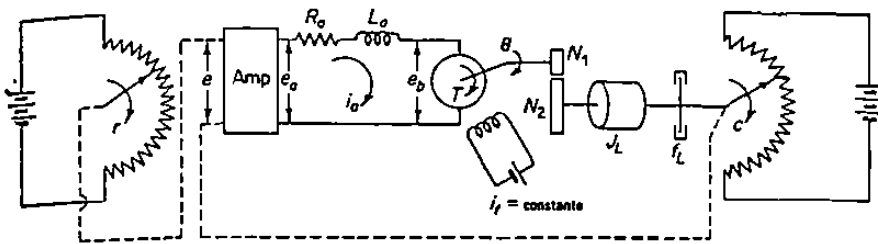


Fig. 4-16. Servomecanismo de Posición.

El sistema de control está formado por dos potenciómetros idénticos; uno de entrada y otro de salida, un amplificador, un motor de CC, un tren de engranes y la carga que se debe posicionar. La entrada del sistema es la posición angular del potenciómetro "r" y la salida es la posición angular del potenciómetro "c".

Cuando los dos potenciómetros de entrada y de salida están en la misma posición angular, el voltaje de error "e" es igual a cero y el sistema está en reposo. Para que se inicie el funcionamiento del sistema es necesario mover el potenciómetro de entrada "r" un cierto ángulo. Este movimiento se traduce como una diferencia de voltaje de error "e" que se aplica a un amplificador. Es necesario utilizar un amplificador para poder aumentar el nivel del voltaje "e" que normalmente es muy pequeño a un voltaje mayor que sea capaz de poder mover el motor de CC.

El voltaje amplificado e_a se aplica al motor de CC, el cual produce el par mecánico "T" que a través de un tren de engranes mueve la carga "L". La carga está acoplada mecánicamente al potenciómetro de salida "c", para que el potenciómetro siga los movimientos de la carga y finalmente el voltaje del potenciómetro de salida "c" se retroalimenta al amplificador para generar el voltaje de error "e".

Como ya se mencionó el movimiento del sistema se inicia al mover el potenciómetro "r" un cierto ángulo. Esto origina un voltaje de error que mueve la carga y el potenciómetro de salida siguiendo el movimiento del potenciómetro de entrada "r". A medida que el potenciómetro de salida "c" se vaya aproximando a la misma posición angular del potenciómetro de entrada "r", el voltaje de error "e" se va haciendo más pequeño, hasta que finalmente el error se hace cero y el sistema automáticamente se detiene.

Al potenciómetro de entrada "r" se le llama potenciómetro Maestro y al potenciómetro de salida "c" se le denomina potenciómetro Esclavo ya que prácticamente es un seguidor del potenciómetro de entrada.

A continuación se darán valores para las constantes del Servomecanismo Posicional y se definirán todas las variables que se representan en la fig. 4-16.

- r = desplazamiento angular del potenciómetro de entrada en radianes.
- c = desplazamiento angular del potenciómetro de salida en radianes.
- θ = desplazamiento angular del motor de CC.
- K_1 = ganancia del detector de error potenciométrico = $24/\pi$ volts/rad.
- K_p = ganancia del amplificador = 10 volts/volt.
- e_a = voltaje aplicado al inducido en voltios.
- e_b = fuerza contraelectromotriz generada por el motor en voltios.
- R_a = resistencia del devanado de inducido = 0.2 ohmios.
- L_a = inductancia del devanado de inducido = despreciable.
- i_a = corriente del devanado de inducido en amperios.
- K_b = cte. de fuerza contraelectromotriz = 5.5×10^{-2} volts-seg/rad.
- K = cte. del par motor = 6×10^{-5} Kg-m/amperio.
- J_m = momento de inercia del motor = 1×10^{-5} Kg-m-seg²
- f_m = coeficiente de fricción viscosa del motor = despreciable.
- J_L = momento de inercia de la carga = 4.4×10^{-3} Kg-m-seg²
- f_L = coeficiente de fricción viscosa de la carga = $4 \times 10^{-2} \frac{\text{Kg-m}}{\text{rad/seg}}$
- n = relación de engranaje $N_1/N_2 = 1/10$

En seguida se plantearán las ecuaciones que constituyen los modelos matemáticos de cada una de las partes del servomecanismo. Empezando por el detector de error potenciométrico:

$$E(s) = K_1[R(s) - C(s)] = 7.64[R(s) - C(s)] \quad (4-26)$$

Para el amplificador:

$$E_a(s) = K_p E(s) = 10 E(s) \quad (4-27)$$

Para el motor de CC controlado por inducido, la función de transferencia es:

$$\frac{\theta(s)}{E_a(s)} = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)} \quad (4-28)$$

Se calculará primeramente el momento de inercia equivalente J y el coeficiente de fricción viscosa f , referidos al eje del motor, antes de calcular los valores de las constantes K_m y T_m .

$$J = J_m + n^2 J_L = 1 \times 10^{-5} + 4.4 \times 10^{-5} = 5.4 \times 10^{-5}$$

$$f = f_m + n^2 f_L = 0 + (1/10)^2 (4 \times 10^{-2}) = 4 \times 10^{-4}$$

$$K_m = \frac{K}{R_a f + K K_b} = \frac{6 \times 10^{-5}}{0.2(4 \times 10^{-4}) + (6 \times 10^{-5})(5.5 \times 10^{-2})} = 0.72$$

$$T_m = \frac{R_a J}{R_a f + K K_b} = \frac{0.2(5.4 \times 10^{-5})}{0.2(4 \times 10^{-4}) + (6 \times 10^{-5})(5.5 \times 10^{-2})} = 0.13$$

Substituyendo el valor de las constantes K_m y T_m en la función de transferencia (4-28), tenemos:

$$\frac{\theta(s)}{E_a(s)} = \frac{0.72}{s(0.13s + 1)} \quad (4-29)$$

Para el tren de engranes la señal de entrada es $\theta(s)$ y la salida es $C(s)$. Por lo que la función de transferencia es:

$$\frac{C(s)}{\theta(s)} = \frac{1}{10} \quad (4-30)$$

Utilizando la función de transferencia de cada una de las partes expresadas en las ecuaciones 4-26, hasta la 4-30, se puede trazar el siguiente diagrama de bloques:

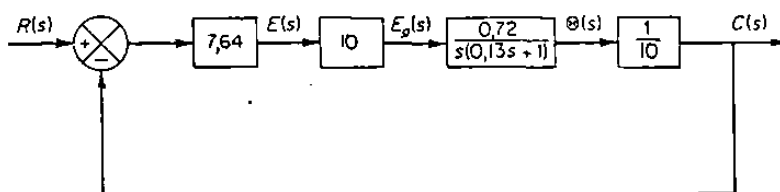


Fig. 4-17. Diagrama de bloques del sistema de la fig 4-16.

Finalmente aplicando álgebra de bloques se puede simplificar el diagrama de la fig. 4-17 hasta obtener el siguiente diagrama de bloques en su forma canónica.

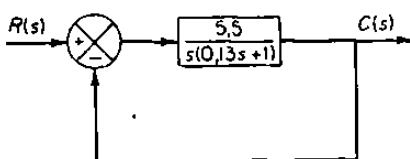


Fig. 4-18. Diagrama de bloques simplificado.

Servomotor de CC controlado por Campo.- En la fig. 4-19 se puede ver el diagrama esquemático de un motor de CC controlado por campo.

Ahora la señal de entrada es el voltaje e_f que se aplica al circuito de campo, lo cual origina una corriente de campo i_f . A la derecha se tiene el circuito de inducido o armadura en donde se aplica un voltaje e_a . Al aplicar el voltaje e_a constante, la corriente i_a aparentemente es constante, pero esto en la realidad es muy difícil de lograr porque la corriente i_a depende de la fuerza contraelectromotriz y ésta a su vez depende del campo que es variable y de la velocidad que también puede ser variable. Por lo anterior y para tratar de mantener lo más constante posible la corriente i_a se conecta una resistencia R_a en serie con la armadura, lo cual reduce el valor de la corriente i_a y con ello su nivel de variación.

El significado de cada una de las constantes y variables de la fig. 4-19 es:

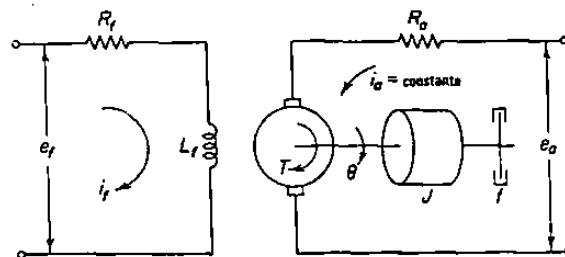


Fig. 4-19. Diagrama esquemático del motor de CC controlado por campo

- R_f = resistencia del devanado de campo en ohmios.
- L_f = inductancia del devanado de campo en henrios.
- i_f = corriente del devanado de campo en amperios.
- e_f = tensión del devanado de campo en voltios.
- R_a = suma de la resistencia de inducido y resistencia externa en ohm
- i_a = corriente del inducido en amperios.
- θ = desplazamiento angular del eje del motor en radianes.
- T = par desarrollado por el motor en Kg-m.
- J = momento de inercia equivalente del motor y la carga referido al eje del motor en Kg-m².
- f = coeficiente de fricción viscosa equivalente del motor y la carga con referencia al eje del motor, en Kg-m/rad/seg.

La primera ecuación que se planteará para el motor será la suma de los voltajes en el circuito de campo.

$$L_f \frac{di_f}{dt} + R_f i_f = e_f \quad (4-31)$$

El par mecánico generado por el motor es directamente proporcional a la corriente de campo i_f y a la corriente del inducido i_a . Como la corriente de inducido es constante, entonces:

$$T = K_2 i_f \quad (4-32)$$

El par mecánico debe ser capaz de vencer el momento de inercia y el rozamiento, por lo que la ecuación de suma de pares será:

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt} = T = K_2 i_f \quad (4-33)$$

Calculando la transformada de Laplace de las ecuaciones (4-31) y (4-33) tenemos:

$$(L_f s + R_f) I_f(s) = E_f(s) \quad (4-34)$$

$$(J s^2 + f s) \theta(s) = K_2 I_f(s) \quad (4-35)$$

Tomando como base las ecuaciones 4-34 y 4-35 y considerando como entrada el voltaje $E_f(s)$ y $\theta(s)$ como salida se puede construir el siguiente diagrama de bloques:

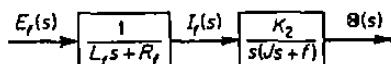


Fig. 4-20. Diagrama de bloques del motor de CC controlado por campo.

El diagrama de bloques de la fig. 4-20 se puede simplificar aplicando álgebra de bloques y al mismo tiempo calcular la función de transferencia del motor de CC.

$$\frac{\theta(s)}{E_f(s)} = \frac{K_2}{s(L_f s + R_f)(J s + f)} = \frac{K_m}{s(T_f s + 1)(T_m s + 1)}$$

donde $K_m = K_2 / (R_f f) =$ constante de ganancia del motor.
 $T_f = L_f / R_f =$ constante de tiempo del circuito de campo.
 $T_m = J / f =$ constante de tiempo del elemento inercia-fricción.

Comparación del funcionamiento de un motor de CC controlado por inducido con el motor de CC controlado por campo. La única ventaja del control por campo es que como el circuito de campo consume de un 5 a un 7% de la potencia del motor, el control de la velocidad se hace en un dispositivo de muy baja potencia. Pero el control por campo es más problemático por la dificultad que implica el tener que mantener la corriente de inducido i_a como una constante. Es mucho más fácil disponer de una fuente de voltaje constante para el control del motor por inducido, además las constantes de tiempo son menores en el control por inducido. Otra dificultad del control por campo es el hecho de que la función de transferencia es de tercer orden, mientras que la de control por inducido es de segundo orden. Esto último se debe a que no es posible desprestigiar en el control por campo la inductancia L_f .

De acuerdo con todo lo anterior el control por inducido tiene mayores ventajas y se utiliza por ello mucho más en la práctica. El control por campo solamente se utiliza algunos casos en combinación con el control por inducido.

4-3.- GRAFICOS DE FLUJO DE SEÑAL.

Como ya se vió con anterioridad, los diagramas de bloques es una forma de representación muy útil para sistemas de control. Los gráficos de flujo de señal son otra forma de representación de sistemas de control.

Cuando el diagrama de bloques es grande, el procedimiento de simplificación puede ser complicado. En éstos casos se puede aplicar el método de gráficos de flujo de señal con cierta ventaja ya que se cuenta con una fórmula que nos permite en un sólo cálculo simplificar el gráfico hasta obtener directamente la función de transferencia, que nos relaciona la entrada y la salida del sistema. La fórmula para lograr la simplificación en un gráfico de flujo de señal se denomina la fórmula de Mason y se verá un poco más adelante.

Desde luego que la simplificación anterior también se puede hacer en un diagrama de bloques, aplicando las reglas del álgebra de bloques con el único inconveniente de que la simplificación tendría que hacerse en varios pasos, lo cual representa un procedimiento más largo y tardado.

Basicamente un gráfico de flujo de señal contiene logicamente la misma información que un diagrama de bloques y se puede trazar apartir de ecuaciones algebraicas o de un diagrama de bloques.

Un gráfico de flujo de señal consiste en una red que contiene nodos que están interconectados por ramas que tienen una dirección y un sentido.

Para poder entender lo que es y como se representa un gráfico de flujo de señal hay que definir primeramente ciertos términos. En seguida se darán las definiciones que constituyen una terminología especial para gráficos de flujo de señal.

Nudo.- Es un punto que representa una variable o señal.

Transmitancia.- La transmitancia es una ganancia entre dos nudos.

Rama.- Es un segmento de línea con dirección y sentido que une dos nudos. La ganancia de una rama es una transmitancia.

Nudo de entrada o fuente.- Es un nudo que sólo tiene ramas que salen. Corresponde a una variable independiente.

Nudo de salida o sumidero.-Es un nudo que sólo tiene ramas que entran. Corresponde a una variable dependiente.

Nudo mixto.- Es un nudo que tiene tanto ramas que entran como ramas que salen.

Camino o trayecto.- Es un recorrido de ramas conectadas en el sentido de las flechas de las ramas. Si no cruza ningún nudo más de una vez, el camino o trayecto es abierto. Si el camino o trayecto finaliza en el mismo nudo del cual partió, y no cruza ningún otro nudo más de una vez, es un camino o trayecto cerrado.

Lazo.- Es un camino o trayecto cerrado.

Ganancia de lazo.- Es el producto de las transmitancias de las ramas de un lazo.

Lazos disjuntos.- Son lazos que no poseen ningún nudo común.

Trayecto Directo.- Es el trayecto de un nudo de entrada (fuente) a un nudo de salida (sumidero) que no cruza ningún nudo más de una vez.

Ganancia de Trayecto Directo.— Es el producto de las transmitancias de las ramas de un trayecto directo.

En la fig. 4-21 se representa un gráfico de flujo de señal en donde se pueden ver lo que son los nudos, las ramas y las transmitancias.

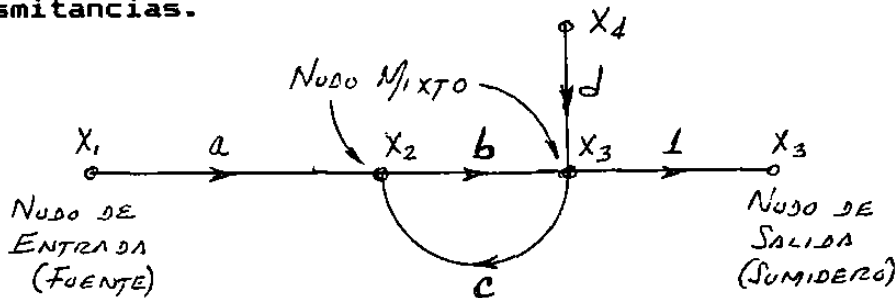


Fig. 4-21 Gráfico de Flujo de Señal.

Algebra de Graficos de Flujo de Señal.— Como ya se mencionó anteriormente los graficos de flujo de señal se pueden simplificar en un solo paso aplicando la fórmula de Mason que se verá mas adelante. Las reglas que se verán a continuación se utilizan para trazar el grafico, entender su operación o realizar pequeñas simplificaciones al mismo.

- 1.- El valor del nudo de salida con una sola rama de entrada es $x_2 = ax_1$, como se ve en la fig. 4-22-a.
- 2.- La transmitancia total de varias ramas conectadas en serie es igual al producto de todas las transmitancias de las ramas, como se indica en la fig. 4-22-b.
- 3.- La transmitancia total de varias ramas conectadas en paralelo se obtiene sumando las transmitancias de todas las ramas, como se ve en la fig. 4-22-c.
- 4.- La fig. 4-22-d nos indica como se puede eliminar un nudo mixto.
- 5.- La fig. 4-22-e nos indica como se puede eliminar un lazo de gráfico de flujo de señal. De la fig. 4-22-e se puede ver que

$$x_3 = bx_2 \quad x_2 = ax_1 + cx_3$$

Substituyendo x_2 en la ecuación de x_3 , tenemos:

$$x_3 = b [ax_1 + cx_3] = abx_1 + bcx_3$$

$$x_3 - bcx_3 = abx_1$$

$$x_3 [1 - bc] = abx_1$$

$$x_3 = \left[\frac{ab}{1 - bc} \right] x_1$$

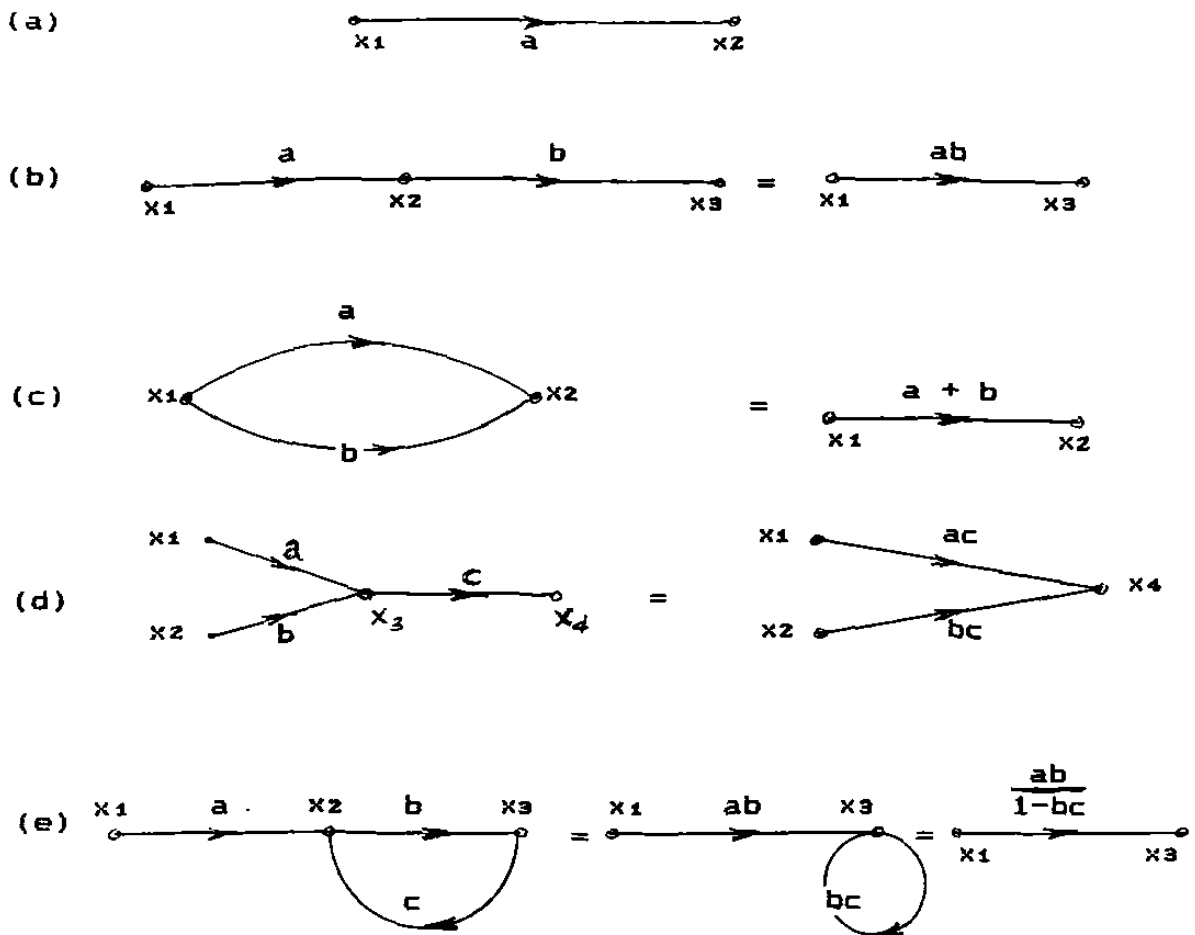


Fig 4-22.- Gráficos de Flujo de Señal y sus equivalencias.

Representación de un Gráfico de Flujo de Señal.- A continuación se representará el gráfico de un sistema de control cuyo modelo matemático está formado por las siguientes tres ecuaciones:

$$x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_{1u_1} \quad (4-36)$$

$$x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_{2u_2} \quad (4-37)$$

$$x_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \quad (4-38)$$

Se considera que u_1 y u_2 son variables de entrada; x_1, x_2 y x_3 son variables de salida. Se trazará el gráfico de señal por partes, considerando primeramente la ecuación (4-36) y posteriormente las otras dos ecuaciones. En primer lugar se sitúan los tres puntos que constituyen los nudos x_1, x_2 y x_3 como se indica en la fig. 4-23. En seguida se van trazando las ramas de acuerdo con los diferentes términos de la ecuación (4-36).

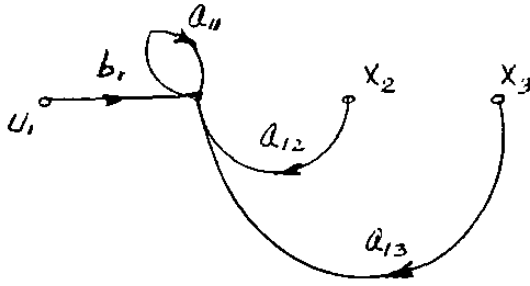


Fig 4-23.- Gráfico correspondiente a la ecuación (4-36)

Siguiendo el mismo procedimiento anterior se traza la gráfica de la ecuación (4-37) y (4-38). Se representan las gráficas en las figuras 4-24 y 4-25.

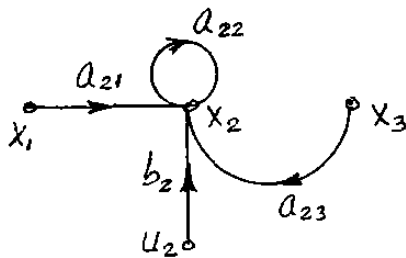


Fig. 4-24.- Gráfico correspondiente a la ecuación (4-37)

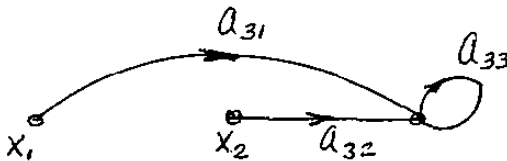


Fig. 4-25.- Gráfico correspondiente a la ecuación (4-38)

Una vez que se tienen los gráficos de cada una de las tres ecuaciones, se procede a trazar un grafico completo, compuesto por los los tres gráficos anteriores.

En la fig 4-26 se representa el gráfico completo del sistema de control.

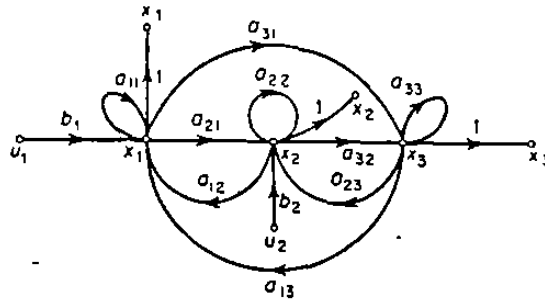


Fig. 4-26.- Gráfico completo del sistema de control.

Gráficos de flujo de señal para diagramas de bloques.- Aunque se puede trazar un gráfico de las ecuaciones de un sistema de control, también es posible trazar el gráfico desde un diagrama de bloques. Los diagramas de bloques tienen la misma información que un gráfico de flujo de señal, pero son diferentes en su representación. En seguida se verán algunos ejemplos de diagramas de bloques y sus gráficos equivalentes.

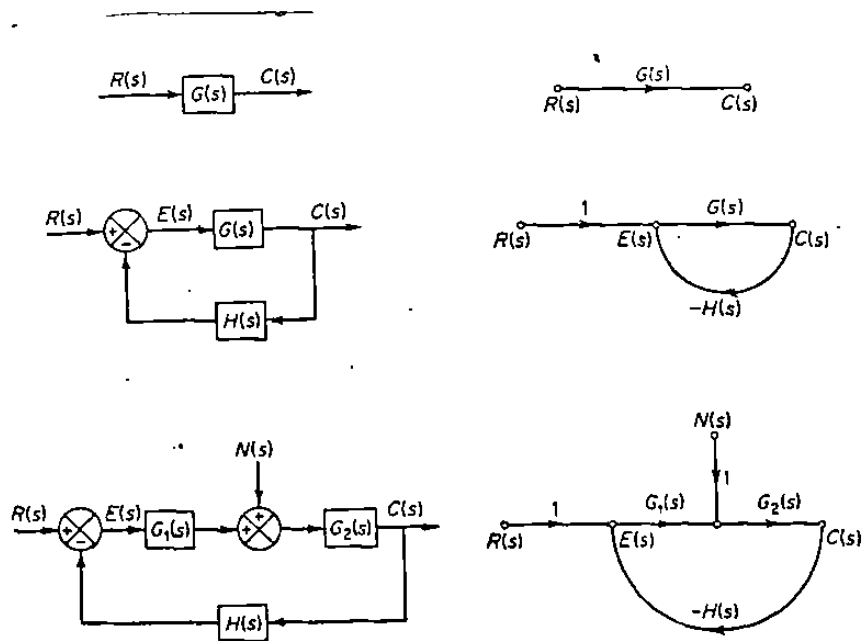


Fig. 4-27.- Diagramas de bloques y sus correspondientes gráficos de flujo de señal.

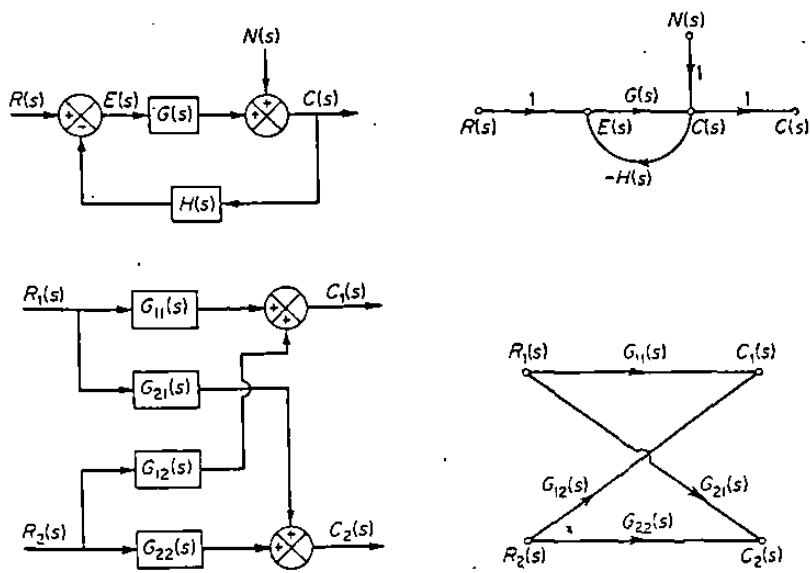


Fig. 4-28.- Continuación de Diagramas de Bloques y Gráficos.

Fórmula de Mason.- Como ya se mencionó, una de las ventajas de los gráficos de flujo de señal es que se cuenta con una fórmula que nos permite simplificar un gráfico en un sólo paso para obtener la función de transferencia total, en lugar de ir simplificando paso a paso como en los diagramas de bloques.

La fórmula de la ganancia de Mason que hace posible esta simplificación rápida en forma directa, se puede representar por la siguiente ecuación:

$$P = \frac{1}{\Delta} \sum P_k \Delta_k$$

donde :

P_k = Ganancia del k-esimo trayecto directo.

Δ = Determinante del gráfico

= 1 - (suma de todas las ganancias de lazo distintas) + (suma de los productos de las ganancias de todas las combinaciones posibles de dos lazos no adjuntos) - (suma de los productos de ganancias de todas las combinaciones posibles de tres lazos no adjuntos) +

$$= 1 - \sum L_a + \sum L_b L_c - \sum L_d L_e L_f + \dots$$

$\sum L_a$ = Suma de todas las distintas ganancias de lazo.

$\sum L_b L_c$ = Suma de los productos de las ganancias de todas las posibles combinaciones de dos lazos no adjuntos.

$\sum L_d L_e L_f$ = Suma de los productos de las ganancias de todas las posibles combinaciones de tres lazos no adjuntos.

Δ_k = Cofactor del determinante del k-esimo trayecto directo del gráfico, con los lazos adjuntos del k-esimo trayecto directo eliminados.

Se resolverán dos ejemplos para aplicar la fórmula de Mason a los gráficos de señal.

Ejemplo 4-4.- El diagrama de bloques de la fig. 4-29 representa un sistema de control. Se desea convertir el diagrama de bloques a un gráfico de flujo de señal y posteriormente aplicar la fórmula de Mason para calcular la función de transferencia de lazo cerrado $C(s)/R(s)$.

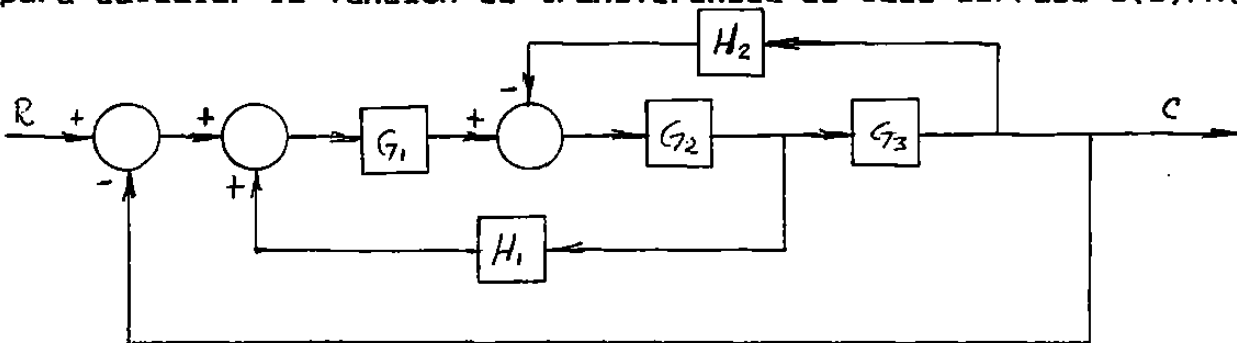


Fig. 4-29.- Diagrama de bloques del sistema de control

Tomando como base el diagrama de bloques de la fig 4-29 se obtiene el grafico de flujo de señal equivalente de la fig. 4-30.

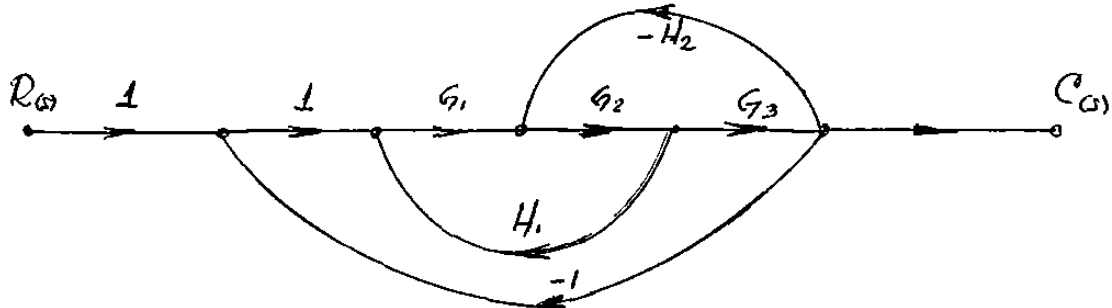


Fig. 4-30.- Gráfico de flujo de señal para la fig. 4-29.

Observando el gráfico de la fig. 4-30, se ve que solamente hay un trayecto directo desde la entrada $R(s)$ hasta la salida $C(s)$. La ganancia de este trayecto directo es:

$$P_1 = G_1G_2G_3$$

También en el gráfico podemos ver que hay tres lazos cuyas ganancias son:

$$L_1 = G_1G_2H_1$$

$$L_2 = -G_2G_3H_2$$

$$L_3 = -G_1G_2G_3$$

Los tres lazos tienen por lo menos una rama común por lo que en éste caso no tenemos lazos disjuntos.

