

**UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON**

**FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA**



**ANALISIS DE ESTABILIDAD ROBUSTA PARA  
SISTEMAS DINAMICOS CON RETARDO**

**TESIS**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
DOCTOR EN INGENIERIA ELECTRICA**

**PRESENTA:**

**GERARDO ROMERO GALVAN**

**SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L.**

**JUNIO DE 1997**



TD

Z5853

.M2

FIME

1997

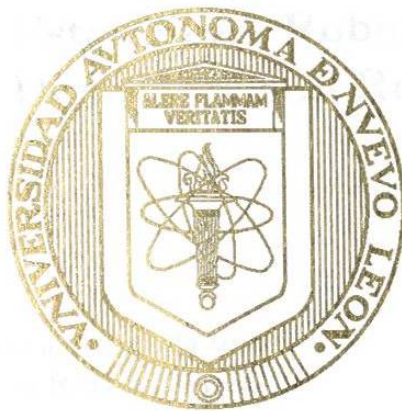
R6



1020119973

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA



ANALISIS DE ESTABILIDAD ROBUSTA PARA SISTEMAS  
DINAMICOS CON RETARDO

TESIS  
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
DOCTOR EN INGENIERIA ELECTRICA

PRESENTA:  
GERARDO ROMERO GALVAN

San Nicolás de los Garza, N. L.

Junio de 1997

7  
R 0

# Análisis de Estabilidad Robusta para Sistemas Dinámicos con Retardo

Los miembros del comité aprueban la tesis de Doctorado de Gerardo Romero Galván

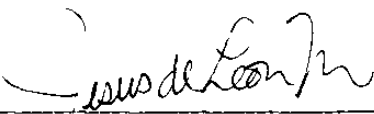
Dr. Joaquín Collado Moctezuma  
Asesor

  
\_\_\_\_\_

Dr. Vladimir L. Kharitonov

Vladimir Kharitonov  
\_\_\_\_\_

Dr. Jesús de León Morales

  
\_\_\_\_\_

Dr. Juan Manuel Ramírez Arredondo

Juan Manuel Ramírez A.  
\_\_\_\_\_

Dr. Oscar Moreira Tamayo

  
\_\_\_\_\_

Dedicada a mis Padres:

Jesús Romero Natéra

Romana Galván Camarillo (Finada)

Por su gran apoyo moral y económico.

Para mis familiares:

**Ma. Cruz**

**Zoraida**

**Gloria**

**Aurora**

**Nancy**

**Antonio**

**César Antonio**

**Manuel**

**Juvenal**

**Hugo Enrique**

Con cariño.



# Agradecimientos

Al Dr. Joaquín Collado Moctezuma por haberme dado la formación académica, sin la cual no hubiera podido realizar esta tesis; agradezco también todos los consejos que como asesor y amigo me transmitió durante mi estancia en el Programa Doctoral.

Al Dr. Vladimir L. Kharitonov por sus excelentes comentarios, sugerencias y correcciones que ayudaron a mejorar el aspecto técnico de esta tesis. La participación del Dr. Kharitonov en la revisión de esta tesis fue de gran importancia por sus valiosas recomendaciones, lo cual agradezco profundamente.

Al Dr. Jesús de León Morales por haber formado parte del grupo de maestros que ayudaron en mi preparación académica mediante la impartición de cursos técnicos.

A los Doctores Juan Manuel Ramírez Arredondo y Dr. Oscar Moreira Tamayo por sus valiosas observaciones para mejorar la presentación de esta tesis.

A todos mis compañeros del doctorado con quien compartí muchos momentos agradables; especialmente a César Elizondo González, Efraín Alcorta García y Juan Antonio Rojas Estrada quienes influyeron en gran forma para poder terminar este trabajo.

A todos los alumnos que cursaron la materia de Transmisión de Información con un servidor, ya que su apoyo moral fue de gran importancia.

Al CONACYT, Instituto Tecnológico de Nuevo Laredo y la Universidad Autónoma de Nuevo León por su apoyo económico.

Finalmente, sin que éste sea el orden de importancia, quiero agradecer de manera muy especial a Irma Pérez Vargas por su gran apoyo, comprensión y preocupación para que finalizara esta tesis.

# Resumen

## Análisis de Estabilidad Robusta de Sistemas Dinámicos con Retardo

Publicación No. \_\_\_\_\_

Gerardo Romero Galván, Dr. en Ingeniería Eléctrica  
Universidad Autónoma de Nuevo León  
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica  
Profesor Asesor: Dr. Joaquín Collado M.  
Junio, 1997

El trabajo desarrollado en esta tesis está relacionado con el análisis de estabilidad de sistemas dinámicos con retardo, en particular, sistemas dinámicos lineales invariantes en el tiempo que presentan retardo de tiempo en la entrada o en el estado; el análisis se realiza considerando incertidumbre paramétrica en el modelo matemático. Las principales aportaciones de este trabajo se pueden dividir en tres partes: aproximación del operador retardo, aplicación del concepto del "value set" y aplicación del Guardian Map a sistemas con retardo. En las últimas dos partes se obtuvieron diferentes métodos que permiten verificar la propiedad de estabilidad robusta cuando se considera incertidumbre en los parámetros y en el retardo de tiempo; la consideración de la incertidumbre en el retardo es una de las principales aportaciones de este trabajo, ya que de esta forma se generalizan algunos métodos existentes. Al final de esta tesis se presentan algunas aplicaciones de estos resultados en procesos físicos, donde se pueden validar los métodos propuestos.

# Indice

Resumen	ii
Indice de Figuras	v
<b>1 Introducción</b>	
1.1 Aportaciones Principales	2 <sup>3</sup>
1.1.1 Aproximación del retardo	2
1.1.2 Estabilidad Robusta de Sistemas con retardo en la Entrada	3
1.1.3 Estabilidad Robusta de Sistemas con retardo en el Estado	5 - 6
1.4 Organización de la Tesis	5
<b>2 Preliminares</b>	
2.1 Introducción	7
2.1.1 Control Robusto con Incertidumbre Dinámica	8 <sup>o</sup>
2.1.2 Control Robusto con Incertidumbre Paramétrica	9
2.2 Estabilidad de Sistemas Dinámicos	10
2.2.1 Criterio de Routh-Hurwitz	11 /
2.2.2 Criterio de Mikhailov	12 <del>5</del>
2.3 Estabilidad Robusta con Incertidumbre Paramétrica	13 <sup>?</sup>
2.3.1 Representación de la Incertidumbre	13
2.3.2 Familias de Polinomios	15
2.4 Value Set y Principio de Exclusión del Cero	17
2.5 Estabilidad de Sistemas con Retardo	19
<b>3 Aproximación del Retardo para un Sistema Dinámico con Retardo</b>	
3.1 Introducción	22
3.1.1 Preliminares Matemáticos	22 <del>§</del>
3.2 Aproximación de Padé	23 <sup>o</sup>
3.3 Aproximación del Retardo	25
3.3.1 Planteamiento del Problema	26
3.3.2 Análisis del Error de la Aproximación de Padé	28 <sup>3</sup>
3.4 Conclusiones	30
<b>4 Estabilidad Robusta de Plantas Intervalo con Retardo</b>	
4.1 Introducción	31 /

## Indice (continuación)

4.1.1 Definición de Plantas Intervalo	32
4.1.2 Plantas Intervalo con Retardo	34 -
4.1.3 Propiedades del Value Set para Plantas Intervalo	35
4.2 Construcción del Value Set para Plantas Intervalo con Retardo	40
4.3 Estabilidad Robusta de Plantas Intervalo con Retardo Intervalo	47 0
4.3.1 Un Caso Particular	48
4.4 Ejemplo Numérico	50
4.5 Conclusiones	51 6
4.5.1 Trabajos Futuros	52
<b>5 Estabilidad Robusta de Sistemas Diferencia Diferencial</b>	
5.1 Introducción	54 -
5.1.1 Antecedentes sobre el Problema de Estabilidad de Sistemas...	55 9
5.1.2 Planteamiento del Problema de Estabilidad Robusta	56 1
5.2 Introducción a Guardian Maps	57 72
5.2.1 Definición del Guardian Map	59 7
5.2.2 Aplicación del Guardian Map en Estabilidad Robusta	60 7-
5.3 Estabilidad Robusta de Sistemas Diferencia Diferencial	62 7
5.4 Ejemplo	65 -
5.5 Conclusiones	67 84
<b>6 Aplicaciones en Procesos Físicos</b>	
6.1 Introducción	68
6.2 Sistema de Control de Nivel Hidráulico	68 -
6.3 Reactor Químico	74
6.3.1 Incertidumbre en el Retardo de Tiempo	78 7
6.3.2 Incertidumbre en el Retardo y en los Coeficientes	80 00
6.4 Conclusiones	
<b>7 Conclusiones Generales</b>	
7.1 Observaciones y Recomendaciones	82
Referencias	84
Apéndice	88



# Indice de Figuras

Figura 1.1 Diagrama de bloques de un sistema con retardo	3
Figura 1.2 Sistemas con retardo conectados en serie	4
Figura 2.1 Sistema dinámico con incertidumbre aditiva	8 - 7
Figura 2.2 Sistema dinámico con incertidumbre multiplicativa	8 - 11
Figura 2.3 Representación entrada-salida de un sistema dinámico	10 /
Figura 2.4 Curva de Mikhailov	12
Figura 2.5 Región de una caja de incertidumbre	14 <del>7</del>
Figura 2.6 Conjunto de incertidumbre conectado	15 /
Figura 2.7 Distribución de las raíces de una familia de polinomios	3 18
Figura 2.8 Curva de Mikhailov para una familia de polinomios	24 18
Figura 3.1 Diagrama de bloques del sistema con retardo	26
Figura 3.2 Diagrama de bloques del sistema aproximado	34 27
Figura 3.3 Gráfica del valor absoluto del error	36 29
Figura 4.1 Diagrama de bloques de una planta intervalo	43 33
Figura 4.2 Diagrama de bloques de una planta intervalo con retardo	/ 34
Figura 4.3 Value set de un polinomio intervalo	36
Figura 4.4 Value set multiplicado por un factor escalar	47 37
Figura 4.5 Value sets rectangulares alineados	/ - 38

## Índice de Figuras (continuación)

Figura 4.6 Value sets desalineados	6	39
Figura 4.7 Suma de value sets desalineados	70	39
Figura 4.8 Value set de un polinomio fijo multiplicado por el retardo	r	42
Figura 4.9 Value set del cuasi-polinomio $p(s, e^{-\tau s})$	s	43
Figura 4.10 Value set de $\mathcal{F}_\tau$ para un rango de frecuencias	s	43
Figura 4.11 Value set de un polinomio intervalo multiplicado por el retardo	-7	45
Figura 4.12 Value set de $\mathcal{P}_\tau$ para una frecuencia fija $\omega_0$	s	46
Figura 4.13 Value set de para un rango de frecuencias		47
Figura 4.14 Value set que pasa por cero	6	50
Figura 4.15 Value set para ejemplo 4.4	6	51
Figura 4.16 Región que contiene el value set $\mathcal{P}_\tau$	6	52
Figura 6.1 Sistema de Nivel Hidráulico		69
Figura 6.2 Diagrama de bloques del sistema de control de nivel		70
Figura 6.3 Respuesta Transitoria del sistema de nivel	9	72
Figura 6.4 Value set de la ecuación característica del sistema de nivel :		73
Figura 6.5 Acercamiento del "value set" del sistema de nivel	9	73
Figura 6.6 Value set para el retardo máximo del sistema de nivel	9	74
Figura 6.7 Sistema de reactores químicos conectados en serie	c	75

## Indice de Figuras (continuación)

Figura 6.8 Diagrama de bloques del reactor químico	9	77
Figura 6.9 Value set del reactor con incertidumbre en el retardo		79
Figura 6.10 Acercamiento del "value set" del reactor con...	/	80
Figura 6.11 Value set del reactor con incertidumbre en los coeficientes...	0	81

# CAPITULO 1

## Introducción

Este trabajo está relacionado con el estudio de sistemas dinámicos con retardo; principalmente está enfocado al análisis de estabilidad de este tipo de sistemas cuando tienen incertidumbre en sus parámetros. El estudio o análisis de este tipo de sistemas es realizado sobre la representación matemática de su comportamiento dinámico; es decir, sobre el modelo matemático. El modelo matemático de un proceso físico no se puede conocer en forma exacta, ya que existen fenómenos físicos que no se pueden representar en forma matemática. Existen muchas formas de tomar en cuenta estos fenómenos dentro del modelo matemático, una de ellas es considerando incertidumbre en el modelo, la cual puede ser paramétrica o dinámica; esta consideración permite contemplar algunos fenómenos del proceso físico en el modelo matemático. En esta tesis se analizarán sistemas dinámicos con retardo de tiempo que pueden ser representados por los siguientes modelos matemáticos:

### 1) Sistemas lineales con retardo en la entrada

a) representación en espacio de estado:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t - \tau) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

b) representación entrada-salida:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}Be^{-\tau s}$$

### 2) Sistemas dinámicos con retardo en el estado

a) representación en espacio de estado:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_1x(t) + A_2x(t - \tau) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$



b) representación entrada-salida:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A_1 - A_2e^{-\tau s})B$$

donde:  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ;  $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ;  $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ;  $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ;  $\tau \in \mathbb{R}_+$

La propiedad de estabilidad para los sistemas dinámicos anteriores está en función de la siguiente ecuación característica:

$$p(s, e^{-\tau s}) = \sum_{k=0}^n p_k(s)e^{-k\tau s} \quad (1)$$

donde  $p_k(s)$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) son polinomios que están en función de  $s$ . Esta ecuación característica corresponde a los sistemas dinámicos que tienen retardo en el estado; sin embargo, para el caso de sistemas dinámicos con retardo en la entrada, la ecuación característica se reduce a una ecuación característica igual a (1) considerando  $n = 1$ , estas ecuaciones reciben el nombre de funciones cuasi-polinomiales. Los resultados que en esta tesis se presentarán son obtenidos para funciones cuasi-polinomiales las cuales son consideradas para determinar la propiedad de estabilidad de sistemas dinámicos con retardo. Todo el análisis será realizado en el dominio de la frecuencia por lo que se trabajará sólo con ecuaciones características de la forma presentada en (1). La motivación principal de realizar este trabajo de investigación es que este tipo de sistemas dinámicos aparecen en muchas aplicaciones prácticas:

- 1) Sistemas mecánicos
- 2) Sistemas químicos
- 3) Sistemas térmicos, etc.

algunos de estos procesos físicos son analizados con mayor detalle en [23], [25], [36].

## 1.1 Aportaciones Principales

Las aportaciones principales de esta tesis consisten en una serie de resultados teóricos que garantizan la propiedad de estabilidad de sistemas dinámicos con retardo en la entrada y en el estado, los cuales tienen incertidumbre de tipo paramétrica. Estas aportaciones se pueden dividir en las siguientes partes:

### 1.1.1 Aproximación del Retardo de Tiempo

En esta parte de la tesis se consideran sistemas dinámicos que se pueden representar mediante la siguiente función de transferencia:

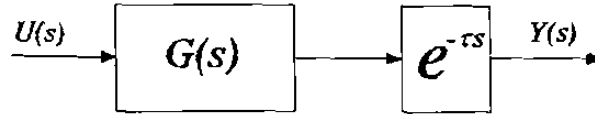


Figura 1.1 Diagrama de bloques de un sistema con retardo.

El problema consiste en aproximar el operador retardo  $e^{-\tau s}$  por una función racional con algunas características de interpolación; esta aproximación es conocida como la aproximación de Padé, ver [15]. La aproximación del retardo en un sistema dinámico retardado es de gran ayuda por que transforma un sistema dinámico de dimensión infinita en uno de dimensión finita y por lo tanto lo hace más simple. En esta sección de la tesis se realiza un estudio entre las diferentes aproximaciones de Padé con el fin de obtener una aproximación que presente un error más pequeño, ver [44]. El problema de aproximación del retardo se ha tratado con frecuencia en numerosas publicaciones, en [22] se presenta un análisis detallado sobre la convergencia del error de la aproximación cuando se utilizan aproximaciones de Padé que tienen un forma particular, la cual es la más utilizada. Es importante mencionar que en esta sección se propone utilizar aproximaciones de Padé de grado relativo igual a 1, las cuales no son muy utilizadas, ya que es más utilizada la aproximación de Padé de grado relativo 0. La ventaja de usar aproximaciones de Padé de grado relativo 1 es que éstas tienen un error menor que las de grado relativo 0, lo anterior se obtiene haciendo una comparación entre la norma infinito de la diferencia entre la aproximación y el operador retardo  $e^{-\tau s}$ . Con esta ventaja se puede obtener una mejor aproximación del sistema con retardo; aunque es necesario mencionar que depende directamente de las condiciones del sistema dinámico, lo cual será tratado con mayor detalle en la sección 3.3 de esta tesis.

### 1.1.2 Estabilidad Robusta de Sistemas con Retardo en la Entrada

En esta sección de la tesis se presentan condiciones necesarias y suficientes de estabilidad robusta para sistemas dinámicos con retardo en la entrada, los cuales son representados por plantas intervalo con retardo intervalo. La ecuación característica de este tipo de sistemas tiene la siguiente estructura:

$$p(s, q, r, e^{-\tau s}) = D(s, r) + N(s, q)e^{-\tau s} \quad (2)$$

donde  $D(s, r)$  y  $N(s, q)$  representan polinomios con incertidumbre en todos sus coeficientes,

la cual se puede expresar como un intervalo de valores independiente en cada coeficiente así como en el retardo de tiempo  $\tau \in [0, \tau_{\max}]$ . Cuando se analiza la propiedad de estabilidad de sistemas con incertidumbre se denomina estabilidad robusta, la cual consiste en garantizar estabilidad para todo el conjunto de ecuaciones características que se forman al considerar todos los valores de incertidumbre. En esta sección de la tesis se presentan condiciones necesarias y suficientes de estabilidad robusta para sistemas dinámicos que tienen una ecuación característica como la mostrada en (2), estos resultados se publicaron en [45]. Algunos resultados relacionados con el problema de estabilidad robusta para sistemas con retardo han sido publicados anteriormente, por ejemplo en [8] se analizan sistemas dinámicos que tienen la siguiente estructura:

$$\dot{x}(t) - ax(t) + Bx(t - T) = 0 \quad (3)$$

los cuales tienen la siguiente ecuación característica:

$$H(s) = s - a + be^{-\tau s} \quad (4)$$

el análisis es realizado considerando incertidumbre en los parámetros; es decir,  $a \in [a, \bar{a}]$ ,  $b \in [\underline{b}, \bar{b}]$ ;  $T \in [\underline{T}, \bar{T}]$ ; en este artículo son presentadas condiciones necesarias y suficientes de estabilidad robusta para sistemas dinámicos como el (3); una extensión a cadenas de sistemas de tipo (3) conectados en serie como se muestra en siguiente figura, también es presentado:

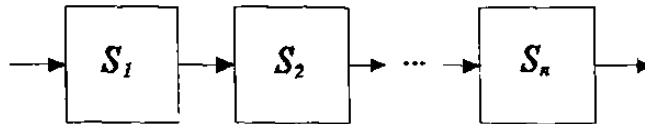


Figura 1.2 Sistemas con retardo conectados en serie.

donde  $S_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) son sistemas que tienen la estructura presentada en (3). El problema de estabilidad robusta, considerando la cadena de sistemas conectados en serie, está en función de la siguiente ecuación característica:

$$H(s) = H_1(s)H_2(s)\dots H_n(s)$$

donde  $H_i(s)$  son ecuaciones características de tipo (4). Es importante mencionar que el tipo de sistemas dinámicos considerados en [8] es muy restrictivo, ya que no siempre es posible factorizar un sistema dinámico en la forma presentada en la figura 1.2. Lo anterior es presentado mediante un ejemplo:

**EJEMPLO 1.1** Considerar un sistema dinámico que tiene la siguiente ecuación característica:

$$p(s, e^{-\tau s}) = s^2 + s + 1 + e^{-\tau s}$$

esta ecuación característica no es posible expresarla como una ecuación  $H(s) = H_1(s)H_2(s)$ , donde  $H_i(s)$  ( $i = 1, 2$ ) es de la forma presentada en (4), por lo que no se puede analizar con este resultado.

