

CAPITULO IX

METODOS DE RESPUESTA A LA FRECUENCIA.

9-1.- Introducción.

En los primeros capítulos se presentaron los conceptos básicos y las herramientas matemáticas para analizar los sistemas de control retroalimentados. Luego se estudiaron los modelos matemáticos de algunos sistemas que sirvieron de base para encontrar sus funciones de transferencia. Se vió también que las funciones de transferencia se pueden representar en diagramas de bloques o gráficos de flujo de señal, lo cual nos ayuda a comprender mejor como están formados los sistemas con todas sus partes.

Posteriormente se estudiaron las acciones básicas de control en sus diferentes tipos, analizando lo que es la respuesta transitoria y el error que nos define la exactitud de un sistema de control.

En el capítulo VIII se ha presentado un método de análisis y diseño de sistemas de control denominado el Método del Lugar de las Raíces el cual predominantemente se utiliza en función del tiempo.

En este capítulo se presentan tres Métodos de Respuesta a la Frecuencia que conjuntamente con el Método del Lugar de las Raíces constituyen los cuatro métodos clásicos de análisis de los sistemas de control. Los tres métodos que se estudiarán en seguida son llamados:

- 1.- Diagramas de Bode
- 2.- Criterio de Nyquist
- 3.- Cartas de Nichols

Los métodos de Respuesta a la Frecuencia son totalmente diferentes al método del Lugar de las Raíces. El concepto de Respuesta a la Frecuencia significa obtener la respuesta en estado estable de un sistema de control al cual se le aplica como señal de entrada una señal senoidal de amplitud fija, pero una frecuencia que puede variar en cierto rango. El concepto de respuesta a la frecuencia se ilustra en la fig. 9-1, en donde se puede ver que a un sistema lineal se le aplica como entrada una señal senoidal $R_0 \text{Sen } \omega t$ y se obtiene una salida o respuesta $C_0 \text{Cos}(\omega t + \phi)$. La forma de las señales de entrada y salida se muestran en la fig. 9-1b.

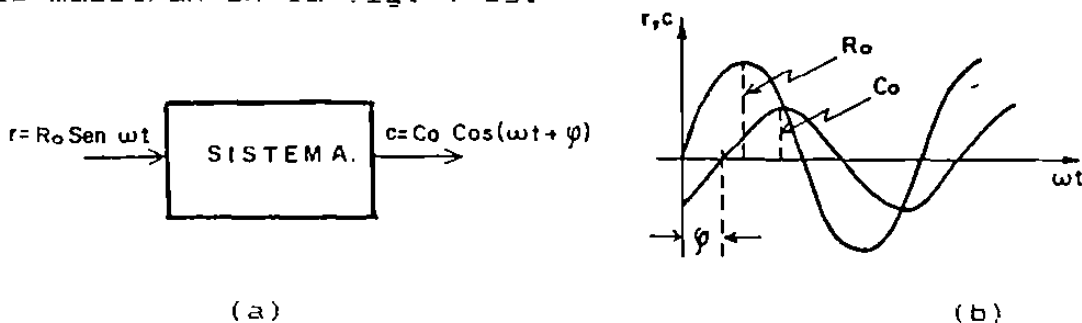


Fig. 9-1. Respuesta a la Frecuencia.

La respuesta a la frecuencia está caracterizada por dos cantidades la relación de amplitudes C_o/R_o de las señales de entrada y salida, y el defasamiento ϕ que existe entre las dos señales. Con los valores que se obtienen, para diferentes frecuencias, se pueden elaborar gráficas relativamente sencillas, cuya adecuada interpretación, nos permitirá no sólo conocer las características de un sistema, sino también modificar las mismas características cuando la respuesta que se obtiene no es la salida deseada.

La relación de las amplitudes C_o/R_o y el defasamiento ϕ , se pueden obtener en dos formas, calculados matemáticamente o medidos experimentalmente. En el primer caso, se substituye $s=j\omega$ en la función de transferencia y se calculan los valores de C_o/R_o y ϕ , para diferentes frecuencias, desde cero a infinito. Experimentalmente al sistema físico se le aplica una señal senoidal cuya frecuencia se va variando, midiendo para cada valor de frecuencia, la relación de amplitudes C_o/R_o y el defasamiento ϕ de las señales de entrada y de salida. El hecho de poder obtener experimentalmente los valores de C_o/R_o y ϕ es muy importante ya que algunas veces es difícil obtener el modelo matemático de un sistema en forma analítica.

El procedimiento para calcular analíticamente los datos de respuesta a la frecuencia es sencillo y se puede plantear en cuatro pasos como sigue:

Paso 1.- Se obtiene la función de transferencia para el sistema C_o/R_o , donde C_o y R_o son las transformadas de Laplace de las señales de salida y de entrada respectivamente.

Paso 2.- En la función de transferencia, se substituye $s=j\omega$. La justificación de esta substitución se verá un poco más adelante.

Paso 3.- Para varios valores de la frecuencia ω , se determina la relación de magnitudes C_o/R_o y el ángulo de defasamiento ϕ .

Paso 4.- Se grafican los resultados del paso 3 en coordenadas polares o rectangulares. Las gráficas obtenidas no solamente es una forma de representar los datos de la respuesta a la frecuencia, sino que también son la base para los métodos de análisis y diseño de los sistemas de control.

9-2.- Justificación de la substitución de s por $j\omega$.

En el paso 2 de la sección anterior se dijo que se debe substituir $s=j\omega$ en la función de transferencia. Esta substitución será justificada. El procedimiento será partiendo de una función de transferencia general, obtener la respuesta en estado estable a una señal de entrada senoidal en función de la transformada de Laplace, y después substituir directamente $s=j\omega$. Si las respuestas son idénticas, la substitución será justificada ya que no altera la función de transferencia original.

En general la ecuación diferencial para un sistema de control lineal se puede expresar en la siguiente forma:

$$a_n \frac{d^n c}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dc}{dt} + a_0 c = b_m \frac{d^m r}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dr}{dt} + b_0 r$$

Transformando por Laplace la ecuación diferencial anterior,

$$a_n s^n C(s) + a_{n-1} s^{n-1} C(s) + \dots + a_1 s C(s) + a_0 C(s) =$$

$$b_m s^m R(s) + b_{m-1} s^{m-1} R(s) + \dots + b_1 s R(s) + b_0 R(s)$$

sacando como factor común $C(s)$ y $R(s)$ se tiene:

$$C(s) [a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0] = R(s) [b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0]$$

de donde se puede obtener la función de transferencia $C(s)/R(s)$

$$F(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (9-1)$$

Siendo la entrada y la salida del sistema señales senoidales, se pueden representar en forma exponencial aplicando la fórmula de Euler como:

$$r = R_o e^{j\omega t} \quad \text{y} \quad c = C_o e^{j(\omega t + \phi)}$$

donde ϕ es el ángulo de defasamiento entre la señal de entrada y la salida. Substituyendo "r" y "c" en la ecuación diferencial general, se tiene:

$$\begin{aligned} & a_n \frac{d^n}{dt^n} [C_o e^{j(\omega t + \phi)}] + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} [C_o e^{j(\omega t + \phi)}] + \dots + a_1 \frac{d}{dt} [C_o e^{j(\omega t + \phi)}] + a_0 C_o e^{j(\omega t + \phi)} \\ & = b_m \frac{d^m}{dt^m} [R_o e^{j\omega t}] + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} [R_o e^{j\omega t}] + \dots + b_1 \frac{d}{dt} [R_o e^{j\omega t}] + b_0 R_o e^{j\omega t} \end{aligned}$$

derivando y sacando C_o y R_o como factor común se tiene

$$\begin{aligned} C_o e^{j(\omega t + \phi)} [a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0] \\ = R_o e^{j\omega t} [b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0] \end{aligned}$$

de donde se puede obtener la función de transferencia

$$F(s) = \frac{C_o e^{j(\omega t + \phi)}}{R_o e^{j\omega t}} = \frac{C_o}{R_o} e^{j\phi} = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0}$$

Comparando la ecuación anterior con la 9-1 se puede observar que el mismo resultado se obtiene substituyendo $s = j\omega$ en la ecuación 9-1, con lo cual queda plenamente justificada la substitución. Una vez que se substituye $s = j\omega$, la función de transferencia se denomina función de transferencia isócrona.

9-3.- Gráficas en Coordenadas Polares.

A continuación se estudiarán dos sistemas de control para los cuales la información de la respuesta a la frecuencia será presentada en coordenadas polares. Más adelante en la siguiente sección se trazarán las gráficas en coordenadas rectangulares.

En la fig. 9-2 se representa un sistema mecánico formado por un resorte y un amortiguador, donde K es la constante del resorte y " c " es el coeficiente de fricción viscosa del amortiguador. Se representa con " x " una fuerza que constituye la señal de entrada al sistema y con " y " un desplazamiento del punto entre el resorte y el amortiguador.

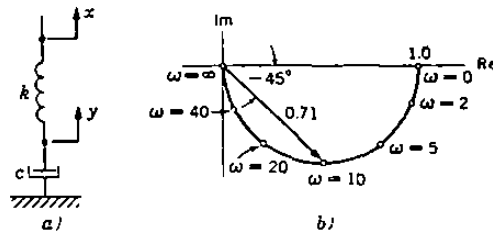


Fig. 9-2. Gráfica Polar para el sistema mostrado.

La ecuación diferencial que representa la operación del sistema es

$$K(x - y) = c \frac{dy}{dt}$$

transformando por Laplace la ecuación anterior tenemos:

$$KX(s) - KY(s) = CsY(s) \quad \text{de donde}$$

$$Y(s)[Cs + K] = KX(s)$$

o bien
$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{Cs + K} = \frac{K/K}{\frac{Cs + K}{K}} = \frac{1}{\tau s + 1}$$

donde τ es una constante de tiempo del sistema, $\tau=C/K$.
 Substituyendo $s = j\omega$ en la ecuación anterior y suponiendo que $\tau = 0.1$ seg.

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1}{1 + j0.1\omega} \quad (9-2)$$

En seguida se darán diferentes valores a " ω " para variar la frecuencia del sistema (recuerde que $\omega = 2\pi f$) y obtener puntos para trazar la gráfica polar. Por ejemplo si le damos el valor a $\omega = 10$

$$\frac{Y}{X} = \frac{1}{1 + j1} = \frac{1}{1.41 \angle 45^\circ} = 0.71 \angle -45^\circ$$

El estudiante le puede dar otros valores a ω , con los cuales se obtendrá la tabla 9-1. Los datos de la tabla se grafican en el plano complejo en la fig. 9-2, utilizando ω como parámetro.

TABLA 9-1

Datos de Respuesta a la Frecuencia.

ω (Rad/Seg)	$M(\omega)$	$\phi(\omega)$ (grados)
0	1.00	0.0
2	0.98	- 11.3
5	0.89	- 26.6
10	0.71	- 45.0
20	0.45	- 63.4
40	0.24	- 76.0
∞	0.00	- 90.0

Como segundo ejemplo se considerará el sistema mecánico mostrado en la fig. 9-3. denominado sistema masa-resorte-amortiguador.

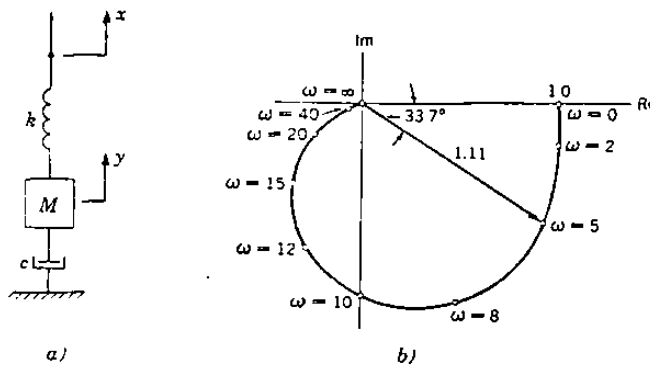


Fig. 9-3. Gráfica Polar para el sistema mostrado.

En la fig. 9-3, M es la masa, K es la constante del resorte y c es el coeficiente de fricción viscosa del amortiguador. La señal de entrada al sistema es una fuerza "x" y la salida es el desplazamiento de la masa "y". Basándonos en la segunda Ley de Newton y haciendo un diagrama de cuerpo libre de la masa, la ecuación de suma de fuerzas es

$$\Sigma F = Ma$$

$$K(x - y) - c \frac{dy}{dt} = M \frac{d^2 y}{dt^2}$$

o bien
$$M \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + Ky = Kx$$

Transformando por Laplace la ecuación diferencial anterior, se tiene:

$$M s^2 Y(s) + c s Y(s) + K Y(s) = K X(s)$$

$$Y(s) [M s^2 + c s + K] = K X(s)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{M s^2 + c s + K} = \frac{1}{\frac{M}{K} s^2 + \frac{c}{K} s + 1}$$

la función de transferencia anterior se puede expresar en la siguiente forma:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1} \quad (9-3)$$

donde ω_n = frecuencia natural no amortiguada del sistema

y ζ = relación de amortiguamiento

Suponiendo que $\omega = 10$ Radianes/Seg, $\zeta = 0.5$ y además substituyendo $s=j\omega$ en la ecuación 9-3, la función de transferencia se convierte en la siguiente ecuación:

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1}{0.01(j\omega)^2 + 0.1j\omega + 1} = \frac{1}{(1 - 0.01\omega^2) + j0.1\omega} \quad (9-4)$$

Ya teniendo la función de transferencia (9-4), el siguiente paso es darle valores diferentes a ω y obtener una tabla que nos indique la relación de magnitud y el ángulo de fase para los diferentes valores de ω . Para ilustrar el procedimiento se dará el valor de $\omega = 5$.

$$\frac{Y}{X} = \frac{1}{(1 - 0.25) + j0.5} = \frac{1}{0.9 \angle 33.7^\circ} = 1.11 \angle -33.7^\circ$$

El estudiante debe darle otros valores a ω con el fin de completar los valores que se representan en la tabla 9-2.

TABLA 9-2

Datos de Respuesta a la Frecuencia.		
ω (Rad/Seg)	$M(\omega)$	$\phi(\omega)$ (grados)
0	1.00	0.00
2	1.02	- 11.8
5	1.11	- 33.7
8	1.14	- 65.8
10	1.00	- 90.0
12	0.78	- 110.1
15	0.51	- 129.8
20	0.28	- 146.3
40	0.06	- 165.1
70	0.02	- 171.7
α	0.00	- 180.0

9-4.- Gráficas en Coordenadas Rectangulares.

La respuesta a la frecuencia también se puede graficar en coordenadas rectangulares. La relación de magnitud y el ángulo de fase se grafican en función de la frecuencia. La frecuencia se grafica sobre una escala logarítmica, con lo cual se logra un mayor rango de frecuencias en el análisis del sistema. La relación de magnitud se grafica en decibeles, lo cual es una representación logarítmica muy usada cuando se manejan dos niveles de señal. Si M es la relación de magnitud y "m" es la misma magnitud expresada en decibeles (db), se puede representar matemáticamente el valor de "m" en la siguiente forma:

$$m = 20 \log_{10} M. \quad (9-5)$$

por ejemplo: Si $M = 1$ $m = 20(0) = 0$ db
 Si $M = 10$ $m = 20(1) = 20$ db
 Si $M = 100$ $m = 20(2) = 40$ db
 si $M = 0.1$ $m = 20(9.0 - 10) = -20$ db
 si $M = 0.2$ $m = 20(9.301 - 10) = -13.98$ db

La escala de los ángulos de fase $\phi(\omega)$ es una escala lineal. Por lo tanto para graficar en coordenadas rectangulares se utiliza un papel especial semilogarítmico, con una escala lineal y la otra logarítmica.

Los datos contenidos en las tablas 9-1 y 9-2 que se obtuvieron para los sistemas de las figuras 9-2 y 9-3 se grafican ahora en coordenadas rectangulares en las figuras 9-4 y 9-5.

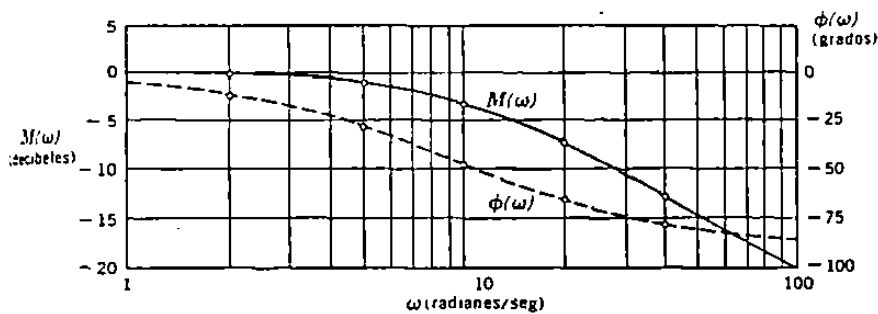


Fig. 9-4. Gráfica en coordenadas rectangulares para el sistema representado en la figura 9-2-a.

La única columna que cambia tanto de la Tabla 9-1 como de la Tabla 9-2 es la columna central que representa $M(\omega)$, la cual se substituye por los valores de "m" aplicando para ello la ecuación 9-5.

En la Fig. 9-6 se representan los esquemas de algunas funciones de transferencia comunes graficadas en coordenadas rectangulares.

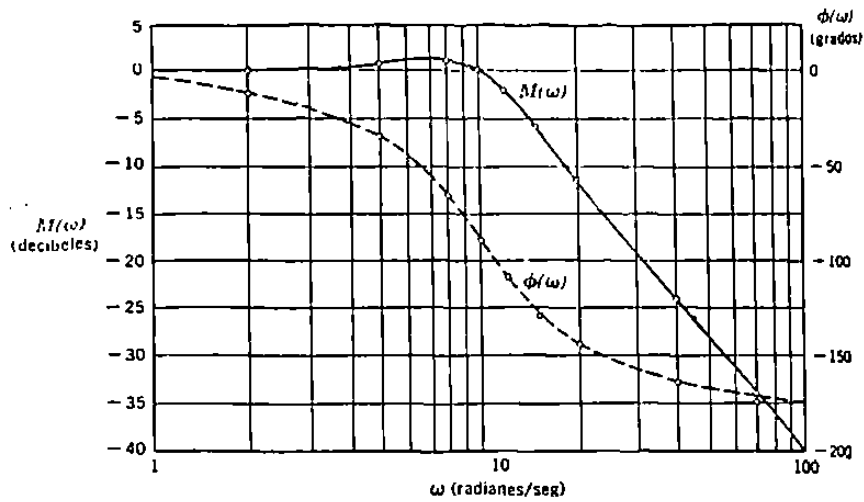


Fig. 9-5. Gráfica en coordenadas rectangulares para el sistema mostrado en la figura 9-3-a.

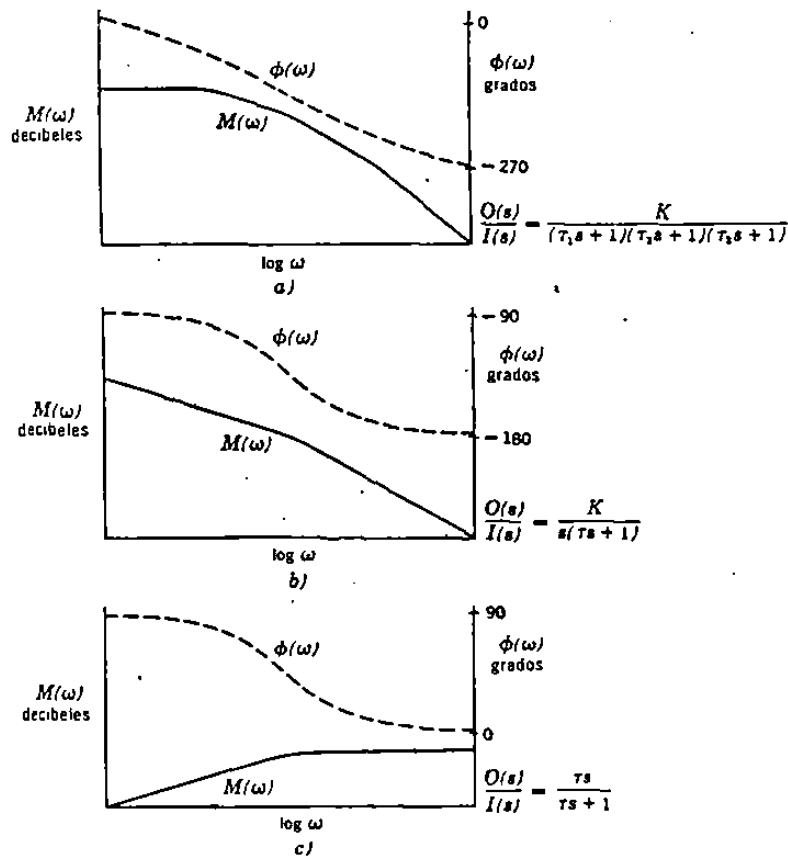


Fig. 9-6. Esquemas de gráficas rectangulares para algunas funciones de transferencia comunes.

9-5.- El punto de vista gráfico.

Con el proposito de comprender mejor lo que sucede con la respuesta a la frecuencia en un sistema de control, se estudiará a continuación un método gráfico que nos amplía nuestra visión al respecto. Este método tambien nos ayuda a introducirnos en el análisis gráfico que se utilizará ampliamente en las proximas secciones.

Supongamos que se tiene un sistema de control de primer orden cuya función de transferencia es :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s + r} \quad (9-6)$$

Si se desea analizar su respuesta a la frecuencia por el método gráfico, lo primero que se hace es trazar en un plano complejo el único polo que tiene en $s = -r$, como se indica en la fig. 9-7-a. En seguida se substituye $s = j\omega$ con lo que la ecuación 9-6 se convierte en:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{j\omega + r} \quad (9-7)$$

Si se le dán valores a " ω " se podrán obtener diferentes valores para $C(s)/R(s)$. Por ejemplo en la figura 9-7-b se le ha dado el valor de $\omega = \omega_1$, con lo que se tienen en la gráfica dos vectores, el vector $-r$ y el vector $j\omega_1$. Realizando la sustracción gráfica de estos dos vectores, la diferencia es:

$$j\omega_1 - (-r) = j\omega_1 + r = r + j\omega_1$$

En la figura 9-7-b se puede ver que:

$$\left. \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} \right|_{\omega=\omega_1} = \frac{K}{j\omega_1 + r} = \frac{K}{r + j\omega_1} = \frac{K}{A_1 \angle \theta_1} = \frac{K}{A_1} \angle -\theta_1$$

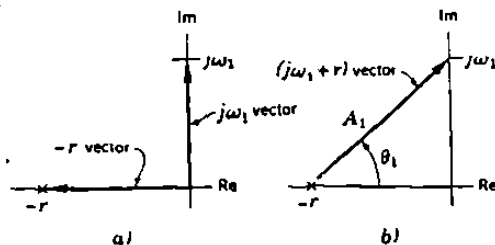


Fig. 9-7 El punto de vista gráfico.

Relaciones de magnitud y ángulos de fase para otros valores de la frecuencia " ω " se pueden obtener de manera semejante trazando vectores que van de $-r$ a otros valores de $j\omega$.

Después de darle valores diferentes a " ω ", se puede llegar a las siguientes conclusiones; con $\omega = 0$, la razón de magnitud es igual a 1 y el ángulo de fase es 0° . Cuando $\omega \rightarrow \infty$, la razón de magnitud es cero y el ángulo de fase es de 90° .

A continuación se analiza por el método semigráfico otra función de transferencia un poco mas complicada.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s + r_1)}{(s + r_2)(s + r_3)} \quad (9-8)$$

La función de transferencia anterior tiene un cero en $s = -r_1$ y dos polos en $s = -r_2$ y en $s = -r_3$. En la figura 9-8 se representa el cero con un pequeño círculo y los dos polos se consideran complejos y también se representan en la misma figura. Se trazan vectores desde el cero y cada uno de los polos al punto $s = j\omega_1$. Las magnitudes y los ángulos de cada vector también se indican en la figura. Aplicando cada vector a la ecuación 9-8, la función de transferencia se convierte a la siguiente forma:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{KA_1 \angle \theta_1}{(A_2 \angle \theta_2)(A_3 \angle \theta_3)} = \frac{KA_1}{A_2 A_3} \angle \theta_1 - \theta_2 - \theta_3$$

En la fig. 9-8 se puede ver que al ir variando el valor de " ω ", se van modificando los valores de los ángulos y de las magnitudes de cada vector, lo cual produce una variación lógica en la respuesta a la frecuencia del sistema de control.

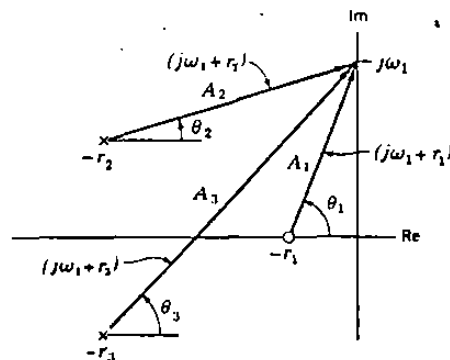


Fig. 9-8. El método gráfico con dos polos y un cero.

9-6.- Determinación experimental de la respuesta a la frecuencia.

Cuando no se conoce la función de transferencia del sistema de control, la respuesta a la frecuencia se puede obtener en forma experimental y a partir de la respuesta se puede obtener la función de transferencia. Desde luego los datos experimentales también se pueden usar para comprobar una función de transferencia que se haya obtenido en forma analítica.

La única limitación del método experimental consiste en que el sistema real debe de aceptar la aplicación de una señal de entrada senoidal y la salida o respuesta se debe observar también como otra señal senoidal , para poder establecer la comparación entre magnitudes y ángulos de defasamiento. Desafortunadamente en muchos casos esto no es sencillo, sobre todo cuando el sistema de control es de naturaleza mecánica. Por lo anterior el método experimental se facilita para sistemas eléctricos o electrónicos, en los cuales la aplicación de la señal de entrada se obtiene de un generador de señales senoidales y las curvas de entrada y salida se pueden trazar en un graficador electrónico o se pueden grabar en la pantalla de un osciloscopio de doble canal.

9-7 Diagramas de Bode.

Las gráficas de Bode se trazan en papel semilogarítmico. Una gráfica es de relación de magnitud contra frecuencia y la otra es de ángulo de defasamiento contra frecuencia, ambas gráficas en coordenadas rectangulares. Para trazar la frecuencia se utiliza una escala logarítmica y para el ángulo y la relación de magnitud las escalas son lineales. La relación de magnitudes se expresa en decibeles, aplicando como ya se vió anteriormente la fórmula 9-5.

Para trazar los diagramas de Bode de una función de transferencia que tiene basicamente términos constantes, polos y ceros, el procedimiento que se utiliza es el siguiente: se traza un diagrama independiente para cada constante, para cada polo y para cada cero. Una vez que se tienen las gráficas individuales, las cuales se obtienen con relativa sencillez, se obtiene la gráfica total, aprovechando el hecho de que los productos de magnitudes en decibeles o logaritmos se convierten en sumas y las divisiones en restas. De la misma forma se realizan las sumas y restas de ángulos de polos y de ceros de la función de transferencia. Lo anterior se puede expresar matemáticamente por la siguiente ecuación

$$\text{Si } F(s) = F_1(s)F_2(s)F_3(s)\dots\dots$$

entonces

$$F(\text{en dB}) = F_1(\text{en dB}) + F_2(\text{en dB}) + F_3(\text{en dB}) + \dots\dots$$

Por lo tanto para obtener el diagrama de Bode de una función de transferencia cualquiera $C(s)/R(s)$, sólo es necesario graficar en forma individual las amplitudes y corrimientos de fase de los diferentes tipos de términos que se pueden presentar en una función compleja y que son los siguientes:

- 1.- Cantidades Constantes.
- 2.- Polos y Ceros en el origen del plano complejo.
- 3.- Polos y Ceros en el eje real.
- 4.- Pares de Polos y Ceros complejos conjugados.

La curva en decibeles completa es entonces la suma de las curvas individuales y la curva definitiva de ángulo de defasamiento es la suma de las curvas individuales de corrimiento de fase.

9-7-1.-Gráficas de Cantidades Constantes.

Cuando una función de transferencia tiene una cantidad constante, la cual puede bien ser una ganancia K , tendrá una amplitud constante en decibeles igual a

$$20 \log_{10} k$$

y un ángulo de 0° . Si la constante es negativa $-k$, tendrá una amplitud en decibeles igual a

$$20 \log_{10} |k|$$

y un ángulo de 180° .

Por ejemplo si se desea trazar los diagramas de Bode de la función

$$F = 100$$

la amplitud en decibeles será $m = 20 \log_{10}(100) = 20 [2] = 40 \text{ dB}$
 y el ángulo de defasamiento es $\phi = 0^\circ$. En la fig. 9-9 se representan
 las dos gráficas en función de la frecuencia.

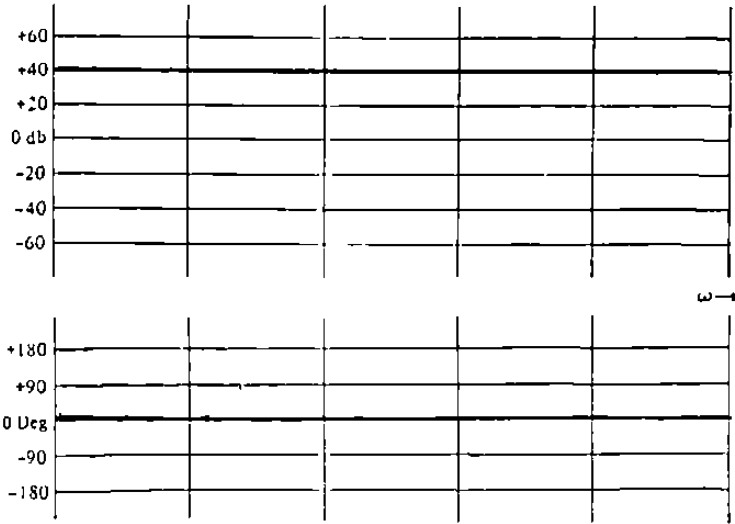


Fig. 9-9. Curva de respuesta a la frecuencia para $F = 100$

Si se trata de graficar los diagramas de Bode para la función

$$F = -\frac{1}{10}$$

la magnitud en decibeles será $m = 20 \log_{10}\left[\frac{1}{10}\right] = -20 \text{ dB}$
 y el ángulo de defasamiento es $\phi = 180^\circ$ o bien -180° . En la fig. 9-10
 se representan las dos gráficas de Bode.



Fig. 9-10. Respuesta a la frecuencia para $F = -1/10$

9-7-2.- Gráficas de Polos y Ceros en el origen.

Se analizará en primer lugar la función de transferencia más simple que se puede tener de este tipo

$$F(s) = s \quad \text{substituyendo } s = j\omega \quad F(j\omega) = j\omega$$

La magnitud para esta función compleja en decibeles será:

$$m = 20 \log_{10}[F(s)] = 20 \log_{10}[\omega] \text{ dB}$$

y el ángulo de defasamiento $\phi(\omega) = F(s=j\omega) = 90^\circ$

Para trazar la gráfica de magnitud se darán valores a la frecuencia ω . Solo se requiere dar dos o tres valores para obtener la gráfica por ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{si } \omega = 1 & \quad m = 20 \log_{10}[1] = 0 \text{ dB} \\ \text{si } \omega = 10 & \quad m = 20 \log_{10}[10] = 20 \text{ dB} \\ \text{si } \omega = 100 & \quad m = 20 \log_{10}[100] = 40 \text{ dB} \end{aligned}$$

En la fig. 9-11 se representan las gráficas para $F(s) = s$, y se puede observar que la pendiente de la gráfica de magnitud es de +20 dB por década.

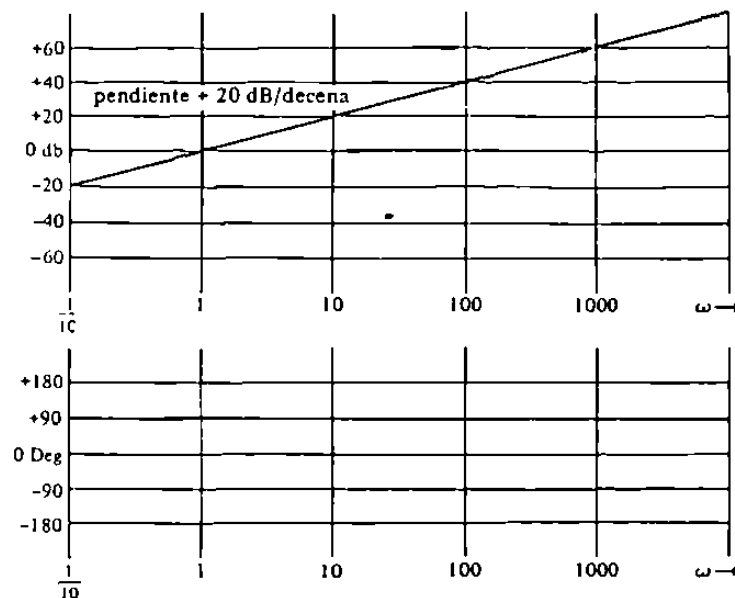


Fig. 9-11. Gráficas de respuesta a la frecuencia para $F(s) = s$

Las gráficas para $F(s) = s^2$ se pueden obtener como el doble de las gráficas $F(s) = s$, debido a que $s^2 = (s)(s)$ y en logaritmos los productos se convierten en sumas. El mismo procedimiento es válido para cualquier potencia de "s".

En la fig. 9-12 se representan las gráficas para $F(s) = s^2$. Se puede ver que la gráfica de magnitud tiene una pendiente de 40 dB por década (el doble de la gráfica anterior) y el ángulo es de 180° que también es el doble del ángulo de la gráfica 9-11.

9-7-2.- Gráficas de Polos y Ceros en el origen.