El siguiente paso es encontrar el determinante del gráfico Δ , para lo cual nos basamos en la fórmula general.

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3)$$

Substituyendo el valor de L_1 , L_2 y L_3 , tenemos que:

$$\Delta = 1 - G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3$$

Basandonos en la fórmula anterior del determinante podemos encontrar los cofactores. Debido a que el número de cofactores es igual al de trayectos directos, en este caso sólo habrá un cofactor cuyo valor se obtiene eliminando del determinante todos los lazos adjuntos al trayecto directo P_1 , (que son todos los tres lazos), por lo que:

$$\Delta_1 = 1$$

Una vez que ya se tienen los trayectos directos, el determinante y los cofactores, se substituyen los valores en la fórmula de Mason como se indica a continuación.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = P = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 - G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3}$$

Este diagrama de bloques que luego se transformó en un gráfico de flujo de señal ya lo habíamos resuelto aplicando las reglas del álgebra de bloques paso a paso. El diagrama de bloques está en la pag. No 80, fig. 4-8 y la simplificación final se obtuvo en la fig. 4-8-d de la pag. 82. Como se puede comprobar los resultados obtenidos son lógicamente iguales, por el método de bloques o gráficos de flujo de señal.

Ejemplo 4-5.-Aplicando la fórmula de Mason se desea calcular la función de transferencia $C(s)/R(s)$ del gráfico de flujo de señal que se representa en la fig. 4-31.

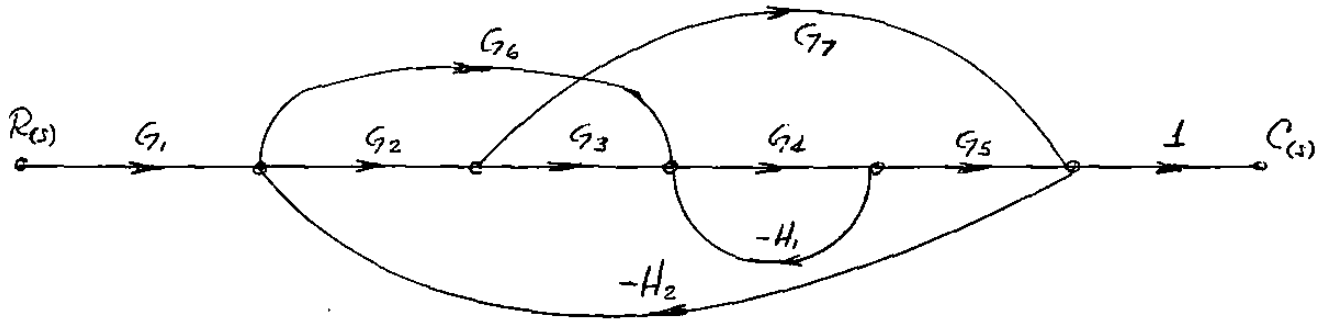


Fig. 4-31.- Gráfico de flujo de señal de un sistema de control.

Trayectos directos.- En este gráfico existen tres trayectos directos que son:

$$P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_5$$

$$P_2 = G_1 G_4 G_5 G_6$$

$$P_3 = G_1 G_2 G_7$$

Lazos de retroalimentación.- Analizando el gráfico se pueden ver cuatro lazos de retroalimentación cuyas ganancias son:

$$L_1 = -G_4 H_1$$

$$L_2 = -G_2 G_7 H_2$$

$$L_3 = G_4 G_5 G_6 H_2$$

$$L_4 = -G_2 G_3 G_4 G_5 H_2$$

Revisando todos los lazos se llega a la conclusión de que sólo los lazos L_1 y L_2 no tienen nada en común y por lo tanto son lazos no adjuntos o lazos disjuntos.

Determinante.- El determinante del gráfico de flujo de señal se obtiene aplicando la fórmula general.

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + L_1L_2 \quad (4-39)$$

Substituyendo el valor de los lazos en la ecuación anterior:

$$\Delta = 1 + G_4H_1 + G_2G_7H_2 + G_4G_5G_6H_2 + G_2G_3G_4G_5H_2 \quad (4-40)$$

Cofactores.- En este caso tendremos tres cofactores, uno para cada trayecto directo. El Cofactor Δ_1 se obtiene de la ecuación de Δ (4-39) eliminando del determinante los lazos adjuntos al trayecto directo P_1 , que son todos, L_1 , L_2 , L_3 y L_4 . Por lo tanto:

$$\Delta_1 = 1$$

En forma semejante se pueden calcular los cofactores Δ_2 y Δ_3 .

$$\Delta_2 = 1 \quad \Delta_3 = 1 - L_1 = 1 + G_4H_1$$

Finalmente se aplican los valores de los trayectos directos, cofactores y determinante a la fórmula de Mason:

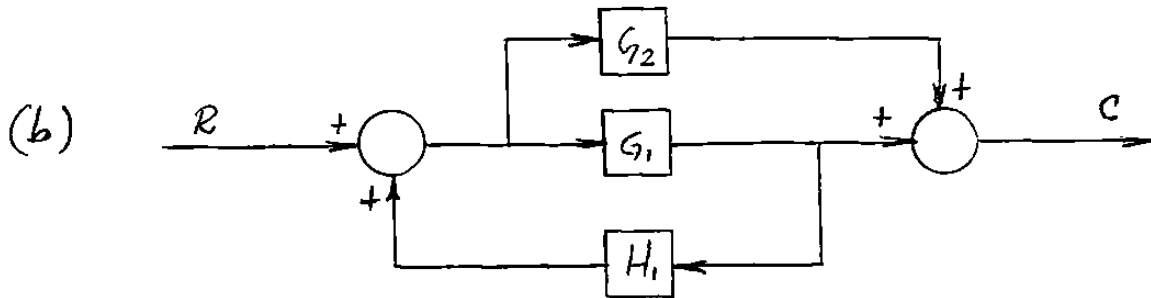
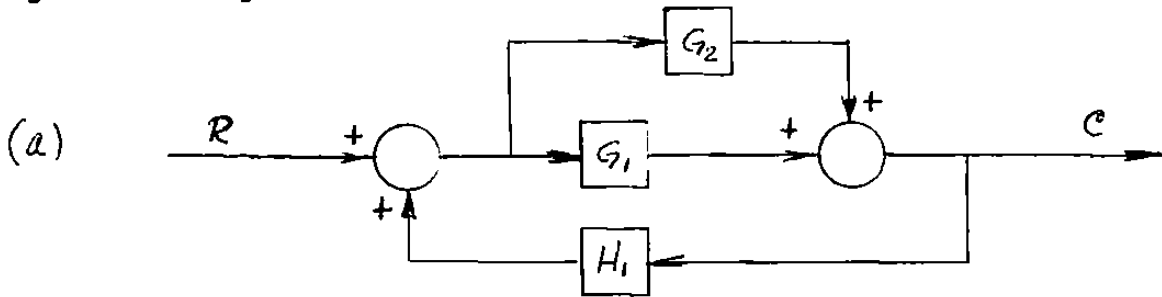
$$\frac{C(s)}{R(s)} = P = \frac{1}{\Delta} (P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + P_3\Delta_3)$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1G_2G_3G_4G_5 + G_1G_4G_5G_6 + G_1G_2G_7(1 + G_4H_1)}{1 + G_4H_1 + G_2G_7H_2 + G_4G_5G_6H_2 + G_2G_3G_4G_5H_2 + G_4H_1G_2G_7H_2}$$

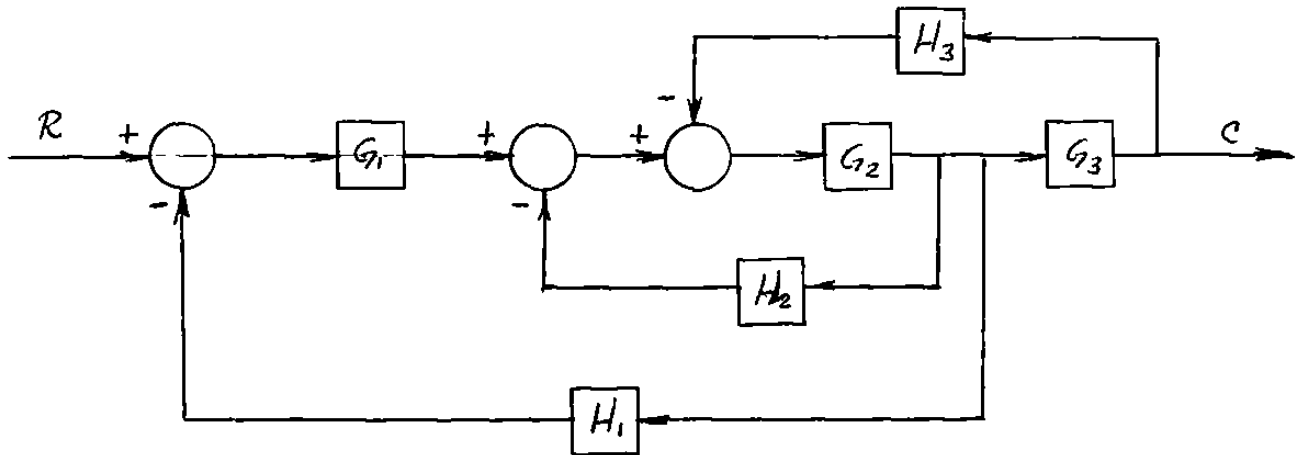
La fórmula de la ganancia de Mason es muy útil para reducir diagramas de sistemas grandes con muchas componentes de un sólo paso, sin necesidad de reducciones graduales paso a paso como en los diagramas de bloques. Lo importante al aplicar la fórmula de Mason es poder visualizar con toda claridad todos los trayectos directos y los lazos de retroalimentación sin que se nos escape ninguno, de esto depende que la simplificación sea correcta. Como es obvio, la experiencia en los gráficos se logrará resolviendo ejemplos para aplicar varias veces la fórmula de Mason. También podemos simplificar un diagrama de bloques por los dos métodos para comprobar el resultado que debe ser idéntico en los dos casos, esto último es una forma muy efectiva de comprobación de resultados.

PROBLEMAS PROPUESTOS

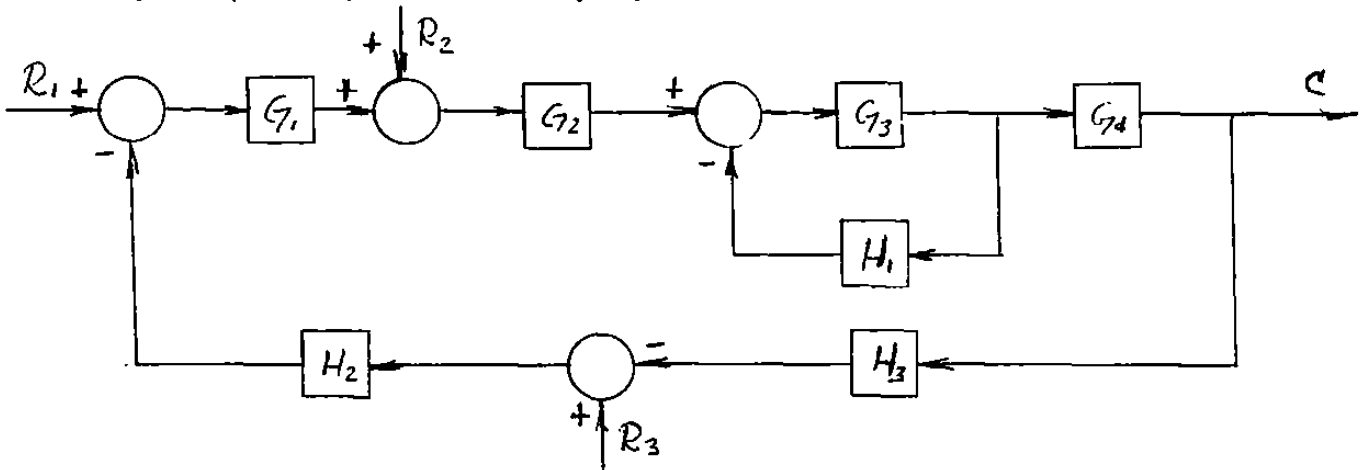
Problema 4-1.- Aplicando algebra de bloques o la Formula de Mason, determinar C/R en cada uno de los diagramas de bloques de las siguientes figuras:



Problema 4-2.- Reducir el diagrama de bloques de la figura a la forma canonica, conservando unicamente en la retroalimentación el bloque H_s .



Problema 4-3.- Determinar la salida total C del diagrama de bloques de la figura, aplicando el Algebra de bloques o Formula de Mason y el principio de la superposición.



Problema 4-4.- Calcular C/R_1 para el diagrama de bloques de la figura 4-32.

Problema 4-5.- Determinar C/R_2 para el diagrama de bloques de la figura 4-32.

Problema 4-6.- Calcular la salida total C del diagrama de bloques representado en la fig. 4-32.

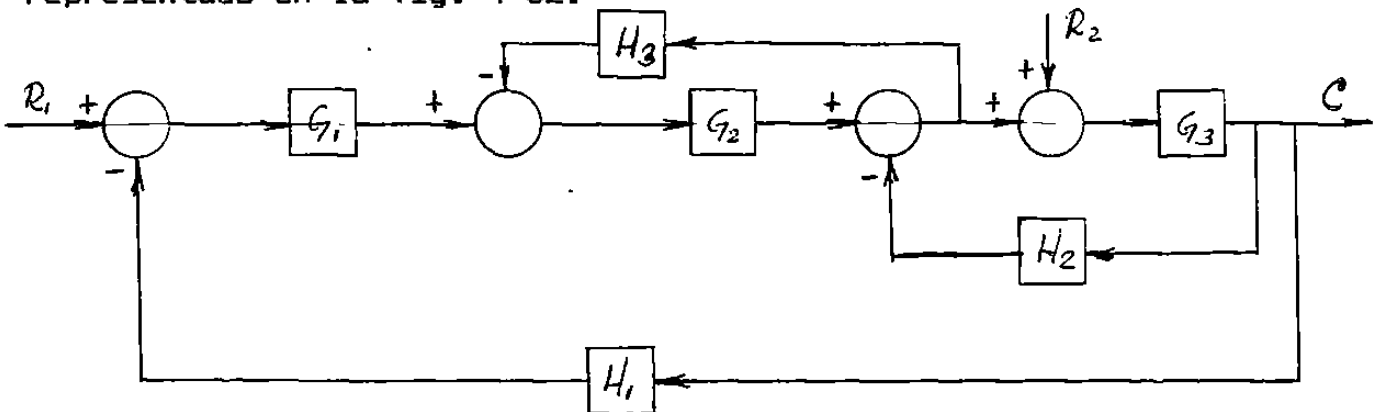
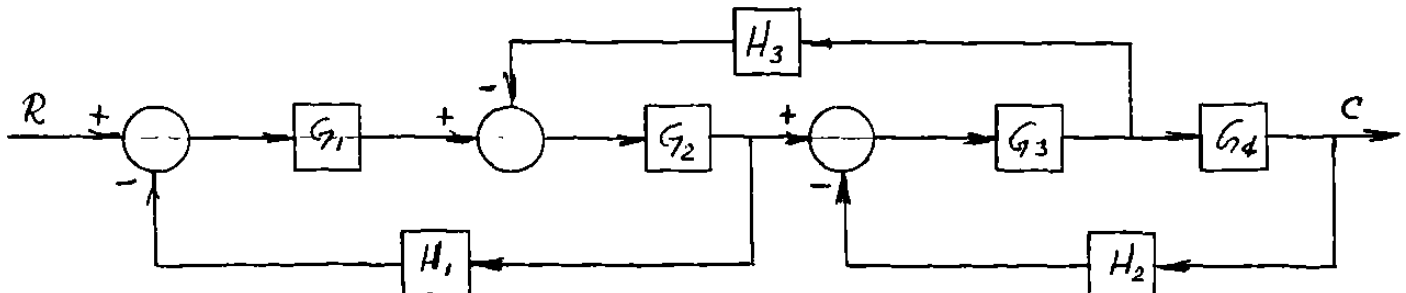
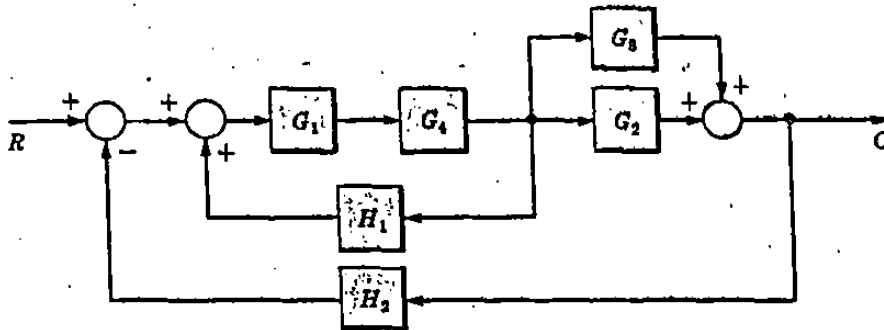


Fig. 4-32

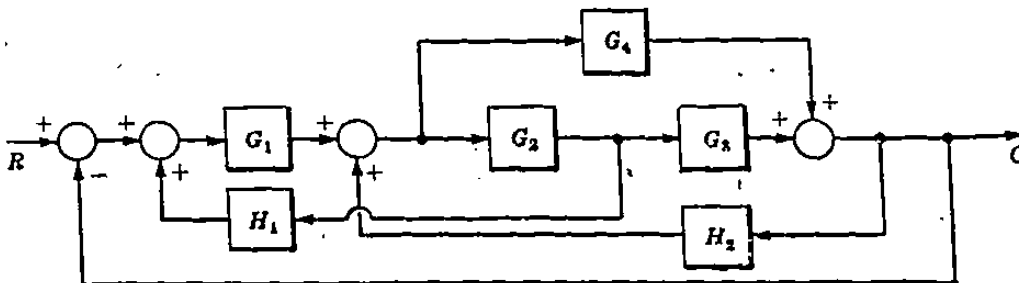
Problema 4-7.- Calcular C/R para el sistema de control representado en el siguiente diagrama de bloques:



Problema 4-8.-Aplicando la fórmula de Mason calcular C/R en el siguiente diagrama de bloques:



Problema 4-9.- Encontrar C/R para el diagrama de bloques de la figura, aplicando gráficos de flujo de señal.



CAPITULO V

ACCIONES BASICAS DE CONTROL

5-1.- Introducción.

Como ya se estableció desde el primer capítulo, todos los sistemas de control automático deben tener retroalimentación. La retroalimentación cumple varios objetivos muy importantes para el sistema de control. Primero se mide la salida real del sistema y se regresa esta medición como una señal, a través de la retroalimentación para compararla con el valor que deseamos tener en la salida. El valor deseado en la salida se indica en la señal de entrada de referencia del sistema. Luego se comparan ambos valores, la salida real y el valor deseado, de esta comparación surge una señal de error que nos indica la desviación entre la salida real y la deseada.

La señal de error le indica al sistema que no se ha alcanzado el nivel deseado en la salida, por lo que el sistema tiene que hacer algo para corregir el error y alcanzar realmente la salida que se desea. La forma en la que el sistema automático produce una señal de control para corregir el error se le llama "Acción de Control".

Existen seis acciones básicas de control que se estudiarán más adelante y que se utilizan extensamente en los sistemas de control automáticos industriales. Como veremos las primeras acciones son simples porque desarrollan una sola acción, pero las últimas tres son acciones combinadas que contienen dos o más acciones en el mismo controlador.

5-2.- Clasificación de los Sistemas de Control Automático.

Los sistemas de control se pueden clasificar en varias formas, por ejemplo de acuerdo con el tipo de fuente de energía y componentes que utilicen, pueden ser eléctricos, electrónicos, hidráulicos o neumáticos. Para seleccionar el tipo de control más adecuado para una aplicación específica se deberán tomar en cuenta diferentes aspectos como, la naturaleza de la planta y sus condiciones de funcionamiento, además de consideraciones de seguridad, costo, disponibilidad, confiabilidad, precisión, peso y tamaño.

De acuerdo con su acción de control, los controles automáticos industriales se pueden clasificar en:

- 1.- Acción de control de dos posiciones o de Si-No (On-Off).
- 2.- Acción de control Proporcional.
- 3.- Acción de control Integral.
- 4.- Acción de control Proporcional e Integral.
- 5.- Acción de control Proporcional y Derivativo.
- 6.- Acción de control Proporcional, Derivativo e Integral.

Elementos de un controlador automático industrial.- Todos los controladores automáticos industriales tienen por lo menos tres componentes básicos, un amplificador, un elemento de medición y un detector de error. En la fig. 5-1 se representa un diagrama de bloques con las tres partes de un controlador.

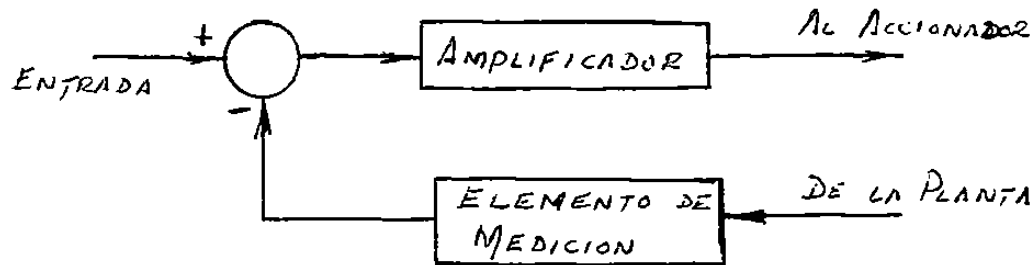


Fig. 5-1.- Componentes de un controlador automático industrial.

El Amplificador se requiere debido a que generalmente la señal de error que produce el detector de error tiene un nivel de potencia muy bajo que no es suficiente para mover algún dispositivo accionador como por ejemplo una válvula o un motor eléctrico. Por lo tanto la señal de error se introduce a un amplificador para que la señal de salida del mismo tenga la potencia necesaria para mover algún dispositivo que tienda a corregir el error del sistema.

El Elemento de Medición es un dispositivo que sirve para medir la señal de salida de la planta y además cambiar la señal por otra de naturaleza distinta que sea de igual tipo que la señal de entrada de referencia. El elemento de medición puede convertir por ejemplo una señal de la salida de presión a voltaje, de velocidad a voltaje, etc. Generalmente la señal de salida del elemento de medición es un voltaje ya que la señal de referencia también lo es. Se necesita cambiar la naturaleza de la señal que entra al elemento de medición para poder comparar dos señales del mismo tipo en el detector de error. Si se aplican señales de naturaleza distinta como entradas al detector de error, obviamente el detector no puede trabajar, ya que no podría comparar dos señales de naturaleza distinta.

El detector de error como ya se dijo compara las dos señales de entrada de la misma naturaleza y nos dá como salida una señal de error de la misma naturaleza de las señales de entrada. Si las entradas son señales de voltaje, la salida también será un voltaje.

Controles Autoactuantes.- Casi todos los controles automáticos industriales tienen sus componentes separadas en unidades independientes, lo cual significa que el amplificador está separado del elemento de medición y del detector de error. Sin embargo hay algunos controles muy sencillos que tienen todas sus componentes integradas en una sola unidad, este tipo de controles son denominados Controles Autoactuantes, y son muy utilizados en la práctica porque son muy simples y muy económicos.

En la fig. 5-2 se representa un control autoactuante que se utiliza para regular la presión en la salida a un valor constante. Las partes principales del control son;

- a) Un tornillo de regulación.
- b) Un resorte de presión.
- c) Una válvula de control.

En la entrada se aplica la presión de un fluido, que puede ser gas o líquido. Esta presión de entrada tiene un valor mayor que la presión de salida, que se desea controlar, como sucede en un tanque lleno de gas butano por ejemplo. La presión de entrada cuando es grande se aplica sobre el diafragma por la parte inferior, ejerciendo una fuerza hacia arriba. Esta fuerza hacia arriba es contrarrestada en parte por la fuerza que el resorte ejerce hacia abajo presionado por el tornillo de regulación. Cuando la presión de entrada es elevada, produce un movimiento del diafragma hacia arriba que estrangula un poco la válvula de control, disminuyendo con ello la cantidad de fluido en la salida y con ello también la presión.

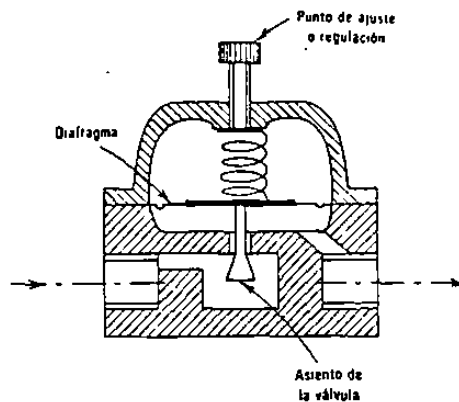


Fig. 5-2.- Válvula de Control Autoactuante.

A medida que la presión de entrada disminuye debido a que el tanque de gas se va vaciando, la fuerza ejercida sobre el diafragma va disminuyendo por lo que el resorte mueve el diafragma hacia abajo lo que produce la abertura de la válvula de control, dejando pasar más fluido para que la presión de salida se mantenga constante.

El ajuste del tornillo de regulación depende de la presión que se desee tener en la salida. Si queremos una presión elevada, el tornillo de regulación se debe ajustar para que aumente la fuerza sobre el resorte hacia abajo y éste a su vez presione el diafragma para abrir y mantener así la válvula de control, con lo cual se logra el aumento de la presión en la salida. Si se quiere reducir la presión en la salida, el movimiento del tornillo de regulación se hará en sentido contrario.

Generalmente estos reguladores de presión autoactuantes ya vienen ajustados de fábrica para obtener una determinada presión de salida constante. La parte más delicada del control es el diafragma que se puede romper por el movimiento que realiza al estar regulando la presión. También pueden presentarse fugas de gas en la unión de las dos partes del control, la superior y la inferior. Es recomendable cuando suceda una falla, comprar otro regulador y no tratar de repararlo ya que el costo del regulador es bajo y el riesgo de la fuga de gas puede ser muy alto.

Acciones básicas de Control.- A continuación se estudiarán las diferentes acciones de control y se verán algunas aplicaciones prácticas para las mismas. Es muy importante entender todas las acciones de control para después poder seleccionar la más adecuada a una determinada aplicación.

1.- Acción de Control de dos posiciones o de Si-No. En este tipo de control, la salida sólo tiene dos posiciones fijas que pueden ser por ejemplo abierto-cerrado, conectado-desconectado, prendido-apagado etc. Este control es muy sencillo y muy económico por lo que tiene una gran cantidad de aplicaciones, a nivel industrial y doméstico.

En la fig. 5-3-a se representa un diagrama de bloques del control de dos posiciones. Dependiendo del valor del error "e", la salida "m" puede tener dos valores, M_1 o M_2 . Matemáticamente la acción de control se puede representar en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} m(t) &= M_1 && \text{para } e(t) > 0 \\ m(t) &= M_2 && \text{para } e(t) < 0 \end{aligned}$$

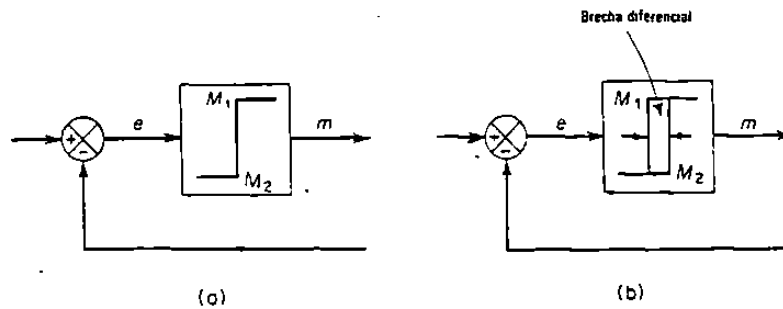


Fig. 5-3. (a) Diagrama de bloques de un control Si-No.
(b) Diagrama de bloques de un control Si-No con brecha diferencial.

Los controles Si-No generalmente son eléctricos, neumáticos o una combinación de ambos. La mayoría de los controles de dos posiciones tienen una brecha diferencial que protege al sistema de una acción excesivamente frecuente de energizar-desenergizar o abrir-cerrar. Para entender mejor lo que es la brecha diferencial, se analizará en seguida un sistema de control de nivel de líquido que se representa en la fig. 5-4.

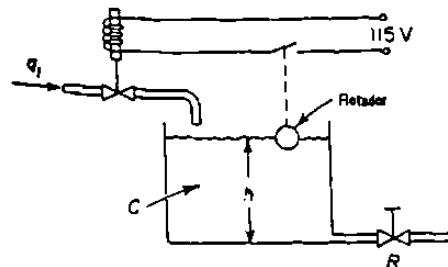


Fig. 5-4.- Sistema de Control de Nivel de Líquido Si-No.

En el sistema de control de la fig. 5-4 se desea mantener el nivel del líquido en el recipiente a una altura "h". En un principio que el tanque está vacío, el flotador está abajo y este cierra un interruptor eléctrico para energizar la bobina de la válvula de control de llenado con lo cual la válvula se abre y se empieza a llenar el recipiente.

Conforme se vaya llenando el tanque, el flotador sube y llega un momento en que abre el interruptor eléctrico, con lo cual la bobina de la válvula de llenado se desenergiza y la válvula se cierra para no derramar líquido fuera del tanque.

Al utilizarse el agua del recipiente, el nivel de líquido baja, el flotador cierra de nuevo el interruptor y la válvula de llenado se abre para alcanzar la altura "h" de nivel de líquido.

En éste caso la brecha diferencial se ajusta sobre la varilla vertical del flotador, y consiste en dos rondanas que se pueden ajustar con tuerca y tornillo a la varilla vertical a una distancia que puede ser de 15 o 20 cm. Supongamos que la altura "h" sea de dos metros, entonces las rondanas se ajustan de tal manera que una abra el interruptor cuando el nivel "h" alcance los 2 metros, y la otra para que cierre el interruptor a un nivel de 1.80 metros. Por lo tanto la brecha diferencial sería en este caso de 20 cm.

Si no hubiera brecha diferencial, el flotador abre el interruptor a los 2 metros, pero inmediatamente que baje el flotador cualquier distancia por mínima que sea, el interruptor cierra, el nivel vuelve a subir, el flotador abre de nuevo y esta secuencia se puede repetir muchas veces lo que resulta dañino para el sistema.

El ejemplo que se analizó es de un sistema de control de nivel de líquido, pero lógicamente la acción de control Si-No y su brecha diferencial se puede aplicar para controlar sistemas de presión, temperatura y otros más.

2.- Acción de Control Proporcional.- Para este tipo de control, la relación entre la salida del control $m(t)$ y la entrada que es la señal de error, se puede expresar matemáticamente con la siguiente ecuación:

$$m(t) = K_p e(t)$$

donde $m(t)$ es la salida del control, K_p es una constante de proporcionalidad y $e(t)$ es la señal de entrada o error. Transformando por Laplace la ecuación anterior obtenemos:

$$M(s) = K_p E(s) \text{ o la función de transferencia } M(s)/E(s) = K_p$$

En la fig. 5-5 se puede ver un diagrama de bloques de un control proporcional.

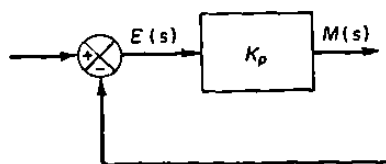


Fig. 5-5 Diagrama de bloques de un control proporcional.

Como se puede comprender basándonos en la función de transferencia del control proporcional, cualquier control de este tipo es esencialmente un amplificador en donde la salida es la entrada multiplicada por la ganancia que se representa por la constante K_p .

3.-Acción de Control Integral.- En el control Integral, la señal de salida es proporcional a la integral del error y se puede expresar por medio de la siguiente ecuación:

$$m(t) = K_i \int_0^t e(t) dt$$

donde $m(t)$ es la salida, K_i es una constante de proporcionalidad integral y $e(t)$ es la señal de error. La constante K_i al igual que la constante K_p son regulables. Transformando por Laplace la ecuación anterior obtenemos:

$$M(s) = \frac{K_i}{s} E(s) \quad \text{o lo que es igual} \quad \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s}$$

Es importante entender la diferencia entre un control integral y un proporcional. En el control integral, la salida es la integral del error durante un tiempo, lo que significa que el error aunque sea muy pequeño, se va acumulando con el tiempo y la salida $m(t)$ se incrementa considerablemente para tomar una acción de control y corregir al sistema. En un control proporcional, la salida es proporcional a la entrada, por lo tanto si el error es pequeño y constante, la salida también será pequeña y su valor permanece constante. Por lo anterior se recomienda aplicar la acción de control integral para sistemas con errores pequeños y cuya duración en tiempo es grande ya que si se aplica acción proporcional es posible que el control no detecte el error por pequeño o no alcance a tomar una acción para corregir.