Entonces, el resultado presentado en [45] considera sistemas que no son tratados en [8], lo cual representa una ventaja. Otros resultados que utilizan la metodología considerada en esta sección de la tesis fueron publicados en [31], donde analizan sistemas con diferentes retardos, los cuales son más generales que los presentados en esta tesis. desafortunadamente estos resultados fueron publicados en forma simultánea con los resultados publicados en esta sección de la tesis, por lo que no fue posible su consulta.

### 1.1.3 Estabilidad Robusta de Sistemas con Retardo en el Estado

En esta sección se consideran sistemas dinámicos *diferencia-diferencial*, los cuales tienen la siguiente ecuación característica:

$$p(s, \lambda, e^{-\tau s}) = \lambda p_0(s, e^{-\tau s}) + (1 - \lambda)p_1(s, e^{-\tau s}) \quad (5)$$

en el cual  $p_i(s, e^{-\tau s}) = \sum_{k=1}^n p_{ik}(s)e^{-k\tau s}$ ;  $\lambda \in [0, 1]$ ;  $\tau \in [0, \infty)$ . Condiciones necesarias y suficientes para garantizar la propiedad de estabilidad robusta de sistemas dinámicos con ecuación característica (5) serán presentadas en esta sección, los resultados presentados en esta sección aún no han sido publicados. El resultado principal está basado en el concepto del Guardian Map definido en [49], el cual es usado para determinar estabilidad robusta de sistemas con retardo. La principal ventaja de estos resultados es que se consideran sistemas con incertidumbre en el retardo, los cuales son complicados de analizar. Una serie de comparaciones con diferentes métodos que estudian el mismo problema serán realizadas en esta sección de la tesis.

## 1.2 Organización de la Tesis

Es importante mencionar que los resultados que son aportaciones personales en esta tesis, serán presentados de manera formal, incluyendo las demostraciones correspondientes; todos los resultados que no son aportaciones personales, no serán demostrados y solamente se mencionará la referencia donde fueron obtenidos. Este trabajo de investigación fue organizado, para su presentación, de la siguiente manera:



**Capítulo 2 :-** En este capítulo se presenta una introducción detallada a cerca del problema de estabilidad robusta de sistemas dinámicos lineales invariantes en el tiempo con incertidumbre de tipo paramétrica; lo anterior con el fin de crear el marco adecuado para presentar las principales aportaciones de este trabajo.

**Capítulo 3 :-** En esta parte de la tesis se considera una aproximación de Padé para aproximar el operador retardo en un sistema dinámico con retardo de tiempo; un análisis sobre el error de la aproximación de Padé de grado relativo 1 será presentado y comparado con el error de la aproximación de Padé de grado relativo 0.

**Capítulo 4 :-** En este capítulo se presenta una de las mayores aportaciones de esta tesis, la cual consiste en la aplicación del concepto del "*value set*" a sistemas dinámicos con retardo de tiempo en la entrada. La principal aportación es la caracterización del "*value set*" de los sistemas dinámicos anteriormente mencionados y usando esta caracterización es posible la construcción del "*value set*" mediante el uso de la computadora. Esta construcción es de gran utilidad, ya que aplicando el principio de exclusión del cero se pueden obtener condiciones necesarias y suficientes para garantizar la propiedad de estabilidad robusta de este tipo de sistemas dinámicos. Este resultado permite obtener un método gráfico que resulta muy simple y rápido de verificar.

**Capítulo 5 :-** En este capítulo se presenta la otra parte de las aportaciones importantes de esta tesis, donde se analizan sistemas dinámicos con retardo de tiempo en los estados. Estos resultados están basados en la aplicación de una metodología que fue creada para realizar análisis de estabilidad robusta de sistemas dinámicos lineales que no presentan retardo, la cual es conocida como Guardian Map. En este capítulo se presentan condiciones suficientes para verificar estabilidad robusta de sistemas dinámicos *diferencia-diferencial* con incertidumbre en los parámetros y en el retardo de tiempo.

**Capítulo 6 :-** En este capítulo se presenta la aplicación de los métodos obtenidos a proceso físicos, como el sistema de nivel hidráulico y el reactor químico; condiciones de estabilidad robusta serán presentadas para los procesos físicos mencionados anteriormente, cuando se considera incertidumbre en sus parámetros.

**Capítulo 7 :-** Finalmente, en este capítulo se presentan las conclusiones generales de este trabajo, así como algunas recomendaciones importantes.

Finalmente se anexa un apéndice donde se presentan las publicaciones más importantes relacionadas con esta tesis, las cuales fueron presentadas en diferentes congresos.

# CAPITULO 2

## Preliminares

### 2.1 Introducción

Cuando se obtiene el modelo matemático de un proceso físico se realizan una serie de consideraciones con el fin de obtener un modelo que puede ser factible para el análisis y/o síntesis de un controlador; estas consideraciones provocan que los resultados que se obtienen en simulaciones sean diferentes a los que se obtienen cuando se considera el proceso físico real. Con el fin de corregir al máximo la diferencia que existe entre el comportamiento dinámico del modelo matemático del sistema y el proceso real se han desarrollado algunas técnicas de control que toman en cuenta esta diferencia, entre las cuales se encuentran:

1. Control Adaptable
2. Control Estocástico
3. Control Robusto

La técnica de control adaptable tiene como objetivo monitorear en forma constante el proceso real y en base a este monitoreo adaptar o cambiar la estrategia de control en tiempo real para que se logre el comportamiento dinámico deseado. En el control estocástico, se estudian sistemas dinámicos representados por un modelo matemático, al cual se le agrega una entrada que busca compensar las consideraciones realizadas cuando se obtiene el modelo matemático; esta entrada es un señal aleatoria que satisface ciertas propiedades. Por último la técnica de control robusto, que se encarga de analizar los sistemas dinámicos con incertidumbre, la cual puede ser considerada de diferentes formas. El control robusto considera diferentes enfoques que están determinados en función del tipo de incertidumbre que se considere; para el caso de sistemas dinámicos lineales invariantes en el tiempo, existen resultados muy importantes que pueden dividirse en dos partes fundamentales: *a) control robusto con incertidumbre dinámica, b) control robusto con incertidumbre paramétrica*. En este capítulo se

presentarán algunos de los resultados de mayor relevancia, relacionados con las técnicas de control robusto; principalmente cuando se considera incertidumbre paramétrica; lo anterior con el fin de crear el marco técnico sobre el cual se realizaron las aportaciones principales de esta tesis.

### 2.1.1 Control Robusto con Incertidumbre Dinámica

El problema de control robusto cuando se considera este tipo de incertidumbre se plantea en el dominio de la frecuencia para sistemas dinámicos representados en la forma de entrada-salida. Existen dos estructuras importantes que se consideran para el análisis de este problema, las cuales son presentadas en las figuras 2.1 y 2.2.

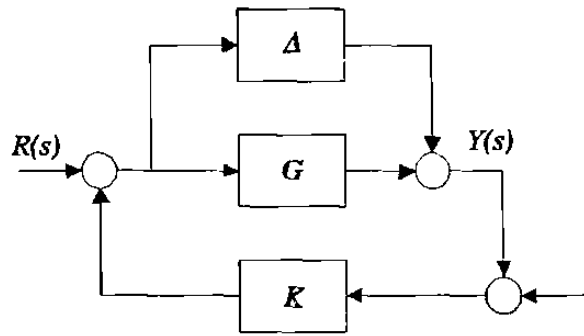


Figura 2.1 Sistema dinámico con incertidumbre aditiva.

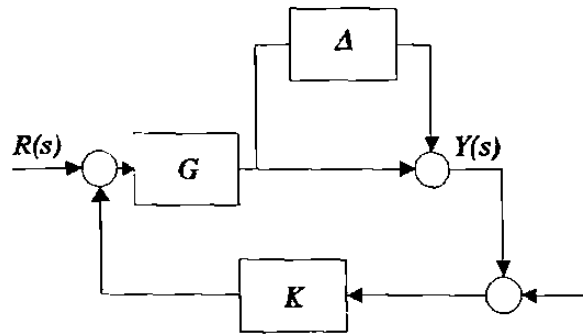


Figura 2.2 Sistema dinámico con incertidumbre multiplicativa.

donde  $G$  representa el modelo matemático del proceso físico nominal,  $K$  el controlador que actúa sobre el proceso y  $\Delta$  representa la incertidumbre dinámica que puede ser considerada como una perturbación del proceso físico;  $R(s)$  y  $Y(s)$  representan la entrada y la salida del sistema, respectivamente. Las configuraciones presentadas en las figuras 2.1 y 2.2 reciben el nombre de sistemas dinámicos con incertidumbre aditiva y multiplicativa, respectivamente. El problema de control robusto, cuando se considera este tipo de incertidumbre, se plantea de la siguiente forma: determinar un controlador  $K$  que logre satisfacer ciertas especificaciones de desempeño para la familia de plantas que se obtiene al considerar la incertidumbre en el sistema  $\Delta$ ; así como optimizar en el sentido de poder garantizar este desempeño para la mayor cantidad de incertidumbre posible, medida en función de su norma infinito; este problema es denominado como el problema  $\mathcal{H}_\infty$ , ver [18], [24].

### 2.1.2 Control Robusto con Incertidumbre Paramétrica

La incertidumbre en un sistema dinámico también se puede expresar como incertidumbre en los parámetros que definen la estructura de un sistema dinámico; como el que se presenta en seguida:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y &= Cx(t)\end{aligned}\tag{1}$$

donde la incertidumbre del sistema es considerada en la matriz  $A$ , debido a que sólo estamos interesados en garantizar la propiedad de estabilidad robusta y ésta depende únicamente de los parámetros de  $A$ ; las matrices  $B$  y  $C$  se consideran fijas. La incertidumbre paramétrica se puede presentar de diferente manera, las formas más comunes se presentan a continuación.

1. *Incetidumbre estructurada*:- Se considera que la incertidumbre es de tipo estructurada cuando se conoce la dirección en la que puede presentarse dicha incertidumbre; un ejemplo de este tipo de incertidumbre puede ser la siguiente representación:

$$A = A_1 + \delta A_0 \quad \delta \in [-1, 1]$$

en el cual  $A_0, A_1$  son matrices fijas. Existen otras formas en que se puede considerar la incertidumbre estructurada, sin embargo no son del interés de este trabajo; la principal característica de este tipo de incertidumbre es la estructura bien definida que se presenta en el modelo.

2. *Incetidumbre no estructurada*:- Este tipo de incertidumbre se representa de una forma más general sin llegar a detallarse como la anterior; los límites de la incertidumbre son expresados en función de una norma:

$$\|A\| \leq \eta$$



El problema de control robusto con incertidumbre paramétrica también puede ser tratado en el dominio de la frecuencia; en este caso el problema consiste en determinar propiedades de funciones polinomiales, las cuales se obtienen de la ecuación característica de un sistema dinámico que se representa en la forma de entrada-salida. Estas funciones polinomiales tienen la siguiente estructura:

$$p(s, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{q})s^i \quad (2)$$

donde  $a_i(\mathbf{q})$  es una función que determina la forma en que la incertidumbre influye en cada uno de los coeficientes del polinomio. Para este tipo de enfoque se pueden plantear dos problemas:

1.- *Estabilización Robusta*:- Consiste en determinar un controlador que logre estabilizar la familia de sistemas dinámicos que se forma al considerar todas las posibles combinaciones de la incertidumbre.

2.- *Estabilidad Robusta*:- Consiste en determinar la propiedad de estabilidad para la familia de sistemas dinámicos.

En esta tesis se realizará un análisis de estabilidad robusta para sistemas dinámicos con retardo de tiempo, expresados en el dominio de la frecuencia; la estructura dinámica de los sistemas que se analizarán será presentada en la sección correspondiente.

## 2.2 Estabilidad de Sistemas Dinámicos

En esta sección se hace una revisión sobre los métodos tradicionales para verificar la propiedad de estabilidad de sistemas dinámicos; serán considerados sistemas dinámicos representados en una configuración *entrada-salida*, tal como se muestra en la siguiente figura:

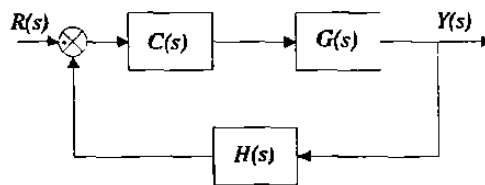


Figura 2.3 Representación entrada-salida de un sistemas dinámico.

donde  $C(s)$ ,  $G(s)$ ,  $H(s)$  son funciones racionales que representan el controlador, la planta y el elemento sensor, respectivamente; la propiedad de estabilidad en el sentido entrada-salida se define a continuación, ver [11].

**DEFINICION 2.1** *Un sistema dinámico como el representado en la figura 2.3 es bibo estable si al aplicarle una entrada  $R(s)$  acotada, éste produce una salida  $Y(s)$  acotada.*

La propiedad de estabilidad está asociada a las raíces de la ecuación característica del sistema retroalimentado presentado en la figura 2.3; esta ecuación característica está formada por una función polinomial:

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \quad (3)$$

El sistema dinámico representado en la figura 2.3 es estable si y sólo si, las raíces de (3) están todas contenidas en el semiplano izquierdo abierto del plano complejo  $\mathbb{C}_-$ , ver [11]. La propiedad de estabilidad, que está definida para sistemas dinámicos, está asociada a funciones polinomiales y estas se definen de la siguiente forma:

**DEFINICION 2.2** *Un polinomio  $p(s)$  es estable si la siguiente condición se cumple:*

$$p(s) \neq 0 \quad \forall s \in \mathbb{C}_+$$

donde  $\mathbb{C}_+$  representa el semiplano derecho cerrado del plano complejo; es decir:

$$\mathbb{C}_+ \equiv \{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) \geq 0\}$$

Dado que la estabilidad está determinada en función de las raíces del polinomio (3), existen diferentes métodos para verificar que las raíces del polinomio estén todas contenidas en el semiplano izquierdo abierto del plano complejo, sin necesidad de obtenerlas explícitamente; algunos métodos de utilidad para este trabajo serán presentados en las siguientes secciones.

### 2.2.1 Criterio de Routh-Hurwitz

El criterio de Routh-Hurwitz para verificar estabilidad de un polinomio, es un resultado que durante muchos años ha tenido gran importancia y se basa en la definición del siguiente arreglo matricial:

**DEFINICION 2.3** *Una matriz de Hurwitz  $H[p(s)]$  asociada a un polinomio  $p(s)$  es un arreglo matricial que tiene la siguiente estructura:*

$$H[p(s)] = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \vdots \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

es posible determinar la propiedad de estabilidad de un polinomio  $p(s)$  en base a la matriz de Hurwitz mediante el siguiente criterio, ver [21].

**TEOREMA 2.1 (Criterio de Routh-Hurwitz)** *Sea  $p(s)$  definido como en (3) con  $a_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, \dots, n - 1$ ) y  $a_n \neq 0$ . Entonces  $p(s)$  es estable si y sólo si, todos los menores principales de  $H[p(s)]$  son positivos.*

este teorema también es presentado en una forma más simple, donde el arreglo matricial es diferente y la condición de estabilidad se obtiene de manera más sencilla que realizando el cálculo de los menores principales de la matriz de Hurwitz.

### 2.2.2 Criterio de Mikhailov

A diferencia del criterio de Routh-Hurwitz, el criterio de Mikhailov no ha sido ampliamente difundido; aunque tiene ya muchos años de haberse presentado, el criterio de Mikhailov es un método completamente gráfico para verificar estabilidad de polinomios, ver [33]. Este criterio está basado en la construcción de la gráfica en el plano complejo del polinomio definido en (3) y evaluado en  $s = j\omega$ :

$$\begin{aligned} p(j\omega) &= u(\omega) + jv(\omega) \\ u(\omega) &= a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - a_6\omega^6 + \dots \\ v(\omega) &= a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - a_7\omega^7 + \dots \end{aligned}$$

la gráfica de  $p(j\omega)$  en el plano complejo para  $\omega \in [0, \infty)$  es conocida como la curva de Mikhailov y tiene una forma semejante a la siguiente gráfica:

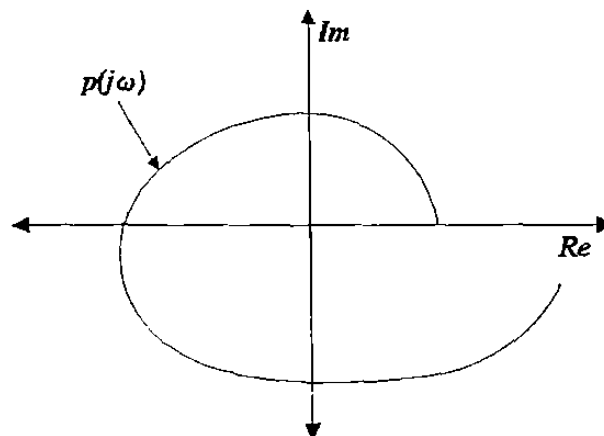


Figura 2.4: Curva de Mikhailov.

el criterio de Mikhailov está basado en la forma que tiene la curva anterior.

**LEMA 2.1**  $p(s)$  es estable si y sólo si, las siguientes condiciones se satisfacen:

1.  $-\angle p(j\omega_2) > \angle p(j\omega_1) \quad \forall \omega_2 > \omega_1 \geq 0$
2.  $-\lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle p(j\omega) = \frac{n\pi}{2}$
3.  $-0 \notin p(j\omega) \quad \forall \omega \in [0, \infty)$

Las condiciones que presenta el criterio de Mikhailov para garantizar la propiedad de estabilidad en un polinomio, se pueden verificar por inspección visual de la curva de Mikhailov. La gran ventaja es que la curva de Mikhailov se puede obtener en forma muy simple mediante el uso de la computadora.

## 2.3 Estabilidad Robusta con Incertidumbre Paramétrica

En esta sección se describen los resultados más relevantes relacionados con el análisis de estabilidad robusta, cuando se considera incertidumbre de tipo paramétrica. La mayoría de estos resultados pueden encontrarse en forma más detallada en [3]. Como se mencionó en la sección 2.1.2 el problema de estabilidad robusta está en función de una familia de polinomios que son expresados como:

$$p(s, \mathbf{q}) = \sum_{i=0}^n a_i(\mathbf{q}) s^i \quad (4)$$

en donde  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^l$  representa un vector con elementos que determinan la incertidumbre paramétrica del sistema dinámico, esta incertidumbre es reflejada en los coeficientes del polinomio a través las funciones  $a_i(\mathbf{q})$ . Esta incertidumbre puede ser considerada de diferentes formas, tal como se muestra a continuación.

