

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON  
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA  
DIVISION ESTUDIOS DE POST-GRADO



CARACTERIZACION FRACTAL EN FRONTERAS DE  
GRANO DE MATERIALES CRISTALINOS  
UTILIZANDO MICROSCOPIA ELECTRONICA

T E S I S

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN  
CIENCIAS DE LA INGENIERIA MECANICA  
CON ESPECIALIDAD EN MATERIALES

POR  
ING. JESUS GARZA PAZ

CD. UNIVERSITARIA

SEPTIEMBRE DE 1997

CARRACCIÓN EN LA CRIANZA DE LA FAMILIA

GRANOS DE MATERIALES CRISTALINOS

UTILIZANDO MICROSCOPIA ELECTRONICA

J. C. P.

TM

Z5853

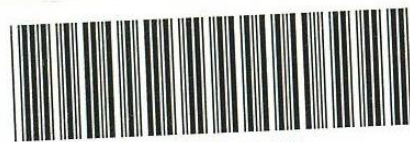
.M2

FIME

1997

G376

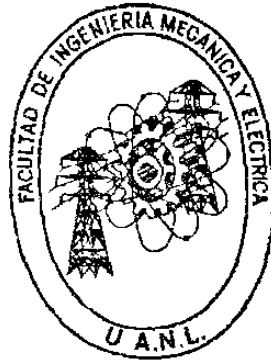
1997



1020119967

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN**

**FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO**



***CARACTERIZACIÓN FRACTAL EN FRONTERAS DE  
GRANO DE MATERIALES CRISTALINOS UTILIZANDO  
MICROSCOPIA ELECTRÓNICA***

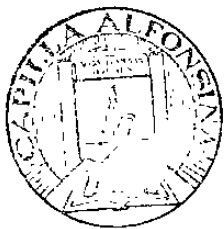
**T E S I S**

**EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA  
INGENIERÍA MECÁNICA CON ESPECIALIDAD EN MATERIALES**

**POR:  
ING. JESÚS GARZA PAZ**

**SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, N.L.**

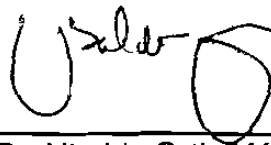
**SEPTIEMBRE DE 1997**



FONDO TESIS

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSTGRADO**

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis **"Caracterización Fractal en Fronteras de Grano de Materiales Cristalinos utilizando Microscopía Electrónica"** realizada por el Ing. **Jesús Garza Paz**, sea aceptada para su defensa como opción al grado de **Maestro en Ciencias De la Ingeniería Mecánica con Especialidad en Materiales**.



---

Dr. Ubaldo Ortiz Méndez  
Asesor



---

Dr. Juan Antonio Aguilar Garib  
Revisor



---

Dr. César Núñez López  
Revisor



---

M.C. Roberto Villarreal Garza  
Sub-director de Postgrado

San Nicolás de los Garza Nuevo León, Septiembre de 1997

*El presente trabajo fue realizado gracias ...*

*Al Dios,*

*Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por su inversión económica, tanto en el trabajo, como en mi persona,*

*Al Programa Doctoral de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, por confiar en que podría llevarse a cabo una labor de gran trascendencia para mí,*

*Al Dr. Jorge Rangel Guerra, por contagiarme de su entusiasmo, y contar con su apoyo, siempre desinteresado,*

*Al Dr. Eduardo Bascarán y al Dr. José A. Manrique, por sembrar una semilla muy especial en mí,*

*Al Dr. Ubaldo Oríz Méndez, por sus siempre atinados y sabios consejos, no solo de la ciencia, sino de la vida, que es algo que considero de mayor importancia,*

*Al Dr. Juan Antonio Aguilar Garib, que coadyuvó a poder visualizar las cosas desde otra perspectiva,*

*Al Dr. César Núñez López, por su gran colaboración y encaminamiento dentro de mi formación en Microscopía Electrónica,*

*Al Dr. Moisés Hinojosa Rivera, por su amistad y apoyo para la realización de este trabajo,*

*A todos mis maestros del Programa Doctoral, que si no hubiese sido por su validosa intervención en mi formación académica, profesional y humana, ésto nunca se hubiese logrado,*

*A todos mis compañeros del Programa Doctoral, por su diaria contribución a enriquecer mi crecimiento,*

*A mis padres, por ser, en gran medida, los responsables de ser lo que soy,*

*A Caty, por haberme dado una motivación para seguir adelante...*

**De manera muy especial dedico esta Tesis al motor de mi vida...**

**Para ti:**

**mi luz, mi vida, mi todo... *¡Mi Amada Inmortal!***



# ÍNDICE

<b>Capítulo 1.- Introducción</b>	<b>1</b>
<b>Capítulo 2.- La Matemática Fractal</b>	<b>6</b>
<b>Capítulo 3.- Microscopía Electrónica</b>	<b>23</b>
<b>Capítulo 4.- Experimentación</b>	<b>33</b>
<b>Capítulo 5.- Análisis de Resultados</b>	<b>50</b>
<b>Capítulo 6.- Conclusiones</b>	<b>53</b>
<b>Capítulo 7.- Recomendaciones</b>	<b>55</b>
<b>Referencias Bibliográficas</b>	<b>56</b>
<b>Anexo 1</b>	<b>61</b>
<b>Índice de Tablas</b>	<b>62</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>62</b>

# INTRODUCCIÓN

*“A quien busca el conocer, le disgusta bajar al agua de la verdad;  
no cuando está sucia, sino cuando no es profunda.”  
Friedrich Nietzsche*

A lo largo de la existencia de la humanidad, se han creado un gran número de herramientas para hacer de la vida una estancia más cómoda y placentera. En cierto modo, la necesidad ha sido el motor que ha impulsado al ser humano a crear nuevos y, cada vez, mejores satisfactores; *de facto* una vez que las necesidades primarias son plenamente cumplidas, surgen las necesidades superiores.<sup>1</sup> Dentro del vasto universo de necesidades superiores es sencillo el identificar a una de las más interesantes de ellas, siendo ésta, precisamente, la curiosidad por conocer la razón por la cual las cosas ocurren, dicho de otra manera, la intensa y constante búsqueda por la verdad.

Como una consecuencia a esta curiosidad, aparece en la historia la *Ciencia*, tan antigua como antigua es, en sí, la civilización (gr. *ciudad*). Una de las pautas que es señalada por algunos autores como el comienzo de la civilización es la entrada de la humanidad en el período conocido como Neolítico (gr. *pedra nueva*). Esta etapa da inicio cuando el hombre desarrolla la alfarería, un cierto tipo de tratamiento térmico efectuado en la arcilla con la idea de crear contenedores herméticos, ocurriendo esto justo después de la última glaciación, hace unos 10,000 años aprox. ( $\approx$  8000 a.C.), dándose este gran acontecimiento histórico en el poblado de Jarmo<sup>2</sup>, en el Irak Septentrional, o muy probablemente en la ciudad de Jericó<sup>3</sup>, ubicado en la Transjordania.

A partir del neolítico, el ser humano comenzó a desarrollarse en todos los aspectos de su andar cotidiano; como es fácilmente intuible, la necesidad humana (en especial la intelectual) es sumamente variada y extensa. Como una consecuencia de esta variación, son las diferentes facetas en que el hombre podrá hondar dentro del amplio abanico que abarca la Ciencia. Por lo tanto, de igual forma deberán de ser también las diferentes clasificaciones que, de la Ciencia, es posible encontrar a lo largo de la historia de la humanidad.

Sin embargo, una cosa que si es universal (cuando menos hasta el momento de realizar este escrito), es la propuesta por parte del ateniense Sócrates<sup>4</sup> (-420 *anno Domini*) de agrupar el total del conocimiento humano bajo un solo concepto, conocido como Filosofía (gr. *amor por la sabiduría*), y a partir de ahí, emanar todas y cada una de las distintas corrientes del pensamiento.

Una de las clasificaciones de mayor aceptación es la realizada unos años después por el estagirano Aristóteles<sup>5</sup> (-336 *anno Domini*), donde la Filosofía es segmentada en dos grandes ramas: la Física (el estudio de lo tangible) y la Metafísica (el estudio de lo intangible). Dentro de esta última se encuentra uno de los pilares más firmes sobre el cual se soporta el intelecto humano (apoyando, inclusive, a la Física), conocido como: la Ciencia Matemática.

A pesar de que esta rama de la ciencia ha tenido, a lo largo de toda su existencia, un firmamento de grandes pensadores, tales como Newton o Al-Khwārizmī, de compiladores como Euclides, e incluso hasta místicos como Pitágoras, siempre ocurre que, a partir de que una aportación es presentada, ésta va acompañada de una serie de restricciones (límites), que no le pueden dar la universalidad completa a la idea.

Sin embargo, no siempre fue posible el visualizar ésto, una de las primeras personas en percatarse de este concepto fue el ruso Lobachevski (Nikolai Ivanovich, matemático y Rector de la Universidad de Kazán, 1826), al percatarse que los axiomas de Euclides no podían tomarse como “*dogmas de fe*” (de modo especial el Quinto, referente al paralelismo entre dos líneas rectas)<sup>6</sup>; ante este hecho se atrevió a realizar una hazaña que el gran genio que era Gauss, en su momento, no se atrevería (a pesar de haberse percatado también de este problema, y aparentemente haberle dado la misma solución), y que el húngaro Bolyai se rezagaría un año más en descubrir<sup>7</sup>, desarrolló, e hizo pública, una geometría totalmente distinta a la convencional, donde se mantenía una congruencia consigo misma, y resolvía, entre otras cosas, el problema de la definición del paralelismo.

Sin embargo, la geometría propuesta por Lobachevski era netamente didáctica, sin un uso práctico. Unos años más tarde (1854), el alemán Georg Friedrich Bernhard Riemann creó la segunda geometría *no-euclidiana* (la primera le es acreditada a Lobachevski)<sup>8</sup>, construyendo ahora su dominio sobre una región hipotética de tipo esferoide (figura 2), a diferencia de la que construyera Lobachevski (figura 1), que era más bien una especie de cornetoide doble.

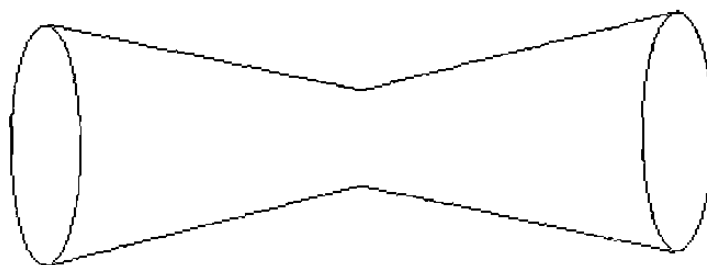


Fig. 1.- Superficie propuesta por Lobachevski como Lugar Geométrico

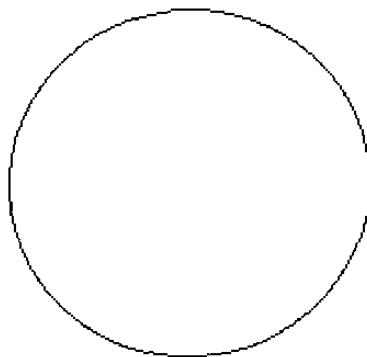


Fig. 2.- Superficie propuesta por Riemann como Lugar Geométrico

Esta geometría de Riemann dio una mayor y mejor visión de la realidad (la Tierra es, en realidad, un campo matemático del tipo descrito por Riemann, y así mismo se presupone que es el Universo), de modo que filósofos posteriores, como Albert Einstein, por citar solo alguno, contaron con una mejor flexibilidad para poder desarrollar sus teorías, además de atreverse a demostrar que la naturaleza se asemejaba más a la geometría expuesta por Riemann que a la tradicional enunciada por el propio Euclides<sup>9</sup>.

Con la aparición de nuevas formas para visualizar la geometría, comenzaron a resurgir antiguos “monstruos”<sup>10</sup> que durante muchos años fueron relegados de la Ciencia Matemática por ser considerados como excepciones a las reglas establecidas, de modo que al ser cambiada la forma de pensar, por parte de los filósofos para con la geometría, podían estos “monstruos” ser retomados, y asimismo, ser estudiados con mayor libertad.

Es entonces que, desde finales del siglo pasado, algunos filósofos comenzaron a trabajar en ello: Cantor<sup>11</sup>, Peano<sup>12</sup>, Perrin<sup>13</sup>, Lebesgue<sup>14</sup>, Hausdorff<sup>15</sup>, Besicovitch<sup>16</sup>, Von Koch<sup>17</sup>, entre otros, desarrollaron nuevos horizontes dentro de la Ciencia Matemática, y no sería sino hasta finales de la década de los años '60 que Mandelbrot<sup>18</sup> resumiría todo lo hasta ese entonces visto, y aportaría nuevos elementos para crear una rama dentro de la Matemática, acuñando, a mediados de la '70s, el término "fractal" (*lat. frangere*, cortar) para aglutinar un cierto tipo de comportamiento que *a posteriori* podrá ser ampliamente discutido y analizado.

A lo largo de este ensayo se podrán analizar y discutir los más recientes alcances de esta nueva rama de la Ciencia Matemática, con una aplicación específica dentro de la Ciencia de los Materiales. Se visualizará el impacto que ha tenido la geometría fractal sobre esta disciplina, los trabajos realizados en materia, y sobretodo, la aportación que se presume obtener, el demostrar que el comportamiento fractal de las fronteras de grano es ocurrente también para magnificaciones superiores a los 1000x, utilizando la microscopía electrónica como herramienta para lograr este objetivo.

# LA MATEMÁTICA FRACTAL

*"La Esencia de la Matemática es la Libertad."  
Georg Cantor*

Para la humanidad la Matemática representa, no tan sólo el cimiento básico de su conocimiento, sino que, a lo largo de toda su formación intelectual, ha sido uno de los pilares fundamentales sobre el cual se ha apoyado hasta lograr obtener el desarrollo y estilo de vida que es posible apreciar hoy en día. Es inconmensurable el lograr visualizar todas las posibles alternativas existentes para aplicar esta disciplina en el vasto conjunto universo que es representado por la ciencia; sin ella, la fuerza de empuje no hubiese podido ser concebida por Arquímedes, San Agustín<sup>19</sup> no hubiese tenido las herramientas suficientes como para poder definir tan claro y conciso el tiempo presente, ya que para ello utiliza un diferencial de tiempo, y establece el estadio presente como este diferencial tendiendo a cero; y así como éstos, podrían ser citados un sinnúmero de ejemplos más.

Como se pudo apreciar con anterioridad, Lobachevski marcó la pauta para nuevas aperturas dentro de la geometría, logrando con esto algo de mucho mayor trascendencia para la humanidad que simplemente otra concepción geométrica, dio pie para que otros filósofos realizarán también nuevas aperturas dentro de la Matemática; dándose, a partir de este momento, un incremento en la relatividad y dependencia de la ciencia, con respecto al objeto de estudio.

Unos años después de que Lobachevski desarrollará su geometría no-euclidiana, comenzaron a surgir otros trabajos dentro de la ciencia, específicamente en la Matemática; uno de ellos fue el irlandés Hamilton, que para 1840 crearía algunas innovaciones interesantes, pero ahora a la obra de Al-Khwārizmi, al crear el álgebra de los cuaternios, donde por ejemplo, la propiedad conmutativa de la adición no es válida, pero que *a posteriori* apoyaría a gente como Planck en el fundamento matemático de la mecánica cuántica.

La más importante contribución que realizara Hamilton, así como Lobachevski, Bolyai y Riemann, fue el demostrar que la verdad es una cuestión meramente relativa, en dependencia directa, y exclusiva, con los tipos de axiomas que deberán ser estipulados en un principio por parte del analizador, ya que ésto es, *per se*, lo importante: buscar mantener la congruencia consigo misma en cada una de las nuevas teorías.