En la fig. 5-6 se representa el diagrama de bloques de un control integral.

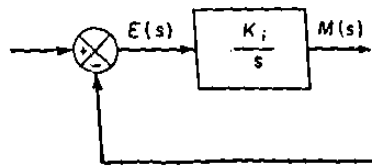


Fig. 5-6 Diagrama de bloques de un control Integral.

4.- Acción de Control Proporcional-Integral.- Es una acción de control combinada que mezcla en un sólo controlador las dos acciones. Matemáticamente esta acción de control se puede representar por medio de la siguiente ecuación:

$$m(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt$$

transformando por Laplace la ecuación anterior obtenemos:

$$M(s) = K_p E(s) + \frac{K_p}{T_i s} E(s)$$

considerando $E(s)$ como señal de entrada al controlador y $M(s)$ como salida, la función de transferencia del controlador P-I será:

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

En las ecuaciones anteriores, K_p se denomina constante de sensibilidad proporcional y T_i es una constante de tiempo integral. Como se verá más adelante en algunos ejemplos de controles electrónicos P-I, tanto la constante K_p como T_i se pueden ajustar o regular fácilmente.

En la figura 5-7 se representa el diagrama de bloques de un control proporcional-integral, además se representa la gráfica de la salida de dicho control cuando se le aplica como entrada una señal escalón unitario.

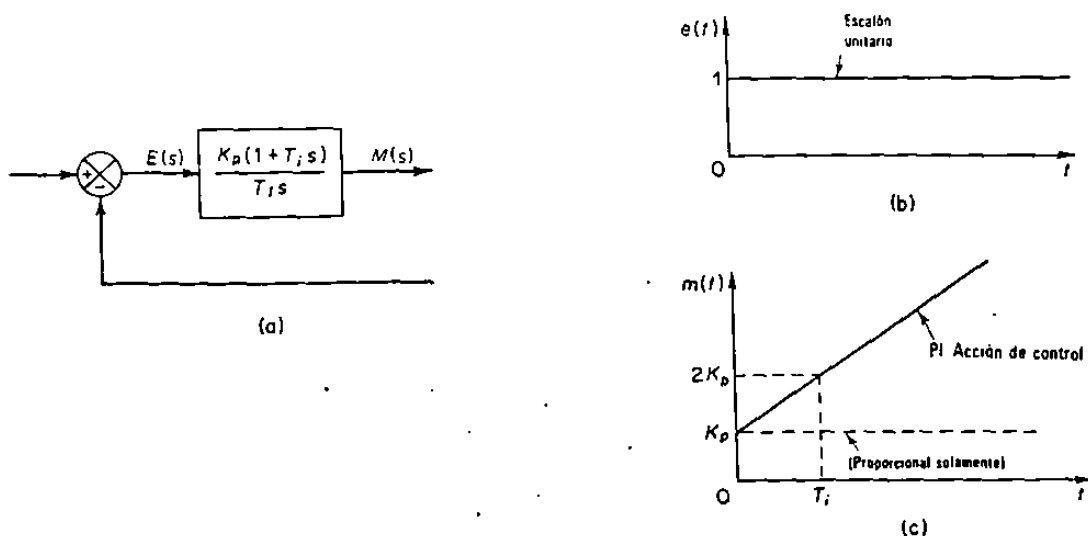


Fig. 5-7 a) Diagrama de bloques del control P-I
 b) Escalón unitario aplicado como entrada al control P-I
 c) Señal de salida del control P-I

5.- Acción de control Proporcional-Derivativa.-También es una acción de control combinada, la cual se recomienda para sistemas de control con errores grandes que sean constantes o errores cuya variación sea grande con respecto al tiempo. La acción de control P-D se puede representar matemáticamente con la siguiente ecuación:

$$m(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$

transformando por Laplace la ecuación anterior obtenemos:

$$M(s) = K_p E(s) + K_p T_d s E(s)$$

considerando $M(s)$ como señal de salida del controlador y $E(s)$ como entrada, la función de transferencia del controlador P-D será:

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_p(1 + T_d s)$$

Al igual que en los controladores anteriores, la K_p es una constante de proporcionalidad y T_d una constante de tiempo derivativa. Ambas constantes son valores que se pueden regular fácilmente.

En la fig. 5-8 se representa el diagrama de bloques de un control proporcional-derivativo. Además se representa la salida de dicho control cuando se aplica como entrada una señal rampa unitaria.

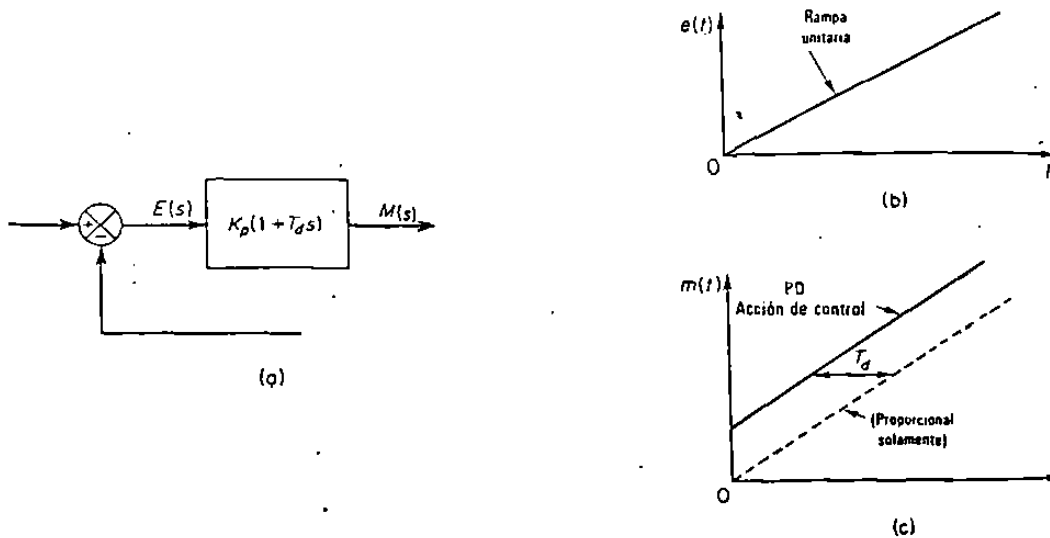


Fig. 5-8 a) Diagrama de bloques del control P-D
 b) Rampa unitaria aplicada como entrada al control P-D
 c) Señal de salida del control P-D

6.- Acción de Control Proporcional-Derivativa-Integral.- Es la acción de control más completa de todas y conjunta en un sólo equipo las ventajas de cada acción básica de control. Antes de ver la ecuación de este controlador es importante hacer notar que no se puede utilizar un control puramente derivativo en la práctica como el control integral o el proporcional. La razón de lo anterior es muy simple ya que el control derivativo simple no detecta errores cuyo valor sea constante debido a que la derivada de una constante es cero, por lo que no tomaría ninguna acción para corregir en éstos casos.

La ecuación que representa la operación de un control P-D-I es la siguiente:

$$m(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt$$

transformando por Laplace la ecuación anterior tenemos:

$$M(s) = K_p E(s) + K_p T_d s E(s) + \frac{K_p}{T_i s} E(s)$$

donde K_p , T_d y T_i son constantes de proporcionalidad, de tiempo derivativo y de tiempo integral respectivamente y cuyo valor es ajustable.

Tomando como señal de entrada $E(s)$ y como salida $M(s)$, la función de transferencia del control P-D-I es:

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right)$$

En la fig. 5-9 se representa el diagrama de bloques de un control P-D-I. Además se representa la salida del control P-D-I cuando se le aplica una entrada rampa unitaria.

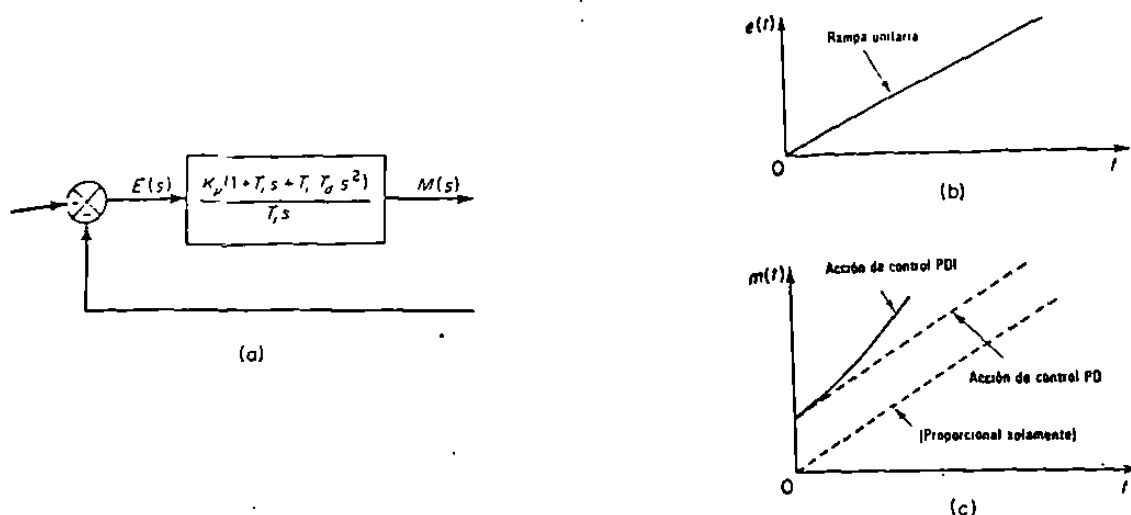


Fig. 5-9 a) Diagrama de bloques del control P-D-I
 b) Rampa unitaria aplicada como entrada al control P-D-I
 c) Señal de salida aplicada al control P-D-I

5-3.- Controles Electrónicos tipo P, P-D, P-I, y P-I-D.

A continuación se estudiará la forma de construir los diferentes tipos de controles utilizando componentes electrónicos como amplificadores, resistencias y condensadores.

Control Electrónico Proporcional.

En la fig. 5-10 se representa el diagrama de un control electrónico P. La letra K representa la ganancia de un amplificador electrónico. En la retroalimentación se conecta un potenciómetro con las resistencias R₁ y R₂. El voltaje e_i es la entrada, e_o es el voltaje de salida y e_f es voltaje de retroalimentación.

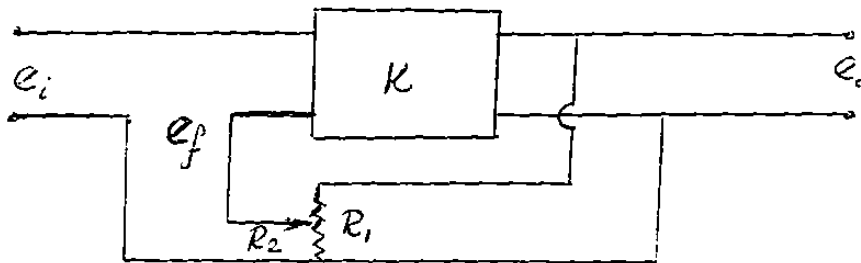


Fig. 5-10. Diagrama de dos líneas del control proporcional.

Basándonos en el diagrama de dos líneas anterior, podemos trazar el diagrama de bloques equivalente de la fig. 5-11.

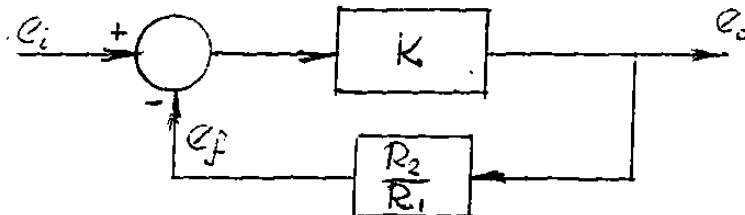


Fig. 5-11. Diagrama de bloques del control proporcional.

Aplicando las reglas del álgebra de bloques al diagrama de la fig. 5-11, podemos plantear las siguientes ecuaciones con el objeto de llegar a determinar la función de transferencia del control P.

$$e_o = K(e_i - e_f) \quad (5-1)$$

$$e_f = e_o \frac{R_2}{R_1} \quad (5-2)$$

substituyendo e_f de la ecuación 5-2 en la 5-1 tenemos:

$$e_o = K(e_i - e_o \frac{R_2}{R_1}) \quad (5-3)$$

transformando por Laplace la ecuación 5-3 obtenemos:

$$E_o(s) = K[E_i(s) - E_o(s) \frac{R_2}{R_1}]$$

$$E_o(s) + KE_o(s) \frac{R_2}{R_1} = KE_i(s)$$

$$E_o(s) [1 + K \frac{R_2}{R_1}] = KE_i(s)$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{K}{1 + K \frac{R_2}{R_1}}$$

Si el término $K \frac{R_2}{R_1}$ del denominador es mucho mayor que 1, se puede

eliminar el uno sin incurrir en mucho error, es decir matemáticamente si

$$K \frac{R_2}{R_1} \gg 1 \text{ entonces } \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{K}{K \frac{R_2}{R_1}} = \frac{R_1}{R_2}$$

Si la relación de resistencias R_1/R_2 se hace igual a la constante K_p (constante de proporcionalidad), se ve claramente que el control desarrolla una acción proporcional.

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = K_p \quad \text{o bien} \quad E_o(s) = K_p E_i(s)$$

Como se puede ver, la ganancia K_p es fácilmente ajustable por el movimiento de un potenciómetro.

Control Electrónico de Acción Proporcional-Derivativa.

En la fig. 5-12 se representa el diagrama de un control electrónico PD. La letra K representa la ganancia de un amplificador electrónico. En el circuito de retroalimentación tenemos ahora un circuito RC. Los voltajes e_o , e_f y e_i son respectivamente voltajes de salida, retroalimentación y entrada.

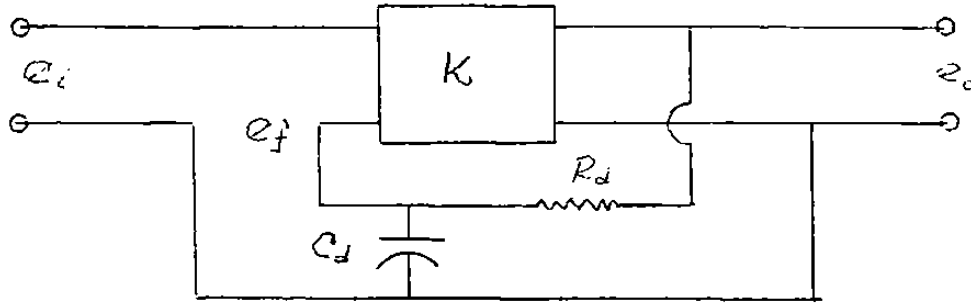


Fig. 5-12. Diagrama de dos líneas del control PD

Basándonos en el diagrama de dos líneas anterior, podemos trazar el diagrama de bloques equivalente de la fig. 5-13.

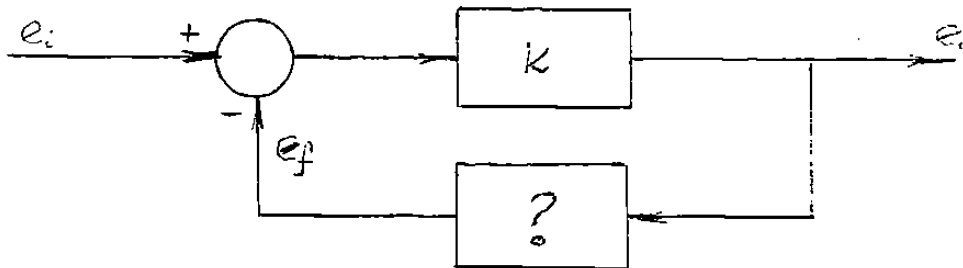


Fig. 5-13. Diagrama de bloques del control PD.

Antes de calcular la función de transferencia de todo el control, primero obtendremos la función de transferencia del circuito de retroalimentación RC. En la figura 5-14 se representa el circuito RC de la retroalimentación, del cual podemos plantear las siguientes ecuaciones:

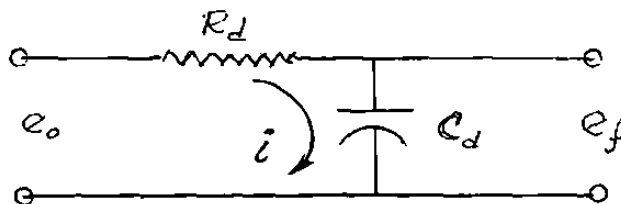


Fig. 5-14. Circuito RC de Retroalimentación.

$$e_o = iR_d + \frac{1}{C_d} \int i dt \quad (5-4)$$

$$e_f = \frac{1}{C_d} \int i dt \quad (5-5)$$

Transformando por Laplace las ecuaciones 5-4 y 5-5 tenemos:

$$E_o(s) = I(s)R_d + \frac{1}{C_d s} I(s) \quad (5-6)$$

$$E_f(s) = \frac{1}{C_d s} I(s) \quad (5-7)$$

De las ecuaciones anteriores se puede llegar a calcular la función de transferencia del circuito RC de retroalimentación.

$$\frac{E_f(s)}{E_o(s)} = \frac{\frac{1}{C_d s}}{R_d + \frac{1}{C_d s}} = \frac{1}{R_d C_d s + 1} \quad (5-8)$$

Por otro lado y basándonos en el diagrama de bloques de la fig. 5-13, podemos plantear la siguiente ecuación:

$$[E_i(s) - E_f(s)]K = E_o(s) \quad (5-9)$$

substituyendo el valor de $E_f(s)$ de la Ec. 5-8 en la ecuación anterior 5-9 tenemos:

$$[E_i(s) - \frac{E_o(s)}{R_d C_d s + 1}]K = E_o(s)$$

$$KE_i(s) - \frac{KE_o(s)}{R_d C_d s + 1} = E_o(s)$$

$$KE_i(s) = E_o(s) \left[\frac{K}{R_d C_d s + 1} + 1 \right]$$

de nuevo si $\frac{K}{R_d C_d s + 1}$ es mucho mayor que la unidad, el uno se puede desprestigiar sin incurrir en mucho error, con lo cual podemos llegar a la siguiente función de transferencia:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{K}{\frac{K}{R_d C_d s + 1} + 1} = R_d C_d s + 1 = T_d s + 1$$

en donde T_d es igual al producto $R_d C_d$ y se denomina constante de tiempo derivativa.

Control Electrónico de Acción Proporcional-Integral.

En la fig. 5-15 se representa el diagrama de un control electrónico PI al igual que en los otros controles, K representa la ganancia de un amplificador electrónico, e_i , e_f y e_o son voltajes de entrada, retroalimentación y salida respectivamente. R_i y C_i son los componentes del circuito de retroalimentación.

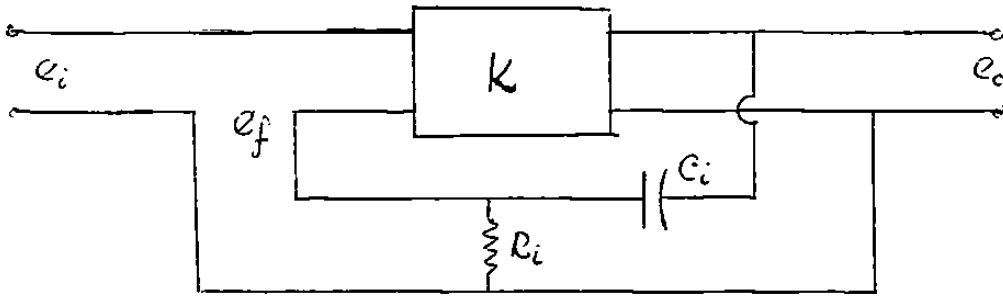


Fig. 5-15 Diagrama de dos líneas del control PI

Basándonos en el diagrama de dos líneas anterior, podemos llegar a trazar el diagrama de bloques equivalente de la fig. 5-16.

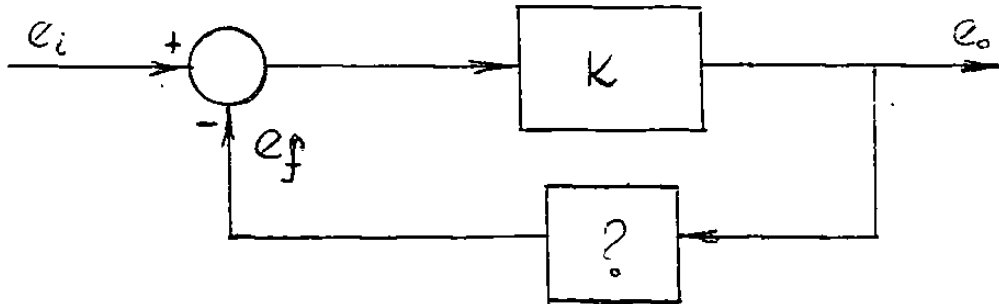


Fig. 5-16. Diagrama de bloques del control PI

Se calculará primero la función de transferencia del circuito de retroalimentación. En la fig. 5-17 se representa el diagrama del circuito RC de retroalimentación, a partir del cual plantearemos algunas ecuaciones.

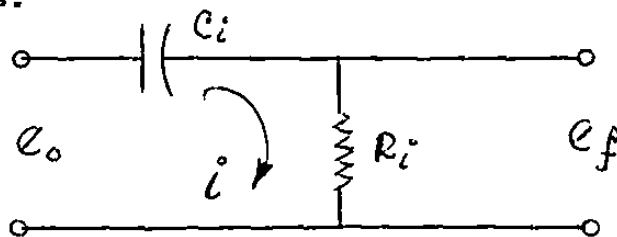


Fig. 5-17. Circuito RC de Retroalimentación

$$e_o = \frac{1}{C_i} \int i dt + i R_i \quad (5-10)$$

$$e_f = i R_i \quad (5-11)$$

Transformando por Laplace las ecuaciones (5-10) y (5-11) tenemos:

$$E_o(s) = \frac{1}{C_i s} I(s) + I(s) R_i \quad (5-12)$$

$$E_f(s) = I(s) R_i \quad (5-13)$$

$$\frac{E_f(s)}{E_o(s)} = \frac{I(s) R_i}{\frac{1}{C_i s} I(s) + I(s) R_i} = \frac{R_i}{\frac{1}{C_i s} + R_i} = \frac{R_i}{\frac{1 + R_i C_i s}{C_i s}} \quad (5-14)$$

$$\frac{E_f(s)}{E_o(s)} = \frac{R_i C_i s}{R_i C_i s + 1}$$

Por otro lado y basándonos en el diagrama de bloques de la fig. 5-16, podemos plantear la siguiente ecuación:

$$[E_i(s) - E_f(s)] K = E_o(s) \quad (5-15)$$

substituyendo $E_f(s)$ de la ecuación 5-14 en la 5-15 tenemos:

$$[E_i(s) - \frac{R_i C_i s E_o(s)}{R_i C_i s + 1}] K = E_o(s)$$

$$K E_i(s) - \frac{K R_i C_i s E_o(s)}{R_i C_i s + 1} = E_o(s)$$

$$E_o(s) + \frac{K R_i C_i s E_o(s)}{R_i C_i s + 1} = K E_i(s)$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{K}{1 + \frac{K R_i C_i s}{R_i C_i s + 1}}$$

si el término $K R_i C_i s / (R_i C_i s + 1)$ es mucho mayor que uno, la unidad del denominador se puede despreciar sin incurrir en mucho error y la función de transferencia se simplifica como sigue:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{K}{\frac{K R_i C_i s}{R_i C_i s + 1}} = \frac{K R_i C_i s + K}{K R_i C_i s} = \frac{R_i C_i s + 1}{R_i C_i s} = 1 + \frac{1}{R_i C_i s}$$

finalmente si el producto de $R_i C_i$ lo hacemos igual a T_i (constante de tiempo de integración), la función de transferencia es:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = 1 + \frac{1}{T_i s}$$

Control Electrónico de Acción Proporcional-Derivativo-Integral.

En la fig. 5-18 se representa el diagrama de dos líneas de un control electrónico PID. La K representa la ganancia de un amplificador, e_i , e_f y e_o son voltajes de entrada, de retroalimentación y de salida respectivamente. En el circuito de retroalimentación se puede ver muy claro las tres partes, proporcional (el potenciómetro), derivativa (R_d y C_d) e integral (R_i y C_i).

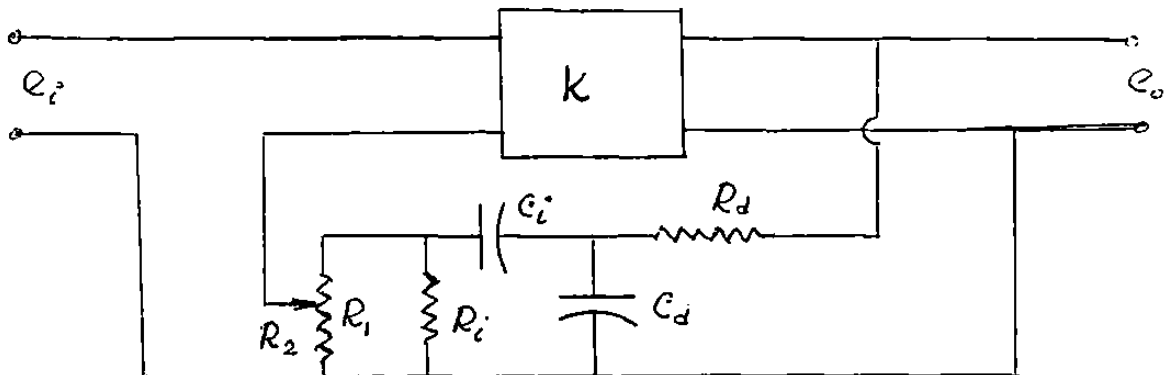


Fig. 5-18. Diagrama de dos líneas de un control PID

Del diagrama de dos líneas anterior se puede trazar el diagrama de bloques de la fig. 5-19. Antes de calcular la función de transferencia del control PID completo, se debe calcular la función de transferencia del circuito de retroalimentación.

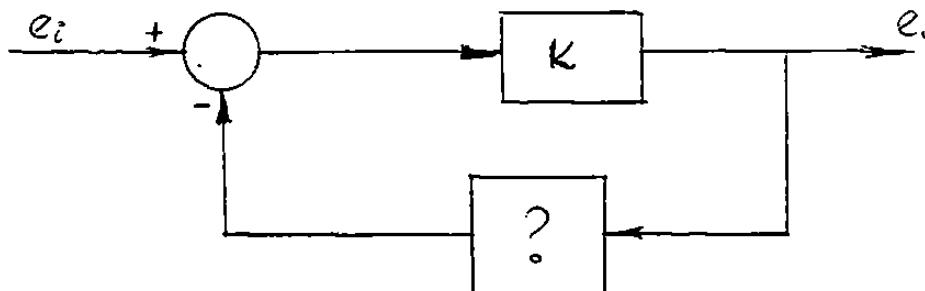


Fig. 5-19 Diagrama de Bloques del control PID.

En la fig. 5-20 se representa el circuito de retroalimentación del control PID.

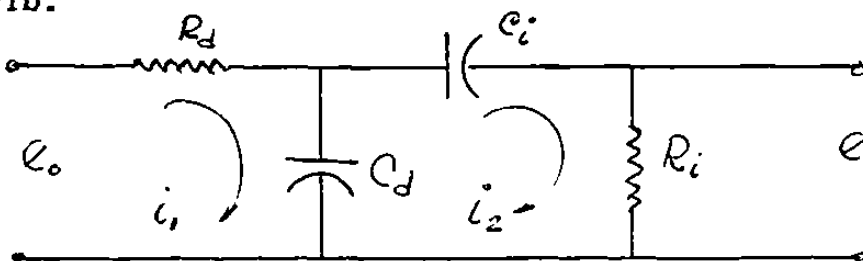


Fig. 5-20. Circuito de retroalimentación del control PID.

Con el objeto de no complicar demasiado el circuito de retroalimentación del control PID (fig. 5-20) no se incluye el potenciómetro con las resistencias R_1 y R_2 . Un poco mas adelante se tomará en cuenta dicho potenciómetro.

Del circuito de la fig. 5-20 se pueden plantear las siguientes ecuaciones:

$$Rd i_1 + \frac{1}{C_d} \int [i_1 - i_2] dt = e_o \quad (5-16)$$

$$\frac{1}{C_d} \int [i_2 - i_1] dt + \frac{1}{C_i} \int i_2 dt + i_2 R_i = 0 \quad (5-17)$$

$$i_2 R_i = e_1 \quad (5-18)$$

Transformando por Laplace las tres ecuaciones anteriores tenemos:

$$Rd I_1(s) + \frac{1}{C_d s} [I_1(s) - I_2(s)] = E_o(s) \quad (5-19)$$

$$\frac{1}{C_d s} [I_2(s) - I_1(s)] + \frac{1}{C_i s} I_2(s) + I_2(s) R_i = 0 \quad (5-20)$$

$$I_2(s) R_i = E_1(s) \quad (5-21)$$

En seguida se desarrollará la ecuación 5-20 para despejar $I_1(s)$

$$\frac{1}{C_d s} I_2(s) - \frac{1}{C_d s} I_1(s) + \frac{1}{C_i s} I_2(s) + I_2(s) R_i = 0$$

$$- \frac{1}{C_d s} I_1(s) = - I_2(s) \left[\frac{1}{C_d s} + \frac{1}{C_i s} + R_i \right]$$

$$I_1(s) = I_2(s) C_d s \left[\frac{1}{C_d s} + \frac{1}{C_i s} + R_i \right]$$

$$I_1(s) = I_2(s) C_d s \left[\frac{C_i + C_d + R_i C_i C_d s}{C_i C_d s} \right]$$

$$I_1(s) = I_2(s) \left[\frac{C_i + C_d + R_i C_i C_d s}{C_i} \right]$$

Substituyendo $I_1(s)$ en la ecuación 5-19 tenemos:

$$Rd \left[\frac{I_2(s)}{C_i} (C_i + C_d + R_i C_i C_d s) \right] + \frac{1}{C_d s} \left[\frac{I_2(s)}{C_i} (C_i + C_d + R_i C_i C_d s) \right] - \frac{1}{C_d s} I_2(s) = E_o(s)$$

$$I_2(s) \left[\frac{Rd}{C_i} (C_i + C_d + R_i C_i C_d s) + \frac{1}{C_i C_d s} (C_i + C_d + R_i C_i C_d s) - \frac{1}{C_d s} \right] = E_o(s)$$

$$I_2(s) \left[\frac{Rd C_d s (C_i + C_d + R_i C_i C_d s) + (C_i + C_d + R_i C_i C_d s) - C_i}{C_i C_d s} \right] = E_o(s)$$

$$I_2(s) \left[\frac{Rd C_d C_i s + Rd C_d^2 s^2 + Rd R_i C_d^2 s^2 + C_i + C_d + R_i C_i C_d s - C_i}{C_i C_d s} \right] = E_o(s)$$

$$I_2(s) \left[\frac{Rd C_i s + Rd C_d s + Rd R_i C_i C_d s^2 + 1 + R_i C_i s}{C_i s} \right] = E_o(s)$$

$$I_z(s) \left[\frac{R_d R_i C_d C_i s^2 + (R_d C_i + R_d C_d + R_i C_i) s + 1}{C_i s} \right] = E_o(s)$$

$$I_z(s) = \frac{E_o(s) C_i s}{R_d R_i C_d C_i s^2 + (R_d C_i + R_d C_d + R_i C_i) s + 1}$$

Substituyendo $I_z(s)$ en la ecuación 5-21 tenemos:

$$\frac{E_o(s) C_i R_i}{R_d R_i C_d C_i s^2 + (R_d C_i + R_d C_d + R_i C_i) s + 1} = E_1(s) \quad (5-22)$$

De donde podemos obtener la función de transferencia $E_1(s)/E_o(s)$

$$\frac{E_1(s)}{E_o(s)} = \frac{R_i C_i s}{R_d R_i C_d C_i s^2 + (R_d C_i + R_d C_d + R_i C_i) s + 1} \quad (5-23)$$

Del diagrama de bloques del control PID , fig. 5-19, podemos plantear las siguientes ecuaciones:

$$[e_i - e_f] K = e_o \quad (5-24)$$

$$e_f = e_i \left[\frac{R_2}{R_1} \right] \quad (5-25)$$

Transformando por Laplace las dos ecuaciones anteriores:

$$[E_1(s) - E_f(s)] K = E_o(s) \quad (5-26)$$

$$E_f(s) = E_1(s) \left[\frac{R_2}{R_1} \right] \quad (5-27)$$

Substituyendo $E_1(s)$ de la ecuación 5-22 en la ecuación 5-27 :

$$E_f(s) = \frac{R_2 R_i C_i s E_o(s)}{R_1 [R_d R_i C_d C_i s^2 + (R_d C_i + R_d C_d + R_i C_i) s + 1]}$$

Substituyendo $E_f(s)$ en la ecuación 5-26 tenemos:

$$K E_1(s) - \frac{K R_2 R_i C_i s E_o(s)}{R_1 [R_d R_i C_d C_i s^2 + (R_d C_i + R_d C_d + R_i C_i) s + 1]} = E_o(s)$$

$$K E_1(s) = E_o(s) \left\{ 1 + \frac{K R_2 R_i C_i s}{R_1 [R_d R_i C_d C_i s^2 + (R_d C_i + R_d C_d + R_i C_i) s + 1]} \right\}$$

$$K E_1(s) = E_o(s) \left\{ \frac{R_1 (R_d R_i C_d C_i s^2) + R_1 (R_d C_i + R_d C_d + R_i C_i) s + R_1 + K R_2 R_i C_i s}{R_1 R_d R_i C_d C_i s^2 + R_1 (R_d C_i + R_d C_d + R_i C_i) s + 1} \right\}$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{KR_1 [R_d R_i C_d C_i s^2 + (R_d C_i + R_d C_d + R_i C_i) s + 1]}{K R_i C_i R_z s + R_1 [R_d R_i C_d C_i s^2 + (R_d C_i + R_d C_d + R_i C_i) s + 1]}$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{K}{\frac{K R_z R_i C_i s}{R_1 [R_d R_i C_d C_i s^2 + (R_d C_i + R_d C_d + R_i C_i) s + 1]} + 1}$$

Suponiendo que la fracción que está en el denominador es mucho mayor que uno, la unidad del denominador se puede despreciar sin incurrir en mucho error. Tomando en cuenta lo anterior y haciendo los cambios adecuados en la fracción, la función de transferencia se nos transforma de la siguiente forma:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_1 [R_d R_i C_d C_i s^2 + (R_d C_i + R_d C_d + R_i C_i) s + 1]}{R_i C_i R_z s}$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_1}{R_z} \left[\frac{R_d R_i C_d C_i s^2 + (R_d C_i + R_d C_d + R_i C_i) s + 1}{R_i C_i s} \right]$$

Si $K_p = R_1/R_z$ y además desarrollando la fracción para luego simplificar, tenemos:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = K_p \left[\frac{R_d R_i C_d C_i s^2}{R_i C_i s} + \frac{R_d C_i s}{R_i C_i s} + \frac{R_d C_d s}{R_i C_i s} + \frac{R_i C_i s}{R_i C_i s} + \frac{1}{R_i C_i s} \right]$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = K_p \left[R_d C_d s + \frac{R_d}{R_i} + \frac{R_d C_d}{R_i C_i} + 1 + \frac{1}{R_i C_i s} \right]$$

Si $T_d = R_d C_d$ y $T_i = R_i C_i$ en la ecuación anterior:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = K_p \left[T_d s + \left(\frac{R_d}{R_i} + \frac{T_d}{T_i} + 1 \right) + \frac{1}{T_i s} \right]$$

Haciendo $\alpha = \left(\frac{R_d}{R_i} + \frac{T_d}{T_i} + 1 \right)$ en la ecuación anterior:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = K_p \left[T_d s + \alpha + \frac{1}{T_i s} \right] = K_p \alpha \left[\frac{T_d s}{\alpha} + 1 + \frac{1}{\alpha T_i s} \right]$$

Finalmente $\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = K_p \alpha \left[1 + \frac{T_d s}{\alpha} + \frac{1}{\alpha T_i s} \right]$ en donde se puede ver perfectamente la parte proporcional, derivativa e integral.