Se analizará en primer lugar la función de transferencia más simple que se puede tener de este tipo

$$F(s) = s \quad \text{substituyendo } s = j\omega \quad F(j\omega) = j\omega$$

La magnitud para esta función compleja en decibeles será:

$$m = 20 \log_{10}[F(s)] = 20 \log_{10}[\omega] \text{ dB}$$

y el ángulo de defasamiento $\phi(\omega) = F(s=j\omega) = 90^\circ$

Para trazar la gráfica de magnitud se darán valores a la frecuencia ω . Solo se requiere dar dos o tres valores para obtener la gráfica por ejemplo:

si $\omega = 1$	$m = 20 \log_{10}[1] = 0 \text{ dB}$
si $\omega = 10$	$m = 20 \log_{10}[10] = 20 \text{ dB}$
si $\omega = 100$	$m = 20 \log_{10}[100] = 40 \text{ dB}$

En la fig. 9-11 se representan las gráficas para $F(s) = s$, y se puede observar que la pendiente de la gráfica de magnitud es de +20 dB por década.

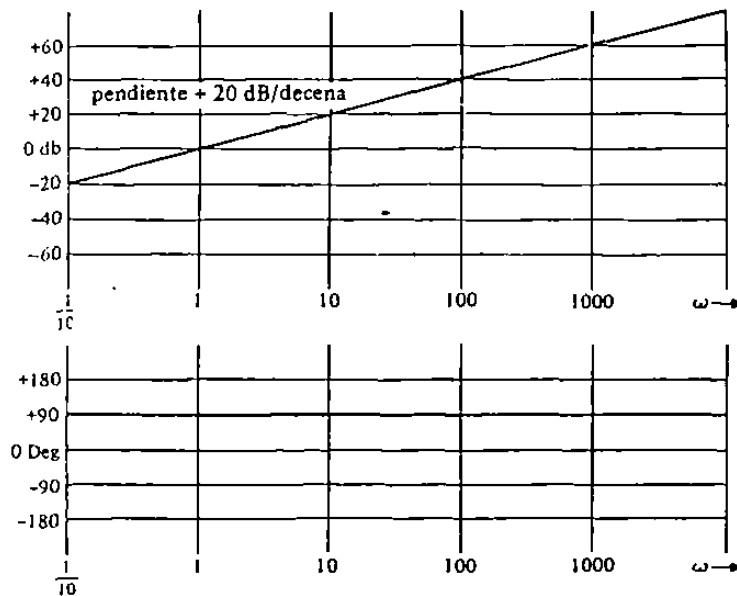


Fig. 9-11. Gráficas de respuesta a la frecuencia para $F(s) = s$

Las gráficas para $F(s) = s^2$ se pueden obtener como el doble de las gráficas $F(s) = s$, debido a que $s^2 = (s)(s)$ y en logaritmos los productos se convierten en sumas. El mismo procedimiento es válido para cualquier potencia de "s".

En la fig. 9-12 se representan las gráficas para $F(s) = s^2$. Se puede ver que la gráfica de magnitud tiene una pendiente de 40 dB por década (el doble de la gráfica anterior) y el ángulo es de 180° que también es el doble del ángulo de la grafica 9-11.

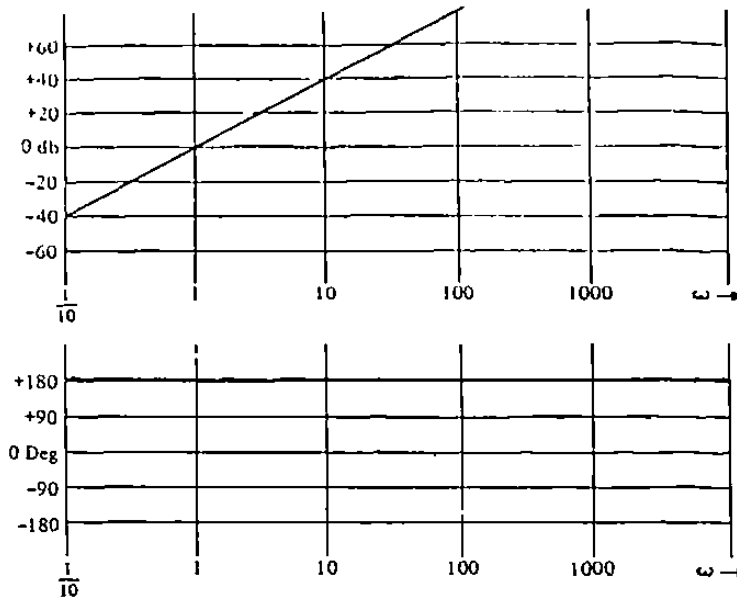


Fig. 9-12. Gráficas de respuesta a la frecuencia para $F(s) = s^2$

Las gráficas de respuesta a la frecuencia para la función compleja

$$F(s) = \frac{1}{s} = s^{-1}$$

se pueden obtener como las gráficas negativas de $F(s) = s$, tanto la magnitud en decibeles como el ángulo de defasamiento. En la fig. 9-13 se representan las dos gráficas para $F(s) = 1/s$.

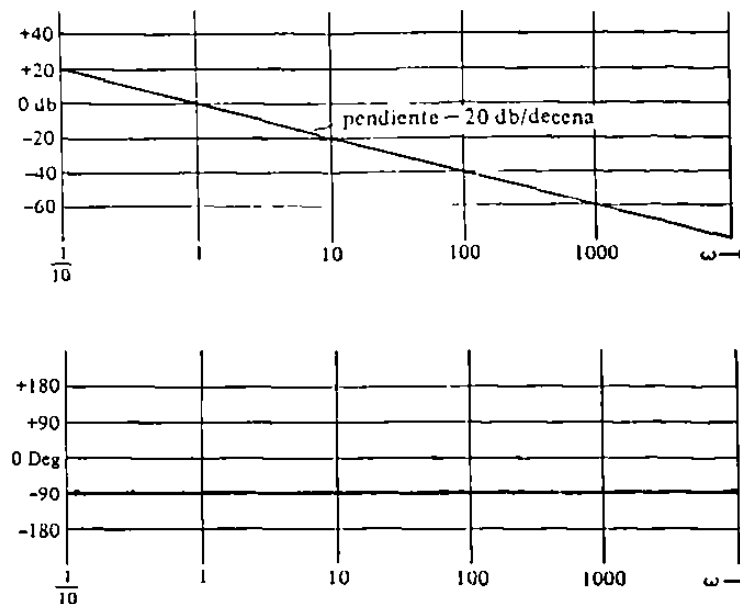


Fig. 9-13. Gráficas de respuesta a la frecuencia para $F(s) = 1/s$.

En la fig. 9-13 se ve que la pendiente de la gráfica de magnitud es de -20 dB/decada y el ángulo es de -90° , cuyos valores son los negativos de la fig. 9-11.

9-7-3.-Gráficas de polos y ceros en el eje real.

Como primer ejemplo de este tipo de función se analizará la siguiente función:

$$F(s) = \frac{s + a}{a}$$

la función anterior se puede expresar en la siguiente forma:

$$F(s) = \frac{s}{a} + 1 = 1 + \frac{s}{a}$$

substituyendo $s = j\omega$ se convierte en $F(j\omega) = 1 + j \frac{\omega}{a}$

Para obtener las gráficas de magnitud y ángulo se hará el análisis de la función primeramente cuando $\omega \ll a$. (a es una cantidad constante)

Si el valor de ω es mucho menor que " a ", (por lo menos diez veces menor) la cantidad imaginaria de la función compleja se puede despreciar por lo que

$$F(j\omega) = 1$$

La magnitud $m = 20 \log_{10}[F(j\omega)] = 20 \log_{10}[1] = 0 \text{ dB}$

El ángulo $\phi = \angle F(j\omega) = \angle 1 = 0^\circ$

Si ahora el valor de $\omega \gg a$ (por lo menos diez veces mayor ω que a) la cantidad real de la función compleja (o sea el 1) se puede despreciar sin incurrir en mucho error, por lo que

$$F(j\omega) = j \frac{\omega}{a}$$

La magnitud $m = 20 \log_{10}[F(j\omega)] = 20 \log_{10} \frac{\omega}{a} = 20[\log \omega - \log a]$

El ángulo $\phi = \angle F(j\omega) = \angle j\omega/a = 90^\circ$

Cuando $\omega = a$

La magnitud $m = 20 \log [F(j\omega)] = 20 \log [1 + j1] = 20 \log \sqrt{2}$
 $m = 20[0.1505] = 3.01 \text{ dB}$

El ángulo $\phi = \angle F(j\omega) = \angle 1 + j1 = 45^\circ$

Tanto las curvas reales como las aproximadas se presentan en la fig. 9-14. La curva de magnitud en decibeles se puede aproximar bastante a una recta a lo largo de 0 dB hasta $\omega = a$, punto llamado vértice de frecuencia o rodilla de la gráfica. Luego una recta inclinada hacia arriba cuando ω es mayor que " a " con una pendiente de +20 dB/decada de ω . Al utilizar la gráfica aproximada, el error máximo que se comete estará en el vértice de frecuencia ($\omega = a$), donde el valor real de la magnitud es de 3.01 decibeles.

En la práctica casi siempre se usa la gráfica aproximada, pero si se desea mayor exactitud, la gráfica se puede modificar ligeramente de tal modo que la magnitud en la rodilla sea de 3 decibeles.

La gráfica de ángulo de defasamiento es aproximada, con un error máximo de 6° (aproximadamente). El error máximo se presenta entre los valores de $a/10$ y a , lo mismo entre a y $10a$, como se indica en las graficas de la figura 9-14.

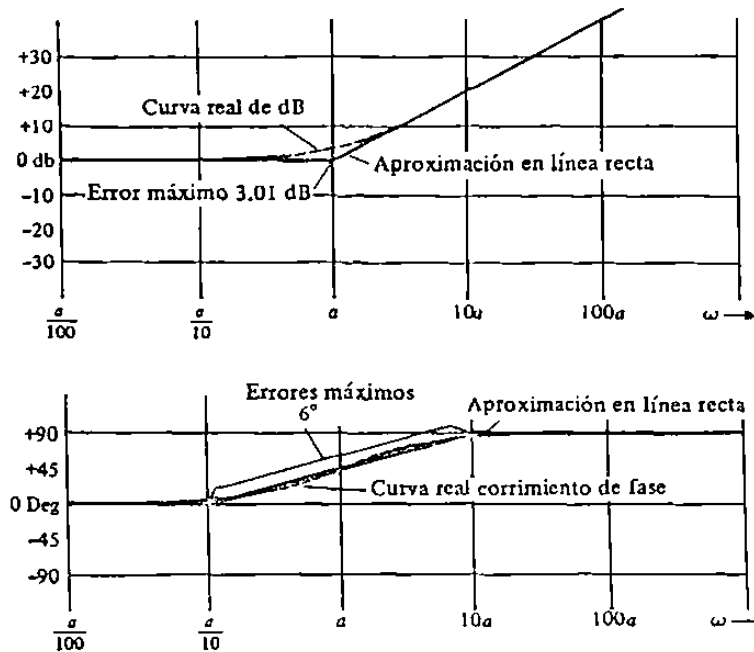


Fig. 9-14. Respuesta a la frecuencia para $F(s) = (s+a)/a$, a positiva

Si se quiere obtener la respuesta a la frecuencia para la función compleja

$$F(s) = \frac{a}{s+a} = \frac{1}{s/a+1}$$

las gráficas serán las curvas negativas de $(s+a)/a$ debido a que las dos funciones de transferencia son inversas entre si.

En la fig. 9-15 se representan las gráficas de Bode para la función compleja

$$F(s) = \frac{s+10}{10}$$

En la fig. 9-16 se representan los diagramas de Bode para la función compleja

$$F(s) = \frac{10}{s+10}$$

En las figuras 9-17 y 9-18 se representan los diagramas de Bode de las siguientes funciones complejas

$$F(s) = \frac{s-10}{-10} \quad \text{y} \quad F(s) = \frac{-10}{s-10}$$

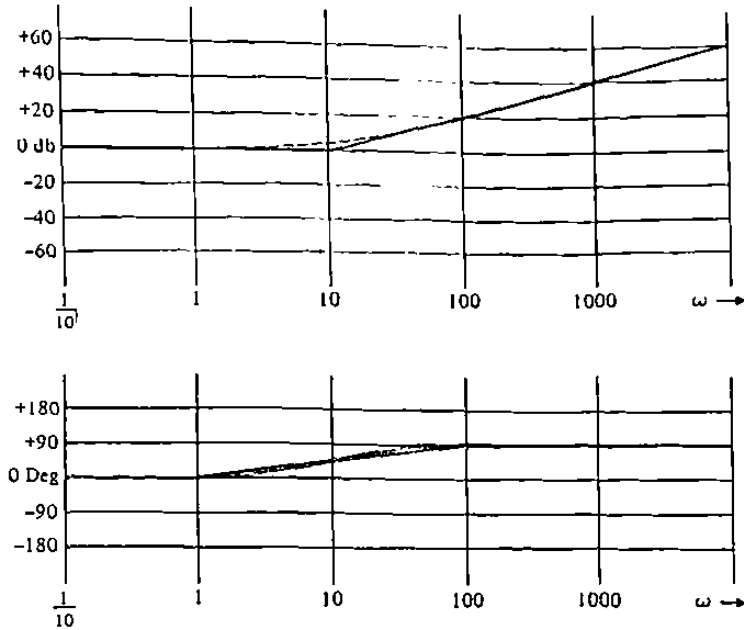


Fig. 9-15. Respuesta a la frecuencia para $F(s) = (s + 10)/10$

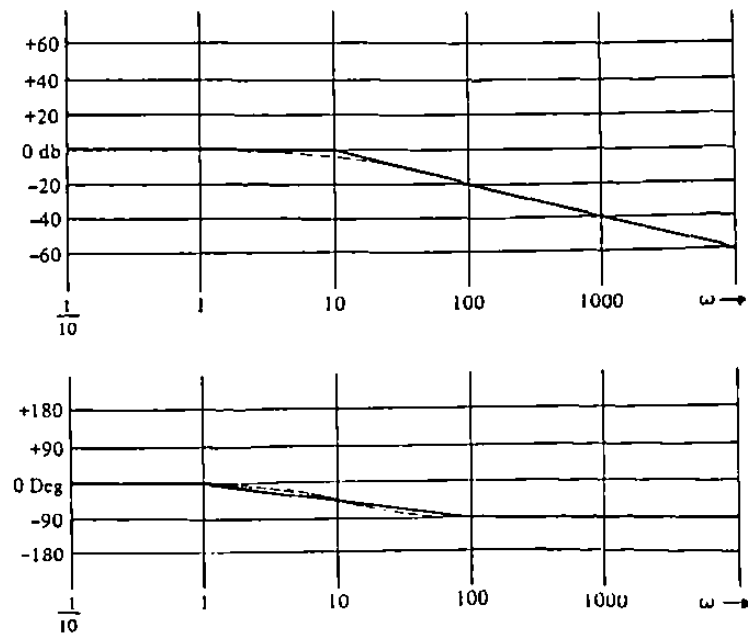


Fig. 9-16. Respuesta a la frecuencia para $F(s) = 10/(s + 10)$

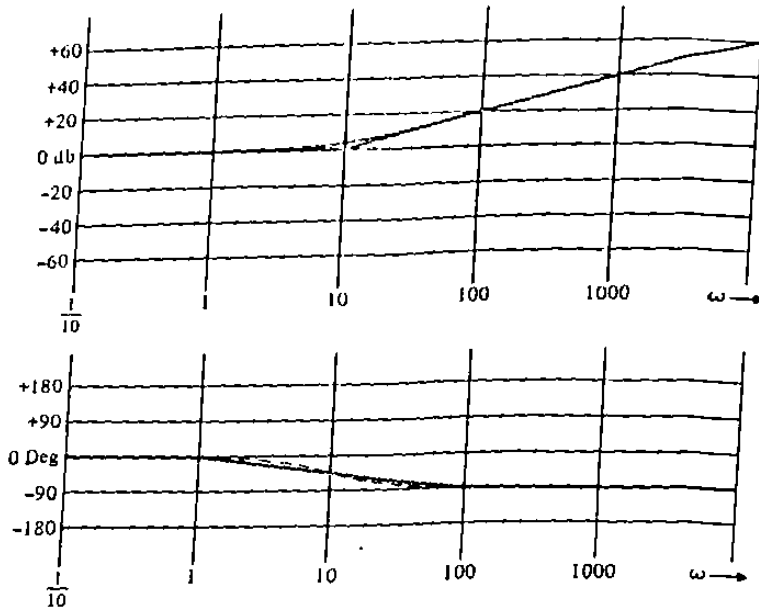


Fig. 9-17. Respuesta a la frecuencia para $F(s) = (s - 10)/(-10)$

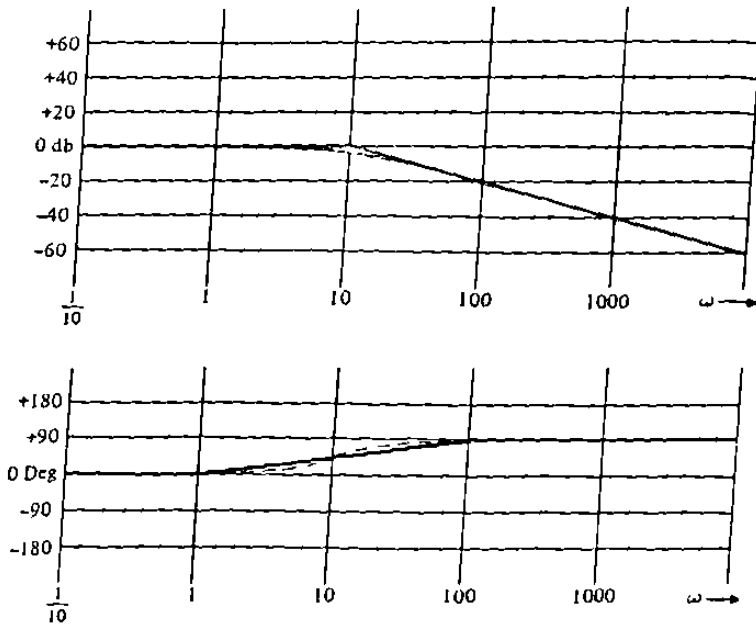


Fig. 9-18. Respuesta a la frecuencia para $F(s) = (-10)/(s - 10)$

9-7-4.- Gráficas de Bode Compuestas.

Si se trata de graficar los diagramas de Bode para la siguiente función compleja

$$F(s) = \frac{s}{s + 10}$$

primeramente se trata de descomponer la $F(s)$ en factores para los cuales la respuesta sea ya conocida y por lo tanto se pueda trazar fácilmente. Por ejemplo la $F(s)$ se puede representar en la siguiente forma:

$$F(s) = \left[\frac{1}{10} \right] (s) \left[\frac{10}{s + 10} \right]$$

las curvas para cada uno de los términos individuales se representan en la fig. 9-19. La suma de todas las curvas individuales nos proporciona las curvas generales de toda la función de transferencia completa, como se indica en la fig. 9-20.

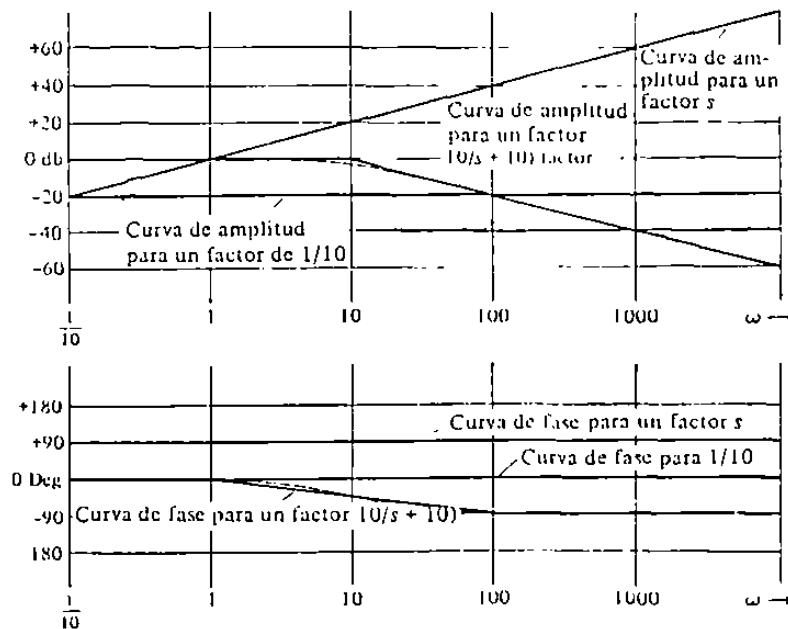


Fig. 9-19. Respuesta a la frecuencia de los terminos individuales

de la función compleja $F(s) = \left[\frac{1}{10} \right] (s) \left[\frac{10}{s + 10} \right]$

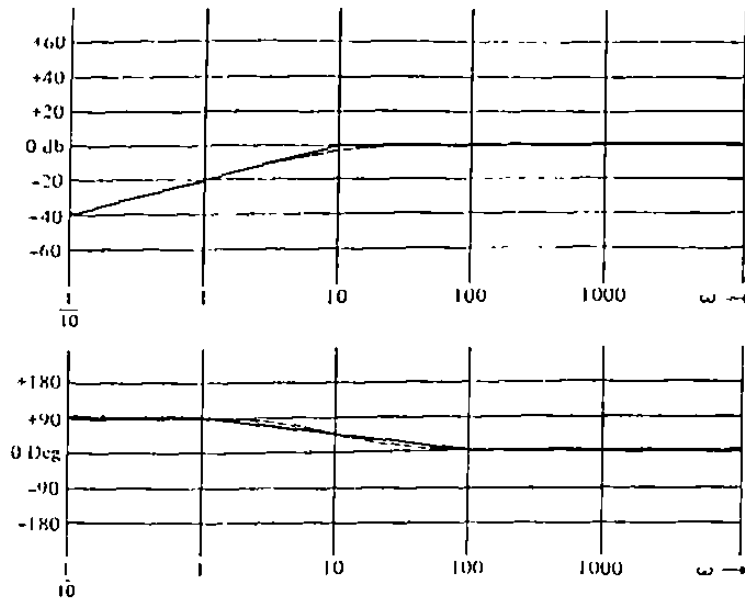


Fig. 9-20. Respuesta general de frecuencia para $F(s) = \frac{s}{s + 10}$

9-7-5.- Gráficas para pares de Polos y Ceros Complejos Conjugados.

Como primer ejemplo de este tipo de funciones se estudiarán las graficas de la respuesta a la frecuencia de la siguiente función compleja:

$$F(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Para valores muy pequeños de ω comparados con el valor de ω_n , al substituir $s = j\omega$ en la función $F(s)$, los términos que contienen la variable "s" se pueden desprestigiar, por lo que la magnitud de $F(s)$ será

$$F(s=j\omega) = \frac{\omega_n^2}{0 + 0 + \omega_n^2} = 1$$

por lo que la magnitud en decibeles es de cero y el angulo de defasamiento es de cero grados.

Para valores muy grandes de ω comparados con el valor de ω_n , al substituir $s = j\omega$ en la función $F(s)$, tenemos:

$$F(s=j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + 0 + 0} = -\frac{\omega_n^2}{\omega^2}$$

que corresponde a una recta de pendiente igual a -40 dB/década y un corrimiento de fase de 180° .

Cuando $\omega = \omega_n$, al substituir $s = j\omega$ la $F(s)$ se convierte en:

$$F(s=j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega_n)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega_n) + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{-\omega_n^2 + 2\zeta j\omega_n^2 + \omega_n^2} = \frac{1}{j2\zeta}$$

para la función anterior, la magnitud en decibeles tiene un valor de

$$m = 20 \log_{10} \frac{1}{2\zeta}$$

y el ángulo de defasamiento es igual a -90° .

En la fig. 9-21 se representa la respuesta a la frecuencia en magnitud y en ángulo de defasamiento para diferentes valores de la relación de amortiguamiento ζ . Se hace notar que para valores de $\zeta \geq 1$ los polos son reales, no complejos , por lo que se pueden aplicar en este caso los métodos ya estudiados para polos ubicados en el eje real.

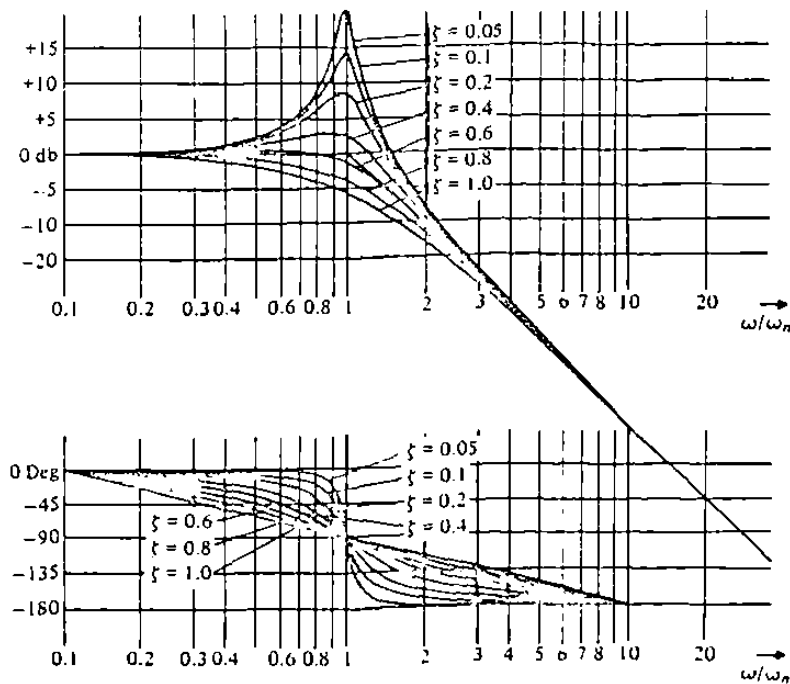


Fig. 9-21. Respuesta a la frecuencia para $F(s)$ con polos complejos conjugados.

Se analizarán en seguidalas gráficas de Bode de la siguiente función de transferencia compleja:

$$F(s) = \frac{1\ 000}{s^2 + 20s + 40\ 000} \quad (9-9)$$

Con el proposito de facilitar la construcción de las gráficas, la función $F(s)$ se puede descomponer en factores de la siguiente forma:

$$F(s) = \left[\frac{1}{40} \right] \left[\frac{40\ 000}{s^2 + 20s + 40\ 000} \right] \quad (9-10)$$

El primer término $1/40$ tiene una amplitud de -32 dB y un ángulo de 0° . El segundo término si lo comparamos con el caso general ya analizado en la sección anterior,

$$\omega_n = \sqrt{40\ 000} = 200$$

ademas $2\zeta\omega_n = 400\zeta = 20$ de donde $\zeta = \frac{1}{20}$

Con estos datos las gráficas se pueden trazar basándose en las curvas representadas en la fig. 9-21. Las gráficas completas se pueden ver en la fig. 9-22.

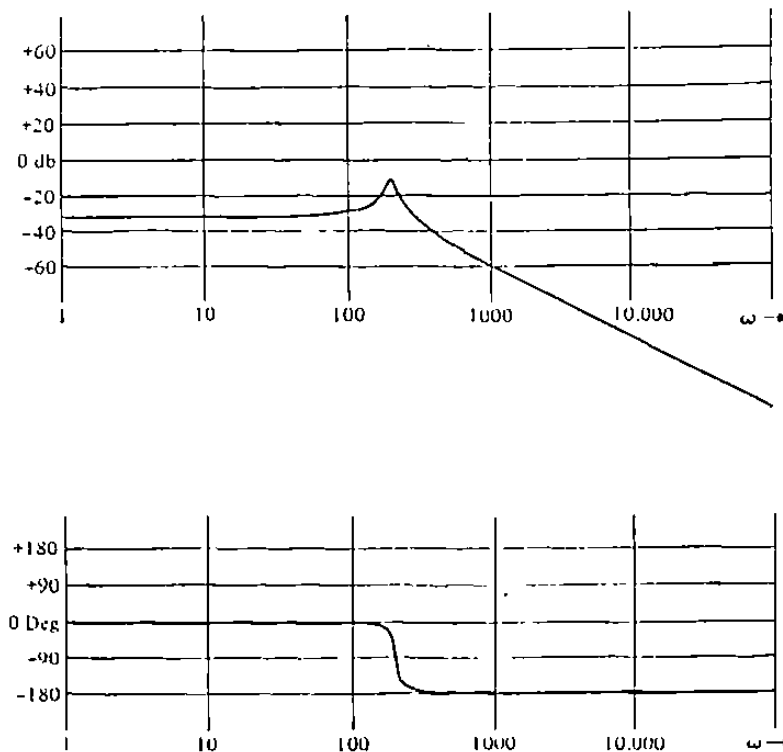


Fig. 9-22. Gráficas de respuesta a la frecuencia para $F(s) = 1000/(s^2 + 20s + 40000)$

9-7-6.- Aproximación de Desviaciones.

Cuando se trata de trazar los diagramas de Bode de una función que tiene pares de raíces complejas conjugadas, primero se trazan los diagramas aproximados mediante líneas rectas y posteriormente se corrigen las aproximaciones. La fig. 9-23 muestra las magnitudes de corrección necesarias para las aproximaciones de la respuesta en frecuencia de raíces complejas conjugadas.

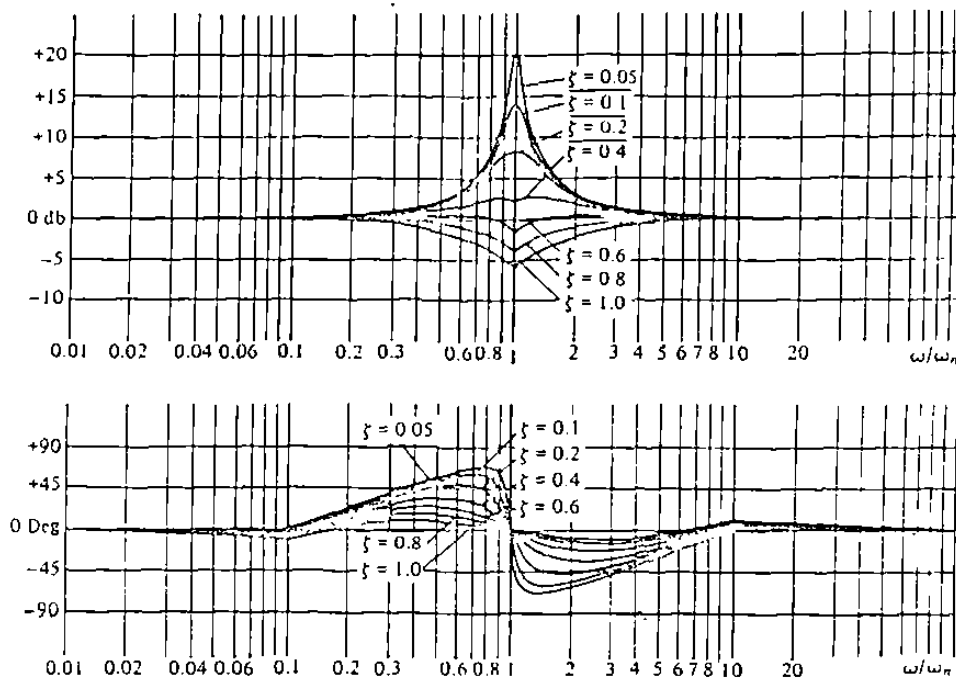


Fig. 9-23. Curvas de corrección de gráficas de respuesta en frecuencia de raíces complejas conjugadas.

Como un ejemplo de aplicación se trazarán las gráficas de Bode de la siguiente función compleja:

$$F(s) = \frac{1000}{s^2 + 2s + 100} = (10) \left[\frac{100}{s^2 + 2s + 100} \right]$$

Para el primer término constante igual a 10, la magnitud es de 20 decibeles, y el ángulo de defasamiento es de 0°.

Para el segundo término que contiene polos complejos,

$$\omega_n = \sqrt{100} = 10 \quad 2\zeta\omega_n = 20\zeta = 2 \quad \zeta = 1/10$$

Con los datos anteriores se pueden trazar las aproximaciones por líneas rectas, como se indica en la fig. 9-24. Se aproximan primero los pares de raíces complejas conjugadas, como si fueran críticamente

amortiguadas, de la forma

$$\frac{100}{s^2 + 20s + 100} = \left[\frac{10}{s + 10} \right]^2$$

La aproximación de la gráfica de magnitud será de 0 dB (+ 20 dB por el factor constante de 10) para el vértice de frecuencia $\omega = 10$, de allí en adelante la gráfica es una recta con una pendiente de -40 dB/década. La aproximación angular es de 0° hasta $\omega = 1$, después la gráfica baja a -90° en $\omega = 10$ y sigue bajando hasta -180° en $\omega = 100$. De allí en adelante, la gráfica angular se mantiene en 180° .

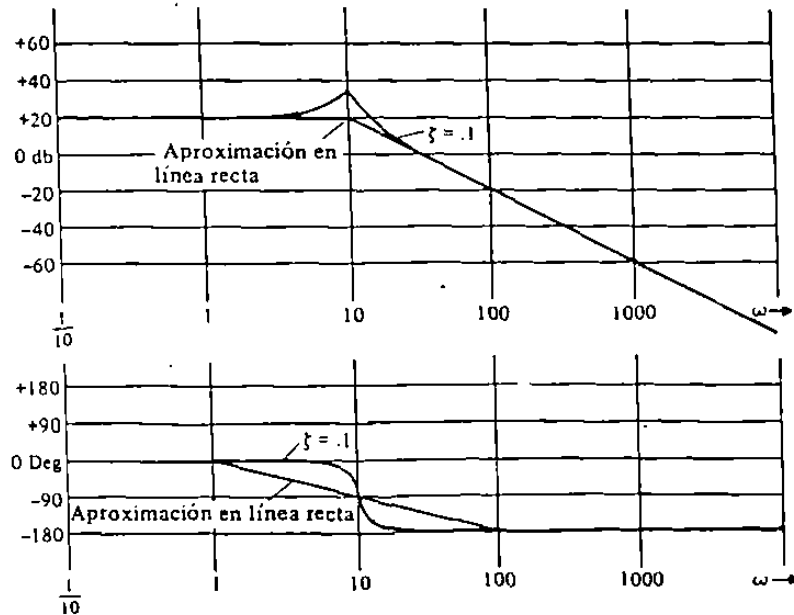


Fig. 9-24. Gráficas de respuesta a la frecuencia para $F(s) = 1000/(s^2 + 2s + 100)$

Las correcciones de la fig. 9-23, para $\zeta = 1/10$ se aplican luego a las curvas aproximadas para proporcionar el resultado final de la fig. 9-24.