Ya que los fenómenos, en forma absoluta, no están concatenados los unos con los otros según su determinismo consecuente, corresponde al filósofo colocarse en medio de una red de relaciones inagotables, escoger, por así decirlo, él mismo (pero sabiendo que su elección está condicionada por el objeto que fija) sus grados de acercamiento, sus puntos de contacto, y su escala de referencias; toca a él escoger el número de gradaciones y de dimensiones posibles, hacer dinámicos, multiplicar, y extender al máximo sus instrumentos de asimilación<sup>20</sup>, lo cual convirtió a la ciencia, y particularmente a la Matemática, en una Obra Abierta<sup>21</sup>.

Está inherente la posibilidad de que se cree la confusión de suponer que, ante este nuevo dinamismo dentro de la corriente del pensamiento, algunas de las leyes “clásicas” deberán sucumbir ante el aparente subjetivismo imperante; en modo especial la que está considerada como Tercera Ley Cinemática de Newton: *Actioni contrariam semper e æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales e in partes contrarias dirigi*<sup>22</sup>; sin embargo, no es en sí la interrelación acción-reacción, lo que, en un momento dado, pueda estarse alterando, es sólo la primera parte de esta importante ley: la acción.

Casi tres siglos después, Sartre coadyuva a Newton, al describir el concepto de acción. El acto contiene, *per se*, muchas nociones que le son subordinadas, y es, de sobremanera importante al plantear un axioma, que sean estos elementos organizados y jerarquizados. Sartre es concluyente al denotar lo siguiente: Una acción es, por principio, intencional<sup>23</sup>.



De manera que es concluyente: el subjetivismo, que podría ser manifestado en un axioma primitivo, queda abatido, y además totalmente descartado.

Dentro de la Matemática, una de las primeras cuestiones que tuvieron que ser finamente reconsideradas fue el definir, en forma concisa, clara y precisa, el concepto de la Dimensión.

Una de las personas que empezaron a cuestionar la dimensión fue el italiano Giuseppe Peano<sup>17</sup>, que para 1890, antes de trabajar en el complejo campo de la lingüística, puso de manifiesto esta necesidad al crear un lugar geométrico donde la curva se quiebra tanto que casi ocupa todos los puntos de un plano, como se recrea en la figura 3. La disyuntiva que Peano planteaba era que si la curva se cerraba lo suficiente, realmente estaría en dos dimensiones, y no en tan sólo una, como era de concebido hasta ese momento; sin embargo no dejaba de ser una línea continua, de modo que la paradoja planteada por Peano era que el valor de la dimensión para este lugar geométrico es de uno y dos a la vez.

Lo que hoy se concluye es que tal curva no posee un valor idéntico a la unidad, pero tampoco es de valor de dos, más bien tiene un valor que no está discretizado en un entero, sino que se encuentra justo entre ambos números naturales, entre más liso sea el contorno de la curva, su valor tenderá a la unidad, en caso contrario, si su trayectoria se hace cada vez más cerrada, mayor será su valor, hasta completar el plano, y el valor de dos.

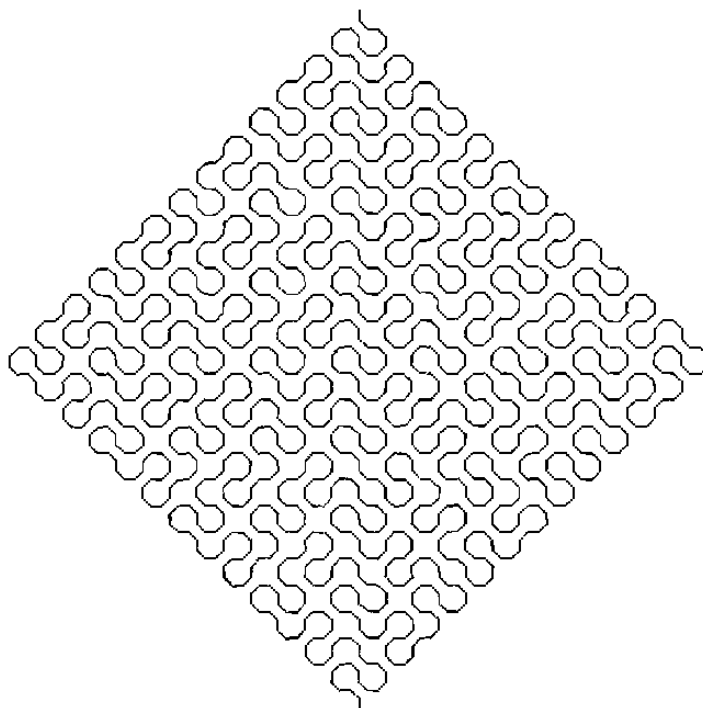


Figura 3.- Curva de Peano.

Tradicionalmente, se considera que una curva, (dentro de un intervalo diferenciable), se encuentra en una sola dimensión, oséase que es de dimensión igual a uno; asimismo, que un área se encuentra en dos dimensiones, por lo tanto, es de dimensión igual a dos; y además, que un volumen se encuentra en tres dimensiones, por lo que su dimensión es exactamente igual a tres.

Sin embargo, yacía latente la necesidad imperiosa de dar una vasta y suficiente claridad a este concepto, y no solamente el eminente carácter intuitivo dado hasta ese entonces; como una grave consecuencia de que no existiera una definición concisa para la Dimensión, estaba el hecho de que al querer ser caracterizadas curvas de tipo continuo, pero no diferenciables, no podía afirmarse a ciencia cierta que su dimensión fuese, precisamente, la unidad, y mucho menos si esta imposibilidad de trazar un recta tangente era de carácter estocástico, y aún más, si era creciente en aleatoridad *ad infinitum* (tal como es, precisamente, el movimiento browniano).

No todas las curvas, para las cuales era de interés su análisis, resultaban ser diferenciables<sup>24</sup>, *de facto*, en la naturaleza el comportamiento estricto y rígido de una curva (conocido también como euclidiano) es, en realidad, la excepción a la regla<sup>25</sup>; para 1920, Norbert Wiener expuso ampliamente este conflicto en un área nueva de la Matemática que le denominó: Teoría del Caos. Esta rama de la Matemática es una herramienta fundamental, no sólo para la Ciencia de Materiales, como será posible apreciar *a posteriori*, sino también en otra área de la Matemática conocida como Teoría del Control, específicamente en una de las más populares y conocidas de sus aplicaciones tecnológicas, la cibernética (*gr. kubernêsis*, pilotear).

Es a partir de entonces, que un grupo, cada vez más numeroso de filósofos comenzaron a aportar contribuciones realmente interesantes.

Muchos filósofos se dieron a la tarea de solucionar el conflicto que originaba la dimensión. Uno de los trabajos más relevantes, y cuya obra ha impactado en los anales matemáticos es sin duda alguna la labor realizada por un visionario matemático alemán: Félix Hausdorff<sup>15</sup>.

Para darse a la tarea de definir la dimensión es obvio que no podía seguir las reglas preestablecidas por Euclides, Newton, Leibniz, u Euler, ya que limitaban el espacio a tres dimensiones, por lo que tuvo la necesidad de buscar su fundamento matemático en otra parte, encontrando su análisis un apoyo sustentable en la Teoría de Conjuntos.

Para 1919, supuso lo siguiente:  $F$  es un subconjunto de  $\mathfrak{R}^n$  y  $s$  es un número natural, para cada  $\delta > 0$  definió:

$$\aleph_{\delta}^s(F) = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i| : \{U_i\} \text{ es una Cobertura } \delta \text{ del subconjunto } F \right\}$$

En la identidad anterior aparecen algunos elementos nuevos, uno de ellos es  $\delta$ , que en realidad es el ancho sobre la cual se va a medir topológicamente un conjunto; otro es  $\aleph_\delta^s(F)$  que es la medición de Hausdorff para cualesquier  $\delta$  y  $s$ -dimensional.

Como tenemos un exponente en el conjunto  $\{U_i\}$ , y  $\delta$  es cualesquier número positivo, la medición de Hausdorff será divergente. Una forma de encontrar la *infima* de la sumatoria será tendiendo  $\delta$  a cero, de la siguiente manera:

$$\aleph^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \aleph_\delta^s(F)$$

de esta forma Hausdorff afinó su medición, al minimizar el ancho  $\{\delta\}$  obtuvo  $\aleph^s(F)$  como la medición para cualesquier  $s$ -dimensión.

Para cuando el valor del exponente sea cero, el valor de la sumatoria será divergente, sin embargo al incrementar el valor al parámetro  $\{s\}$  se obtendrá un valor tal que la sumatoria será convergente, y aún más, poseerá un valor único y nulo. Por lo tanto, es posible definir dos zonas, fácilmente diferenciables una de la otra, ya que el dominio de valores encontrado para la medición de Hausdorff consta tan sólo de dos respuestas, que podrán ser, o bien indeterminado, o bien cero.

El lugar geométrico para el cual se da esta singularidad es lo que se conoce como la Dimensión de Hausdorff (algunos autores le llaman la Dimensión Hausdorff-Besicovitch); formalmente se define:

$$\dim_H F = \inf \{s: \aleph^s(F) = 0\},$$

$$\wedge$$

$$\dim_H F = \max \{s: \aleph^s(F) = \infty\}$$

Para obtener este valor es necesario realizar diversas evaluaciones a fin de determinar las zonas, y a partir de tenerlas bien identificadas, encontrar la singularidad donde ocurre el escalón. Sin embargo, esta metodología es, para la mayoría de las ocasiones, lenta y requiere de un manejo especializado de la Matemática, en especial de la Teoría de Conjuntos. De cualesquier manera, Hausdorff legó la definición más *ad hoc*, hasta el día de hoy, para el concepto de Dimensión.

Además de aportar la mejor manera para poder definir la dimensión, Hausdorff marcó la pauta para obtener una metodología de mayor simpleza; definiendo una variable nueva:  $\lambda$ , dada como el factor de escala; en base a la geometría tradicional es fácilmente corroborable que si un conjunto lo escalamos en una dimensión, entonces basta con multiplicarlo por  $\lambda$ , si lo escalamos en dos dimensiones, habrá que multiplicarlo por  $\lambda^2$ , y si fuese el espacio tridimensional el caso en cuestión, el factor de escala necesario deberá ser  $\lambda^3$ . Ante lo anterior, Hausdorff concluyó que para una bola cerrada de  $s$ -dimensión, el factor de escala deberá ser  $\lambda^s$ .

La contribución trascendente para este concepto del factor de escala fue la siguiente propiedad de escalamiento:

Si  $F \subset \mathbb{R}^n$  y  $\lambda > 0$ , entonces...

$$\aleph^s(\lambda F) = \lambda^s \aleph^s(F)$$

Para 1901, algunos años antes de que Hausdorff arrojara estos conceptos revolucionarios en la Matemática, Minkowski creó una herramienta altamente poderosa hoy en día gracias a las computadoras, a pesar de que para su tiempo fue *non grata* dentro de los círculos científicos, consiste en el método de Conteo de Celdas (que la jerga llama *Box-Counting*)<sup>25</sup>.

La metodología es sumamente simple, consistente en realizar un mapeo dentro de un cierto conjunto utilizando una cuadrícula; el resultado esperado de ninguna manera será el real, sino tan sólo un estimado, pero en función de que sea menor la magnitud empleada en esta cuadrícula (real instrumento de medición), mayor será la probabilidad de obtener un resultado fidedigno.

Para 1928, Bouligand visualizó que la labor de Minkowski realmente consistía en un conjunto de elementos interrelacionados entre sí<sup>26</sup>, y un año después, unió la labor de éste a la de Hausdorff, creando la Dimensión del Conteo de Celdas<sup>27</sup> (comúnmente llamada Dimensión de Minkowski o Dimensión de *Box-Counting*).

Cuatro años después, en 1932, Pontrjagin y Schnirelman<sup>28</sup> concluirían la obra de Bouligand al proponer la siguiente relación:

$$\lambda^{-d} M_{\lambda}^s(\lambda F) = \lambda^{s-d} M_{\lambda}^s(F)$$

de donde aparece un nuevo término:  $\{d\}$ , siendo éste el grado de homogeneidad en el conjunto de estudio, esto es, el que es guardado consigo mismo; además la variable  $M^s(F)$  entra sustituyendo a la anterior variable  $N^s(F)$ , para dejar asentado que se trata de cualesquier medición.

Si para un conjunto dado se supone un grado de homogeneidad unitario (que *a posteriori* se definirá como “autosimilitud”), el valor de la potencia  $\{d\}$  será exactamente igual a 1, y el término  $\lambda^{-d} M_{\lambda}^s(\lambda F)$  será invariable, por lo que es posible sustituirlo por una constante  $\{c\}$ , de modo que la ecuación para obtener la medición queda de la siguiente manera:

$$c = \lambda^{s-1} M_{\lambda}^s(F)$$

$$M_{\lambda}^s(F) = c \lambda^{1-s}$$

De esta forma, Pontrjagin y Schnirelman encontraron una metodología para evaluar la dimensión de algún conjunto, continuo o no, diferenciable o no, con mucho mayor simpleza que la forma que anteriormente encontrara Hausdorff, y además eran entre sí coincidentes, numéricamente hablando (como era de esperarse).

La forma de determinar la s-dimensión de un conjunto es muy simple, a continuación se muestra como a partir de la ecuación antes encontrada, se despeja la dimensión s de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{Log}_{10} M_{\lambda}(F) &= \text{Log}_{10} c \lambda^{1-s} \\ \text{Log}_{10} M_{\lambda}(F) &= \text{Log}_{10} c + (1-s) \text{Log}_{10} \lambda \end{aligned}$$

como fácilmente es posible visualizar, el algoritmo matemático {1-s} se convierte en la pendiente de una línea recta de la ecuación transformada logarítmicamente, si se aplica la definición de la primer derivada se obtiene:

$$\begin{aligned} 1-s &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\text{Log}_{10} M_{\lambda}(F)}{-\text{Log}_{10} \lambda} \\ s &= 1 - \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\text{Log}_{10} M_{\lambda}(F)}{-\text{Log}_{10} \lambda} \end{aligned}$$

Ahora tiene mucha mayor claridad la metodología empleada para determinar la dimensión de Minkowski, es tan simple como sólo el graficar logarítmicamente la magnitud obtenida *versus* el logaritmo del factor de escala empleado en la medición, por lo tanto la dimensión será la diferencia entre la unidad y la pendiente de esta aparente línea recta... sí, y sólo sí, el grado de homogeneidad es unitario...

Como una mera coincidencia, casi a un mismo tiempo que el estadounidense Wiener creara el concepto del Caos, para el año de 1922, un meteorólogo inglés llamado Lewis Fry Richardson descubrió, sin tener nociones de la obra de Wiener o de las innovaciones ocurridas (o por ocurrir) dentro de la Matemática, que el perímetro de la isla de la Gran Bretaña no permanecía constante, como intuitivamente se esperaría, en la cartografía que él mismo poseía sobre la isla<sup>29</sup>. Por lo que se dió a la tarea, en forma totalmente empírica y ajeno a todos los trabajos ya citados, de graficar sus resultados contra la única variabilidad que él mismo detectara, la magnificación.

La regresión, que Richardson descubrió, se ajustaba a un comportamiento de carácter estricto, enunciado a continuación:

$$L \propto \varepsilon^\alpha$$

donde,

L [=] Longitud del Perímetro

$\varepsilon$  [=] Factor de Escala

$\alpha$  [=] Potencia de Ajuste

Para la identidad anterior, Richardson considera un factor de escala, que él determinó numéricamente como el resultado del inverso multiplicativo de la magnificación, y con unidades de longitud.