PROBLEMAS PROPUESTOS

- 1.- Un Control Proporcional-Integral tiene una señal de entrada senoidal $e(t) = 4\text{Sen } 8t$. Calcular la salida del controlador, si las constantes del mismo son $K_p=5$ y $T_i=2$.
- 2.- Un Control Proporcional-Derivativo-Integral tiene una señal de entrada $e(t) = te^{-3t}$. Calcular la salida del control si las constantes del sistema son $K_p=3$, $T_d=5$ y $T_i=2$.
- 3.- Un Control Proporcional-Derivativo-Integral (PDI) tiene una señal de entrada $e(t) = 8\text{Sen}4t$. Cual es la salida $m(t)$ del control si las constantes del sistema son $K_p=2$, $T_d=6$ y $T_i=10$.
- 4.- Un Control Proporcional-derivativo (PD) tiene una señal de entrada rampa $e(t) = 4t$. Calcular la salida del control si $K_p=5$ y $T_d=8$.
- 5.- Un Control Proporcional-Integral tiene una entrada $e(t) = 3 \text{Cos}5t$. calcular la salida del controlador si $K_p=8$ y $T_i=2$.

CAPITULO VI

RESPUESTA TRANSITORIA

6-1.- Introducción.

La respuesta transitoria de un sistema de control es la salida temporal que se obtiene como resultado de una señal de entrada aplicada. La respuesta transitoria o temporal de un sistema de control consiste en dos partes: la respuesta transitoria y la estacionaria.

La respuesta transitoria es la que se presenta desde que el sistema inicia su operación hasta que se logra alcanzar un estado final generalmente estable.

La respuesta estacionaria es la salida que se obtiene ya cuando el sistema de control tiene mucho tiempo operando, o sea cuando el tiempo tiende a infinito.

La respuesta temporal y estacionaria se presenta no sólo en los sistemas de control, sino en casi todos los sistemas, sean eléctricos, electrónicos, mecánicos, etc. Por ejemplo en un motor eléctrico hay una salida transitoria desde que se energiza hasta que alcanza su velocidad nominal, posteriormente se presenta una respuesta estacionaria cuando ya el motor se estabiliza en sus condiciones de funcionamiento normal. Otro ejemplo puede ser cualquier equipo electrónico que se energice, (TV, radio, etc) siempre presenta un periodo transitorio o de ajuste en donde la polarización de sus circuitos alcanzan sus valores nominales, despues de lo cual se obtiene la respuesta estacionaria. En algunos equipos el tiempo de la respuesta transitoria es muy pequeño pero éste siempre existe.

Para calcular la respuesta de un sistema se necesita conocer la función de transferencia y la señal de entrada al control. En la práctica algunas veces se conoce la señal de entrada y otras veces no. Cuando no se conoce la señal de entrada y con el fin de contar con un mismo patrón de comparación entre diferentes sistemas, se pueden aplicar algunas señales de entrada como prueba para determinar sus respuestas. A estas señales de entrada que se aplican como prueba, se les llama normalmente señales de prueba típicas.

Las señales típicas de entrada más comunmente utilizadas son las funciones escalón, funciones rampa, funciones aceleración, funciones impulso, función pulso y la función senoidal. Aplicando estas señales se pueden realizar análisis experimentales comparativos de diferentes sistemas de control con mucha facilidad, ya que todas estas señales se pueden generar muy facilmente en función del tiempo.

Para poder determinar cual o cuales señales de prueba se deben aplicar a un sistema de control, se deben conocer las condiciones reales de trabajo que tendrá el sistema. Si se espera trabajar con una entrada que aumente gradualmente con el tiempo, la rampa es una buena señal de prueba. Si la entrada es brusca y de muy poca duración, el impulso es la señal de entrada más adecuada. Si se aplica como prueba la señal típica más adecuada hay muchas posibilidades de que el control tenga un funcionamiento óptimo cuando se le aplique la entrada real de trabajo.

6-2.- Especificaciones en el Dominio del Tiempo.

El procedimiento general para analizar un sistema de control con retroalimentación se puede resumir en los cuatro puntos siguientes:

- 1.-Se determina el modelo matemático y la función de transferencia para cada uno de los componentes del sistema.
- 2.-Se selecciona una forma de representación del sistema, ya sea por medio de bloques o gráfica de flujo de señales.
- 3.-Se construye el diagrama de bloques o gráfica de señales para representar completamente todo el sistema de control.
- 4.-Se determinan las características del sistema.

Para determinar las características del sistema hay métodos en el dominio del tiempo y métodos en el dominio de la frecuencia. Cada uno de estos métodos tiene sus ventajas y sus desventajas ya que algunas características se pueden obtener más fácilmente por un método que por el otro. Por el momento se verá el análisis en el dominio del tiempo y posteriormente se estudiará en el capítulo nueve los métodos de respuesta a la frecuencia.

El objetivo básico en el diseño de un sistema de control es lograr que el mismo cumpla con ciertas características. Estas características son las especificaciones que describen el comportamiento del sistema en números. Las especificaciones más importantes en el dominio del tiempo son:

- a) La Estabilidad Absoluta
- b) La Estabilidad Relativa
- c) El Error Estacionario

La Estabilidad Absoluta es la característica más importante que debe tener un sistema de control. La Estabilidad Absoluta nos dice si un sistema es estable o inestable. Es tan importante que el sistema sea estable ya que de otra manera el sistema de control no se puede utilizar prácticamente. Un sistema de control lineal invariante en el tiempo, es estable si finalmente la salida retorna a su estado de equilibrio cuando el sistema es sometido a una perturbación. Un sistema de control lineal invariante en el tiempo es inestable si su salida continúa indefinidamente una oscilación, o si su salida no tiende a un valor definido cuando el sistema se somete a una perturbación. Más adelante se verán algunos métodos para determinar la estabilidad absoluta de un sistema de control.

Cuando un sistema de control es estable o tiene estabilidad absoluta, el siguiente paso importante es saber que tan cerca está el sistema de caer en la inestabilidad. Este es el concepto de la Estabilidad Relativa. La Estabilidad Relativa de un sistema de control se puede calcular aplicando el criterio de Routh que se verá en este capítulo un poco más adelante. Por otro lado también se puede conocer la Estabilidad Relativa de un sistema aplicando los conceptos de Margen de Ganancia y Margen de Fase que se estudiarán en el capítulo nueve, Métodos de Respuesta a la Frecuencia.

El Error Estacionario en un Sistema de Control se puede definir como la diferencia entre la salida real y la salida deseada cuando el tiempo tiende a infinito y el sistema se ha estabilizado. El Error en Estado Estacionario es un indicativo importante de la exactitud del sistema, logicamente es deseable tener un error estacionario lo más pequeño posible ya que ésto nos dará una mayor exactitud. Más adelante se estudiarán algunos métodos para calcular el Error Estacionario de los sistemas de control.

6-3.- Sistemas de Primer Orden.

En seguida se analizará la respuesta transitoria de un sistema de control de primer orden al cual se le aplicarán distintas señales de entrada. El sistema de primer orden será un circuito eléctrico R-C como se indica en la figura 6-1. En dicho circuito se considerará el voltaje e_i como señal de entrada y el voltaje e_o como señal de salida.

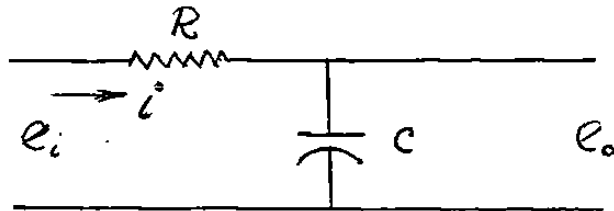


Fig. 6-1. Circuito Eléctrico R-C.

Para iniciar el análisis del circuito eléctrico, se plantearán algunas ecuaciones de voltajes, cuya transformada de Laplace nos llevará a la Función de Transferencia del circuito.

Sumando los voltajes en la malla de entrada tenemos:

$$e_i = Ri + \frac{1}{C} \int idt$$

El voltaje de salida e_o es el voltaje en el condensador

$$e_o = \frac{1}{C} \int idt$$

Transformando por Laplace las dos ecuaciones anteriores

$$E_i(s) = RI(s) + \frac{1}{Cs} I(s) \quad (6-1)$$

$$E_o(s) = \frac{1}{Cs} I(s) \quad (6-2)$$

Despejando $I(s)$ de la ecuación 6-1

$$I(s) = \frac{E_i(s)}{R + \frac{1}{Cs}}$$

Despejando $I(s)$ de la ecuación 6-2

$$I(s) = \frac{E_o(s)}{\frac{1}{Cs}}$$

Igualando las dos corrientes $I(s)$ ya despejadas tenemos:

$$\frac{E_i(s)}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{E_o(s)}{\frac{1}{Cs}}$$

$$\frac{E_i(s)}{\frac{RCs + 1}{Cs}} = \frac{E_o(s)}{\frac{1}{Cs}}$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{\frac{1}{Cs}}{\frac{RCs + 1}{Cs}} = \frac{1}{RCs + 1}$$

Haciendo el producto $RC = T = a$ la constante de tiempo del circuito RC, finalmente obtenemos la siguiente función de transferencia.

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{Ts + 1} = \frac{C(s)}{R(s)}$$

Donde $C(s)$ y $R(s)$ representan en forma más general la señal de salida y de entrada respectivamente.

En la figura 6-2 se representa la función de transferencia del sistema de primer orden en un diagrama de bloques.

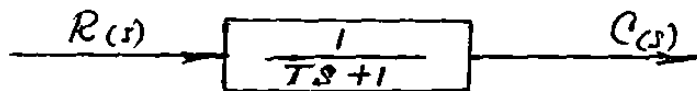


Fig. 6-2. Diagrama de Bloques de un Sistema de Primer Orden.

Una vez que ya tenemos la función de transferencia del sistema de primer orden, le aplicaremos tres señales de entrada, un escalón unitario, una rampa unitaria y un impulso unitario para calcular la respuesta transitoria en cada caso.

6-3-1.- Respuesta al Escalón Unitario de un Sistema de Primer Orden

Tomando como referencia la función de transferencia del sistema de primer orden formado por el circuito RC, la cual se obtuvo en la página anterior, tenemos:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$

Como la señal de entrada es un escalón unitario, entonces $r(t)=1$ y la transformada de Laplace del escalon unitario es $R(s) = 1/s$.

Substituyendo $R(s)$ en la función de transferencia y despejando la salida $C(s)$:

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1} [R(s)] = \frac{1}{Ts + 1} \left[\frac{1}{s} \right] = \frac{1}{s[Ts + 1]}$$

Con el fin de obtener la respuesta o salida del sistema en función del tiempo $c(t)$, en seguida se calculará la transformada inversa de Laplace de $C(s)$.

$$C(s) = \frac{a}{s} + \frac{b}{Ts+1}$$

$$a = \frac{1}{s(Ts+1)} \Big|_{s=0} = 1$$

$$b = \frac{1}{s(Ts+1)} (Ts+1) \Big|_{s=-\frac{1}{T}} = \frac{1}{-\frac{1}{T}} = -T$$

Substituyendo los valores de "a" y "b" en $C(s)$, tenemos:

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts+1}$$

$$C(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$$

Dandole valores al tiempo t , podemos calcular la salida $C(t)$, por ejemplo si $t = 0, t = T, t = 2T, t = 3T$ etc.

Si $t=0$ $C(t) = 1 - e^{-0} = 1 - 1 = 0$

Si $t=T$ $C(t) = 1 - e^{-1} = 1 - 0.3678 = 0.6322$

Si $t=2T$ $C(t) = 1 - e^{-2} = 1 - 0.1353 = 0.8646$

Si $t=3T$ $C(t) = 1 - e^{-3} = 1 - 0.0497 = 0.9502$

Si $t=4T$ $C(t) = 1 - e^{-4} = 1 - 0.0183 = 0.9816$

En la figura 6-3 se puede ver la gráfica de la respuesta $C(t)$ en función del tiempo. La salida es cero en $t=0$ y va creciendo gradualmente conforme crece el tiempo hasta que después de un tiempo igual a cinco constantes de tiempo "T", la salida se estabiliza en $C(t) = 1$.

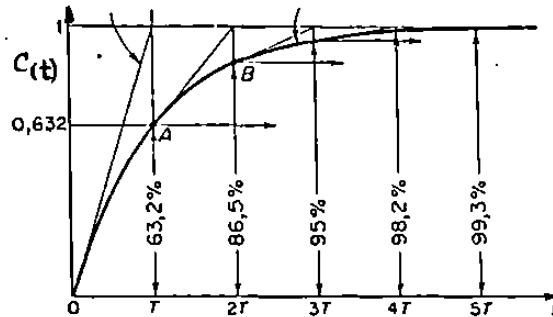


Fig. 6-3 Curva de respuesta al Escalón Unitario de un Sistema de Primer Orden.

6-3-2.- Respuesta a la Rampa Unitaria de un Sistema de Primer Orden.

Si la entrada es una Rampa Unitaria y debido a que la Transformada de Laplace de dicha señal es igual a $1/s^2$, la salida $C(s)$ es:

$$C(s) = \frac{1}{Ts+1} \left[\frac{1}{s^2} \right] = \frac{1}{s^2 [Ts+1]}$$

Descomponiendo la fracción total en fracciones parciales para poder calcular la transformada de Laplace inversa, tenemos:

$$C(s) = \frac{a}{s^2} + \frac{b}{s} + \frac{c}{Ts+1}$$

$$a = \frac{1}{s^2 [Ts+1]} \Big|_{s=0} s^2 = \frac{1}{1} = 1$$

$$b = \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{Ts+1} \right] \Big|_{s=0} = \frac{0 - 1(T)}{(Ts+1)^2} \Big|_{s=0} = -T$$

$$c = \frac{1}{s^2 (Ts+1)} (Ts+1) \Big|_{s=-\frac{1}{T}} = \frac{1}{\frac{1}{T^2}} = T^2$$

Substituyendo los valores de a, b y c en $C(s)$ se tiene:

$$C(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{Ts+1}$$

Aplicando la Transformada Inversa de Laplace a $C(s)$ se obtiene $C(t)$

$$C(t) = t - T + Te^{-\frac{t}{T}}$$

Se calculará enseguida la señal de error en el sistema de primer orden cuando la entrada es una rampa unitaria. La señal de error es:

$$e(t) = r(t) - c(t)$$

$$e(t) = t - t + T - Te^{-\frac{t}{T}}$$

$$e(t) = T(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

La ecuación anterior nos indica que cuando el tiempo $t=0$, el error es igual a cero, pero conforme el tiempo aumenta y tiende a infinito, el error es igual a T , por lo tanto si $t \rightarrow \infty$ $e(\infty) = T$.

En la figura 6-4 se representa la respuesta a la rampa unitaria de un sistema de primer orden.

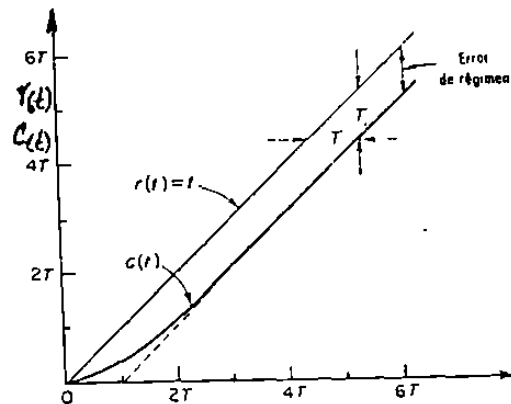


Fig. 6-4 Respuesta a la Rampa Unitaria.

6-3-3.- Respuesta al Impulso Unitario de un Sistema de Primer Orden.

Si se aplica un impulso unitario al sistema de primer orden de la figura 6-2, la respuesta se puede calcular en la siguiente forma:

La entrada es un impulso unitario, de tal forma que su transformada de Laplace es $R(s) = 1$, de donde

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1} R(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

Aplicando la Transformada inversa de Laplace a la ecuación anterior calculamos la respuesta del sistema en función del tiempo $c(t)$. Para obtener la transformada inversa primerose divide la fracción $C(s)$ entre T , como se indica:

$$C(s) = \frac{1/T}{Ts + 1} = \frac{1/T}{s + 1/T}$$

La transformada de Laplace inversa de $C(s)$ es:

$$c(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T}$$

En la figura 6-5 se puede ver la gráfica de la respuesta al impulso unitario de un sistema de primer orden.

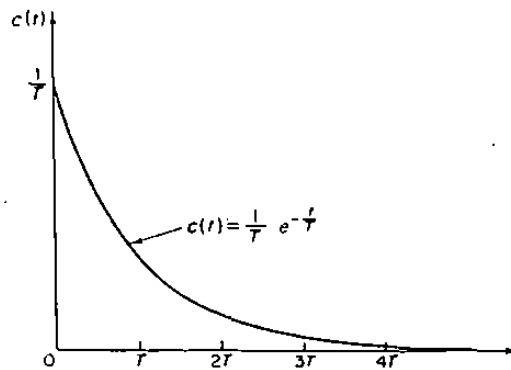


Fig. 6-5 Respuesta al Impulso Unitario

6-3-4.- Comparación de las Respuestas de un Sistema de Primer Orden al Escalón Unitario, la Rampa Unitaria y el Impulso Unitario.

Si se observan detenidamente las tres respuestas obtenidas se puede ver las siguientes relaciones. La respuesta a la Rampa Unitaria es:

$$c(t) = t - T + T e^{-\frac{t}{T}}$$

Al derivar la ecuación anterior se obtiene la respuesta al Escalón Unitario.

$$c(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$$

La derivada de la ecuación anterior nos dá la respuesta al Impulso Unitario.

$$c(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

La relación entre las tres respuestas se debe a que en forma general la derivada de la Rampa es el Escalón y la derivada del Escalón es el Impulso. Esta relación que existe entre las tres entradas se transfiere a las salidas debido a que el sistema que se está analizando es un sistema lineal invariante en el tiempo.

6-4.- Sistemas de Segundo Orden.

Como sistema de segundo orden se estudiará un Servomecanismo de posición en donde el objetivo principal es controlar la posición de una carga de acuerdo con una posición de referencia.

En la fig. 6-6 se representa el diagrama esquemático del Servomecanismo. Se pueden ver en dicho diagrama las cinco partes principales que componen al sistema: a)Dispositivo Medidor de Error, b)Amplificador c)Motor d)Tren de Engranajes y e)Carga.

El dispositivo medidor de error está formado por dos potenciómetros, uno llamado de referencia y en donde se ajusta la posición mecánica que se desea obtener moviendo una perilla y el otro potenciómetro que está acoplado mecánicamente a la carga. Al potenciómetro de referencia también se le puede llamar de entrada o Maestro y al otro potenciómetro se le llama de salida o esclavo, ya que sigue fielmente los movimientos del maestro.

Los dos potenciómetros producen voltajes llamados e_r y e_c que dependen de la posición mecánica de los mismos. Si el ángulo r es distinto al ángulo c , se produce un voltaje de error e , cuando los ángulos r y c son iguales, el voltaje de error e es igual a cero.

Para que el sistema inicie su funcionamiento es necesario que haya un cierto voltaje de error "e". Dicho voltaje se aplica como entrada a un amplificador cuya ganancia es K_1 . Se necesita un Amplificador Electrónico debido a que normalmente la señal de error "e" es muy pequeña y su voltaje no es suficiente para alimentar y mover un motor eléctrico.

Una vez amplificado el voltaje de error, el voltaje K_1e se aplica a un Motor Eléctrico de Corriente Directa, controlado por Inducido y éste a través de un Tren de Engranajes mueve finalmente la carga. Cuando la carga llegue a la posición deseada y ajustada previamente en el potenciómetro de entrada, la posición de los dos potenciómetros será idéntica, los voltajes e_r y e_c serán iguales y el sistema automáticamente se para.

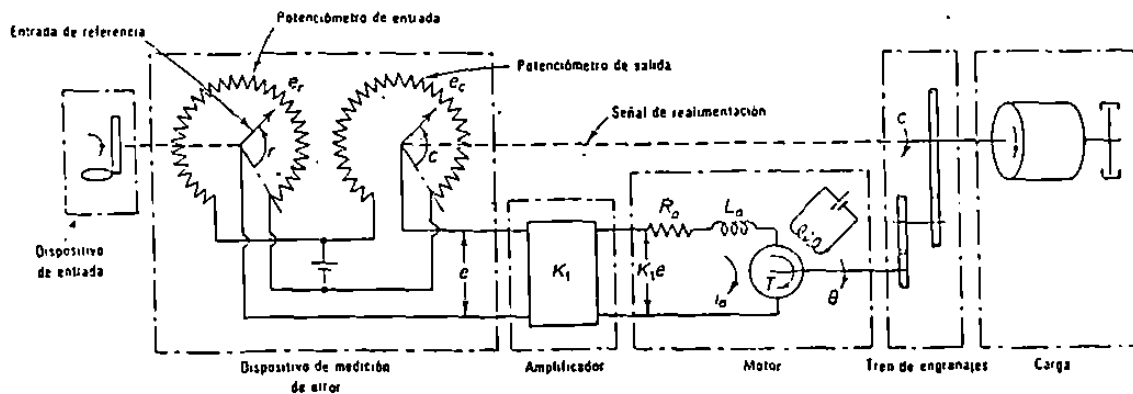


Fig. 6-6 Diagrama Esquemático de un Servomecanismo de Posición.

A continuación se plantearán algunas ecuaciones que representan matemáticamente la operación de cada uno de los componentes del sistema y cuya transformada de Laplace nos servirá de base para obtener la función de transferencia del Servomecanismo.

Si empezamos por el par de potenciómetros que forman el detector de error de posición angular, podemos ver que la diferencia de posiciones angulares multiplicada por una constante de proporcionalidad nos da como resultado el voltaje de error que se aplica al amplificador, matemáticamente se representa por la siguiente ecuación:

$$e(s) = K_0[r(s) - c(s)] \quad (6-3)$$

El voltaje de error $e(s)$ se aplica al amplificador electrónico y debido a que el amplificador tiene una ganancia K_1 , el voltaje de salida del amplificador es igual a $K_1e(s)$.

El voltaje $K_1e(s)$ se aplica a la armadura del motor de CD. Si se suman los voltajes de la armadura llegamos a la siguiente ecuación:

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_3 \frac{d\theta}{dt} = K_1 e \quad (6-4)$$

En la ecuación anterior (6-4) los dos primeros términos son los voltajes de la inductancia L_a y la resistencia R_a de la armadura. El tercer término es la Fuerza Contraelectromotriz generada por el motor que se maneja como carga porque su polaridad es contraria al voltaje de la fuente. La Fuerza Contraelectromotriz es proporcional a la velocidad $d\theta/dt$ y K_3 es una constante de proporcionalidad.

El motor eléctrico genera un par mecánico que depende del campo magnético y de la corriente de la armadura. Como el campo magnético es constante, el par mecánico dependerá sólo de la corriente de armadura.

$$T = K_2 i_a \quad (6-5)$$

donde T es el par mecánico, K_2 es una constante de proporcionalidad e i_a es la corriente de armadura.

El par mecánico que produce el motor tiene que vencer la inercia y la fricción tanto del tren de engranes como de la carga. La ecuación de pares es:

$$J_o \frac{d^2\theta}{dt^2} + f_o \frac{d\theta}{dt} = T = K_2 i_a \quad (6-6)$$

donde J_o es la inercia del motor, carga y tren de engranes y f_o es el coeficiente de fricción viscosa del motor, carga y tren de engranes con referencia al eje del motor.

El motor eléctrico está acoplado mecánicamente a un tren de engranes cuyo funcionamiento se puede representar matemáticamente en la ecuación (6-7).

$$c(s) = n \theta(s) \quad (6-7)$$

Para obtener la función de transferencia del Servomecanismo de posición se calculará a continuación la transformada de Laplace de las siguientes ecuaciones; 6-3, 6-4, 6-6 y 6-7.

Aplicando la Transformada de Laplace a las ecuaciones anteriores obtenemos las siguientes ecuaciones transformadas:

$$E(s) = K_0[R(s) - C(s)] \quad (6-8)$$

$$LsI_a(s) + R_aI_a(s) + K_3s\theta(s) = K_1E(s) \quad (6-9)$$

$$J_0s^2\theta(s) + f_0s\theta(s) = K_2I_a(s) \quad (6-10)$$

$$C(s) = n \theta(s) \quad (6-11)$$

Despejando $I_a(s)$ de la ecuación 6-10 tenemos:

$$I_a(s) = \frac{J_0s^2\theta(s) + f_0s\theta(s)}{K_2} = \frac{s\theta(s)[J_0s + f_0]}{K_2}$$

Substituyendo $I_a(s)$ en la ecuación 6-9 se obtiene la sig. ecuación

$$Ls\{s\theta(s)[J_0s + f_0]/K_2\} + R_a\{s\theta(s)[J_0s + f_0]/K_2\} + K_3s\theta(s) = K_1E(s)$$

Multiplicando todos los terminos de la ecuación anterior por K_2 para eliminar fracciones de la misma tenemos:

$$Ls^2\theta(s)[J_0s + f_0] + R_as\theta(s)[J_0s + f_0] + K_2K_3s\theta(s) = K_1K_2E(s)$$

Esta ecuación también se puede escribir en la siguiente forma:

$$[J_0s + f_0][Ls^2\theta(s) + R_as\theta(s)] + K_2K_3s\theta(s) = K_1K_2E(s)$$

$$\theta(s)s[Ls + R_a][J_0s + f_0] + K_2K_3s\theta(s) = K_1K_2E(s)$$

$$\theta(s)\{s[Ls + R_a][J_0s + f_0] + K_2K_3s\} = K_1K_2E(s)$$

$$\text{de donde } \frac{\theta(s)}{E(s)} = \frac{K_1K_2}{s(Ls + R_a)(J_0s + f_0) + K_2K_3s} \quad (6-12)$$

Tomando como base las ecuaciones 6-8, 6-11 y 6-12 se puede trazar el siguiente diagrama de bloques:

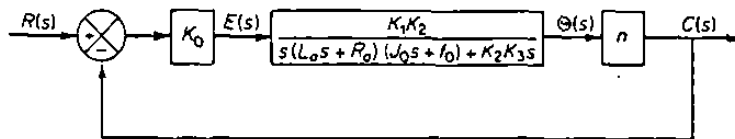


Fig. 6-7. Diagrama de Bloques del Servomecanismo de Posición

El diagrama de bloques de la figura 6-7 se puede simplificar uniendo en un solo bloque los tres bloques en serie que forman la función de transferencia directa $G(s)$, de tal forma que $G(s)$ es igual a:

$$G(s) = \frac{K_0 K_1 K_2 n}{s[(Ls + R_a)(J_0 s + f_0) + K_2 K_3]}$$

En virtud de que normalmente el valor de la inductancia del inducido L_a es pequeña, se puede despreciar su valor sin incurrir en mucho error, con lo cual se simplifica el valor de $G(s)$.

$$G(s) = \frac{K_0 K_1 K_2 n}{s[R_a(J_0 s + f_0) + K_2 K_3]}$$

$$G(s) = \frac{K_0 K_1 K_2 n}{R_a J_0 s^2 + R_a f_0 s + K_2 K_3 s} = \frac{K_0 K_1 K_2 n / R_a}{\frac{R_a J_0 s^2 + R_a f_0 s + K_2 K_3 s}{R_a}}$$

$$G(s) = \frac{K_0 K_1 K_2 n / R_a}{J_0 s^2 + (f_0 + \frac{K_2 K_3}{R_a}) s} = \frac{\frac{K_0 K_1 K_2 n}{R_a n^2}}{\frac{J_0 s^2 + (f_0 + \frac{K_2 K_3}{R_a}) s}{n^2}}$$

Finalmente la función de transferencia directa $G(s)$ nos da el siguiente resultado:

$$G(s) = \frac{K_0 K_1 K_2 / n R_a}{\frac{J_0}{n^2} s^2 + \frac{[f_0 + (K_2 K_3 / R_a)]}{n^2} s} = \frac{K}{J s^2 + F s}$$

donde $K = K_0 K_1 K_2 / n R_a$

$J = J_0 / n^2 =$ Momento de inercia referido al eje de salida

$F = [f_0 + (K_2 K_3 / R_a)] / n^2 =$ Coeficiente de fricción viscosa referido al eje de salida

En la fig. 6-8 se representa el diagrama de bloques simplificado del sistema de control de posición.

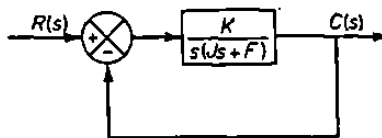


Fig. 6-8 Diagrama de Bloques Simplificado

6-5.- Respuesta a la señal escalón unitario de un sistema de segundo orden.