Como ejemplos ilustrativos se representan algunas graficas para funciones complejas en las figuras 9-25, 9-26, 9-27 y 9-28.

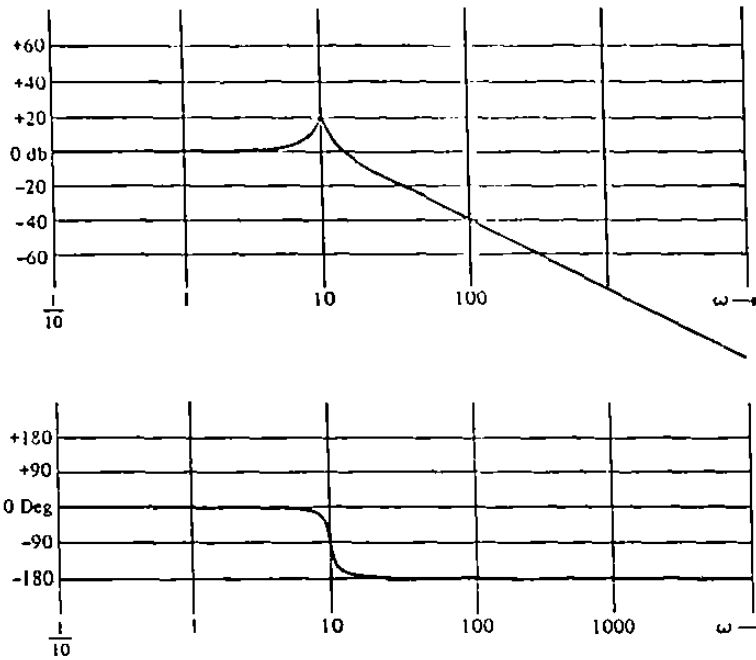


Fig. 9-25. Diagramas de Bode para $F(s) = 100/(s^2 + s + 100)$

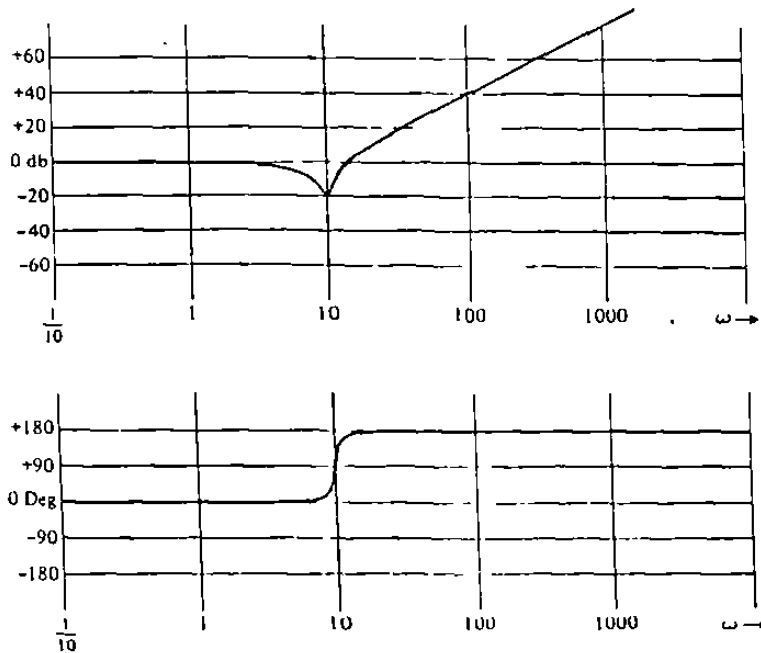


Fig. 9-26. Diagramas de Bode para $F(s) = (s^2 + s + 100)/100$

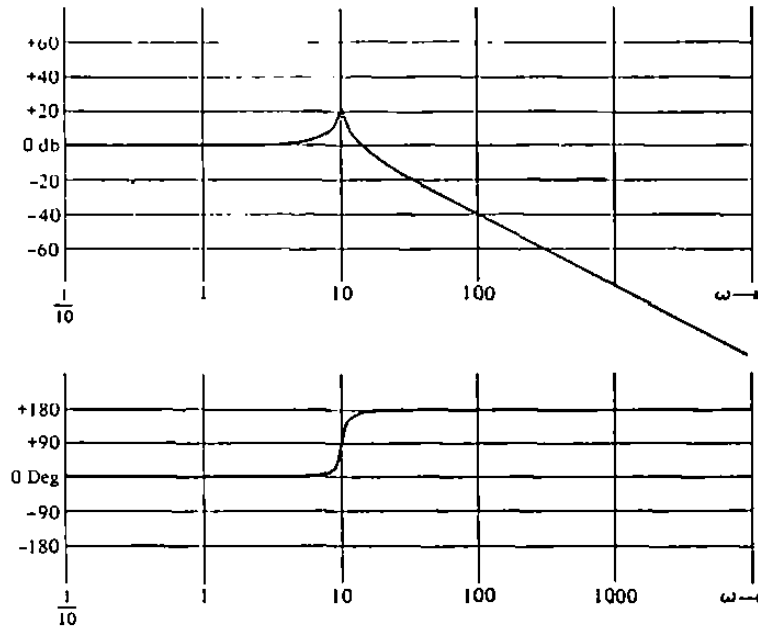


Fig. 9-27. Diagramas de Bode para $F(s) = 100/(s^2 - s + 100)$

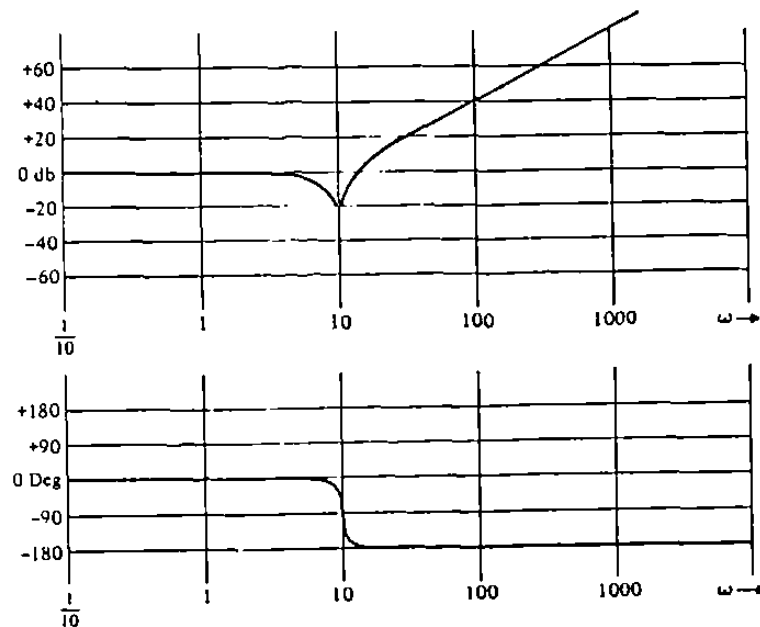


Fig. 9-28. Diagramas de Bode para $F(s) = (s^2 - s + 100)/100$

Otro ejemplo de diagramas de Bode se considerará con la siguiente función de transferencia compleja:

$$F(s) = \frac{s^2 + s + 8}{s^2}$$

la cual se puede descomponer en los siguientes factores:

$$F(s) = (8) \left[\frac{s^2 + s + 8}{8} \right] \left[\frac{1}{s} \right]^2$$

La función de transferencia tiene ceros complejos conjugados cuyas curvas son las negativas de las curvas ya trazadas para polos complejos.

$$\begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{8} = 2.83 \\ 2\zeta\omega_n &= 5.66\zeta = 1 \\ \zeta &= 0.177 \end{aligned}$$

con estos datos se pueden trazar las curvas del diagrama de Bode que se representan en las figuras 9-29 y 9-30.

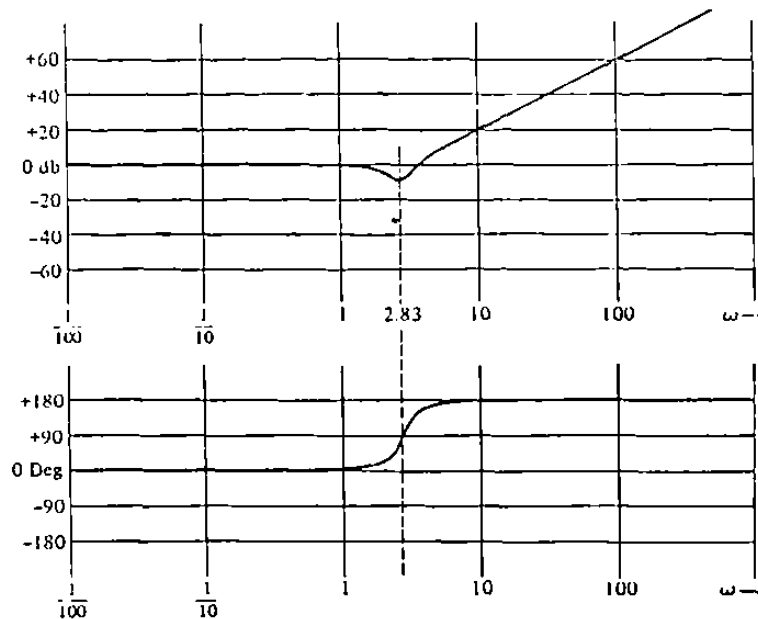


Fig. 9-29. Curvas aproximadas de respuesta a la frecuencia para la $F(s) = (s^2 + s + 8)/8$.

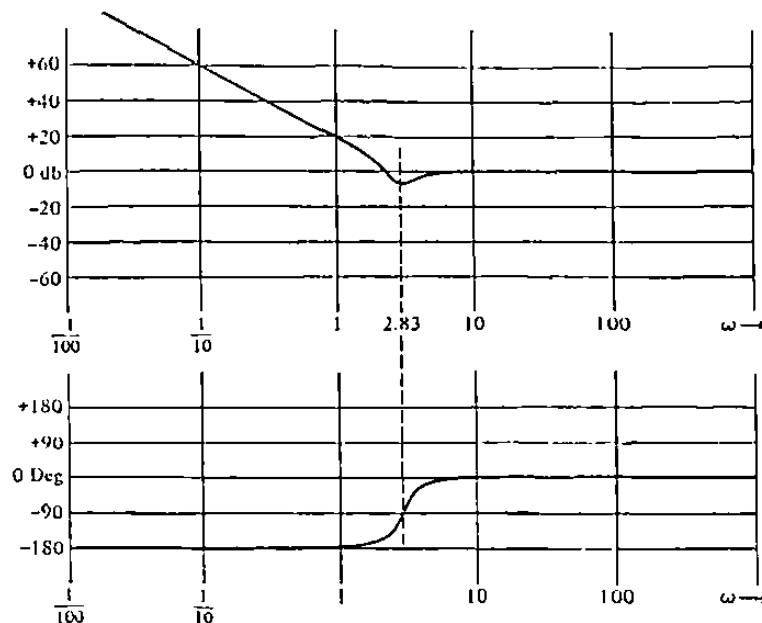


Fig. 9-30. Curvas aproximadas de respuesta a la frecuencia para la $F(s) = (s^2 + s + 8)/s^2$.

9-7-7.- Análisis de datos experimentales.

Como ya se dijo con anterioridad, los métodos de respuesta a la frecuencia se pueden aplicar en forma experimental para obtener las funciones de transferencia de sistemas de control. Este procedimiento es muy importante sobre todo en casos en donde las expresiones matemáticas de las funciones de transferencia son difíciles de obtener en forma puramente teórica.

Como un ejemplo consideremos que al aplicar el método experimental a un sistema de control, se han obtenido los siguientes resultados de ganancia en decibeles y corrimiento de fase como se indican en la tabla 9-3. Los datos de la tabla se utilizan para trazar los diagramas de Bode del sistema que se representan en la fig. 9-31.

Una vez que se tienen las gráficas, se pueden trazar una serie de líneas rectas asintóticas tanto para la magnitud como para el ángulo de defasamiento. Midiendo las pendientes de las rectas y los vértices en las frecuencias correspondientes, es posible obtener una función de transferencia. Para la fig. 9-31, la función de transferencia aproximada es:

$$F(s) = 16 \left[\frac{15}{s + 15} \right] \left[\frac{150}{s + 150} \right] = \frac{16}{(0.05s + 1)(0.007 + 1)}$$

Tabla 9-3. Datos experimentales de frecuencias

f	ω	Ganancia (dB)	Corrimiento de fase (grados)
60	377	-7.75	-155
50	314	-4.3	-150
40	251	-0.2	-145
35	219	0.75	-140
25	157	5.16	-135
20	126	7.97	-120
16	100	10.5	-110
10	63	15.0	-100
7	44	16.9	-85
2.5	16	20.4	-45
1.3	8	21.6	-30
0.22	1.38	24.0	-5
0.16	1.0	24.1	0

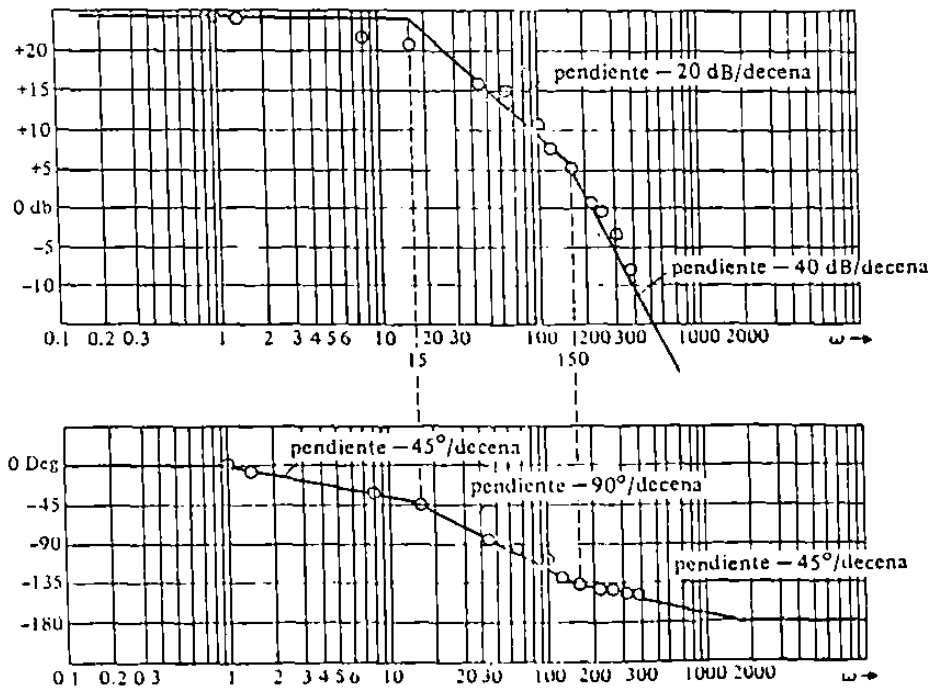


Fig. 9-31. Incorporación de datos experimentales para el análisis de la respuesta a la frecuencia.

9-7-8.- Problemas Propuestos.

9-1.- Dibujar las curvas de respuesta a la frecuencia (magnitud y ángulo de defasamiento) de las siguientes funciones de transferencia complejas:

(a) $F(s) = -3s$

(b) $F(s) = \frac{1}{s + 1000}$

(c) $F(s) = \frac{1}{(s + 10)^3}$

(d) $F(s) = \frac{1000s}{(s + 4)(s + 10)}$

(e) $F(s) = \frac{s - 10}{s + 10}$

(f) $F(s) = \frac{100}{s^2 + s + 100}$

(g) $F(s) = \frac{10}{s^2 + s + 4}$

(h) $F(s) = \frac{s^2 - 4s + 30}{(s + 10)^2}$

(i) $F(s) = \frac{s}{s^2 + 20s + 100}$

(j) $F(s) = \frac{s^2 - 2s + 100}{s^2 + 100s + 100}$

9-8.- Margen de Ganancia y Margen de Fase.

9-8-1.- Análisis de la Estabilidad Relativa de un Sistema de Control.

Se ha mencionado ya que la utilidad práctica de un sistema de control depende del grado de estabilidad que éste tenga. No basta por lo tanto saber que un sistema es estable, debemos además saber el grado o medida de su estabilidad, en otras palabras se trata de conocer que tan cerca o que tan lejos está un sistema de perder su estabilidad. Esto último es lo que se denomina Estabilidad Relativa y su magnitud se puede determinar aplicando los métodos de respuesta a la frecuencia.

Cualquier sistema de control de lazo cerrado se puede representar en su forma canónica como se muestra en la fig. 9-32. y cuya función de transferencia es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

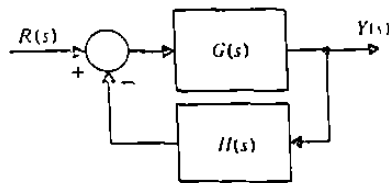


Fig. 9-32. Sistema de Control Retroalimentado.

supongamos que en dicho sistema de control, el valor de la función

$$G(s) = \frac{100}{(s + 1)^3} \quad \text{y el valor de} \quad H(s) = 1$$

como se indica en la fig. 9-33.

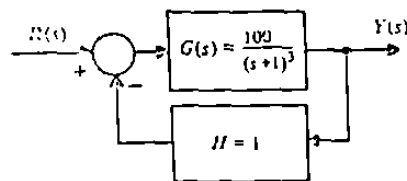


Fig. 9-33. Ejemplo de un sistema retroalimentado.

Para determinar si el sistema en general es estable, se modificará el diagrama de bloques de la fig. 9-33 como se indica en la fig. 9-34. Se ha agregado un bloque en la trayectoria de la retroalimentación con una ganancia igual a K. La función de transferencia del sistema de control representado en la fig. 9-34 es:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + KG(s)H(s)} \quad (9-11)$$

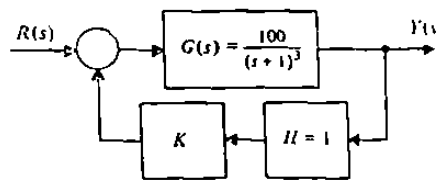


Fig. 9-34. Sistema de control retroalimentado.

Substituyendo los valores de G(s) y de H(s) en la ecuación 9-11 tenemos:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{100}{(s+1)^3}}{1 + \left[\frac{100}{(s+1)^3} \right] K} = \frac{100}{(s+1)^3 + 100K} \quad (9-12)$$

A continuación se hará un análisis de la estabilidad en la ecuación 9-12 cuando la ganancia varía de cero a uno.

Si la ganancia $K = 0$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{100}{(s+1)^3}$$

facilmente se puede observar que la función de transferencia es estable ya que tiene tres polos en $s = -1$ (en el semiplano izquierdo del plano complejo).

Si la ganancia $K = \frac{1}{1000}$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{100}{(s+1)^3 + 100 \left[\frac{1}{1000} \right]} = \frac{100}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1.1}$$

aplicando el criterio de Routh a la ecuación característica anterior se tiene:

$$s^3 + 3s^2 + 3s + 1.1 = 0$$

$$\begin{array}{l|ll} s^3 & 1 & 3 \\ s^2 & 3 & 1.1 \\ s^1 & 2.63 & \\ s^0 & 1.1 & \end{array}$$

De acuerdo con el criterio de Routh, el sistema es Estable.

Si la ganancia es $K = \frac{1}{100}$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{100}{(s+1)^3 + 100\left[-\frac{1}{100}\right]} = \frac{100}{s^3 + 3s^2 + 3s + 2}$$

Aplicando el criterio de Routh a la ecuación característica

$$s^3 + 3s^2 + 3s + 2 = 0$$

$$\begin{array}{l|ll} s^3 & 1 & 3 \\ s^2 & 3 & 2 \\ s^1 & 2.33 & \\ s^0 & 2 & \end{array}$$

Por lo tanto el sistema sigue siendo Estable.

Si la ganancia es $K = \frac{1}{10}$ la ecuación característica es:

$$s^3 + 3s^2 + 3s + 11 = 0$$

Aplicando el Criterio de Routh a la ecuación anterior

$$\begin{array}{l|ll} s^3 & 1 & 3 \\ s^2 & 3 & 11 \\ s^1 & -0.66 & \\ s^0 & 11 & \end{array}$$

De acuerdo con el criterio de Routh, el sistema con $K = 1/10$ es ya un sistema inestable, por los cambios de signo en la primera columna.

El análisis anterior nos indica que hay un valor de la ganancia K , entre cero y uno que es el valor límite máximo que puede tener antes de caer en la inestabilidad el sistema. A continuación se determinará el valor límite máximo de la ganancia K , aplicando de nuevo el Criterio de Routh.

Si la ganancia del sistema de control es K , su ecuación característica es:

$$1 + \frac{100K}{(s + 1)^3} = 0$$

$$(s + 1)^3 + 100K = 0$$

$$s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + 100K = 0$$

$$s^3 + 3s^2 + 3s + (1 + 100K) = 0$$

s^3	1	3
s^2	3	(1 + 100K)
s^1	$\frac{8-100K}{3}$	
s^0	1+100K	

La estabilidad se puede obtener igualando la fracción de la primera columna a cero.

$$\frac{8 - 100K}{3} = 0$$

$$8 - 100K = 0$$

$$K = 0.08$$

El resultado anterior quiere decir que valores mayores de $K = 0.08$ producen inestabilidad, como ya se había encontrado con $K = 1/10$.

En la fig. 9-35 se representan los diagramas de Bode del mismo sistema de control de la ecuación 9-12, para valores de K igual a $1/1000, 1/100, 1/10$ y 1 . Como se puede observar el diagrama de ángulo de defasamiento no cambia con el valor de K , pero los diagramas de la magnitud son de igual forma, pero la gráfica se va moviendo hacia arriba cuando K va aumentando.

En la gráfica del ángulo de defasamiento hay un valor de frecuencia importante que ocurre cuando el ángulo es igual a $\pm 180^\circ$ y que según la gráfica corresponde a una frecuencia $\omega = 3.17$. Si se traza una línea vertical en esta frecuencia, corta a las gráficas de magnitud en $+20$ dB con $K = 1$, 0 dB con $K = 1/10$, -20 dB con $K = 1/100$ y -40 dB con $K = 1/1000$. Los valores anteriores son muy importantes ya que son la base para determinar el margen de ganancia de un sistema de control. Se puede decir que con $K = 1/1000$ tenemos un margen de 40 dB antes de caer en la inestabilidad, con $K = 1/100$ el margen se reduce a 20 dB, en $K = 1/10$ estamos en el límite de la inestabilidad y con $K = 1$ de plano el sistema es inestable. En conclusión al irse moviendo la gráfica de magnitud hacia arriba se va perdiendo poco a poco la estabilidad del sistema.

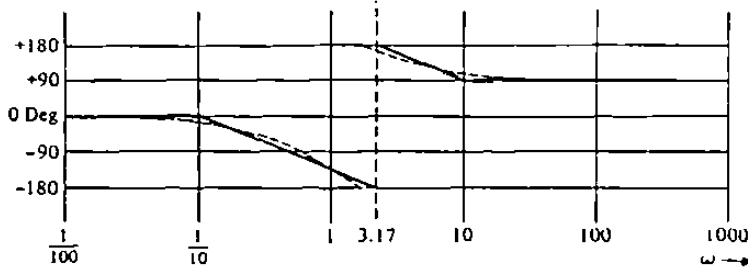
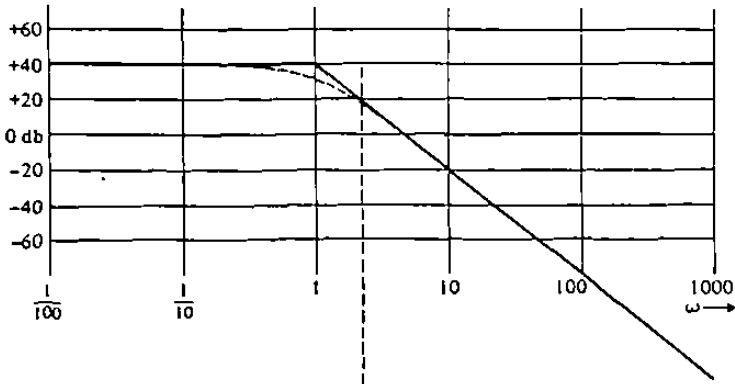
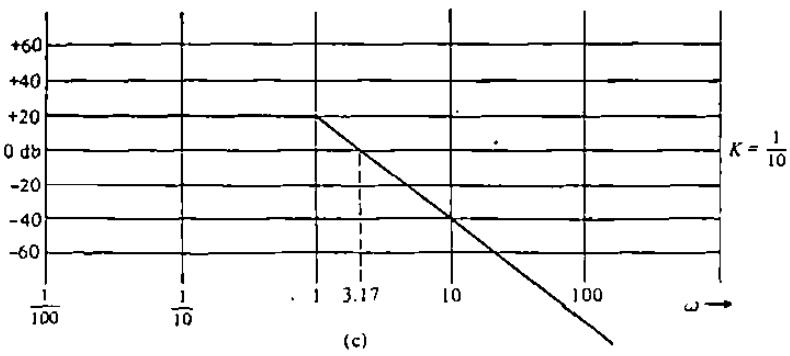
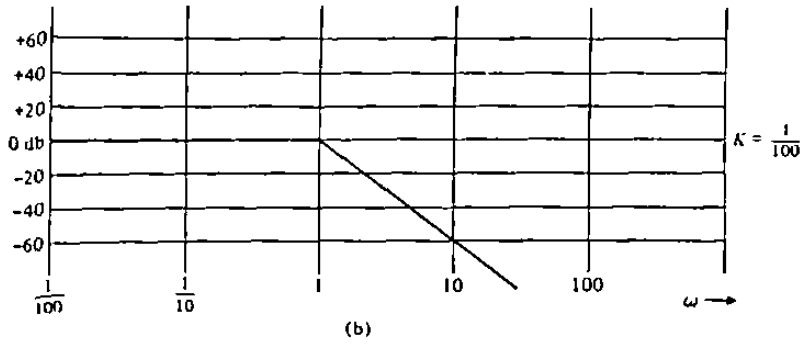
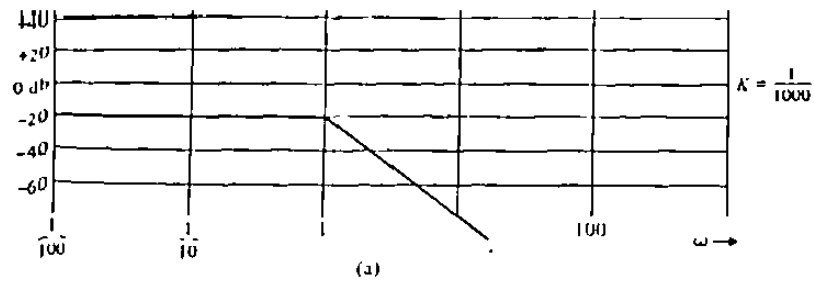


Fig. 9-35. Diagramas de Bode de la ecuación 9-12, para diferentes valores de la constante k .

9-8-2.- Margén de Ganancia.

Como ya se mencionó, el margen de Ganancia y el Margén de Fase son dos indicadores importantes para determinar la estabilidad relativa de un sistema de control. Estos dos márgenes se pueden obtener fácilmente a partir de los diagramas de Bode.

El Margen de Ganancia se mide en decibeles y se identifica en los diagramas de Bode como la cantidad de magnitud abajo de 0 dB, en donde el ángulo de defasamiento es de -180° . A la frecuencia que corta la gráfica de Bode angular el valor de -180° se le llama frecuencia de cruce de fase o frecuencia de transición fásica.

En la fig. 9-36 se representan los diagramas de Bode de un sistema de control con un Margen de Ganancia de 8 dB que se presenta cuando la frecuencia es $\omega_\pi \approx 4$ rad/seg. El Margén de Ganancia en este caso nos indica que el sistema es estable y puede aumentar su ganancia hasta 8 dB antes de caer en la inestabilidad. Si la gráfica de magnitud está arriba de cero decibeles a la frecuencia de cruce de fase, el sistema es inestable. Por lo tanto si la gráfica de magnitud está más abajo su Margen de ganancia crece al igual que su estabilidad relativa.

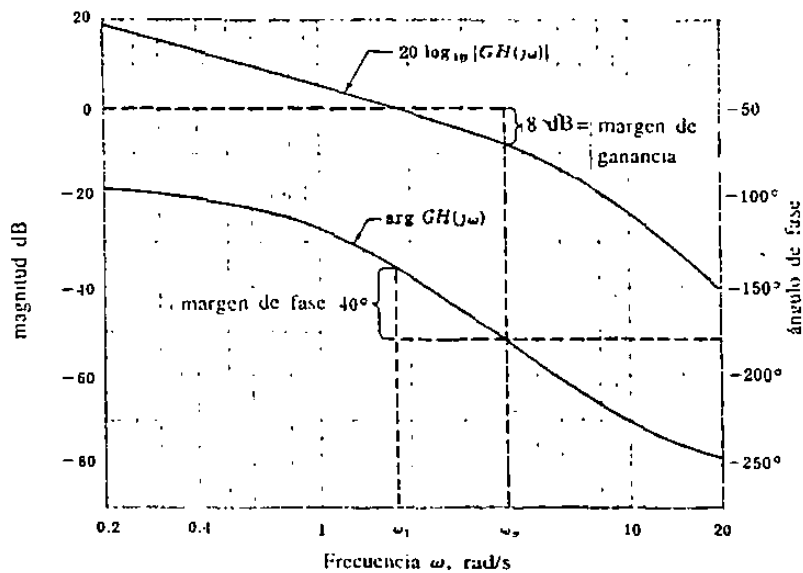


Fig. 9-36. Diagramas de Bode de un sistema de control.

El Margen de Ganancia se puede expresar matemáticamente como el recíproco de $G(j\omega)H(j\omega)$ cuando el ángulo de fase es de -180° . Denominando ω_f a la frecuencia de cruce de fase, el margen de ganancia en decibeles se expresa por la siguiente ecuación:

$$\text{Margen de Ganancia en dB} = 20 \text{ Log } \frac{1}{|G(j\omega_f)H(j\omega_f)|}$$

Cuando el valor de $G(j\omega)H(j\omega)$ es menor que uno, el margen de ganancia es positivo y se interpreta como la ganancia mínima adicional que hará inestable al sistema. En caso contrario cuando $G(j\omega)H(j\omega)$ es mayor que uno, el margen de ganancia es negativo y se interpreta como la ganancia mínima que debe reducirse para llevar al sistema a la estabilidad. En la Fig. 9-36 el margen de ganancia es positivo.

9-8-3.- Margen de Fase.

El Margen de Fase también se puede obtener directamente de los diagramas de Bode y es la diferencia de ángulos entre -180° y el ángulo que se forma a la frecuencia correspondiente a 0 dB en la gráfica de magnitud, como se indica en la fig. 9-36. En este caso el Margen de Fase es positivo y es igual a 40° , lo que nos indica un sistema de control estable. Si el Margen de Fase fuera negativo, lo cual se presentaría si la gráfica de ángulo estuviera más abajo, nos indicaría un sistema inestable.

Para determinar la estabilidad de los sistemas es conveniente establecer tanto el Margen de Fase, como el Margen de Ganancia, los cuales deben ser positivos en sistemas estables. Para asegurar una buena estabilidad relativa, lo cual se traducirá en un comportamiento satisfactorio del sistema de control, los valores del Margen de Fase deben estar comprendidos entre los 30° y los 60° , mientras que el valor del Margen de Ganancia debe ser mínimo de 6 decibeles.

9-9.- Criterio de Nyquist.

Este es otro método de análisis que se puede usar para predecir la estabilidad de sistemas de control. En secciones anteriores ya se estudiaron los diagramas de Bode que son gráficas en coordenadas rectangulares. Los diagramas en los que se basa el análisis de sistemas por medio del criterio de Nyquist como se verá más adelante son gráficas en coordenadas polares. Esto por lo tanto es otra forma de ver gráficamente la respuesta a la frecuencia de un sistema de control.

La predicción de la estabilidad de los sistemas de control mediante la aplicación del criterio de Nyquist es ampliamente utilizado en la práctica. El uso de la gráfica en coordenadas polares elimina la necesidad de encontrar las raíces de la ecuación característica del sistema y elimina la necesidad de calcular la transformada inversa de Laplace como se hace en el análisis de la respuesta transitoria. De tal manera que la gráfica en coordenadas polares es una técnica que nos ahorra trabajo en el análisis del comportamiento dinámico de los sistemas de control.

La gráfica en coordenadas polares o diagrama de Nyquist es bastante simple de usar para casi todos los sistemas de control. Sin embargo para poder entender el método es necesario primero estudiar algunos principios matemáticos que son la base de este análisis.

9-9-1.- La Ecuación Característica y la Estabilidad.

Cualquier sistema de control de lazo cerrado puede representarse en su forma canónica por medio de un diagrama de bloques como se indica en la fig. 9-37. La función de transferencia de lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

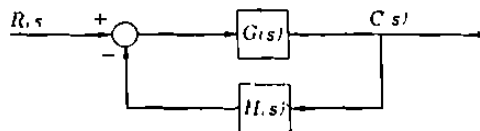


Fig. 9-37. Sistema de Control en su forma Canónica.