### 2.3.1 Representación de la Incertidumbre

La incertidumbre paramétrica de un sistema dinámico está representada como un vector  $\mathbf{q}$  en el cual cada uno de sus elementos representa un parámetro que se considera incierto. Este vector está restringido por las condiciones de la incertidumbre, de tal manera que forma una región en un espacio vectorial. la cual esta definida en función del tipo de restricción o cota que determina la incertidumbre. Estas regiones están formadas por conjuntos de vectores que serán definidos a continuación.

**DEFINICION 2.4** Un conjunto de vectores que forma incertidumbre de tipo "caja" se define como:

$$Q \equiv \left\{ \mathbf{q} \in \mathbb{R}^l : q_i^- \leq q_i \leq q_i^+ \quad \forall i = 1, 2, \dots, l \right\}$$

**DEFINICION 2.5** La incertidumbre de tipo "esférica" es definida como:

$$\bar{Q} \equiv \{ \mathbf{q} \in \mathbb{R}^l : \|\mathbf{q}\|_2 \leq r \}$$

**DEFINICION 2.6** La incertidumbre de tipo "diamante" se define de la siguiente forma:

$$\tilde{Q} \equiv \{ \mathbf{q} \in \mathbb{R}^l : \|\mathbf{q}\|_1 \leq r \}$$

Estas son las formas más comunes de representar la incertidumbre paramétrica que presenta un sistema dinámico. En esta tesis sólo se considerará incertidumbre paramétrica que tenga la estructura de una caja, es decir la incertidumbre definida como  $Q$ . Este tipo de incertidumbre definen una región formada por un hipercubo en el espacio vectorial correspondiente, por ejemplo para el caso de un vector  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$ ; es decir, se consideran sólo dos parámetros con incertidumbre; la región definida es un rectángulo en el plano formado por los elementos de  $\mathbf{q}$ , tal como se muestra en la siguiente figura:

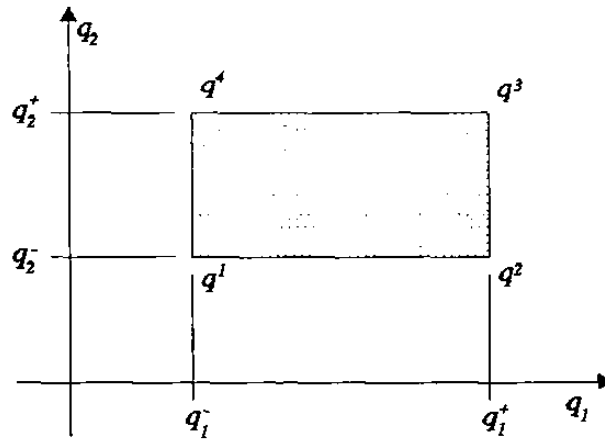


Figura 2.5 Región de una caja de incertidumbre.

la región sombreada define el conjunto de valores que puede tomar la incertidumbre. Es importante mencionar que los elementos  $\mathbf{q}^i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) son vectores que determinan los puntos extremos de la región formada por la incertidumbre y para el caso de incertidumbre tipo "caja", la cantidad de puntos extremos son  $2^l$  donde  $l$  es el número de parámetros con incertidumbre ó lo que es lo mismo, el número de elementos del vector  $\mathbf{q}$ . Una condición muy importante que deben de satisfacer los conjuntos que definen la incertidumbre es presentada en la siguiente definición.

**DEFINICION 2.7** Un conjunto  $Q \subseteq \mathbb{R}^l$  se dice que es conectado, si las siguiente condición se satisface: dados dos puntos  $\mathbf{q}^0, \mathbf{q}^1 \in Q$ , existe una función continua  $\Phi : [0, 1] \rightarrow Q$  tal que  $\Phi(0) = \mathbf{q}^0$  y  $\Phi(1) = \mathbf{q}^1$ .

esta definición es necesaria para la aplicación de los resultados sobre estabilidad robusta que serán presentados posteriormente. La definición anterior es presentada en forma más clara mediante la siguiente figura:

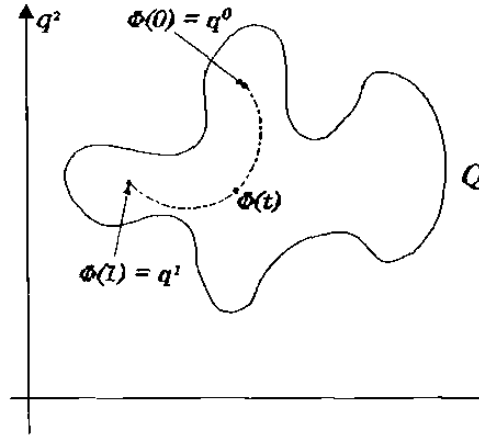


Figura 2.6. Conjunto de incertidumbre conectado.

Claramente los conjuntos de incertidumbre definidos en esta sección satisfacen la definición anterior.

### 2.3.2 Familias de Polinomios

Los conjuntos que se definieron en la sección anterior, únicamente describen la incertidumbre del sistema dinámico; sin embargo, desde el punto de vista del análisis de estabilidad lo que interesa es la influencia que ésta tiene sobre la ecuación característica  $p(s, \mathbf{q})$ ; es decir, la forma que tienen los coeficientes  $a_i(\mathbf{q})$ . En general esta función puede ser cualquier función continua; sin embargo, sólo se considerarán funciones  $a_i(\mathbf{q})$  afines en  $\mathbf{q}$  definidas de la siguiente forma:

$$a_i(\mathbf{q}) = \alpha_i + \beta_i^T \mathbf{q} \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (5)$$

donde  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ,  $\beta_i \in \mathbb{R}^l$ ,  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^l$ . Cuando los coeficientes de la ecuación característica  $p(s, \mathbf{q})$  se pueden representar como en (5) se dice que la incertidumbre es de tipo afín. Es claro que la ecuación característica forma una familia de polinomios al considerar la incertidumbre; esta familia está definida como:

$$\mathcal{P} \equiv \{p(s, \mathbf{q}) : \mathbf{q} \in Q\} \quad (6)$$

la propiedad de estabilidad de una familia de polinomios  $\mathcal{P}$ , entonces se trata de un problema de estabilidad robusta.

**DEFINICION 2.8** *La familia de polinomios  $\mathcal{P}$  es robustamente estable si,  $p(s, \mathbf{q})$  es estable  $\forall \mathbf{q} \in Q$ .*

para el caso particular en que  $a_r(\mathbf{q})$  satisface (5) se puede expresar como:

$$p(s, \mathbf{q}) = p_0(s) + \sum_{i=1}^l q_i p_i(s)$$

donde  $q_i$  son los elementos del vector  $\mathbf{q}$ . Una forma equivalente de representar la familia anterior de polinomios es:

$$p(s, \mathbf{q}) = \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i(s, \mathbf{q}^i)$$

donde  $p_i(s, \mathbf{q}^i)$  son polinomios fijos que se obtienen al evaluar los parámetros en los  $m$  puntos extremos de la incertidumbre y  $\lambda_i$  debe satisfacer las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m \lambda_i &= 1 \\ \lambda_i &\geq 0 \end{aligned}$$

este tipo de familias son llamadas combinaciones convexas de polinomios y se denotan como  $Conv(p_i(s, \mathbf{q}^i))$ . Un caso particular de una familia de combinaciones convexas de polinomios, es cuando se consideran únicamente dos elementos, tal como se muestra en seguida:

$$p(s, \mathbf{q}) = \lambda p(s, \mathbf{q}^1) + (1 - \lambda) p(s, \mathbf{q}^2) \quad \forall \lambda \in [0, 1] \quad (7)$$

para este caso particular, existe un resultado que determina la propiedad de estabilidad robusta, ver [3].

**TEOREMA 2.2** *Considérese la familia de polinomios representada por (7) y sean  $p_0(s) = p(s, \mathbf{q}^1)$  y  $p_1(s) = p(s, \mathbf{q}^2)$  con  $p_0(s)$  estable y  $\deg[p_0(s)] > \deg[p_1(s)]$ . Entonces, (7) es robustamente estable si y sólo si,  $\sigma\{H^{-1}[p_0(s)]H[p_1(s)]\} \notin (-\infty, 0]$ .*

donde  $\sigma(A)$  representa los valores propios de la matriz  $A$ . Nótese que al aplicar la condición  $\deg[p_0(s)] > \deg[p_1(s)]$  las matrices no serán compatibles bajo la operación del producto matricial por lo que es necesario completar con ceros la matriz  $H[p_1(s)]$ .

Ahora, si en la ecuación (4) se cumple que  $\beta_i^r = [0, \dots, b_i, \dots, 0] \forall i = 1, \dots, l$ ; es decir, cada coeficiente  $a_i(\mathbf{q})$  de  $p(s, \mathbf{q})$  está en función de un sólo elemento del vector de incertidumbre  $\mathbf{q}$ . Entonces se dice que  $\mathcal{P}$  es una familia de polinomios intervalo y se puede representar como:

$$p(s, \mathbf{q}) = \sum_{i=0}^n [q_i^-, q_i^+] s^i \quad 0 \in [q_n^-, q_n^+] \quad (8)$$

en el cual  $q_i^-, q_i^+$  representan los límites de la incertidumbre. Uno de los resultados más importantes relacionados con estabilidad robusta de familias de polinomios intervalo es el

teorema de Kharitonov, ver [29]. Este resultado presenta condiciones necesarias y suficientes de estabilidad robusta para polinomios intervalo. El teorema de Kharitonov requiere de la siguiente definición:

**DEFINICION 2.9** Sean los siguientes polinomios asociados a (8)

$$\begin{aligned} K_1(s) &= q_0^- + q_1^- s + q_2^+ s^2 + q_3^+ s^3 + \dots \\ K_2(s) &= q_0^+ + q_1^- s + q_2^- s^2 + q_3^+ s^3 + \dots \\ K_3(s) &= q_0^+ + q_1^+ s + q_2^- s^2 + q_3^- s^3 + \dots \\ K_4(s) &= q_0^- + q_1^+ s + q_2^+ s^2 + q_3^- s^3 + \dots \end{aligned}$$

Estos cuatro polinomios son llamados los polinomios de Kharitonov.

**TEOREMA 2.3** La familia de polinomios (8) es robustamente estable si y sólo si  $K_1(s)$ ,  $K_2(s)$ ,  $K_3(s)$ ,  $K_4(s)$  son estables.

Los resultados presentados en esta sección han sido de gran importancia en el análisis de estabilidad robusta de sistemas lineales invariantes en el tiempo; aunque es importante mencionar que el tipo de incertidumbre que se ha considerado no es la más general. Los resultados presentados en esta sección son condiciones necesarias y suficientes de estabilidad robusta, las cuales son obtenidas en función de algunos polinomios fijos que pertenecen a la familia de polinomios. En la siguiente sección se presentará una forma diferente de analizar la propiedad de estabilidad robusta; este método está basado en la construcción de una gráfica sobre el plano complejo y se define como "value set".

## 2.4 Value Set y Principio de Exclusión del Cero

Uno de los resultados más importantes en el análisis de estabilidad robusta es la introducción del concepto del "value set", concepto que será definido en esta sección, ya que una gran cantidad de resultados sobre estabilidad robusta se apoya en la construcción del "value set". Apoyándonos en la definición de estabilidad robusta, nuestra primera inquietud sería determinar una relación entre las raíces de la familia de polinomios y la incertidumbre en los coeficientes del mismo; el problema principal radica en que esta relación no es muy atractiva, ya que no presenta buenas propiedades. El siguiente ejemplo muestra la distribución de las raíces de una familia de polinomios.

**EJEMPLO 2.1** Considerar la siguiente familia de polinomios intervalo:

$$p(s, q) = [0.25, 1.25]s^3 + [2.75, 3.25]s^2 + [0.75, 1.25]s + [0.25, 1.25]$$

esta familia de polinomios tiene la siguiente distribución de las raíces para diferentes valores de la incertidumbre.



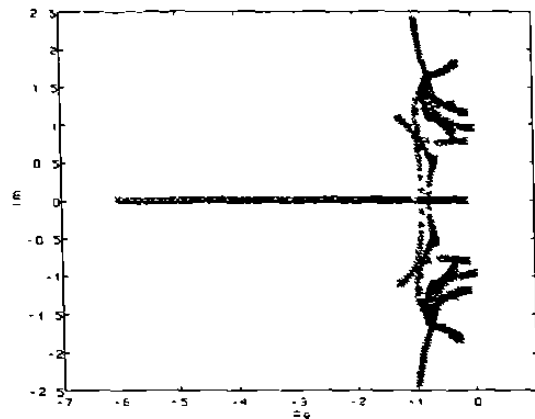


Figura 2.7 Distribución de las raíces de una familia de polinomios.

como se puede observar de la figura anterior, la distribución de las raíces no tiene una relación simple, con respecto a la incertidumbre en los coeficientes del polinomio; por lo que no es muy conveniente analizar la propiedad de estabilidad robusta de esta forma. Una manera más adecuada de obtener la relación anterior es obtener la curva de Mikhailov para la familia de polinomios  $p(s, \mathbf{q})$ ; para el ejemplo anterior, la curva de Mikhailov es presentada en la siguiente figura:

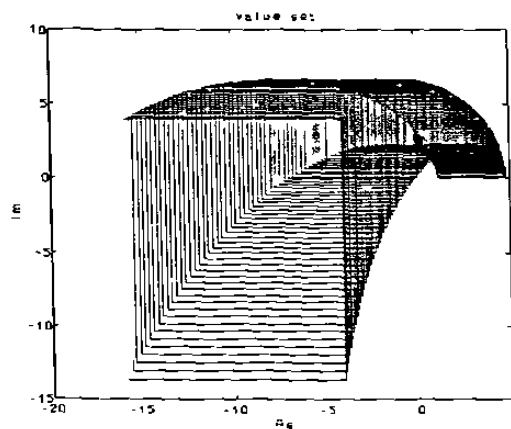


Figura 2.8 Curva de Mikhailov para una familia de polinomios.

la figura anterior tiene una forma más simple de analizar, ya que se puede caracterizar en forma precisa. Se puede verificar que la curva de Mikhailov para una familia de polinomios intervalo es muy parecida a la curva de Mikhailov de un polinomio fijo, con la diferencia de que ahora está formada por la unión de rectángulos que están perfectamente definidos, ya que tienen como vértices los polinomios de Kharitonov evaluados en  $s = j\omega$ . A las figura

que se forma en el plano complejo, cuando se obtiene la curva de Mikhailov de una familia de polinomios, se le conoce como "value set"; este concepto es definido a continuación:

**DEFINICION 2.10** Sea  $p(s, \mathbf{q})$  una familia de polinomios definida como en (4); entonces, el "value set"  $V(\omega_0)$  para una frecuencia  $\omega_0 \in \mathbb{R}$  esta dado por:

$$V(\omega_0) \equiv \{p(j\omega_0, q) : q \in Q\}$$

es decir, el "value set" es la imagen de  $Q$  bajo la aplicación de  $p(j\omega_0, \cdot)$ .

Es importante mencionar que el "value set" está definido para cualquier tipo de incertidumbre paramétrica y no necesariamente para una caja  $Q$ . El "value set" presenta diferentes figuras dependiendo del tipo de incertidumbre que se este considerando; las más comunes son polígonos en el plano complejo, ver [3]. La principal ventaja de introducir el concepto del "value set", es que con ayuda del principio de exclusión del cero, transforma el problema de estabilidad robusta en un problema completamente gráfico y por lo tanto mucho más simple de verificar ya que los avances en la computación hacen cada vez más sencillo el obtener gráficas de cualquier tipo. El principio de exclusión del cero es presentado a continuación.

**TEOREMA 2.4 (Exclusión del Cero)** Sea una familia de polinomios  $\mathcal{P}$  definida como  $p(s, \mathbf{q}) = \sum_{i=0}^n a_i(\mathbf{q})s^i$ , con grado invariante, asociada a un conjunto de incertidumbre conectado  $Q$ , con funciones continuas  $a_i(q) \forall i = 0, 1 \dots n$  y al menos un elemento de la familia es estable. Entonces  $\mathcal{P}$  es robustamente estable si y sólo si:

$$0 \notin V(\omega) \quad \forall \omega \geq 0$$

La condición de grado invariante significa que la familia de polinomios no debe cambiar de grado en el intervalo de incertidumbre. La demostración del resultado anterior se basa en la continuidad de las raíces de un polinomio con respecto a sus coeficientes, ver [38]. Los resultados presentados en esta sección serán extendidos a sistemas dinámicos con retardo por lo que se presentarán en la siguiente sección, algunas definiciones y resultados básicos para este tipo de sistemas.

## 2.5 Estabilidad de Sistemas con Retardo

En esta sección se considerará la estabilidad de una clase de sistemas dinámicos con retardo; la cual es representada por ecuaciones diferenciales retardadas que tienen la siguiente estructura.

$$\dot{x}(t) = A_1 x(t) + A_2 x(t - \tau) \quad (9)$$

donde  $A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\tau \in \mathbb{R}_+$ . Este tipo de ecuaciones son conocidas como ecuaciones *diferencia-diferencial*, ver [25]. En este sección se presentará uno de los resultados más importantes relacionados con la estabilidad del sistema dinámico (9).

La estabilidad del sistema dinámico (9) esta relacionada con la solución de la siguiente ecuación característica:

$$\det(sI - A - Be^{-\tau s}) = 0 \quad (10)$$

El sistema (9) es estable si y sólo si,  $\det(sI - A - Be^{-\tau s}) \neq 0, \forall s \in \mathbb{C}_+$ , ver [25]. Desarrollando (10) se puede obtener la siguiente función:

$$p(s, e^{-\tau s}) = \sum_{k=0}^n p_k(s) e^{-k\tau s} \quad (11)$$

$$p_k(s) = a_{k,n} s^n + a_{k,n-1} s^{n-1} + \dots + a_{k,1} s + a_{k,0}$$

donde  $n = \deg[p_0(s)] > \deg[p_i(s)]$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n$ . El tipo de funciones (11) se les conoce como cuasi-polinomios y la estabilidad del sistema dinámico está relacionado directamente con las raíces del cuasi-polinomio  $p(s, e^{-\tau s})$ ; es decir, (9) es estable si y sólo si, (11) tiene todas sus raíces en el semiplano izquierdo del plano complejo. Una consideración importante es que la ecuación característica tiene un numero infinito de raíces; por lo que se complica su obtención. Si ahora la ecuación característica es multiplicada por  $e^{n\tau s}$  obtenemos:

$$p(s, e^{\tau s}) = \sum_{k=0}^n p_{n-k}(s) e^{k\tau s} \quad (12)$$

Es claro que las raíces de  $p(s, e^{\tau s})$  son exactamente las mismas que las de  $p(s, e^{-\tau s})$ ; por lo tanto se puede obtener las mismas propiedades de estabilidad. La ecuación (12) representa un tipo de funciones que se les llama funciones trascendentales; el resultado de Pontryagin presenta condiciones necesarias y suficientes de estabilidad para este tipo de funciones. ver [41].

**TEOREMA 2.5** Sea  $\Delta(s) = p(s, e^{\tau s})$ : donde  $a_{0,n} \neq 0$  ( $a_{0,n}$  es llamado término principal). Supóngase que  $\Delta(j\omega) \forall \omega \in \mathbb{R}$ ; es separado en su parte real e imaginaria como sigue:  $\Delta(j\omega) = F(\omega) + jG(\omega)$ . Si todas las raíces de  $\Delta(s)$  tienen parte real negativa; entonces, las raíces de  $F(\omega)$  y  $G(\omega)$  son reales, simples, alternadas y satisfacen:

$$\frac{dG(\omega)}{d\omega} F(\omega) - G(\omega) \frac{dF(\omega)}{d\omega} > 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (13)$$

en sentido contrario, todas las raíces de  $\Delta(s)$  tienen parte real negativa si las siguientes condiciones se satisfacen:

1. Todas las raíces de  $F(\omega)$  y  $G(\omega)$  son reales, simples, alternadas y (13) se satisface para al menos un valor de  $\omega$ .