A partir de visualizar este fenómeno, comenzó a “caracterizar” otras fronteras encontrando en todas ellas que existía también una variabilidad, pero a diferentes potencias de ajuste.



Por ejemplo, para la frontera entre Portugal y España, así como, para la frontera entre Bélgica y los Países Bajos, la potencia de ajuste era idéntica en ambos casos (a pesar de ser 3 veces inferior la segunda con respecto a la primera), y de valor de  $-0.25$ , la que poseía la costa oeste de la isla que contiene a Gran Bretaña era ligeramente menor, dándose a la tarea de caracterizar otros contornos, llegando incluso a caracterizar un círculo perfecto, encontrando que su pendiente es de un valor igual a cero (como será posible apreciar al avanzar más en este escrito, este comportamiento realmente era de esperarse, ya que un círculo es un lugar geométrico que, bajo restricción a ciertos intervalos, consiste en una curva diferenciable).

Sin embargo, al no encontrar una explicación física para esta potencia de ajuste, o cuando menos el fenómeno que rige este extraño comportamiento, el trabajo de Richardson permaneció durante algunos años sumido en el completo oscurantismo, ocasionalmente se le consideraba, pero tan sólo como una simple curiosidad matemática más.

Para 1951, 29 años después del hallazgo de Richardson, Kostron encontró los mismos resultados, pero no en marcas geográficas, sino que ahora se presentaba el mismo fenómeno en fronteras de grano para una aleación de aluminio<sup>30</sup>. Al medir el perímetro de un grano descubrió que era variable su magnitud, en función de la magnificación que se estuviese empleando. Por fin, el descubrimiento, que Richardson encontrara, tuvo un desenlace altamente significativo, ya que hubo la necesidad de estandarizar las mediciones que deberían hacerse de estos parámetros a una sola magnificación, por lo que ASTM<sup>31</sup> propuso en 1961, que éstas deberían de hacerse a 100x.

Las mediciones de frontera de grano, a partir de entonces, se han normalizado para realizarse a esta única magnificación, y poder comparar sus propiedades con la microestructura.

Para 1941, el ruso Kolmogorov trabajaba con Oboukhov sobre una propuesta que Richardson haría, consistente en que existía un flujo turbulento en los vórtices de un ducto a todas las posibles escalas; comenzaron pues a caracterizar la turbulencia en algunos flúidos viscosos e incompresibles, y predijeron la existencia de una cierta “similitud” en el comportamiento de la misma<sup>32</sup>. Para 1962, Kolmogorov refinó estas hipótesis de similitud, de manera especial, la segunda tiene un interés peculiar, y la concibió como una similitud consigo misma<sup>33</sup>.

Para 1967, el polaco Benoit B. Mandelbrot, quien también trabajaba en lo mismo, hizo una primera llamada de atención sobre la obra de Richardson en su ya popular escrito sobre el perímetro de la isla de Gran Bretaña<sup>34</sup>. Mandelbrot era investigador en el *Thomas J. Watson Research Center of International Business Machines (IBM)*, donde trabajaba, entre otras cosas, y al igual que Kolmogorov, con problemas relacionados con la turbulencia<sup>35,36,37</sup>, y para resolverlos se había apoyado en áreas de la Matemática relativamente recientes, como en el atractor de Lorenz, y otras herramientas aportadas por los filósofos de la Teoría del Caos. Además de todo esto, se apoyó en la segunda hipótesis planteada por Kolmogorov, una definición que hacía unos cuantos años había gestado: la autosimilitud<sup>38</sup>.

El concepto de autosimilitud es, en apariencia, muy simple; consta básicamente de una congruencia en el comportamiento entre el conjunto generador, y sus múltiples fracciones, hasta llegar a formar un conjunto atractor. Como veremos un poco más adelante, la autosimilitud es considerada como una invarianza fractal.

Para poder ampliar esta definición, como tal vez el lector ya lo esté intuyendo, es necesario el apoyo nuevamente de la Teoría de Conjuntos:

“Todo Conjunto, cuyos Subconjuntos satisfacen el teorema de Schröder-Bernstein<sup>39</sup> en relación al Conjunto Primitivo, puede considerarse que posee Autosimilitud.”

El Teorema Schröder-Bernstein enuncia lo siguiente:

$$\text{Si } X \prec Y \wedge Y \prec X, \Rightarrow X \approx Y$$

para este caso,

X [=] Conjunto Atractor

Y [=] Conjunto Generador

Dado que el Conjunto Atractor está contenido en el Conjunto Generador, y *vice versa*, en ambos conjuntos el comportamiento es “similar”, por lo tanto, Mandelbrot nombró a este comportamiento de estar contenido en sí mismo como Autosimilitud.

La mayor parte de los conjuntos que están contenidos en sí mismos son del tipo no diferenciable (aunque pudiese darse el caso de que fuese continuo); además, estos conjuntos aparentan un “quiebre” similar y *ad infinitum* para cada una de sus partes, Mandelbrot, que en el año de 1967 llamaría a este fenómeno como Dimensión Fraccionaria, debido a los aparentes quiebres o fracciones en este conjunto, lo renombraría, para 1975, con una etiqueta de mayor aceptación: Comportamiento Fractal<sup>18</sup>.

Estrictamente hablando, el Comportamiento Fractal de los conjuntos debería ser rígido, ésta es una característica que, como ya se mencionó, en la naturaleza es difícilmente de encontrar. Aún así, los lazos de retroalimentación que generan el crecimiento de los cuerpos en la naturaleza manifiestan esta rigidez, patrón que las condiciones euclidianas no poseen; sin embargo, se hacía necesario el tener que definir la universalidad del concepto, a partir de ejemplos particulares, y si se cumplían una serie de casos particulares, se podría aseverar que la geometría en la naturaleza tendía a ser del tipo fractal.

Es entonces cierto que no existen los fractales en la naturaleza; sin embargo, a pesar del inconveniente de esta rigidez matemática, la naturaleza muestra una tendencia a seguir un comportamiento del tipo fractal, como a continuación se podrá apreciar mejor.

Analizando detenidamente los trabajos geográficos de Richardson, es posible apreciar, en primer instancia, que el grado de homogeneidad es unitario (ésto es, que las fronteras poseen autosimilitud consigo mismas, y como su valor es de 1, se considera invariante e unitaria), por lo que al determinar la Dimensión de Hausdorff se obtiene un valor, y es este valor diferente a un número natural, por lo que tanto la isla de Gran Bretaña como los demás contornos evaluados por Richardson son curvas cuyo comportamiento es del tipo fractal, dicho de otra manera, son Fractales. *De facto*, el graficar dichos resultados, como anteriormente se plasmó y con la idea de determinar la Dimensión Fractal de algún contorno, se le conoce como “Gráfico de Richardson”, ésto es *in memoriam* a su descubridor.

Se hace entonces interesante el estudio de contornos, de superficies, o bien, cualesquier otra cosa que posea características de tipo fractal, ya que no sólo es posible reiterar la veracidad de dicha aseveración, sino que además se puede determinar en forma cuantitativa la magnitud de su dimensión.

Han bastado tan sólo 22 años para que la Geometría Fractal haya logrado invadir, prácticamente, todas las áreas del saber humano. Dentro de la Ciencia de Materiales ha comenzado toda una revolución con esta nueva herramienta matemática, ya que el problema, que Kostron encontrará en 1949, poseía por fin una justificación lógica.

A la fecha, se han realizado contribuciones muy interesantes como la caracterización fractal de la microestructura<sup>40,41,42,43</sup>, de fracturas<sup>44,45,46,47</sup>, de la rugosidad<sup>48,49,50</sup>, de análisis de superficies<sup>51,52</sup>, de laminación en caliente<sup>53</sup>, de desgaste o erosión<sup>54</sup>, de porosidad<sup>55,56</sup>, de tenacidad<sup>57,58</sup>, de fronteras de grano<sup>59,60</sup>, de termofluencia<sup>61</sup>, y de chisporroteo<sup>62</sup>. El tópico de interés en este escrito es en las fronteras de grano.

Con la idea de poder comparar las diferentes dimensiones fractales en indistintos materiales, el canadiense Kaye propuso, en 1984, normalizar las ordenadas del Gráfico de Richardson (la medida de Hausdorff), dividiendo cada uno de los elementos entre el diámetro de Feret del espécimen en estudio<sup>63</sup>. Los resultados, que acompañan a la experimentación de este escrito, seguirán fielmente esta sugerencia.

El diámetro de Feret es un concepto geométrico, donde se estima una distancia en una curva cerrada, esta distancia no es otra cosa que el diámetro de un círculo que se encuentra circunscrito en la figura en cuestión.

Una manera sencilla de estimar este parámetro es determinando la mayor distancia que es posible obtener entre la separación de dos líneas rectas paralelas y tangentes a la curva de nuestro espécimen; en la figura 4 se esquematiza lo descrito anteriormente.

De esta manera, Kaye propuso la normalización del perímetro, o cualquier otra medición, quedando nuestra variable en forma adimensional, ésto es, sin unidades, de modo que se hace posible el llevar a cabo análisis comparativos con respecto a otras fronteras de grano, o bien, cualesquier otro cuerpo cuyo comportamiento sea del tipo fractal.

Además de la normalización propuesta por Kaye, él mismo pronosticó que para un grano dado, debería ser posible encontrar, no una, sino hasta dos dimensiones fractales, una de ellas era una consecuencia de la estructura de grano, mientras que la otra tenía su origen en la textura de grano que el mismo poseyera; doce años después, para 1996, Moisés Hinojosa demostró la existencia de estas dos dimensiones en los granos de materiales cristalinos a magnificaciones que la usanza suele denominar como bajas, correctamente hablando son denominadas ópticas<sup>64</sup>.

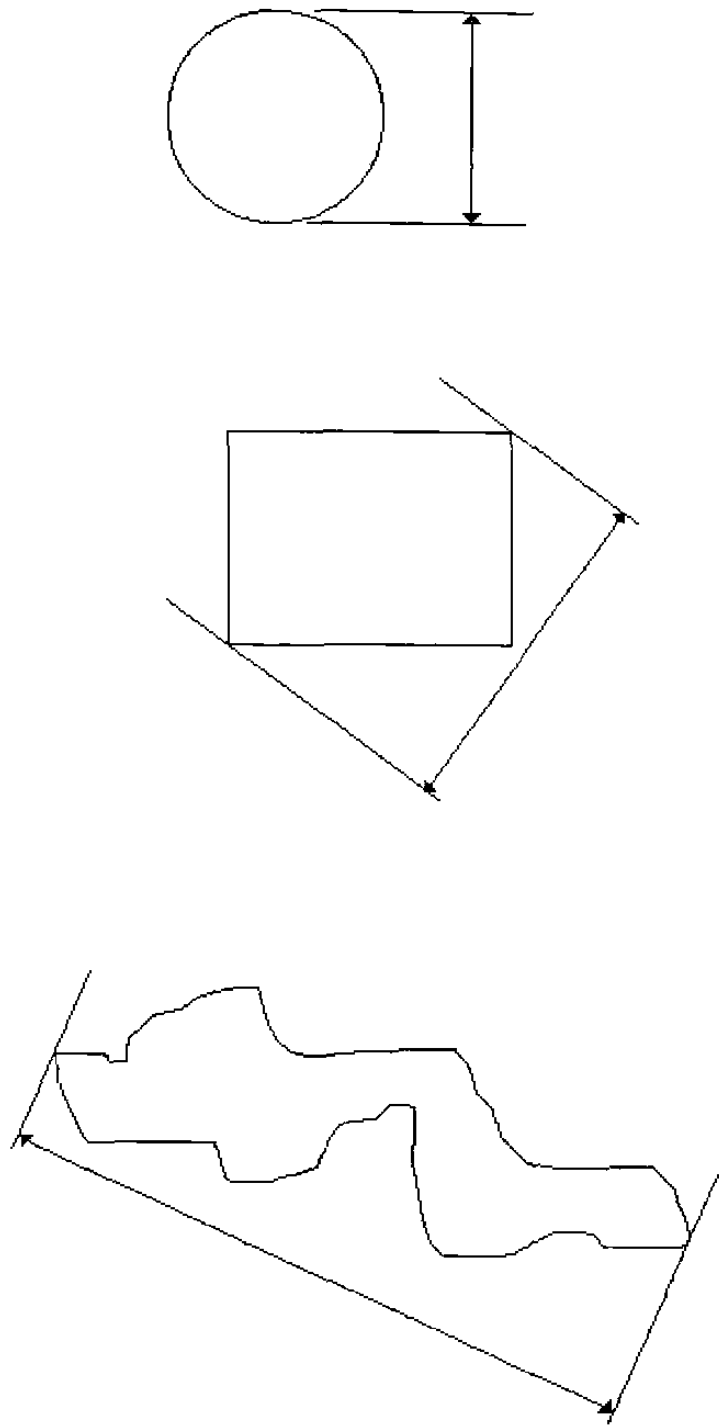


Figura 4.- Estimación del Diámetro de Feret a diferentes estructuras geométricas.

Es interés de este trabajo determinar si a magnificaciones consideradas como altas, utilizando una mejor resolución con el microscópio electrónico, el comportamiento fractal es aún mantenido por los granos de los materiales cristalinos.

Además, otro tópico, asimismo de interés, es el corroborar si las dos dimensiones fractales, pronosticadas por Kaye, y encontradas tiempo después por Hinojosa, podrán ser ocurrentes también a estas magnificaciones.

Como se ha visto a lo largo de este ensayo, la Ciencia Matemática no se detiene, sino que sigue avanzando, facilitando cada vez más la actividad humana; en resumen, resulta fácil el parafrasear a San Agustín, cuando éste afirma: “Ama, y haz lo que quieras”...

*Conoce la Matemática, y Aprende lo que quieras*

# MICROSCOPIA ELECTRÓNICA

*"Nature and Nature's laws lay hid in night:  
God said, Let Newton be! and all was light."  
Alexander Pope*

Cuando en el año de 1655 un joven sastre holandés de la ciudad de Delft llamado Anton Van Leeuwenhoek se interesó por el pulido de lentes, ciertamente haciéndolo con suma fineza y paciencia, llevando a cabo esta actividad como una simple y mera distracción, aconteció algo que él nunca llegó a suponer, que su pasatiempo iba a tener la gran repercusión, importancia y trascendencia que hoy día es posible equilar.

Si bien es cierto que Leeuwenhoek no construyó el microscopio, obra que en primera instancia es acreditada a Galileo (1609) por la innovación de utilizar lentes para la magnificación de objetos (tanto lejanos, como pequeños), y a Malpighi (1650) por su aplicación específica dentro de la microscopía; y además, si se adiciona a esto que su desarrollo profesional estaba, básicamente, mucho muy alejado de la ciencia, ya que uno de sus oficios estaba enfocado (como anteriormente se mencionó) en la industria textil, mientras que su labor paralela fue su trabajo ininterrumpido, a lo largo de toda su vida, en el ayuntamiento de su ciudad natal, es entonces difícil el imaginar que actualmente se le reconozca por una actividad que es en extremo distinta.

Gracias al esmero que Leeuwenhoek haría en el cuidado del pulido de lentes, pudo obtener magnificaciones hasta ese entonces no logradas (del orden de 200x) y en consecuencia, pudo observar un sin fin de cosas nuevas para la humanidad, como por ejemplo, lo que él llamó "parásitos en los parásitos", o como pueden ser las bacterias (que por cierto, no transcurriría un siglo antes de que alguien más las pudiera ver), sin embargo, lo más trascendental de su obra no fueron, tanto en sí los descubrimientos que con su microscopio lograría, sino el hecho de mostrar a la humanidad el increíble y vasto alcance que poseía esta nueva herramienta.