La Función de transferencia de lazo abierto es $G(s)H(s)$ y la suma de $1 + G(s)H(s)$ igualada a cero se denomina ecuación característica del sistema. La ecuación característica se puede representar en la siguiente forma:

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{D(s) + N(s)}{D(s)} = 0 \quad (9-13)$$

$$\text{o bien } D(s) + N(s) = 0 \quad (9-14)$$

La ecuación 9-13 se puede modificar representando $1 + G(s)H(s)$ como el cociente de dos polinomios factorizados.

$$1 + G(s)H(s) = \frac{(s + r_1)(s + r_2)\dots}{(s + r_a)(s + r_b)(s + r_c)\dots} \quad (9-15)$$

donde $(s + r_1)$ y $(s + r_2)$ son los factores del numerador $D(s) + N(s)$ y $(s + r_a)$, $(s + r_b)$ y $(s + r_c)$ son los factores del denominador $D(s)$.

La ecuación característica del sistema se puede representar en forma general como

$$(s + r_1)(s + r_2)\dots(s + r_n) = 0 \quad (9-16)$$

los valores de $s = -r_1, -r_2, \dots, -r_n$ son las raíces de la ecuación característica. Cuando "s" toma cualquier valor que sea una raíz de la ecuación característica, la función de transferencia $C(s)/R(s)$ se hace infinito. Por otro lado las raíces de la ecuación característica también se pueden llamar como los ceros de $1 + G(s)H(s)$. Además se puede decir que los ceros de $D(s)$, es decir, $-r_a, -r_b$ y $-r_c$ de la ecuación (9-15) son los polos de $1 + G(s)H(s)$, es decir los valores de "s" para los cuales $1 + G(s)H(s)$ se hace infinito.

Para que el sistema de control representado en la fig. 9-37 tenga estabilidad, todas las raíces de la ecuación característica deben ser números reales negativos o números complejos con componentes reales negativas. Las raíces de la ecuación característica [o los ceros de $1 + G(s)H(s)$] se pueden graficar en el plano complejo como se indica en la fig. 9-38. El eje imaginario divide al plano complejo en dos partes (la mitad derecha y la mitad izquierda del plano). Las raíces de la ecuación característica que se encuentran en la mitad de la derecha conducen al sistema a la inestabilidad (por ejemplo $+2 \pm j1$) y las raíces que se encuentran en la mitad izquierda del plano conducen a un sistema estable (por ejemplo $-3 \pm j2$).

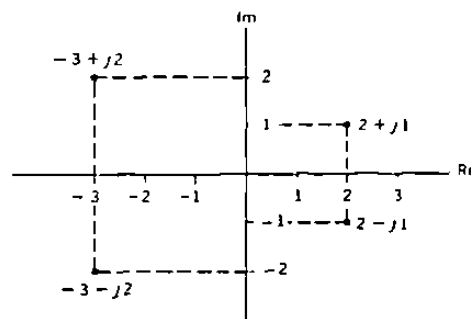


Fig. 9-38. Estabilidad en el plano complejo.

De acuerdo con el análisis anterior, el procedimiento para investigar la estabilidad de un sistema es buscar ceros de $1 + G(s)H(s)$ o raíces de la ecuación característica en la mitad derecha del plano. Si no hay raíces en la mitad derecha del plano, el sistema es estable.

Logicamente es impráctico y casi imposible investigar cada punto en la mitad derecha del plano s , por lo que se hace necesario idear un método más breve. El procedimiento para examinar la mitad derecha del plano s y la explicación de este procedimiento en la gráfica de coordenadas polares es lo que se estudia en el siguiente tema.

9-9-2.- Mapeo de Contornos.

Si se tiene la función de transferencia de un sistema de control, expresada por la siguiente ecuación:

$$F(s) = \frac{(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} \quad (n > m)$$

en donde $-z_1, -z_2, \dots -z_m$ son los ceros y $-p_1, -p_2, \dots -p_n$ son los polos de la función compleja. En los polos, la función $F(s)$ no es analítica, es decir, la función no existe ni existen sus derivadas, por lo que a estos puntos se les llama puntos singulares o singularidades de la función.

Si se traza un contorno arbitrario en el plano " s ", como se indica en la fig. 9-39, de tal forma que no pase por ninguna singularidad de la función y se evalúa a ésta en cada uno de los puntos del contorno, la gráfica de $F(s)$ será también una trayectoria cerrada, cuyas características están determinadas por el lugar que ocupan los ceros y los polos en el plano complejo.

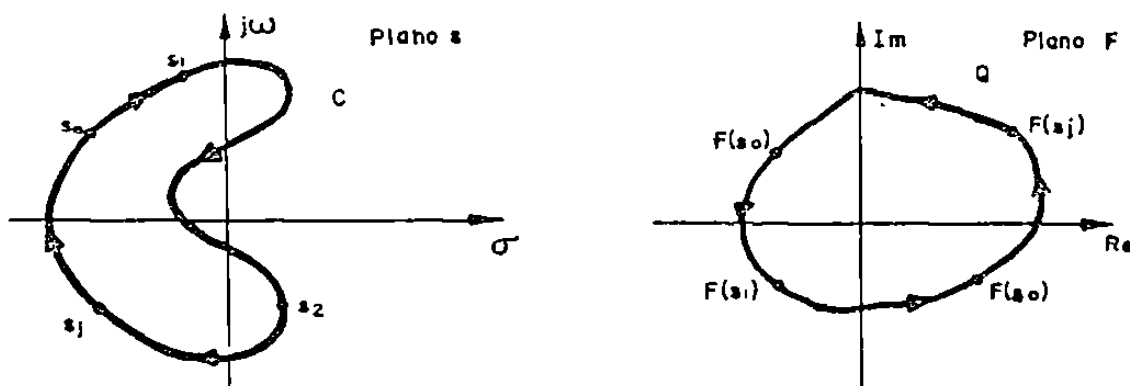


Fig. 9-39. Contorno arbitrario en el plano " s " y en plano $F(s)$.

En la fig. 9-40 se representa la ubicación de los polos y los ceros de una función compleja. Para cada valor de s , por ejemplo s_0 , la función $F(s)$ se puede representar por un punto, cuya localización en el plano $F(s)$ está dada por:

$$F(s_0) = |F(s_0)| \angle F(s_0)$$

en donde:

$$F(s_0) = \frac{\sum_1^m |s_0 + z_i|}{\sum_1^n |s_0 + p_j|}$$

$$\angle F(s_0) = \sum_1^m \angle (s_0 + z_i) - \sum_1^n \angle (s_0 + p_j)$$

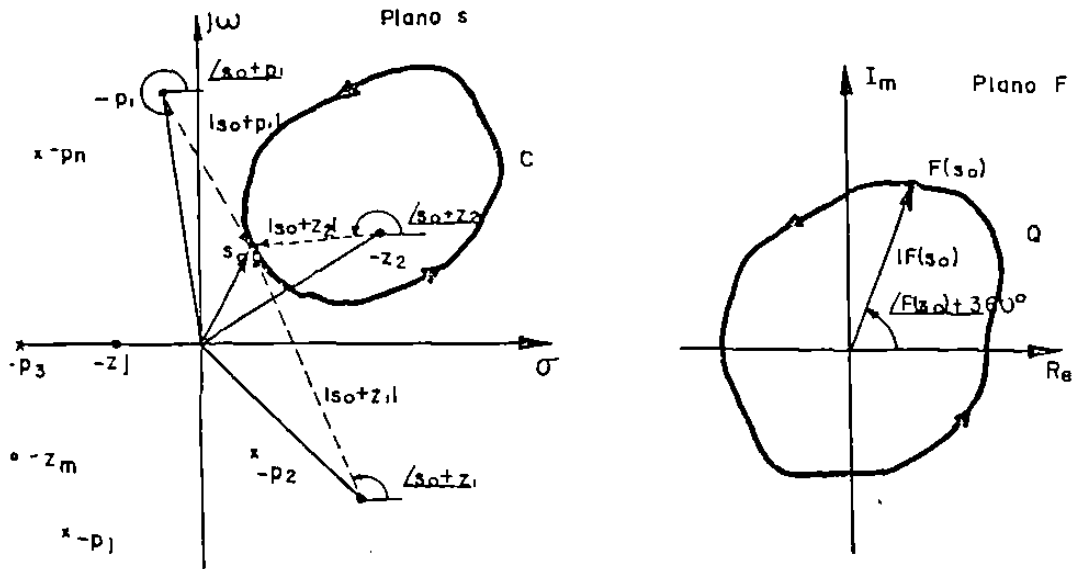


Fig. 9-40. Contorno en el Plano s y en el Plano $F(s)$ para una función compleja.

Como se puede observar en la figura, cada factor contribuye con su magnitud y su ángulo de fase al valor de la función.

En el plano "s", los factores están representados por vectores diferencia, que van de los ceros y los polos al punto en el cual se va a evaluar la función, por ejemplo, los términos $s_0 + z_1$, $s_0 + z_2$ y $s_0 + p_1$ se representan en la fig. 9-40.

Si se valúa a $F(s)$ en el contorno C , recorriéndolo en la dirección indicada, después de una revolución completa, los vectores que van desde los polos y los ceros que no se encuentran rodeados por el contorno, mantienen constante su contribución en ángulo al lugar de la función. Pero el vector que se origina en el cero $-z_2$, por estar dentro del contorno, incrementa su ángulo en 360° . Por esta razón la gráfica rodea al origen del plano $F(s)$, en la misma dirección que el contorno C en s , sobre el cual se ha valuado la función. Si en lugar de haberse rodeado un cero, se tuviera un polo, es evidente que el vector originado en éste, contribuiría también con 360° , pero negativos, a la gráfica de la función, lo cual significa que el lugar $F(s)$ rodea al origen, pero en sentido contrario a la dirección del contorno C . Si un polo y un cero fueran rodeados por el contorno, las contribuciones de ángulo en ambos se anulan y el lugar de $F(s)$ no encircularía el origen.

El número de encirculamientos alrededor del origen en el plano F está determinado por la diferencia del número de ceros (Z) y el número de polos (P) que son rodeados por el contorno en "s". Esto se puede representar mediante la siguiente ecuación:

$$N = Z - P$$

Si N es positiva, el origen del plano F(s) será rodeado en la misma dirección que el contorno en el plano "s", y si la diferencia N es negativa, el rodeo del origen en F será en sentido contrario, esto, independientemente del sentido que se haya dado al contorno en "s", ya sea el mismo sentido de giro de las manecillas del reloj o contrario. Cuando el rodeo en el plano F es en el mismo sentido que el del contorno en "s", se dice que el origen y la región rodeada por el lugar de F(s) está incluida y si el rodeo es en sentido contrario, está excluida.

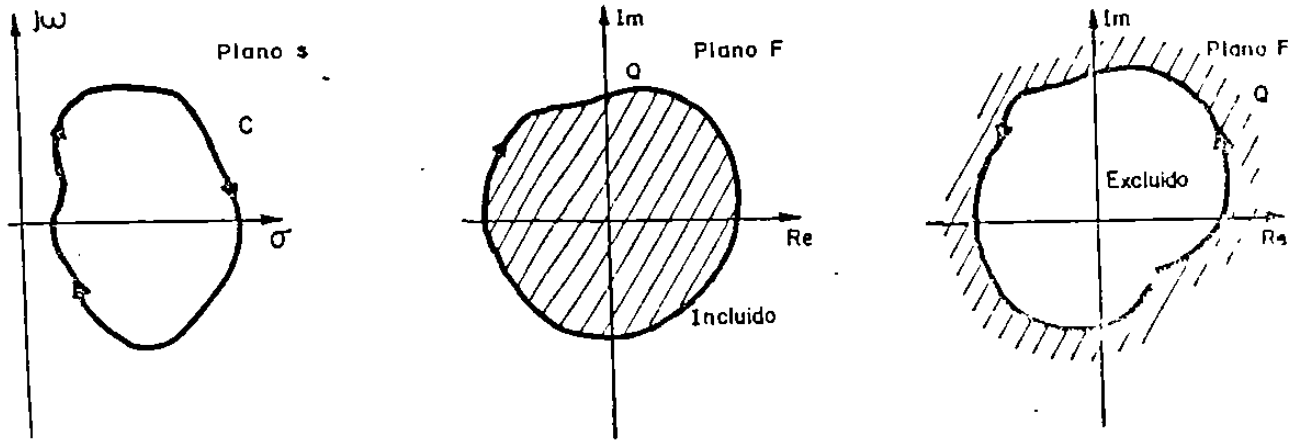


Fig. 9-41. Ejemplo de Plano "s" y Plano F, Incluido y Excluido.

9-9-3.- Procedimiento de Nyquist.

Una vez que ya se ha comprendido lo que es el Mapeo de Contornos, estudiado en la sección anterior (9-9-2), ya se tienen las bases necesarias para entender el procedimiento del Criterio de Nyquist.

Como ya se sabe cualquier sistema de control de lazo cerrado se puede representar con un diagrama de bloques como se indica en la fig. 9-42.

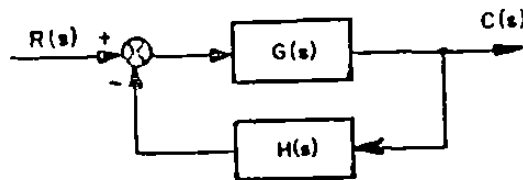


Fig. 9-42. Sistema de Control de Lazo Cerrado.

La Función de Transferencia del sistema representado en la fig. 9-42 está dada por:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Como ya se sabe también, el sistema es estable cuando las raíces de la ecuación característica están localizadas en el semiplano izquierdo del plano complejo, pudiendo ser reales o complejas, pero siempre negativas. El término $1 + G(s)H(s)$ que se representará como $F(s)$ se conoce como Ecuación Característica del sistema y se puede expresar matemáticamente en la siguiente forma:

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)} \quad (9-15)$$

En donde $-z_1, -z_2, \dots, -z_m, -p_1, -p_2, \dots, -p_n$ son respectivamente los ceros y los polos de la ecuación característica o $F(s)$.

Igualando a cero $F(s)$ se pueden calcular las raíces de la ecuación característica.

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = (s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)$$

De donde resulta que los ceros de $F(s)$ son las raíces de la ecuación característica, que también vienen siendo los polos de la función de transferencia de lazo cerrado $C(s)/R(s)$.

El producto $G(s)H(s)$ se denomina función de transferencia de lazo abierto, si se despeja de la ecuación 9-15, tenemos:

$$G(s)H(s) = F(s) - 1 = \frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_n) - (s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)}$$

Como se puede observar al comparar esta última ecuación con la 9-15, los polos de la función de transferencia de lazo abierto $G(s)H(s)$ son también los polos de la ecuación característica $F(s) = 1 + G(s)H(s)$. Estos conceptos son muy importantes para poder comprender mejor el criterio de estabilidad cuyo análisis se verá a continuación.

Suponiendo que se traza un contorno en el plano "s" como se muestra en la fig. 9-43, el cual rodea completamente la región real positiva del plano complejo. A este contorno que no debe pasar por ninguna singularidad (polo) de $F(s)$, se le denomina trayectoria de Nyquist.

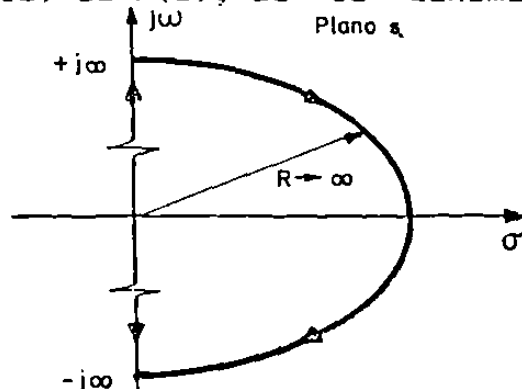


Fig. 9-43. Trayectoria de Nyquist.

Si se valúa a $F(s)$ a lo largo del contorno, el lugar de la función rodeará el origen del plano F , tantas veces como la diferencia de ceros y polos que se hallen en el semiplano derecho del plano complejo, esto es:

$$N = Z - P$$

Si $N > 0$, el origen del plano F será rodeado N veces en el mismo sentido, que el camino de Nyquist en el plano "s", siendo por lo tanto el sistema inestable. Para asegurar la estabilidad de un sistema, no debe haber ni un sólo cero de $F(s)$ en el semiplano derecho del plano complejo.

Si $N < 0$, el origen del plano F será rodeado N veces, pero ahora en sentido contrario al del camino de Nyquist. Como N nos indica la diferencia de polos y ceros, para que un sistema sea estable, el número de rodeos N debe ser igual que el número de polos, esto es $Z=0$.

Si $N = 0$, el origen del plano F no será rodeado por el lugar de $F(s)$. En este caso para que el sistema sea estable, tanto Z como P deben ser iguales a cero.

Debido a que la función de transferencia de lazo abierto $G(s)H(s)$ es más fácil de trazar que la $F(s)$ y siendo sus lugares geométricos idénticos, salvo una traslación del eje $J\omega$, el criterio de estabilidad de Nyquist se define generalmente con respecto a la gráfica $G(s)H(s)$. Como $G(s)H(s) = F(s) - 1$, el origen del plano F corresponde al punto $(-1, J0)$ del plano $G(s)H(s)$, de tal manera que los rodeos en el plano GH no se referirán a su origen, sino al punto ya mencionado $(-1, J0)$.

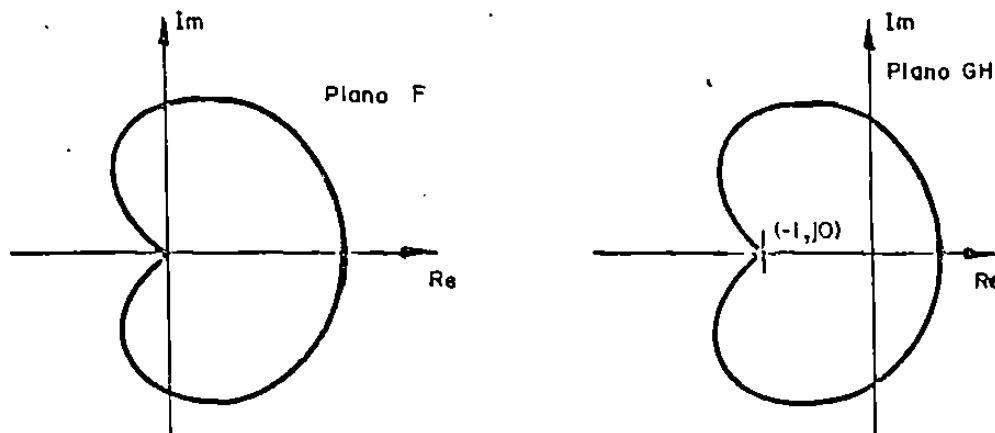


Fig. 9-44. Comparación del Plano F y el Plano GH

Siendo los polos de $G(s)H(s)$ iguales a los de $F(s)$, la trayectoria de Nyquist trazada en el plano $F(s)$ para la ecuación característica, se puede aplicar a la función de transferencia de lazo abierto GH . En la mayoría de los sistemas físicos reales, sus funciones de transferencia de lazo abierto son estables, es decir no tienen polos en el semiplano derecho del plano complejo, de tal forma que $P = 0$.

Por lo tanto el número de rodeos del punto $(-1, j0)$ por el lugar de $G(s)H(s)$, estará determinado por el número de ceros que se encuentren en la región, esto es $N = Z$. Así, un sistema será estable si el punto $(-1, j0)$ no es rodeado por el lugar de $G(s)H(s)$. Como los rodeos del punto $(-1, j0)$ debidos a los ceros, si es que los hay, serían en la misma dirección del camino de Nyquist, esto es incluyendo la región y el punto mencionado, se acostumbra decir que cuando el sistema es estable, el punto $(-1, j0)$ no está incluido. En la fig. 9-45 se muestran las gráficas de ciertos lugares $G(s)H(s)$, con las que se puede determinar la estabilidad del sistema de lazo cerrado.

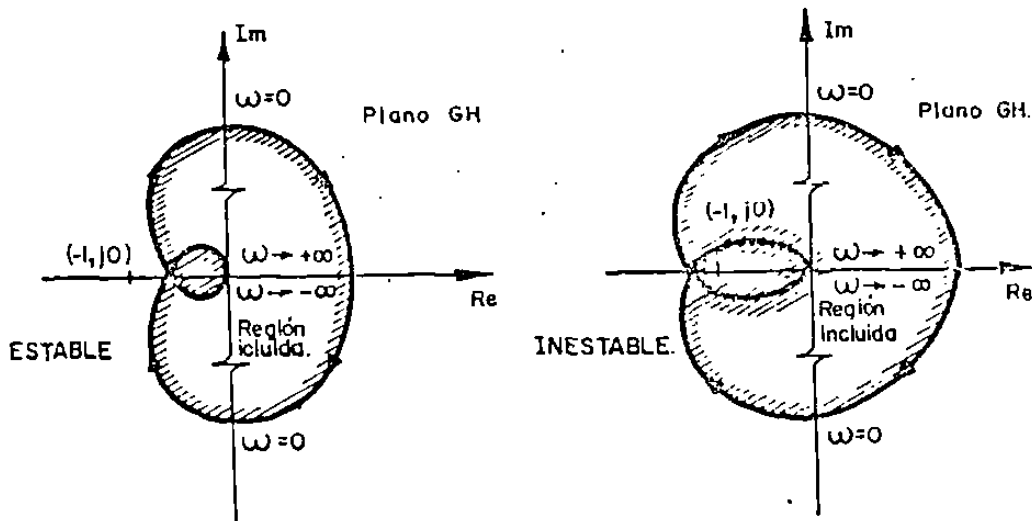


Fig. 9-45. Diagramas de Nyquist de dos sistemas de lazo cerrado.

Para el sistema estable mostrado a la izquierda en la fig. 9-45, el punto $(-1, j0)$, no está rodeado ni incluido por el lugar de $G(s)H(s)$. En cambio, para el otro sistema mostrado a la derecha en la misma figura, el punto $(-1, j0)$ es rodeado e incluido dos veces por el lugar de $G(s)H(s)$, de tal manera que si $P=0$, se tienen dos ceros (raíces de la ecuación característica) en el semiplano derecho del plano complejo, de donde se origina su condición de inestabilidad.

9-9-4.- Criterio de Nyquist Simplificado.

Cuando la función de transferencia de lazo abierto tiene sus polos situados a la izquierda del eje $j\omega$ del plano complejo, esto es $P = 0$, lo cual ocurre en la mayoría de los casos, no es necesario evaluar toda la trayectoria de Nyquist para determinar la estabilidad; basta simplemente con trazar el lugar de $G(s)H(s)$ para el tramo que va desde el origen del plano "s", hasta $s \rightarrow +j\omega$, esto es, de $\omega = 0$ a $\omega \rightarrow \infty$.

A este procedimiento se le llama Criterio de Nyquist Simplificado y su aplicación da lugar al desarrollo de gráficas como las que se muestran en la fig. 9-46.

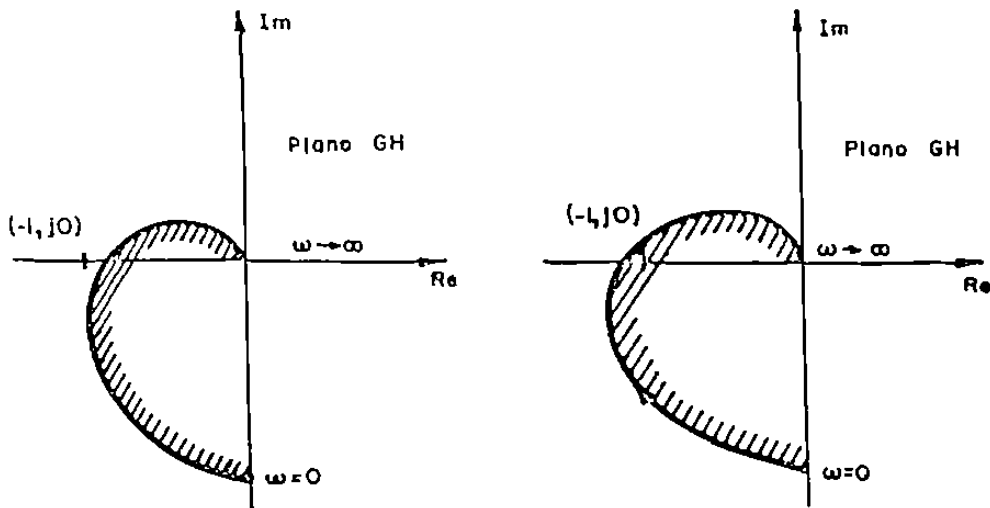


Fig. 9-46. Gráficas del Criterio de Nyquist Simplificado.

La fig 9-46 de la izquierda representa un sistema estable ya que la trayectoria de Nyquist no incluye el punto crítico $(-1, j0)$, por el contrario, la fig 9-46 de la derecha representa un sistema inestable cuya trayectoria incluye el punto $(-1, j0)$.

Cuando la Trayectoria de Nyquist cruza exactamente el punto $(-1, j0)$, esto significa que el sistema tiene ceros de $F(s)$ que son los polos de lazo cerrado en el eje $j\omega$, lo cual dará origen a una respuesta oscilatoria para cualquier señal a que se someta el sistema. Estos sistemas se denominan marginalmente estables ya que están al borde de la inestabilidad, por lo que prácticamente se pueden considerar como sistemas inestables. En la fig. 9-47 se representa un sistema marginalmente estable.

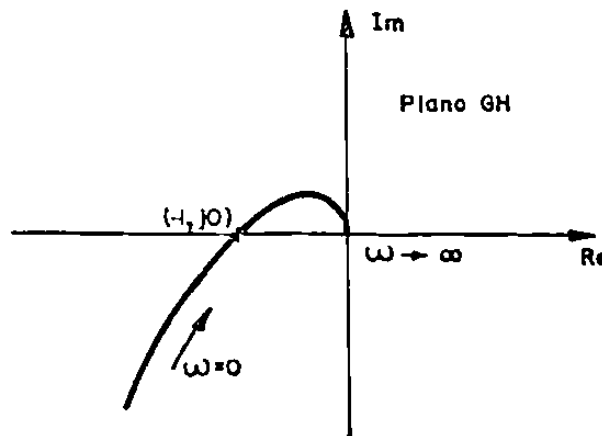


Fig. 9-47. Sistema de Control Marginalmente Estable.

9-9-5.- Aplicación del Criterio de Nyquist.

A continuación se estudiarán algunos ejemplos que servirán para ilustrar la aplicación del Criterio de Estabilidad de Nyquist.

Ejemplo No1.-Se desea determinar la estabilidad del sistema retroalimentado cuya función de transferencia de lazo abierto es:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}$$

siendo K y T cantidades reales positivas.

En primer lugar se puede ver que los polos de $G(s)H(s)$, que son los mismos de $F(s)$ están ubicados en el semiplano izquierdo del plano complejo, por lo que si hay encirculamientos del punto $(-1, j0)$ será debido a la ubicación de los ceros de $F(s)$.

En la fig. 9-48 se representa la ubicación de los polos de la función, así como el contorno de Nyquist, que para no pasar por el polo que se encuentra en el origen, efectúa un pequeño semicírculo.

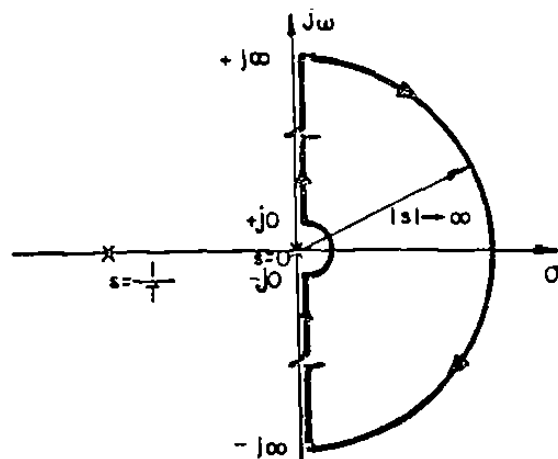


Fig. 9-48. Ubicación de Polos y Contorno de Nyquist.

Como $P = 0$, para determinar la estabilidad del sistema, bastaría con evaluar a la función en el tramo del camino de Nyquist, que va desde $\omega = 0$ hasta $\omega \rightarrow +\infty$, sin embargo, para ilustrar la aplicación completa, el análisis se hará en toda la extensión del contorno.

Ya sea que se considere toda la trayectoria o solamente una parte, sería deseable tomar un gran número de valores de "s", para tener una gráfica más exacta de la función, sin embargo, el trazado asintótico muchas veces es más que suficiente.

Si se evalúa la función primeramente a lo largo del eje imaginario, desde el origen hasta $s \rightarrow +j\infty$ o $\omega \rightarrow \infty$, se tiene:

$$G(s)H(s) \Big|_{\omega = 0^+} = \alpha \quad -90^\circ$$

$$G(s)H(s) \Big|_{\omega \rightarrow \alpha^+} = 0 \quad -180^\circ$$

El lugar de $G(s)H(s)$ para el tramo que va desde el origen hasta $s \rightarrow -j\alpha$ o $\omega \rightarrow -\alpha$, es simétrico al lugar anterior. En la figura 9-49 se puede ver el trazo de los dos tramos ya mencionados.

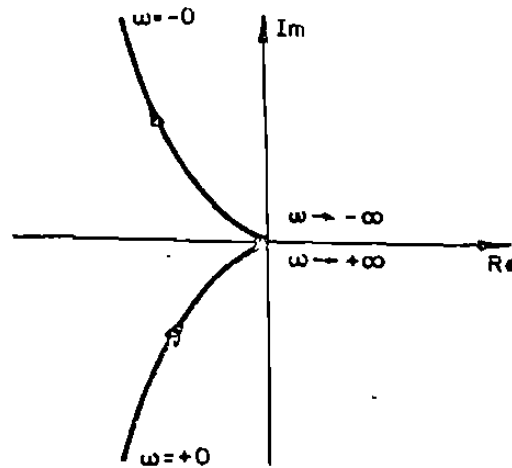


Fig. 9-49. Diagrama Parcial de Nyquist.

Para evaluar a la función en el pequeño rodeo al-rededor del origen, los puntos que forman la trayectoria se representan por medio de un vector giratorio.

$$s = \rho e^{j\theta}$$

La magnitud de ρ se considera muy pequeña ($\rho \rightarrow 0$) y su ángulo de fase varía desde -90° hasta $+90^\circ$, de tal manera que el vector se desplaza un ángulo de 180° en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Substituyendo el valor de "s" en $G(s)H(s)$ tenemos:

$$G(s)H(s) \Big|_{s=\rho e^{j\theta}} = \frac{K}{\rho e^{j\theta} (T\rho e^{j\theta} + 1)} = \frac{K}{T\rho^2 e^{2j\theta} + \rho e^{j\theta}}$$

si el valor de ρ tiende a cero (como se consideró), la expresión anterior se puede simplificar en la siguiente forma:

$$G(s)H(s) \Big|_{s=\rho e^{j\theta}} = \frac{K}{\rho e^{j\theta}} = \alpha e^{-j\theta}$$

La función $G(s)H(s)$ por lo tanto es un semicírculo, cuya magnitud tiende a infinito (∞) y su ángulo de fase va de $+90^\circ$ a -90° . En la fig 9-50 se muestra el tramo del camino de Nyquist y su lugar geométrico en el plano de la función $GH(s)$.

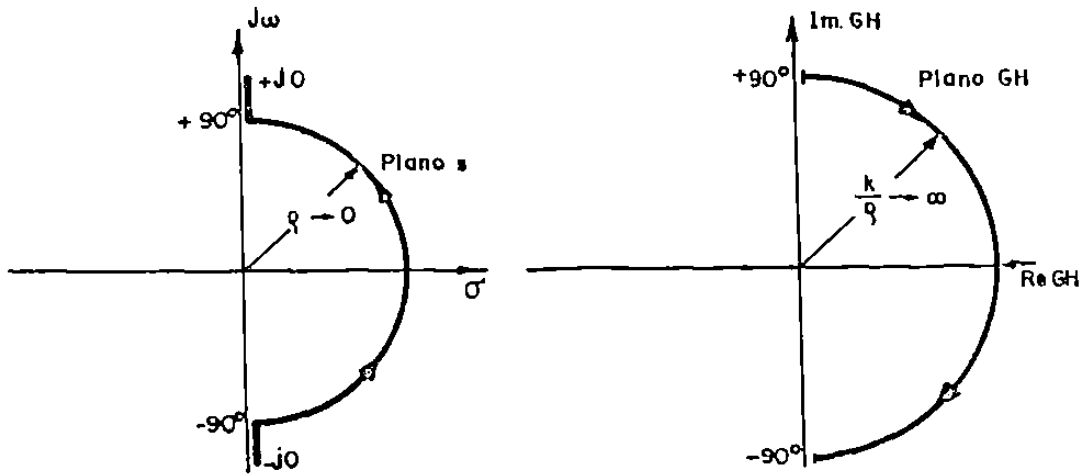


Fig. 9-50. Diagrama Parcial de Nyquist.