2. Todas las raíces de  $F(\omega)$  son reales y para cada raíz, la condición (13) es satisfecha.
3. Todas las raíces de  $G(\omega)$  son reales y para cada raíz, la condición (13) es satisfecha.

En capítulos posteriores se tratará la extensión de algunos resultados de estabilidad robusta al caso de sistemas con retardo, el problema de estabilidad robusta se planteará para cuasi-polinomios con incertidumbre en los coeficientes y en el retardo.

# CAPITULO 3

## Aproximación del Retardo para un Sistema Dinámico Retardado

### 3.1 Introducción

Las aproximaciones de funciones, operadores o sistemas dinámicos tienen un interés fundamental, debido a que éstas simplifican el análisis de dichos sistemas; uno de los aspectos más importantes a considerar cuando se realiza una aproximación, es garantizar que se preserven las características más importantes del sistema original, ya que éste ofrece mayor confianza en su análisis. El tipo de aproximación que aquí se estudiará es la aproximación de Padé; una de las principales motivaciones para utilizar esta aproximación es que transforma un sistema dinámico de dimensión infinita en uno de dimensión finita, simplificando en gran medida su análisis.

#### 3.1.1 Preliminares Matemáticos

En esta sección se presentarán algunos resultados básicos que serán usados para determinar las propiedades principales del tipo de aproximación que se propondrá; estas propiedades son determinadas en función del error que existe entre la aproximación y la función original. En seguida serán presentadas algunas definiciones, ver [34].

**DEFINICION 3.1** *Sea  $p$  un número real  $1 \leq p < \infty$ . Los espacios vectoriales  $l_p$  están formados por todas las secuencias de elementos escalares  $\{\xi_1, \xi_2, \dots\}$  tal que:*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty$$

Los espacios vectoriales  $l_p$  son espacios vectoriales normados en los que la norma se define de la siguiente forma:

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall x \in l_p$$

**DEFINICION 3.2** *El espacio vectorial normado  $l_\infty$  consiste de todas las secuencias acotadas  $\{\xi_1, \xi_2, \dots\}$  con la norma definida de la siguiente manera:*

$$\|x\|_\infty = \max_i |\xi_i|$$

Los espacios vectoriales anteriores, también son definidos para funciones realmente valuadas que son integrables en el sentido de Lebesgue sobre un intervalo  $[a, b]$ , ver [34]. En este caso la norma está definida como:

$$\|x(t)\|_p = \left( \int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

la norma infinito para este tipo de funciones se define como:

$$\|x(t)\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |x(t)|$$

estos espacios vectoriales son definidos como espacios  $L_p$ . Es importante mencionar que la función anterior, aunque es definida como una norma realmente no lo es, ya que puede ser igual cero para valores  $x(t) \neq 0$ , este tipo de funciones son llamadas semi-normas. Estas últimas definiciones son realizadas también para funciones expresadas en el dominio de la frecuencia, las cuales son tratadas como funciones de variable compleja. En nuestro caso, la definición que representa el mayor interés es la norma infinito en el dominio de la frecuencia, es decir:

$$\|x(j\omega)\|_\infty = \sup_\omega |x(j\omega)|$$

Estas definiciones serán aplicadas para cuantificar el error en la aproximación y de esta forma poder derivar las principales propiedades que presenta dicha aproximación.

## 3.2 Aproximación de Padé

Como se mencionó en la sección anterior se analizará la aproximación de Padé por lo que se introducirá en esta sección. La primera definición de interés es la definición de función analítica, ver [11].

**DEFINICION 3.3** *Una función de variable real  $f(t)$ , se dice que es analítica sobre un dominio  $D$ , si  $f(t)$  es un elemento de  $C^\infty$  y si para cada  $t_0$  en  $D$ ,  $\exists \varepsilon > 0$  tal que  $\forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ ,  $f(t)$  se puede representar por una serie de Taylor convergente en una vecindad del punto  $t_0$ .*

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t - t_0)^n}{n!} f^{(n)}(t_0)$$

**NOTA 3.1** Si  $f(t)$  es una función de variable compleja; entonces únicamente es necesario que sea una vez derivable para que se pueda expresar como una serie de Taylor convergente, a este tipo de funciones se les conoce como funciones holomorfas.

La siguiente definición es un caso particular que se presenta en toda función analítica, ver [15].

**DEFINICION 3.4** Sea el siguiente polinomio  $p(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$  y  $f(t)$  una función analítica en una vecindad de  $t_0$  donde  $a_k = f^{(k)}(t_0)/k!$  para  $t_0 = 0$ , entonces  $p(t)$  se define como el Polinomio de Taylor asociado a  $f(t)$ .

**NOTA 3.2** Este polinomio satisface las siguientes propiedades de interpolación con la función  $f(t)$ .

$$p(0) = f(0) = \dots = \frac{d^n p(0)}{dt^n} = \frac{d^n f(0)}{dt^n}$$

Las definiciones anteriores se extienden al caso de funciones de variable compleja holomorfas, lo cual resulta de gran utilidad para la aproximación del retardo. La siguiente función racional es considerada como la aproximación de Padé.

$$h_{(n,m)}(t) = \frac{p_n(t)}{q_m(t)} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} p_n(t) &= a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n \\ q_m(t) &= b_0 + b_1 t + \dots + b_m t^m \end{aligned} \quad (2)$$

donde el subíndice  $(n, m)$  indica el grado del numerador y denominador de la función racional, respectivamente. El resultado de la aproximación de Padé se presenta en seguida, ver [15], [16], [43]:

**TEOREMA 3.1** Si  $f(t)$  tiene  $n + m$  derivadas continuas en una región cercana al origen, entonces  $f(t)$  posee una aproximación de Padé de grado  $(n, m)$ . Además, los coeficientes de los polinomios  $a_i$  y  $b_j$  ( $i = 1, \dots, n ; j = 1, \dots, m$ ) de (2) pueden obtenerse como sigue:

$$\sum_{j=0}^k c_j b_{k-j} = a_k \quad b_0 = 1, \quad a_0 = c_0 b_0, \quad a_{n+i} = b_{n-i} = 0 \quad \forall i \geq 1 \quad (3)$$

donde  $a_i, b_i$  son los coeficientes de  $p_n(s)$  y  $q_m(s)$ , respectivamente;  $c_i$  son los coeficientes del polinomio de Taylor. Desarrollando (3) se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas lineales que tienen solución única, es decir:

$$Ax = b \quad (4)$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} M_1 & -M_2 \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n+m-1} \\ c_{n+m} \end{bmatrix}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} I_n \\ 0_{m+n} \end{bmatrix}; \quad M_2 = \begin{bmatrix} c_0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & c_0 & \cdots & \vdots \\ c_2 & c_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & c_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n+m-1} & c_{n+m-2} & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

Se puede verificar que  $A$  es una matriz de dimensiones  $(n + m) \times (n + m)$  e invertible y  $b$  es un vector de dimensiones  $(n + m) \times 1$ ; por lo tanto los coeficientes de la aproximación de Padé se pueden obtener como:

$$x = A^{-1}b \quad (5)$$

**NOTA 3.3** Es claro que la matriz  $A$  depende de los coeficientes del polinomio de Taylor, los cuales tienden a ser muy pequeños conforme se incrementa el grado de la aproximación; por tal razón la matriz  $A$  tiende a ser mal condicionada. Es recomendable usar coeficientes del polinomio de Taylor que sean mayores a  $10^{-10}$ . El cálculo de los coeficientes de la aproximación de Padé es realizada mediante un programa codificado en lenguaje MATLAB.

Es importante mencionar que toda función analítica posee una aproximación de Padé de grado arbitrario. El teorema 3.1 se puede extender a funciones de variable compleja por lo que resulta de gran importancia debido a que el retardo de tiempo es una función de variable compleja cuando se obtiene la transformada de Laplace.

### 3.3 Aproximación del Retardo

En esta sección se tratará el problema de la aproximación del operador retardo en un sistema dinámico retardado. El tipo de sistemas que serán considerados tienen la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t - \tau) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (6)$$



como se puede observar, este es un sistema dinámico con retardo en la entrada el cual puede ser representado mediante el siguiente diagrama de bloques:

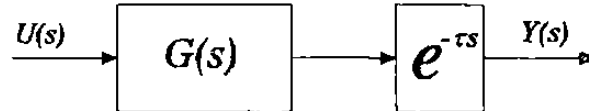


Figura 3.1 Diagrama de bloques del sistema con retardo en la entrada.

donde  $G(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$  es una función racional estrictamente propia. Nuestro objetivo será aproximar el operador retardo  $e^{-\tau s}$  mediante aproximaciones de Padé y realizar una comparación entre ellas. El interés principal de aproximar dicho operador es sustituir el sistema dinámico con retardo por un sistema dinámico que no contenga el término del retardo, ya que éste presenta muchas complicaciones cuando desea realizar algún estudio sobre el sistema. Existen diferentes funciones que se han empleado para realizar esta aproximación, ver [2]; sin embargo, una de las que más se utilizan es la aproximación de Padé. Cuando se realiza una aproximación de un sistema dinámico, el objetivo principal es determinar si el error entre el sistema aproximado y el sistema real, es aceptable; ya que en el caso contrario no tiene ningún sentido realizar dicha aproximación. En las siguientes secciones se analizará el error de la aproximación cuando se utiliza una aproximación de Padé.

### 3.3.1 Planteamiento del Problema

El problema de aproximación consiste en aproximar el operador retardo por una función racional como se muestra en la siguiente ecuación:

$$e^{-\tau s} \approx h_{(n,m)}(\tau s) = \frac{a_0 + a_1(\tau s) + \cdots + a_n(\tau s)^n}{b_0 + b_1(\tau s) + \cdots + b_m(\tau s)^m} \quad (7)$$

donde  $h_{(n,m)}(\tau s)$  representa una aproximación de Padé tal como se definió en la sección anterior;  $\tau \in \mathbb{R}_+$ ; es decir,  $\tau$  será considerado como un número real positivo fijo. Con la consideración anterior, el sistema dinámico retardado se puede expresar mediante el siguiente diagrama de bloques:

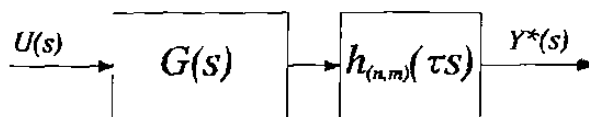


Figura 3.2 Diagrama de bloques del sistema aproximado.

donde  $G(s) = n(s)/d(s)$  es la función de transferencia del sistema sin considerar el retardo. Nuestro interés será realizar una comparación entre diferentes aproximaciones de Padé, con el fin de proponer la que tenga mejores propiedades. Es claro que para poder realizar una comparación entre diferentes aproximaciones es necesario analizar el error que la salida del sistema aproximado presenta con respecto a la salida del sistema original; este error es expresado por la siguiente relación:

$$E(s) = Y(s) - Y^*(s)$$

donde  $Y(s)$  y  $Y^*(s)$  son las salidas del sistema original y el aproximado, respectivamente. El error también se puede representar mediante el siguiente diagrama de bloques:

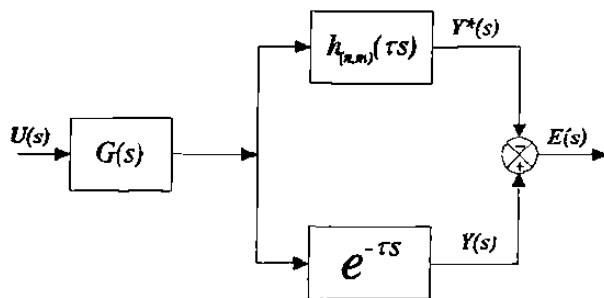


Figura 3.3 Diagrama de bloques del error del sistema aproximado.

La relación que existe entre el error y la entrada está determinada por la siguiente ecuación:

$$E(s) = \left( e^{-\tau s} - h_{(n,m)}(\tau s) \right) G(s)U(s) \quad (8)$$

el objetivo será reducir este error mediante el uso de diferentes aproximaciones de Padé. La norma que será considerada para poder hacer comparaciones entre diferentes aproximaciones será la norma  $L_\infty$  definida en el dominio de la frecuencia; es decir:

$$\|E(j\omega)\|_\infty = \max_\omega |E(j\omega)|$$

donde:

$$|E(j\omega)| = |e^{-j\tau\omega} - h_{(n,m)}(j\tau\omega)| |G(j\omega)U(j\omega)|$$

nótese que la norma del error esta en función de la aproximación del retardo  $h_{(n,m)}(s)$ , de tal forma que modificando esta aproximación se puede obtener una reducción del error. Es importante hacer notar que el error  $|E(j\omega)|$  también depende de  $|G(j\omega)U(j\omega)|$ , por lo tanto, al reducir el término  $|e^{-j\tau\omega} - h_{(n,m)}(j\tau\omega)|$  no necesariamente se reducirá el error, a menos de que esta reducción sea válida para todo valor de  $\omega$ .

### 3.3.2 Análisis del Error de la Aproximación de Padé

Como se mencionó en la sección anterior, es posible reducir el error modificando la aproximación de Padé. En esta sección se presentará una comparación entre las siguientes aproximaciones de Padé:

$$h_{(2,2)}(\tau s) = \frac{1 - \frac{1}{2}\tau s + \frac{1}{12}(\tau s)^2}{1 + \frac{1}{2}\tau s + \frac{1}{12}(\tau s)^2}$$

$$h_{(1,2)}(\tau s) = \frac{1 - \frac{1}{3}\tau s}{1 + \frac{2}{3}\tau s + \frac{1}{6}(\tau s)^2}$$

donde la aproximación  $h_{(2,2)}(\tau s)$  representa una aproximación de Padé de grado relativo 0 que es el tipo de aproximación que más se utiliza para aproximar el retardo en un sistema dinámico retardado, ver [31]. La comparación, como puede observarse, será con una aproximación de grado relativo igual a 1. Ahora se verificará el valor absoluto del error entre las dos aproximaciones anteriores:

$$E_1 = |e^{-j\tau\omega} - h_{(2,2)}(j\tau\omega)|$$

$$E_2 = |e^{-j\tau\omega} - h_{(1,2)}(j\tau\omega)|$$

considerando  $\tau = 1$ ; las gráficas de  $E_1$  y  $E_2$  para un rango de  $\omega \in [0, 25]$  tienen la siguiente forma

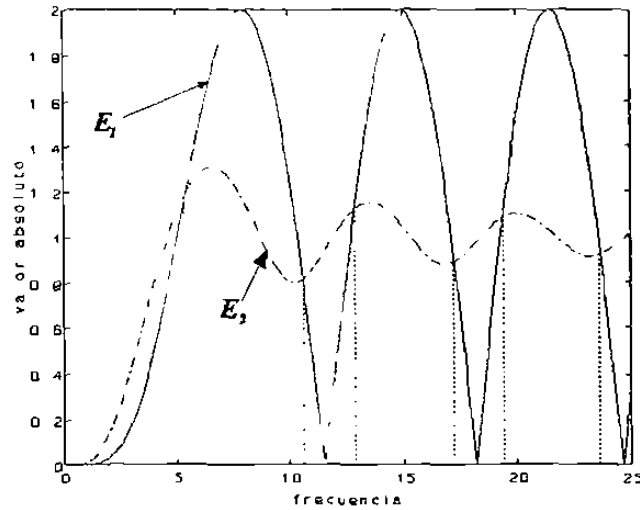


Figura 3.4 Gráfica del valor absoluto del error.

de la gráfica anterior se puede notar que el error  $E_2$  es menor que el error  $E_1$  para diferentes intervalos de frecuencia; por lo tanto la norma infinito del error entre las diferentes aproximaciones tiene diferentes valores y entonces es posible obtener una mejor aproximación si se cambia el grado de la aproximación de Padé. Desafortunadamente el error depende directamente del término  $|G(j\omega)U(j\omega)|$ ; es decir de la función de transferencia y del tipo de entrada al sistema por lo que no se puede establecer un resultado que establezca cual es la mejor aproximación.

Aunque no es posible determinar una aproximación que reduzca el error, si se puede reducir una cota superior de éste; lo anterior se puede verificar mediante la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \|E(j\omega)\|_{\infty} &= \|(e^{-j\tau\omega} - h_{(n,m)}(j\tau\omega))G(j\omega)U(j\omega)\|_{\infty} \\ &\leq \|e^{-j\tau\omega} - h_{(n,m)}(j\tau\omega)\|_{\infty} \|G(j\omega)U(j\omega)\|_{\infty} \\ &= \gamma_{(n,m)} \|G(j\omega)U(j\omega)\|_{\infty} \end{aligned}$$

donde  $\gamma_{(n,m)}$  es la norma del error de la aproximación del retardo. nótese que  $\gamma_{(n,m)} \|G(j\omega)U(j\omega)\|_{\infty}$  determina la cota superior del error de la aproximación y entonces si se reduce el valor de  $\gamma_{(n,m)}$  la cota superior también será reducida. Es importante mencionar que la reducción de la cota superior no implica necesariamente la reducción en el error de la aproximación, por lo que la reducción del error sólo será efectiva cuando esta cota sea alcanzada. De la gráfica de la figura 3.4 se puede verificar que  $\gamma_{(1,2)} < \gamma_{(2,2)}$  y entonces si la condición  $\|E(j\omega)\|_{\infty} = \gamma_{(1,2)} \|G(j\omega)U(j\omega)\|_{\infty}$  se cumple, el error de la aproximación  $h_{(1,2)}(\tau s)$  es más pequeño que el error de  $h_{(2,2)}(\tau s)$ . A continuación se muestra una tabla donde se determina la norma del error para diferentes aproximaciones de Padé considerando  $\tau = 1$ .

# CAPITULO 4

## Estabilidad Robusta de Plantas Intervalo con Retardo

### 4.1 Introducción

Uno de los primeros resultados relacionados con plantas intervalo fue publicado en [9]; en donde se presentan condiciones necesarias y suficientes de estabilidad robusta para un sistema dinámico representado por plantas intervalo; el resultado principal considera sistemas dinámicos multivariables, los cuales pueden tener  $m$  entradas y una salida o una entrada y  $m$  salidas; de tal forma que su ecuación característica sea de la forma  $\delta = P_1(s)Q_1(s) + \dots + P_m(s)Q_m(s)$ , donde  $P_i(s)$  son polinomios fijos y  $Q_i(s)$  son polinomios intervalo. El método sugerido en el artículo anterior consiste en la verificación de estabilidad de  $m4^m$  aristas que se definen en función de los polinomios de Kharitonov asociados al numerador y denominador, las cuales están formadas por combinaciones convexas entre polinomios que pertenecen a la misma familia; para el caso particular de una entrada y una salida,  $m = 2$  y entonces el número de aristas que es necesario verificar es de 32. Este resultado simplifica la verificación de la propiedad de estabilidad robusta: sin embargo, la cantidad de aristas que es necesario verificar aún lo hace complicado. Otro resultado que apareció posteriormente fue publicado en [6]; quienes obtienen también condiciones necesarias y suficientes para el problema de estabilización de plantas intervalo de una entrada y una salida; la principal restricción es que consideran solamente controladores de primer orden y la ventaja es que obtienen resultados en base a puntos extremos, al igual que el resultado de Kharitonov [29]; para el caso de plantas intervalo, el número de polinomios extremo que es necesario verificar es de 16 y son las combinaciones entre los polinomios de Kharitonov del numerador y denominador de la planta intervalo. Estabilidad y estabilización de plantas intervalo ha sido un problema de gran interés y se han extendido también a sistemas dinámicos no lineales; algunos resultados relacionados con este tipo de sistemas son presentados en algunos artículos como [10]; quienes tratan el problema de "Lur'e" considerando plantas intervalo en la parte lineal del sistema dinámico.

donde  $Q$  y  $R$  definen el conjunto de vectores cuyos elementos son los coeficientes del numerador y denominador respectivamente; es decir:

$$\begin{aligned} Q &\equiv \{ \mathbf{q} \in \mathbb{R}^m : q_i^- \leq q_i \leq q_i^+ \} \\ R &\equiv \{ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n : r_i^- \leq r_i \leq r_i^+ \} \end{aligned}$$

La familia que forma una planta intervalo será definida como sigue:

$$\mathcal{G} \equiv \{ G(s, \mathbf{q}, \mathbf{r}) : \mathbf{q} \in Q; \mathbf{r} \in R \} \quad (2)$$

donde se establece la suposición de que la familia  $\mathcal{G}$  sea estrictamente propia; es decir, que  $m < n$  para todo elemento de la familia  $\mathcal{G}$ . Para describir el problema de estabilización robusta de plantas intervalo es necesario presentar el siguiente diagrama de bloques.