Desde entonces, se puede hablar del comienzo de la era de la microscopía (hablando con propiedad se le debería llamar tan sólo como microscopía óptica), cuyos usos fueron tan indistintos como lo es en sí la actividad del hombre. Sería abrumador el hablar de todos, y cada uno de los tópicos que se pueden apoyar en la microscopía, por lo tanto, a lo largo de este trabajo solamente se discutirá su aplicación dentro de la Ingeniería de Materiales, particularmente en el estudio y características de las fronteras de los granos en los materiales sólidos cristalinos.

Como es hoy *vox populi* para los investigadores en materiales, las características concurrentes a un nivel *micro* tienen repercusión en un estrato *macro*; por lo tanto, desde finales del siglo pasado se comenzaron a analizar los granos de los materiales cristalinos con la idea de caracterizarlos, y sobretodo, interrelacionar sus propiedades (mecánicas, térmicas, físicas, eléctricas o químicas) con la morfología aparente en un nivel *micro*.

Sin embargo, existe una gran restricción que los primeros metalógrafos encontraron al utilizar esta herramienta, consistente en una característica inherente en el instrumento de medición, que precisamente es la luz visible, y se trata del intervalo en su longitud de onda, cuyos valores oscilan entre los 400 y los 700 nm, cualesquier objeto inferior al cuarto de micra debería de ser más que imposible de resolver a través de esta técnica; por lo tanto era necesario recurrir a otra metodología, si lo que se deseaba analizar objetos cuya dimensión era menor a estas magnitudes.

Justo en el año de 1895, Wilhelm Konrad Roentgen marcó la pauta de lo que se ha dado a llamar la segunda revolución científica, con el accidental descubrimiento (como la mayoría de los mismos) de los Rayos X. A partir de entonces se hizo evidente que el átomo no era un ente indivisible (acorde a la definición que Demócrito daría del mismo en Abdera, Tracia, actualmente la Turquía Europea, alrededor del -390 *anno Domini*), y no lo era, precisamente porque pudo probar que existían partículas inferiores en tamaño al átomo de hidrógeno, como electrones, protones, neutrones, y demás.

Una de estas partículas subatómicas es altamente empleada por el ser humano, y realmente desde hacía ya mucho tiempo; aunque se desconocía *per se* de su existencia, se utilizaba a diestra y siniestra, debido a ésto, su movimiento estaba bien caracterizado y estudiado, se trata nada menos que de una partícula que posee parte de la carga negativa en un átomo: el electrón.

El electrón fue descubierto por el físico inglés Joseph John Thomson en 1897 (justo 2 años después del descubrimiento de los Rayos X), cuando al igual que Roentgen, estudiaba los efectos de los Rayos Catódicos, en realidad estos rayos no eran otra cosa que un haz de electrones, que como lo que se observaba era su desplazamiento dirigido hacia el cátodo, la parte positiva de un cierto circuito eléctrico, eran denominados de esta manera.

A partir de entonces, la materia empezó a visualizarse desde otro enfoque, la Física tomó nuevos rumbos, y para nuestro caso muy específico, el electrón se empezó estudiar con propiedad. Al conocerse mejor, comenzó el uso para nuevas aplicaciones de los electrones; una de ellas, que es la que a este escrito concierne, es el incremento en la resolución que ahora es posible alcanzar, debido a ésto nace la segunda edad dentro de la microscopía, la que utiliza a los electrones, y no a la luz visible, y es la Microscopía Electrónica.

Como el electrón es  $\frac{1}{1837}$  veces el tamaño del átomo de hidrógeno, es de esperarse el obtener resoluciones tan grandes como este nuevo incremento; sin embargo, lo que en un momento dado define la resolución posible a lograr en un equipo no es tanto el tamaño de nuestro instrumento de medición, sino antes bien el comportamiento característico que esta regla posee, es entonces que, como veremos *a posteriori* se requiere una cierta energía para alcanzar tales resoluciones sería excesivamente elevada, además de que es necesario un transductor adecuado que magnifique esa señal.

Por lo tanto, en la Microscopía Electrónica se emplea energía suficiente y necesaria para tener al alcance tan sólo muestras de interés.

Para 1900, el físico alemán Max Karl Ernst Ludwig Plank prosiguió el trabajo de su maestro Kirchhoff en radiación, logrando unificar, en una sola, las ecuaciones de Wien y Rayleigh sobre la distribución de la radiación de cuerpo negro (la ecuación de Wien se ajustaba perfectamente a las frecuencias altas, pero no a las bajas, mientras que con la ecuación de Rayleigh ocurría exactamente todo lo contrario). Para lograr esta teoría “unificada”, Planck partió de un principio fundamental: *La Energía No Es Divisible Indefinidamente*, con lo cual llegó a la conclusión de que cada partícula poseía un valor de energía característico, único y discreto (partículas que unos años más tarde Einstein los llamaría fotones), a cada uno de estos valores específicos de energía lo llamó *Quantum* (del latín *Quantus*), que en castizo se le conoce como Cuanto de Energía.

Una vez cuantizada la energía de las partículas, Planck estableció que ésta era función de la longitud de onda a la cual se propaga la radiación, *de facto*, es inversamente proporcional a la longitud de onda a la cual se conducen las partículas...

$$E \propto 1/\lambda$$

donde,

E [=] Energía

$\lambda$  [=] Longitud de Onda

A través de la relación de Planck se observa que con la microscopía óptica se estaba restringido a una sola región del espectro electromagnético, de 400 a 700 nm (el intervalo para la luz visible), a fin de utilizarlo como regla de medición, realmente si las ideas de Planck fuesen correctas, se cuenta con todo el espectro para disponer a discreción de él.

Acorde a la relación de Planck, el disminuir la energía daría como respuesta que la longitud de onda se incremente, y con esto, disminuir la resolución, por lo tanto es obvio el pensar que la respuesta está precisamente en la otra dirección.

Incrementando la energía, es posible disminuir la magnitud de la longitud de onda de una cierta radiación. Como anteriormente se pudo visualizar, el objetivo de este trabajo está en la aplicación de la microscopía, por lo tanto a continuación se verá cual es el verdadero alcance de la microscopía óptica, para después conocer el requerimiento energético por parte de la microscopía electrónica.

Como anteriormente se vio, la energía es inversamente proporcional a la longitud de onda, *de facto*, en la ecuación que Planck estableció son consideradas un par de constantes que conllevan a una identidad, siendo estas la velocidad de la luz {c}, y una nueva constante conocida como la constante de Planck {h}. Una vez identificada esta igualdad, es posible estimar la energía como una función de la longitud de onda.

Si el intervalo de la longitud de onda para la luz visible es de (400,700) nm, entonces fácilmente es posible el determinar su intervalo, pero ahora energético:

$$E = \frac{hc}{\lambda}$$

$$E_1 = \frac{(6.6256 \times 10^{-34} \text{ Joules} \cdot \text{seg})(3 \times 10^8 \text{ m/seg})}{400 \times 10^{-9} \text{ m}}$$

$$E_1 = 4.9692 \times 10^{-19} \text{ Joules}$$

$$E_2 = \frac{(6.6256 \times 10^{-34} \text{ Joules} \cdot \text{seg})(3 \times 10^8 \text{ m/seg})}{700 \times 10^{-9} \text{ m}}$$

$$E_2 = 2.839 \times 10^{-19} \text{ Joules}$$

De donde se obtiene una dispersión energética entre  $(2.839,4.969) \times 10^{-19}$  Joules para la luz visible, equivalente a  $(0.0177,0.031)$  eV, que como podrá apreciarse más adelante se trata de un intervalo de energía relativamente bajo.

Para poder lograr una resolución atómica (del orden de Angstroms,  $1 \times 10^{-10}$  metros) será necesario aumentar esta energía en una cantidad mayor y suficiente. Para poder estimar la misma, será necesario recurrir otra vez a la ecuación de Planck...

$$E_3 = \frac{(6.6256 \times 10^{-34} \text{ Joules} \cdot \text{seg}) (3 \times 10^8 \text{ m/seg})}{1 \times 10^{-10} \text{ m}}$$

$$E_3 = 1.98768 \times 10^{-15} \text{ Joules}$$

$$E_3 = 124 \text{ e}^- \text{Volts}$$

Hasta este momento, es posible apreciar que la energía necesaria para lograr resolución atómica es, por mucho, superior a la que se podría obtener con la luz visible. Esto conlleva a replantear, en forma más concisa, el concepto de resolución, definiéndose como la distancia mínima que separa a dos puntos diferenciables entre sí. Mientras que la magnificación que se puede obtener de un objeto es ilimitada, ya que es función de las veces que se amplifique una imagen, un número infinito de posibilidades de amplificación para una resolución dada; sin embargo, existen muchas magnificaciones que no son tópicos de interés, consecuencia de no poseer una resolución adecuada para de las misma obtener información; por lo tanto, cuando se obtengan magnificaciones de interés, se considerarán como una magnificación significativa.

Tomando como base la experiencia, es posible afirmar que la magnificación máxima y significativa que es posible alcanzar con la microscopía óptica es cuando mucho de 2000x, y esto si se toma en cuenta que se utilizan condiciones en extremo especiales (alto vacío, lentes perfectas).

Si se parte del supuesto de que a una mayor resolución, se puede lograr un aumento en la magnificación significativa, es entonces cierto afirmar que dicha magnificación es una función directa de la resolución; como la resolución es inversamente proporcional a la longitud de onda, y ésta a su vez es también inversamente proporcional a la energía, entonces se obtiene como consecuencia que la resolución es directamente proporcional a la energía empleada.

Por lo tanto, es posible concluir que la magnificación significativa será entonces función directa de la energía del haz suministrado, si además de todo esto, se puede observar que es directamente proporcional, entonces es posible el encontrar una relación entre ambos:

$$M \propto E$$

$\therefore$

$$M = kE$$

donde,

E [=] Energía

M [=] Magnificación

Si se parte del hecho que la energía máxima que, en un momento dado, puede alcanzar la luz visible es de  $5 \times 10^{-19}$  Joules, y de que la magnificación significativa máxima posible a alcanzar para la luz visible es de cuando mucho 2000x (como anteriormente se mencionó, tomando como base la experiencia), entonces si se sustituye este valor en la ecuación anterior se encontrará que la constante de proporcionalidad sería la razón entre magnificación y energía, dando un equivalente a  $4 \times 10^{21}$  Aumentos/Joule.

Regresando otra vez al objeto de este estudio, lo que se desea obtener resolución atómica, si la constante obtenida se cumple para la microscopía electrónica, es de esperarse obtener lo siguiente:

$$M = kE$$

$$M = \left(4 \times 10^{21} \text{ Aumentos/Joule} \right) (1.987 \times 10^{-15} \text{ Joules})$$

$$M = 7'950,720x$$

A partir de los resultados anteriores, se puede suponer que cuando tengamos resolución atómica se lograrán obtener magnificaciones del orden de 8'000,000x; pero regresando a la primera suposición, se pensó en una magnificación de 2000x para 400nm, realmente ésto es muy difícil de lograr, pero si se considera una cierta tolerancia, es posible afirmar que se puede alcanzar aumentos en el orden de 6'000,000x como un magnificación factible para una resolución atómica.

Si se toma como caso particular un Microscopio Electrónico de Transmisión (MET) con resolución de 4 Å (ésto es, 4 veces inferior a la resolución atómica), se esperará un decremento en la claridad de la magnificación significativa en igual magnitud (4 veces menor que los 6'000,000x), y se observa que se satisface lo anterior, ya que para el caso particular, previamente citado, es posible el alcanzar magnificaciones significativas máximas de hasta 1'500,000x.

Para el año de 1949, Heidenreich<sup>65</sup> trabajó con hojuelas de aluminio, hizo pasar a través de ellas un haz energético de 50 Ke-Volts; en función de la cantidad de materia que el haz tenía que atravesar, y de la interacción materia-energía que pudiese darse, era la transmitancia lograda. Al llevar a cabo este experimento, se logró observar la microestructura del aluminio de una forma diferente, y de igual manera, se pudieron obtener resultados nunca antes encontrados.

A pesar de que en la actualidad se estudia con una mayor energía que la que utilizó Heidenreich en su momento, y que se han obtenido mucho mejores resultados con el aluminio que los descritos por él, su gran contribución fue que, al igual que la labor de Leeuwenhoek marcara casi tres siglos antes, su trabajo de experimentación realmente dió el comienzo para una nueva etapa dentro de la microscopía: la edad de la Microscopía Electrónica.

El MET es una herramienta altamente poderosa, ya que es posible alcanzar, con cierta facilidad (y mucha energía), resoluciones atómicas; además de que es posible observar maclas, dislocaciones y fronteras de grano a esta resolución, también nos ayuda a determinar la estructura cristalina y orientaciones cristalográficas de un grano.

En especial, este último tópico es lo que ha motivado que a partir de la primera mitad de la década de los 50's tomará mucha popularidad el empleo de la microscopía electrónica, ya que al ser una técnica que atraviesa el material, puede definir su tipo de estructura y además su orientación cristalográfica.

A partir de la innovación del MET en la microscopía, surgieron otras herramientas para el estudio de muestras a resoluciones superiores a la microscopía óptica. Uno de los más populares, y hoy en día frecuentemente encontrado, y comúnmente utilizado, es el Microscopio Electrónico de Barrido (MEB).

A diferencia de la técnica descrita con anterioridad, en el MEB el haz de electrones no atraviesa el material, sino que la recepción de resultados se dar por diferentes análisis, pero algo coincidente para todos los casos es el empleo de la reflexión energética producida por la interacción del haz incidente con el espécimen (algo similar, aunque no igual, a lo que ya se venía realizando con la luz visible); este haz energético se manifiesta de diferentes formas, y acorde a lo que se esté buscando, se analizará cada diferente forma de energía, como puede ser electrones retrodispersados, electrones secundarios, e incluso hasta podrían ser Rayos-X.



La técnica es simple *per se*, la idea es recoger la información mediante la toma de datos discretos para la reproducción en un plano cartesiano. Entre mayor sea la resolución que estemos empleando, mayor sensibilidad habrá en la lectura de estos valores discretos. Sin embargo, posee una gran desventaja, nunca se logrará una continuidad analógica como la que se puede obtener con un MET.

Este tipo de microscopía se ha tornado notoriamente atractiva debido a que el análisis se lleva a cabo tan sólo para la topografía y la morfología de la superficie, tal y como es hecho con la microscopía óptica (algo que los metalógrafos están ya muy familiarizados, y además de que están acostumbrados a trabajar en este sentido); además de que la magnificación significativa posible a alcanzar en el MEB es muy superior a la óptica, tiene la ventaja de que una interfase lógica analiza la señal, de manera que se facilita de sobremanera el estudio y análisis.

La Microscopía Electrónica ha venido convirtiendo, durante las pasadas décadas, en una herramienta muy útil, y cada vez de mayor arraigo, dentro del estudio de la microestructura de los materiales; siendo ésto así, este trabajo se sustenta en ella como una herramienta fundamental para la observación.

Como se mencionó en el apartado referente a la Matemática Fractal, el hecho de incrementar la magnificación hace variar el perímetro de los granos en los materiales cristalinos. Al utilizar la microscopía electrónica se cuenta con una mejor resolución, por lo tanto es factible el poseer mayor magnificación, por lo que se puede analizar fractalmente la frontera de los granos a magnificaciones superiores a las ópticas; es de esperarse que esta variación de la magnificación corresponda también a un comportamiento de tipo fractal, el objetivo primario de este trabajo de investigación es verificar si esta aseveración es cierta...