Tomando como referencia el diagrama de bloques simplificado de la figura 6-8, podemos obtener la función de transferencia del sistema.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{Js^2 + Fs}}{1 + \frac{K}{Js^2 + Fs}} = \frac{\frac{K}{Js^2 + Fs}}{\frac{Js^2 + Fs + K}{Js^2 + Fs}} = \frac{K}{Js^2 + Fs + K}$$

La función de transferencia anterior nos indica que el sistema de control es de segundo orden. Dividiendo la función de transferencia entre J, tanto el numerador como el denominador, tenemos:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{J}}{s^2 + \frac{F}{J}s + \frac{K}{J}}$$

Con el fin de factorizar el trinomio del denominador como el producto de dos binomios, aplicaremos la fórmula general de un sistema de segundo orden para calcular las raíces de la ecuación.

$$s = \frac{-F/J \pm \sqrt{\frac{F^2}{J^2} - 4\frac{K}{J}}}{2} = -\frac{F}{2J} \pm \sqrt{\left[\frac{F^2}{2J}\right] - \frac{K}{J}}$$

La función de transferencia del sistema de segundo orden se puede escribir en la siguiente forma:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{J}}{\left[s + \frac{F}{2J} + \sqrt{\left(\frac{F}{2J}\right)^2 - \frac{K}{J}}\right] \left[s + \frac{F}{2J} - \sqrt{\left(\frac{F}{2J}\right)^2 - \frac{K}{J}}\right]}$$

Analizando la ecuación anterior se puede ver que los polos del sistema son complejos si

$$\frac{K}{J} > \left[\frac{F}{2J}\right]^2 \quad \text{o bien} \quad F^2 < 4JK$$

mientras que los polos serán reales si

$$\frac{K}{J} \leq \left[\frac{F}{2J}\right]^2 \quad \text{o bien} \quad F^2 \geq 4JK$$

Se puede ver en la función de transferencia $C(s)/R(s)$ que los valores de K/J y $F/2J$ son muy importantes. Cuando se analiza la respuesta transitoria es conveniente para simplificar hacer las siguientes substituciones:

$$\frac{K}{J} = \omega_n^2 \quad \frac{F}{2J} = \zeta \omega_n = \sigma$$

donde ω_n = frecuencia natural no amortiguada

ζ = relación de amortiguamiento del sistema

σ = atenuación del sistema

Haciendo las substituciones anteriores en la función de transferencia $C(s)/R(s)$ tenemos:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{[s + \zeta\omega_n + \sqrt{(\zeta\omega_n)^2 - \omega_n^2}][s + \zeta\omega_n - \sqrt{(\zeta\omega_n)^2 - \omega_n^2}]}$$

Si se observan los términos que contiene el denominador de la fracción anterior, se puede ver que es el producto de dos binomios conjugados, lo cual se puede transformar en una diferencia de cuadrados.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n)^2 - (\sqrt{(\zeta\omega_n)^2 - \omega_n^2})^2}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2s\zeta\omega_n + \zeta^2\omega_n^2 - \zeta^2\omega_n^2 + \omega_n^2}$$

finalmente la función de transferencia se simplifica hasta la siguiente expresión:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2s\zeta\omega_n + \omega_n^2} \quad (6-13)$$

En la siguiente figura se representa un diagrama de bloques del sistema de segundo orden, expresado en la función $C(s)/R(s)$.

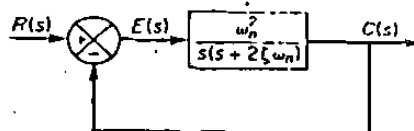


Fig. 6-9.- Sistema de Segundo Orden.

Ahora se puede expresar el comportamiento dinámico del sistema de segundo orden en función de los parámetros ζ y ω_n .

De la ecuación 6-13 se pueden obtener las raíces de la ecuación de segundo grado que constituyen los polos de la función de transferencia

$$s = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} \quad (6-14)$$

Dependiendo del valor de ζ , será el tipo de polos de lazo cerrado que se tenga en el sistema.

Si $0 < \zeta < 1$, los polos del sistema son complejos conjugados por el signo negativo de la raíz cuadrada ya que $4\zeta^2\omega_n^2 < 4\omega_n^2$. En estas condiciones se dice que el sistema es subamortiguado y la respuesta transitoria es oscilatoria. Además los polos complejos están ubicados a la izquierda del eje $J\omega$ en el plano complejo.

Si $\zeta = 1$, los polos del sistema son reales e iguales, al eliminarse los términos dentro de la raíz cuadrada. En estas condiciones el sistema se dice que trabaja críticamente amortiguado y la respuesta transitoria ya no oscila. Los polos reales e iguales están situados a la izquierda del eje $J\omega$ en el plano complejo.

Si $\zeta > 1$, los polos del sistema son reales y distintos. En tales condiciones el sistema se denomina sobreamortiguado y la respuesta transitoria no oscila. Los polos reales y distintos están situados a la izquierda del eje $J\omega$.

Por último si $\zeta = 0$, los polos del sistema serán complejos y estarán situados sobre el eje $J\omega$. En estas condiciones el sistema no tendrá amortiguamiento, y su salida transitoria será oscilatoria.

A continuación se calculará la respuesta transitoria del sistema de segundo orden de la fig 6-9 cuando se le aplica una entrada escalón unitario. De acuerdo con el análisis hecho en los párrafos anteriores, se considerarán tres casos distintos:

Sistema Subamortiguado	$0 < \zeta < 1$
Sistema Críticamente Amortiguado	$\zeta = 1$
Sistema Sobreamortiguado	$\zeta > 1$

6-5-1.- Sistema Subamortiguado ($0 < \zeta < 1$). La función de transferencia de este sistema se puede representar en la siguiente forma:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{[s + \zeta\omega_n + J\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}][s + \zeta\omega_n - J\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}]}$$

haciendo $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$ en la ecuación anterior, donde ω_d se denomina frecuencia natural amortiguada del sistema, tenemos:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + J\omega_d)(s + \zeta\omega_n - J\omega_d)} \quad (6-15)$$

El denominador de la ecuación 6-15 es el producto de dos binomios conjugados, lo cual podemos convertir a una diferencia de cuadrados.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n)^2 - (J\omega_d)^2} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2s(\zeta\omega_n + \zeta^2\omega_n^2 + \omega_d^2)}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2s\zeta\omega_n + \zeta^2\omega_n^2 + \omega_n^2 - \omega_n^2\zeta^2} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2s\zeta\omega_n + \omega_n^2}$$

La señal de entrada al sistema es un escalón unitario, por lo que $R(s) = 1/s$. Sustituyendo el valor de $R(s)$ en la ecuación anterior:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (6-16)$$

La Transformada de Laplace de la ecuación 6-16 se puede obtener directamente de las tablas aplicando la fórmula # 18.

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \text{Sen}(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta})$$

La diferencia entre la entrada y la salida del sistema es la señal de error.

$$e(t) = r(t) - c(t) = 1 - 1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \text{Sen}(\omega_n t + \phi)$$

$$e(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \text{Sen}(\omega_n t + \phi) \quad \text{donde } \phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}$$

La señal de error es una senoide amortiguada. A medida que el tiempo aumenta, el error va disminuyendo. Cuando el tiempo sea muy grande tendiendo a infinito, el error entre la entrada y la salida desaparece.

Cuando la relación de amortiguamiento $\zeta = 0$, la respuesta como ya se dijo se convierte en oscilatoria sin amortiguamiento. Substituyendo el valor de $\zeta = 0$ en la respuesta $c(t)$ se tiene:

$$c(t) = 1 - \text{Sen}(\omega_n t + 90^\circ) = 1 - \text{Cos } \omega_n t \quad (6-17)$$

En la ecuación 6-17 se puede ver que ω_n representa la frecuencia natural no amortiguada del sistema, o sea la frecuencia a la cual oscila el sistema cuando la relación de amortiguamiento $\zeta = 0$.

Si el sistema tiene cierto amortiguamiento, no se puede observar la frecuencia natural no amortiguada ω_n . En este caso aparece la frecuencia natural amortiguada ω_d que es igual a $\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$. La frecuencia ω_d siempre es menor que la frecuencia ω_n y la diferencia en valor depende lógicamente del valor de ζ .

Más adelante se graficará la respuesta transitoria $c(t)$ de este sistema de segundo orden subamortiguado, cuando se haya terminado de analizar los otros dos casos, el críticamente amortiguado y el sobre-amortiguado.

6-5-2.-Sistema Criticamente Amortiguado ($\zeta=1$). Tomando como punto de partida la ecuación 6-13, la función de transferencia del sistema es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2s\zeta\omega_n + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2}$$

Como la entrada del sistema es un escalón unitario, $R(s)=1/s$ y la salida $C(s)$ será:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2 s} \quad (6-18)$$

Se calculará en seguida la transformada inversa de Laplace de la ecuación 6-18.

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2 s} = \frac{a}{s} + \frac{b_2}{(s + \omega_n)^2} + \frac{b_1}{(s + \omega_n)}$$

$$a = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2} \Big|_{s=0} = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2} = 1$$

$$b_2 = \frac{\omega_n^2}{s} \Big|_{s=-\omega_n} = \frac{\omega_n^2}{-\omega_n} = -\omega_n$$

$$b_1 = \frac{d}{ds} \left[\frac{\omega_n^2}{s} \right] \Big|_{s=-\omega_n} = -\omega_n^2 s^{-2} \Big|_{s=-\omega_n} = -\frac{\omega_n^2}{\omega_n^2} = -1$$

Substituyendo los valores de a , b_2 y b_1 en la ecuación de $C(s)$

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2} - \frac{1}{s + \omega_n} \quad (6-19)$$

Aplicando las tablas para calcular la transformada inversa de Laplace a la ecuación 6-19, obtenemos $c(t)$:

$$c(t) = 1 - \omega_n t e^{-\omega_n t} - e^{-\omega_n t} = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t) \quad (6-20)$$

Dando valores al tiempo en la ecuación 6-20, podemos calcular la grafica de la respuesta con amortiguamiento critico.

Si $t=0$ $c(t) = 1 - e^{-0}(1 + 0) = 0$

Si $t=1/\omega_n$ $c(t) = 1 - e^{-1}(1 + 1) = 1 - 0.367 = 0.633$

Si $t=2/\omega_n$ $c(t) = 1 - e^{-2}(1 + 2) = 1 - 0.406 = 0.59$

Si $t=3/\omega_n$ $c(t) = 1 - e^{-3}(1 + 3) = 1 - 0.199 = 0.801$

Si $t=4/\omega_n$ $c(t) = 1 - e^{-4}(1 + 4) = 1 - 0.091 = 0.909$

Los valores obtenidos para $c(t)$ nos indican que la respuesta transitoria se inicia en cero cuando $t=0$ y va aumentando gradualmente con el tiempo hasta que llega al valor de uno cuando el tiempo tiende a infinito, estabilizándose en dicho valor.

6-5-3.- Sistema Sobreamortiguado, ($\zeta > 1$). Como ya se dijo, en este caso los polos del sistema son reales y distintos. La función de transferencia de la ecuación 6-13 es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

aplicando la ecuación general de segundo grado al denominador de la función de transferencia anterior obtenemos:

$$s = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$s_1 = -\zeta\omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$s_2 = -\zeta\omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1})(s + \zeta\omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1})}$$

substituyendo $R(s) = 1/s$ en la ecuación anterior la salida $C(s)$ es:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + \zeta\omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1})(s + \zeta\omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1})}$$

$$C(s) = \frac{a}{s} + \frac{b}{s + \zeta\omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} + \frac{c}{s + \zeta\omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

$$a = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1})(s + \zeta\omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1})} \Big|_{s=0}$$

$$a = \frac{\omega_n^2}{(\zeta\omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1})(\zeta\omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1})} = \frac{\omega_n^2}{\zeta^2\omega_n^2 - \omega_n^2(\zeta^2 - 1)}$$

$$a = \frac{1}{\zeta^2 - \zeta^2 + 1} = 1$$

$$b = \frac{\omega_n^2}{s(s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2-1})} \quad s = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2-1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + s\zeta\omega_n - s\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}$$

$$b = \frac{\omega_n^2}{\zeta^2\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n^2\sqrt{\zeta^2-1} + \omega_n^2(\zeta^2-1) - \zeta^2\omega_n^2 - \zeta\omega_n^2\sqrt{\zeta^2-1} + \zeta\omega_n^2\sqrt{\zeta^2-1} + \omega_n^2\sqrt{\zeta^2-1}}$$

$$b = \frac{\omega_n^2}{2\omega_n^2(\zeta^2-1) + 2\zeta\omega_n^2\sqrt{\zeta^2-1}} = \frac{1}{2[\zeta^2 - 1 + \zeta\sqrt{\zeta^2-1}]}$$

$$c = \frac{\omega_n^2}{s(s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2-1})} \quad s = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2-1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + s\zeta\omega_n + s\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}$$

$$c = \frac{\omega_n^2}{\zeta^2\omega_n^2 - 2\zeta\omega_n^2\sqrt{\zeta^2-1} + \omega_n^2(\zeta^2-1) - \zeta^2\omega_n^2 + \zeta\omega_n^2\sqrt{\zeta^2-1} - \zeta\omega_n^2\sqrt{\zeta^2-1} + \omega_n^2(\zeta^2-1)}$$

$$c = \frac{\omega_n^2}{2\omega_n^2(\zeta^2-1) - 2\zeta\omega_n^2\sqrt{\zeta^2-1}} = \frac{1}{2[\zeta^2 - 1 - \zeta\sqrt{\zeta^2-1}]}$$

Substituyendo el valor de las constantes a, b y c en la respuesta C(s) tenemos:

$$C(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{2(\zeta^2-1 + \zeta\sqrt{\zeta^2-1})} \frac{1}{s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}} + \frac{1}{2(\zeta^2-1 - \zeta\sqrt{\zeta^2-1})} \frac{1}{s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}$$

Aplicando las tablas de la transformada de Laplace a la salida C(s) nos dará el siguiente resultado:

$$c(t) = 1 + \frac{1}{2(\zeta^2-1 + \zeta\sqrt{\zeta^2-1})} e^{(-\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2-1})t} + \dots$$

$$+ \frac{1}{2(\zeta^2-1 - \zeta\sqrt{\zeta^2-1})} e^{(-\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2-1})t}$$

haciendo que $s_1 = (\zeta + \sqrt{\zeta^2-1})\omega_n$ y $s_2 = (\zeta - \sqrt{\zeta^2-1})\omega_n$

$$c(t) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1} \left[-\frac{s_1}{\omega_n} \right]} e^{-s_1 t} + \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1} \left[-\frac{s_2}{\omega_n} \right]} e^{-s_2 t}$$

$$c(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}} \left[\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2} \right]$$

En la fig. 6-10 se puede observar una familia de gráficas de respuesta en función del tiempo para el sistema de control de segundo orden que se ha analizado. La grafica contiene curvas de la salida $c(t)$ en función de $\omega_n t$ y en donde la relación de amortiguamiento ζ se varia desde cero hasta $\zeta = 2$.

También en la fig. 6-10 se ve que si $\zeta=0$, el sistema es completamente oscilatorio y dicha oscilación no se amortigua. Si $0 < \zeta < 1$, caso subamortiguado, el sistema sigue siendo oscilatorio, pero la oscilación ya es amortiguada tendiendo con el tiempo hacia un valor estable. Cuando ζ es igual o mayor que uno el sistema ya no oscila, la respuesta aumenta gradualmente con el tiempo hasta alcanzar un valor estable. Entre más grande sea el valor de ζ en el caso sobreamortiguado, el sistema es más lento, esto quiere decir que se tardará más tiempo en alcanzar la estabilidad.

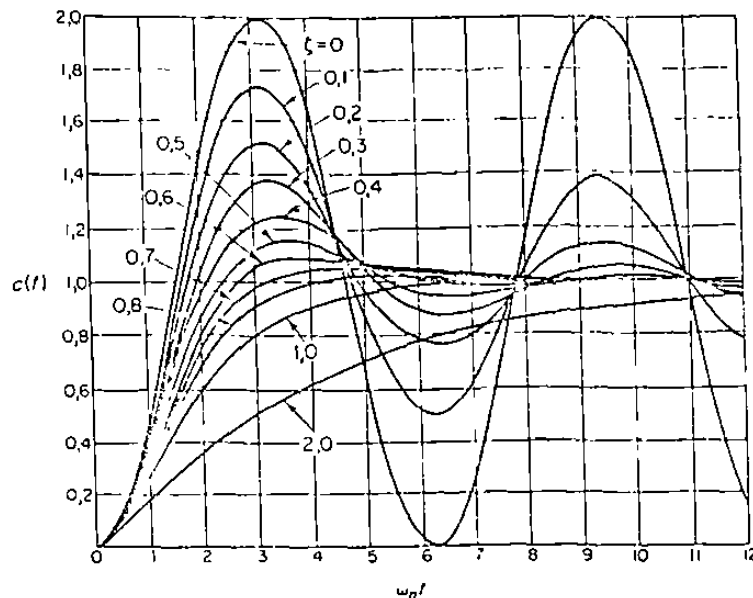


Fig. 6-10. Curvas de respuesta al escalón unitario para el sistema de control de la fig. 6-9.

6-6.- Especificaciones de la Respuesta Transitoria.

En la práctica se pueden especificar las características de un sistema de control en el dominio del tiempo. Estas características son especificadas en términos de la respuesta transitoria cuando se aplica como entrada al sistema una señal escalón unitario. La señal escalon se aplica mucho porque es fácil de generar y además conociendo la respuesta al escalón se puede calcular matemáticamente la respuesta a otras señales de entrada.

La respuesta transitoria de un sistema de control real casi siempre presenta oscilaciones amortiguadas antes de lograr la estabilidad. Al especificar las características de la respuesta transitoria de un sistema de control con entrada escalón unitario, es muy común utilizar las siguientes especificaciones:

- 1.- Tiempo de retardo, t_d
- 2.- Tiempo de crecimiento, t_r
- 3.- Tiempo de pico, t_p
- 4.- Sobreimpulso máximo, M_p
- 5.- Tiempo de establecimiento, t_s

En la figura 6-11 se pueden observar las anteriores especificaciones en una curva de respuesta al escalón unitario. A continuación se dará una definición de cada una de las especificaciones.

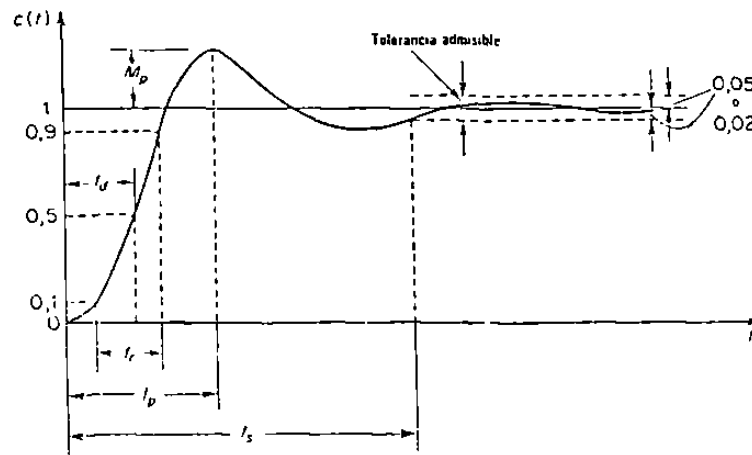


Fig. 6-11 Especificaciones de la Respuesta Transitoria

- 1.- Tiempo de retardo, t_d . Es el tiempo que tarda la respuesta en alcanzar por primera vez la mitad del valor final.
- 2.- Tiempo de crecimiento, t_r . Es el tiempo que requiere la respuesta para crecer de un 10 a un 90% de su valor final.
- 3.- Tiempo de pico, t_p . Es el tiempo requerido por la respuesta para alcanzar el primer pico del sobreimpulso.
- 4.- Máximo sobreimpulso (en porciento), M_p . Es el valor pico máximo de la curva de respuesta medido desde la unidad. Esta especificación nos indica la estabilidad relativa del sistema.
- 5.- Tiempo de establecimiento, t_s . Es el tiempo requerido por la respuesta para alcanzar y mantenerse dentro de determinado rango alrededor del valor final, generalmente de un 2 a un 5%.

6-7.- Análisis de la estabilidad en el plano complejo. Basándonos en todos los estudios que se han hecho de la respuesta de un sistema de control, podemos afirmar que dicha respuesta tendrá polos reales o complejos conjugados. Si los polos son reales de la forma

$$C(s) = \frac{1}{s + a} \quad (6-21)$$

la respuesta $c(t)$ será la transformada inversa de Laplace de $C(s)$

$$c(t) = e^{-at} \quad (6-22)$$

Por otro lado si los polos son complejos conjugados de la forma

$$C(s) = \frac{\omega}{(s+a+j\omega)(s+a-j\omega)} = \frac{\omega}{[(s+a)+j\omega][(s+a)-j\omega]} = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

la respuesta $c(t)$ será:

$$c(t) = e^{-at} \text{Sen } \omega t \quad (6-23)$$

Tanto en la ecuación 6-22 como en la 6-23 se puede ver que si el tiempo aumenta, la salida tiende hacia un valor definido y estable.

Pero si los signos de los exponentes fueran positivos las dos ecuaciones de respuesta al aumentar el tiempo, la salida aumentaría sin ningún límite dando como resultado un sistema completamente inestable.

La conclusión importante de lo anterior es que los signos de los exponentes dependen de la ubicación de los polos en el plano complejo, si los polos están a la izquierda del eje $J\omega$, los signos de los exponentes son negativos y el sistema es estable. Pero si los polos están a la derecha del eje $J\omega$, los signos de los exponentes son positivos y el sistema es inestable.

Siendo la estabilidad de un sistema de control una característica muy importante, la ubicación de los polos en el plano complejo es definitiva para poder saber si un sistema es estable o inestable.

Cabe aclarar que el sólo hecho de que los polos de lazo cerrado estén ubicados a la izquierda del eje $J\omega$ no garantiza la estabilidad del sistema de control. Es necesario que los polos estén situados a la izquierda de la zona determinada en el plano complejo de la fig. 6-12. ya que cerca del eje $J\omega$ se pueden presentar oscilaciones excesivas que desaparecen al cambiar los polos hacia la izquierda del eje $J\omega$.

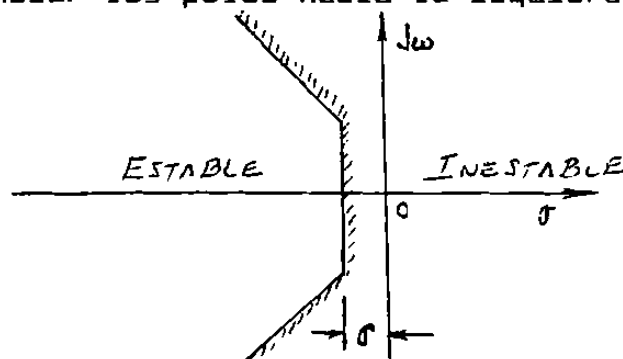


Fig. 6-12. Region del plano complejo donde se satisfacen las condiciones de estabilidad $\zeta > 0.4$ y $t_s < 4/\sigma$.

6-8.- Criterio de Estabilidad de Routh.

En cualquier sistema de control lineal la característica más importante del mismo es su estabilidad. Se requiere saber si el sistema es estable ya que de otra forma el sistema no se puede usar en la práctica porque su salida algo estabilizarse en un determinado valor podría oscilar indefinidamente o de plano variar sin ningún control. En la sección anterior 6-7 se llegó a la conclusión que un sistema es estable sólo si sus polos de lazo cerrado están ubicados en el semiplano izquierdo del plano complejo. La mayoría de los sistemas de control lineal tienen funciones de transferencia de lazo cerrado de la siguiente forma

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (6-24)$$

donde las "a" y las "b" son constantes y generalmente $m < n$. En la función anterior se requiere factorizar el denominador $A(s)$ para saber la ubicación de los polos de lazo cerrado. Cuando el polinomio $A(s)$ es de segundo orden la factorización es relativamente sencilla al aplicar la fórmula general de segundo grado, pero cuando el polinomio $A(s)$ es de tercer orden o mayor, el problema de factorización se complica bastante por lo que no es tan fácil ya ubicar los polos en el plano complejo.

El criterio de estabilidad de Routh es un procedimiento muy simple que nos permite saber cuantos polos de lazo cerrado están en el semiplano derecho del plano complejo sin tener que factorizar el polinomio $A(s)$. Es importante aclarar que el criterio de Routh sólo nos da el número de polos a la derecha del eje $j\omega$, pero no nos dice la ubicación de los polos. De todas maneras éste procedimiento nos permite saber si un sistema es estable o no lo es. Esta característica de un sistema de control se denomina estabilidad absoluta.

El procedimiento llamado criterio de estabilidad de Routh es el siguiente:

- 1.- Primero hay que escribir el polinomio $A(s)$ en forma ordenada como se representa en la ecuación (6-24). Es decir primero el término con mayor exponente de "s", enseguida el término con exponente de " s^{n-1} " y así sucesivamente hasta la constante a_n .
- 2.- Si cualquiera de los coeficientes es cero o negativo en la presencia de por lo menos un coeficiente positivo, hay una raíz o raíces que son imaginarias o que tienen partes reales positivas. Por lo tanto en este caso el sistema es inestable. Si solamente nos interesa la estabilidad absoluta, no hay necesidad de continuar con el procedimiento, pues ya sabemos que el sistema es inestable.

Por lo anterior es necesario que todos los coeficientes existan y sean positivos. Es muy importante hacer notar que la condición de que todos los coeficientes existan y sean positivos es necesaria, pero no es suficiente para asegurar que el sistema es estable.

3.- Si todos los coeficientes son positivos se deben agrupar los coeficientes en filas y columnas de acuerdo al siguiente esquema:

s^n	a_0	a_2	a_4	a_6	\dots
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	\dots
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	\dots
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	\dots
s^{n-4}	d_1	d_2	d_3	d_4	\dots
.	.	.			
.	.	.			
s^2	e_1	e_2			
s^1	f_1				
s^0	g_1				

Los coeficientes de los dos primeros renglones ya están determinados en el polinomio $A(s)$ y los coeficientes b_1, b_2, b_3, b_4 etc. se pueden calcular con las siguientes formulas:

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

$$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$$

Se calculan todas las "b" hasta que todas sean cero. Se continua el mismo esquema multiplicando en forma cruzada los coeficientes de las dos filas previas para evaluar las "c", "d", "e", etc.

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$$

.

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}$$

$$d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1}$$

El proceso continua hasta haber completado la fila n-ésima. El esquema completo de los coeficientes tiene la forma triangular.

4.- El criterio de estabilidad de Routh establece que la cantidad de raíces de la ecuación 6-24 con partes reales positivas es igual al número de cambios de signo de los coeficientes de la primera columna del esquema. La condición necesaria y suficiente para que todas las raíces de la ecuación 6-24 queden en el semiplano izquierdo del plano complejo es que todos los coeficientes de la primera columna sean positivos.

Con el fin de aplicar el criterio de Routh y determinar la estabilidad absoluta de un sistema de control se resolverá a continuación el siguiente ejemplo:

Ejemplo 6-8-1.- Aplicando el criterio de Routh, determinar si el sistema de control determinado por la función de transferencia

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s(s + 2)}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5}$$

es estable o inestable. Si el sistema es inestable determinar cuantas raíces hay a la derecha del eje $J\omega$.

s^4	1	3	5
s^3	2	4	0
s^2	1	5	
s^1	-6		
s^0	5		

Una vez terminado el esquema se analiza la primera columna de coeficientes y se puede ver que el número de cambios de signo es dos. Por lo tanto hay dos raíces con partes reales positivas, lo cual significa que el sistema es inestable.

Casos especiales del criterio de Routh.

1.- Si un término de la primera columna en cualquier fila es cero, pero los términos restantes no son cero, se reemplaza el término cero por un número positivo muy pequeño " ϵ " y se calcula el resto del conjunto. Por ejemplo si se tiene la siguiente ecuación característica

$$s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0$$

el conjunto de coeficientes se indica en el siguiente esquema:

$$\begin{array}{c|cc}
 s^3 & 1 & 1 \\
 s^2 & 2 & 2 \\
 s^1 & 0 \cong \varepsilon & \\
 s^0 & 2 &
 \end{array}$$

Analizando la primera columna de coeficientes podemos ver que el coeficiente sobre el cero (ε) tiene el mismo signo que el que está debajo de él, esto nos indica que hay un par de raíces imaginarias en el eje $J\omega$ del plano complejo. En este caso en particular las raíces imaginarias son $s = \pm j$.

Por otro lado si el signo del coeficiente sobre el cero (ε) es contrario al que está debajo de él, indica que hay un cambio de signo, por lo que habrá raíces a la derecha del eje $J\omega$.

Si se tiene un sistema de control con la siguiente ecuación característica

$$s^3 - 3s + 2 = (s - 1)^2(s + 2) = 0$$

el esquema de los coeficientes es:

$$\begin{array}{c|ccc}
 s^3 & 1 & & -3 \\
 s^2 & 0 \cong \varepsilon & & 2 \\
 s^1 & -3 & - & \frac{2}{\varepsilon} \\
 s^0 & 2 & &
 \end{array}$$

En la primera columna de coeficientes hay dos cambios de signo, lo cual nos indica que existen dos raíces positivas y que se comprueban al factorizar el polinomio como se indica, las dos raíces son iguales y están situadas en $s = 1$. En seguida se verá el segundo caso especial que se puede presentar en la aplicación del criterio de Routh.

2.-Si todos los coeficientes calculados en una fila son cero, se puede continuar la evaluación del resto del conjunto, formando un polinomio auxiliar con los coeficientes de la fila anterior y usando los coeficientes de la derivada de este polinomio auxiliar en la fila de coeficientes cero. Para ilustrar este segundo caso especial se verá el siguiente ejemplo con un sistema cuya ecuación característica es:

$$s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$$

si se escriben los coeficientes de esta ecuación, se tiene:

$$\begin{array}{c|ccc}
 s^5 & 1 & 24 & -25 \\
 s^4 & 2 & 48 & -50 \\
 s^3 & 0 & 0 &
 \end{array}$$

Los términos de la fila de s^3 son todos igual a cero. Por lo tanto se forma un polinomio auxiliar con los coeficientes de la fila de s^4 . El polinomio auxiliar $P(s)$ será:

$$P(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50$$

la derivada de este polinomio auxiliar con respecto a "s" es:

$$\frac{dP(s)}{ds} = 8s^3 + 96s$$

Se reemplazan los términos en la fila de s^3 por los coeficientes de la ecuación anterior, o sea el 8 y el 96. El esquema de coeficientes se convierte entonces en

$$\begin{array}{l|lll} s^5 & 1 & 24 & -25 \\ s^4 & 2 & 48 & -50 \\ s^3 & 8 & 96 & \\ s^2 & 24 & -50 & \\ s^1 & 112.7 & 0 & \\ s^0 & -50 & & \end{array}$$

Observando la primera columna de coeficientes se vé que hay un cambio de signo, lo cual significa que hay una raíz con parte real positiva. Se pueden calcular las raíces de la ecuación polinómica auxiliar

$$2s^4 + 48s^2 - 50 = 0$$

aplicando la fórmula general de segundo grado, lo cual nos dá los siguientes valores:

$$s^2 = 1 \qquad s^2 = -25$$

$$\text{o bien } s = \pm 1 \qquad s = \pm j5$$

la ecuación original se puede factorizar utilizando estas raíces como se indica enseguida:

$$(s + 1)(s - 1)(s + j5)(s - j5)(s + 2) = 0$$

en donde se puede ver claramente una raíz con parte real positiva.

6-9.- Análisis de la Estabilidad Relativa.

Como ya se vió en la sección anterior 6-8, el criterio de Routh nos da la estabilidad absoluta de un sistema de control, es decir nos indica si el sistema es o no estable. Muchas veces la estabilidad absoluta de un sistema no basta, sino que se requiere conocer su estabilidad relativa, lo cual significa saber que tan cerca está un sistema de perder su estabilidad.

Se puede calcular la estabilidad relativa de un sistema desplazando el eje $j\omega$ del plano complejo "s" a la izquierda y aplicando luego el criterio de estabilidad de Routh. Para lograr lo anterior se substituye

$$s = z - \sigma \quad \text{donde } \sigma \text{ es una cantidad constante.}$$

en la ecuación característica del sistema, con lo cual la ecuación se convierte en una función de la nueva variable "z".

Dándole valores a " σ " cada vez mayores, llega el momento en que el sistema originalmente estable se convierte virtualmente en un sistema inestable por el corrimiento que se está efectuando del eje $j\omega$ a la izquierda. La distancia de corrimiento del eje $j\omega$ nos dará una magnitud de la estabilidad relativa del sistema.

6-10.- Determinación del rango de ganancia K de un sistema de control aplicando el criterio de Routh.