El último tramo del camino de Nyquist en el que falta evaluar a $G(s)H(s)$, es el lugar de "s" en el que el radio tiende a infinito (∞) y se mueve de $+j\omega$ a $-j\omega$. De manera semejante al caso anterior, los puntos que forman este tramo se representan por un vector giratorio:

$$s = \rho e^{j\theta}$$

Como la magnitud de ρ tiende a infinito y el ángulo θ varía de $+90^\circ$ a -90° , el valor de la función $G(s)H(s)$ será:

$$G(s)H(s) \Big|_{s=\rho e^{j\theta}} = \frac{K}{T\rho^2 e^{j2\theta} + \rho e^{j\theta}} = \frac{K}{T\rho^2 e^{j2\theta}} = 0 e^{-2j\theta}$$

En la figura 9-51 se puede observar el tramo del camino de Nyquist y el lugar de la función GH , el cual está dado por un vector, cuyo módulo tiende a cero en tanto gira 360° en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

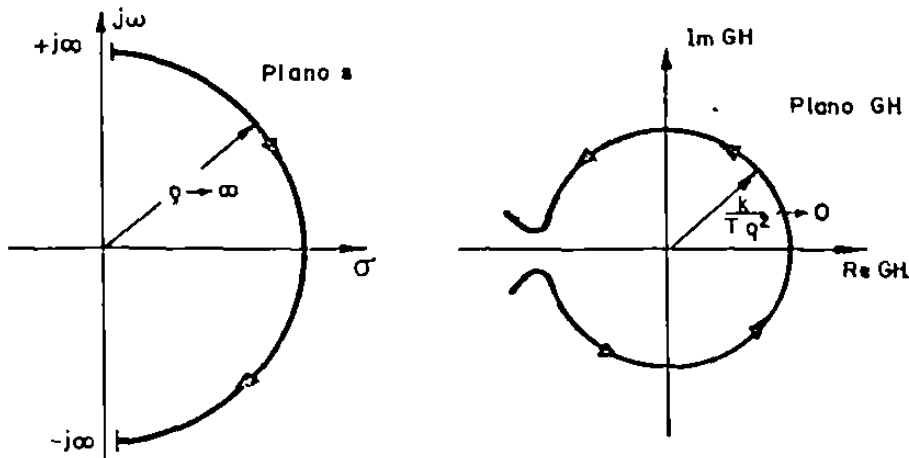


Fig. 9-51. Diagrama de Nyquist Parcial.

En la fig. 9-52 se muestra el lugar de Nyquist completo. Como se puede observar, el lugar de $G(s)H(s)$ no rodea, ni incluye al punto crítico $(-1, j0)$ por lo que se puede concluir que el sistema de control de lazo cerrado es estable.

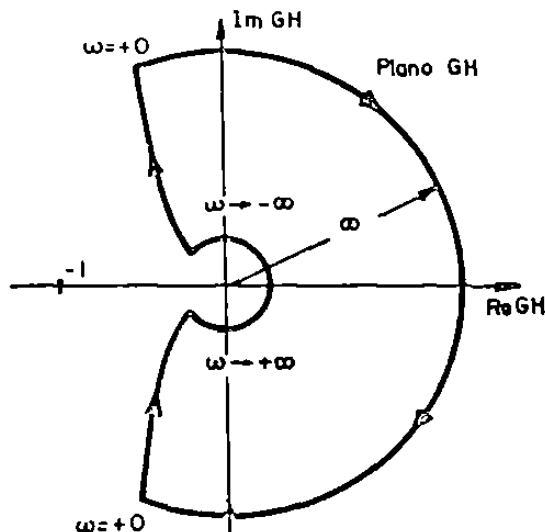


Fig. 9-52. Diagrama de Nyquist Completo.

Ejemplo No 2.-Se desea determinar la estabilidad del siguiente sistema aplicando el criterio de Nyquist.

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

en donde $K, T_1 > T_2$ son valores reales positivos. En la fig. 9-53 se puede ver la ubicación de los polos de la función, así como el camino de Nyquist sobre el cual se evaluará.

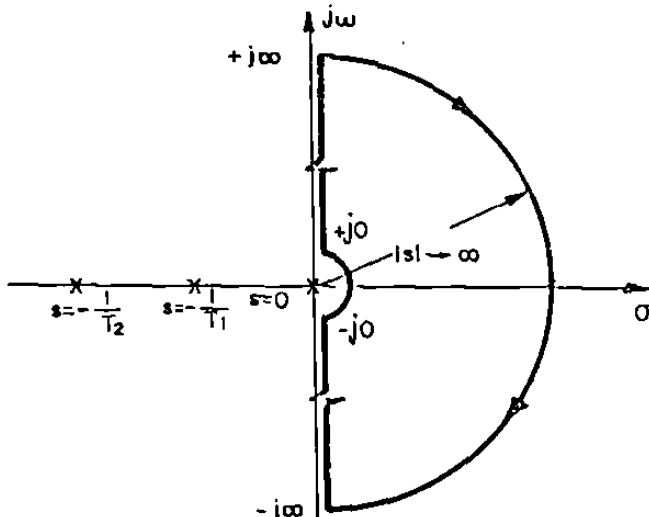


Fig. 9-53. Trayectoria de Nyquist.

Igual que en el ejemplo anterior, la función de transferencia no tiene polos, por lo que $F = 0$, por lo que para determinar la estabilidad del sistema, bastaría con aplicar el Criterio de Nyquist simplificado, esto es evaluar $G(s)H(s)$ solo en el tramo que va desde $\omega = +0$ a $\omega \rightarrow \alpha$, sin embargo, se hará el trazo completo para ilustrar el criterio. El valor de $G(s)H(s)$ para el tramo que va de $\omega = +0$ a $\omega \rightarrow \alpha$ está dado por:

$$G(s)H(s) \Big|_{\omega = +0} = \alpha \angle -90^\circ$$

$$G(s)H(s) \Big|_{\omega \rightarrow +\alpha} = 0 \angle -270^\circ$$

La gráfica de $G(s)H(s)$ que corresponde a estos valores y su lugar simétrico, que resulta de evaluar la función desde $\omega \rightarrow \alpha$ hasta $\omega = -0$ se muestra en la figura 9-54.

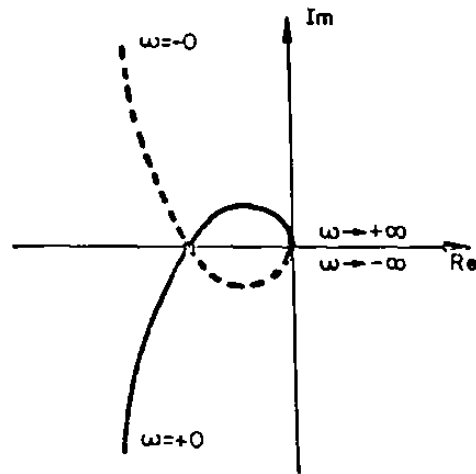


Fig. 9-54. Diagrama de Nyquist Parcial.

Para el tramo que va desde $-j0$ a $+j0$ se considera el vector giratorio

$$s = \rho e^{j\theta}$$

En donde ρ tiene un valor muy pequeño ($\rho \rightarrow 0$) y θ se desplaza 180° , desde -90° a $+90^\circ$. Substituyendo el valor de "s" en $G(s)H(s)$ tenemos:

$$G(s)H(s)_{s=\rho e^{j\theta}} = \frac{k}{\rho e^{j\theta} (T_1 \rho e^{j\theta} + 1)(T_2 \rho e^{j\theta} + 1)}$$

$$G(s)H(s) = \frac{k}{\rho e^{j\theta} [T_1 T_2 \rho^2 e^{2j\theta} + (T_1 + T_2) \rho e^{j\theta} + 1]}$$

cuando $\rho \rightarrow 0$ la expresión anterior se puede simplificar como sigue:

$$G(s)H(s) \Big|_{s = \rho e^{j\theta}} \approx \frac{r}{\rho e^{j\theta}} = \alpha e^{-j\theta}$$

El tramo del camino de Nyquist y su lugar correspondiente se pueden observar en la fig. 9-55. Notese en el hecho de que mientras el lugar en el plano "s" se mueve en sentido contrario a las manecillas del reloj, el lugar de $G(s)H(s)$ se mueve en el mismo sentido de las manecillas del reloj.

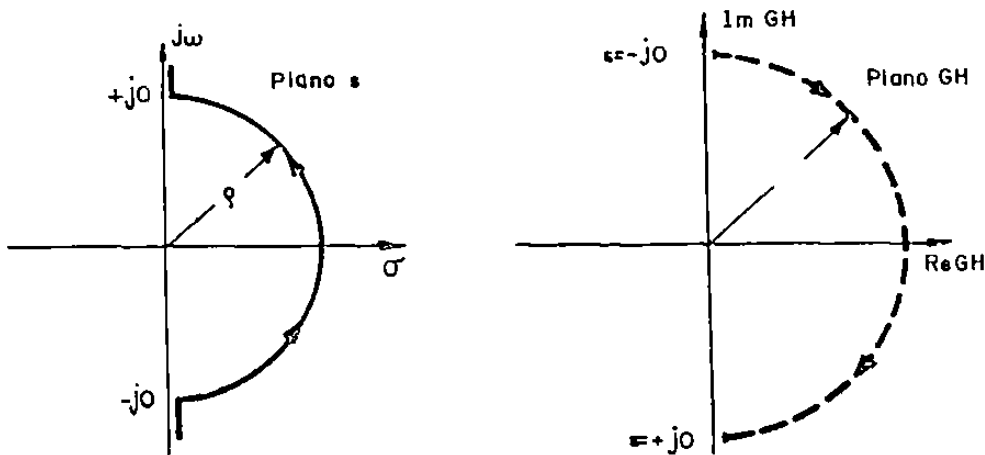


Fig. 9-55. Camino de Nyquist Parcial.

Para el último tramo del camino de Nyquist, en donde "s" va de $+j\omega$ a $-j\omega$, se considera el vector giratorio

$$s = \rho e^{j\theta}$$

en donde ρ tiende a infinito y el ángulo de fase va de $+90^\circ$ a -90° . De tal manera que:

$$G(s)H(s) \Big|_{s = \rho e^{j\theta}} = \frac{K}{\rho e^{j\theta} (T_1 \rho e^{j\theta} + 1)(T_2 \rho e^{j\theta} + 1)}$$

como ρ tiende a infinito, entonces:

$$G(s)H(s) \Big|_{s = \rho e^{j\theta}} \approx \frac{K}{T_1 T_2 \rho^2 e^{2j\theta}} = 0 e^{-2j\theta}$$

En la fig. 9-56 se muestra el lugar de la función, el cual está dado por un vector con magnitud tendiente a cero, en tanto gira 540° en sentido contrario a las manecillas del reloj.

En la fig. 9-57 se representa el diagrama completo de $G(s)H(s)$. El sistema de control puede ser estable o inestable, dependiendo del valor del módulo de la función, cuando corta el eje real negativo. Es evidente que esto depende de los valores que tengan los parámetros del sistema K , T_1 y T_2 . Por lo general T_1 y T_2 son magnitudes constantes.

por lo que la estabilidad del sistema está determinada por el valor de la ganancia k .

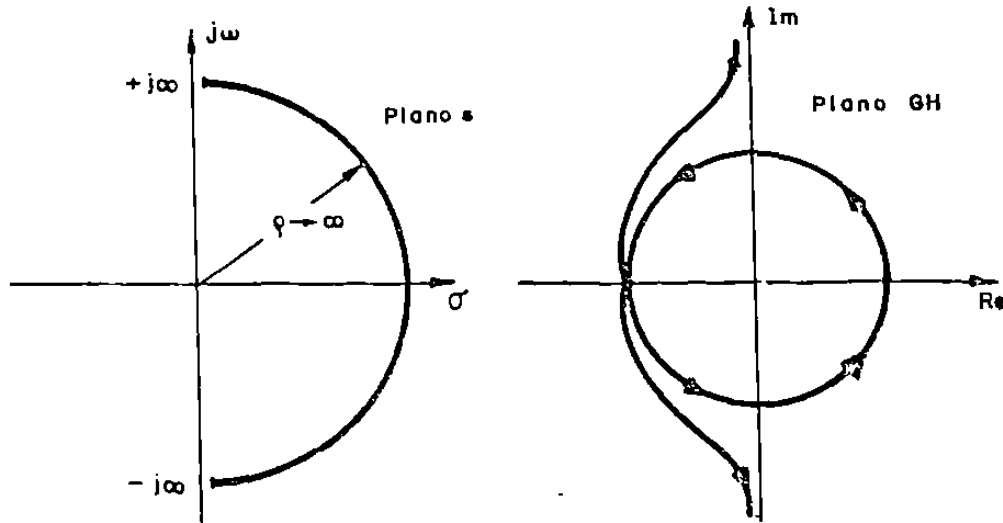


Fig. 9-56. Diagrama Parcial de Nyquist.

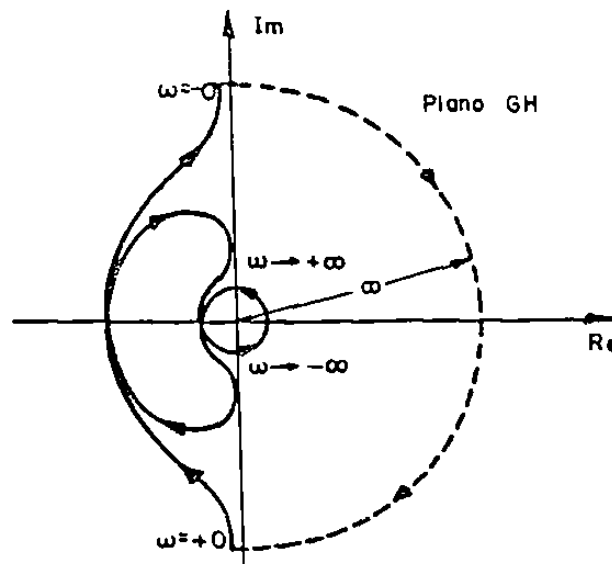


Fig. 9-57. Diagrama Completo de Nyquist.

Por ejemplo supondremos que $T_1 = 1$ y $T_2 = 0.5$, en tanto que $K = 5$, substituyendo éstos valores, la función $G(s)H(s)$ será:

$$G(s)H(s) = \frac{5}{s(s + 1)(0.5s + 1)}$$

Como el lugar de $G(s)H(s)$ corta al eje real cuando es evaluado sobre el eje imaginario del plano "s", se substituye la variable $s = j\omega$

$$\begin{aligned}
 G(j\omega)H(j\omega) &= \frac{5}{j\omega(j\omega + 1)(0.5j\omega + 1)} = \frac{5}{-1.5\omega^2 + j\omega(1 - 0.5\omega^2)} \\
 &= \frac{5}{-1.5\omega^2 + j\omega(1 - 0.5\omega^2)} \cdot \frac{-1.5\omega^2 - j\omega(1 - 0.5\omega^2)}{-1.5\omega^2 - j\omega(1 - 0.5\omega^2)} \\
 &= \frac{7.5}{2.25\omega^2 + (1 - 0.5\omega^2)^2} - j \frac{5(1 - 0.5\omega^2)}{2.25\omega^3 + \omega(1 - 0.5\omega^2)^2}
 \end{aligned}$$

Cuando la gráfica de la función corta al eje real, el valor de la parte imaginaria es cero, de tal manera que:

$$\frac{5(1 - 0.5\omega^2)}{2.25\omega^3 + \omega(1 - 0.5\omega^2)^2} = 0$$

de donde $5 - 2.5\omega^2 = 0$ $\omega^2 = 2$ y $\omega = \pm \sqrt{2}$

Este valor de frecuencia es al cual ocurre el corte del eje real. Substituyendo $\omega = \sqrt{2}$ en la ecuación de la función, se obtiene la intersección

$$G(j\sqrt{2})H(j\sqrt{2}) = \frac{7.5}{2.25 \times 2 + (1 - 0.5 \times 2)^2} = 1.66$$

Aplicando el criterio de Nyquist simplificado, se puede ver en la figura 9-58 que la gráfica $G(s)H(s)$ incluye el punto crítico $(-1, j0)$ por lo que el sistema de control, para éste valor de ganancia $(K=5)$ es inestable.

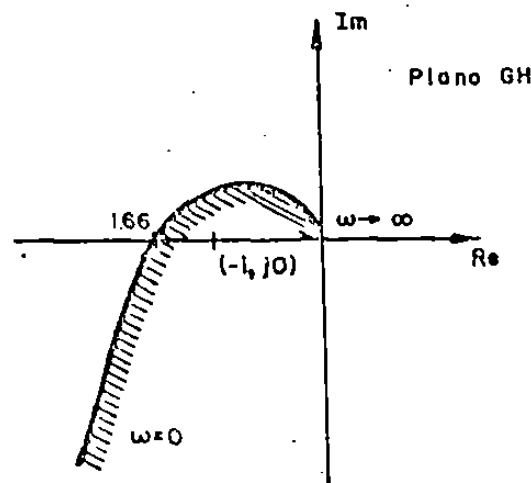


Fig. 9-58. Diagrama de Nyquist Simplificado.

Continuando con el mismo ejemplo, se hará el análisis del sistema cuando $k = 2$. Con éste valor de la ganancia

$$G(s)H(s) = \frac{2}{s(s + 1)(0.5s + 1)}$$

Substituyendo $s = j\omega$, tenemos:

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{2}{j\omega(j\omega + 1)(0.5j\omega + 1)}$$

$$G(j\omega)H(j\omega) = - \frac{3}{2.25\omega^2 + (1 - 0.5\omega^2)^2} - j \frac{2(1 - 0.5\omega^2)}{2.25\omega^3 + \omega(1 - 0.5)^2}$$

Haciendo la parte imaginaria igual a cero, (debido al corte del eje real) se encuentra que la frecuencia a la cual la función corta el eje real, tiene el mismo valor que en el caso anterior, es decir $\omega = \sqrt{2}$. De esta manera, la intersección con el eje real viene dada por:

$$G(j\sqrt{2})H(j\sqrt{2}) = \frac{3}{2.25 \times 2 + (1 - 0.5 \times 2)^2} = 0.66$$

En la fig. 9-59 se representa la gráfica de la función, en donde se puede observar que el punto crítico no es incluido por esta, por lo tanto el sistema es estable.

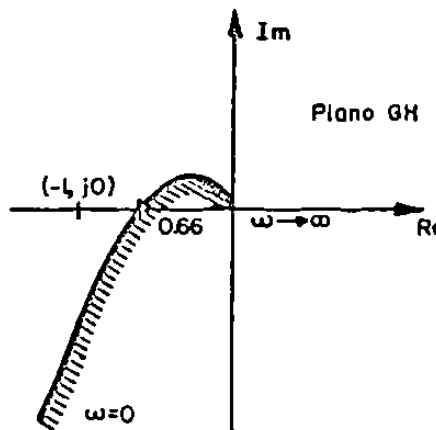


Fig. 9-59. Diagrama de Nyquist Simplificado.

Del análisis anterior se desprende que, entre menor sea el valor de la ganancia, el sistema es más estable. El valor crítico de K , esto es el máximo valor que puede tomar sin hacer inestable al sistema se puede obtener aplicando el criterio de Routh.

La ecuación característica del sistema es:

$$0.5s^3 + 1.5s^2 + s + k = 0$$

El arreglo de Routh es el siguiente:

s^3	0.5	1
s^2	1.5	K
s^1	$\frac{1.5 - 0.5K}{1.5}$	
s^0	K	

El rango de estabilidad se obtiene del término fraccionario igualado a cero:

$$\frac{1.5 - 0.5K}{1.5} = 0 \quad \text{de donde} \quad K = 3$$

El resultado anterior significa que el sistema será estable si la ganancia toma valores menores de 3. Si $K = 3$, el sistema será marginalmente estable (límite máximo de estabilidad). Por último para valores de K mayores de 3, el sistema es inestable.

9-9-6.- Estabilidad Relativa.

Se ha mencionado que no basta que un sistema tenga estabilidad absoluta, también es muy importante su estabilidad relativa. La Estabilidad Relativa nos indica que tan cerca o que tan lejos está un sistema de control de perder la estabilidad, y ésta se puede determinar aplicando el Criterio de Nyquist.

En la fig. 9-60 se muestran las gráficas de la respuesta de un sistema para diferentes valores de ganancia. Obsérvese que si la ganancia es elevada, el lugar de las raíces se aproxima peligrosamente al punto crítico $(-1, j0)$, y cuando la ganancia disminuye el lugar se aleja del punto. Evidentemente cuando la ganancia es elevada, la estabilidad del sistema será menor.

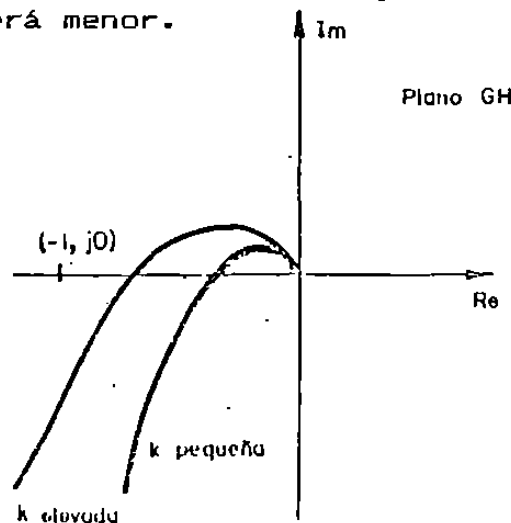


Fig. 9-60. Diagramas de Nyquist con diferentes ganancias.

En general, cuanto más se acerque la grafica de $G(s)H(s)$ al punto critico, el sistema tendrá una respuesta más oscilatoria. Por lo tanto se puede utilizar la distancia entre el lugar de la funcion y el punto $(-1, j0)$ como una medida de la estabilidad relativa del sistema. Esta distancia se expresa mediante dos términos denominados margen de fase y margen de ganancia.

Margen de Ganancia.

El margen de ganancia se define como el reciproco de $G(j\omega)H(j\omega)$ cuando el ángulo de fase es de -180° . Si se representa con ω_c la frecuencia a la cual ocurre el corte del eje real negativo, el margen de ganancia se puede representar como sigue:

$$M.G. = \frac{1}{G(j\omega_c)H(j\omega_c)}$$

El Margen de Ganancia expresado en decibeles es:

$$M.G. \text{ en dB} = 20 \log \frac{1}{G(j\omega_c)H(j\omega_c)}$$

Cuando $|G(j\omega_c)H(j\omega_c)|$ es menor que 1, el margen de ganancia es positivo y su valor se puede interpretar como la ganancia mínima adicional, que hará al sistema inestable. En caso contrario cuando el valor $G(j\omega_c)H(j\omega_c)$ es mayor que uno, el margen de ganancia es negativo y su valor se interpreta como la ganancia mínima que debe reducirse para llevar al sistema al margen de la estabilidad. En la fig. 9-61 se puede ver el margen de ganancia. Es importante observar que para un sistema estable, corresponde un margen de ganancia positivo.

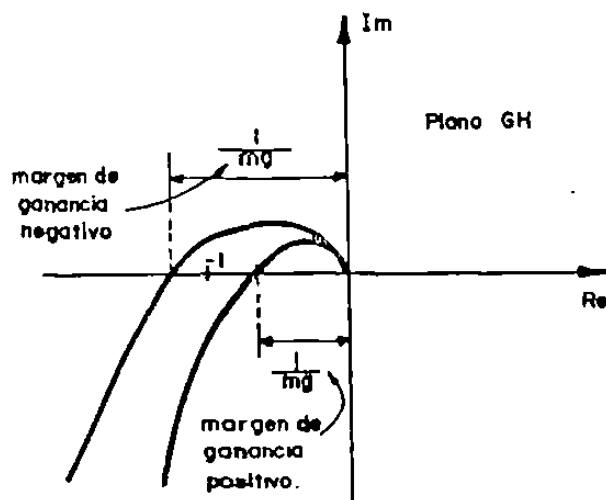


Fig. 9-61. Margen de Ganancia

Margen de Fase.

El margen de fase se define como el ángulo que hay entre el eje real negativo y el lugar de la función cuando su módulo es unitario. La frecuencia a la cual ocurre la definiremos por ω_g .

El margen de fase se representará por la letra griega γ , siendo $\gamma = 180^\circ + \phi$, en donde ϕ es negativo. En la fig. 9-62 se puede observar el margen de fase tanto para un sistema estable como para uno inestable. Para un sistema estable corresponde un margen de fase positivo ($\gamma > 0$) y para un sistema inestable un margen de fase negativo, o sea ($\gamma < 0$).

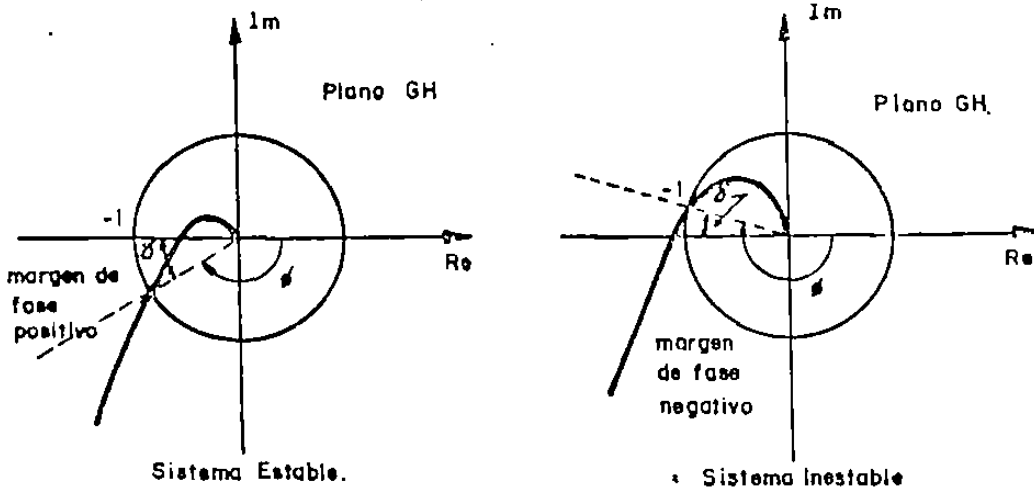


Fig. 9-62. Margen de Fase.

9-9-7.- Colección de Gráficas de Nyquist.

En la fig. 9-63 se representan diferentes gráficas de Nyquist. Las áreas en el plano GH circundadas por la gráfica se han sombreado.

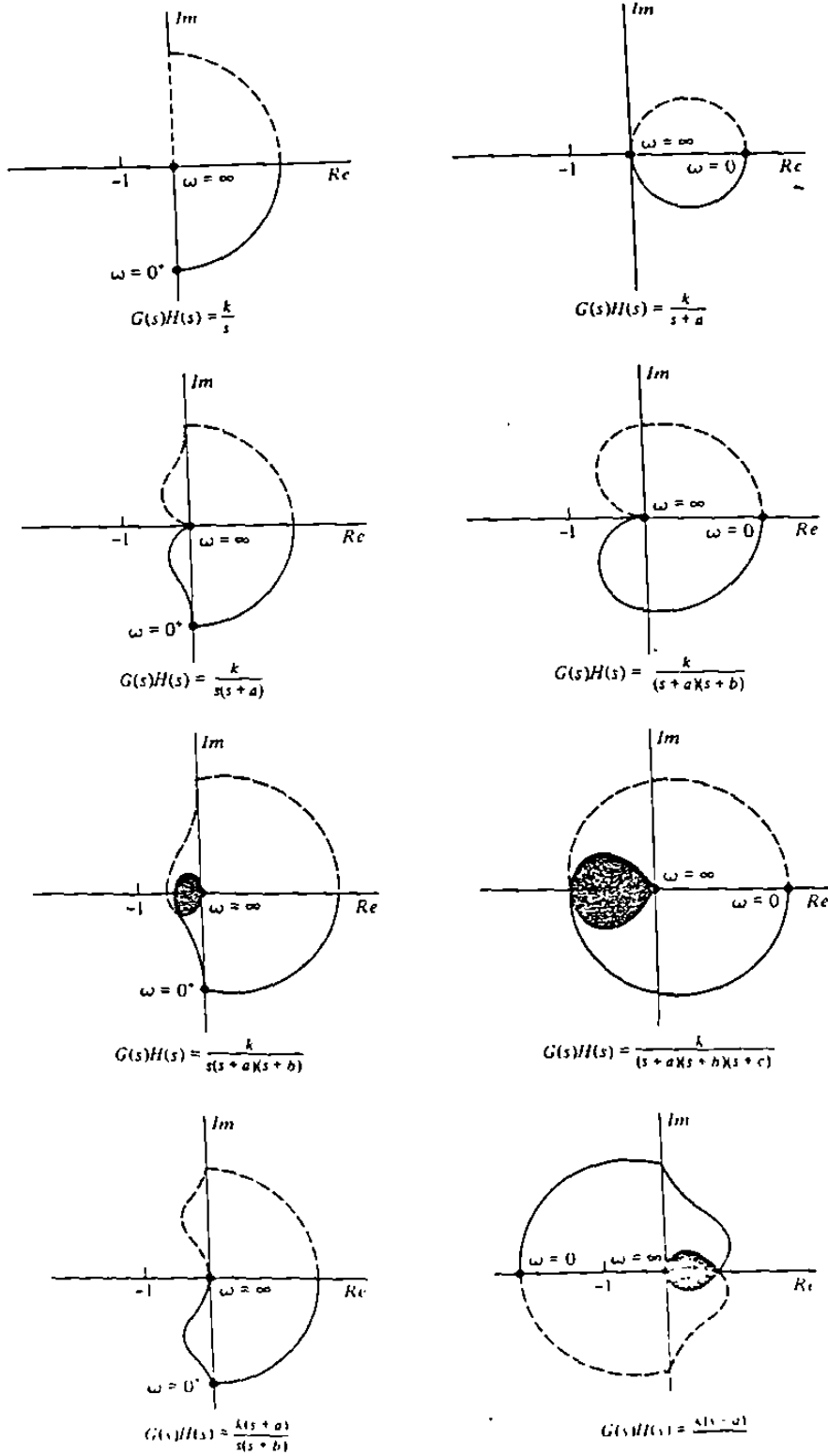


Fig. 9-63. Gráficas de Nyquist

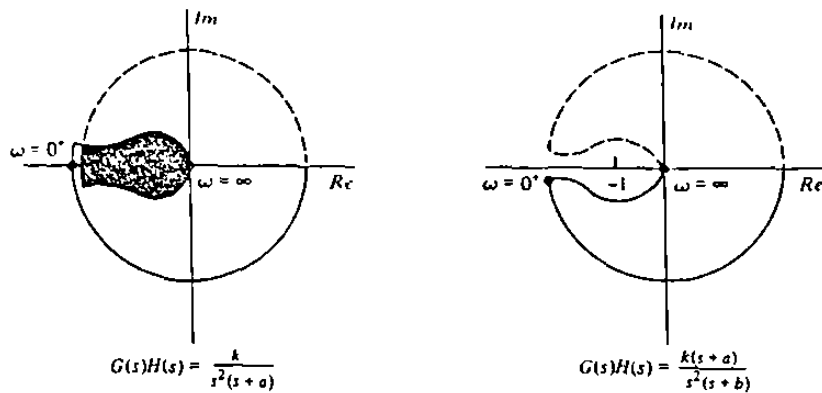


Fig. 9-64.- Gráficas de Nyquist (continuación)

9-9-8.- Ejercicios.

1.- Dibujar las gráficas de Nyquist de los sistemas de control con las siguientes funciones de transferencia. Una vez trazada la gráfica determinar si el sistema es estable o inestable.

- | | | |
|----|------------------------------------|-----------------|
| a) | $G(s)H(s) = \frac{s}{s+4}$ | Resp. estable |
| b) | $G(s)H(s) = \frac{10}{(s+2)(s+6)}$ | Resp. estable |
| c) | $G(s)H(s) = \frac{1}{s(s^2+4)}$ | Resp. inestable |
| d) | $G(s)H(s) = \frac{s^2}{s^2+2s+10}$ | Resp. estable |
| e) | $G(s)H(s) = \frac{2}{s^2(s+3)}$ | Resp. inestable |

2.- Para los siguientes sistemas de control retroalimentados, trazar las gráficas de Nyquist y determinar si los sistemas son estables o inestables. Resp. a)estable b)inestable c)estable.

9-10.-Gráficas del Módulo en función del Angulo. Lugar de BLACK.

Para trazar estas gráficas se utilizan coordenadas rectangulares, con las ordenadas en decibeles y las abscisas en grados. Esta gráfica de la magnitud de una función de transferencia en función del ángulo de fase, con la frecuencia como parámetro se conoce como "Lugar de Black". teniendo la ventaja de contener en un solo trazado la información sobre la Magnitud o Moduloy la Fase o Angulo, en contraste con el Lugar de Bode que está formado por dos curvas.

En la fig.9-65 se representan las gráficas de algunos términos, cuyo lugar se traza generalmente a partir del Lugar de Bode, trasladando los datos de las curvas de Módulo y de Fase al Plano de Black.

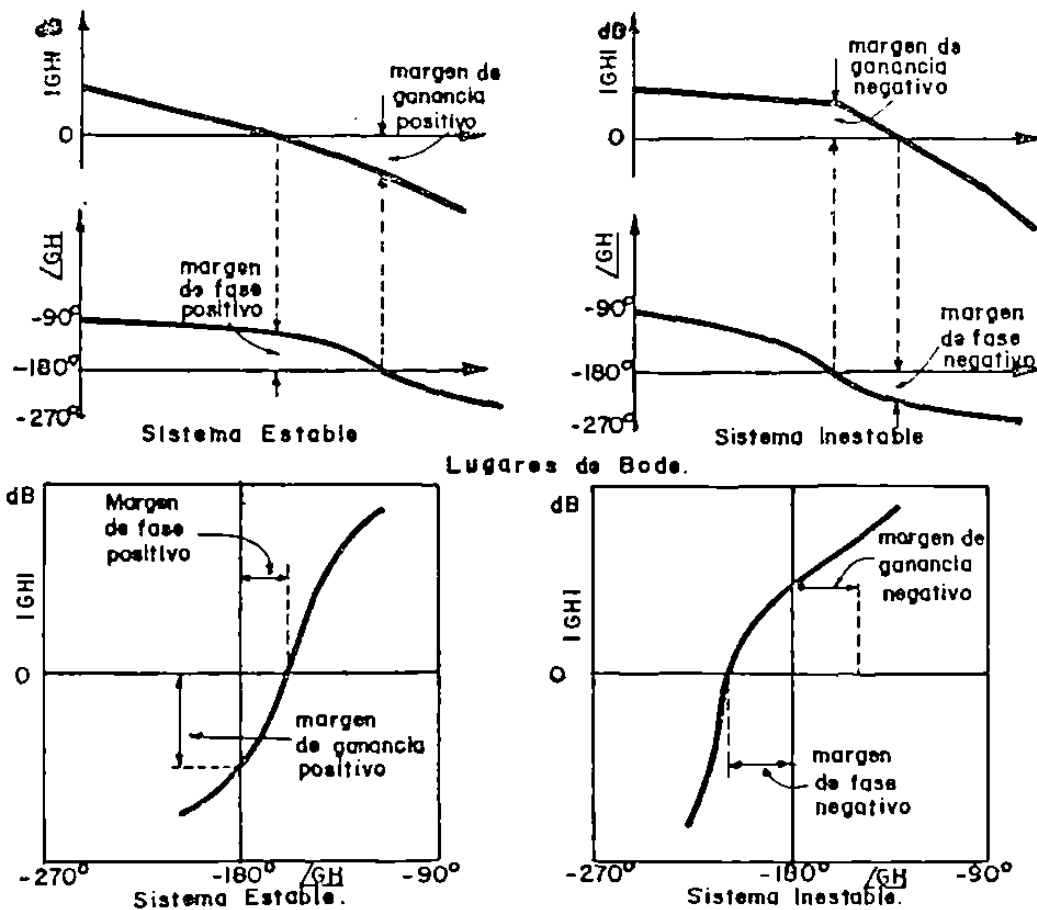


Fig. 9-65. Lugar de BLACK

9-11.- Lugares de Amplitud Constante "M" y Fase Constante "N" en el Plano Complejo.