En los capítulos posteriores se verán aplicaciones de esta técnica en las fronteras de grano de materiales cristalinos.

# EXPERIMENTACIÓN

*"La Teoría es asesinada, tarde o temprano, por la experiencia."  
Albert Einstein*

Tomando como fundamento la información, que hasta este momento ha sido generada, referente al comportamiento fractal detectado en las fronteras de grano de los materiales cristalinos, se planteó una primer hipótesis, que marcó la pauta para este estudio:

*El comportamiento fractal de las fronteras de grano en los materiales cristalinos debe de ser ocurrente para altas magnificaciones...*

Con la idea de dar validez a esta asección, se recurrió a materiales que, en primer instancia, poseyesen algunas de las siguientes características:

- que fuesen cristalinos,
- que fácilmente fuesen diferenciables sus fases,
- que fuesen materiales pulidos, mas no atacados, y
- que sus fronteras no contasen con quiebres aparentes.

La característica cristalina era algo necesario e indispensable, por estar intrínseco en la hipótesis; además, se requería que fuesen claramente diferenciables sus fases, con la idea de evitar el cometer alguna confusión al momento de definir, en forma concisa, el límite de sus cristales; también era importante que las muestras fuesen pulidas, con la idea de poder analizar el comportamiento sobre un plano, sin embargo, el espécimen en cuestión no debería ser atacado, ya que lo que en un momento dado se observaría sería el material removido por el ataque, no tanto en sí, la frontera, que es lo que se espera observar; este último requisito es realmente un caso extremo, pero que con el simple hecho de cumplirse, era ya condición suficiente como para satisfacer ampliamente el vasto del universo que componen las fronteras de grano.

Un material que satisfacía los requerimientos previamente descritos fue la soldadura de Plomo-Estaño, ante lo cual se procedió a realizar la caracterización de las fronteras de grano de una serie de muestras de esta aleación.

La metodología fue relativamente simple: Primero se prepararon algunas muestras de la soldadura de Plomo-Estaño comercial, cortándose con un equipo de corte fino con punta de diamante, se pulieron con alumina de 0.01 micras de granulometría media, con la idea básica de poder visualizar un solo plano, cuando menos hasta el límite impuesto por el tamaño de los polvos de alumina.

Posteriormente se observaron las probetas, sin haberse montado, a través de un Microscopio Electrónico de Barrido (MEB), con capacidad de 30 KeV, utilizando la técnica de Imagen de Electrones Retrodispersados (IER), donde se digitalizaron diversas imágenes, cada una correspondiente a una cierta magnificación específica.

Se decidió utilizar IER debido a que a través de dicha técnica podemos obtener una imagen con diferenciación clara de las fases, ésto es consecuencia a la penetración que el haz tiene con la muestra y la diferente interacción del haz energético con la materia nos arroja imágenes con diferente tonalidad, correspondiente cada una a las fases presentes.

En la figura 5 se muestra una imagen de la soldadura Plomo-Estaño tomada a 1000x, donde se puede apreciar claramente que sus fronteras son fácilmente distinguibles, además de que son líneas, aparentemente, suaves (ésto es, sin quiebres).

Una vez recabada la información digital, se procedió a utilizar un Analizador de Imágenes Leica Quantimet 520+, en donde, utilizando el método de box-counting, y al pixel como celda, se realizó el conteo perimetral de los granos.

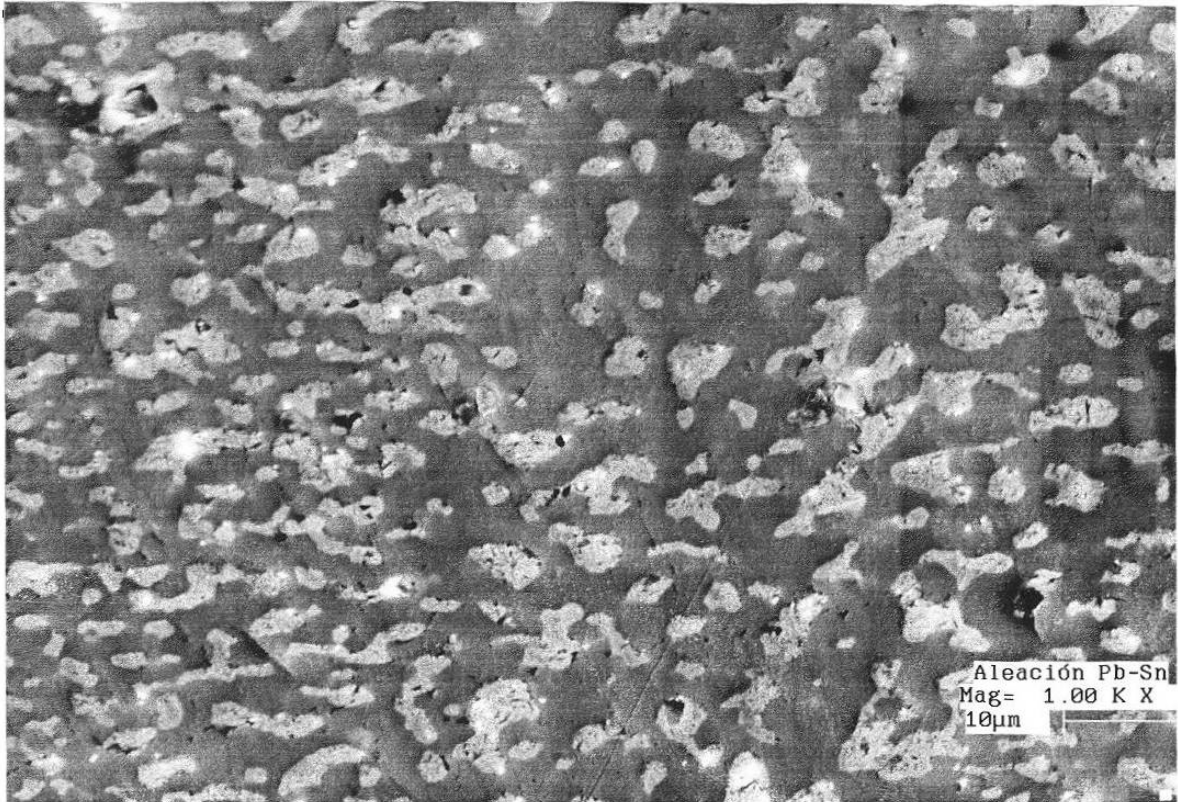


Fig.5.- Soldadura Plomo Estaño a 1000x.

Uno de las primeras dificultades encontradas fue que el Analizador de Imágenes no contaba con una equivalencia entre pixeles y dimensión longitudinal real, consecuencia de esto, fue necesario realizar las mediciones perimetales en pixeles, y además establecer, en forma experimental, una razón de equivalencia entre la distancia real de dos puntos en una imagen y la distancia entre estos mismos dos puntos pero medida en pixeles (resolución del MEB, en función de la magnificación).

Para estimar la equivalencia antes descrita se aprovechó el analizador de imágenes del propio MEB, de donde se obtuvo información suficiente como para recrear la dispersión de puntos que se muestra en la figura 6, mostrado en la página que precede estas líneas.

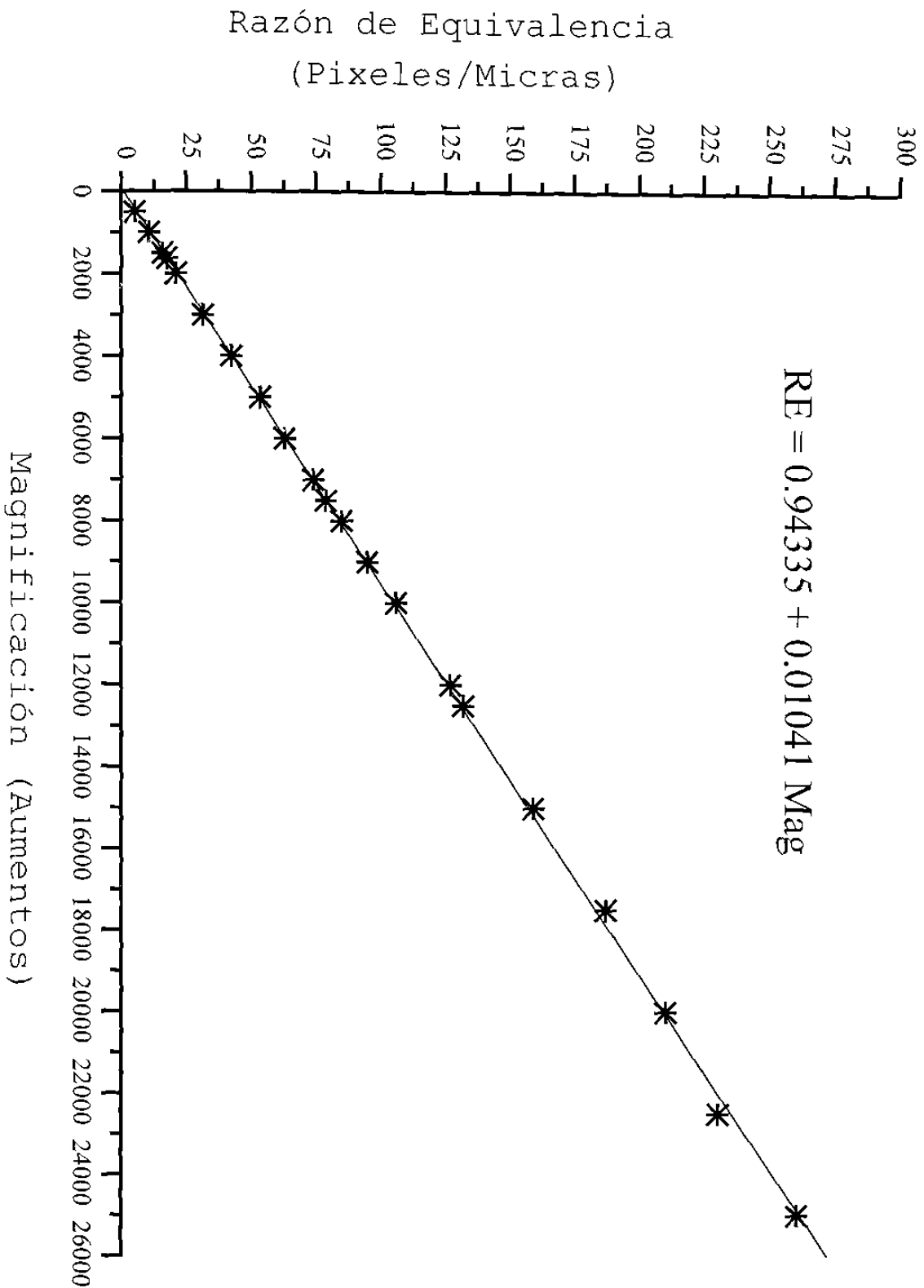


Figura 6

De esta manera, se determinó que la Razón de Equivalencia (RE) se comportaba en forma directamente proporcional a la magnificación empleada (algo que era de esperarse). Utilizando la metodología propuesta por Gauss de los mínimos cuadrados para obtener la ecuación de la curva que rige un cierto comportamiento, se obtuvo la siguiente regresión:

$$RE = 0.94335 + 0.01041 \text{ Mag}$$

donde,

RE [=] Razón de Equivalencia (Píxeles/Micras)

Mag [=] Magnificación Empleada (Aumentos)

Si consideramos una magnificación de imagen nula (0x), la razón de equivalencia nos da un valor de 0.943, lo que quiere decir que un píxel es exactamente igual a 0.943  $\mu\text{m}$ , un valor muy cercano a lo que en un monitor de tipo VGA se puede obtener, precisamente el que se utiliza en el analizador de imágenes.

Una vez resuelta la compatibilidad, se hizo necesario el estimar el error ocurrente en la medición, con la idea de determinar los límites que el mismo equipo impone.

El error es función directa del píxel, por lo tanto serán la magnificación a la cual se lleva a cabo la imagen, y el tamaño de las partículas a medir lo que definirá el error inherente en una medición.

La razón entre el tamaño máximo real de una partícula contra la medición realizada en píxeles será el porcentaje de error.

*A posteriori* se verá que la variable encontrada que relaciona estos parámetros, y en la forma propuesta es, precisamente, el inverso de la razón de equivalencia dividido entre el diámetro de Feret (con la idea de normalizar la medición), algo que se conoce como el factor de calibración ( $\lambda$ ).

$$\lambda = \frac{1}{\phi_{feret} (0.94335 + 0.01041 Mag)}$$

De la ecuación anterior es posible argüir que en la medida que la magnificación crece, el factor de calibración tiende a disminuir, además, a medida que el diámetro de Feret crece, también disminuye el factor de calibración; para ambos casos, el error por medición disminuye.

A manera de ejemplificación, si se supone una magnificación de 500x y un diámetro de Feret de 1  $\mu\text{m}$ , entonces el error a tener sería del 0.1626%, los diámetros de Feret en este escrito, para todos los casos, son superiores a 1  $\mu\text{m}$ , aunado a esto, las magnificaciones empleadas son superiores a los 500x, por lo tanto, los errores de medición dados por el equipo serán inferiores a este valor, y lo que es más valioso, estarán descritos cada vez que se necesite evaluar el factor de calibración, definiendo también el error.

Una vez resuelta la compatibilidad, se procedió a medir el perímetro descrito por una frontera de grano de plomo en la matriz de estaño; a continuación se muestran dos de las imágenes tomadas por el MEB (figuras 7 y 8).