Aunque el criterio de estabilidad de Routh tiene un alcance limitado ya que no nos proporciona una forma de mejorar la estabilidad relativa ni nos indica como lograr estabilizar un sistema inestable, si nos permite conocer el rango de ganancia K dentro del cual un sistema de control es estable.

Supongamos que se desea conocer el rango de ganancia K de estabilidad del sistema de control representado en la fig. 6-13.

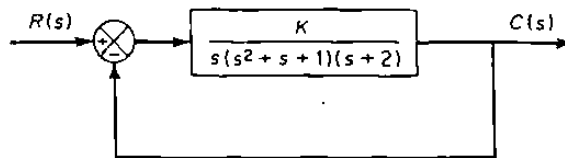


Fig. 6-13. Sistema de control

En primer lugar se determinará la función de transferencia del sistema de control representado en la fig. 6-13.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{s(s^2 + s + 1)(s + 2)}}{1 + \frac{K}{s(s^2 + s + 1)(s + 2)}} = \frac{K}{s(s^2 + s + 1)(s + 2) + K}$$

desarrollando la ecuación característica del sistema tenemos:

$$s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + k = 0$$

El esquema del criterio de Routh para el sistema de control de la fig. 6-13 es :

s^4	1	3	K
s^3	3	2	0
s^2	$7/3$	K	
s^1	$2 - \frac{9}{7}K$		
s^0	K		

Para que el sistema sea estable todos los coeficientes de la primera columna deben ser positivos, por lo tanto el binomio $(2 - \frac{9}{7}K)$ debe ser mayor que cero, lo cual nos da la siguiente ecuación:

$$(2 - \frac{9}{7}K) > 0$$

de la cual podemos despejar el valor de K cuyo valor debe ser

$$\frac{14}{9} > K > 0$$

El resultado obtenido nos indica que para tener el sistema estable la ganancia debe ser menor que 14/9. Si el sistema tiene una ganancia $K = 14/9$, tendrá algunos polos en el eje $J\omega$ lo cual producirá una salida oscilatoria y dicha oscilación matemáticamente se mantendrá con amplitud constante, pero practicamente la oscilación puede crecer gradualmente con el tiempo incrementándose la inestabilidad.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Un sistema de control con retroalimentación unitaria y cuya función de transferencia directa es

$$G(s) = \frac{0.4s + 1}{s(s + 0.6)}$$

tiene una entrada escalón unitario. Calcular la respuesta del sistema en función del tiempo.

2.- Calcular la señal de salida en función del tiempo de un sistema de control cuya función de transferencia es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{20}{s^2 + 4s + 5}$$

si la señal de entrada del sistema es una rampa $r(t) = 4t$

3.- Determinar si el sistema de control representado por la siguiente función de transferencia es estable o inestable. Si es inestable determinar el número de polos a la derecha del eje $J\omega$.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s^2 + 3s + 6}{2s^5 + s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 6s + 8}$$

4.- Cual es el rango de estabilidad de el sistema de control representado por la siguiente función de transferencia:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s^2 + 3s + 2)(s + 4) + K}$$

5.- Aplicando el criterio de Routh, determinar el rango de estabilidad del sistema de control representado por la siguiente función de transferencia:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s^2 + 4s + 1)(s + 3)(s + 6) + K}$$

6.- Determinar si el sistema de control representado por la siguiente función de transferencia es estable o inestable. Si es inestable determinar el número de polos a la derecha del eje $J\omega$ y si es estable calcular la estabilidad relativa del sistema, obteniendo el valor máximo de " σ " para el cual el sistema sigue siendo estable.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2s^2 + 20s + 4}{s^4 + 21s^3 + 158s^2 + 504s + 576}$$

CAPITULO VII

ANALISIS DEL ERROR

7-1.- Concepto del Error

Practicamente en cualquier sistema de control se pueden presentar errores que se deben a varios factores. Por ejemplo es posible tener errores por imperfecciones de los componentes del sistema, o por envejecimiento y deterioro del mismo. Además un sistema presenta error -- cuando su entrada se modifica y el error puede ser transitorio o un error estacionario.

El error por lo tanto es una característica muy importante de un sistema de control que se puede definir como la desviación entre la salida real y el valor deseado. El error es transitorio si se elimina con el tiempo o estacionario si no desaparece con el tiempo. El error entonces nos define tambien otra característica del sistema que es la exactitud. A mayor error menor exactitud y viceversa.

Como se verá más adelante, teóricamente el error de un sistema de control depende de su función de transferencia y del tipo de señal de entrada que se le aplique. Esto quiere decir que un mismo sistema puede no tener error con una entrada escalón, pero si presentar error con una entrada rampa.

7-2.- El Error Estacionario.

Como ya se comentó en la sección anterior, el error puede ser transitorio o estacionario. El error transitorio puede ser a veces un problema para el buen funcionamiento del sistema, pero la ventaja es que con el tiempo el error va disminuyendo hasta desaparecer. Por el contrario el error estacionario persiste durante todo el tiempo de operación del sistema lo cual puede provocar problemas con la exactitud y la estabilidad. Por lo anterior es muy importante poder calcular el error estacionario de un sistema de control.

A continuación se estudia el cálculo del error estacionario para un sistema de control de lazo cerrado. En la figura 7-1 se representa el diagrama de bloques de un sistema de control cualquiera de lazo cerrado.

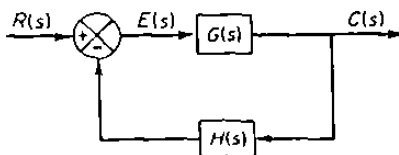


Fig. 7-1 Sistema de Control de Lazo Cerrado.

La función de transferencia de lazo cerrado del sistema de control de la fig. 7-1 es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (7-1)$$

Por otro lado la señal de error $E(s)$ a la salida del sumador es

$$E(s) = R(s) - C(s)H(s)$$

ecuación que también se puede escribir en la siguiente forma equivalente

$$E(s) = R(s) - \frac{R(s)C(s)H(s)}{R(s)} = R(s) \left[1 - \frac{C(s)H(s)}{R(s)} \right]$$

de donde

$$\frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)H(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)}{R(s)} H(s) \quad (7-2)$$

substituyendo el valor de $C(s)/R(s)$ de la ecuación 7-1 en la ecuación 7-2, tenemos:

$$\frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} H(s)$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1 + G(s)H(s) - G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}$$

de donde finalmente se puede despejar el error del sistema $E(s)$

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} R(s) \quad (7-3)$$

De la ecuación 7-3 se puede calcular el error estacionario e_{ss} en función del tiempo cuando el tiempo tiende a infinito.

$$e(t) = \mathcal{L}^{-1} E(s) \quad \text{y} \quad e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$$

Sin embargo este procedimiento para calcular e_{ss} es difícil que nos permita calcular un valor definido ya que normalmente al substituir el tiempo $t = \infty$, el error e_{ss} también se hace infinito o una indeterminación. Para romper la indeterminación y obtener un valor definido para el error e_{ss} , se puede aplicar el teorema del valor final que establece lo siguiente:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (7-4)$$

En la ecuación anterior se comprueba que el error estacionario depende del tipo de señal de entrada $R(s)$ y de la función de transferencia de lazo abierto $G(s)H(s)$.

7-3.- Clasificación de los Sistemas de Control.

Desde el punto de vista del error, los sistemas de control se pueden clasificar de acuerdo con el número de polos que tenga en el origen la función de transferencia de lazo abierto $G(s)H(s)$.

La función de transferencia $G(s)H(s)$ de lazo abierto de un sistema de control cualquiera generalmente tiene la siguiente forma:

$$G(s)H(s) = \frac{K (T_0s + 1)(T_1s + 1)\dots(T_ms + 1)}{s^N (T_1s + 1)(T_2s + 1)\dots(T_ps + 1)}$$

En la función anterior $G(s)H(s)$, el término s^N del denominador es el que define la cantidad de polos en el origen. Si el exponente N es igual a cero, el sistema se clasifica como sistema tipo cero, si el exponente N es igual a uno, el sistema se denomina tipo uno y así sucesivamente.

Es muy importante que quede claro que la clasificación del tipo de sistema es muy diferente al orden del mismo. Más adelante se demostrará que al aumentar el número de tipo, se aumentará la exactitud del sistema, sin embargo aumentar el número del tipo también aumenta los problemas de la estabilidad. En sistemas de control que se utilizan en la práctica casi no se utilizan sistemas de control de tipo 3 o más elevado, porque el tener tantos polos en el origen ocasiona muchos problemas con la estabilidad.

7-4.- Coeficientes de Error Estático.

Los coeficientes de error estático se pueden definir como cifras de mérito en un sistema de control. Cuanto mayor sea el coeficiente de error estático, menor será el error estacionario.

Existen tres clases de coeficientes estaticos de error:

- 1.- Coeficiente estático de error de posición K_p
- 2.- Coeficiente estático de error de velocidad K_v y
- 3.- Coeficiente estático de error de aceleración K_a

La salida de un sistema de control puede ser una temperatura, una presión, una velocidad o cualquier otro parametro. En el análisis de los coeficientes de error estático, la forma física de la salida es irrelevante. Cuando se habla de error de posición no se está hablando de una posición mecánica, sino de la magnitud de una salida. Cuando se trata de error de velocidad, nos referimos a la variación de la magnitud de la salida ((velocidad)), etc.

7-4-1.- Coeficiente estático de error de posición K_p .

Basándonos en la ecuación 7-4 se calculará el error estacionario para un sistema con entrada escalón unitario.

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (7-5)$$

Si la entrada del sistema es un escalón unitario, la transformada de Laplace es $1/s$, por lo tanto $R(s) = 1/s$. Substituyendo $R(s)$ en la ecuación 7-5, el error estacionario e_{ss} será:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)H(s)} \frac{1}{s}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G(s)H(s)}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + G(0)H(0)} \quad (7-6)$$

El coeficiente de error estático de posición K_p se define por la siguiente ecuación:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = G(0)H(0)$$

Substituyendo K_p en la ecuación 7-6, el error estacionario estará expresado en la siguiente forma:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p}$$

Para un sistema tipo 0

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots} = K$$

por lo tanto el error estacionario será:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K}$$

Para un sistema tipo 1 o mayor

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots} = \alpha$$

y el error estacionario es:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + \alpha} = 0$$

Del análisis anterior se puede ver que para un sistema tipo 0, hay un error estacionario cuyo valor se puede reducir al aumentar la ganancia. Para sistemas tipo 1 o mayor, el error estacionario no existe -- cuando la entrada es un escalón unitario. Es necesario hacer notar que en algunos sistemas tipo 0, el aumentar la ganancia K reduce el error e_{ss} , pero si la ganancia se incrementa demasiado se pueden tener problemas con la estabilidad.

7-4-2.- Coeficiente estático de error de velocidad K_v .

El coeficiente estático de velocidad K_v , se obtendrá también basándonos en la misma ecuación 7-4 para el error e_{ss} . Pero ahora la entrada no será un escalón unitario, sino una señal cuya magnitud se incrementa con el tiempo ((velocidad)), esta señal es una rampa unitaria, o sea una entrada con velocidad unitaria. Si la entrada es una rampa unitaria, la entrada $r(\omega) = t$ y la transformada de Laplace será $R(s) = 1/s^2$. Substituyendo el valor de $R(s)$ en la ecuación 7-4

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)H(s)} \frac{1}{s^2}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sG(s)H(s)}$$

El coeficiente estático de error de velocidad se define como

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)$$

por lo tanto el error estacionario en función del coeficiente estático de error de velocidad es:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v}$$

El término error de velocidad se usa aquí para expresar el error estacionario de un sistema ante una entrada rampa. Esto quiere decir que la entrada del sistema puede ser de cualquier naturaleza (voltaje corriente, presión etc) siempre y cuando dicha entrada tenga la forma de una rampa unitaria.

Para un sistema tipo 0

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK(T_0s + 1)(T_b s + 1)\dots}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)\dots} = 0$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{0} = \alpha$$

Para un sistema tipo 1

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK(T_0s + 1)(T_b s + 1)\dots}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)\dots} = K$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{K}$$

Para un sistema tipo 2 o mayor

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK(T_{as} + 1)(T_{bs} + 1)\dots}{s^2(T_{1s} + 1)(T_{2s} + 1)\dots} = \alpha$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{\alpha} = 0$$

Se pueden obtener algunas conclusiones importantes del análisis anterior. El sistema tipo 0 no puede seguir una entrada rampa en estado estacionario ya que el error es infinito. El sistema tipo 1 si es capaz de poder seguir la entrada rampa con un error estacionario igual al inverso de la ganancia K. En la fig. 7-2 se puede ver la gráfica de la respuesta y la entrada rampa para un sistema tipo 1. Para el sistema tipo 2 o mayor la entrada rampa unitaria produce un error estacionario igual a cero.

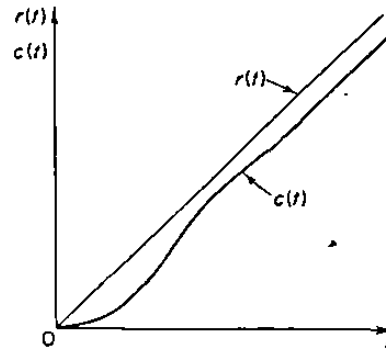


Fig. 7-2. Respuesta de un sistema tipo 1 a una entrada rampa.

7-4-3.- Coeficiente estático de error de Aceleración K_a .

Ahora la entrada del sistema será una aceleración unitaria que matemáticamente se puede representar como $r(t) = t^2/2$ y cuya transformada de Laplace es $R(s) = 1/s^3$.

Substituyendo el valor de la entrada $R(s)$ en la ecuación 7-4 se calcula el error estacionario e_{ss} .

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)H(s)} \frac{1}{s^3} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)}$$

El coeficiente estático de error de aceleración K_a se define por la ecuación

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)$$

Substituyendo el valor de K_a , el error estacionario con una entrada aceleración unitaria es

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a}$$

Para un sistema tipo 0

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 K (T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots} = 0$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} = \frac{1}{0} = \infty$$

Para un sistema tipo 1

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 K (T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots}{s (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots} = 0$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} = \frac{1}{0} = \infty$$

Para un sistema tipo 2

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 K (T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots}{s^2 (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots} = K$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} = \frac{1}{K}$$

Para un sistema tipo 3 o superior

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 K (T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots}{s^2 (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots} = \alpha$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} = \frac{1}{\alpha} = 0$$

Después del análisis anterior los resultados son los siguientes: Los sistemas de tipo 0 y tipo 1 son incapaces de seguir una entrada parabólica o de aceleración unitaria ya que el error estacionario es infinito. El sistema tipo 2 presenta un error estacionario inverso a la ganancia K . Los sistemas tipo 3 o mayores no tienen error estacionario a la entrada aceleración.

En la fig. 7-3 se representa la respuesta de un sistema tipo 2 a una entrada parabólica (aceleración unitaria).

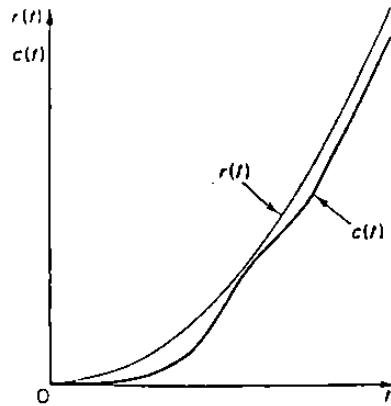


Fig. 7-3. Respuesta de un sistema tipo 2 a una entrada parabólica

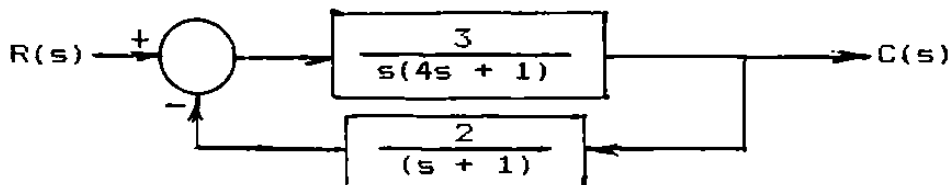
Los resultados ya obtenidos del error estacionario para diferentes tipos de sistemas y para diferentes señales de entrada se pueden representar en una tabla como se indica en la fig. 7-4.

Fig. 7-4. Tabla de errores estacionarios en función de la ganancia K

	Entrada Escalón $r(t) = 1$	Entrada Rampa $r(t) = t$	Entrada Acel. $r(t) = t^2/2$
Sistema Tipo 0	$\frac{1}{1 + K}$	α	α
Sistema Tipo 1	0	$\frac{1}{K}$	α
Sistema Tipo 2	0	0	$\frac{1}{K}$
Sistema Tipo 3	0	0	0

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Calcular el error estacionario del sistema de control que se representa en el diagrama de bloques de la fig. cuando la señal de entrada es $r(t) = 5t$.



2.- Calcular el error estacionario de un sistema de control de lazo cerrado en el cual

$$G(s) = \frac{8}{10s^2 + 7s + 1} \quad \text{y} \quad H(s) = \frac{1}{(s + 5)}$$

si la entrada del sistema es un escalón $r(t) = 3$

3.- Un sistema de control tiene una función de transferencia de lazo cerrado

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{4}{2s^2 + 6s + 10}$$

calcular el error estacionario cuando al sistema se le aplica una entrada impulso unitario.

4.- Se tienen dos sistemas de control con retroalimentación unitaria y cuyas funciones de transferencia son:

$$G_1(s) = \frac{10}{s(s + 1)} \quad G_2(s) = \frac{10}{s(2s + 1)}$$

Si la señal de entrada que se aplica a los dos sistemas es $r(t) = 5 + 2t$ determinar cual de los dos sistemas tiene el error estacionario mayor.

CAPITULO VIII

METODO DEL LUGAR DE LAS RAICES

8-1.- Introducción.

Como ya se estudió en el capítulo VI, las principales características de la respuesta transitoria de un sistema de control dependen de la posición de los polos de lazo cerrado. Por lo tanto es de vital importancia conocer la ubicación de los polos de lazo cerrado.

Los polos de lazo cerrado son las raíces de la ecuación característica. Para hallarlos hay que factorizar la ecuación característica. Cuando la ecuación característica es de primero o segundo orden, la factorización es relativamente sencilla, pero el problema se complica si la ecuación característica es de tercer orden o mayor. Aunque existen algunas técnicas de factorización para estos casos, el problema no es sencillo porque la mayoría de las veces la ecuación característica está en función de la ganancia K del sistema. Si la ganancia varía, la ecuación característica también varía y entonces los cálculos se tendrían que repetir.

W.R.Evans desarrolló en 1950 un procedimiento sencillo para hallar las raíces de la ecuación característica y lo utilizó extensamente en la ingeniería del control. Este procedimiento se denomina "Método del Lugar de las Raíces" y consiste en trazar en una gráfica todas las raíces de la ecuación característica de un sistema de control, variando la ganancia del mismo desde cero hasta infinito.

8-2.- El concepto del Lugar de las Raíces.

La base en la que se fundamenta toda la teoría del método del Lugar de las Raíces es simple y es muy importante que se entienda perfectamente antes de que el método sea aplicado para analizar sistemas de control.

Un sistema de control de lazo cerrado se puede representar en forma general por un diagrama de bloques como se indica en la fig. 8-1.

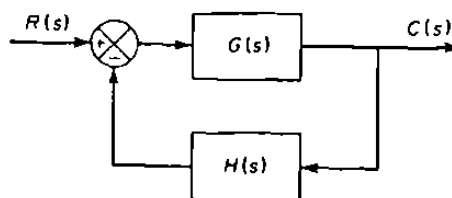


Fig. 8-1. Sistema de Control de Lazo Cerrado.

La función de transferencia de lazo cerrado es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (8-1)$$

La ecuación característica de este sistema de lazo cerrado es el denominador de la fracción de la derecha de la ecuación 8-1, igualado a cero. Por lo tanto la ecuación característica es:

$$\begin{aligned} 1 + G(s)H(s) &= 0 \\ \text{o bien} \quad G(s)H(s) &= -1 \end{aligned} \quad (8-2)$$

La clave del método del Lugar de las Raíces está contenida en la ecuación 8-2, porque cualquier valor de "s" que satisfaga esta relación es una raíz de la ecuación característica.

La ecuación 8-2 es una función compleja y como tal se puede dividir en dos ecuaciones, una ecuación de ángulos y otra ecuación con los valores absolutos o magnitudes de ambos miembros.

La igualación de los ángulos nos dá como resultado la siguiente ecuación denominada Condición Angular.

$$\angle G(s)H(s) = \angle -1 = \pm 180^\circ(2k + 1) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (8-3)$$

Mientras que la igualación de las magnitudes genera la otra ecuación denominada Condición de Amplitud o valor absoluto.

$$|G(s)H(s)| = |-1| = 1 \quad (8-4)$$

Los valores de "s" que cumplen las condiciones de ángulo y amplitud, son las raíces de la ecuación característica o los polos de lazo cerrado del sistema de control.

Como ya se mencionó con todos los puntos que cumplen con las condiciones de ángulo y amplitud se puede construir una gráfica en el plano complejo denominada Lugar Geométrico de las Raíces. El procedimiento para obtener la gráfica consiste, primero en buscar aplicando la condición angular las posibles raíces de la ecuación característica y posteriormente establecer una escala para los diferentes puntos a partir de la aplicación de la condición de amplitud. Una vez completa la gráfica del lugar geométrico de las raíces, la gráfica proporciona las raíces de la ecuación característica para cualquier valor de la ganancia K del sistema. Además se puede determinar la respuesta del sistema.

8-3.- Gráficas para funciones de transferencia simples.

El concepto que sirve de base al método del lugar geométrico de las raíces se ilustrará mejor obteniendo las gráficas para tres sistemas cuyas funciones de transferencia de lazo abierto son simples.

8-3-1.- Función de Transferencia con un Polo Único.

A continuación se construirá una gráfica del lugar geométrico de las raíces para la función de transferencia de lazo abierto

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s + 2} \quad (8-5)$$

Como se puede ver en la ecuación 8-5 se tiene una función compleja con un sólo polo ubicado en el plano complejo en $s = -2$. Empezaremos la gráfica trazando el polo único en el plano complejo indicando su ubicación con una cruz, como se representa en la fig. 8-2.

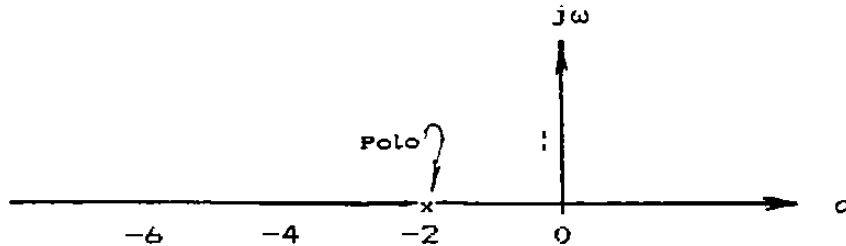


Fig. 8-2. Plano Complejo con un Polo en $s = -2$.

Después de trazar el polo en $s = -2$, el siguiente paso es buscar puntos en el plano "s" que satisfagan la condición angular de la ecuación 8-3. Para ello se empezarán a considerar varios puntos de prueba s_1, s_2, s_3 etc, cuyos ángulos con respecto al polo en $s = -2$ formen un ángulo de 180° . En la fig. 8-3 se pueden ver los puntos de prueba y los ángulos que éstos forman con respecto al polo.

El punto de prueba s_1 forma con el polo un ángulo de cero grados, el punto s_2 forma un ángulo θ , el punto s_3 forma un ángulo β , el punto s_4 forma un ángulo ϕ y finalmente el punto s_5 forma con respecto al polo un ángulo de 180° . La conclusión importante del análisis anterior es que los únicos puntos del plano complejo que cumplen con la condición angular son los puntos que están a la izquierda del polo $s = -2$, como se representa con línea más gruesa en la fig. 8-3.

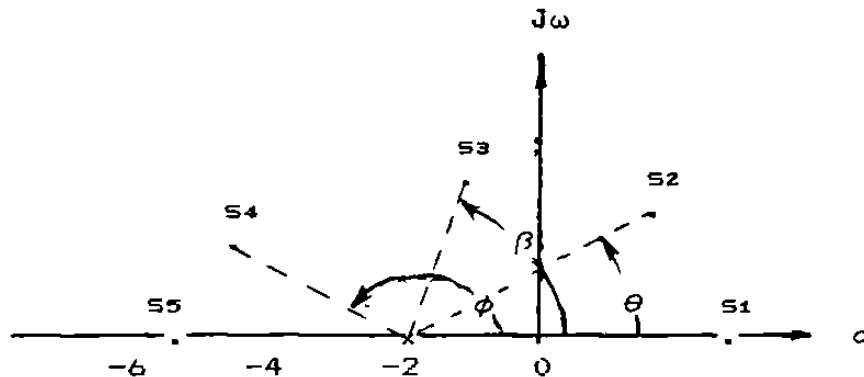


Fig. 8-3. Puntos de Prueba sobre el Plano Complejo.

El siguiente paso es establecer una escala para el lugar geométrico de las raíces, esto consiste en determinar valores de la ganancia K para varios puntos a lo largo del lugar geométrico. Esto se lleva a cabo cumpliendo con la condición de la magnitud de la ecuación 8-4 :

$$\frac{k}{s + 2} = 1 \quad \text{o bien} \quad K = s + 2$$

en la ecuación anterior dándole valores a "s" obtenemos los valores de la ganancia K.

si s = -2	K = -2 + 2 = 0
si s = -4	K = -4 + 2 = 2
si s = -6	K = -6 + 2 = 4
si s = -α	K = -α + 2 = α

La gráfica completa del lugar geométrico de las raíces se representa en la fig. 8-4.

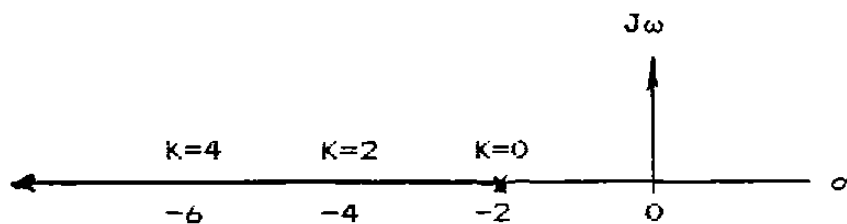


Fig. 8-4. Grafica para $G(s)H(s) = K/(s + 2)$

Con el fin de comprobar la validez de los resultados obtenidos en la gráfica de la figura 8-4 se calculará la ganancia del sistema de control de lazo cerrado cuando $s = -6$. La ecuación característica del sistema de control de lazo cerrado que estamos analizando es

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

$$1 + \frac{K}{s + 2} = 0$$

$$\frac{s + 2 + K}{s + 2} = 0 \quad \text{o bien}$$

$$s + 2 + K = 0 \quad (8-6)$$

Substituyendo $s = -6$ en la ecuación característica 8-6 se obtiene para la ganancia un valor $k = 4$. Lo anterior demuestra que el valor calculado en la gráfica y el de la ecuación característica coinciden, comprobando la validez de los resultados de la gráfica.

8-3-2.- Función de Transferencia con Dos Polos.

Se trazará la gráfica del lugar geométrico de las raíces para la siguiente función de transferencia de lazo abierto:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(s + 1)(s + 3)} \quad (8-7)$$

Para iniciar la gráfica se trazan los polos en -1 y -3 como se muestra en la fig. 8-5. Basándonos en la condición angular se puede determinar rápidamente que el lugar geométrico puede estar sobre el eje real solamente entre los polos -1 y -3 . Para puntos de prueba a la derecha de -1 , la suma de los dos ángulos es de cero grados. Para los puntos de prueba a la izquierda de -3 , la suma de ángulos es de 360° . Sin embargo para los puntos comprendidos entre -1 y -3 , los ángulos son de 180° con respecto a -1 y de 0° con respecto a -3 , haciendo que el ángulo total (suma de los dos ángulos) sea igual a 180° .

En la fig. 8-5 se representa con línea gruesa el lugar geométrico a lo largo del eje real.



Fig. 8-5. Ubicación de Polos y Lugar Geométrico en el Eje Real

Ahora la pregunta es si existirá el lugar geométrico fuera del eje real. Se debe sospechar que sí porque la ecuación 8-7 da origen a una ecuación característica de segundo orden, la cual es posible que tenga raíces complejas. En la fig. 8-6 se toma como punto de prueba $s_1 = -2 + J1$. Trazando líneas del punto de prueba s_1 a cada uno de los polos, los ángulos formados son de 135° con respecto a -1 y de 45° con respecto a -3 . Por lo que el ángulo total es de 180° y cumple con la condición angular.

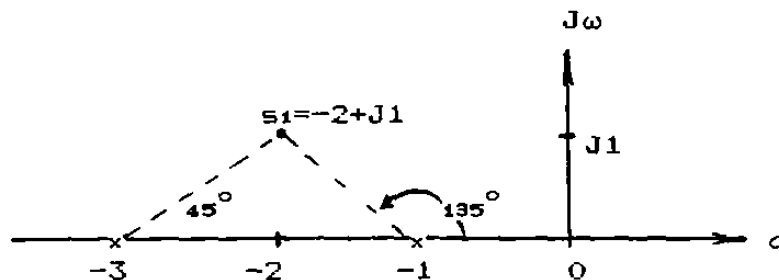


Fig. 8-6. Selección del punto de prueba $s_1 = -2 + J1$

De hecho todos los puntos del plano complejo para los cuales la parte real es igual a -2 cumplen con la condición angular. Por lo tanto la gráfica del lugar geométrico de las raíces es como se indica en la fig. 8-7.

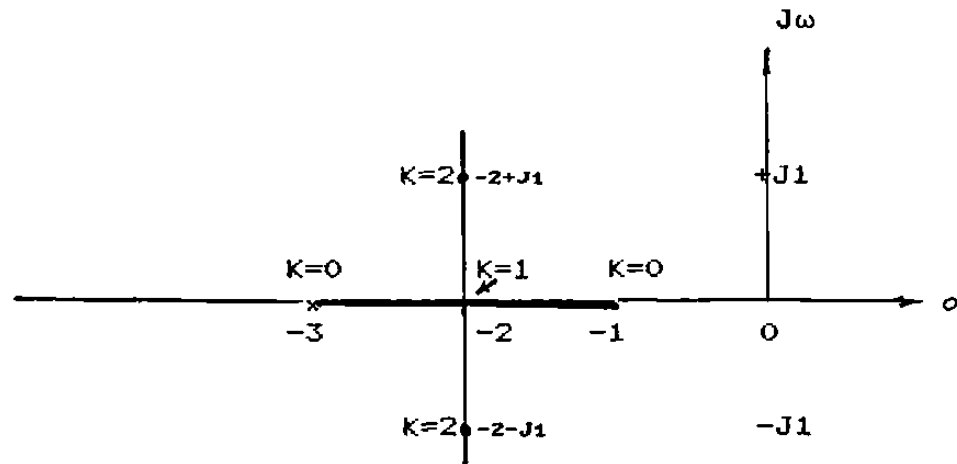


Fig. 8-7. Gráfica para $G(s)H(s) = K/(s + 1)(s + 3)$

Para establecer la escala de la gráfica se aplica la condición de magnitud igualando el valor absoluto de la función a uno como se indica.

$$\frac{K}{(s + 1)(s + 3)} = 1 \quad \text{o bien} \quad K = (s + 1)(s + 3)$$

si $s = -1$	$K = (-1 + 1)(-1 + 3) = 0$
si $s = -3$	$K = (-3 + 1)(-3 + 3) = 0$
si $s = -2$	$K = (-2 + 1)(-2 + 3) = 1$
si $s = -2 + j1$	$K = (-2 + j1 + 1)(-2 + j1 + 3) = (\sqrt{2})(\sqrt{2}) = 2$
si $s \rightarrow -2 \pm j\alpha$	$K = (-2 + j\alpha + 1)(-2 + j\alpha + 3)$ y $K \rightarrow \alpha$

Los valores anteriores de la ganancia K en diferentes puntos de s se incluyen en la gráfica de la fig. 8-7.

Al igual que en el ejemplo 8-3-1, en este caso se pueden comprobar los valores de la ganancia K obteniendo la ecuación característica del sistema.

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

$$1 + \frac{K}{(s + 1)(s + 3)} = 0$$

$$\frac{(s + 1)(s + 3) + K}{(s + 1)(s + 3)} = 0$$

por lo que la ecuación característica es $(s + 1)(s + 3) + k = 0$ o bien desarrollando el producto tenemos:

$$s^2 + 4s + (3 + K) = 0$$

con $K = 1$ $s^2 + 4s + 4 = 0$ y $s_1 = s_2 = -2$
con $K = 2$ $s^2 + 4s + 5 = 0$ y $s = -2 \pm J1$

por lo que se comprueba que la gráfica nos proporciona las raíces correctas.