A la Magnitud o amplitud de una función de transferencia se le representa con la letra "M". Especialmente tiene una gran importancia el valor máximo de la magnitud M_r , y la frecuencia a la cual se presenta dicho valor máximo ω_r . La importancia radica en el hecho de que el valor máximo M_r , guarda una estrecha relación con el coeficiente de amortiguamiento, cuyo valor es indicativo de la estabilidad del sistema. Por otro lado, la frecuencia de resonancia ω_r es una medida de la rapidez de la respuesta de un sistema de control.

Cuando se está manejando una función de transferencia de orden elevado, el trazado de dicha función de transferencia en lazo cerrado es bastante laborioso, por lo que la obtención de los valores de M_r y ω_r presentan en estos casos cierta dificultad. Para determinar estos valores a partir de la función de transferencia de lazo abierto se han desarrollado algunos métodos. A continuación se analizarán estos métodos.

9-11-1.- Lugar de Amplitud Constante "M".

Un sistema de control con retroalimentación unitaria y cuya función de transferencia de lazo abierto es $G(j\omega)$, se puede representar por medio de coordenadas rectangulares en el plano complejo como:

$$G(j\omega) = x + jy$$

La función de transferencia de lazo cerrado se puede escribir como:

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)} = \frac{x + jy}{1 + x + jy}$$

Cuyo módulo se puede representar por M, en donde:

$$M = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{(1+x)^2 + y^2}} \quad \text{o bien} \quad M^2 = \frac{x^2 + y^2}{(1+x)^2 + y^2}$$

Agrupando los términos "x", "y" y "M", se puede demostrar que se cumple con la siguiente ecuación:

$$\left[x + \frac{M^2}{M^2-1} \right]^2 + y^2 = \frac{M^2}{(M^2-1)^2} \quad (9-15)$$

En seguida se demostrará la ecuación 9-15. Si al estudiante no le interesa esta demostración, puede brincar esta parte y continuar el análisis posterior. Para realizar la demostración, primero se desarrollará la parte izquierda de la igualdad y posteriormente la parte derecha, si las dos partes desarrolladas son iguales, la ecuación se cumplirá.

Substituyendo el valor de M^2 en la parte izquierda de la ecuación 9-15 tendremos:

$$\begin{aligned}
 \left[x + \frac{M^2}{M^2-1} \right]^2 + v^2 &= \left[x + \frac{\frac{x^2 + v^2}{(1+x)^2 + v^2}}{\frac{x^2 + v^2}{(1+x)^2 + v^2} - 1} \right]^2 + v^2 = \\
 \left[x + \frac{\frac{x^2 + v^2}{(1+x)^2 + v^2}}{\frac{x^2 + v^2 - (1+x)^2 - v^2}{(1+x)^2 + v^2}} \right]^2 + v^2 &= \left[x + \frac{x^2 + v^2}{x^2 - (1 + 2x + x^2)} \right]^2 + v^2 = \\
 = \left[x + \frac{x^2 + v^2}{x^2 - 1 - 2x - x^2} \right]^2 + v^2 &= \left[x + \frac{x^2 + v^2}{-1 - 2x} \right]^2 + v^2 = \\
 = \left[\frac{x(-1-2x) + x^2 + v^2}{(-1-2x)} \right]^2 + v^2 &= \left[\frac{-x - 2x^2 + x^2 + v^2}{(-1-2x)} \right]^2 + v^2 = \\
 = \left[\frac{-x - x^2 + v^2}{(-1-2x)} \right]^2 + v^2 &= \left[\frac{x^2 + 2x^3 + x^4 - 2xv^2 - 2x^2v^2 + v^4}{(-1-2x)^2} \right]^2 + v^2 = \\
 = \frac{x^2 + 2x^3 + x^4 - 2xv^2 - 2x^2v^2 + v^4 + v^2(1 + 4x + 4x^2)}{(-1-2x)^2} &= \\
 = \frac{x^2 + 2x^3 + x^4 - 2xv^2 - 2x^2v^2 + v^4 + v^2 + 4xv^2 + 4x^2v^2}{(-1-2x)^2} &= \\
 = \frac{x^2 + 2x^3 + x^4 + 2xv^2 + 2x^2v^2 + v^4 + v^2}{(-1-2x)^2} & \quad (9-16)
 \end{aligned}$$

Desarrollando la parte derecha de la ecuación 9-15, tenemos:

$$\frac{M^2}{(M^2-1)^2} = \frac{\frac{x^2 + v^2}{(1+x)^2 + v^2}}{\left[\frac{x^2 + v^2}{(1+x)^2 + v^2} - 1 \right]^2} = \frac{\frac{x^2 + v^2}{(1+x)^2 + v^2}}{\left[\frac{x^2 + v^2 - (1+x)^2 - v^2}{(1+x)^2 + v^2} \right]^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{x^2 + v^2}{(1+x)^2 + v^2}}{\left[\frac{x^2 + v^2 - 1 - 2x - x^2 - v^2}{(1+x)^2 + v^2} \right]^2} = \frac{\frac{x^2 + v^2}{(1+x)^2 + v^2}}{\frac{(-1 - 2x)^2}{[(1+x)^2 + v^2]^2}} = \frac{(x^2 + v^2)[(1+x)^2 + v^2]}{(-1 - 2x)^2} = \\
&= \frac{(x^2 + v^2)[1 + 2x + x^2 + v^2]}{(-1 - 2x)^2} = \frac{x^2 + 2x^3 + x^4 + x^2v^2 + v^2 + 2xv^2 + x^2y^2 + v^4}{(-1 - 2x)^2} = \\
&= \frac{x^2 + 2x^3 + x^4 + 2xv^2 + 2x^2v^2 + v^4 + v^2}{(-1 - 2x)^2} \quad (9-17)
\end{aligned}$$

Comparando las dos expresiones 9-16 y 9-17 se concluye que son exactamente iguales, con lo cual se demuestra el cumplimiento de la ecuación 9-15.

Continuando el análisis de la ecuación 9-15, se puede ver que con excepción del valor de $M = 1$, dicha ecuación representa la ecuación algebraica de una circunferencia cuyo centro está ubicado en las coordenadas:

$$x = -\frac{M^2}{M^2 - 1} \quad v = 0$$

y con un radio igual a:

$$r = \frac{M}{(M^2 - 1)}$$

En la fig. 9-66 se representa una familia de curvas para diferentes valores de "M", los cuales están tabulados en la tabla 9-3. Cuando el valor del módulo es igual a 1, se tiene una recta paralela al eje "v", que pasa por el punto $x=1/2$. Cuando "M" es mayor que 1, los centros de las circunferencias se localizan a la izquierda del punto $(-1, j0)$, por el contrario, para valores de "M" menores que 1, los centros se localizan a la derecha. Observese que cuando "M" tiende a infinito, el centro del círculo tiende hacia el punto crítico $(-1, j0)$ y su radio tiende a cero. Esto significa que el coeficiente de amortiguamiento del sistema de control se va reduciendo (tendiendo a cero) y por lo tanto también se va perdiendo su grado de estabilidad.

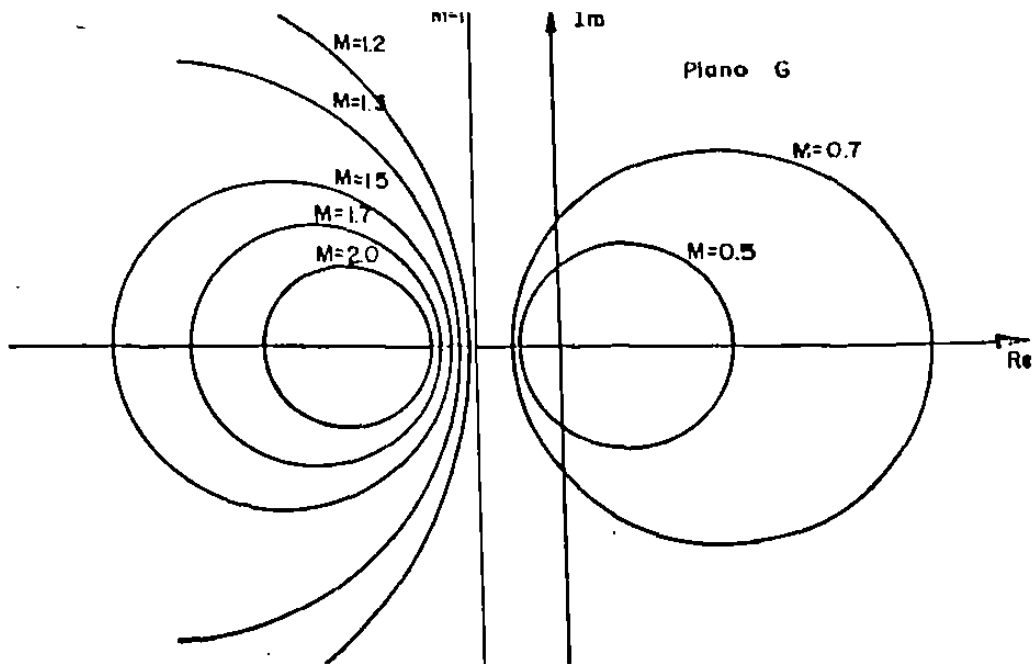


Fig. 9-66.- Familia de Curvas para "M" constante.

Tabla 9-3.

M	Centro $x = -[M^2/(M^2-1)]$	Radio $r = M/(M^2-1) $
0.5	0.333	0.67
0.7	0.960	1.37
1.0	∞	∞
1.1	-5.76	5.24
1.2	-3.27	2.73
1.3	-2.45	1.88
1.4	-2.04	1.46
1.5	-1.8	1.20
1.6	-1.64	1.03
1.7	-1.53	0.90
1.8	-1.45	0.80
1.9	-1.38	0.729
2.0	-1.33	0.67
2.5	-1.19	0.48
3.0	-1.13	0.38
3.5	-1.10	0.34
4.0	-1.07	0.27
5.0	-1.04	0.21

9-11-2.- Lugar de ángulo de Fase Constante "N".

Las gráficas de ángulo de fase constante de una función de transferencia de lazo cerrado se puede obtener de manera semejante a las gráficas de módulo o amplitud. Partiremos para ello igualmente de la función de transferencia de lazo cerrado de un sistema de control con retroalimentación unitaria:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

substituyendo $s = j\omega$, justificación que ya se vió anteriormente cuando se trabaja en función de la frecuencia, la función de transferencia es:

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)}$$

si representamos $G(j\omega)$ en coordenadas rectangulares como $G(j\omega) = x + jy$ y denominamos con la letra ϕ al ángulo de fase de la función de transferencia, matematicamente el ángulo ϕ se puede representar como sigue:

$$\phi = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)} = \frac{x + jy}{1 + x + jy}$$

El ángulo ϕ también lo podemos representar como la diferencia de dos ángulos, el ángulo del numerador $(x + jy)$ y el ángulo del denominador $(1 + x + jy)$ como se indica en la siguiente ecuación:

$$\phi = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \text{Tan}^{-1}\left(\frac{y}{1+x}\right)$$

Si calculamos la tangente de ϕ de la ecuación anterior, obtendríamos:

$$\text{Tan } \phi = \text{Tan} \left[\text{Tan}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \text{Tan}^{-1}\left(\frac{y}{1+x}\right) \right]$$

Definiendo $N = \text{Tan } \phi$ y aplicando la siguiente identidad trigonométrica a la ecuación anterior:

$$\text{Tan} (A - B) = \frac{\text{Tan } A - \text{Tan } B}{1 + \text{Tan } A \text{ Tan } B}$$

$$\text{donde Tan } A = \text{Tan} \left[\text{Tan}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \right] = \frac{y}{x}$$

$$\text{y Tan } B = \text{Tan} \left[\text{Tan}^{-1}\left(\frac{y}{1+x}\right) \right] = \frac{y}{1+x}$$

obtenemos el valor de N en función de "x" y "y" como se representa:

$$N = \frac{\frac{y}{x} - \frac{y}{1+x}}{1 + \frac{y}{x} \left(\frac{y}{1+x}\right)}$$

$$N = \frac{\frac{y(1+x) - yx}{x(1+x)}}{\frac{x(1+x) + y^2}{x(1+x)}} = \frac{y}{x + x^2 + y^2} \quad (9-18)$$

La ecuación 9-18 de la página anterior se puede representar en la siguiente forma equivalente:

$$x^2 + x + y^2 = \frac{y}{N} \quad \text{o bien} \quad x^2 + x + y^2 - \frac{y}{N} = 0$$

si agregamos el término $(1/4+1/4N^2)$ a ambos miembros de la ecuación anterior tenemos:

$$x^2 + x + y^2 - \frac{y}{N} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4N^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4N^2}$$

reacomodando los términos de la ecuación anterior en la siguiente forma:

$$\left[x^2 + x + \frac{1}{4} \right] + \left[y^2 - \frac{y}{N} + \frac{1}{4N^2} \right] = \frac{1}{4} \left[1 + \frac{1}{N^2} \right]$$

podemos llegar finalmente a la siguiente ecuación equivalente:

$$\left[x + \frac{1}{2} \right]^2 + \left[y - \frac{1}{2N} \right]^2 = \frac{1}{4} \left[\frac{N^2 + 1}{N^2} \right] \quad (9-19)$$

La ecuación 9-19 representa una circunferencia con centro en

$$x = -\frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{2N} \quad \text{y con un radio igual a} \quad \frac{1}{2} \left[\frac{N^2 + 1}{N^2} \right]^{1/2}.$$

Por ejemplo, si en la ecuación 9-19 el ángulo ϕ es igual a 30° , el valor de $N = \tan \phi = \tan 30^\circ = 0.577$ y se puede calcular que para un ángulo $\phi = 30^\circ$, el centro de la circunferencia es:

$$x = -0.5, \quad y = \frac{1}{2(0.577)} = 0.866$$

$$\text{y el radio es} \quad r = \frac{1}{2} \left[\frac{(0.577)^2 + 1}{(0.577)^2} \right]^{1/2} = \frac{1}{2} \left[\frac{0.3329 + 1}{0.3329} \right] = 1$$

Como la ecuación 9-19 se satisface cuando $x = y = 0$ y cuando $x = -1$ y $y = 0$, independientemente del valor de N , cada circunferencia pasa por el origen y por el punto $-1 + j0$. Se pueden trazar fácilmente los lugares del ángulo ϕ constante, una vez calculado el valor de N .

En la fig. 9-67 se representa una familia de curvas de ángulo de fase constante para diferentes valores del ángulo ϕ . Además en la tabla 9-4 se dan los valores de N , centro y radio para los valores del ángulo ϕ .

Es importante hacer notar que el lugar de N constante para un valor dado de ϕ , en realidad no es toda la circunferencia, sino solamente un arco. En otras palabras, los arcos de $\phi = 30^\circ$ y $\phi = 150^\circ$ son partes de la misma circunferencia. Esto se debe a que la tangente de un ángulo se mantiene igual si se añade $\pm 180^\circ$ o múltiplos de ese ángulo.

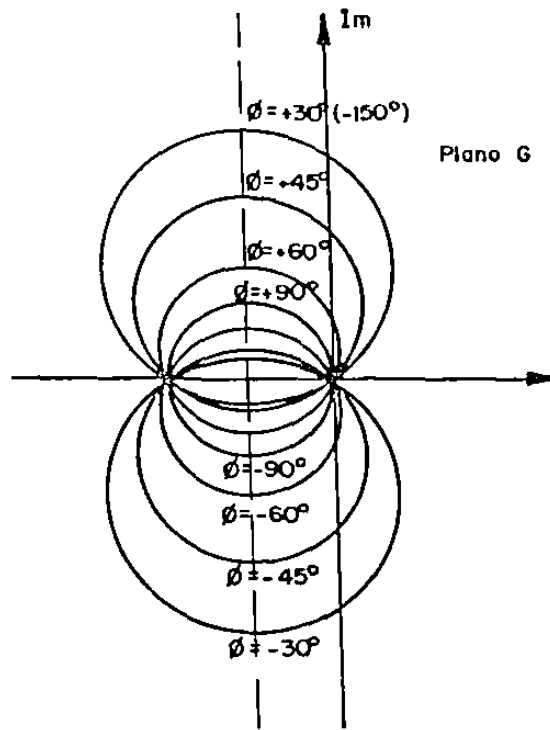


Fig. 9-67. Familia de Curvas de Angulo de Fase Constante.

Tabla 9-4

$\phi \pm 180^\circ$ m	N	Centro $y = 1/2 N$	Radio $r = (1/2N)\sqrt{N^2+1}$
-90	$-\infty$	0.0	0.500
-75	-3.732	-0.134	0.518
-60	-1.73	-0.289	0.577
-45	-1.00	-0.500	0.707
-30	-0.577	-0.866	1.000
-15	-0.268	-1.866	1.931
0	0.0	∞	∞
30	0.577	0.866	1.000
45	1.00	0.500	0.707
60	1.73	0.289	0.577
90	∞	0.0	0.500

El uso de los círculos M y N nos permite hallar la respuesta en frecuencia de un sistema de control de lazo cerrado a partir de la respuesta en frecuencia de lazo abierto $G(j\omega)$ sin tener que calcular la magnitud y el ángulo de fase de la función de transferencia de lazo cerrado para cada frecuencia. Las intersecciones de los lugares de $G(j\omega)$ con los círculos M y N nos dan los valores de M y N en los puntos de frecuencia sobre el lugar de $G(j\omega)$.

En la fig. 9-68 (a) se representa el lugar de $G(j\omega)$ sobrepuesto a una familia de círculos M. En la fig. 9-68 (b) se puede ver el mismo lugar $G(j\omega)$ sobrepuesto a una familia de círculos N. De estos dos diagramas se puede obtener las curvas de respuesta en frecuencia de lazo cerrado para el sistema, las cuales se representan en la fig. 9-68 (c).

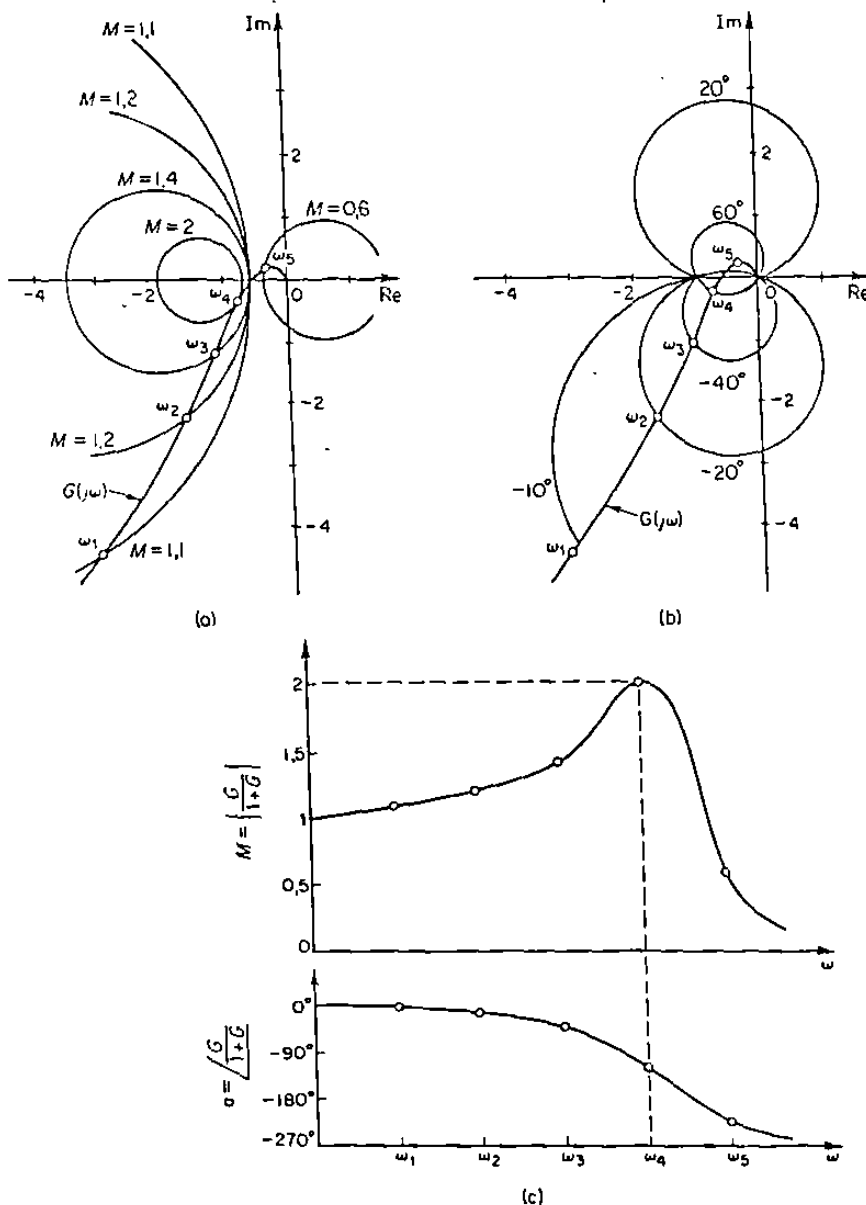


Fig. 9-68 (a) Gráfica de $G(j\omega)$ sobrepuesta a una familia de círculos M
 (b) Gráfica de $G(j\omega)$ sobrepuesta a una familia de círculos N
 (c) Curvas de respuesta en frecuencia de lazo cerrado

En la fig. 9-68(a) se puede ver que el círculo de $M = 1.1$ corta al lugar $G(j\omega)$ en un punto cuya frecuencia es $\omega = \omega_1$. Esto significa que a esta frecuencia la magnitud de la función de transferencia de lazo cerrado es 1.1. También en la misma figura se puede ver que el círculo $M = 2$ es tangente al lugar $G(j\omega)$ en $\omega = \omega_4$, éste es un sólo punto de cruce del lugar $G(j\omega)$ y se le denomina valor pico de resonancia M_r y a la frecuencia de resonancia se le representa con ω_r . En este ejemplo $M_r = 2$ y $\omega_r = \omega_4$. Como conclusión importante hay que hacer notar que el valor pico de resonancia es siempre el valor de M que corresponde al círculo M de menor radio que sea tangente al diagrama de $G(j\omega)$.

9-10.- Cartas de Nichols.

Una de las desventajas de operar con coordenadas polares para la curva de $G(j\omega)$, consiste en que dicha curva no retiene su forma original cuando se introduce una modificación simple, por ejemplo la variación de la ganancia de lazo del sistema. En los problemas de diseño, casi siempre es necesario no sólo modificar la ganancia de lazo, sino también se requiere agregar al sistema original una serie de controladores de retroalimentación, lo que ocasiona la necesidad de reconstruir por completo la curva $G(j\omega)$ resultante. Para propósitos de diseño por lo anterior resulta mucho más conveniente trabajar con el diagrama de Bode o sea en el dominio de la magnitud en decibeles contra el ángulo de fase. Como se recordará en el diagrama de Bode, la curva de magnitudes se desplaza hacia arriba y hacia abajo sin distorsiones, como consecuencia de modificaciones de la ganancia de lazo, además los diagramas de Bode pueden modificarse con mucha facilidad para tomar en cuenta las alteraciones de $G(j\omega)$ cuando se agregan polos y ceros.

Los lugares geométricos de M y N constantes en coordenadas polares se pueden transformar sin mucha dificultad a otra gráfica equivalente cuyas coordenadas son de magnitud en decibeles contra el ángulo de fase. La fig. 9-69 ilustra el procedimiento usado. Seleccionando un punto en un círculo de M constante en el plano $G(j\omega)$, el punto correspondiente en el plano de magnitudes con respecto al ángulo de fase, se puede determinar trazando un vector directamente desde el origen del plano $G(j\omega)$, hasta el punto considerado en el círculo de M constante. La longitud del vector en decibeles y el ángulo de fase en grados nos dan la ubicación del punto correspondiente en el plano de magnitud respecto al ángulo de fase.

En la fig 9-69 se ilustra el proceso de localización de tres puntos arbitrarios correspondientes a los lugares geométricos de M constante en el plano magnitud con respecto al ángulo. El punto crítico $(-1, j0)$ en el plano $G(j\omega)$ corresponde al punto con cero decibeles y -180° en el plano de magnitudes con respecto a la fase.

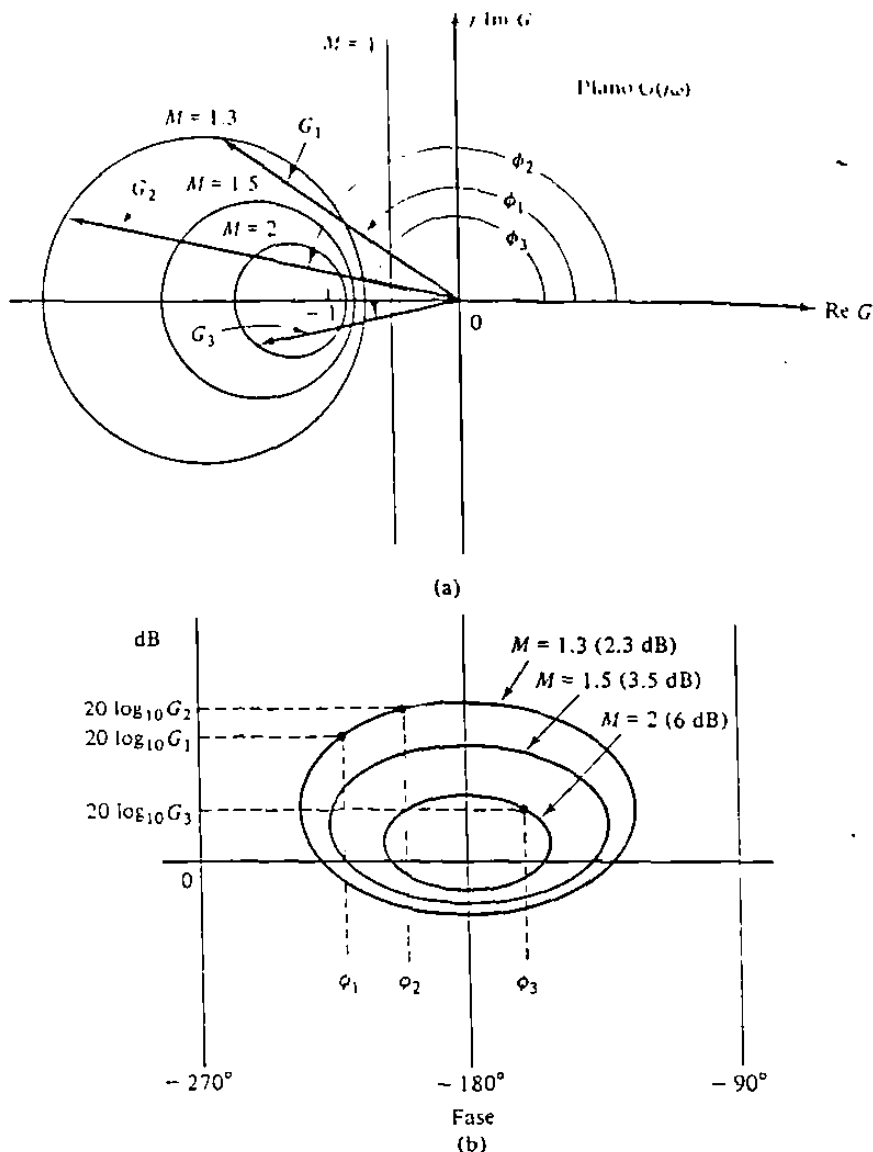


Fig. 9-69. (a) Círculos de M constante en el plano $G(j\omega)$
 (b) Gráfica de Nichols en coordenadas de magnitud en decibeles contra fase (ángulo).

Usando este mismo procedimiento también es posible transformar los lugares geométricos de N constante al plano de magnitudes en decibeles con respecto al ángulo de fase. Nichols fué el primero en trazar estos lugares geométricos de M y N constantes en coordenadas de magnitud y fase y estas gráficas reciben el nombre de "Cartas de Nichols".

En la fig. 9-70 se representan los lugares geométricos de M constante, para ángulos de fase desde -180° hasta 0° .

En la fig. 9-71 se representa la Carta de Nichols para ángulos de fase entre 0° y -240° . Es importante hacer notar que el punto crítico $(-1, j0)$, corresponde en el diagrama de Nichols al punto $(0\text{dB}, -180^\circ)$. Las Cartas de Nichols contienen curvas de magnitud de lazo cerrado y ángulo de fase constantes. El diseñador puede determinar gráficamente el margen de fase, el margen de ganancia, la magnitud del pico de resonancia, la frecuencia del pico de resonancia y el ancho de banda del sistema de lazo cerrado, a partir del diagrama de lazo abierto del lugar $G(j\omega)$.

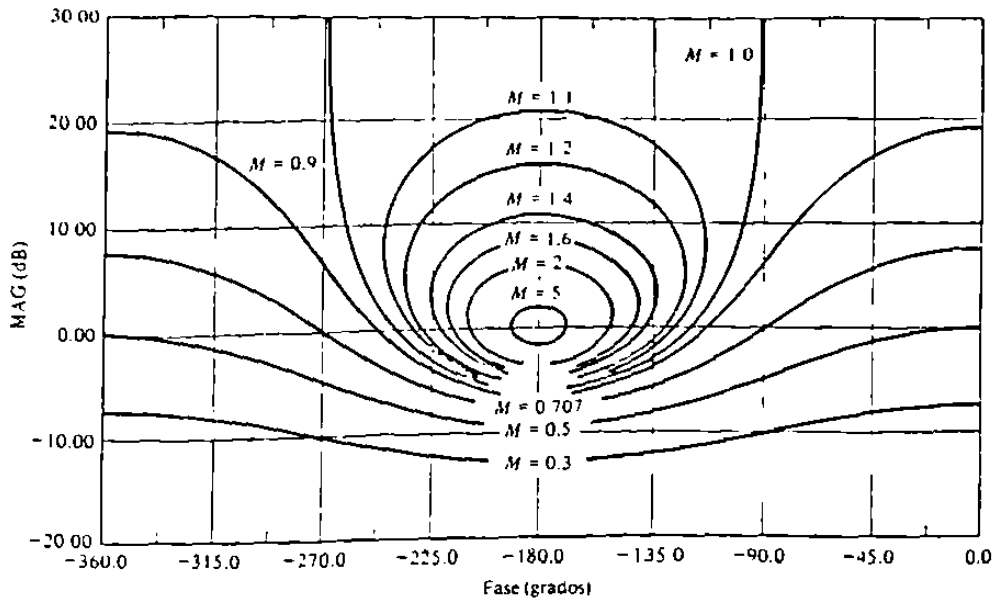


Fig. 9-70.- Lugares Geométricos de M constante, para ángulos de fase desde -180° hasta 0° .

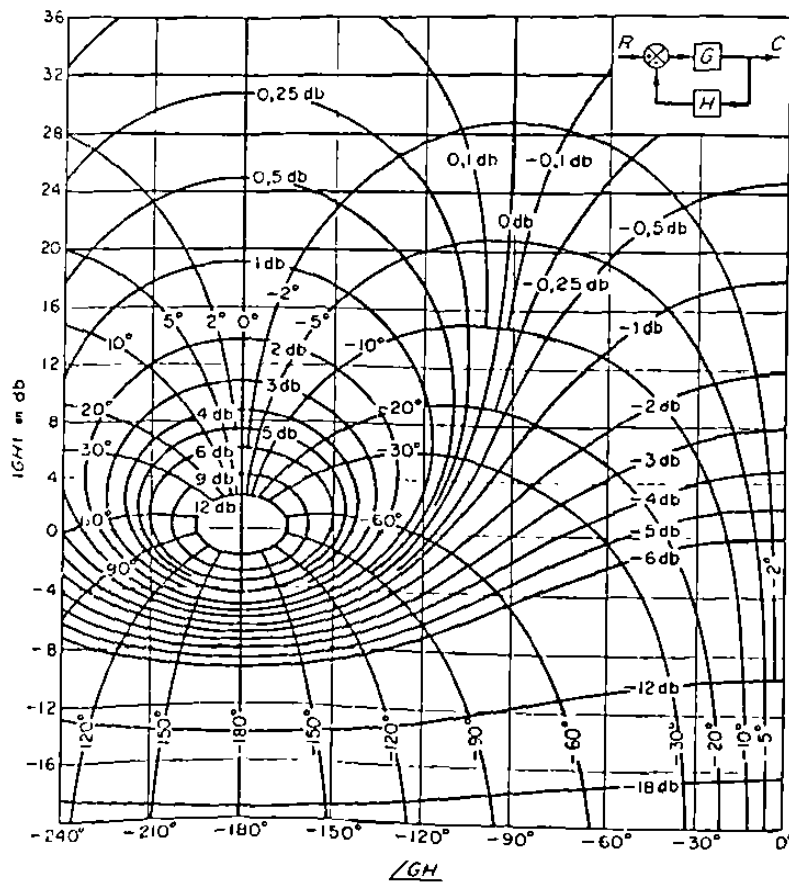


Fig. 9-71.- Carta de Nichols.