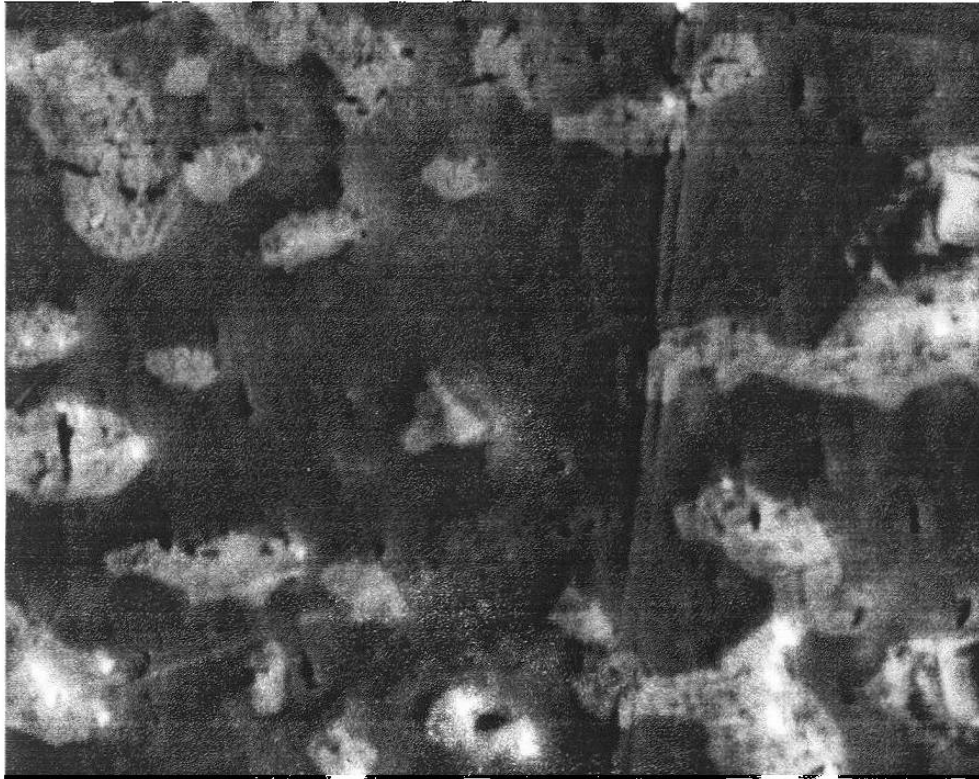


Fig. 7.- Soldadura Plomo-Estano, a 2000x

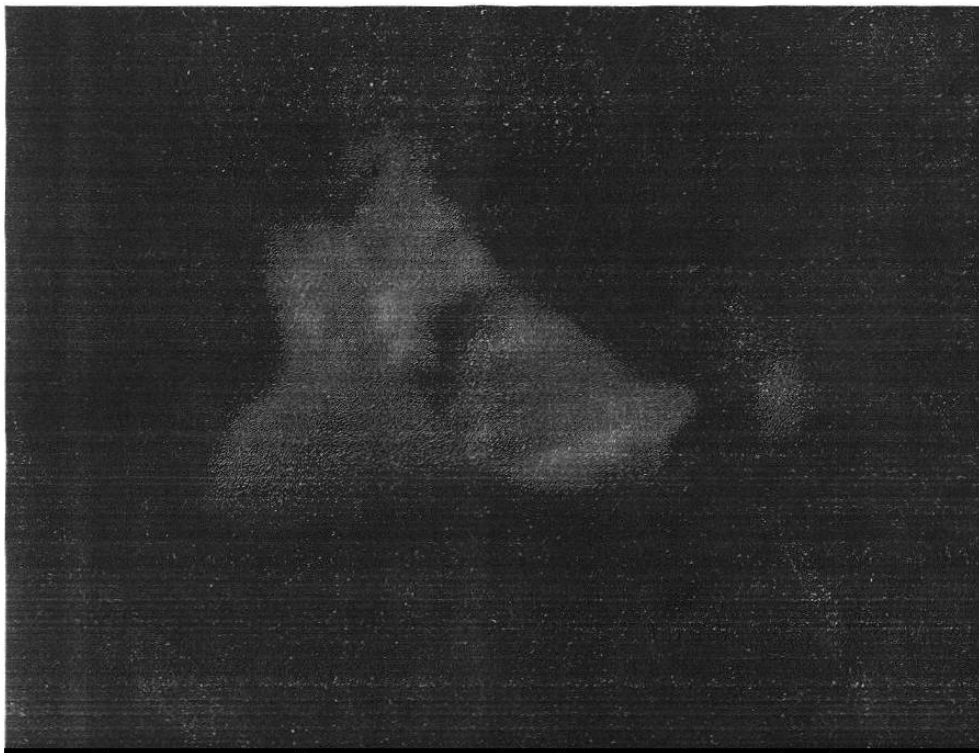


Fig. 8.- Grano de Plomo en Matriz de Estano, a 10000x

Utilizando el analizador de imágenes, se obtuvo la medida del perímetro de la frontera de grano en cuestión, para cada una de las diferentes imágenes, así como su diámetro de Feret, obteniéndose la Tabla 1:

Tabla 1.- Obtención del Perímetro Normalizado para Soldadura Plomo-Estaño.

Magnificación (Aumentos)	Perímetro		Perímetro Normalizado	Log <sub>10</sub> (Perímetro)
	(Píxeles)	(Micrómetros)		
2,000	174	8.0	3.5	0.550640984
3,000	297	9.2	4.1	0.613077648
4,000	424	9.9	4.4	0.645943514
5,000	541	10.21	4.53	0.656793372
7,500	820	10.38	4.61	0.663903377
10,000	1,101	10.48	4.65	0.668236237
12,500	1,379	10.52	4.67	0.669883916
15,000	1,670	10.63	4.72	0.674376152

El diámetro de Feret fue de un valor de 2.25  $\mu\text{m}$ , para lo cual el perímetro, una vez convertido a sistema métrico, se normalizó *versus* este valor.

Como se puede visualizar el valor del perímetro es variable y creciente con el valor de la magnificación, por lo que es posible que el comportamiento, ocurrente en la frontera de grano, sea de tipo fractal; además de encontrar esta variación, se cuenta con el antecedente de que para las bajas magnificaciones también lo fue.

Para poder estimar si es fractal el comportamiento, es necesario determinar el valor de la dimensión que posee la frontera; para poder evaluarla se requiere que el valor normalizado del perímetro sea cambiado de escala, por una semilogarítmica, de base 10, además es necesario que se determine el valor del factor de calibración normalizado, todo esto para recrear el gráfico de Richardson.

El factor de calibración normalizado ( $\lambda$ ) es lo que en la jerga se conoce como *yardstick*, no es otra cosa más que el patrón de medición que se utiliza para definir la resolución; para este caso específico se utilizará el inverso multiplicativo de la Razón de Equivalencia, estando ésta, como antes se describió, en función de la magnificación; una vez obtenido este resultado, se normalizará contra el diámetro de Feret; por lo tanto, para poder estimarlo, se hace necesario utilizar la ecuación antes vista para determinar el error,

$$\lambda = \frac{1}{\phi_{feret} (0.94335 + 0.01041 Mag)}$$

para después recrear la Tabla 2...

Tabla 2.- Obtención del Factor de Calibración para Soldadura Plomo-Estaño.

<b>Magnificación (Aumentos)</b>	<b>Factor de Calibración (<math>\lambda</math>)</b>
2000	$2.042 \times 10^{-2}$
3000	$1.381 \times 10^{-2}$
4000	$1.043 \times 10^{-2}$
5000	$8.386 \times 10^{-3}$
7500	$5.624 \times 10^{-3}$
10000	$4.525 \times 10^{-3}$
12500	$3.391 \times 10^{-3}$
15000	$2.829 \times 10^{-3}$

Colocando el factor de calibración, en forma logarítmica, en el eje de las abscisas, y el logaritmo base 10 del perímetro en el eje de las ordenadas, se obtiene la dispersión de puntos mostrada en la figura 9.

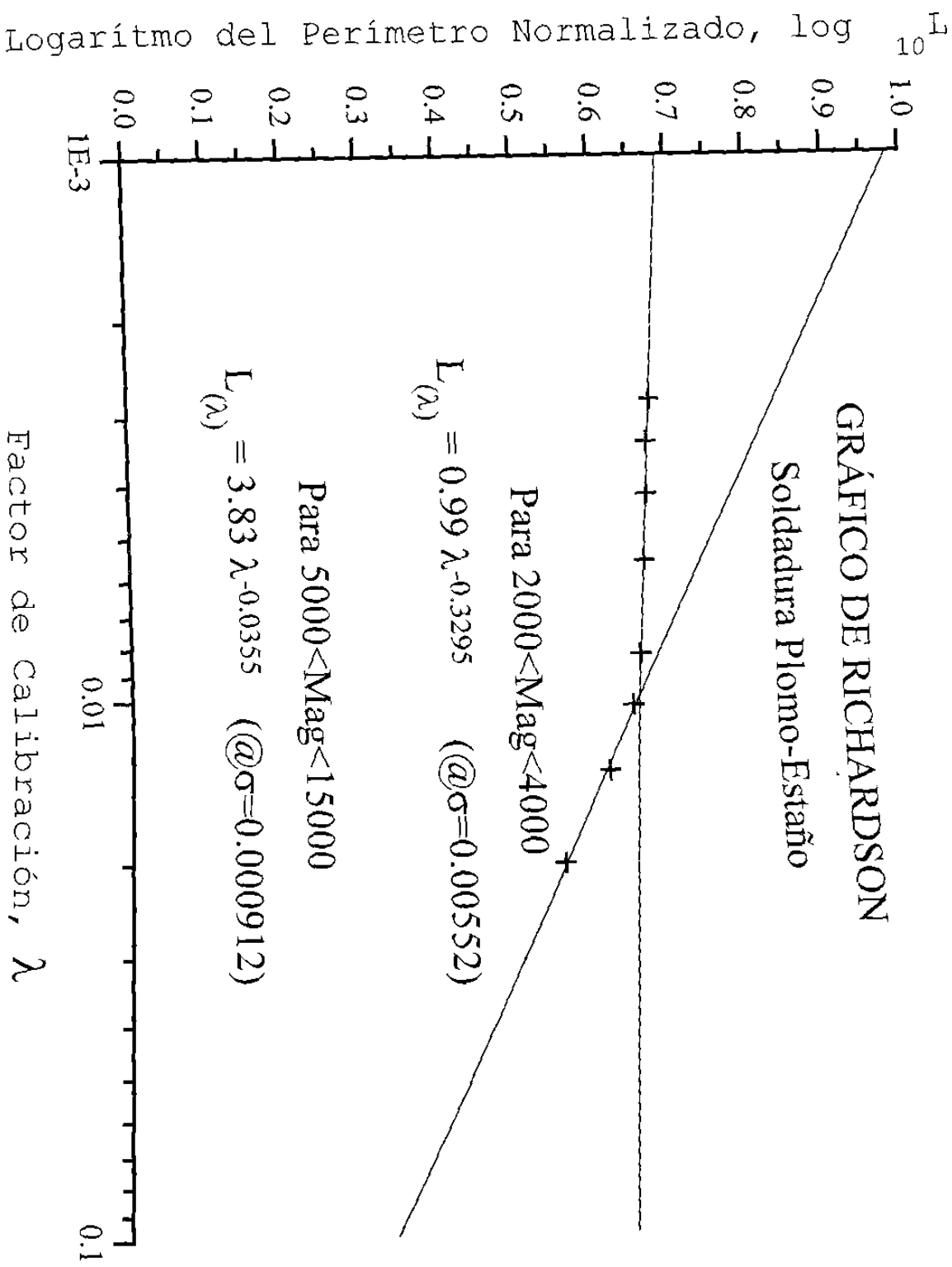


Figura 9

Ante esta dispersión se encuentra, no uno, sino dos mecanismos que rigen el comportamiento fractal, al determinar la regresión de ambas líneas rectas, se encuentran las ecuaciones siguientes:

$$L = \begin{cases} 0.599\lambda^{-0.3295}, & \text{si } 2000x < Mag < 4000x \\ 3.83\lambda^{-0.03548}, & \text{si } 5000x < Mag < 15000x \end{cases}$$

De la segunda recta se observa que el valor de  $\{1-D\}$ , exponente del factor de calibración, es exactamente igual a  $-0.03548$ , por lo que la dimensión dentro de este intervalo será de  $1.03548$ ... casi euclidiana.

Mientras que para unos niveles de magnificación inferiores a los  $4000x$ , se observa que el valor de  $\{1-D\}$  es exactamente igual  $-0.3295$ , por lo que la dimensión fractal, dentro de este intervalo será de  $1.3295$ , de mayor grado de distorsión que el anterior.

Visualizando este caso particular, es posible el afirmar que la dimensión fractal sí es ocurrente a magnificaciones altas, aunado a ésto, dado que la evaluación fue realizada utilizando un caso de tipo extremo, es entonces correcto el argüir que para el resto de los materiales cristalinos también se encontrará un comportamiento de tipo fractal.

Además, se encontraron las dos pendientes sugeridas por Kaye, y tiempo después, determinadas por Hinojosa; una atribuible al grado de distorsión en la estructura, y la otra a la forma en que está dada la textura, que para el caso particular del plomo resultó ser superior la dimensión fractal por estructura, con respecto a la de textura.

Aún así, una dimensión fractal de  $1.03548$  de valor es relativamente suave.

Para 1991, los japoneses Tanaka e Iizuka sugirieron que podría existir alguna relación entre la dimensión fractal de las fronteras de grano y la fractura por termofluencia<sup>61</sup>; a continuación se presentan en la Tabla 3 los resultados encontrados, para fronteras lisas (sin incrustaciones metálicas) y fronteras corrugadas (con incrustaciones metálicas).

Tabla 3.- Dimensión Fractal para Aleaciones Metálicas Refractarias.

Tipo de Material	Dimensión Fractal [lisas-corrugadas]
Acero Austenítico 21-4N	[1.108-1.252]
Cobalto HS-21	[1.080-1.205]
Cobalto L-605	[1.086-1.324]
Inconel X-750	[1.026-1.160]
Inconel 751	[1.112-1.290]

\* Puede observarse la composición química de cada material en el Anexo 1.

Si se comparan los valores encontrados de las aleaciones altamente resistentes al calor y la soldadura plomo-estaño, para todos los casos el material es metálico, además su dimensión fractal es relativamente baja, inclusive para algunos casos, la dimensión es casi euclidiana.

Sin embargo, la fractura por termofluencia ocurre cuando el material en cuestión posee un punto de fusión elevado, y es sometido a una temperatura inferior a su punto de transición, en algún lugar en el intervalo entre 0.4 y 0.7 veces su punto de fusión; además la fractura es, básicamente un proceso mecánico, que ocurre mediante el mecanismo de cavitación, y nuclea preferencialmente en los puntos triples de los granos<sup>66,67,68</sup>.

Como los materiales caracterizados fractalmente, hasta este momento, poseen punto de fusión relativamente bajos, se buscó un material que tuviese las siguientes características: que fuese cristalino, que poseyera una temperatura de fusión relativamente alta, y que sus fases fuesen fácilmente diferenciables; un material que satisfacía las anteriores condiciones resultó ser el espinel, por lo tanto, se eligió para su estudio.

El Espinel empleado es un estado eutéctico entre  $\text{Al}_2\text{O}_3$  y  $\text{MgO}$ , utilizado comúnmente en la industria como material refractario, por lo que se dió a la tarea de caracterizarlo fractalmente en uno de sus puntos triples.

Nuevamente se utilizó un MEB para llevar a cabo la toma de imágenes, y el Analizador de Imágenes antes descrito para evaluar su perímetro, en la figura 10 se muestra una de las imágenes adquiridas, donde se caracterizó el punto triple.

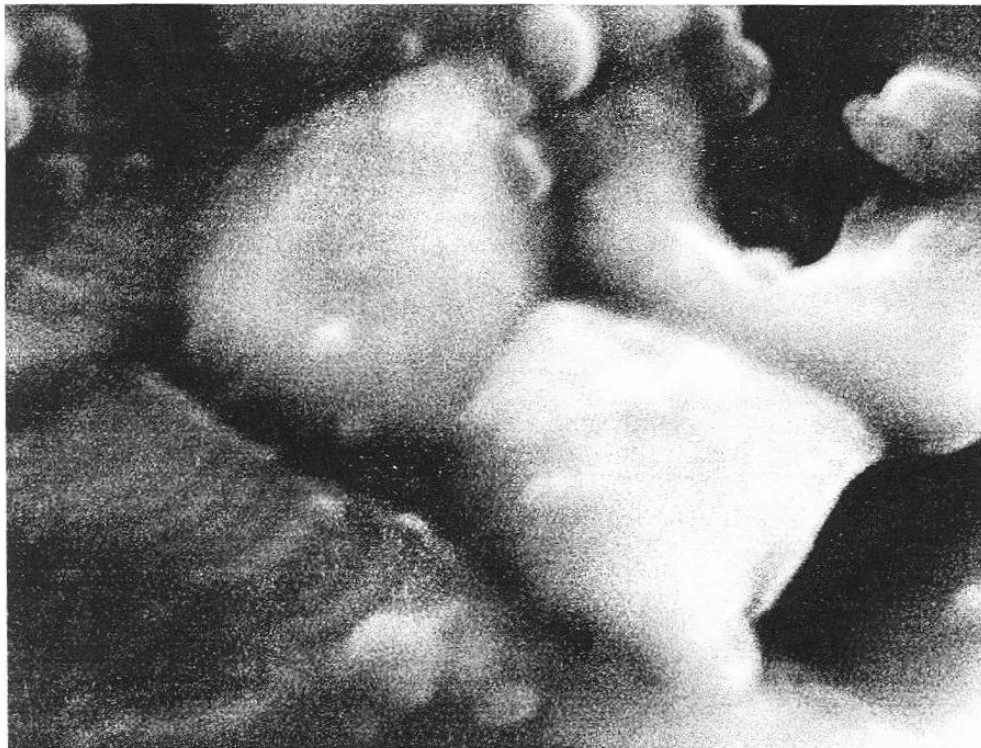


Fig. 10.- Punto Triple en Espinel, tomada a 3500x.