8-3-3.- Función de Transferencia con un Polo y un Cero.

En seguida se trazará la gráfica del lugar geométrico de las raíces para un sistema de control que tiene la siguiente función de transferencia de ciclo abierto

$$G(s)H(s) = \frac{K(s + 5)}{s + 1} \quad (8-8)$$

Se inicia de nuevo la gráfica trazando el polo en $s = -1$ y el cero en $s = -5$. El polo se indica por una cruz y el cero por un pequeño círculo como se representa en la fig. 8-8.

Al aplicar la condición angular a la ecuación 8-8 se encuentra que ahora al ángulo del cero se le debe restar el ángulo del polo. Basándonos en lo anterior se llega a la conclusión de que sólo existe el lugar geométrico sobre el eje real entre -1 y -5 . El estudiante deberá comprobar lo anterior estableciendo puntos de prueba en otras posiciones del plano complejo.

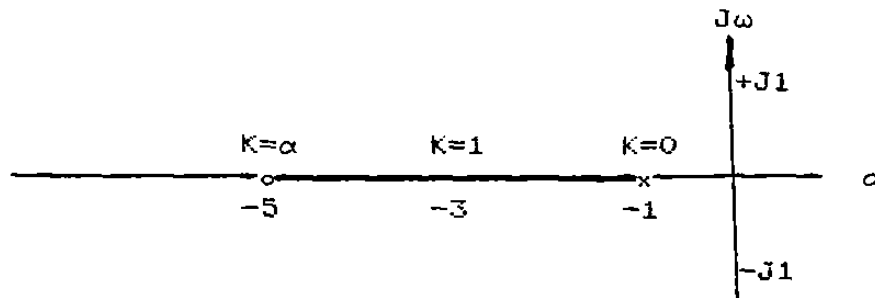


Fig. 8-8. Gráfica para $G(s)H(s) = K(s + 5)/(s + 1)$

La relación que se utiliza para establecer la escala de la gráfica es

$$\frac{K(s + 5)}{s + 1} = 1 \quad \text{o bien} \quad K = \frac{s + 1}{s + 5}$$

$$\text{en } s = -1 \quad K = \frac{-1 + 1}{-1 + 5} = 0$$

$$\text{en } s = -3 \quad K = \frac{-3 + 1}{-3 + 5} = 1$$

$$\text{en } s = -5 \quad K = \frac{-5 + 1}{-5 + 5} = \alpha$$

Como una conclusión importante después de haber analizado los tres sistemas de control se puede afirmar que ninguno de los sistemas considerados puede ser inestable, ya que en ningún caso la gráfica del --

lugar geométrico de las raíces abandona el semiplano izquierdo del plano complejo. Por lo tanto no hay raíces de la ecuación característica con partes reales positivas.

Las gráficas de los lugares geométricos de las raíces pueden trazarse siguiendo el procedimiento ya ilustrado. Sin embargo para facilitar y hacer más rápido el trazo de la gráfica se pueden seguir ciertas reglas que simplifican notablemente el trabajo. En la siguiente sección se estudiarán estas reglas y posteriormente se aplicarán para graficar algunos lugares geométricos de las raíces de sistemas de control con funciones de transferencia más complicadas que las estudiadas hasta ahora.

8-4.- Reglas para Graficar rápidamente.

Los análisis realizados sobre el lugar de las raíces pueden hacer pensar al estudiante que la construcción de la gráfica se hace basándose en el método de prueba y error, hasta encontrar las posibles raíces de la ecuación característica. Aunque en general se requiere aplicar el método de prueba y error, el número de pruebas necesarias se puede reducir grandemente siguiendo las reglas que a continuación se estudian.

Regla No 1.- Una gráfica del lugar geométrico de las raíces tendrá tantos lugares geométricos como polos haya en la función $G(s)H(s)$.

Los lugares geométricos son las diferentes ramas que la gráfica tendrá dependiendo del número de polos.

Regla No 2.- Los lugares geométricos o ramas siempre principian en los polos de $G(s)H(s)$ con $K = 0$ y terminan en los ceros de $G(s)H(s)$ o en el infinito con $K = \infty$.

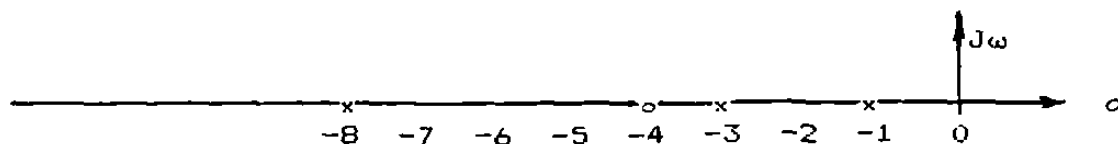
Es muy común que una función de "s" tenga más polos definidos que ceros. En tal caso algunas ramas pueden terminar en el infinito por no tener todos los ceros definidos.

Regla No 3.-El lugar geométrico de las raíces existe sobre el eje real solamente a la izquierda de un número impar de polos reales y/o de ceros.

La condición angular es la que limita la existencia de la gráfica a ciertas regiones del eje real. Para ilustrar lo anterior se estudiará la gráfica de la siguiente función compleja:

$$F(s) = \frac{K(s + 4)}{(s + 1)(s + 3)(s + 8)}$$

La función $F(s)$ contiene un cero en $s = -4$ y tres polos situados en $s = -1$, $s = -3$ y en $s = -8$ como se ve en la fig. 8-9.



Si se selecciona un punto de prueba a la derecha del polo $s = -1$, los ángulos que forma el punto de prueba con respecto a los polos y al cero son:

con respecto al polo $s = -1$	0°
con respecto al polo $s = -3$	0°
con respecto al cero $s = -4$	0°
con respecto al polo $s = -8$	0°

de tal forma que la suma de los ángulos de ceros menos ángulos de polos es igual a cero y no se cumple con la condición angular.

Si se selecciona el punto de prueba en el eje real entre los polos $s = -1$ y $s = -3$, los ángulos del punto de prueba serán:

con respecto al polo $s = -1$	180°
con respecto al polo $s = -3$	0°
con respecto al cero $s = -4$	0°
con respecto al polo $s = -8$	0°

por lo tanto todos los puntos entre -1 y -3 son parte de la gráfica del lugar de las raíces.

Seleccionando el punto de prueba en el eje real entre -3 y -4 , los ángulos que forma el punto son:

con respecto al polo $s = -1$	180°
con respecto al polo $s = -3$	180°
con respecto al cero $s = -4$	0°
con respecto al polo $s = -8$	0°

la sumatoria de ángulos de los ceros es cero y la de los polos es de 360° por lo que el tramo del eje real entre -3 y -4 no puede ser parte de la gráfica del lugar de las raíces.

Siguiendo el mismo procedimiento anterior se podrá encontrar que el tramo del eje real entre -4 y -8 es parte de la gráfica, pero a la izquierda de -8 no puede haber gráfica sobre el eje real, lo cual confirma el cumplimiento de la regla número 3.

Regla No 4.- La gráfica del lugar geométrico de las raíces siempre es simétrica con respecto al eje real.

Lo anterior se debe a que los polos complejos siempre se presentan en pares conjugados que tienen la misma parte real y la misma parte imaginaria pero con los dos signos, positivo y negativo.

Regla No 5.- Los ángulos que forman las asíntotas con el eje real se pueden calcular con la siguiente fórmula:

$$\alpha = \frac{n180^\circ}{Z - P} \quad \text{para } n = \pm 1, \pm 3, \dots \quad (8-9)$$

Las gráficas del lugar de las raíces que terminan en el infinito siempre lo hacen tendiendo asintóticamente con líneas rectas que forman un cierto ángulo con respecto al eje real. Es importante conocer estos ángulos de las asíntotas porque ello nos ayuda a definir con más precisión la apariencia general de la gráfica. Los ángulos de las asíntotas con el eje real se pueden obtener aplicando la condición angular.

Supongamos que se tiene un sistema de control con los polos y cero que se representan en la fig. 8-10. Para valores grandes de "s" o sea cuando $s \rightarrow \infty$, las líneas inclinadas representan las asíntotas de la gráfica, son paralelas y forman un ángulo α con el eje real. La condición angular de la ecuación 8-3 se puede expresar en la siguiente forma:

$$\Sigma\theta_z - \Sigma\theta_p = n180^\circ \quad \text{para } n = \pm 1, \pm 3, \dots \quad (8-10)$$

donde $\Sigma\theta_z$ es la sumatoria de los ángulos de los ceros y $\Sigma\theta_p$ es la sumatoria de los ángulos de los polos. Por lo que aplicando la fórmula 8-10 al diagrama de la fig 8-10, tenemos:

$$Z\alpha - P\alpha = n180^\circ$$

donde Z es el número de ceros y P es el número de polos. Despejando α de la ecuación anterior se tiene finalmente que

$$\alpha = \frac{n180^\circ}{Z - P} \quad \text{para } n = \pm 1, \pm 3, \dots$$

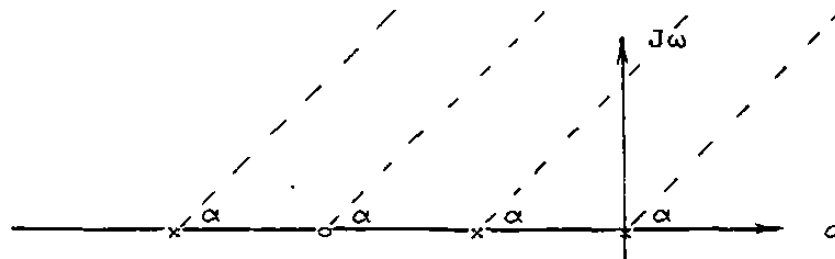


Fig. 8-10. Angulo de Asíntotas

Con el fin de aplicar la regla No 5, se calcularán enseguida los ángulos de las asíntotas para la función de transferencia con dos polos que se analizó en la sección 8-3-2 y cuyo valor es:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(s + 1)(s + 3)}$$

aplicando la regla 5, (ecuación 8-9), el ángulo α para $n = \pm 1$ es:

$$\alpha = \frac{\pm 180^\circ}{0 - 2} = \pm 90^\circ$$

cuyo resultado concuerda con la gráfica dada en la figura 8-7. Se le pueden dar más valores a "n", por ejemplo $\pm 3, \pm 5$ etc, pero el ángulo α repetiría nuevamente su mismo valor porque solo hay una línea asíntota. Cuando haya más de una asíntota se requerirá por lo tanto darle varios valores a "n", hasta que el ángulo α se repita.

Regla No 6 .- El punto en el cual principian las asíntotas se le llama "centroide". El centroide está ubicado en el eje real en el punto

$$\sigma = \frac{\Sigma P - \Sigma Z}{P - Z} \quad (8-11)$$

donde ΣP = Sumatoria de todos los Polos
 ΣZ = Sumatoria de todos los Ceros
 P = Número de Polos
 Z = Número de Ceros

Además de conocer los ángulos que las asíntotas forman con el eje real, es necesario conocer el punto en el cual principian las --- asíntotas. A este punto se le llama "centroide" y es lógico pensar que el punto esté colocado en el eje real por la simetría que tienen todas las gráficas del lugar de las raíces. Para demostrar la ecuación 8-11 consideremos que se trata de encontrar el centroide de la siguiente función de transferencia de lazo abierto

$$G(s)H(s) = \frac{K N(s)}{D(s)} = \frac{K(s^i + a_{i-1}s^{i-1} + \dots + a_1s + a_0)}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}$$

en la cual n es mayor que i . Dividiendo el numerador y el denominador entre el numerador $N(s)$ obtenemos

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^{n-i} + (b_{n-1} - a_{i-1})s^{n-i-1} + \dots + \text{residuo}}$$

ahora la función $G(s)H(s)$ ya no tiene ceros, solamente tiene polos más un residuo. Para valores grandes de s (bastante alejados a lo largo de las asíntotas), el valor del denominador se puede expresar en forma muy aproximada utilizando únicamente los dos primeros términos de $G(s)H(s)$, por lo que la función se puede expresar en la siguiente forma:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^{n-i-1} [s + (b_{n-1} - a_{i-1})]}$$

la ecuación anterior tiene $n-i-1$ polos en el origen y un polo en $s = -(b_{n-1} - a_{i-1})$. El centroide estará situado a la distancia

$$\sigma = \frac{-(b_{n-1} - a_{i-1})}{n - i - 1}$$

Basándonos en la solución de ecuaciones de orden "n" (Ver apéndice A) aplicaremos el principio que establece que la sumatoria de las raíces de una ecuación es igual al negativo del coeficiente del término cuyo grado es el inmediato inferior al grado más alto. Por lo tanto

$$\Sigma P = -b_{n-1} \quad \text{y} \quad -\Sigma Z = a_{i-1}$$

donde ΣP es la sumatoria de polos y ΣZ es la sumatoria de ceros de la función $G(s)H(s)$.

Por otro lado de la función general de lazo abierto $G(s)H(s)$ de la cual partimos para iniciar este análisis se puede ver que

$$n = P \quad e \quad 1 = Z$$

lo cual significa que "n", siendo el orden mayor del denominador nos indica el número de Polos e "i", siendo el orden mayor del numerador nos indica el número de Ceros de la función $G(s)H(s)$.

Substituyendo los valores de "n", "i", $-bn-1$, y $ai-1$ en la ecuación del centroide " σ " obtenemos finalmente la ecuación 8-11.

Se aplicará en seguida la ecuación 8-11 para calcular el centroide de la función de lazo abierto $G(s)H(s) = K/(s + 1)(s + 3)$.

La función $G(s)H(s)$ tiene dos polos, en $s = -1$ y en $s = -3$, por lo que $P = 2$ y $\Sigma P = -1-3=-4$. Además la función no tiene ceros, por lo que $N = 0$ y $\Sigma Z = 0$. Substituyendo estos datos en la ecuación 8-11

$$\sigma = \frac{-4 - 0}{2 - 0} = -2$$

En la fig. 8-7 se puede ver la gráfica de la función $G(s)H(s)$ y su centroide en el punto $s = -2$. Cabe hacer la aclaración que en este caso la posición del centroide coincide con el punto en donde la gráfica abandona el eje real, pero en general esto no sucede con todas las funciones de lazo abierto.

Regla No 7.- Un punto de escape es un punto en el cual dos lugares geométricos abandonan el eje real. El punto de escape se determina seleccionando un punto de prueba un poco fuera del eje real y aplicando el criterio angular.

El punto de escape siempre se localiza entre dos polos adyacentes, cuando hay lugar geométrico de las raíces entre ellos. Esto se debe a que las gráficas del lugar de las raíces principian siempre en los polos, avanzan la una hacia la otra hasta que se encuentran en el punto de escape y ahí abandonan el eje real en forma simétrica.

Como ya se mencionó la ubicación del punto de escape está basada en la aplicación del criterio angular. Debido a que cada caso es un poco diferente, se ilustrará el método general con un ejemplo específico. Se calculará la posición del centroide de la función de lazo abierto

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(s + 1)(s + 3)}$$

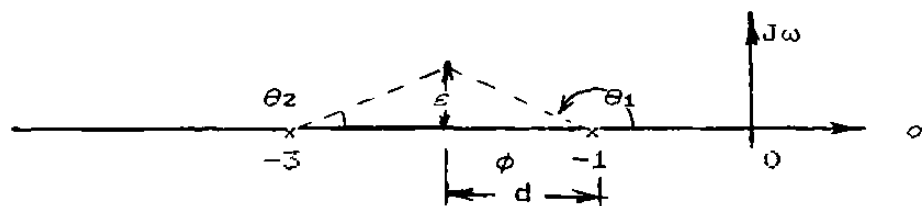


Fig. 8-11. Determinación del punto de escape.

Se empieza el análisis trazando los polos en el plano complejo como se indica en la fig. 8-11. El punto de escape debe estar entre -1 y -3. A una cierta distancia d a la izquierda de -1 se selecciona un punto de prueba que está un poco arriba del eje real a una distancia muy pequeña denominada ϵ . De la fig. 8-11 se pueden obtener las siguientes funciones:

$$\tan \phi = \frac{\epsilon}{d} \quad \text{y} \quad \tan \theta_2 = \frac{\epsilon}{2-d}$$

para ángulos pequeños (menos de 3°), la tangente de un ángulo se puede reemplazar por el ángulo mismo expresado en radianes. Por lo tanto,

$$\phi = \frac{\epsilon}{d} \quad \theta_1 = \pi - \frac{\epsilon}{d} \quad \text{y} \quad \theta_2 = \frac{\epsilon}{2-d}$$

Aplicando la ecuación 8-10 (Regla No 5) tenemos:

$$\Sigma \theta_z - \Sigma \theta_p = \pm \pi \text{ (radianes)}$$

$$0 - (\theta_1 + \theta_2) = \pm \pi$$

$$0 - \left[\pi - \frac{\epsilon}{d} + \frac{\epsilon}{2-d} \right] = \pm \pi$$

eliminando π de ambos lados de la ecuación tenemos:

$$\frac{\epsilon}{d} - \frac{\epsilon}{2-d} = 0 = \frac{1}{d} - \frac{1}{2-d}$$

$$\frac{(2-d) - d}{d(2-d)} = 0 = \frac{2-d-d}{2d-d^2}$$

$$\text{de donde} \quad 2 - 2d = 0 \quad \text{o bien} \quad d = 1$$

De tal manera que el punto de escape está en $s = -2$. En este punto la gráfica del lugar geométrico de las raíces abandona el eje real.

El mismo método se puede aplicar para casos más complicados en donde la función tenga mayor número de polos y de ceros.

Regla No 8.- El ángulo con el cual el lugar geométrico de las raíces abandona un polo complejo se llama "ángulo de partida". El ángulo de partida puede obtenerse aplicando el criterio angular. El procedimiento para obtener el ángulo de partida se ilustrará con un ejemplo. Supongamos que se trata de calcular el ángulo de partida de la siguiente función de transferencia de lazo abierto,

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1+j1)(s+1-j1)} \quad (8-12)$$

En la fig. 8-12 se grafican los tres polos de la ecuación anterior 8-12. Seleccionando un punto de prueba sobre el lugar geométrico muy cerca del polo complejo $-1 + j1$, los ángulos que forma el punto de prueba con respecto a todos los polos (en este caso no hay ceros) son de 135° con respecto al polo en el origen, de 90° con respecto al polo complejo $-1 - j1$ y de θ° con respecto al polo complejo $-1 + j1$.

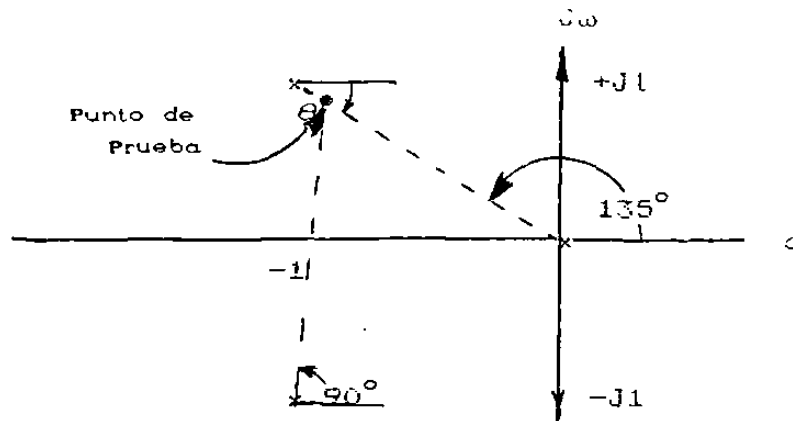


Fig. 8-12. Determinación del ángulo de partida.

Aplicando el criterio angular con los ángulos que se muestran en la fig. 8-12, tenemos:

$$\Sigma\theta_z - \Sigma\theta_p = 0 - (135 + 90 + \theta) = \pm 180^\circ$$

$$\text{de donde } \theta = -45^\circ$$

El estudiante podrá obtener el ángulo de partida desde el otro polo complejo $(-1-j1)$, aplicando el mismo procedimiento. El ángulo deberá ser de $+45^\circ$ por la simetría de la gráfica del lugar geométrico de las raíces.

Regla No 9.- Los puntos en los cuales la gráfica corta al eje imaginario y el valor de k en el cruce, se pueden obtener a partir de la ecuación característica del sistema, haciendo $s = j\omega$.

Para aplicar la regla No 9 consideremos la función de transferencia de ciclo abierto

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+3)(s+5)}$$

La ecuación característica del sistema es

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

$$1 + \frac{k}{s(s+3)(s+5)} = 0$$

$$\frac{s(s+3)(s+5) + k}{s(s+3)(s+5)} = 0$$

$$s(s+3)(s+5) + k = 0$$

$$(s^2 + 3s)(s+5) + k = 0$$

$$s^3 + 8s^2 + 15s + k = 0$$

su sustituyendo $s = j\omega$ en la ecuación característica tenemos:

$$j^3\omega^3 + 8j^2\omega^2 + 15j\omega + k = 0$$

pero $j^3 = -j$ y $j^2 = -1$ por lo que la ecuación se transforma en

$$-j\omega^3 - 8\omega^2 + 15j\omega + k = 0$$

ahora se planteará una ecuación para las partes reales y otra para las partes imaginarias de la ecuación compleja anterior.

Partes Reales	$-8\omega^2 + k = 0$	
Partes imaginarias	$-j\omega^3 + 15j\omega = 0$	o bien $-\omega^3 + 15\omega = 0$

De la ecuación de las partes imaginarias $\omega^3 = 15\omega$ $\omega = \sqrt{15}$

Substituyendo el valor de ω en la ecuación de las partes reales

$$k = 8\omega^2 = 8(15) = 120$$

Por lo tanto la gráfica del lugar geométrico de las raíces cruza el eje imaginario en $\omega = \pm \sqrt{15}$ y en estos puntos la ganancia $k = 120$. Así que para este sistema de control al tener una ganancia $k = 120$ se coloca al sistema de lazo cerrado en el umbral de la inestabilidad, por lo que cualquier aumento de la ganancia por arriba de 120 es inaceptable ya que de plano el sistema se convertiría en inestable.

Además de las reglas ya desarrolladas, una tabla de gráficas más comunes de los lugares geométricos de las raíces para varias funciones de transferencia de ciclo abierto es muy útil para tener aunque sea un bosquejo general de la gráfica para una $G(s)H(s)$ dada. En las figuras 8-13 y 8-14 se representan algunas gráficas.

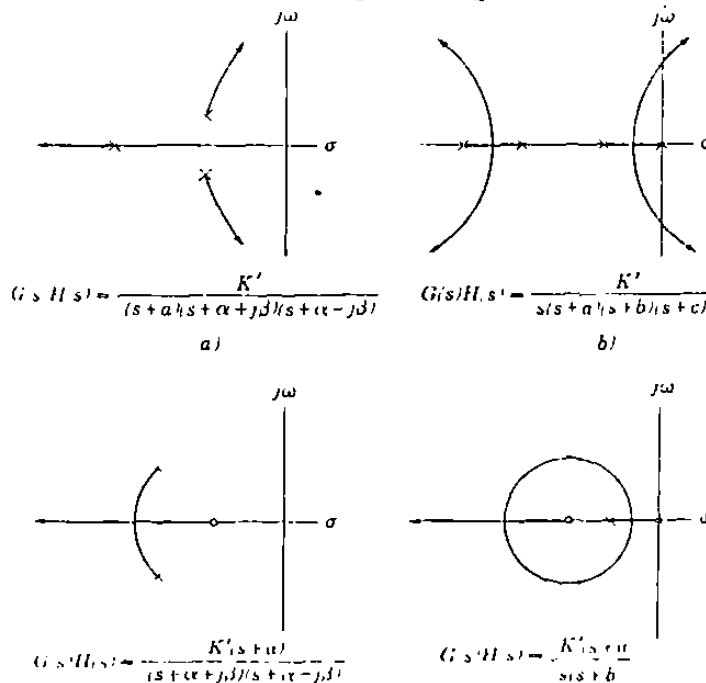


Fig. 8-13. Gráficas del Lugar Geométrico de las Raíces.

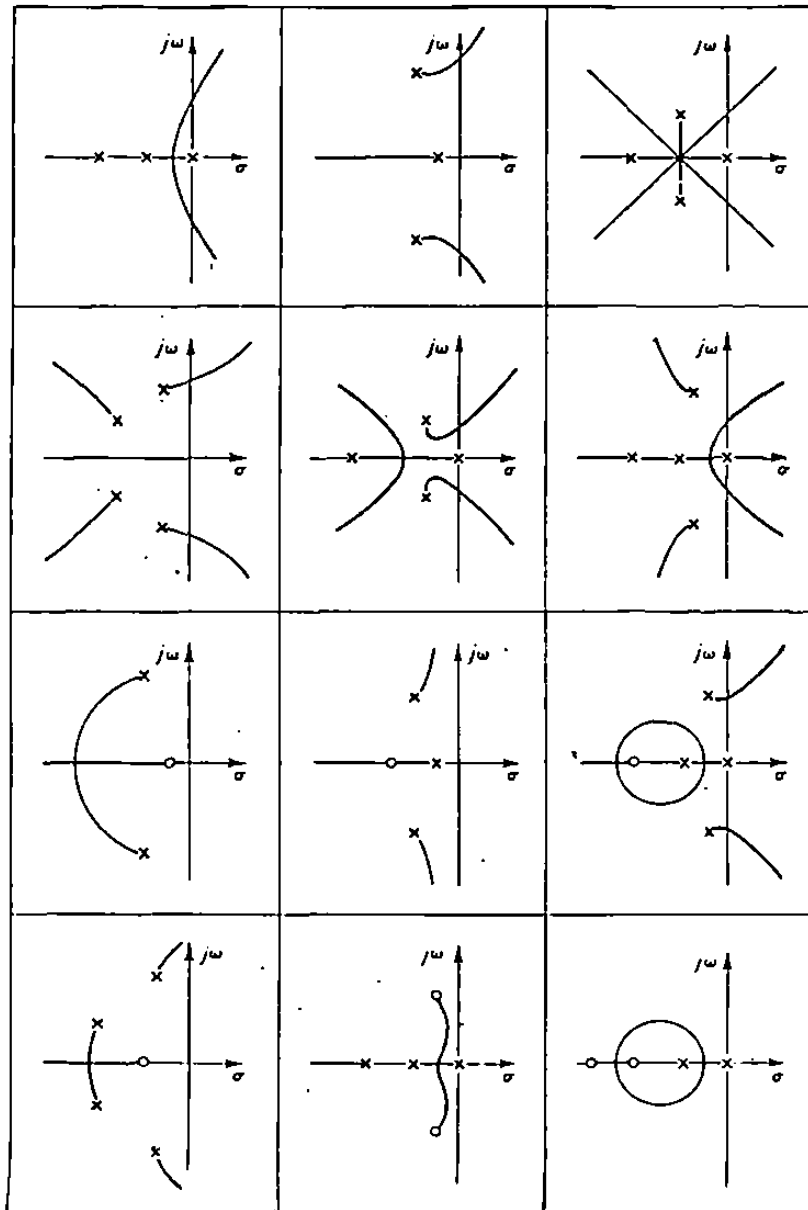


Fig. 8-14. Gráficas del Lugar Geométrico de las Raíces. (Cont.)

8-5.- Ejemplos Ilustrativos.

Ahora se estudiarán tres ejemplos para ilustrar el procedimiento completo de obtener las gráficas del lugar geométrico de las raíces.

Ejemplo 8-5-1.- Construir una gráfica del lugar geométrico de las raíces para la función de transferencia de ciclo abierto

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s^2 + 2s + 2)} = \frac{K}{s(s + 1 + j1)(s + 1 - j1)}$$

Establecer la escala para varios puntos de la gráfica y determinar para que valores de la ganancia K el sistema será inestable.

Solución: Aplicando las reglas ya presentadas podemos obtener la siguiente información: como hay tres polos habrá tres lugares geométricos o tres ramas que inician en 0, $-1 - j1$, $-1 + j1$ y las tres ramas terminarán en el infinito debido a que no hay ceros definidos.

Existe lugar geométrico a lo largo de todo el eje real negativo partiendo desde el polo ubicado en el origen.

Aplicando la ecuación 8-9 podemos calcular los ángulos de las asíntotas:

$$\alpha = \frac{n180^\circ}{Z - P}$$

$$\text{Si } n = \pm 1 \quad \alpha = \frac{\pm 180^\circ}{0 - 3} = \pm 60^\circ$$

$$\text{Si } n = \pm 3 \quad \alpha = \frac{\pm 540^\circ}{0 - 3} = \pm 180^\circ$$

$$\text{Si } n = \pm 5 \quad \alpha = \frac{\pm 900^\circ}{0 - 3} = \pm 300^\circ$$

debido a que el ángulo de $\pm 300^\circ$ es igual al ángulo de $\pm 60^\circ$ ya no se necesita darle más valores a "n" pues los demás ángulos se repetirían.

Con la fórmula 8-11 podemos calcular la posición del centroide, que es el punto en donde inician las asíntotas.

$$\sigma = \frac{\sum P - \sum Z}{P - Z} = \frac{-2 - 0}{3 - 0} = -\frac{2}{3}$$

En este caso no hay puntos de escape porque el lugar geométrico nunca abandona el eje real, ya que sólo hay un polo real.

Los ángulos de partida se pueden obtener aplicando la regla No 8 y son -45° y $+45^\circ$.

Aplicando la regla No 9 se calcula la ganancia K en el cruce con el eje $j\omega$ y el valor de ω . La ecuación característica de lazo cerrado del sistema es

$$1 + G(s)H(s) = 0 = 1 + \frac{K}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

$$\frac{s(s^2 + 2s + 2) + K}{s(s^2 + 2s + 2)} = 0$$

$$s(s^2 + 2s + 2) + K = 0$$

$$s^3 + 2s^2 + 2s + K = 0$$

haciendo $s = J\omega$ $J^3\omega^3 + 2J^2\omega^2 + 2J\omega + K = 0$

como $J^3 = -J$ y $J^2 = -1$ $-J\omega^3 - 2\omega^2 + 2J\omega + K = 0$

de la ecuación anterior planteamos dos ecuaciones, una con las partes reales y otra con las partes imaginarias.

Partes Reales $-2\omega^2 + K = 0$

Partes Imaginarias $-J\omega^3 + 2J\omega = 0$

de la ecuación de las partes imaginarias $\omega^3 = 2\omega$ $\omega^2 = 2$
 por lo que el valor de $\omega = \sqrt{2} = \pm 1.414$.

Substituyendo el valor de $\omega = \sqrt{2}$ en la ecuación de las partes reales se calcula el valor de la ganancia K.

$$K = 2\omega^2 = 2(2) = 4$$

En esta forma la gráfica cruza el eje $J\omega$ en los puntos $\pm J1.414$ y el valor de la ganancia es igual a cuatro.

Con toda la información anterior se puede trazar la fig.8-15 que es una gráfica preliminar del ejemplo 8-5-1. La gráfica completa se representa en la figura 8-16.

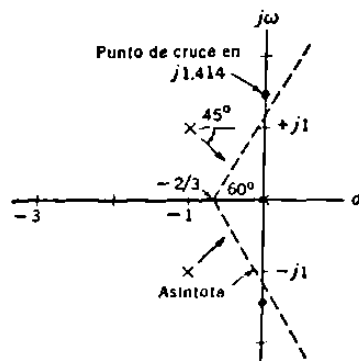


Fig. 8-15. Grafica preliminar para el ejemplo 8-5-1.

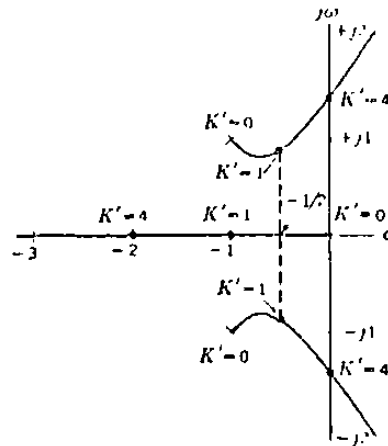


Fig. 8-16. Gráfica para $G(s)H(s) = \frac{K}{s(s^2 + 2s + 2)}$

Para trazar la gráfica completa se deben dar diferentes valores a la variable "s" en la ecuación característica, de donde se podrán calcular valores para ω y para K en forma semejante a como se calcularon los puntos de cruce con el eje imaginario $j\omega$.

Ejemplo 8-5-2.-Construir la gráfica del lugar geométrico de las raíces para la función de transferencia de ciclo abierto

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+8)}$$

y determinar los valores de K para los cuales el sistema será inestable.

Solución: Como hay tres polos en la función $G(s)H(s)$ habrá tres ramas en la gráfica. Las tres ramas inician en los polos 0, -1 y -8, y como no hay ceros definidos las tres ramas terminan en el infinito.