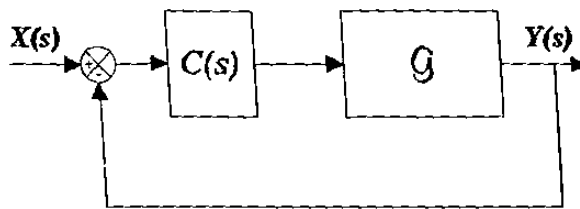


Figura 4.1 Diagrama de bloques de una Planta Intervalo.

donde  $C(s)$  y  $G$  representan un controlador fijo y una planta intervalo respectivamente; considerando que el controlador tiene la siguiente estructura :

$$C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

donde  $N_c(s)$  y  $D_c(s)$  son polinomios de grado  $\rho$  y  $v$  respectivamente, con la condición  $\rho \leq v$ ; entonces, el objetivo es encontrar un controlador  $C(s)$  que logre estabilizar el sistema de control en lazo cerrado de la figura 4.1 para todo  $G(s) \in \mathcal{G}$ . Es claro que la estabilidad robusta del sistema en lazo cerrado presentado en la figura 4.1 está determinada por la siguiente ecuación característica:

$$p(s, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = N_c(s)N(s, \mathbf{q}) + D_c(s)D(s, \mathbf{r}) \quad (3)$$

esta ecuación característica representa una familia de polinomios que será definida de la siguiente forma:

$$\mathcal{P} \equiv \{p(s, \mathbf{q}, \mathbf{r}) : \mathbf{q} \in Q; \mathbf{r} \in R\} \quad (4)$$

como se puede observar, el problema de estabilización robusta de plantas intervalo es equivalente a que la familia de polinomios  $\mathcal{P}$  sea estable. La principal diferencia entre la ecuación característica (3) y un polinomio intervalo normal, es que ésta es una suma de dos polinomios intervalo en el cual cada uno de ellos está multiplicado por un polinomio fijo, lo anterior provoca una modificación en el análisis, la cual será presentada en la sección 4.1.3.

#### 4.1.2 Plantas Intervalo con Retardo

Esta sección define el problema de interés de este capítulo, que es el problema de estabilidad robusta de plantas intervalo con retardo intervalo. Este, a diferencia del problema original de plantas intervalo, considera un retardo  $e^{-\tau s}$  donde  $\tau$  tiene incertidumbre de tipo intervalo además de la planta intervalo, tal como se presenta en la siguiente definición:

**DEFINICION 4.2** *Las plantas intervalo con retardo son sistemas dinámicos que tienen la siguiente estructura:*

$$G(s, \mathbf{q}, \mathbf{r}, e^{-\tau s}) = \frac{N(s, \mathbf{q})}{D(s, \mathbf{r})} e^{-\tau s} \quad \forall \mathbf{q} \in Q, \mathbf{r} \in R, \tau \in [0, \tau_{\max}]$$

la configuración del sistema dinámico que se considerará se presenta en la siguiente figura:

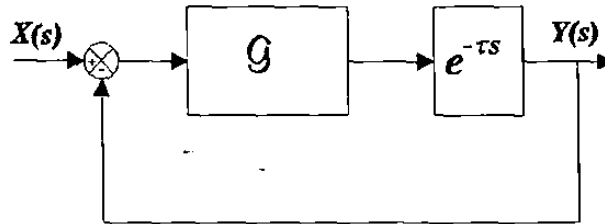


Figura 4.2 Diagrama de bloques de una planta intervalo con retardo.

donde  $\mathcal{G}$  define nuevamente un familia de plantas intervalo como en (2). Nótese que la configuración anterior no tiene controlador, ya que el problema será de análisis de estabilidad robusta y no de estabilización. La estabilidad del sistema dinámico presentado en el diagrama de bloques de la figura 4.2 está determinada por la siguiente ecuación característica:

$$p(s, \mathbf{q}, \mathbf{r}, e^{-\tau s}) = D(s, \mathbf{r}) + N(s, \mathbf{q})e^{-\tau s} \quad (5)$$

donde  $D(s, \mathbf{r})$  y  $N(s, \mathbf{q})$  son los polinomios intervalo definidos en (2) y en este trabajo se considerará que el retardo de tiempo  $\tau$  es un parámetro con incertidumbre de tipo intervalo. Entonces, el sistema anterior representa una familia de cuasi-polinomios que será definida de la siguiente forma:

$$\mathcal{P}_\tau \equiv \{p(s, \mathbf{q}, \mathbf{r}, e^{-\tau s}) : \mathbf{q} \in Q; \mathbf{r} \in R; \tau \in [0, \tau_{\max}]\} \quad (6)$$

el objetivo principal de este capítulo será obtener un método que garantice condiciones necesarias y suficientes de estabilidad robusta para la familia de cuasi-polinomios  $\mathcal{P}_\tau$ . Este método está basado en la construcción del "value set" para la familia  $\mathcal{P}_\tau$  y en base a éste, obtener los resultados de estabilidad robusta aplicando el teorema de exclusión del cero; para esto se requiere suponer que al menos un elemento de la familia  $\mathcal{P}_\tau$  es estable. Con el objeto de simplificar la construcción del "value set" de la ecuación característica (5), se introducirán una serie de propiedades relacionadas con el problema de plantas intervalo.

### 4.1.3 Propiedades del value set para Plantas Intervalo

Debido a que la estabilización de plantas intervalo se puede plantear como un problema de estabilidad robusta de la ecuación característica (3), que está formada por la suma de dos polinomios intervalo; entonces se utilizará el resultado de Kharitonov, para lo cual es necesario definir los siguientes polinomios:

$$\begin{aligned} N_1(s) &= q_0^- + q_1^- s + q_2^- s^2 + q_3^+ s^3 + \dots \\ N_2(s) &= q_0^+ + q_1^- s + q_2^- s^2 + q_3^+ s^3 + \dots \\ N_3(s) &= q_0^+ + q_1^+ s + q_2^- s^2 + q_3^- s^3 + \dots \\ N_4(s) &= q_0^- + q_1^+ s + q_2^+ s^2 + q_3^- s^3 + \dots \\ D_1(s) &= r_0^- + r_1^- s + r_2^+ s^2 + r_3^+ s^3 + \dots \\ D_2(s) &= r_0^+ + r_1^- s + r_2^- s^2 + r_3^+ s^3 + \dots \\ D_3(s) &= r_0^+ + r_1^+ s + r_2^- s^2 + r_3^- s^3 + \dots \\ D_4(s) &= r_0^- + r_1^+ s + r_2^- s^2 + r_3^- s^3 + \dots \end{aligned}$$

como se puede observar, los polinomios anteriores  $N_i(s)$  y  $D_i(s)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) son los polinomios de Kharitonov del numerador y denominador de la planta intervalo respectivamente. El "value set" de un polinomio intervalo para cada frecuencia  $\omega_0 \in \mathbb{R}$  es un rectángulo cuyos vértices son los polinomios de Kharitonov; tal como se muestra en la figura 4.3, ver [3]. [17]:



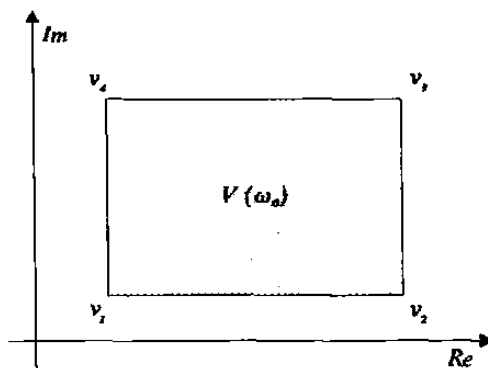


Figura 4.3 Value set de un polinomio intervalo.

donde los vértices del rectángulo  $v_i$  están formados por los polinomios de Kharitonov, ya sea del numerador o denominador de la planta intervalo; es decir:

$$v_i = N_i(j\omega_0) \quad \text{ó} \quad v_i = D_i(j\omega_0) \quad i = 1, 2, 3, 4$$

ahora, recordando la definición de combinación convexa presentada en el capítulo 2, el "value set" de un polinomio intervalo se puede expresar como:

$$V(\omega_0) = \text{Conv}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

donde  $v_i$  representa un punto en el plano complejo para una frecuencia fija  $\omega_0$ ; estos puntos corresponden a los polinomios de Kharitonov evaluados en un valor fijo  $s = j\omega_0$ . A continuación se presentarán algunas definiciones y operaciones básicas que pueden efectuarse con "value sets" como el presentado en la figura 4.3, los cuales serán llamados "value sets" rectangulares. Estas operaciones y definiciones se presentan con el fin de simplificar la demostración de los resultados obtenidos.

**DEFINICION 4.3 (Suma Directa)** La suma de dos value sets se define como:

$$V_1(\omega_0) + V_2(\omega_0) \equiv \{p = p_1 + p_2 : p_1 \in V_1(\omega_0); p_2 \in V_2(\omega_0)\}$$

**DEFINICION 4.4 (Producto Escalar)** El producto de un término escalar por el value set se define como:

$$\beta V(\omega_0) \equiv \{p = \beta p_1 : \beta \in \mathbb{C}; p_1 \in V(\omega_0)\}$$

es importante mencionar que el producto de un factor escalar por el "value set" evaluado en una frecuencia fija  $\omega_0$  amplifica y rota el "value set" original; el incremento en el tamaño del "value set" es determinado por  $|\beta|$  y el ángulo de rotación lo determina  $\angle\beta$ . Entonces, el "value set" de un polinomio intervalo, para una frecuencia fija  $\omega_0$ , multiplicado por un término escalar queda como se muestra en la siguiente figura:

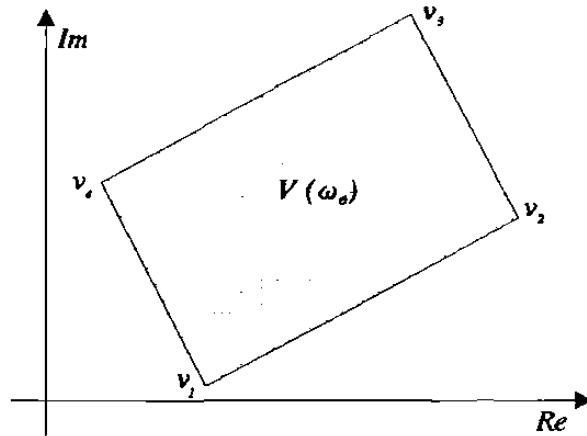


Figura 4.4 Value set multiplicado por un factor escalar.

donde los vértices del rectángulo girado  $v_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) son los polinomios de Kharitonov evaluados en  $s = j\omega_0$ , pero en esta ocasión no están ordenados como en la figura 4.3; es decir,  $v_1$  puede ser cualquiera de los cuatro polinomios de Kharitonov y lo mismo para  $v_2, v_3, v_4$ ; lo anterior es por que el ángulo de rotación puede ser mayor a  $\frac{\pi}{2}$  y entonces el orden de los vértices es alterado. Las definiciones y resultados posteriores se harán considerando que los vértices de los rectángulos no están en orden, tal como se mencionó anteriormente.

**DEFINICION 4.5** Considerar dos value sets rectangulares  $V_1(\omega_0)$  y  $V_2(\omega_0)$  evaluados en una frecuencia fija  $\omega_0 \in \mathbb{R}$  y definidos como:

$$V_1(\omega_0) \equiv \text{Conv}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$V_2(\omega_0) \equiv \text{Conv}\{v'_1, v'_2, v'_3, v'_4\}$$

entonces, se dirá que  $V_1(\omega_0)$  y  $V_2(\omega_0)$  están *ALINEADOS* para una frecuencia  $\omega_0$  si,  $\theta_1 = \theta_2 + k\frac{\pi}{2}$ , donde  $k$  es un número entero y

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left\{ \frac{\text{Im}(v_i) - \text{Im}(v_{i-1})}{\text{Re}(v_i) - \text{Re}(v_{i-1})} \right\}$$

$$\theta_2 = \tan^{-1} \left\{ \frac{\text{Im}(v'_i) - \text{Im}(v'_{i-1})}{\text{Re}(v'_i) - \text{Re}(v'_{i-1})} \right\}$$

donde  $i = 1, 2, 3, 4$ :  $v_0 = v_4$  y  $v'_0 = v'_4$ . Entonces, dos "value sets" rectangulares están alineados si tienen el mismo ángulo de inclinación como se muestra en la siguiente figura.

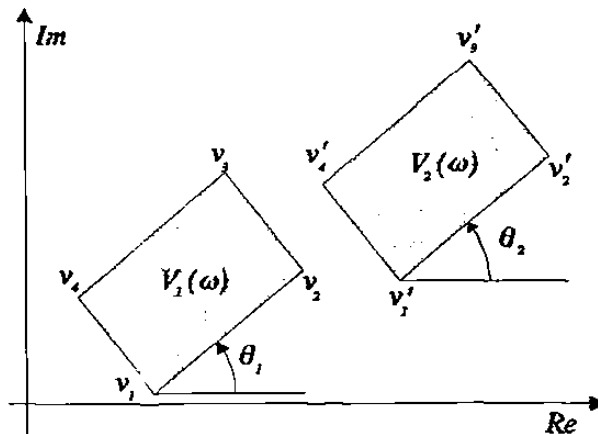


Figura 4.5 Value sets rectangulares alineados.

por el contrario, si dos "value sets" rectangulares no están alineados, entonces se considerará que están desalineados. Si dos "value sets" rectangulares están alineados para cualquier frecuencia  $\omega \in \mathbb{R}$ ; entonces, se dirá que están alineados para toda frecuencia. Con las definiciones anteriores es posible presentar los siguientes resultados.

**LEMA 4.1** Sean  $V_1(\omega_0)$  y  $V_2(\omega_0)$  dos value sets rectangulares y alineados, como en la figura 4.5; entonces, la suma directa  $V_1(\omega_0) + V_2(\omega_0)$  también es un value set rectangular formado por:

$$V_1(\omega_0) + V_2(\omega_0) = \text{Conv}\{p_i\} \quad \forall i = 1, 2, 3, 4$$

donde:

$$p_i = v_i + v'_i$$

**LEMA 4.2** Sean  $V_1(\omega_0)$  y  $V_2(\omega_0)$  dos value sets rectangulares y desalineados. Entonces, la suma directa  $V_1(\omega_0) + V_2(\omega_0)$  es un octágono formado por:

$$V_1(\omega_0) + V_2(\omega_0) = \text{Conv}\{p_i\} \quad \forall i = 1, \dots, 8$$

donde:

$$p_1 = v_1 + v'_1$$

$$p_2 = v_2 + v'_1$$

$$p_3 = v_2 + v'_2$$

$$p_4 = v_3 + v'_2$$

$$p_5 = v_3 + v'_3$$

$$p_6 = v_4 + v'_3$$

$$p_7 = v_4 + v'_4$$

$$p_8 = v_1 + v'_4$$

La suma de dos *value sets* desalineados se muestra en una forma más clara a través de las siguientes figuras:

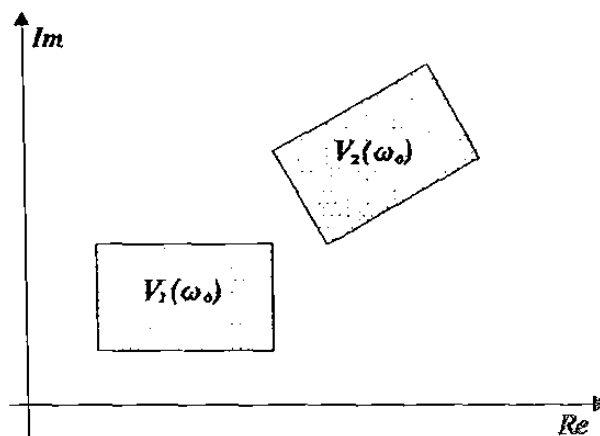


Figura 4.6 Value sets desalineados.

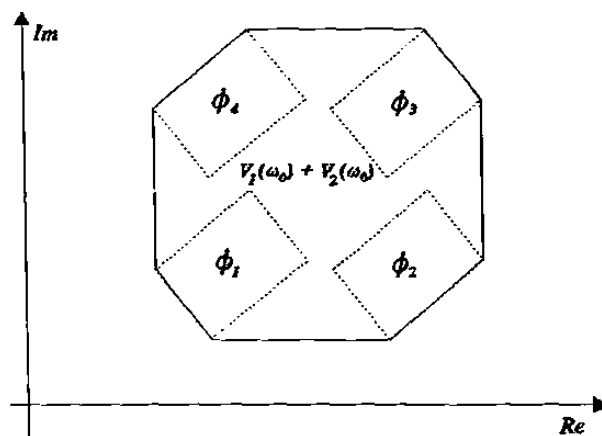


Figura 4.7 Suma de Value sets desalineados.

donde los "value sets"  $\phi_i$  se obtienen de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= v'_1 + V_2(\omega_0) \\ \phi_2 &= v'_2 + V_2(\omega_0) \\ \phi_3 &= v'_3 + V_2(\omega_0) \\ \phi_4 &= v'_4 + V_2(\omega_0)\end{aligned}$$

La demostración de los lemas anteriores se obtiene en forma directa de la figura que forman dos "value sets" rectangulares. De la forma que tiene la ecuación característica de una planta intervalo (3), se puede obtener que el "value set" está formado por la suma directa de dos "value sets" rectangulares  $D(s, \mathbf{r})$  y  $N(s, \mathbf{q})$ ; los cuales son multiplicados cada uno de ellos por un factor escalar  $D_c(s)$  y  $N_c(s)$ . lo que produce en general, un "value set" formado por un octágono, como se muestra en la figura 4.7. Para el caso de una planta intervalo con retardo intervalo, el "value set" resultante es más complicado de obtener; ya que para cada frecuencia fija, está formado por la unión de octágonos que giran en función del valor del retardo, como será presentado en la siguiente sección.

## 4.2 Construcción del Value Set para Plantas Intervalo con Retardo Intervalo

En esta sección se presentan los resultados que caracterizan el "value set" de sistemas dinámicos representados por plantas intervalo con retardo de tiempo; con la caracterización de este "value set" y la aplicación del principio de exclusión del cero en este tipo de sistemas dinámicos, se logra obtener condiciones necesarias y suficientes de estabilidad robusta, ver [45], [46], [47].