Una vez utilizado el Analizador de Imágenes, se obtuvieron los resultados que se muestran en la Tabla 4:

Tabla 4.- Obtención del Perímetro Normalizado para un Punto Triple de Espinel.

Magnificación (Aumentos)	Perímetro		Perímetro Normalizado	Log <sub>10</sub> (Perímetro)
	(Píxeles)	(Micrómetros)		
500	33	5.3	1.2	0.091266
1,000	97	7.2	1.6	0.218843
1,500	145	8.7	2.0	0.303861
2,000	199	9.5	2.1	0.339234
2,500	289	10.72	2.46	0.391554
3,000	346	11.30	2.59	0.4145891
3,500	465	12.44	2.85	0.4563435
4,000	571	13.41	3.08	0.4889070
4,500	667	13.96	3.20	0.5063145
5,000	758	14.30	3.28	0.5169585
5,500	912	14.57	3.34	0.5249702
6,000	924	15.60	3.58	0.5546353
6,500	1083	15.79	3.62	0.5597622
7,000	1193	16.16	3.71	0.5700162
7,500	1306	16.53	3.79	0.5797259

Asímismo, se encontró un diámetro de Feret de 4.35  $\mu$ metros, por lo que se tuvo que normalizar también el factor de calibración  $\lambda$ .

Utilizando la ecuación encontrada *a priori*, se recreó la Tabla 5...



Tabla 5.- Obtención del Factor de Calibración para Punto Triple en Espinel.

Magnificación (Aumentos)	Factor de Calibración ( $\lambda$ )
500	$3.738 \times 10^{-2}$
1000	$2.024 \times 10^{-2}$
1500	$1.388 \times 10^{-2}$
2000	$1.056 \times 10^{-2}$
2500	$8.524 \times 10^{-3}$
3000	$7.145 \times 10^{-3}$
3500	$6.150 \times 10^{-3}$
4000	$5.398 \times 10^{-3}$
4500	$4.810 \times 10^{-3}$
5000	$4.337 \times 10^{-3}$
5500	$3.950 \times 10^{-3}$
6000	$3.625 \times 10^{-3}$
6500	$3.350 \times 10^{-3}$
7000	$3.114 \times 10^{-3}$
7500	$2.909 \times 10^{-3}$

Una vez obtenidos el factor de calibración - y el logaritmo, base 10, del perímetro normalizado -, se procedió a realizar la regresión matemática lineal, donde se encontró, con número mayor de muestreos que en el caso anterior de la soldadura plomo-estaño, tan sólo una línea recta dentro del intervalo de 500x a 7500x (ver Figura 11), dada por la siguiente ecuación:

$$L = 0.296 \lambda^{-0.44139}$$

En donde es posible apreciar que el valor de  $\{1-D\}$  es exactamente igual a  $-0.44139$ , por lo que la dimensión, dentro de este intervalo, será de  $1.44139\dots$  un grado realmente alto de distorsión.

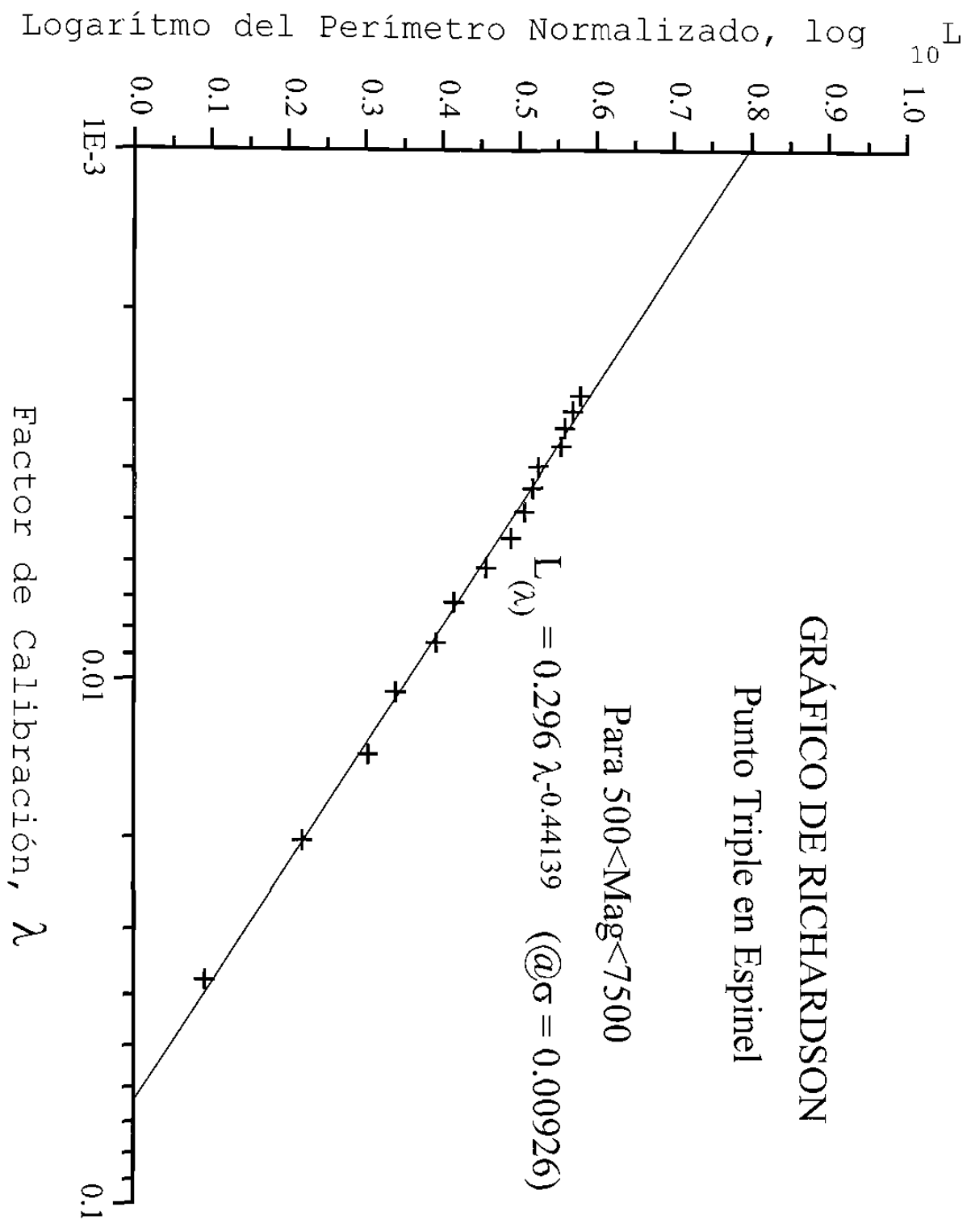


Figura 11

# ANÁLISIS DE RESULTADOS

*“El que quiera instruirse debe primero saber dudar,  
pues la duda del espíritu conduce a la verdad.”  
Aristóteles*

En la Tabla 6 se presentan los resultados que se han obtenido sobre las fronteras de grano caracterizados a bajas magnificaciones y para diferentes materiales cristalinos:

Tabla 6.- Dimensión Fractal para materiales cristalinos utilizando Microscopía Óptica.

<b>Año</b>	<b>Investigador</b>	<b>Material</b>	<b>Dimensión</b>
1991	Tanaka e Iiuzuka	Acero Austenítico 21-4N	1.108-1.252
1991	Tanaka e Iiuzuka	Cobalto HS-21	1.080-1.205
1991	Tanaka e Iiuzuka	Cobalto L-605	1.086-1.324
1991	Tanaka e Iiuzuka	Inconel X-750	1.026-1.160
1991	Tanaka e Iiuzuka	Inconel 751	1.112-1.290
1995	Hinojosa, Rodríguez & Ortiz	Acero Inoxidable 316L (@ $\epsilon=0$ )	1.106
1995	Hinojosa, Rodríguez & Ortiz	Acero Inoxidable 316L (@ $\epsilon=5\%$ )	1.104
1995	Hinojosa, Rodríguez & Ortiz	Acero Inoxidable 316L (@ $\epsilon=10\%$ )	1.103
1995	Hinojosa, Rodríguez & Ortiz	Acero Inoxidable 316L (@ $\epsilon=15\%$ )	1.090
1995	Hinojosa, Rodríguez & Ortiz	Acero Inoxidable 316L (@ $\epsilon=20\%$ )	1.080
1995	Shu-Zu Lung & Hellawell	Al-Si A319	1.310
1995	Streitenberger <i>et al.</i>	Zinc (@99.9%)	1.160
1995	Streitenberger <i>et al.</i>	Zinc Recocido (@623°K, 15 min.)	1.210
1996	Hinojosa, Trejo & Ortiz	Acero Inoxidable 304 (@ $\epsilon=0$ )	1.028
1996	Hinojosa, Trejo & Ortiz	Acero Inoxidable 304 (@ $\epsilon=50\%$ )	1.028-1.149

Como se puede apreciar, los valores en todos los casos de dimensión fractal son, relativamente, bajos, ésto se debe a que los materiales cristalinos empleados poseen también puntos de fusión, relativamente, bajos. A continuación se muestran los resultados obtenidos, para este trabajo, utilizando la técnica de la microscopía electrónica:

Tabla 7.- Dimensión Fractal para materiales cristalinos usando Microscopía Electrónica.

Año	Investigador	Material	Dimensión
1997	Garza-Paz & Ortiz	Soldadura Plomo-Estaño	1.035-1.329
1997	Garza-Paz & Ortiz	Espinel MgO-Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	1.441

Para el análisis fractal con Microscopía Electrónica, la soldadura Pb-Sn, también arrojó valores de dimensión bajos; mientras que para el caso del espinel, la dimensión fractal fue alta. En la Figura 12 se muestra, en forma esquemática, la comparación de los diversos valores.

En el gráfico anterior se compara a la dimensión fractal *versus* la temperatura de fusión del material; en la misma es posible el apreciar que al pasar el umbral de 1922°K, la dimensión fractal crece, y valores inferiores a esta temperatura, la dimensión fractal no rebasa la barrera de 1.2, caso excepción es el de Al-Si, cuya dimensión fractal es de 1.31, pero para este caso particular no se tienen granos equiaxiales, sino que son dentritas de aluminio, en la matriz de silicio, por lo tanto, su distorsión es mayor a la esperada.

Este valor límite de temperatura (1922°K), es el comúnmente empleado para definir a los materiales refractarios, los cuales, poseen una temperatura de fusión superior a ésta.

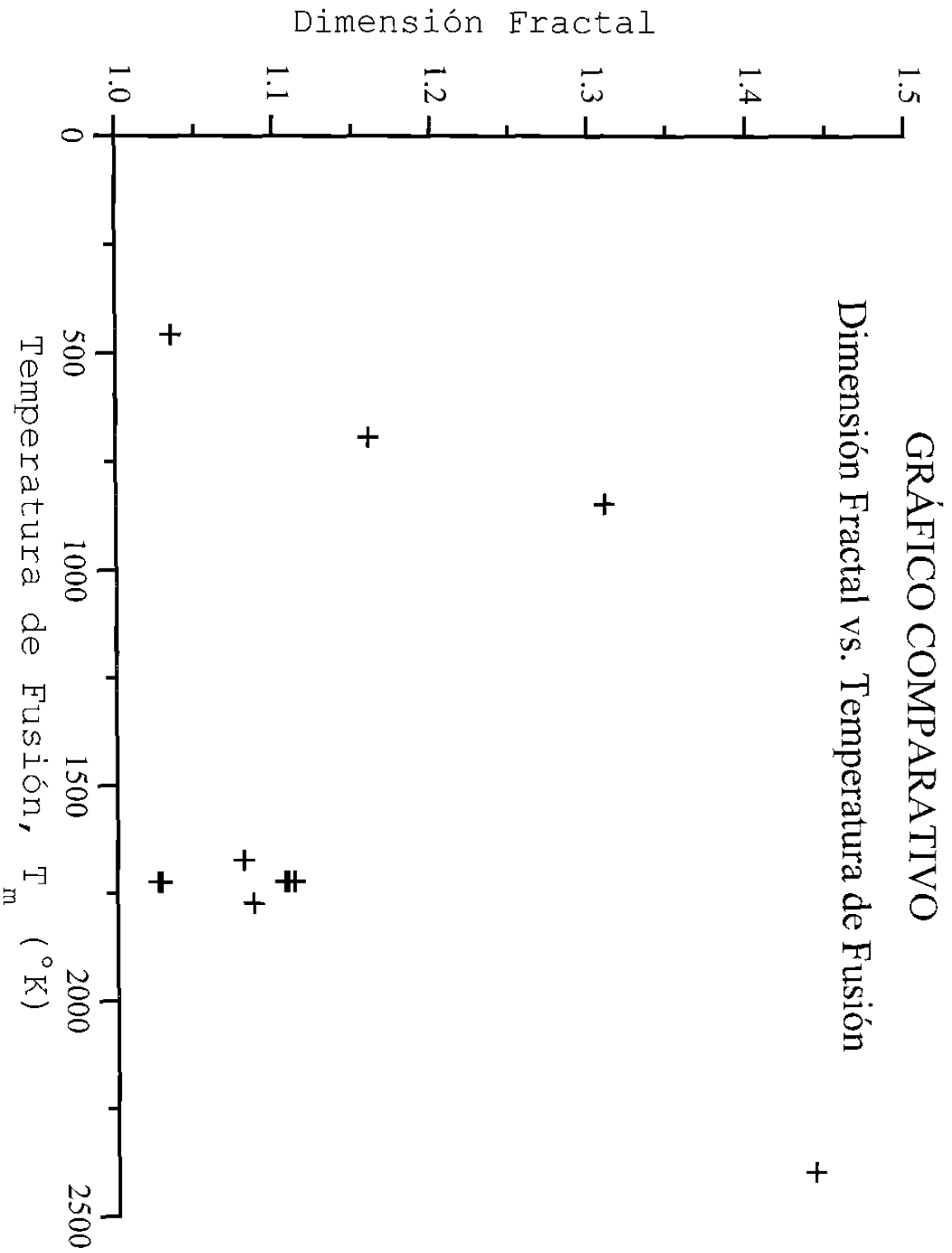


Figura 12

# CONCLUSIONES

*“Si me equivoco, deduzco que soy,  
pues el que no es, no puede equivocarse.”  
San Agustín*

Como consecuencia de los resultados obtenidos en el capítulo anterior, fue posible el aseverar como válidas algunas de las hipótesis planteadas antes de comenzar con esta investigación. Además emanaron algunas nuevas ideas al transcurso de la creación del mismo que fueron incrementando el acervo de los resultados.

A continuación se transcriben las conclusiones logradas:

- \* Primeramente, como objetivo principal de esta disertación, se demostró que la característica fractal de las fronteras de grano es ocurrente para magnificaciones consideradas como altas, esto es, superiores a los 1000 aumentos, y utilizando microscopía electrónica de barrido.
- \* Una ventaja importante encontrada al utilizar microscopía electrónica con respecto a la microscopía óptica, fue que se puede realizar un gran número de muestreos para ponderar la dimensión fractal de cualquier frontera de grano, ya que en la microscopía óptica se tiene la restricción de la cantidad de lentes para magnificar imágenes, siendo éstos función directa a la cantidad de muestreos a tomar.
- \* También fué posible el certificar, que para el caso específico de trabajar a magnificaciones altas, la propuesta de Kaye de encontrar dos dimensiones fractales, una para estructura y otra para textura, que Hinojosa corroborara para magnificaciones bajas, para la frontera de cualesquier grano a evaluar prevalece.