El Diagrama de Nichols es simétrico con respecto al eje de -180° . Los lugares de M y N se repiten cada 360° , y hay simetría cada intervalo de 180° . Los lugares de M están centrados alrededor del punto crítico (0dB, -180°). La Carta de Nichols o Diagrama de Nichols es muy útil para determinar la respuesta en frecuencia de lazo cerrado a partir de la respuesta en frecuencia de lazo abierto. Si la curva de respuesta en frecuencia de lazo abierto se sobrepone al diagrama de Nichols, las intersecciones de la curva de respuesta en frecuencia de lazo abierto $G(j\omega)$ con los lugares de M y N nos darán los valores de la magnitud de M y del ángulo de fase de la respuesta de lazo cerrado en cada punto de frecuencia.

Como ejemplo de aplicación se considerará un sistema de control con retroalimentación unitaria con la siguiente función de transferencia de lazo abierto:

$$G(j\omega) = \frac{K}{s(s+1)(0.5s+1)} \quad K = 1$$

Para hallar la respuesta en frecuencia de lazo cerrado utilizando el diagrama de Nichols, se traza el diagrama de $G(j\omega)$ en coordenadas de magnitud y ángulo de fase. En la fig. 9-72 (a) se muestra el diagrama de $G(j\omega)$ sobrepuesto a un diagrama de Nichols. Las curvas de la respuesta en frecuencia de lazo cerrado se pueden construir leyendo las magnitudes y los ángulos de fase en varios puntos de frecuencia. Estas magnitudes y ángulos se representan en la fig. 9-72 (b) en forma de Diagramas de Bode. Como el contorno de magnitud más grande tocado por el lugar $G(j\omega)$ es 5 dB, la magnitud del pico de resonancia M_r es igual a 5 decibeles. La frecuencia del pico de resonancia correspondiente es de 0.8 rad/seg.

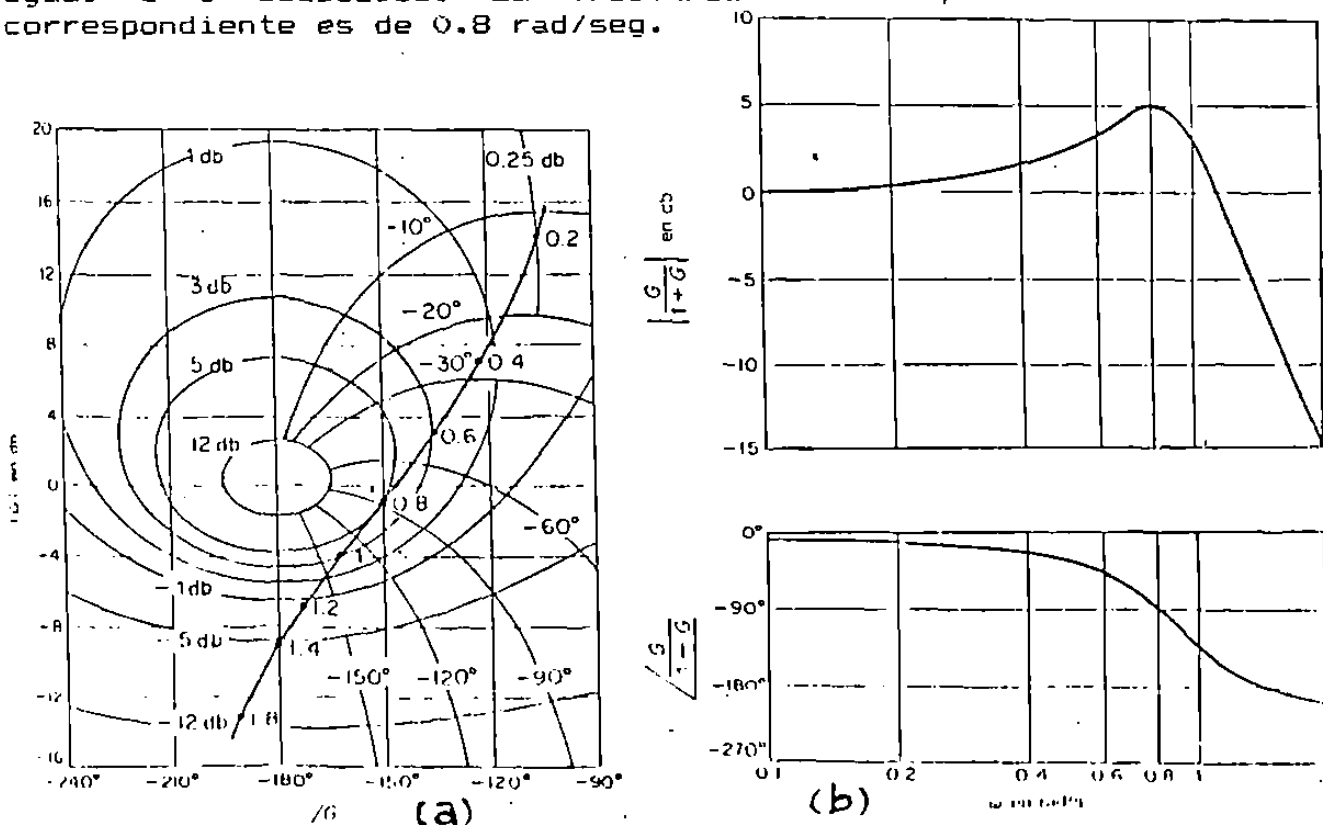


Fig. 9-72. (a) Gráfica de $G(j\omega)$ sobrepuesta a un diagrama de Nichols. (b) Gráfica de la respuesta en frecuencia de lazo cerrado.

El punto de cruce de fase es el punto en el que el diagrama de $G(j\omega)$ corta al eje de -180° . en este caso $\omega = 1.4$ rad/seg, y el punto de cruce de ganancia es el punto donde el lugar intersecta al eje de 0 decibeles, en este caso $\omega = 0.76$ rad/seg. El margen de fase es la distancia horizontal medida en grados entre el punto de cruce de ganancia y el punto crítico (0 dB, -180°). El margen de ganancia es la distancia en decibeles entre el punto de cruce de fase y el punto crítico.

El ancho de banda del sistema de lazo cerrado se puede hallar facilmente a partir de la gráfica de $G(j\omega)$ en el diagrama de Nichols. La frecuencia en la intersección del lugar de $G(j\omega)$ y el lugar de $M = -3$ dB nos dá el ancho de banda.

Si se varia la ganancia de lazo abierto K , la forma del lugar de $G(j\omega)$ en el diagrama del logaritmo de la magnitud en función de la fase, permanece inalterada, pero se desplaza hacia arriba (para K creciente) o hacia abajo (para K decreciente) a lo largo del eje vertical. Por lo tanto el lugar $G(j\omega)$ corta a los lugares de M y N en forma diferente, dando lugar a una curva de respuesta en frecuencia diferente. Para un valor pequeño de la ganancia K , el lugar $G(j\omega)$ no ha de ser tangente a ninguno de los lugares M , lo cual significa que no hay resonancia en la respuesta en frecuencia de lazo cerrado.

9-10-1.- Respuesta en frecuencia para sistemas de control con retroalimentación no unitaria.

Todo el análisis de la sección precedente se ha limitado a sistemas de control de lazo cerrado con retroalimentación unitaria. Los lugares de M y N constante y el diagrama de Nichols se pueden aplicar a un sistema de control con retroalimentación no unitaria, para lo cual se requiere hacer una pequeña modificación.

Si el sistema de lazo cerrado tiene una función de retroalimentación $H(s)$ no unitaria, la función de transferencia de lazo cerrado se puede escribir como:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

donde $G(s)$ es la función de transferencia directa y $H(s)$ es la función de transferencia de retroalimentación. La función $C(j\omega)/R(j\omega)$ se puede escribir en la siguiente forma:

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{1}{H(j\omega)} \frac{G(j\omega)H(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)}$$

haciendo $G_1(j\omega) = G(j\omega)H(j\omega)$, la función de transferencia se puede representar como:

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{1}{H(j\omega)} \frac{G_1(j\omega)}{1 + G_1(j\omega)}$$

El valor de $G_1(j\omega)$ se puede obtener facilmente trazando el diagrama de $G_1(j\omega)$ en el diagrama de Nichols y leyendo los valores de M y N en diferentes puntos de frecuencias.

La respuesta en frecuencia de lazo cerrado $C(j\omega)/R(j\omega)$ se puede obtener multiplicando $G_1(j\omega)/[1 + G_1(j\omega)]$ por $1/H(j\omega)$. Esta multiplicación se puede realizar con mucha facilidad si se trazan los diagramas de Bode de $G_1(j\omega)/[1 + G_1(j\omega)]$ y $H(j\omega)$ y luego se resta gráficamente la magnitud de $H(j\omega)$ de la de $G_1(j\omega)/[1 + G_1(j\omega)]$ y también se resta del mismo modo el ángulo de fase de $H(j\omega)$ del de $G_1(j\omega)/[1 + G_1(j\omega)]$. Las curvas del logaritmo de la magnitud y el ángulo de fase resultantes nos darán la respuesta en frecuencia de lazo cerrado $C(j\omega)/R(j\omega)$.

9-10-2.- Ajustes de la Ganancia.

En casi todos los sistemas de control ya se ha puesto de manifiesto la gran influencia que tiene el valor de la ganancia (k) en la estabilidad de los sistemas. Un valor elevado de k , puede ocasionar que la respuesta tenga oscilaciones con valores máximos excesivos. Por lo anterior, uno de los primeros pasos en el diseño de un sistema es tratar de ajustar k a ciertos valores que garanticen un funcionamiento adecuado. Este ajuste de la ganancia, se puede basar en un valor máximo especificado de la relación de amplitud M_r , para lo cual, los lugares de M constante proporcionan una técnica conveniente.

En la fig. 9-73 se ha trazado un círculo M constante, con centro en el punto $-M^2/(M^2 - 1)$ y con un radio $M/(M^2 - 1)$. La línea tangente al círculo OP , que se ha trazado desde el origen tiene un ángulo ψ , cuyo valor se puede calcular como sigue:

$$\text{Sen } \psi = \frac{\frac{M}{M^2 - 1}}{\frac{M^2 - 1}{M^2}} = \frac{1}{M}$$

de donde $\psi = \text{Sen}^{-1} \frac{1}{M}$

Se probará geoméricamente que la línea trazada desde el punto P , perpendicular al eje real negativo, corta este eje en el punto $-1+j0$.

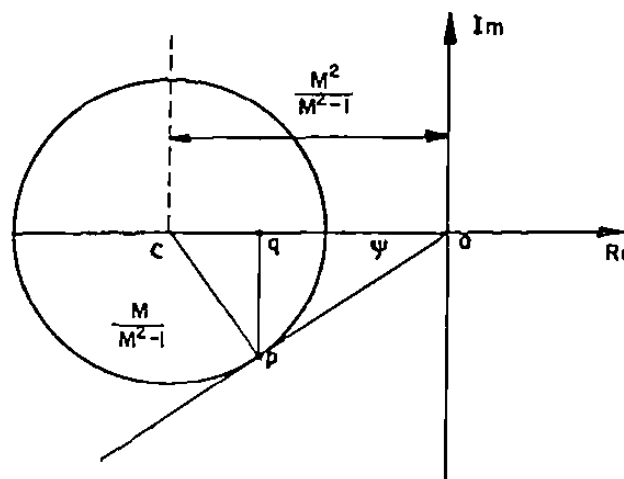


Fig. 9-73. Círculo de M constante

Tomando como base la fig. 9-73, la distancia OP se puede calcular aplicando el teorema de pitágoras al triángulo OPC, siendo OP un lado:

$$OP = \sqrt{OC^2 - CP^2} = \sqrt{\left[\frac{M^2}{M^2-1}\right]^2 - \left[\frac{M}{M^2-1}\right]^2} = \sqrt{\frac{M^4}{(M^2-1)^2} - \frac{M^2}{(M^2-1)^2}}$$

$$OP = \sqrt{\frac{M^4 - M^2}{(M^2-1)^2}} = \sqrt{\frac{M^2(M^2-1)}{(M^2-1)^2}} = \sqrt{\frac{M^2}{M^2-1}} = \frac{M}{\sqrt{M^2-1}}$$

por otro lado $\text{Sen } \psi = \frac{1}{M} = \frac{qP}{OP}$ de donde $qP = \frac{1}{M} OP$

substituyendo el valor de OP se encuentra que la distancia qP es:

$$qP = \frac{1}{M} \frac{M}{\sqrt{M^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{M^2-1}}$$

la distancia Oq es un lado del triángulo OPq, de donde Oq es igual a:

$$Oq = \sqrt{OP^2 - qP^2} = \sqrt{\frac{M^2}{M^2-1} - \frac{1}{M^2-1}} = \sqrt{\frac{M^2-1}{M^2-1}} = \sqrt{1} = 1$$

con lo cual se demuestra que el punto q tiene coordenadas (-1, j0).

Supongamos que se tiene un sistema de control, cuya función de transferencia en lazo abierto es:

$$G(j\omega) = \frac{K^* (1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)}{(j\omega)^n (1+j\omega T_a)(1+j\omega T_b)}$$

en donde K^* es la ganancia del sistema.

Tomando como referencia la fig. 9-74, a continuación se resume en seis pasos el procedimiento de ajuste de K^* , para tener un valor deseado de M_r .

- 1.- Se grafica la función de transferencia de lazo abierto normalizada $G_1(j\omega) = G(j\omega)/K^*$.
- 2.- Se traza desde el origen una línea recta que forme un ángulo $\psi = \text{Sen}^{-1}(1/M)$ con el eje real negativo.
- 3.- Determine graficamente un círculo que tenga su centro en el eje real negativo y que sea tangente tanto a la gráfica $G_1(j\omega)$ como a la recta OP trazada desde el origen.
- 4.- Desde el punto de tangencia con la recta OP, se traza una línea perpendicular al eje real. Para que el círculo trazado correspondiera al M_r deseado, el punto "q", en donde la línea corta al eje debería ser el punto (-1, j0).

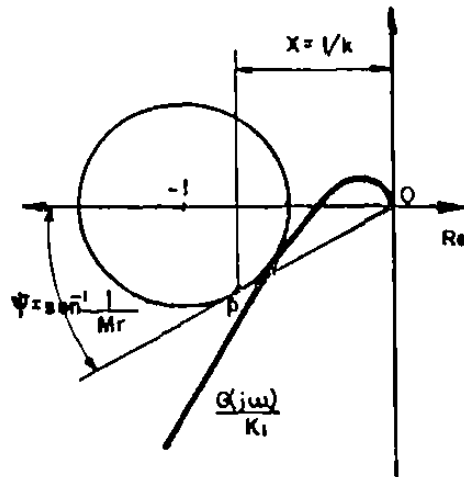


Fig. 9-74. Procedimiento de ajuste de K^*

- 5.- La condición anterior se cumple, si la función se afecta por un valor de ganancia K que sea precisamente el inverso del valor del punto, en donde originalmente se tiene el corte del eje real.
- 6.- Por último, se ajusta la ganancia original K^* , multiplicandola por un factor $A = K/K^*$. El valor de "A" es la cantidad de la ganancia que se debe aumentar o disminuir, para cumplir con la condición del valor máximo de M_r que se ha establecido.

Con el propósito de aplicar el procedimiento anterior, se resolverán a continuación dos ejemplos de ajuste de la ganancia.

Ejemplo 1.-Se tiene un sistema de control cuya función de transferencia de lazo abierto es:

$$G(j\omega) = \frac{1.05}{j\omega(j\omega + 1)}$$

de tal manera que la ganancia $K^* = 1.05$

Determinar el valor de K , para que el valor de $M_r = 1.26$

En la fig. 9-75 se puede observar la gráfica polar de la función de transferencia normalizada de lazo abierto $G_1(j\omega) = G(j\omega)/K^*$. Si el valor de $M_r = 1.26$, el ángulo ψ trazado por una recta desde el origen es

$$\psi = \text{Sen}^{-1} \frac{1}{1.26} = 52.52^\circ$$

Con la recta a 52.52° y la gráfica polar se puede trazar el círculo M con centro en el eje real negativo que sea tangente a la gráfica polar y a la recta OP . Desde el punto P se traza una línea perpendicular al eje real negativo, que corta en este caso el eje real en el punto 0.88 de tal manera que el valor de la ganancia viene dado por:

$$K = \frac{1}{0.88} = 1.13$$

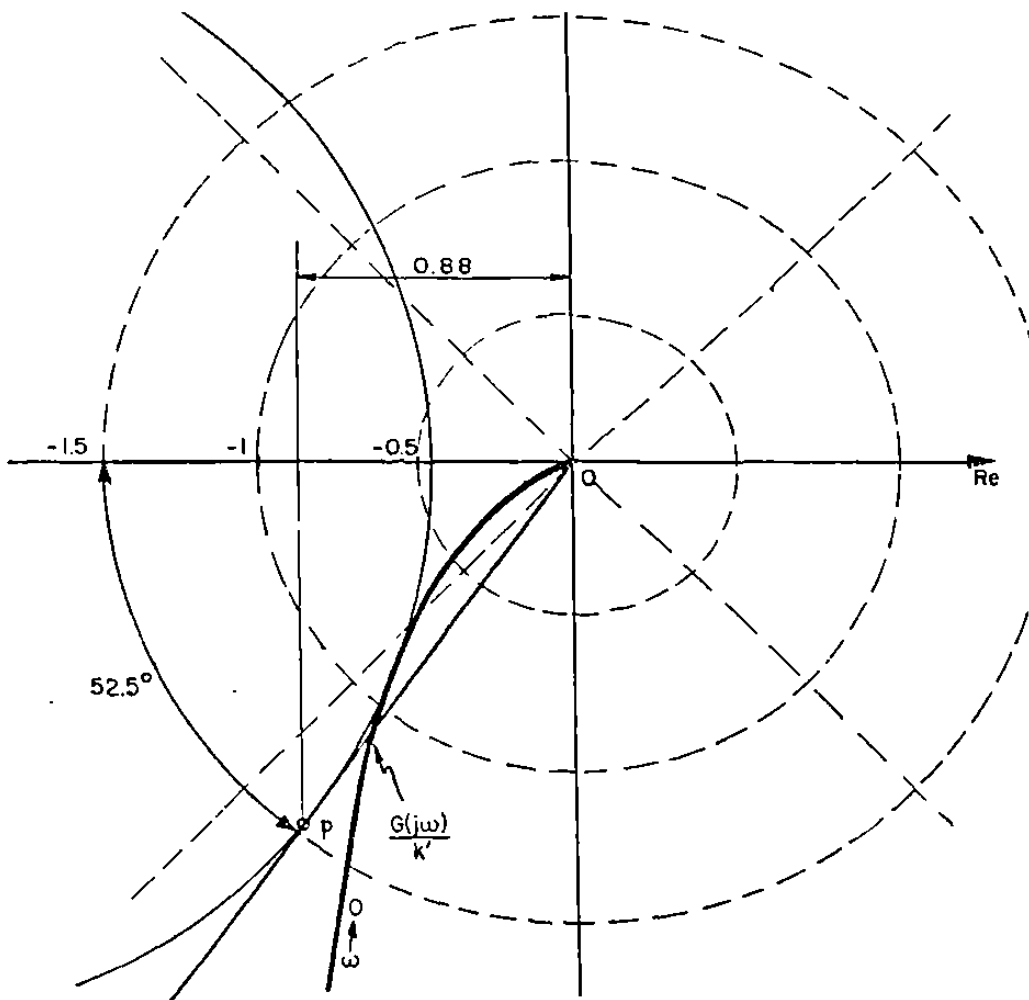


Fig. 9-75.- Gráfica del ejemplo 1.

Por lo tanto la ganancia original $K'=1.05$ debe multiplicarse por el factor

$$A = \frac{1.13}{1.05} = 1.07$$

para que el sistema satisfaga la condición planteada.

Ejemplo 2.- Si se tiene un sistema de control con retroalimentación unitaria y cuya función de transferencia de lazo abierto es

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1 + j\omega)}$$

determinar el valor de la ganancia K de modo que $M_r = 1.4$.

En primer lugar se debe de trazar el diagrama polar para la función

$$\frac{G(j\omega)}{K} = \frac{1}{j\omega(1 + j\omega)}$$

En la fig. 9-76 se hacen los trazos para la gráfica polar. El valor del ángulo ψ se puede calcular con la fórmula:

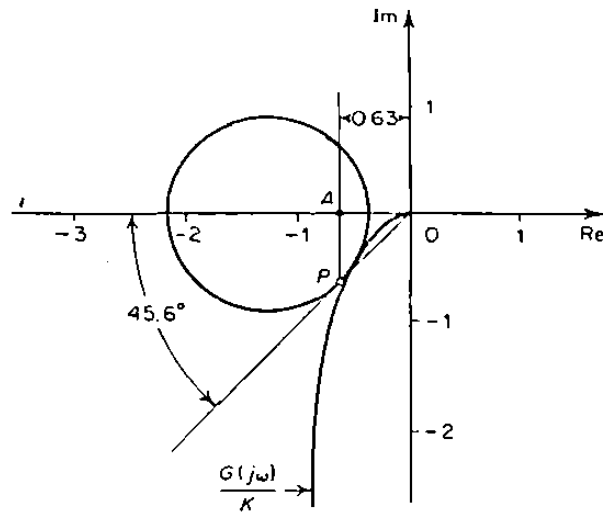


Fig. 9-76. Determinación de la ganancia K utilizando un círculo M.

$$\psi = \text{Sen}^{-1} \frac{1}{M_r} \approx \text{Sen}^{-1} \frac{1}{1.4} = 45.6^\circ$$

El siguiente paso es trazar la línea DP que forma un ángulo $\psi = 45.6^\circ$ con el eje real negativo. Se traza luego el círculo tangente tanto al diagrama $G(j\omega)/K$, como a la línea DP. Se determina el punto P, donde el círculo es tangente a la línea de 45.6° . La línea perpendicular --- trazada desde el punto P corta al eje real negativo en $(-0.63, 0)$. Por lo tanto la ganancia K del sistema se determina como sigue:

$$K = \frac{1}{0.63} \approx 1.58$$

El ejemplo anterior también se puede resolver fácilmente utilizando un diagrama de Nichols. En seguida se explica el procedimiento.

La fig. 9-77 muestra el lugar de $M_r = 1.4$ y el lugar $G(j\omega)/K$. El modificar la ganancia no tiene efecto en el ángulo de fase, pero si desplaza verticalmente la curva hacia arriba para valores de K mayores que 1 y hacia abajo para valores de K menores que 1. En la fig 9-77 se debe elevar en 4 decibels el diagrama de $G(j\omega)/K$ para que sea tangente al lugar M_r deseado y que todo el diagrama $G(j\omega)/K$ quede fuera de la gráfica de $M_r = 1.4$. La cantidad de variación vertical del lugar $G(j\omega)/K$ es la que nos determina la ganancia necesaria para obtener el valor deseado de M_r . La ecuación logarítmica se expresa en la siguiente forma:

$$20 \log K = 4$$

de donde $K \approx 1.58$

cuyo resultado es exactamente igual al que ya se había obtenido antes.

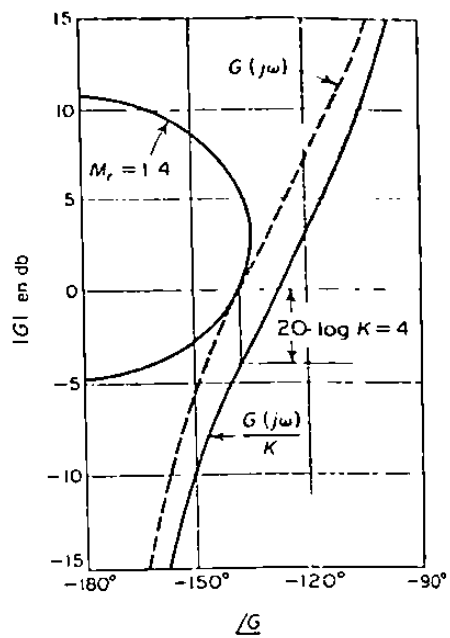


Fig. 9-77. Determinación de la ganancia K utilizando el diagrama de Nichols.

CAPITULO X

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

A lo largo de todo este trabajo desarrollado durante cerca de 15 meses, he tratado de ser lo más explícito posible en cada uno de los temas tratados. En muchos casos se han hecho las demostraciones de fórmulas y teoremas que en casi todos los libros sólo son enunciados. La idea ha sido facilitar al máximo la comprensión para el estudiante común sobre los principios fundamentales de la Teoría del Control.

La presente Tesis, considero que cumple plenamente con su objetivo de orientar a los estudiantes en el estudio de los sistemas de control, aunque como toda obra está sujeta a críticas constructivas que con mucho gusto yo aceptaré de parte de mis compañeros maestros o alumnos ya que será una forma de perfeccionar aun más este material de estudio.

En todos los capítulos desarrollados he tratado de ir directamente a lo más importante de los temas, eliminando todo aquello que sea irrelevante, lo que comúnmente conocemos como la paja de un libro.

Les recomiendo a todos los estudiantes que lean este trabajo como algo que seguramente les ayudará a entender la Teoría del control, pero esta obra de ninguna manera es limitativa; por lo que los exhorto a leer además otros libros que yo personalmente les recomiendo como libros de texto y de consulta en cada uno de los cursos que imparto. Siempre es recomendable tener a la mano diferentes opiniones de varios autores sobre la materia, lo cual da como resultado un enriquecimiento de nuestros conocimientos. De hecho en la bibliografía que se menciona a continuación se tiene la información sobre libros recomendados. Todos estos libros los he ido adquiriendo poco a poco a lo largo de varios años, constituyen una pequeña biblioteca especializada y definitivamente son la base que me ha servido para impartir la cátedra sobre la Teoría del Control.

CAPITULO XI

BIBLIOGRAFIA

- 1.- Ingeniería de Control Moderna
Katsuhiko Ogata
Prentice Hall Internacional
- 2.- Automatic Control Engineering
Francis H. Raven
Mc. Graw-Hill
- 3.- Introducción al Control e Instrumentación
J. M. Clement
Editorial Alhambra
- 4.- Sistemas Automáticos de Control
Benjamin C. Kuo
Editorial CECSA
- 5.- Retroalimentación y Sistemas de Control
Distefano III, Stubberud, Williams
Mc. Graw-Hill Serie Schaum
- 6.- Controles Automáticos
Howard I. Harrison, John G. Bollinger
Editorial Trillas
- 7.- Transformadas de Laplace
Murray R. Spiegel
Mc. Graw-Hill Serie Schaum
- 8.- Sistemas de Control
Hostetter, Savant, Stefani
Editorial Interamericana
- 9.- Fundamentos de Servosistemas Lineales
Horacio Buitrón Sanchez
Editorial LIMUSA
- 10.- Servomecanismos
L. J. Bulliet
Fondo Educativo Interamericano
- 11.- Control Automático de Procesos
Carlos A. Smith y Armando B. Corripio
Editorial Noriega LIMUSA

APENDICE A

Tabla de Transformadas de Laplace

Transformada de Laplace $F(s)$	Funcion de tiempo $f(t)$
$\frac{1}{s}$	$u(t)$ (funcion escalon unitario)
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n ($n =$ entero positivo)
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}$
$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t)$
$\frac{1}{(1+sT)^n}$	$\frac{1}{T^n (n-1)!} t^{n-1} e^{-t/T}$
$\frac{\omega_n^2}{(1+T_1)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$	$\frac{T\omega_n^2 e^{-t/T}}{1 - 2\zeta T\omega_n + T^2\omega_n^2} + \frac{\omega_n e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \phi)}{\sqrt{(1-\zeta^2)}(1 - 2\zeta T\omega_n + T^2\omega_n^2)}$ donde $\phi = \tan^{-1} \frac{T\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}{1 - T\zeta\omega_n}$
$\frac{\omega_n}{s^2 + \omega_n^2}$	$\text{sen } \omega_n t$

APENDICE A (Cont.)

Transformada de Laplace $F(s)$	Funcion de tiempo $f(t)$
$\frac{\omega_n^2(1 + as)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	$\omega_n \sqrt{\frac{1 - 2a\zeta\omega_n + a^2\omega_n^2}{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \phi)$ donde $\phi = \tan^{-1} \frac{a\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}{1 - a\zeta\omega_n}$
$\frac{\omega_n^2(1 + as)}{s^2 + \omega_n^2}$	$\omega_n \sqrt{1 + a^2\omega_n^2} \text{sen}(\omega_n t + \phi)$ donde $\phi = \tan^{-1} a\omega_n$
$\frac{\omega_n^2(1 + as)}{(1 + Ts)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sqrt{\frac{1 - 2a\zeta\omega_n + a^2\omega_n^2}{1 - 2T\zeta\omega_n + T^2\omega_n^2}} e^{-\zeta\omega_n t}$ $\times \text{sen}(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \phi) + \frac{(1 - a)\omega_n^2}{1 - 2T\zeta\omega_n + T^2\omega_n^2} e^{-t/T}$ donde $\phi = \tan^{-1} \frac{a\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}{1 - a\zeta\omega_n} - \tan^{-1} \frac{T\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}{1 - T\zeta\omega_n}$
$\frac{\omega_n^2(1 + as)}{(1 + Ts)(s^2 + \omega_n^2)}$	$\frac{\omega_n^2(1 - a)}{1 + T^2\omega_n^2} e^{-t/T} + \frac{\omega_n \sqrt{1 + a^2\omega_n^2}}{\sqrt{1 + T^2\omega_n^2}} \text{sen}(\omega_n t + \phi)$ donde $\phi = \tan^{-1} a\omega_n - \tan^{-1} \omega_n T$
$\frac{\omega_n^2(1 + as)}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$	$1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sqrt{1 - 2a\zeta\omega_n + a^2\omega_n^2} e^{-\zeta\omega_n t}$ $\times \text{sen}(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \phi)$ donde $\phi = \tan^{-1} \frac{a\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}{1 - a\zeta\omega_n} - \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}$
$\frac{\omega_n^2(1 + as)}{s(1 + Ts)(s^2 + \omega_n^2)}$	$1 + \frac{T\omega_n^2(a - T)}{1 + T^2\omega_n^2} e^{-t/T} - \sqrt{\frac{1 + a^2\omega_n^2}{1 + T^2\omega_n^2}} \cos(\omega_n t + \phi)$ donde $\phi = \tan^{-1} a\omega_n - \tan^{-1} \omega_n T$
$\frac{\omega_n^2(1 + as)}{s(1 + Ts)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$	$1 + \sqrt{\frac{1 - 2a\zeta\omega_n + a^2\omega_n^2}{(1 - \zeta^2)(1 - 2T\zeta\omega_n + T^2\omega_n^2)}} e^{-\zeta\omega_n t}$ $\times \text{sen}(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \phi) + \frac{\omega_n^2 T(a - T)}{1 - 2T\zeta\omega_n + T^2\omega_n^2} e^{-t/T}$ $\phi = \tan^{-1} \frac{a\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}{1 - a\zeta\omega_n} - \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}$ $\tan^{-1} \frac{T\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}{1 - T\zeta\omega_n} - \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}$

APENDICE A (Cont.)

Transformada de Laplace $F(s)$	Funcion de tiempo $f(t)$
$\frac{\omega_n}{(1+Ts)(s^2+\omega_n^2)}$	$\frac{T\omega_n}{1+T^2\omega_n^2} e^{-t/T} + \frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega_n^2}} \text{sen}(\omega_n t - \phi)$ donde $\phi = \tan^{-1} \omega_n T$
$\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$	$1 + \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \phi)$ donde $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$
$\frac{\omega_n^2}{s(s^2+\omega_n^2)}$	$1 - \cos \omega_n t$
$\frac{1}{s(1+Ts)}$	$1 - e^{-t/T}$
$\frac{1}{s(1+Ts)^2}$	$1 - \frac{t+T}{T} e^{-t/T}$
$\frac{\omega_n^2}{s(1+Ts)(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$	$1 - \frac{T^2\omega_n^2}{1-2T\zeta\omega_n+T^2\omega_n^2} e^{-t/T}$ $+ \frac{e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \phi)}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-2\zeta T\omega_n+T^2\omega_n^2)}}$ donde $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{-\zeta} + \tan^{-1} \frac{T\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}{1-T\zeta\omega_n}$
$\frac{\omega_n^2}{s^2(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$	$t - \frac{2\zeta}{\omega_n} + \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \phi)$ donde $\phi = 2 \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{-\zeta}$
$\frac{\omega_n^2}{s^2(1+Ts)(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$	$t - T - \frac{2\zeta}{\omega_n} + \frac{T^2\omega_n^2}{1-2\zeta\omega_n T+T^2\omega_n^2} e^{-t/T}$ $+ \frac{e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \phi)}{\omega_n \sqrt{(1-\zeta^2)(1-2\zeta\omega_n T+T^2\omega_n^2)}}$ donde $\phi = 2 \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{-\zeta} + \tan^{-1} \frac{T\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}{1-T\omega_n \zeta}$
$\frac{1}{s^2(1+Ts)^2}$	$t - 2T + (t+2T)e^{-t/T}$

APENDICE A (Cont.)