**DEFINICION 4.6** *El value set  $V_\tau(\omega)$  de la familia  $\mathcal{P}_\tau \equiv \{p(s, \mathbf{q}, \mathbf{r}, e^{-\tau s}) : \mathbf{q} \in Q; \mathbf{r} \in R; \tau \in [0, \tau_{\max}]\}$  es la gráfica en el plano complejo de  $p(s, \mathbf{q}, \mathbf{r}, e^{-\tau s})$  cuando  $s = j\omega$ ; es decir:*

$$V_\tau(\omega) = \{p(s, \mathbf{q}, \mathbf{r}, e^{-j\omega\tau}) : \forall \mathbf{r} \in R; \mathbf{q} \in Q; \tau \in [0, \tau_{\max}], \omega \in \mathbb{R}\} \quad (7)$$

Entonces, se denotará como  $V_\tau(\omega)$  al "value set" correspondiente a la familia de cuasi-polinomios  $\mathcal{P}_\tau$ . El siguiente resultado simplifica la verificación de la propiedad de estabilidad robusta, que es una consecuencia de que los coeficientes de  $p(s, \mathbf{q}, \mathbf{r}, e^{-j\omega\tau})$  son valuados realmente.

**LEMA 4.3** *Considerar la familia de cuasi-polinomios  $\mathcal{P}_\tau$ ; entonces, el value set  $V_\tau(\omega)$ , es simétrico con respecto al eje real del plano complejo; es decir:*

$$V_\tau(\omega) = -V_\tau(-\omega)$$

**Prueba.** La demostración será realizada para un elemento en particular de la familia  $\mathcal{P}_\tau$ ; ya que la extensión a toda la familia se obtiene en forma directa. Considerar entonces, que se tiene un elemento de la familia  $\mathcal{P}_\tau$ ; en particular:

$$p(s, \mathbf{q}_0, \mathbf{r}_0, e^{-\tau_0 s}) = N(s, \mathbf{r}_0) + D(s, \mathbf{q}_0)e^{-\tau_0 s}$$

donde:

$$\mathbf{q}_0 = [a_0, a_1, \dots, a_n]'$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_0 &= [b_0, b_1, \dots, b_n]' \\
\tau_0 &\in [0, \tau_{\max}] \\
N(s, \mathbf{r}_0) &= \sum_{k=0}^m a_k s^k \\
D(s, \mathbf{q}_0) &= \sum_{k=0}^n b_k s^k
\end{aligned}$$

nótese que  $\mathbf{q}_0, \mathbf{r}_0, \tau_0$  son valores fijos y entonces evaluando en  $s = j\omega$  se obtiene la siguiente expresión:

$$p(j\omega, \mathbf{q}_0, \mathbf{r}_0, e^{-j\tau_0\omega}) = u(\omega) + jv(\omega)$$

donde:

$$\begin{aligned}
u(\omega) &= a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - a_6\omega^6 + \dots + a_{n-\alpha}\omega^{n-\alpha} \\
&\quad + (b_0 - b_2\omega^2 + b_4\omega^4 - b_6\omega^6 + \dots + b_{n-\beta}\omega^{n-\beta})\cos(\omega\tau_0) \\
&\quad + (b_1\omega - b_3\omega^3 + b_5\omega^5 - b_7\omega^7 + \dots + b_{n-\beta}\omega^{n-\beta-1})\sen(\omega\tau_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v(\omega) &= a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - a_7\omega^7 + \dots + a_{n-\alpha-1}\omega^{n-\alpha-1} \\
&\quad + (b_1\omega - b_3\omega^3 + b_5\omega^5 - b_7\omega^7 + \dots + b_{n-\beta}\omega^{n-\beta-1})\cos(\omega\tau_0) \\
&\quad - (b_0 - b_2\omega^2 + b_4\omega^4 - b_6\omega^6 + \dots + b_{n-\beta}\omega^{n-\beta})\sen(\omega\tau_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha &\equiv \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \\
\beta &\equiv \begin{cases} 1 & \text{si } m \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } m \text{ es par} \end{cases}
\end{aligned}$$

ahora, recordando que una función par  $f(x)$  es aquella que cumple la condición  $f(x) = f(-x)$ ; entonces, se puede verificar que  $u(\omega)$  es una función par; es decir:

$$u(\omega) = u(-\omega) \quad (8)$$

por otra parte, una función es impar  $f(x)$  si satisface la condición  $f(x) = -f(-x)$ ; por lo tanto,  $v(\omega)$  es una función impar; es decir:

$$v(\omega) = -v(-\omega) \quad (9)$$

las condiciones (8) y (9) garantizan la propiedad de simetría del "value set"  $V_\tau(\omega)$ . ■

El siguiente resultado muestra una caracterización del "value set" para el caso particular de la familia  $\mathcal{P}_-$  cuando ésta no tiene incertidumbre en los coeficientes del quasi-polinomio y sólo aparece en el retardo de tiempo. Para este caso, la familia será definida como:

$$\mathcal{F}_\tau \equiv \{p(s, e^{-\tau s}) = D(s) + N(s)e^{-\tau s} : \forall \tau \in [0, \tau_{\max}]\} \quad (10)$$

**LEMA 4.4** Considerar la familia de cuasi-polinomios  $\mathcal{F}_\tau$ ; entonces, el value set  $V_\tau(\omega)$  para la familia  $\mathcal{F}_\tau$ , está formado por arcos de circunferencia que tienen su centro en la curva de Mikhailov de  $D(j\omega)$ , con un arco igual a  $\omega\tau_{\max}$  y radio igual a  $|N(j\omega)|$ .

**Prueba.** La prueba será realizada suponiendo primero un valor fijo  $\omega = \omega_0$  y después será extendida para todo  $\omega \in [0, \infty)$ . La ecuación característica de la familia  $\mathcal{F}_\tau$  evaluada en  $s = j\omega_0$  está dada por:

$$p(j\omega_0, e^{-j\tau\omega_0}) = D(j\omega_0) + N(j\omega_0)e^{-j\tau\omega_0}$$

recordando que  $D(j\omega_0)$  y  $N(j\omega_0)$  representan, cada uno, un punto en el plano complejo; entonces, se puede expresar en forma polar como:

$$\begin{aligned} D(j\omega_0) &= |D(j\omega_0)| e^{j\angle D(j\omega_0)} \\ N(j\omega_0) &= |N(j\omega_0)| e^{j\angle N(j\omega_0)} \end{aligned}$$

donde  $|D(j\omega_0)|$  la magnitud del número complejo  $D(j\omega_0)$  y  $\angle D(j\omega_0)$  denota el ángulo de fase de  $D(j\omega)$ . Entonces, la gráfica en el plano complejo de  $N(j\omega_0)e^{-j\omega_0\tau} = |N(j\omega_0)| e^{j(\angle N(j\omega_0) - \omega_0\tau)} \forall \tau \in [0, \tau_{\max}]$  tiene la siguiente forma:

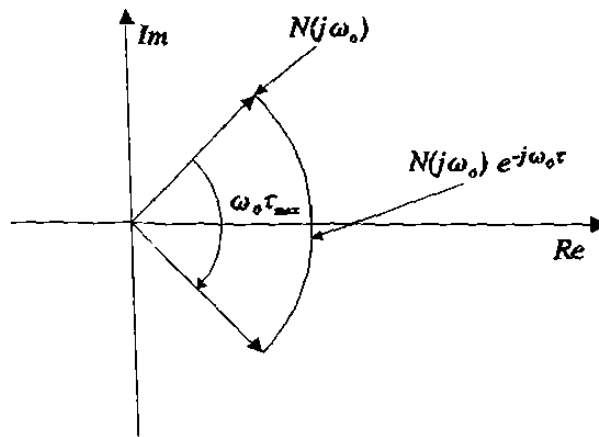


Figura 4.8 Value set de un polinomio fijo multiplicado por el retardo.

como el "value set" de  $D(j\omega_0)$  es un punto fijo; entonces, el "value set" resultante para  $p(j\omega_0, e^{-j\tau\omega_0})$  está dado por la figura 4.8 desplazada por el término fijo  $D(j\omega_0)$ , como se muestra en la siguiente figura:

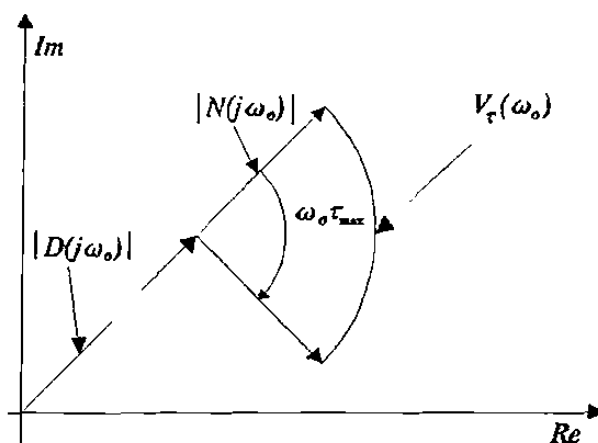


Figura 4.9 Value set del cuasi-polinomio  $p(s, e^{-\tau s})$ .

nótese que  $V_\tau(\omega_0)$  es un arco de circunferencia centrado en el punto  $D(j\omega_0)$  y con un arco igual a  $\omega_0 \tau_{\max}$  para cada valor fijo de  $\omega_0$ . Ahora, para todo valor de  $\omega \in \mathbb{R}$ , el "value set" cambia el tamaño del arco y del radio de la circunferencia; también se puede observar que  $D(j\omega)$  evaluado en  $\omega \in \mathbb{R}$  es la curva de Mikhailov de  $D(j\omega)$  y entonces, es claro que ésta es el centro de los arcos de circunferencia que se forman al considerar todos los valores de frecuencia. El "value set" para toda frecuencia  $\omega \in \mathbb{R}$ , está dado por:

$$V_\tau(\omega) = \cup_{\omega \in \mathbb{R}} V_\tau(\omega)$$

es decir  $V_\tau(\omega)$  es la unión de todos los arcos de circunferencia que se forman para cada frecuencia fija; la figura del "value set" es similar a la que se muestra a continuación:

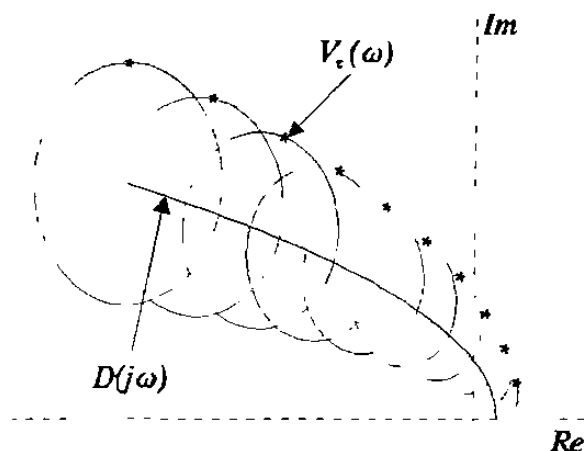


Figura 4.10 Value set de  $\mathcal{F}_\tau$  para un rango de frecuencias.



donde los puntos marcados con "\*" corresponden a  $\tau = 0$ . ■

**NOTA 4.1** Una característica importante del value set  $V_\tau(\omega_0)$  es que en general, para cada frecuencia fija  $\omega_0$ , forma un conjunto no convexo; ya que está formado solamente por arcos de circunferencia o por circunferencias completas dependiendo de que el valor de  $\omega_0\tau_{\max}$  sea menor o mayor que  $2\pi$ .

en seguida se extenderá el lema anterior al caso en que los coeficientes tienen incertidumbre de tipo intervalo; es decir, considerando la familia de cuasi-polinomios  $\mathcal{P}_\tau$ . Este resultado se apoya en las siguientes definiciones:

**DEFINICION 4.7** Considerar los cuatro polinomios de Kharitonov del denominador de la planta intervalo.  $D_1(s), D_2(s), D_3(s), D_4(s)$ ; entonces, el polinomio intermedio será definido como:

$$M(s) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 D_i(s) \quad (11)$$

ahora se definirá el siguiente factor de switcheo  $\gamma$ , el cual será usado en la descripción del "value set" que se presentará en el siguiente resultado.

$$\begin{aligned} \gamma &\equiv 0 & \text{si} & \quad 0 + 2n\pi \leq \omega\tau < \frac{\pi}{2} + 2n\pi \\ \gamma &\equiv 1 & \text{si} & \quad \frac{\pi}{2} + 2n\pi \leq \omega\tau < \pi + 2n\pi \\ \gamma &\equiv 2 & \text{si} & \quad \pi + 2n\pi \leq \omega\tau < \frac{3\pi}{2} + 2n\pi \\ \gamma &\equiv 3 & \text{si} & \quad \frac{3\pi}{2} + 2n\pi \leq \omega\tau < 2\pi + 2n\pi \end{aligned}$$

donde  $n$  puede ser cualquier número entero entre cero e infinito.

**LEMA 4.5** El value set para la familia de cuasi-polinomios  $\mathcal{P}_\tau \equiv \{p(s, \mathbf{q}, \mathbf{r}, e^{-\tau s}) : \mathbf{q} \in Q; \mathbf{r} \in R; \tau \in [0, \tau_{\max}]\}$  está formado por anillos centrados en la curva de Mikhailov de  $M(j\omega)$ . Los anillos están formados, para cada frecuencia, por octágonos que cambian su forma en función del retardo; los octágonos tienen sus vértices en los siguientes puntos:

$$\begin{aligned} v_{i+1} &= D_{i+1}(j\omega) + N_k(j\omega) e^{-j\omega\tau} \\ v_{i+5} &= D_{i+1}(j\omega) + N_h(j\omega) e^{-j\omega\tau} \end{aligned} \quad (12)$$

donde:

$$\begin{aligned} i &= 0, 1, 2, 3 \\ k &= (\gamma + i) \bmod 4 \\ h &= (\gamma + i + 1) \bmod 4 \end{aligned}$$

donde la operación  $(x) \bmod_4$  representa la operación módulo entero base cuatro de  $x$ .

**Prueba.** De la ecuación característica  $p(s, \mathbf{q}, \mathbf{r}, e^{-s\tau}) = D(s, \mathbf{r}) + N(s, \mathbf{q})e^{-s\tau}$  y de la definición 4.2 se puede observar que el "value set" de  $\mathcal{P}_\tau$  está formado por la suma de dos "value sets", en el cual uno de ellos es afectado por un producto escalar, que en este caso es el término que representa el retardo. Como se mencionó anteriormente un producto escalar amplifica y rota la figura formada por el "value set", que en este caso es un rectángulo; el factor de amplificación, que está determinado por la magnitud del factor escalar, es en este caso igual a la unidad; es decir, el rectángulo permanece del mismo tamaño al ser multiplicado por el retardo; sin embargo, el ángulo de rotación si cambia para cada valor del retardo. Entonces, el "value set" correspondiente a la parte que contiene el retardo  $N(s, \mathbf{q})e^{-s\tau}$  es la unión de un conjunto de rectángulos que están rotando un ángulo que esta entre 0 y  $\omega\tau_{\max}$ ; como se muestra en la siguiente figura:

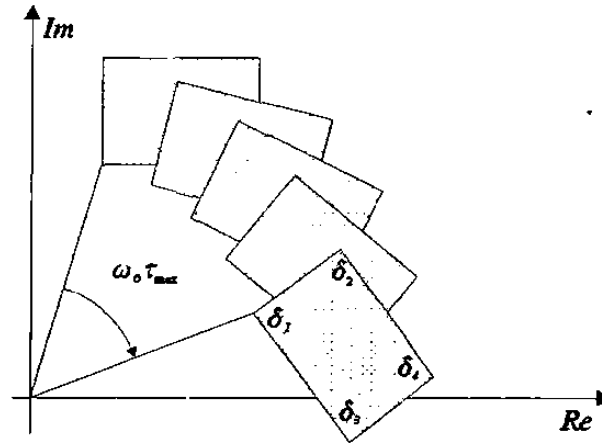


Figura 4.11 Value set de un polinomio intervalo multiplicado por el retardo.

donde los parámetros  $\delta_i$  están definidos para cada frecuencia  $\omega_0$  como:

$$\begin{aligned}\delta_1 &= N_1(j\omega_0) \\ \delta_2 &= N_2(j\omega_0) \\ \delta_3 &= N_3(j\omega_0) \\ \delta_4 &= N_4(j\omega_0)\end{aligned}$$

por lo tanto, el "value set" de la ecuación característica  $p(s, \mathbf{q}, \mathbf{r}, e^{-s\tau}) = D(s, \mathbf{r}) + N(s, \mathbf{q})e^{-s\tau}$  está formado por la suma de dos "value sets" rectangulares que están alineados para todo valor de  $\tau\omega_0 = \frac{n\pi}{2}$ , ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) y están desalineados para todo valor  $\tau\omega_0 \neq \frac{n\pi}{2}$ ; entonces, aplicando el lema 4.2 y considerando la incertidumbre en el retardo, se obtiene que el "value set" para cada frecuencia fija  $\omega_0$  está formado por la unión de octógonos

que se colapsan en rectángulos para cada valor de  $\tau\omega_0 = \frac{n\pi}{2}$ ; tal como se muestran en la figura 4.12.

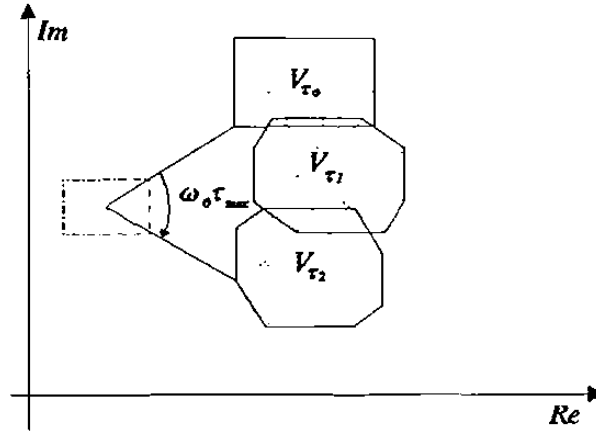


Figura 4.12 Value set de  $\mathcal{P}_\tau$  para una frecuencia fija  $\omega_0$ .

donde el rectángulo trazado con líneas discontinuas corresponde al polinomio intervalo formado por el denominador de la planta intervalo  $D(j\omega_0, R)$ ,  $\forall r \in R$ ; los rectángulos trazados con líneas punteadas corresponden a la suma de los polinomios  $D_i(j\omega_0) + N(j\omega_0, Q)e^{-\tau s}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) y los octágonos trazados con líneas continuas están formados como:

$$\begin{aligned} V_{\tau_0} &= \text{Conv}\{v_1, \dots, v_8\} & \text{para } \tau &= 0 \\ V_{\tau_1} &= \text{Conv}\{v_1, \dots, v_8\} & \text{para } \tau &= \tau_1 \in [0, \tau_{\max}] \\ V_{\tau_2} &= \text{Conv}\{v_1, \dots, v_8\} & \text{para } \tau &= \tau_2 \in [0, \tau_{\max}] \end{aligned}$$

donde los vértices  $v_i$  del octágono, como se observa en la figura 4.12, cambian cada vez que el rectángulo correspondiente al denominador rota  $\frac{\pi}{2}$  radianes; de la misma figura. se puede obtener que los vértices de los octágonos están formados por:

$$\begin{aligned} v_{i+1} &= D_{i+1}(j\omega_0) + N_k(j\omega_0) e^{-j\omega_0\tau} \\ v_{i+5} &= D_{i+1}(j\omega_0) + N_h(j\omega_0) e^{-j\omega_0\tau} \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} \tau &\in [0, \tau_{\max}] \\ i &= 0, 1, 2, 3 \\ k &= (\gamma + i) \bmod 4 + 1 \\ h &= (\gamma + i + 1) \bmod 4 + 1 \end{aligned}$$

también de la figura 4.12 se puede observar que los octágonos giran con respecto al centro del rectángulo correspondiente al polinomio intervalo del denominador de la planta intervalo,  $D(j\omega_0, R)$ ; el cual está determinado por el polinomio  $M(s)$  evaluado en  $s = j\omega_0$ . Entonces, el "value set" para toda frecuencia  $\omega \in [0, \infty)$  está formado por anillos formados por octágonos centrados en la curva de Mikhailov de  $M(s)$  como se muestra en la figura 4.13.