- \* Acorde con la experimentación llevada a cabo hasta este momento, se pudo demostrar que los materiales cristalinos considerados como frágiles, oséase con temperaturas de fusión altas (para este trabajo específico, MgO y Espinel), presentan un grado alto de distorsión en sus puntos triples, y ésto pudo ser cuantificado mediante la medición de la dimensión fractal de los mismos, arrojando valores altos, en el orden de 1.4.
  
- \* Asimismo, para materiales cristalinos considerados como dúctiles, oséase, con temperaturas de fusión bajas (para este trabajo, Cobre, Aluminio, Plomo-Estaño, y Plomo), presentan un bajo grado de distorsión en sus puntos triples, que al igual que el inciso anterior, pudo visualizarse este fenómeno mediante la cuantificación de la dimensión fractal, obteniéndose unos valores inferiores a 1.2.



# RECOMENDACIONES

*“El investigador ha debido reconocer que, lo mismo que todo ser humano,  
es un tiempo espectador y actor en el gran drama de la existencia.”*

*Niels Henrik David Bohr*

Como aspecto final para esta disertación, se recomienda al investigador que desee continuar con esta línea de trabajo que analice los siguientes puntos:

- \* Para el caso del grado de distorsión ocurrente en un punto triple, se recomienda el realizar un número mayor de experimentos, con una amplia variedad de materiales diversos, con la idea de dar un vasto asiento a la teoría aquí planteada.
- \* En caso de que sí exista una relación entre la fractura en un material por termofluencia y la dimensión fractal de un punto triple, se recomienda que se estudie la cinética de la misma en función de la dimensión fractal.
- \* Por otro lado, al corroborarse que si es fractal el comportamiento de las fronteras de grano a magnificaciones altas, se recomienda el análisis de pigmentos con microscopía electrónica, y su relación de la morfología con la refracción difusa de la luz.
- \* Se recomienda la caracterización de superficies en forma fractal (ondulación, textura y rugosidad) analizándolas como un movimiento browniano, y realizar un estudio tribológico donde se pueda visualizar su impacto en superficies que han sufrido desgaste.

## Referencias Bibliográficas.-

- 1 Abraham H. Maslow, "*A Theory of Human Motivation*", Psychological Review, pp 370-396, 1943
- 2 Isaac Asimov, "*The Near East*", Houghton Mifflin Co., pp 9-32, 1968
- 3 Isaac Asimov, "*The Land of Cannan*", Houghton Mifflin Co., pp 9-29, 1971
- 4 Platón, "*Diálogos entre Sócrates y Fedón sobre el Alma*", Grolier, pp 89-95, 1980
- 5 Aristóteles, "*Metafísica, Libro Primero*", Grolier, pp 3-10, 1977
- 6 Nickolai Wanovich Lobatschewskij, "*Nuevos fundamentos de la geometría*", Rev. de Ciencias de Kasan, 1829
- 7 Farkas Wolfgang Bôlyai de Bolya, "*Tentamen juventum studiosam in elementa mathesos puræ introducendi*", Maros-Vasarhely, appendix, 1832
- 8 Georg Friedrich Bernhard Riemann, "*Über die Hypothesen welche der Geometrie zur Grunde Liegen*", 1857
- 9 Albert Einstein, "*Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie*", Princeton University Press, pp 46-48, 1917
- 10 John Walis, "*Treatise of Algebra*", 1685
- 11 G. Cantor, "*Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der Trigonometrischen Reihen*", Mathematische Annalen 5, pp 123-132, 1872
- 12 Giuseppe Peano, "*Sur une Corbe, qui remplit une aire plane*", Mathematische Annalen 36, pp 157-160, 1890
- 13 Jean Perrin, "*Mouvement brownien et réalité moléculaire*", Annales de chimie et de physique VIII 18, pp 5-114, 1909
- 14 H. Lebesgue, "*Sur le problème des aires*", Enseignement Mathématique IV, pp 29-35, 1903
- 15 Felix Hausdorff, "*Dimension und äusseres Mass*", Mathematische Annalen 79, pp 157-179, 1919
- 16 A. S. Besicovitch, "*On rational approximation to real numbers*", Journal of the London Mathematical Society 9, pp 126-131, 1934

- 17 H. Von Koch, "*Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire*", Arvik för Matematik, Astronomi och Fysik 1, pp 681-704, 1904
- 18 Benoit B. Mandelbrot, "*Les Objets fractals: forme, hasard et dimension*", ed. Flammarion, 1975
- 19 San Agustín, "*Nihil obstat*", editorial Paulinas 24a edición, Libro IX, Capítulo XIV, pp 236-237, 1996
- 20 Henri Pousseur, "*La nuova sensibilità musicale*", Incontri Musicali 2, pp. 25, 1958
- 21 Umberto Eco, "*Opera Aperta*", Casa Editrice Valentino Bompiani & C.S.p.A., 1962
- 22 Sir Isaac Newton, "*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*", Cambridge University Press, pp. 13-14, 1686
- 23 Jean-Paul Sartre, "*L'être et le néant: Essai d'ontologie phénoménologique*", Editions Gallimard, 4a Parte, Cap. 1, 1943
- 24 Jean Perrin, "*Les Atoms*", Van Nostrand, pp 68-85, 1913
- 25 Minkowski, H., "*Über die Begriffe Länge, Oberfläche und Volumen*", Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung 9, 115-121, 1901
- 26 G. Bouligand, "*Ensembles impropres et nombre dimensionnel*", Bulletin des Sciences Mathématiques II-52, pp 320-376, 1928
- 27 G. Bouligand, "*Sur la notion d'ordre de mesure d'un ensemble plan*", Bulletin des Sciences Mathématiques II-53, pp. 185-192, 1929
- 28 J. Pontrjagin & L. Schnirelman, "*Sur une propriété métrique de la dimension*", Annals of Mathematics 33, pp. 156-162, 1932
- 29 Lewis Fry Richardson, "*Weather Prediction by Numerical Process*", Cambridge University Press, 1922
- 30 H. Kostron, Arch. Metall., pp 193-203, 1949
- 31 Norma ASTM E-112-63, *Standards Test Methods for Determining Average Grain Size*, 1963
- 32 A.N. Kolmogorov, C.R. Acad. Sci. U.R.S.S. 31, pp. 538, 1941

- 33 A.N. Kolmogorov, "*A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number*", Journal of Fluid Mechanics 13, pp. 82-85, 1962
- 34 Benoit B. Mandelbrot, "*How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension*", Science 155, pp. 636-638, 1967
- 35 Benoit B. Mandelbrot, "*Intermittent Turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier*", J. of Fluid Mechanics 62f, pp. 331-358, 1974
- 36 Benoit B. Mandelbrot, "*On the geometry of homogeneous turbulence, with stress and fractal dimension of the iso-surfaces of scalars*", J. of Fluid Mechanics 72f, pp. 401-416, 1975
- 37 Benoit B. Mandelbrot, "*Hasards et tourbillons: quatre contes à clef*", Annales des Mines (nov), pp. 61-66, 1975
- 38 Benoit B. Mandelbrot, "*Self-similarity random process and the range*", Reporte RC-1163 para IBM Research, abril 13, 1964 (sin publicar, op. cit. en ref. 18)
- 39 Paul R. Halmos, "*Naive Set Theory*", D. Van Nostrand Company, inc., Sec. 22, pp. 86-89, 1960
- 40 E. Hornbogen, "*Fractals in microstructure of metals*", International Materials Reviews 34 (6), pp. 277-296, 1989
- 41 Moises Hinojosa Rivera, Raul Rodríguez Miranda, & Ubaldo Ortiz Méndez, "*Microstructural Fractal Dimension of AISI 316L Steel*", Materials Research Society Symposium Proceedings 367, pp. 125-129, 1995
- 42 Y.A. Dzenis, "*Effective Thermo-viscoelastic properties of fibrous composites with fractal interfaces and an interphase*", Composites Science & Technology 57, pp. 1057, 1997
- 43 N. D. Koshel, "*Modeling Growth of the Fractal Dendrite Clusters during Electrochemical Deposition of Metals*", Russian Journal of Electrochemistry 33, pp. 825, 1997
- 44 Benoit B. Mandelbrot, Dann E. Passoja, & Alvin J. Paulli, "*Fractal character of fracture surfaces of metals*", Nature 308, pp. 721-722, 1984

- 45 L.E. Richards & B.D. Dempsey, "*Fractal Dimension of Fractured Surfaces in Ti-4.5 Al-5.0 Mo-1.5 Cr (Corona 5)*", *Scripta Metallurgica* 22, pp. 687-689, 1988
- 46 P. Daguier, Elizabeth Bouchaud, & G. Lapasset, "*Roughness of a crack front pinned by microstructural obstacles*", *Europhysics Letters*, pp. 367, 1995
- 47 Q.Y.Long, Li Suqin, & C.W. Lung, "*Studies on the fractal dimension of a fracture surface formed by slow stable crack propagation*", *Journal of Physics D24*, pp. 602-607, 1991
- 48 A. Majumdar & B. Bhushan, "*Role of Fractal Geometry in Roughness Characterization and Contact Mechanics of Surfaces*", *Journal of Tribology* 112 (2), pp. 205-216, 1990
- 49 Peter Pfeifer, "*Fractal Dimension as working tool for surface-roughness problems*", *Applications of Surface Science* 18, pp. 146-164, 1984
- 50 T. Shirono & P. H. S. W. Kulatilake, "*Accuracy fo the spectral method in estimating fractal/spectral parameters for self-affine roughness profiles*", *International Journal of Rock Mechanics* 34, pp. 789, 1997
- 51 John C. Russ, "*Surface Characterization: Fractal Dimensions, Hurst Coefficients and Frequency Transforms*", *Journal of Computer-Assisted Microscopy* 2 (3), pp. 161-183, 1990
- 52 L.A. Bursill, Fan XuDong, & Peng JuLin, "*Fractal analysis of crystalline surfaces at atomic resolution*", *Phylosophical Magazine* A64, pp. 443-464, 1991
- 53 Moises Hinojosa Rivera & Ubaldo Ortiz Méndez, "*Aplicación de la Geometría de Fractales a la Modelación de la Evolución Microestructural de Aceros durante Laminación en Caliente*", III Congreso de la Academia Mexicana de Ciencias de Materiales, 1993
- 54 Seeram Srinivasan, John C. Russ & Ronald O. Scattergood, "*Fractal Analysis of Erosion Surfaces*", *Journal of Materials Research (MRS)* 5 (11), pp. 2616-2619, 1990
- 55 Yu. V. Saltykov & V. L. Kornienko, "*Application of the Fractal Theory to the Description of Porous Electrodes: Effective Coefficients in the Model of Cylindrical Pores*", *Russian Journal of Electrochemistry* 32, pp. 1172, 1996

- 56 A. P. Terzyk, R. Wojsz, & P. A. Gauden, "*Fractal Dimension of Microporous carbon on the basis of the Polanyi-Dubinin theory of adsorption: Part 2: Dubinin-Astakhov adsorption isotherm equation*", Colloids and Surfaces A 126, pp. 67, 1997
- 57 Z.Q. Mu & C.W. Lung, "*Studies on the fractal dimension and fracture toughness of steel*", Journal of Physics D21, pp. 848-850, 1988
- 58 D. Pilo, "*On the Development of a relation between Fractal Dimension and Impact Toughness*", Materials Characterization 38, pp. 121, 1997
- 59 Erhard Hornbogen, "*Fractal Analysis of Grain Boundaries in Hot-worked Polycrystals*", Zeitschrift fuer Metallkunde., pp. 622-925, 1987
- 60 P. Streitenberger, D. Förster, G. Kolbe, & P. Veit, "*The Fractal Geometry of Grain Boundaries in Deformed and Recovered Zinc*", Acta Metallurgica et Materialia 33 (4), pp. 541-546, 1995
- 61 Manabu Tanaka & Hiroshi Iizuka, "*Characterization of Grain Boundaries by Fractal Geometry and Creep-Rupture Properties of Heat-Resistant Alloys*", Zeitschrift fuer Metallkunde 82 (6), pp. 442-447, 1991
- 62 T. Nishihara, J. Japan Soc. Heat Treatment 29, pp. 99, 1978 (op. cit. en ref. 61)
- 63 Brian H. Kaye, "*Multifractal Description of a Rugged Fineparticle Profile*", Particle Characterization 1, pp. 14-21, 1984
- 64 Moisés Hinojosa Rivera, Victor Trejo, Ubaldo Ortiz, "*Fractal Analysis of the microstructure of AISI 304 Steel*", Materials Research Society Symposium Proceedings 407, pp. 411-416, 1996
- 65 R.D. Heindrich, Journal of Applied Physics 20, pp 993, 1949
- 66 D.M.R. Taplin, G.L. Dunlop & T.G. Langdon, Ann. Rev. Mater. Sci. 9, pp. 151, 1979
- 67 D.A. Miller & T.G. Langdon, Metallurgical Transactions 10A, pp. 1869, 1979
- 68 M.J. Stowell, Metals Science 14, pp.267, 1980

# ANEXO 1

## TABLA DE COMPOSICIÓN QUÍMICA PARA ALEACIONES DE ALTA RESISTENCIA AL CALOR

	21-4N	HS-21	L-605	Inconel X-750	Inconel 751
Carbono	0.54	0.27	0.07	0.06	0.09
Nitrógeno	0.39	0.003			
Cromo	21.1	26.71	19.82	15.03	16.07
Níquel	4.07	2.37	9.83	71.8	72.983
Cobalto		63.895	52.033	0.222	
Hierro	63.945	0.09	2.22	7.48	5.74
Manganeso	9.74	0.64	1.46	0.31	0.53
Aluminio				1.26	1.1
Titanio				2.43	2.05
Tungsteno			14.37		
Niobio				1.01	1.18
Molibdeno		5.42			
Silicio	0.19	0.59	0.19	0.26	0.2
Azufre	0.008	0.007	0.002	0.001	0.007
Fósforo	0.017	0.005	0.005	0.007	
Cobre				0.13	0.05

## Índice de Tablas...

1.- Obtención del Perímetro Normalizado para Soldadura Plomo-Estaño	40
2.- Obtención del Factor de Calibración para Soldadura Plomo-Estaño	41
3.- Dimensión Fractal Para Aleaciones Metálicas Refractarias	44
4.- Obtención del Perímetro Normalizado para un Punto Triple	46
5.- Obtención del Factor de Calibración para Punto Triple en Espinel	47
6.- Dimensión Fractal para Materiales Cristalinos utilizando Microscopía Óptica	50
7.- Dimensión Fractal para Materiales Cristalinos utilizando Microscopía Electrónica	51

## Índice de Figuras...

1.- Superficie propuesta por Lobachevski como Lugar Geométrico	3
2.- Superficie propuesta por Riemann como Lugar Geométrico	4
3.- Curva de Peano	9
4.- Estimación del Diámetro de Feret a Diferentes Estructuras Geométricas	21
5.- Soldadura Plomo Estaño a 1000x	35
6.- Razón de Equivalencia contra Magnificación	36
7.- Soldadura Plomo-Estaño, a 2000x	39
8.- Soldadura de Plomo en Matriz de Estaño, a10000x	39
9.- Gráfico de Richardson para Soldadura Plomo-Estaño	42
10.-Punto Triple en Espinel, tomada a 3500x	45
11.-Gráfico de Richardson para Punto Triple en Espinel	49
12.-Gráfico Comparativo: Dimensión Fractal <i>versus</i> Temperatura de Fusión	52