Transformada de Laplace $F(s)$	Funcion de tiempo $f(t)$
$\frac{1 + as}{s^2(1 + Ts)}$	$t + (a - T)(1 - e^{-t/T})$
$\frac{s\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	$\frac{\omega_n^2}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \phi)$ donde $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{-\zeta}$
$\frac{s}{s^2 + \omega_n^2}$	$\cos \omega_n t$
$\frac{s}{(s^2 + \omega_n^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega_n} t \operatorname{sen} \omega_n t$
$\frac{s}{(s^2 + \omega_{n1}^2)(s^2 + \omega_{n2}^2)}$	$\frac{1}{\omega_{n2}^2 - \omega_{n1}^2} (\cos \omega_{n1} t - \cos \omega_{n2} t)$
$\frac{s}{(1 + Ts)(s^2 + \omega_n^2)}$	$\frac{-1}{(1 + T^2\omega_n^2)} e^{-t/T} + \frac{1}{\sqrt{1 + T^2\omega_n^2}} \cos(\omega_n t - \phi)$ donde $\phi = \tan^{-1} \omega_n T$
$\frac{1 + as + bs^2}{s^2(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$	$t + (a - T_1 - T_2) + \frac{b - aT_1 + T_1^2}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1}$ $- \frac{b - aT_2 + T_2^2}{T_1 - T_2} e^{-t/T_2}$
$\frac{\omega_n^2(1 + as + bs^2)}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$	$1 + \sqrt{\frac{(1 - a\zeta\omega_n - b\omega_n^2 + 2b\zeta^2\omega_n^2)^2 + \omega_n^2(1 - \zeta^2)(a - 2b\zeta\omega_n)^2}{1 - \zeta^2}}$ $\times e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \phi)$ donde $\phi = \tan^{-1} \frac{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} (a - 2b\zeta\omega_n)}{b\omega_n(2\zeta^2 - 1) + 1 - a\zeta\omega_n} - \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{-\zeta}$
$\frac{s^2}{(s^2 + \omega_n^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega_n} (\operatorname{sen} \omega_n t + \omega_n t \cos \omega_n t)$

Apéndice B

Solución de ecuaciones

En la Teoría del control muy frecuentemente es necesario calcular las raíces de una ecuación o factorizar un polinomio. A continuación se estudiarán algunos procedimientos para la solución de ecuaciones. Consideremos la ecuación general

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0 \quad (B-1)$$

en la cual los coeficientes $a_n, a_{n-1},$ etc son números reales. El coeficiente de p^n se puede hacer unitario por división:

$$p^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} p^{n-1} + \dots + \frac{a_1}{a_n} p + \frac{a_0}{a_n} = 0$$

que también se puede representar en la siguiente forma:

$$p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0 = 0 \quad (B-2)$$

Se pueden hacer varias observaciones en la ecuación B-2:

- 1.- El número de raíces es igual al grado "n" de la ecuación.
- 2.- Las raíces pueden ser reales o complejas. Sin embargo las raíces complejas ocurren en pares. Esto significa que si n es impar, debe haber por lo menos una raíz real.
- 3.- Existen varios métodos para encontrar las raíces. Si la ecuación es de primero o segundo orden, la solución es relativamente muy sencilla, pero si la ecuación es de tercer orden o mayor, el problema se complica.
- 4.- Existe un método muy utilizado para resolver sistemas de tercer orden o mayor, aplicando la división sintética. A continuación se ilustrará el método por medio de un ejemplo.

Se desea calcular las raíces de la siguiente ecuación:

$$f(p) = p^3 + 5p^2 + 11p + 15 = 0$$

El primer paso es suponer una raíz real, por ejemplo, -1 (por sencillez se escoge un entero). Después se escriben los coeficientes de la ecuación. Los pasos son los siguientes: multiplicar el primer coeficiente por -1, se suma el resultado al segundo coeficiente, multiplicar la suma por -1 y sumarsela al tercer coeficiente y así sucesivamente.

1	+5	+11	+15	-1
	-1	-4	-7	
1	+4	+7	+8	

El valor de $f(-1)$ es 8; por lo tanto -1 no es una raíz de la ecuación. En seguida se prueba con otro valor, por ejemplo -4 .

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & +5 & +11 & +15 & \\
 & & -4 & & & \\
 \hline
 & 1 & +1 & +7 & -13 & \\
 \end{array}$$

Por lo tanto $f(-4) = -13$; lo que nos dice que el 4 no solamente no es raíz, sino que el cambio de signo [recordar que $f(-1) = +8$] indica la presencia de una raíz entre -1 y -4 . Probaremos ahora con -3 .

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & +5 & +11 & +15 & \\
 & & -3 & & & \\
 \hline
 & 1 & +2 & +5 & 0 & \\
 \end{array}$$

El valor de $f(-3)$ es cero y por lo tanto -3 es una raíz. Una vez que se encuentra una raíz por medio de la división sintética, la solución completa se obtiene fácilmente. La división de $f(p)$ por el factor $(p+3)$ nos da $p^2 + 2p + 5$, aplicando la fórmula general de segundo grado obtenemos los siguientes valores $p = -1 \pm j2$. Por lo que se concluye que las tres raíces son $r_1 = -3$, $r_2 = -1 + j2$ y $r_3 = -1 - j2$.

Existe otro método para resolver ecuaciones en las cuales "n" es par y mayor que 2 y se conoce como el Método de Lin. El método consiste en realizar repetidas divisiones entre factores cuadráticos supuestos hasta que el residuo es suficientemente pequeño. En esta forma un polinomio puede factorizarse en factores cuadráticos, de los cuales fácilmente se pueden obtener las raíces de la ecuación. El Método de Lin se ilustra a continuación con un ejemplo. Supongamos que se desea obtener las raíces de la siguiente ecuación:

$$f(p) = p^4 + 6p^3 + 18p^2 + 30p + 25 = 0$$

Primeramente se divide el polinomio completo entre un factor cuadrático supuesto en un intento por expresar $f(p)$ como el producto de dos factores cuadráticos. Se utilizan los últimos tres términos de $f(p)$ para obtener el primer divisor de prueba.

$$18p^2 + 30p + 25 = p^2 + \frac{30}{18}p + \frac{25}{18} = p^2 + 1.7p + 1.4$$

La división nos da el siguiente resultado:

$$\begin{array}{r}
 p^2 + 1.7p + 1.4 \quad \left| \begin{array}{l}
 p^2 + 4.3p + 9.3 \\
 \hline
 p^4 + 6.0p^3 + 18.0p^2 + 30.0p + 25.0 \\
 p^4 + 1.7p^3 + 1.4p^2 \\
 \hline
 4.3p^3 + 16.6p^2 + 30.0p \\
 4.3p^3 + 7.3p^2 + 6.0p \\
 \hline
 9.3p^2 + 24.0p + 25.0 \\
 9.3p^2 + 15.8p + 13.0 \\
 \hline
 8.2p + 12.0
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

El residuo es algo grande y por lo tanto se obtiene un segundo divisor de prueba a partir de la expresión encerrada en paréntesis en el paso anterior. Este es

$$p^2 + \frac{24.0}{9.3} p + \frac{25.0}{9.3} = p^2 + 2.60p + 2.7$$

La división con este factor supuesto produce un residuo $3.9p+7.4$, que es más pequeño que el residuo anterior. El proceso puede continuarse usando un tercer divisor de prueba que se determina de la misma manera. El residuo es entonces $2.8 + 5.2$. Después de ocho tanteos, el residuo es $-0.12p-0.10$, que ya es bastante pequeño. De acuerdo con el procedimiento anterior, los factores resultantes son:

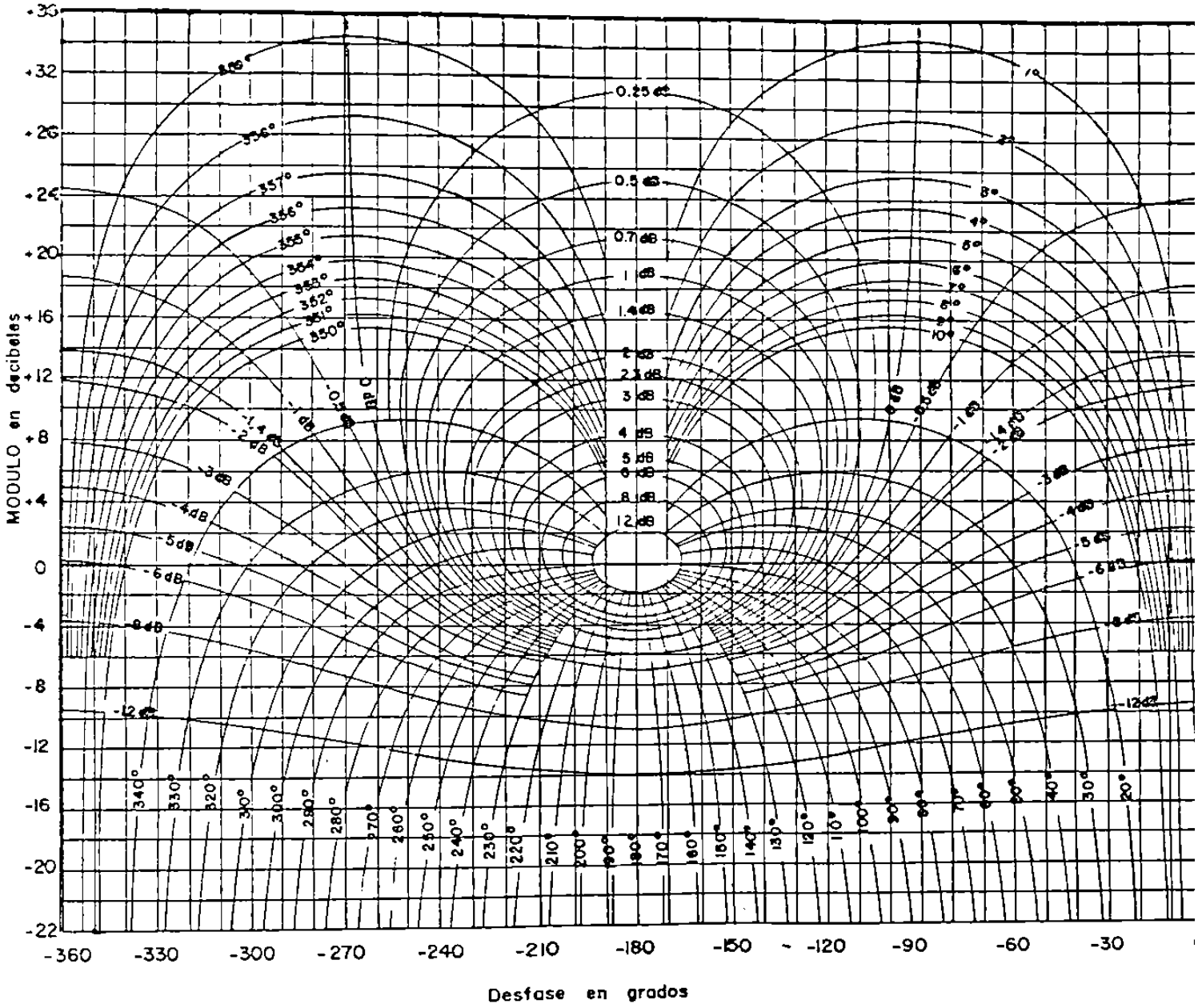
$$(p^2 + 4.01p + 4.98)(p^2 + 1.99p + 5.04)$$

que se aproxima a los valores reales de los factores

$$(p^2 + 4p + 5)(p^2 + 2p + 5)$$

las raíces de cada trinomio se pueden obtener aplicando la fórmula general de segundo orden con lo que se termina de factorizar toda la expresión completa.

APENDICE C



Carta de Nichols

APENDICE D

TABLA PARA LA CONVERSIÓN DE DECIBELES ($m = 20 \log_{10} M$)

M	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	<i>m</i> =	-40.00	-33.98	-30.46	27.96	-26.02	-24.44	-23.10	-21.94	-20.92
0.1		-20.00	-19.17	-18.42	-17.72	-17.08	-16.48	-15.92	-15.39	-14.89
0.2		-13.98	-13.56	-13.15	-12.77	-12.40	-12.04	-11.70	-11.37	-11.06
0.3		-10.46	-10.17	-9.90	-9.63	-9.37	-9.12	-8.87	-8.64	-8.40
0.4		-7.96	-7.74	-7.54	-7.33	-7.13	-6.94	-6.74	-6.56	-6.20
0.5		-6.02	-5.85	-5.68	-5.51	-5.35	-5.19	-5.04	-4.88	-4.73
0.6		-4.44	-4.29	-4.15	-4.01	-3.88	-3.74	-3.61	-3.48	-3.35
0.7		-3.10	-2.97	-2.85	-2.73	-2.62	-2.50	-2.38	-2.27	-2.16
0.8		-1.94	-1.83	-1.72	-1.62	-1.51	-1.41	-1.31	-1.21	-1.11
0.9		-0.92	-0.82	-0.72	-0.63	-0.54	-0.45	-0.35	-0.26	-0.09
1.0		0.00	0.09	0.17	0.26	0.34	0.42	0.51	0.59	0.67
1.1		0.83	0.91	0.98	1.06	1.14	1.21	1.29	1.36	1.44
1.2		1.58	1.66	1.73	1.80	1.87	1.94	2.01	2.08	2.14
1.3		2.28	2.35	2.41	2.48	2.54	2.61	2.67	2.73	2.80
1.4		2.92	2.98	3.05	3.11	3.17	3.23	3.29	3.35	3.41
1.5		3.52	3.58	3.64	3.69	3.75	3.81	3.86	3.92	4.03
1.6		4.08	4.14	4.19	4.24	4.30	4.35	4.40	4.45	4.51
1.7		4.61	4.66	4.71	4.76	4.81	4.86	4.91	4.96	5.01
1.8		5.11	5.15	5.20	5.25	5.30	5.34	5.39	5.44	5.48
1.9		5.58	5.62	5.67	5.71	5.76	5.80	5.85	5.89	5.93
2.		6.02	6.44	6.85	7.23	7.60	7.96	8.30	8.63	8.94
3.		9.54	9.83	10.10	10.37	10.63	10.88	11.13	11.36	11.60
4.		12.04	12.26	12.46	12.67	12.87	13.06	13.26	13.44	13.62
5.		13.98	14.15	14.32	14.49	14.65	14.81	14.96	15.12	15.27
6.		15.56	15.71	15.85	15.99	16.12	16.26	16.39	16.52	16.65
7.		16.90	17.03	17.15	17.27	17.38	17.50	17.62	17.73	17.84
8.		18.06	18.17	18.28	18.38	18.49	18.59	18.69	18.79	18.89
9.		19.08	19.18	19.28	19.37	19.46	19.55	19.65	19.74	19.82
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Apéndice E

TABLA DE $1 + j\omega\tau = A \angle \theta^\circ$

$\omega\tau$	A	θ°	$\omega\tau$	A	θ°	$\omega\tau$	A	θ°
0.05	1.00	2.9	2.30	2.51	66.5	6.1	6.18	80.7
0.10	1.00	5.7	2.35	2.55	66.9	6.2	6.28	80.8
0.15	1.01	8.5	2.40	2.60	67.4	6.3	6.38	81.0
0.20	1.02	11.3	2.45	2.65	67.8	6.4	6.48	81.1
0.25	1.03	14.0	2.50	2.69	68.2	6.5	6.58	81.3
0.30	1.04	16.7	2.55	2.74	68.6	6.6	6.68	81.4
0.35	1.06	19.3	2.60	2.79	69.0	6.7	6.77	81.5
0.40	1.08	21.8	2.65	2.83	69.3	6.8	6.87	81.6
0.45	1.10	24.2	2.70	2.88	69.7	6.9	6.97	81.8
0.50	1.12	26.6	2.75	2.93	70.0	7.0	7.07	81.9
0.55	1.14	28.8	2.80	2.97	70.3	7.1	7.17	82.0
0.60	1.17	31.0	2.85	3.02	70.7	7.2	7.27	82.1
0.65	1.19	33.0	2.90	3.07	71.0	7.3	7.37	82.2
0.70	1.22	35.0	2.95	3.11	71.3	7.4	7.47	82.3
0.75	1.25	36.9	3.00	3.16	71.6	7.5	7.57	82.4
0.80	1.28	38.7	3.1	3.26	72.1	7.6	7.67	82.5
0.85	1.31	40.4	3.2	3.35	72.6	7.7	7.76	82.6
0.90	1.35	42.0	3.3	3.45	73.1	7.8	7.86	82.7
0.95	1.38	43.5	3.4	3.54	73.6	7.9	7.96	82.8
1.00	1.41	45.0	3.5	3.64	74.1	8.0	8.06	82.9
1.05	1.45	46.4	3.6	3.74	74.5	8.1	8.16	83.0
1.10	1.49	47.7	3.7	3.83	74.9	8.2	8.26	83.0
1.15	1.52	49.0	3.8	3.93	75.3	8.3	8.36	83.1
1.20	1.56	50.2	3.9	4.03	75.6	8.4	8.46	83.2
1.25	1.60	51.3	4.0	4.12	76.0	8.5	8.56	83.3
1.30	1.64	52.4	4.1	4.22	76.3	8.6	8.66	83.4
1.35	1.68	53.5	4.2	4.32	76.6	8.7	8.76	83.4
1.40	1.72	54.5	4.3	4.41	76.9	8.8	8.86	83.5
1.45	1.76	55.4	4.4	4.51	77.2	8.9	8.96	83.6
1.50	1.80	56.3	4.5	4.61	77.5	9.0	9.06	83.7
1.55	1.84	57.2	4.6	4.71	77.7	9.1	9.15	83.7
1.60	1.89	58.0	4.7	4.81	78.0	9.2	9.25	83.8
1.65	1.93	58.8	4.8	4.90	78.2	9.3	9.35	83.9
1.70	1.97	59.5	4.9	5.00	78.5	9.4	9.45	83.9
1.75	2.02	60.3	5.0	5.10	78.7	9.5	9.55	84.0
1.80	2.06	60.9	5.1	5.20	78.9	9.6	9.65	84.1
1.85	2.10	61.6	5.2	5.30	79.1	9.7	9.75	84.1
1.90	2.15	62.2	5.3	5.39	79.3	9.8	9.85	84.2
1.95	2.19	62.9	5.4	5.49	79.5	9.9	9.95	84.2
2.00	2.24	63.4	5.5	5.59	79.7	10.0	10.05	84.3
2.05	2.28	64.0	5.6	5.69	79.9	12.0	12.04	85.2
2.10	2.33	64.5	5.7	5.79	80.0	14.0	14.04	85.9
2.15	2.37	65.1	5.8	5.89	80.2	16.0	16.03	86.4
2.20	2.42	65.6	5.9	5.98	80.4	18.0	18.03	86.8
2.25	2.46	66.0	6.0	6.08	80.5	20.0	20.02	87.1

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

CAPITULO II PAGINA 54

1-1.- a) $F(s) = \frac{32}{s^2 + 16}$

b) $F(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 6s + 109}$

c) $F(s) = \frac{20 - 4s}{s^2 - 4s + 20}$

d) $F(s) = \frac{s^2 - 2s + 4}{s(s^2 + 4)}$

e) $F(s) = \lambda(s) [5s^2 - 10s + 1] + \frac{-20s^3 - 90s^2 - 3}{s^2}$

2-1.- a) $f(\omega) = 0$ $f(\omega) = 3$

b) $f(\omega) = 0$ $f(\omega) = 2$

c) $f(\omega) = 0$ $f(\omega) = 0$

d) $f(\omega) = 0$ $f(\omega) = 5$

2-3.- a) $f(t) = e^{-t} - 3e^{-10t} + 1.89e^{-t} \text{Sen } 2.64t$

b) $f(t) = 1.56t - 1.17\omega + 3.125t^2 e^{-4t} + 3.125te^{-4t} + 1.17e^{-4t}$

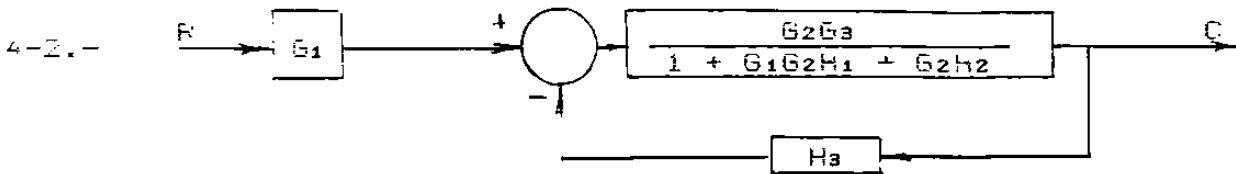
c) $f(t) = 0.046 - 0.046 \text{Cos}8t + 0.75 \text{Sen}8t$

2-4.- a) $x(t) = 5(t) - 6e^{-t} + 3e^{-2t}$

b) $z(t) = -4.8 \text{Cos}2t - 1.8 \text{Sen } 2t + 36te^{-t} + 13.8e^{-t}$

4-1.- a) $\frac{C}{R} = \frac{G_1 + G_2}{1 - G_1H_1 - G_2H_1}$

b) $\frac{C}{R} = \frac{G_1 + G_2}{1 - G_1H_1}$



4-3.- $C = \frac{G_1G_2G_3G_4R_1 + G_2G_3G_4R_2 - G_1G_2G_3G_4H_2R_3}{1 + G_3H_1 - G_1G_2G_3G_4H_2H_3}$

4-4.- $\frac{C}{R_1} = \frac{G_1G_2G_3}{1 + G_3H_2 + G_2H_3 + G_1G_2G_3H_1}$

4-5.- $\frac{C}{R_2} = \frac{G_3[1 - G_2H_3]}{1 - G_3H_2 + G_2H_3 + G_1G_2G_3H_1}$

4-6.- $C = \frac{G_1G_2G_3R_1 + G_3[1 + G_2H_3]R_2}{1 - G_3H_2 + G_2H_3 + G_1G_2G_3H_1}$

4-7.- $\frac{C}{R} = \frac{G_1G_2G_3G_4}{[1 + G_1G_2H_1][1 + G_3G_4H_2] + G_2G_3H_3}$

4-8.- $\frac{C}{R} = \frac{G_1G_4[G_2 + G_3]}{1 - G_1G_4H_1 + G_1G_2G_4H_2 + G_1G_3G_4H_2}$

4-9.- $\frac{C}{R} = \frac{G_1G_2G_3 + G_1G_4}{1 + G_1G_2G_3 - G_1G_2H_1 - G_2G_3H_2 - G_4H_2 + G_1G_4}$

CAPITULO V PAGINA 133

- 1.- $m(t) = 20 \text{ Sen } 8t - 1.25 \text{ Cos } 8t + 1.25(t)$
- 2.- $m(t) = -42.5 te^{-3t} + 14.83 e^{-3t} + 0.186(t)$
- 3.- $m(t) = 0.4(t) + 16 \text{ Sen } 4t + 383 \text{ Cos } 4t$
- 4.- $m(t) = 20 t + 160(t)$
- 5.- $m(t) = 24 \text{ Cos } 5t + 2.4 \text{ Sen } 5t$

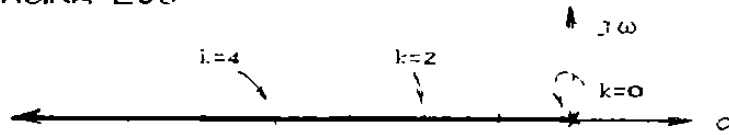
CAPITULO VI PAGINA 163

- 1.- $z(t) = 1 - e^{-0.5t} \text{ Cos } 0.866t - 0.115 e^{-0.5t} \text{ Sen } 0.866t$
- 2.- $z(t) = 4t - 3.2(t) + 0.2 e^{-2t} \text{ Cos } t + 2.4 e^{-2t} \text{ Sen } t$
- 3.- Inestable por dos polos a la derecha del eje $j\omega$
- 4.- La ganancia K debe ser mayor que cero y menor de 14.0
- 5.- El Rango de Estabilidad es desde $K = -27$, hasta $K = -34.429$ lo cual significa que el sistema siempre es Estable para cualquier valor de K positivo.
- 6.- El sistema es Estable. La Estabilidad Relativa se mantiene hasta que sigma es igual a -3.

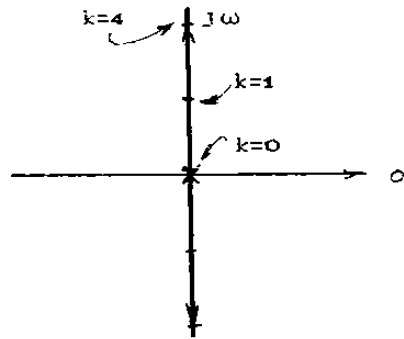
CAPITULO VII PAGINA 172

- 1.- $e_{ss} = 0.833$
- 2.- $e_{ss} = 1.15$
- 3.- $e_{ss} = 0$
- 4.- e_{2ss} es mayor que e_{1ss}

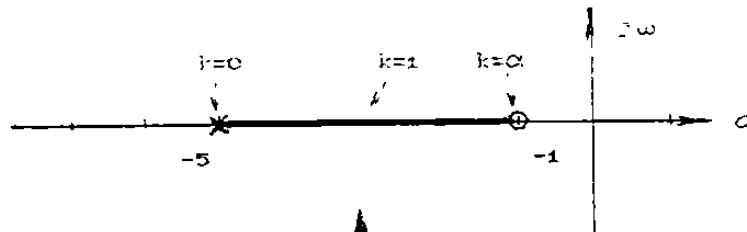
1.-a)



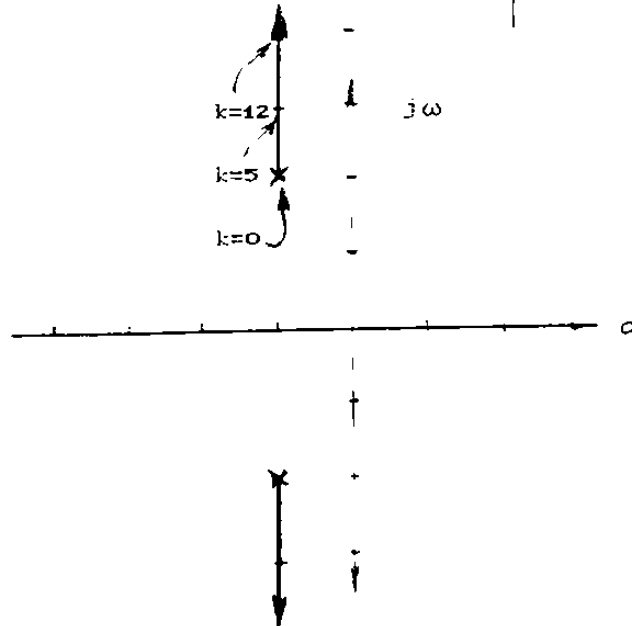
1.-b)



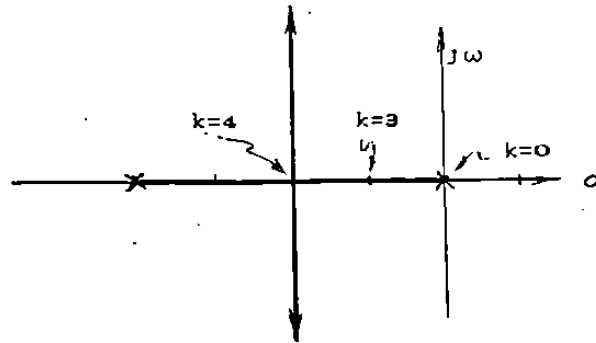
1.-c)



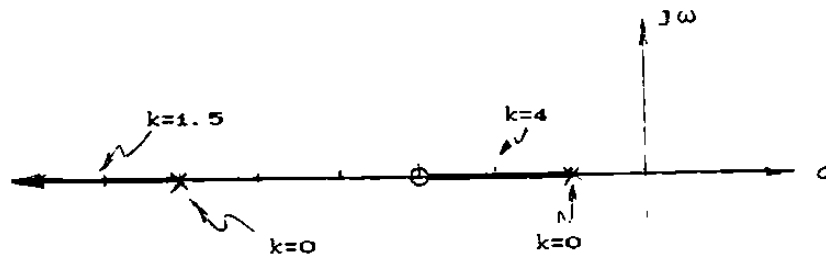
1.-d)



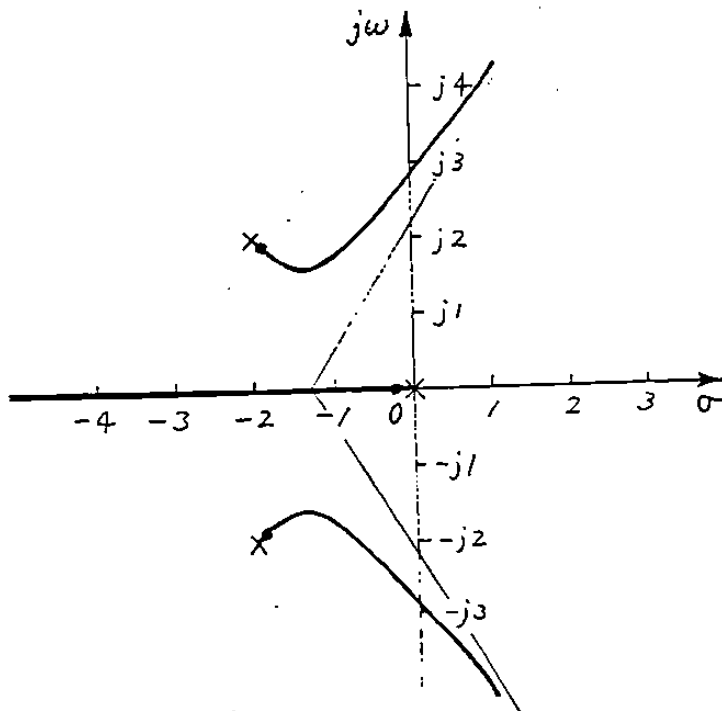
1.-e)



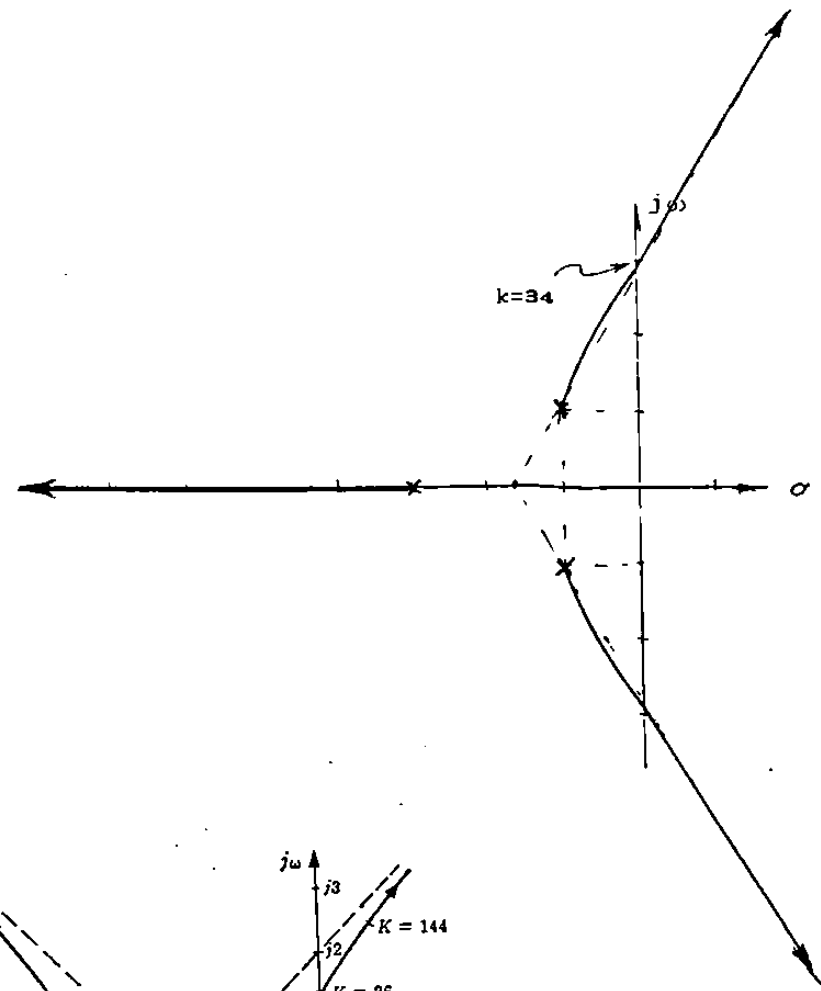
1.-f)



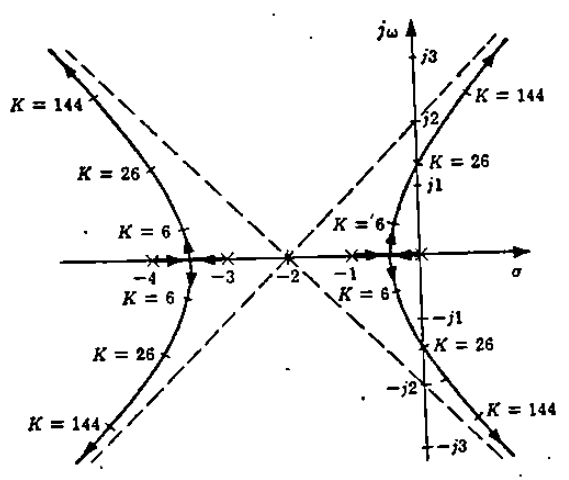
2.-a)



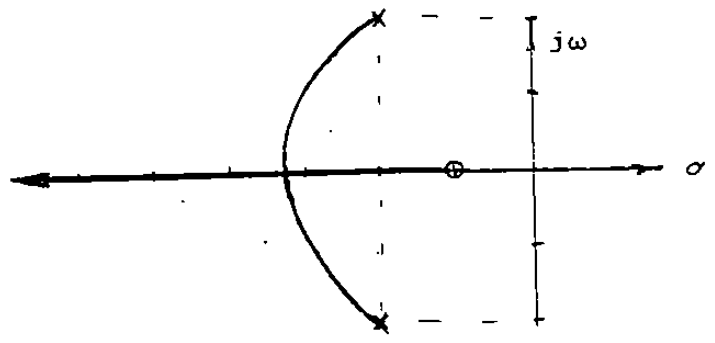
2.-b)



2.-c)



2.-d)



3.- $K_p = 1.52$