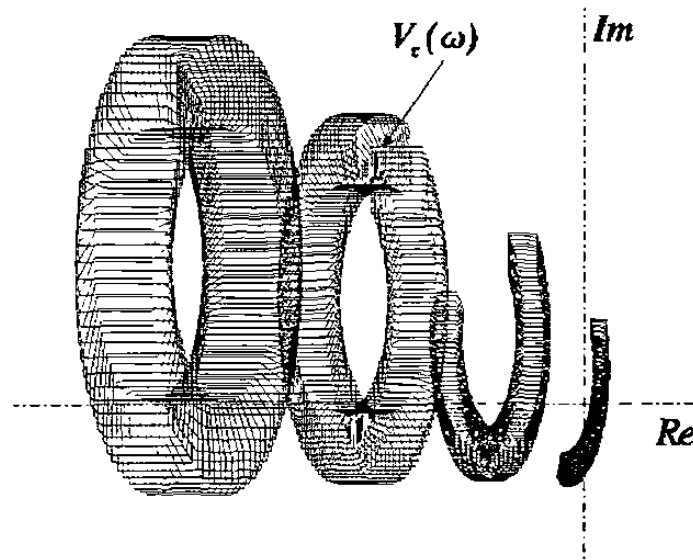


Figura 4.13 Value set de  $\mathcal{P}_\tau$  para un rango de frecuencias. ■

**NOTA 4.2** Como se puede observar en la figura 4.13, el value set, en general, no forma un conjunto convexo y para cada frecuencia fija  $\omega_0 \in [0, \infty)$  está formado por un conjunto infinito de octágonos que cambian su forma en función del retardo  $\tau$ ; por lo tanto, es complicado obtener condiciones de estabilidad robusta en base a puntos extremos como en el problema original de plantas intervalo. Sin embargo, el lema 4.5 proporciona un método para realizar la construcción del value set para la familia de cuasi-polinomios  $\mathcal{P}_\tau$  y con la aplicación del principio de exclusión del cero se puede obtener condiciones de estabilidad robusta; aunque no en base a puntos extremos.

### 4.3 Estabilidad Robusta de Plantas Intervalo con Retardo Intervalo

En esta sección se presenta la aportación principal de este capítulo, que es la aplicación del

principio de exclusión del cero al problema de plantas intervalo con retardo; los resultados están basados en la construcción del "value set" para plantas intervalo.

**TEOREMA 4.1** *Si existe al menos un elemento estable de la familia de cuasi-polinomios  $\mathcal{P}_\tau$  definida en (6); entonces,  $\mathcal{P}_\tau$  es robustamente estable si y sólo si,  $0 \notin V_\tau(\omega) \forall \omega \in [0, \infty)$ .*

**Prueba.** la prueba está basada en la propiedad de continuidad de las raíces de la ecuación característica  $p(s, \mathbf{q}, \mathbf{r}, e^{-\tau s})$  con respecto a los coeficientes  $q_i, r_i$  y también con respecto al retardo  $\tau$ , ver [37], [38], [55].

**necesidad.** Se asume por hipótesis que  $\mathcal{P}_\tau$  es robustamente estable y se demostrará que  $0 \notin V_\tau(\omega)$ . La demostración se realizará por contradicción. Si  $0 \in V_\tau(\omega)$ ; entonces de la definición de "value set" presentada en (7), existe un elemento  $p(j\omega^*, \mathbf{q}^*, \mathbf{r}^*, e^{-j\omega^* \tau^*}) \in \mathcal{P}_\tau$ ; tal que  $p(j\omega^*, \mathbf{q}^*, \mathbf{r}^*, e^{-j\omega^* \tau^*}) = 0$ , lo cual implica que tiene al menos una raíz sobre el eje  $j\omega$  y esto contradice la hipótesis de que  $\mathcal{P}_\tau$  es robustamente estable; por lo tanto  $0 \notin V_\tau(\omega)$ .

**suficiencia.** Por contradicción; supóngase que  $0 \notin V_\tau(\omega)$  y que existe un elemento  $p(s, \mathbf{q}, \mathbf{r}, e^{-\tau s}) \in \mathcal{P}_\tau$  que es inestable; es decir, tiene al menos una raíz en el semiplano derecho del plano complejo, con la suposición de que al menos un elemento de la familia es estable y aplicando la propiedad de continuidad de las raíces de la ecuación característica, lo anterior implica que existe un elemento  $p(s, \mathbf{q}^*, \mathbf{r}^*, e^{-\tau^* s}) \in \mathcal{P}_\tau$  que tiene al menos una raíz sobre el eje  $j\omega$ , lo cual implica que  $0 \in V_\tau(\omega)$  y por lo tanto se contradice la hipótesis  $0 \notin V_\tau(\omega)$ ; entonces,  $\mathcal{P}_\tau$  es robustamente estable. ■

**NOTA 4.3** *El resultado original del principio de exclusión del cero considera la evaluación del value set en el rango de frecuencia  $\omega \in \mathbb{R}$ ; sin embargo, con la propiedad de simetría del value set de la ecuación característica (5), presentada en el lema 4.1, se puede limitar a  $\omega \in [0, \infty)$ ; ya que si  $0 \notin V_\tau(\omega)$  entonces por la propiedad de simetría  $0 \notin V_\tau(-\omega)$ .*

Con la construcción del "value set" se pueden obtener algunos resultados para el caso particular en que se tiene incertidumbre sólo en el retardo.

### 4.3.1 Un Caso Particular

Los resultados que serán presentados en esta sección, se harán bajo la consideración de que la ecuación característica  $p(s, \mathbf{q}, \mathbf{r}, e^{-\tau s})$  no tenga incertidumbre en los coeficientes; es decir, ahora será considerada la familia de cuasi-polinomios representada por  $\mathcal{F}_\tau$  como en (10).

**COROLARIO 4.1** *Suponer que  $p(s, e^{-\tau s})$  es estable para  $\tau = 0$ ; entonces, la familia de cuasi-polinomios  $\mathcal{F}_\tau$  es robustamente estable  $\forall \tau \in [0, \infty)$  si y sólo si,  $|N(j\omega)| < |D(j\omega)| \forall \omega \in [0, \infty)$ .*

**Prueba.** La prueba se basa en el principio de exclusión del cero presentado en el teorema 4.1 y en la forma que tiene el "value set" para la familia  $\mathcal{F}_\tau$ , ver lema 4.2.

**necesidad.**  $\mathcal{F}_\tau$  es robustamente estable  $\forall \tau \in [0, \infty)$ . Entonces, aplicando el teorema 4.1.  $0 \notin V_\tau(\omega)$ ; ahora, de la forma que tiene el "value set" (lema 4.2) para la familia particular  $\mathcal{F}_\tau$ , se obtiene que  $\forall \tau \in [0, \infty)$  está formado por la unión de circunferencias que cambian de tamaño en función de  $|N(j\omega)|$  y están centradas en la curva de Mikhailov de  $D(j\omega)$ . Entonces la única forma de que  $0 \notin V_\tau(\omega)$  es que  $|N(j\omega)| < |D(j\omega)| \forall \omega \in [0, \infty)$ .

**suficiencia.** Del lema 4.2 se puede obtener que cuando  $|N(j\omega)| < |D(j\omega)| \forall \omega \in [0, \infty)$  el "value set" para la familia  $\mathcal{F}_\tau$  no contiene al cero; es decir,  $0 \notin V_\tau(\omega)$  independientemente del valor del retardo; entonces, aplicando el teorema 4.1 se obtiene que  $\mathcal{F}_\tau$  es robustamente estable  $\forall \tau \in [0, \infty)$ . ■

**NOTA 4.4** Este resultado coincide con el teorema de pequeñas ganancias donde la condición  $|N(j\omega)| < |D(j\omega)|$  es equivalente a tener una ganancia de lazo menor a uno, ver [24].

**COROLARIO 4.2** Considerar la familia de cuasi-polinomios  $\mathcal{F}_\tau$  y sea  $\mathcal{W}_c \equiv \{\omega \in [0, \infty) : |N(j\omega)| = |D(j\omega)|\}$ ; es decir,  $\mathcal{W}_c$  es el conjunto de valores de frecuencia en el cual, la magnitud del numerador es igual a la magnitud del denominador. Suponer que  $p(s, e^{-\tau s})$  es estable para  $\tau = 0$ . Entonces el retardo máximo  $\tau_{\max}$  (margen de robustez) permitido para que la familia  $\mathcal{F}_\tau$  sea estable, está dado por:

$$\tau_{\max} = \min\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$$

donde  $n$  representa el número de elementos del conjunto  $\mathcal{W}_c$  y los elementos  $\tau_i$  se obtienen como:

$$\tau_i = \frac{\pi + \angle N(j\omega) - \angle D(j\omega)}{\omega_i} \quad i = 1, 2, \dots, n; \forall \omega_i \in \mathcal{W}_c$$

**Prueba.** La prueba se obtiene aplicando el teorema 4.1 y el lema 4.4. Si para  $\tau = 0$  es estable; entonces, del teorema 4.1.  $\mathcal{F}_\tau$  es estable  $\forall \tau \in [0, \tau_{\max})$  si y sólo si,  $0 \notin V_\tau(\omega)$ . De la forma que tiene el "value set" para la familia  $\mathcal{F}_\tau$ , la única manera de que el "value set" pase por el cero del plano complejo, es que  $|N(j\omega)| = |D(j\omega)|$ ; por lo tanto es suficiente checar sólo los valores de frecuencia  $\omega_i \in \mathcal{W}_c$ . El arco de circunferencia máximo de tal forma que  $V_\tau(\omega)$  alcanza el cero es presentado en la figura 4.14.

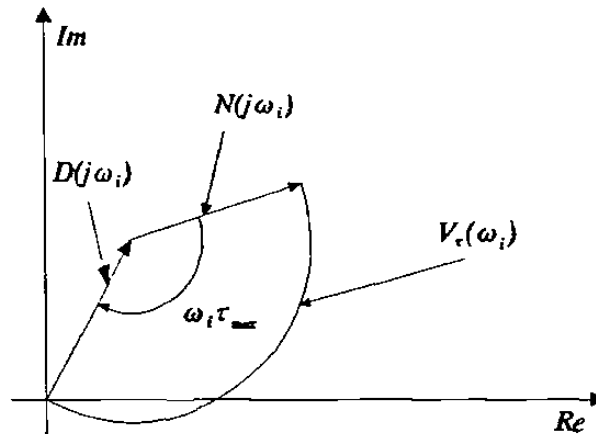


Figura 4.14 Value set que pasa por cero.

la fórmula del corolario anterior es obtenida calculando, de la figura anterior, el arco máximo permitido para que el "value set" no contenga el cero.

■

**NOTA 4.5** Este corolario coincide con el resultado presentado en [55]; sin embargo, éste se obtuvo en base a la definición del value set para la familia  $\mathcal{F}_\tau$ . Es importante mencionar que  $\tau_{\max}$  es el máximo retardo para garantizar estabilidad partiendo de un retardo igual a cero; lo anterior no implica necesariamente que  $p(s, e^{-\tau s})$  sea inestable para todo  $\tau > \tau_{\max}$ ; más aún, pudieran existir intervalos de retardo  $\tau \in [\tau^-, \tau^+]$  con  $\tau^- > \tau_{\max}$ ; tal que  $p(s, e^{-\tau s})$  sea robustamente estable.

## 4.4 Ejemplo Numérico

En esta sección se presentará la aplicación de los resultados obtenidos en este capítulo a un ejemplo numérico. Considerar la siguiente ecuación característica:

$$p(s, \mathbf{q}, \tau, e^{-\tau s}) = D(s) + N(s, \mathbf{q}) e^{-\tau s} \quad (13)$$

donde:

$$\begin{aligned} D(s) &= s^5 + 7s^4 + 19.4s^3 + 26.6s^2 + 18.0384s + 4.8384 \\ N(s, \mathbf{q}) &= s^3 + (5.8 + q_2)s^2 + (11.05 + q_1)s + (6.9 + q_0) \\ -1.8 &\leq q_i \leq 1.8 \quad 0 \leq \tau \leq 1 \end{aligned}$$

utilizando un programa condificado en MATLAB se obtiene el siguiente "value set" para un rango de frecuencias  $\omega \in [0, 2]$  con incrementos de 0.1.

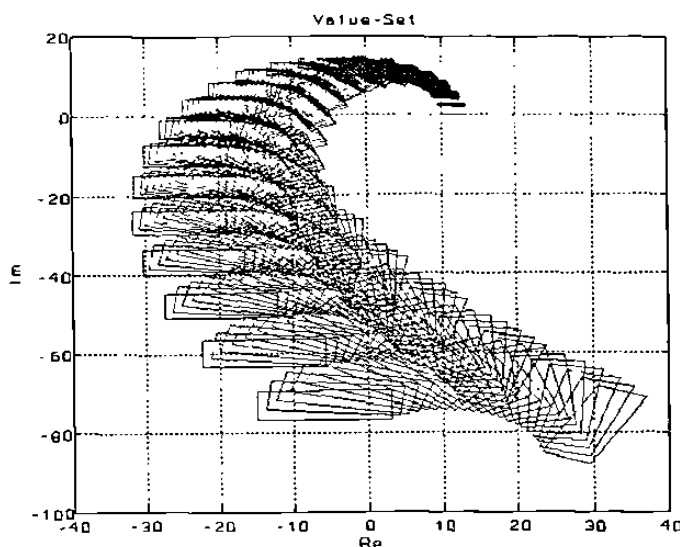


Figura 4.15 Value set para ejemplo 4.4.

aplicando el teorema 4.1 podemos concluir que la familia de cuasi-polinomios (13) es robustamente estable; ya que el "value set" excluye el cero.

## 4.5 Conclusiones

En este capítulo se presentó una caracterización del "value set" para una clase de sistemas dinámicos con retardo de tiempo, los cuales son representados por plantas intervalo con retardo en la entrada; esta caracterización permite elaborar un programa que realice la construcción del "value set" y lo presenta en forma gráfica. Con esta construcción y con la aplicación del principio de exclusión del cero, se puede obtener condiciones necesarias y suficientes de estabilidad robusta mediante inspección visual de la gráfica; el programa obtiene la gráfica del "value set" teniendo como datos los límites mínimos y máximos que definen la incertidumbre en cada uno de los coeficientes del cuasi-polinomio y en el retardo; este programa se tiene disponible en las librerías de MATLAB del autor de esta tesis.

Esta forma de analizar la propiedad de estabilidad robusta para esta clase de sistemas dinámicos es muy simple y una ventaja importante es que el problema es transformado en la verificación de una gráfica en el plano complejo; otra ventaja importante es que el cálculo realizado no requiere de hacer operaciones que puedan representar problemas de error numérico, ya que sólo se requiere realizar operaciones básicas con números complejos. En este capítulo se verificó la propiedad de estabilidad robusta en base a inspección visual de la gráfica del "value set" y para un caso particular se obtuvo una condición analítica para determinar el margen de robustez en el retardo de tiempo; sin embargo, es posible obtener condiciones



de estabilidad robusta para el caso general en base a puntos extremos, determinados por elementos que pertenecen a la misma familia de cuasi-polinomios; lo anterior será presentado a continuación como un posible trabajo futuro.

#### 4.5.1 Trabajos Futuros

La caracterización del "value set" puede ser utilizada para obtener condiciones suficientes de estabilidad robusta; esta caracterización es de utilidad para determinar una región que contenga el "value set" y determinar, en función de esta región, las condiciones de estabilidad robusta; la contención estricta de la región es lo que hace que las condiciones sean suficientes, la región mencionada anteriormente se presenta en la siguiente figura:

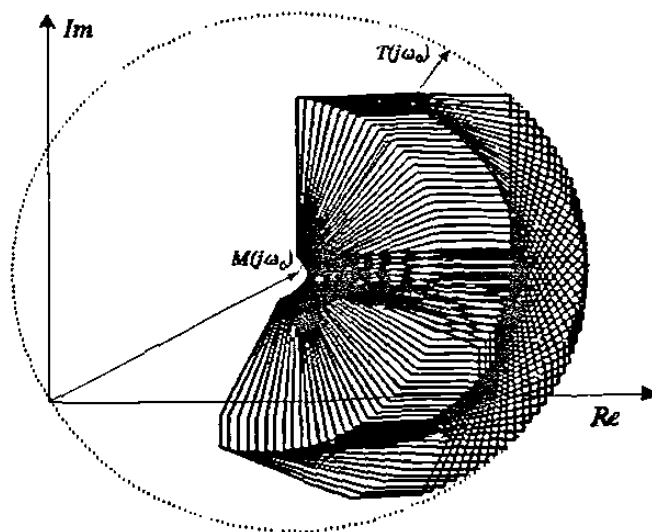


Figura 4.16 Región que contiene el value set  $\mathcal{P}_\tau$ .

donde los polinomios evaluados en  $j\omega_0$   $M(j\omega_0)$  y  $T(j\omega_0)$  se pueden obtener a partir de los polinomios de Kharitonov del numerador y denominador de la planta intervalo. De la figura anterior se puede observar que el círculo de radio  $|T(j\omega_0)|$  y centrado en  $M(j\omega_0)$ , contiene completamente el "value set" de  $\mathcal{P}_\tau$ ; por lo que una condición suficiente para garantizar estabilidad robusta es que esta región no contenga el cero del plano complejo. Con la sustitución del "value set" original por el círculo que se presenta en la figura anterior, se pueden aplicar los resultados obtenidos para el caso particular presentado en la sección 4.3.1; con lo cual se obtienen condiciones suficientes para la familia de cuasi-polinomios que tiene incertidumbre en los coeficientes y en el retardo; lo anterior con la gran ventaja de que sólo se tienen que verificar los polinomios  $M(s)$  y  $T(s)$ . La figura 4.16 muestra el círculo que contiene al "value set" para una frecuencia fija  $\omega_0$ ; sin embargo, de igual forma se puede obtener esta región para cualquier frecuencia  $\omega \in [0, \infty)$ . Es importante notar que este método que se propone, aunque son condiciones suficientes, es menos restrictivo que el problema de estabilidad

independiente del retardo, ver [26].