Existe el lugar geométrico sobre el eje real entre 0 y -1 y de -8 hasta menos infinito.

Los ángulos de las asíntotas son:

$$\text{Si } n = \pm 1 \quad \alpha = \frac{n180^\circ}{Z - P} = \frac{\pm 180^\circ}{0 - 3} = \pm 60^\circ$$

$$\text{Si } n = \pm 3 \quad \alpha = \frac{\pm 540^\circ}{0 - 3} = \pm 180^\circ$$

$$\text{Si } n = \pm 5 \quad \alpha = \frac{\pm 900^\circ}{0 - 3} = \pm 300^\circ$$

Debido a que el ángulo de $\pm 300^\circ$ es igual que el de $\pm 60^\circ$, el cálculo de los ángulos está ya completo.

Las asíntotas principian en el centroide que se puede calcular con la siguiente fórmula:

$$\sigma = \frac{\sum P - \sum Z}{P - Z} = \frac{-9 - 0}{3 - 0} = -3$$

Hay un punto de escape y se encuentra entre los polos 0 y -1. En la fig. 8-17 se representa un esquema en donde se selecciona un punto de prueba un poco fuera del eje real entre 0 y -1.

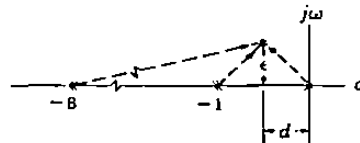


Fig. 8-17. Esquema para determinar el punto de escape.

Aplicando la condición angular al esquema de la fig. 8-17 tenemos:

$$\sum \theta_z - \sum \theta_p = \pm \pi$$

$$0 - \left[\pi - \frac{\epsilon}{d} + \frac{\epsilon}{1-d} + \frac{\epsilon}{8-d} \right] = \pm \pi$$

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{1-d} - \frac{1}{8-d} = 0$$

$$\frac{(1-d)(8-d) - d(8-d) - d(1-d)}{d(1-d)(8-d)} = 0$$

$$(1-d)(8-d) - d(8-d) - d(1-d) = 0$$

$$8 - 9d + d^2 - 8d + d^2 - d + d^2 = 0$$

$$3d^2 - 18d + 8 = 0$$

aplicando la fórmula general de segundo grado a la ecuación anterior

$$d = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 96}}{6} = 3 \pm 2.516$$

lo cual nos da dos resultados $d_1 = 5.516$ y $d_2 = 0.484$

De los dos resultados anteriores se descarta d_1 ya que el punto de escape debe estar entre 0 y -1. Por lo tanto el punto de escape está a una distancia $d = 0.484$ del origen a la izquierda.

Como no hay polos complejos, no habrá en este caso ángulos de partida.

Para calcular los puntos de cruce con el eje $j\omega$ se obtiene la ecuación característica

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

$$1 + \frac{K}{s(s+1)(s+8)} = 0$$

$$\frac{s(s+1)(s+8) + K}{s(s+1)(s+8)} = 0$$

$$s(s+1)(s+8) + K = 0$$

$$(s^2 + s)(s+8) + K = 0$$

$$s^3 + 8s^2 + s^2 + 8s + K = 0$$

$$s^3 + 9s^2 + 8s + K = 0$$

haciendo $s = j\omega$ $j^3\omega^3 + 9j^2\omega^2 + 8j\omega + K = 0$

$$-j\omega^3 - 9\omega^2 + 8j\omega + K = 0$$

la ecuación compleja anterior se divide en dos ecuaciones, una con las partes reales y otra con las partes imaginarias.

Partes Reales $-9\omega^2 + K = 0$

Partes Imaginarias $-j\omega^3 + 8j\omega = 0$

en la ecuación de las partes imaginarias se puede eliminar "j" por lo que la ecuación quedaría en la siguiente forma:

$$-\omega^3 + 8\omega = 0 \quad \text{de donde}$$

$$\omega^2 = 8 \quad \text{y} \quad \omega = \pm 2.83$$

substituyendo el valor de ω en la ecuación de las partes reales

$$K = 9\omega^2 = 9(8) = 72$$

Por lo tanto la gráfica corta al eje $J\omega$ en $\pm J2.83$ y en estos dos puntos la ganancia es $K = 72$. La gráfica completa se representa en la fig. 8-18. El sistema será inestable cuando K sea mayor que 72.

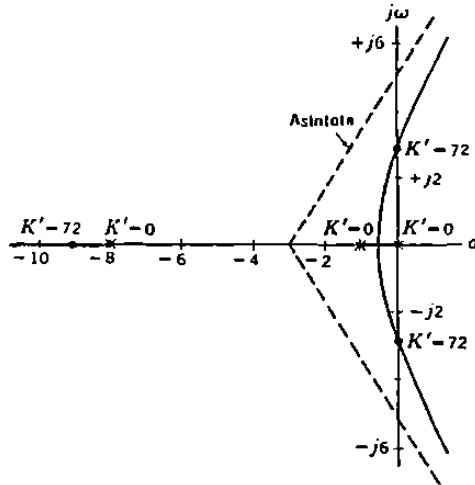


Fig. 8-18. Gráfica para $G(s)H(s) = k/s(s + 1)(s + 8)$

Ejemplo 8-5-3.-Construir la gráfica del lugar geométrico de las raíces para la función de transferencia de lazo abierto

$$G(s)H(s) = \frac{K(s + 2)}{s(s + 1)(s + 8)}$$

Como hay tres polos, habrá tres ramas en la gráfica. Las ramas inician en cada uno de los polos, 0, -1 y -8.

Hay un cero definido por lo que una rama terminará en el cero ubicado en -2 y las otras ramas terminarán en el infinito.

Existe gráfica del lugar geométrico de las raíces en el eje real entre 0 y -1 y entre -2 y -8.

Los ángulos de las asíntotas se pueden determinar aplicando la fórmula

$$\alpha = \frac{n180^\circ}{Z - P}$$

$$\text{Si } n = \pm 1 \quad \alpha = \frac{\pm 180^\circ}{1 - 3} = \pm 90^\circ$$

$$\text{Si } n = \pm 3 \quad \alpha = \frac{\pm 540^\circ}{1 - 3} = \pm 270^\circ \quad \text{que es igual a } \pm 90^\circ$$

Las asíntotas se obtienen aplicando la fórmula

$$\sigma = \frac{\sum P - \sum Z}{P - Z} = \frac{-9 - (-2)}{3 - 1} = \frac{-7}{2} = -3.5$$

El punto de escape se calcula con la ayuda del croquis de la figura 8-19. El punto de escape debe de estar entre los polos ubicados en 0 y -1.

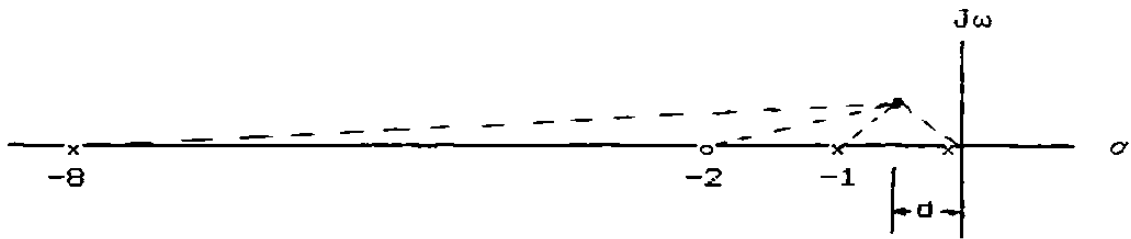


Fig. 8-19. Croquis para determinar el punto de escape

Aplicando el criterio angular a la fig. 8-19 tenemos:

$$\Sigma\theta_z - \Sigma\theta_p = \pm \pi$$

por lo tanto
$$\frac{1}{2-d} - \left[-\frac{1}{d} + \frac{1}{1-d} + \frac{1}{8-d} \right] = 0$$

$$\frac{1}{2-d} + \frac{1}{d} - \frac{1}{1-d} - \frac{1}{8-d} = 0$$

$$\frac{d(1-d)(8-d) + (2-d)(1-d)(8-d) - (2-d)(d)(8-d) - (2-d)(d)(1-d)}{(2-d)(d)(1-d)(8-d)} = 0$$

$$(d-d^2)(8-d) + (2-3d+d^2)(8-d) - (2d-d^2)(8-d) - (2d-d^2)(1-d) = 0$$

$$8d-9d^2+d^3 + 16-2d-24d+3d^2+8d^2-d^3 - (16d-2d^2-8d^2+d^3) - (2d-3d^2+d^3) = 0$$

$$-2d^3 + 15d^2 - 36d + 16 = 0$$

aplicando división sintética (ver apéndice A) o aplicando el método de prueba y error podemos obtener de la ecuación anterior un valor de la distancia $d = 0.57$.

Para calcular los puntos de cruce con el eje $J\omega$ de la gráfica nos basamos en la ecuación característica del sistema que es:

$$s^3 + 9s^2 + (8+K)s + 2K = 0$$

haciendo $s = J\omega$
$$J^3\omega^3 + 9J^2\omega^2 + (8+K)J\omega + 2K = 0$$

$$-J\omega^3 - 9\omega^2 + (8+K)J\omega + 2K = 0$$

Ecuación de Partes Reales
$$-9\omega^2 + 2K = 0$$

Ecuación de Partes Imaginarias
$$-\omega^3 + (8+K)\omega = 0$$

de la ecuación de las partes imaginarias
$$\omega^2 = (8+K)$$

substituyendo en la ecuación de partes reales
$$-9(8+K) + 2K = 0$$

por lo tanto
$$-72 - 9K + 2K = 0 \quad \text{o bien} \quad K = -\frac{72}{7}$$

El valor negativo de K no es un valor normal ya que la ganancia K siempre debe ser positiva, por lo que el resultado obtenido nos indica que no hay cruce de la gráfica con el eje $J\omega$.

La gráfica completa se representa en la fig. 8-20. Para obtener la misma se requiere dar valores a "s" en la ecuación característica para obtener los valores $\pm J\omega$ y los valores de la ganancia K .

Al observar la gráfica completa se puede asegurar que el sistema siempre será estable ya que la gráfica se desarrolla a la izquierda del eje $J\omega$.

Es importante hacer notar que el ejemplo 8-5-2 es igual al 8-5-3 con la única diferencia que se ha agregado en este último un cero en $s=-2$ para mejorar el comportamiento del sistema. Una comparación de las dos gráficas de las figuras 8-20 y 8-18 nos indica el beneficio obtenido; el efecto del cero ha sido alejar la gráfica del eje imaginario y lo más importante alejarlo de la inestabilidad.

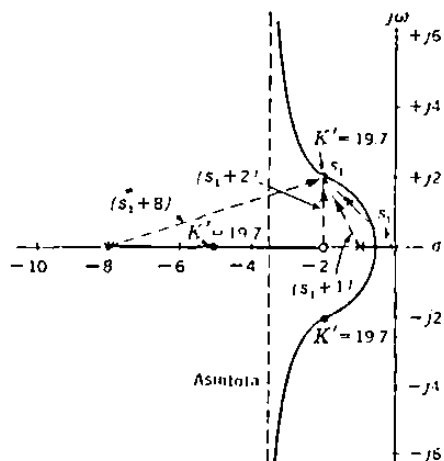


Fig. 8-20. Gráfica para $G(s)H(s) = K(s + 2)/s(s + 1)(s + 8)$

8-6.- Aplicaciones de la Gráfica del Lugar de las Raíces.

Hasta ahora hemos estudiado como se puede graficar el Lugar Geométrico de las Raíces en el plano complejo. Esta gráfica contiene mucha información importante que nos puede ayudar en el análisis y diseño de un sistema de control.

A continuación se verá la utilidad de la gráfica para establecer la ganancia del sistema a fin de obtener las características deseadas en la respuesta del sistema. Es posible también que se desee mantener las constantes de tiempo del sistema en valores pequeños para tener una respuesta rápida o bien mantener la relación de amortiguamiento arriba de cierto valor para que el sistema no dure oscilando mucho tiempo.

En forma general para un sistema de control de lazo cerrado, la función de transferencia se puede expresar en la siguiente forma:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s + r_1)(s + r_2)\dots(s + r_n)}$$

donde $D(s)$ representa la ecuación característica factorizada y $-r_1, -r_2, \dots, -r_n$ son las raíces de la ecuación característica y además polos de lazo cerrado del sistema que pueden ser reales o complejos conjugados. Por lo tanto,

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{N(s)}{(s + a)(s + b + jg)(s + b - jg) \dots} \quad (8-13)$$

desarrollando en fracciones parciales la función de transferencia anterior, para calcular la transformada inversa, la respuesta en función del tiempo tendrá la siguiente forma

$$c(t) = C_1 e^{-at} + C_2 e^{-bt} \text{Sen}(gt + \phi) + \dots$$

substituyendo en la ecuación anterior las siguientes constantes;

$$a = \frac{1}{\tau_1} \quad \text{donde } \tau_1 \text{ es una constante de tiempo}$$

$$b = \frac{1}{\tau_2} \quad \text{donde } \tau_2 \text{ es otra constante de tiempo}$$

$$g = \omega_d \quad \omega_d \text{ es la frecuencia natural amortiguada}$$

$$c(t) = C_1 e^{-t/\tau_1} + C_2 e^{-t/\tau_2} \text{Sen}(\omega_d t + \phi) + \dots$$

haciendo $\frac{1}{\tau_2} = \zeta \omega_n$ donde ζ es la relación de amortiguamiento y ω_n es la frecuencia natural no amortiguada

$$\text{y } \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

la respuesta en función del tiempo la podemos escribir en la siguiente forma:

$$c(t) = C_1 e^{-t/\tau_1} + C_2 e^{-\zeta \omega_n t} \text{Sen}[\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \phi] + \dots$$

de tal manera que la ecuación 8-13 se puede expresar como sigue

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{N(s)}{(s + 1/\tau_1)(s + 1/\tau_2 + j\omega_d)(s + 1/\tau_2 - j\omega_d)\dots} \quad (8-14)$$

o bien como

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{N(s)}{[s + 1/\tau_1][s + \zeta \omega_n + j\omega_n(1 - \zeta^2)^{1/2}][s + \zeta \omega_n - j\omega_n(1 - \zeta^2)^{1/2}]} \quad (8-15)$$

Comparando las ecuaciones 8-14 y 8-15 con la ecuación 8-13 se puede ver que las letras "a" y "b" que son cantidades reales representan rectas paralelas al eje $j\omega$. Substituyendo "a" y "b" por $1/\tau$ y $\zeta\omega_n$ tambien éstos últimos términos representan rectas paralelas al eje $j\omega$. De la misma forma se puede ver que "g" y ω_d representan cantidades imaginarias y por lo tanto rectas paralelas al eje real. En la fig. 8-21 se representan dos líneas paralelas a los ejes real e imaginario.

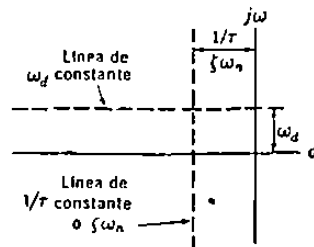


Fig. 8-21. Rectas paralelas a los ejes del plano complejo.

Si $\zeta\omega_n$ es una cantidad real y $\omega_d = \omega_n(1 - \zeta^2)^{1/2}$ es la parte imaginaria de un número complejo, la magnitud del número complejo se obtiene calculando la hipotenusa de un triángulo rectángulo, aplicando el teorema de Pitágoras.

$$\begin{aligned} \text{Hipotenusa} &= \sqrt{(\zeta\omega_n)^2 + [\omega_n(1 - \zeta^2)^{1/2}]^2} \\ &= \sqrt{\zeta^2\omega_n^2 + \omega_n^2 - \omega_n^2\zeta^2} = \sqrt{\omega_n^2} = \omega_n \end{aligned}$$

En la fig. 8-22 se representan las relaciones gráficas anteriores. Además si se calcula el Coseno del ángulo β tenemos:

$$\cos \beta = \frac{\zeta\omega_n}{\omega_n} = \zeta \tag{8-16}$$

La ecuación anterior 8-16 se puede usar para determinar rectas inclinadas con ζ constante. En la misma figura 8-22 se puede ver que los círculos con centro en el origen son círculos de ω_n constante.

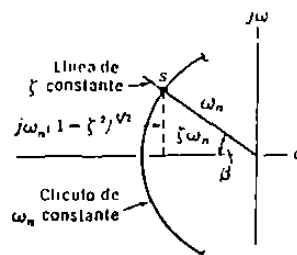


Fig. 8-22. Relaciones Gráficas sobre el Plano "s".

La aplicación de todas estas relaciones gráficas se ilustra en la fig. 8-23. Las raíces de la ecuación característica deben encontrarse dentro del área sombreada si las condiciones son

$$\begin{aligned} \tau &\leq 0.5 \text{ seg.} & (\sigma &= -1/0.5 = -2) \\ \omega_d &\leq 6 \text{ radianes/seg} & & \\ \zeta &\geq 0.71 & (\beta &= \text{Cos}^{-1}0.71 = 45^\circ) \end{aligned}$$

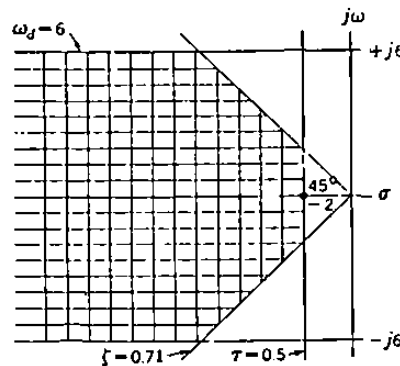


Fig. 8-23. Uso de las relaciones gráficas.

8-7.- Como establecer la Ganancia K de un Sistema de Control.

Los sistemas de control tienen que cumplir con ciertas especificaciones de diseño, por ejemplo una constante de tiempo máxima (para que el sistema no sea tan lento) o una relación mínima de amortiguamiento (para que el sistema no sea muy oscilatorio). Para cumplir con estas especificaciones, la ganancia k debe estar abajo de un valor máximo, ya que si se supera este valor, el sistema no cumplirá con las especificaciones señaladas.

El procedimiento para establecer el valor de la ganancia se ilustrará con el sistema de control representado en la fig. 8-24. Se calculará un valor para la ganancia k_1 , de tal manera que la constante de tiempo máxima (τ) sea de 1 seg. y la relación de amortiguamiento (ζ) tenga un valor mínimo de 0.5.

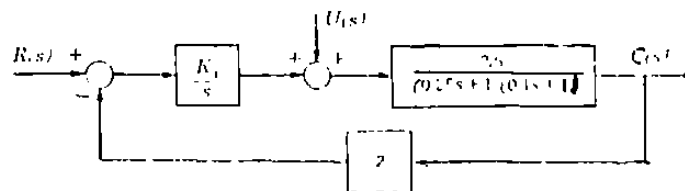


Fig. 8-24. Diagrama de Bloques del Sistema.

La función de transferencia de lazo abierto para el sistema de control de la fig. 8-24 es:

$$G(s)H(s) = \frac{200k_t}{s(0.25s + 1)(0.1s + 1)}$$

multiplicando por 4 y por 10 tanto el numerador como el denominador para eliminar términos fraccionarios, la función $G(s)H(s)$ no se altera y se transforma como sigue

$$G(s)H(s) = \frac{200K_t}{s(s + 4)(s + 10)} = \frac{K'}{s(s + 4)(s + 10)}$$

donde $K' = 200K_t$

En la fig. 8-25 se representa la gráfica del lugar geométrico de las raíces para la función $G(s)H(s)$ que se está analizando. Se puede ver que la gráfica es muy semejante a la que se obtuvo en el ejemplo 8-5-2. Sobre esta gráfica del lugar de las raíces se traza una recta paralela al eje $J\omega$ en -1 . La línea en -1 representa la recta $1/\tau = 1$, o bien $\tau = 1$.

Por otro lado basándonos en la ecuación 8-16, el $\cos\beta = \zeta = 0.5$, de donde $\beta = 60^\circ$. Se trazan también en la gráfica dos líneas punteadas con un ángulo $\beta = 60^\circ$, las cuales nos limitan el área a un valor mínimo de $\zeta = 0.5$.

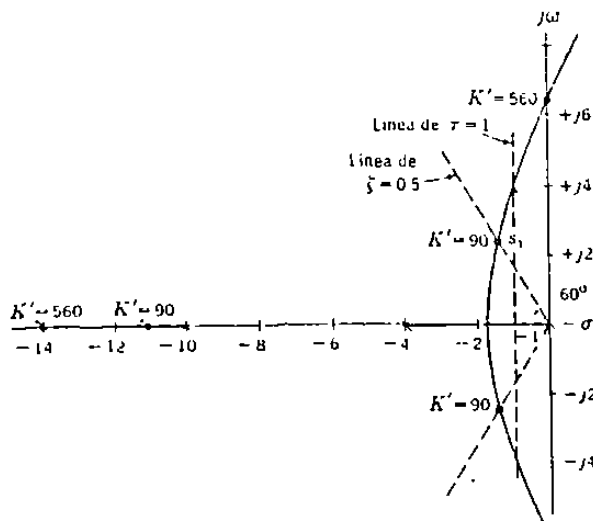


Fig. 8-25. Grafica para $G(s)H(s) = K' / s(s + 4)(s + 10)$.

Se puede ver en la gráfica que la máxima ganancia permitida para el sistema está limitada por la condición impuesta a la relación de amortiguamiento $\zeta = 0.5$. El punto s_1 es el cruce del lugar de las raíces con la línea a un ángulo de 60° y representa el punto máximo de operación a fin de que el sistema pueda cumplir con las especificaciones establecidas.

En seguida se determinará el valor de la ganancia K' basándonos en la condición de magnitud. De la función de transferencia de lazo abierto $G(s)H(s)$ se puede obtener el valor de K'

$$K' = s(s + 4)(s + 10) = s_1(s_1 + 4)(s_1 + 10)$$

La magnitud de s_1 es la distancia del origen al punto s_1 y se debe obtener midiendo en la gráfica. Dibujando a escala la gráfica la distancia s_1 es de 2.85. La magnitud $(s_1 + 4)$ es la distancia del polo en -4 hasta el punto s_1 , de la gráfica se obtiene una magnitud de 3.55. De la misma forma en la gráfica se obtiene una magnitud de 8.90 para la distancia entre el polo en -10 y el punto s_1 . Substituyendo los tres valores en la ecuación anterior se puede calcular el valor de K'

$$K' = 2.85(3.55)(8.90) = 90$$

como $K' = 200K_i$, entonces $K_i = K'/200 = 90/200 = 0.45$.

Cuando $K_i = 0.45$ ($K' = 90$) las raíces de la ecuación se pueden obtener de la gráfica y son -11.1 y $(-1.45 \pm j2.47)$. También de la gráfica se puede ver que para la posición del punto s_1 , la constante de tiempo máxima es de $1/1.45 = 0.69$ seg. (1.45 es la distancia del punto s_1 sobre el eje real) y la frecuencia natural amortiguada ω_d es igual a 2.47 radianes/seg. (2.47 es la distancia de s_1 sobre el eje imaginario $j\omega$).

8-8.- Cálculo de la Respuesta Transitoria de un Sistema.

También la grafica del lugar geométrico de las raíces se puede utilizar para determinar la respuesta transitoria de un sistema de control.

Para ilustrar el método se considerará el cálculo de la respuesta del sistema de control representado en la fig. 8-24. Como se determinó previamente el valor de $K_i = 0.45$ y se supondrá una perturbación $U(s)$ igual a un escalón unitario. En la fig. 8-26 se representa un diagrama de bloques considerando a la señal de perturbación $U(s)$ como señal única de entrada.

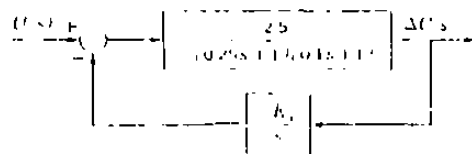


Fig. 8-26. Diagrama de Bloques con la señal de perturbación.

De la fig. 8-26, la función de transferencia directa $G(s)$ será

$$G(s) = \frac{2.5}{(0.25s + 1)(0.1s + 1)} = \frac{100}{(s + 4)(s + 10)}$$

mientras que $H(s) = \frac{2K_i}{s}$

$$G(s)H(s) = \frac{200 K_i}{s(s + 4)(s + 10)} = \frac{K'}{s(s + 4)(s + 10)}$$

por lo tanto el lugar geométrico de las raíces es el mismo de la fig. 8-25. Con $K_i = 0.45$ ($K' = 90$), la función de transferencia de lazo cerrado es:

$$\frac{\Delta C(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{\frac{100}{(s + 4)(s + 10)}}{1 + \frac{K'}{s(s + 4)(s + 10)}}$$

$$\frac{\Delta C(s)}{U(s)} = \frac{\frac{100}{(s + 4)(s + 10)}}{\frac{s(s + 4)(s + 10) + 90}{s(s + 4)(s + 10)}} = \frac{100s}{s(s + 4)(s + 10) + 90}$$

substituyendo en la función de transferencia anterior el valor de $U(s)$ igual a $1/s$ (transformada de Laplace del escalón unitario) y los valores ya conocidos de las raíces de la ecuación característica con $K' = 90$ de la fig 8-25.

$$\Delta C(s) = \frac{1}{s} \left[\frac{100s}{(s + 11.1)(s + 1.45 + j2.47)(s + 1.45 - j2.47)} \right]$$

$$\Delta C(s) = \frac{100}{(s + 11.1)(s + 1.45 + j2.47)(s + 1.45 - j2.47)}$$

desarrollando en fracciones parciales para calcular la transformada inversa tenemos:

$$\Delta C(s) = \frac{A}{(s + 11.1)} + \frac{B}{(s + 1.45 + j2.47)} + \frac{C}{(s + 1.45 - j2.47)}$$

$$\text{donde } A = \frac{100}{(s + 1.45 + j2.47)(s + 1.45 - j2.47)} \Bigg|_{s = -11.1}$$

$$B = \frac{100}{(s + 11.1)(s + 1.45 - j2.47)} \Bigg|_{s = -1.45 - j2.47}$$

$$C = \frac{100}{(s + 11.1)(s + 1.45 + j2.47)} \Bigg|_{s = -1.45 + j2.47}$$

Substituyendo los valores de "s" en A, B y C tenemos:

$$A = \frac{100}{(-11.1 + 1.45 + j2.47)(-11.1 + 1.45 - j2.47)}$$

$$A = \frac{100}{(-9.65 + j2.47)(-9.65 - j2.47)}$$

$$A = \frac{100}{(9.95/165.5^\circ)(9.95/-165.5^\circ)} = 1.01 \quad (8-17)$$

$$B = \frac{100}{(-1.45 - j 2.47 + 11.1)(-1.45 - j 2.47 + 1.45 - j 2.47)}$$

$$B = \frac{100}{(9.65 - j 2.47)(- j 4.94)}$$

$$B = \frac{100}{(9.95/-14.5^\circ)(4.94/-90^\circ)} = 2.03/104.5^\circ \quad (8-18)$$

$$C = \frac{100}{(-1.45 + j 2.47 + 11.1)(-1.45 + j 2.47 + 1.45 + j 2.47)}$$

$$C = \frac{100}{(9.65 + j 2.47)(j 4.94)}$$

$$C = \frac{100}{(9.95/14.5^\circ)(4.94/90^\circ)} = 2.03/-104.5^\circ \quad (8-19)$$

Los valores de A, B y C que han sido ya calculados en las ecuaciones anteriores (8-17), (8-18) y (8-19) también se pueden obtener en forma gráfica del lugar geométrico de las raíces como se ilustra en la fig. 8-27. Según se puede apreciar en la fig 8-27 las distancias entre los polos representan las cantidades vectoriales con las que se calcularon los valores de las constantes A, B y C.

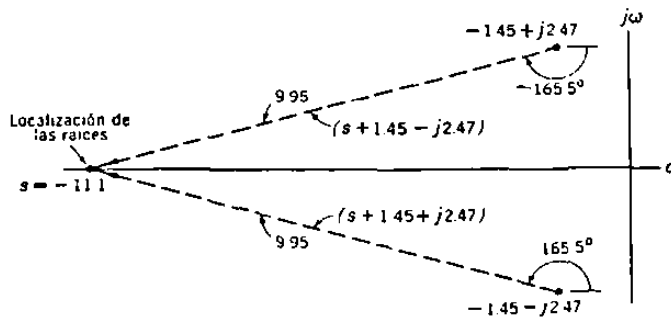


Fig. 8-27. Obtención Gráfica de las cantidades vectoriales.

Una vez que se conocen las constantes A, B y C se substituyen sus valores en la ecuación de $\Delta C(s)$ desarrollada en fracciones parciales de donde resulta la siguiente ecuación:

$$\Delta C(s) = \frac{1.01}{s + 11.1} + \frac{2.03 / 104.5^\circ}{s + 1.45 + j 2.47} + \frac{2.03 / -104.5^\circ}{s + 1.45 - j 2.47}$$

$$\Delta C(s) = \frac{1.01}{s + 11.1} + \frac{2.03 / 104.5^\circ (s + 1.45 - j 2.47) + 2.03 / -104.5^\circ (s + 1.45 + j 2.47)}{(s + 1.45 + j 2.47)(s + 1.45 - j 2.47)}$$

$$\Delta C(s) = \frac{1.01}{s + 11.1} + \frac{(-0.508 + j 1.96)(s + 1.45 - j 2.47) + (-0.508 - j 1.96)(s + 1.45 + j 2.47)}{(s + 1.45 + j 2.47)(s + 1.45 - j 2.47)}$$

$$\Delta C(s) = \frac{1.01}{s + 11.1} + \frac{-0.5s - 0.725 + j 1.23 + j 1.96s + j 2.84 - j^2 4.84}{[(s + 1.45) + j 2.47][(s + 1.45) - j 2.47]}$$

$$\Delta C(s) = \frac{1.01}{s + 11.1} + \frac{-s - 1.45 + 9.68}{(s + 1.45)^2 - j^2 (2.47)^2} = \frac{8.23 - s}{(s + 1.45)^2 + (2.47)^2}$$

$$\Delta C(s) = \frac{1.01}{s + 11.1} + \frac{-(s + 1.45)}{(s + 1.45)^2 + (2.47)^2} + \frac{(8.23 + 1.45) \left[\frac{2.47}{2.47} \right]}{(s + 1.45)^2 + (2.47)^2}$$

$$\Delta C(s) = \frac{1.01}{s + 11.1} - \frac{(s + 1.45)}{(s + 1.45)^2 + (2.47)^2} + 3.91 \frac{2.47}{(s + 1.45)^2 + (2.47)^2}$$

aplicando la transformada inversa de Laplace a la función compleja obtenemos:

$$\Delta C(t) = 1.01 e^{-11.1t} - e^{-1.45t} \cos 2.47t + 3.91 e^{-1.45t} \text{Sen } 2.47t$$

8-9. Conclusiones.

El método del lugar geométrico de las raíces para el análisis de los sistemas de control y su diseño es una herramienta muy útil como se ha demostrado en este capítulo. No solamente se puede establecer la ganancia de un sistema para las características deseadas de respuesta, sino que también se puede obtener información sobre la respuesta transitoria del mismo. Después de tener cierta experiencia con el método, el ingeniero de control puede predecir y evaluar rápidamente los efectos de posibles cambios en los parámetros del sistema, incluyendo la adición de otros elementos en el sistema, inspeccionando para ello las gráficas resultantes al variar las configuraciones de polos y ceros. Por lo anterior el método del lugar de las raíces es un instrumento de mucho valor para el ingeniero dedicado al estudio de los sistemas de control.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Construir las gráficas del lugar geométrico de las raíces para las siguientes funciones de transferencia de lazo abierto, estableciendo la escala para varios puntos de la gráfica.

a) $G(s)H(s) = \frac{K}{s}$

d) $G(s)H(s) = \frac{K}{s^2 + 2s + 5}$

b) $G(s)H(s) = \frac{K}{s^2}$

e) $G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+4)}$

c) $G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{(s+5)}$

f) $G(s)H(s) = \frac{K(s+3)}{(s+1)(s+6)}$

2.- Utilizando las reglas desarrolladas para graficar el lugar de las raíces, trazar los lugares de las siguientes funciones de transferencia. Establecer la escala para varios puntos de las gráficas.

a) $G(s)H(s) = \frac{K}{s(s^2 + 4s + 2)}$

b) $G(s)H(s) = \frac{K}{s+3, (s^2 + 2s + 2)}$

c) $G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+3)(s+4)}$

d) $G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s^2 + 4s + 8}$

3.- Para el sistema de control mostrado en la figura, determinar la ganancia k_p para tener una relación de amortiguamiento de 0.71.