# CAPITULO 5

## Estabilidad Robusta de Sistemas Diferencia Diferencial

### 5.1 Introducción

En este capítulo se analizará una clase de sistemas dinámicos retardados más general que los tratados en el capítulo anterior, estos sistemas dinámicos son denominados *diferencia-diferencial*. Estos sistemas dinámicos tienen la siguiente descripción:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_0x(t) + A_1x(t - \tau) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{1}$$

donde  $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ;  $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ;  $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  y  $\tau \in \mathbb{R}_+$ ; como se puede observar, la definición de los sistemas *diferencia-diferencial* es realizada en el dominio del tiempo, tal como se muestra en la ecuación (1); sin embargo, el interés en esta tesis es trabajar con representaciones en el dominio de la frecuencia, por lo que será necesario su transformación. La propiedad de estabilidad de (1), que es el interés principal en este trabajo, está determinada en función de la solución de la siguiente ecuación característica:

$$\det(sI - A_0 - A_1e^{-\tau s}) = 0\tag{2}$$

desarrollando la ecuación  $\det(sI - A_0 - A_1e^{-\tau s})$  se obtiene un cuasi-polinomio que tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\det(sI - A_0 - A_1e^{-\tau s}) &= p(s, e^{-\tau s}) \\ p(s, e^{-\tau s}) &= p_0(s) + p_1(s)e^{-\tau s} + p_2(s)e^{-2\tau s} + \dots + p_n(s)e^{-n\tau s} \\ &= \sum_{k=0}^n p_k(s)e^{-k\tau s}\end{aligned}\tag{3}$$

$$= \sum_{k=0}^n \left( \sum_{i=0}^n a_{k,i} s^i \right) e^{-k\tau s}$$

en el cual  $p_k(s)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ) representan polinomios fijos que satisfacen la condición:

$$\deg[p_0(s)] - n > \deg[p_k(s)] \quad \forall k = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

la relación que existe entre la propiedad de estabilidad del sistema dinámico *diferencia-diferencial* y la ecuación característica (2) es la siguiente: el sistema (1) es estable si y sólo si, se satisface la siguiente condición:

$$\det(sI - A_0 - A_1 e^{-\tau s}) \neq 0 \quad \forall s \in \mathbb{C}_+ \quad (5)$$

donde  $\mathbb{C}_+$  indica el semiplano derecho cerrado del plano complejo: es decir, incluye el eje imaginario. A los cuasi-polinomios que satisfacen la condición anterior los llamaremos cuasi-polinomios estables: mayores detalles sobre esta condición se pueden encontrar en [25]. Considerando la forma que tiene la ecuación característica (2), la condición (5) se puede expresar como:

$$p(s, e^{-\tau s}) \neq 0 \quad \forall s \in \mathbb{C}_+ \quad (6)$$

esta condición establece que el sistema dinámico *diferencia-diferencial* es estable si y sólo si, las raíces del cuasi-polinomio (3) están todas contenidas en el semiplano izquierdo abierto del plano complejo. Es claro que existe una relación directa entre un cuasi-polinomio estable y el sistema dinámico (1) estable; por lo que se trabajará con cuasi-polinomios para obtener propiedades de estabilidad de sistemas dinámicos como el definido en (1).

### 5.1.1 Antecedentes sobre el Problema de Estabilidad de Sistemas

#### Diferencia Diferencial

Los sistemas dinámicos *diferencia-diferencial* han tomado gran importancia en los últimos años: por lo que una gran cantidad de artículos relacionados con estos sistemas han sido publicados. Existen diferentes formas de plantear el problema de estabilidad para un sistema de este tipo; entre las diferentes formas se encuentran [39], que presentan un resultado para calcular el margen del retardo en base a la medida  $\mu$  de una matriz determinada, que en este caso está formada por las matrices  $A_0$  y  $A_1$  del sistema (1); este resultado hace uso de las propiedades de la medida  $\mu$  de una matriz para garantizar que las raíces de la ecuación característica (2) estén todas contenidas en el semiplano izquierdo del plano complejo; en [54] un análisis similar es presentado. Por otra parte, el problema de estabilización también ha sido abordado con gran interés: en [37] se propone una retroalimentación de estado para asignar una cantidad finita de polos de un sistema dinámico *diferencia-diferencial*; [40] presenta condiciones para que una ley de control de tipo retroalimentación de estado estática, logre estabilizar un sistema como el representado por (1) con perturbación variante en el tiempo y considerando saturación en la ley de control; en [32] usan la técnica de  $H_\infty$  para garantizar estabilidad de un sistema con retardo en la entrada, cuando se le aplica una retroalimentación

de estado. Existen muchos otros artículos que analizan este tipo de sistemas en base al método de Lyapunov [35], como en [51] donde se usa el método de Razumikhin para garantizar estabilidad. Como se puede observar, los sistemas antes mencionados han provocado gran interés; la razón principal es que existen muchas aplicaciones que pueden representarse con esta estructura y por lo tanto su análisis es de gran importancia. En la mayoría de los resultados anteriores, aunque tratan casos muy generales, las condiciones que se obtienen son arbitrariamente conservadoras, ya que son condiciones suficientes; es por eso el gran interés de este trabajo en obtener métodos que simplifiquen el análisis de estabilidad y puedan reducir, en forma simultánea, el conservatismo de los métodos anteriores. Realizando el análisis en el dominio de la frecuencia, es posible obtener resultados menos conservadores; aunque se consideran sistemas menos generales. Existen dos artículos básicos que tratan el problema de estabilidad robusta de sistemas *diferencia-diferencial* en el dominio de la frecuencia: [5] y [20]; estos artículos son de gran importancia en la obtención del resultado principal presentado en este capítulo.

### 5.1.2 Planteamiento del problema de estabilidad robusta

El objetivo de este capítulo es analizar la propiedad de estabilidad de sistemas dinámicos de la forma (1), cuando se considera que algunos parámetros presentan incertidumbre. Como se mencionó en el capítulo 2, existen diferentes formas de considerar la incertidumbre paramétrica en un sistema dinámico; en este capítulo se considerará que el sistema dinámico tiene incertidumbre de tipo afín; es decir, que los parámetros con incertidumbre están relacionados en forma afín con los coeficientes de la ecuación característica. La ecuación característica (3) con incertidumbre afín puede ser representada de la siguiente forma:

$$p(s, \mathbf{q}, e^{-\tau s}) = p_0(s, e^{-\tau s}) + \sum_{i=1}^l q_i p_i(s, e^{-\tau s}) \quad q_i^- \leq q_i \leq q_i^+ \quad (7)$$

debido a la forma que tiene la incertidumbre, este conjunto de cuasi-polinomios también puede ser expresado de la siguiente manera:

$$p(s, \mathbf{r}, e^{-\tau s}) = \sum_{i=1}^m r_i p(s, \mathbf{q}^i, e^{-\tau s}) \quad r_i \geq 0 \quad \sum_{i=1}^m r_i = 1 \quad (8)$$

es decir; se puede expresar como una combinación convexa de  $m$  puntos extremo  $p(s, \mathbf{q}^i, e^{-\tau s})$ ; en el cual  $\mathbf{q}^i$  es un vector formado con las combinaciones entre los valores extremo de la incertidumbre  $q_i^-$  y  $q_i^+$ . El conjunto de cuasi-polinomios definido por (8) representa la ecuación característica de la función de transferencia de un sistema dinámico representado mediante el diagrama de bloques de la figura (5.1), cuando éste presenta incertidumbre de tipo afín en una sola de las funciones racionales  $G_i(s)$  ó  $H_i(s)$ ; esta consideración es equivalente a tener incertidumbre afín en una fila ó columna de las matrices  $A_0$  y  $A_1$ . Una consideración importante en el problema de estabilidad robusta que aquí se tratará, es que también se incluye incertidumbre en el retardo  $\tau$  y ésta será considerada de tipo intervalo. Entonces, el conjunto de cuasi-polinomios de (8) considerando la incertidumbre intervalo en el retardo, forma una familia que será definida como:

$$\mathcal{H}_\tau \equiv \{p(s, \mathbf{r}, e^{-\tau s}) : \tau \in [0, \infty]\} \quad (9)$$

Entonces, el objetivo en este capítulo será obtener condiciones de estabilidad robusta para la familia  $\mathcal{H}_\tau$ . Es importante mencionar que la familia de cuasi-polinomios representada por  $\mathcal{H}_\tau$  es un caso particular del tipo de familia considerado en [5] y [20] con la diferencia que ahora se considera el retardo  $\tau$  con incertidumbre.

En el resultado principal de [20] se presentan condiciones necesarias y suficientes que garantizan estabilidad robusta de la familia  $\mathcal{H}_\tau$ , cuando el retardo  $\tau$  es un valor fijo. Este resultado esta en función de las aristas del cuasi-polinomio que se definen de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} E_{k,i}[p(s, \mathbf{r}, e^{-\tau s})] &= \lambda p(s, \mathbf{q}^k, e^{-\tau s}) + (1 - \lambda)p(s, \mathbf{q}^{i+1}, e^{-\tau s}) \\ \lambda &\in [0, 1] \quad k = 1, \dots, l \quad i = 1, \dots, l - 1 \end{aligned} \quad (10)$$

el resultado principal del artículo anterior es el siguiente.

**TEOREMA 5.1** *La familia de cuasi-polinomios  $\mathcal{H}_\tau$  para un  $\tau$  fijo es robustamente estable si y sólo si, el conjunto de aristas  $E_{k,i}[p(s, \mathbf{r}, e^{-\tau s})]$  es estable.*

En realidad el resultado original anterior es válido para regiones de estabilidad que satisfacen ciertas propiedades, así como para un caso más general de cuasi-polinomios; sin embargo, en este capítulo sólo se considerarán familias de cuasi-polinomios representados por (9). Del teorema anterior se puede concluir que el problema de estabilidad robusta esta en función de las aristas representadas por (10) y por lo tanto nuestro esfuerzo será enfocado en garantizar estabilidad robusta del conjunto de cuasi-polinomios definidos por las aristas. Este conjunto define una nueva familia de cuasi-polinomios que será representado por:

$$\mathcal{P}_\tau \equiv \{p(s, \lambda, e^{-\tau s}) : \lambda \in [0, 1]; \tau \in [0, \infty]\} \quad (11)$$

donde:

$$p(s, \lambda, e^{-\tau s}) = \lambda p_0(s, e^{-\tau s}) + (1 - \lambda)p_1(s, e^{-\tau s})$$

Entonces, a partir de la siguiente sección nuestro interés principal será el obtener un procedimiento para verificar estabilidad de la familia de cuasi-polinomios (11). Este procedimiento está basado en el concepto de Guardian Maps presentado en [49] que será introducido en la siguiente sección.

## 5.2 Introducción a Guardian Maps

Con el fin de introducir algunas definiciones topológicas que serán necesarias para definir el Guardian Map es necesario asociar un conjunto de polinomios a un espacio vectorial.

Lo anterior se puede realizar de la siguiente forma: un polinomio se define completamente en función de sus coeficientes; entonces, un polinomio  $p(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i$ , se puede asociar a un vector  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$  formado por los coeficientes del polinomio  $p(s)$  como sigue:  $\mathbf{a} = [a_0, a_1, \dots, a_n]^T$ , donde  $a_n \neq 0$ ; posteriormente será denotado como  $\mathbf{a}$  a todo vector asociado a un polinomio  $p(s)$ . Por otra parte, se denotará como  $\mathcal{P}^n$  al conjunto de polinomios de grado  $n$  y éste se puede asociar a un espacio vectorial  $\mathbb{X}$  formado por el conjunto de vectores asociados a  $\mathcal{P}^n$ . Además, se puede definir una norma  $\|\cdot\|$  sobre  $\mathbb{R}^{n+1}$  para definir un espacio vectorial normado. Entonces, con esta relación obtenida se pueden introducir las siguientes definiciones topológicas asociadas a conjuntos de polinomios.

**DEFINICION 5.1** Dado un polinomio  $p \in \mathcal{P}^n$  y un  $\varepsilon > 0$ : entonces, una esfera abierta de polinomios centrada en el polinomio  $p(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i$  se define como:

$$S_a(p, \varepsilon) \equiv \{p' = \sum_{i=0}^n a'_i s^i : \|\mathbf{a}' - \mathbf{a}\| < \varepsilon\}$$

**DEFINICION 5.2** Sea  $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}^n$ : entonces, un polinomio  $p^* \in \mathcal{P}^n$  se dice que es un polinomio interior de  $\mathcal{P}$ , si existe un  $\varepsilon > 0$  tal que:

$$S_a(p^*, \varepsilon) \subset \mathcal{P}$$

es decir, el conjunto de todos los polinomios que están a una distancia menor que  $\varepsilon$ , están totalmente contenidos en  $\mathcal{P}$ .

El conjunto de polinomios interiores de  $\mathcal{P}$  será denotado como  $\overset{\circ}{\mathcal{P}}$ .

**DEFINICION 5.3** Un conjunto de polinomios  $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}^n$  se dice que es abierto si  $\mathcal{P} = \overset{\circ}{\mathcal{P}}$ .

Usando la propiedad de continuidad de las raíces de un polinomio con respecto a sus coeficientes, se puede asociar un conjunto abierto de polinomios con un subconjunto abierto de puntos en el plano complejo, en el cual están contenidas todas las raíces del conjunto de polinomios; por lo tanto el conjunto de polinomios estables es un conjunto abierto.

**DEFINICION 5.4** Sea  $\mathcal{P}$  un conjunto de polinomios de grado  $n$ . Entonces, un polinomio  $p^* \in \mathcal{P}^n$  se dice que es un polinomio cerradura de  $\mathcal{P}$ , si para todo  $\varepsilon > 0$ , existe un polinomio  $p \in \mathcal{P}$  tal que:

$$\|\mathbf{a}^* - \mathbf{a}\| < \varepsilon$$

El conjunto de todos los polinomios cerradura será denotado como  $\mathcal{P} = \bar{\mathcal{P}}$ .

**DEFINICION 5.5** Un conjunto de polinomios  $\mathcal{P}$  es cerrado si  $\mathcal{P} = \bar{\mathcal{P}}$ .

Usando nuevamente la propiedad de continuidad, se puede verificar que el conjunto de polinomios cerradura del conjunto de polinomios estables, es el conjunto de polinomios que tienen sus raíces en el semiplano izquierdo cerrado del plano complejo.

**DEFINICION 5.6** Sea  $\mathcal{P}$  el conjunto de polinomios de grado  $n$  y sea  $p^*(s)$  un polinomio de grado  $n$  (no necesariamente perteneciente a  $\mathcal{P}$ ), el cual tiene asociado un vector  $\mathbf{a}^*$ . Entonces, el conjunto de polinomios frontera de  $\mathcal{P}$  se define de la siguiente forma:

$$\partial\mathcal{P} \equiv \{p^* \in \mathcal{P}^n : S_a(p^*, \varepsilon) \cap \mathcal{P} \neq \emptyset \text{ y } S_a(p^*, \varepsilon) \cap \mathcal{P}^c \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon > 0\}$$

donde  $\partial\mathcal{P}$  denota el conjunto de polinomios frontera y  $\mathcal{P}^c$  indica el complemento de  $\mathcal{P}$ .

Los polinomios frontera del conjunto de polinomios estables está determinado por el conjunto de polinomios que tienen al menos una raíz en el eje  $j\omega$ . Como se puede observar, asociando los polinomios a un espacio vectorial normado a través de los vectores  $\mathbf{a}$  definidos en función de los coeficientes del polinomio, se pueden definir algunos conceptos topológicos.

### 5.2.1 Definición del Guardian Map

Con las definiciones anteriores es posible introducir la definición del Guardian Map, que será utilizado para obtener condiciones de estabilidad robusta, cuando se considera un tipo especial de incertidumbre paramétrica, ver [49].

**DEFINICION 5.7** Sea  $\nu : \mathcal{P}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una transformación que mapea el conjunto de polinomios de grado  $n$  en los reales. Entonces,  $\nu$  se dice que es un Guardian Map del conjunto de polinomios  $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}^n$ , si  $\nu(p) \neq 0 \quad \forall p(s) \in \mathcal{P}$  y  $\nu(p) = 0 \quad \forall p(s) \in \partial\mathcal{P}$ .

Esta definición es de gran importancia; ya que con la propiedad de continuidad de las raíces de un polinomio con respecto a sus coeficientes, el problema de estabilidad robusta puede ser expresado en función de algún Guardian Map definido. Una serie de Guardian Maps fueron obtenidos para diferentes conjuntos de matrices y polinomios; entre los cuales se encuentra el siguiente resultado.

**LEMA 5.1** Sea el conjunto de polinomios estables con coeficientes reales que tienen la siguiente forma:

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

entonces,  $\nu : p \rightarrow \det[H(p)]$  es un Guardian Map del conjunto de polinomios de la forma  $p(s)$ . Donde  $H(p)$  es la matriz de Hurwitz asociada a un polinomio  $p(s)$ .

La demostración de este resultado se obtiene en forma directa aplicando la fórmula de Orlando, ver [21]:

$$\det[H(p)] = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n^{n-1} a_0 \prod_{1 \leq i < k \leq n} (x_i + x_k)$$

donde  $x_i$  son las raíces de  $p(s)$ . Las definiciones y conceptos anteriores serán aplicados para generar un método que determine una forma general de analizar la propiedad de estabilidad robusta cuando se considera un tipo de incertidumbre paramétrica.



### 5.2.2 Aplicación del Guardian Map en Estabilidad Robusta

El concepto de Guardian Maps es una generalización y unificación de una serie de resultados que fueron presentados, principalmente en [19]; donde se obtiene un método para verificar estabilidad robusta de combinaciones convexas de polinomios en base a una sola prueba que está en función del cálculo de los valores propios de una matriz especial. En esta sección será presentada la aplicación del Guardian Map al problema de estabilidad robusta de familias de polinomios definidas por la combinación convexa entre dos polinomios. El teorema principal que relaciona este concepto con estabilidad robusta se apoya en una serie de definiciones preliminares que serán introducidas a continuación, ver [49].

**DEFINICION 5.8** Sea  $\mathcal{P}$  un conjunto de polinomios de grado  $n$  y sea  $\nu$  un Guardian Map de  $\mathcal{P}$ . Entonces,  $\nu$  admite una representación determinante polinomial si existe una función  $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^{k \times k}$  tal que cada uno de los elementos de la matriz  $f(p)$  tienen forma polinómica y además:

$$\nu(p) = \det f(p)$$

es importante mencionar que  $k \neq n$ . La definición anterior se puede verificar en forma más clara a través del siguiente ejemplo:

**EJEMPLO 5.1** Considerar el conjunto de polinomios  $\mathcal{P}$  definidos de la siguiente forma:

$$\mathcal{P} \equiv \{p(s, \lambda) = \sum_{i=1}^m \lambda^i p_i(s) : \lambda \in [0, 1]\}$$

donde  $p_0(s)$  y  $p_1(s)$  son polinomios fijos; entonces,  $\nu(p) = \det H[p(s, \lambda)]$  es un Guardian Map que admite una representación determinante polinomial, ya que cada uno de los elementos de la matriz  $H[p(s, \lambda)]$  son de tipo polinómico. En este caso  $f(p) = H[p(s, \lambda)]$ ; donde  $H[p(s, \lambda)]$  es la matriz de Hurwitz de  $p(s, \lambda)$ .

**DEFINICION 5.9** Sea  $\mathcal{P}$  un conjunto de polinomios definido de la siguiente forma:

$$\mathcal{P} \equiv \{p(s, \lambda) = \sum_{i=1}^m \lambda^i p_i(s) : \lambda \in [0, 1]\}$$

y sea  $f(p)$  una función matricial cuyos elementos tienen forma polinómica. Entonces, excluyendo el mapeo trivial  $f(p) = 0$ , el conjunto único de matrices  $F_0, F_1, \dots, F_N$  tal que  $F_N \neq 0$  y

$$f(p(s, \lambda)) = \sum_{i=1}^N \lambda^i F_i$$

es llamado representación matricial de  $f(p(s, \lambda))$ .

Un caso particular de la definición anterior es presentado en la siguiente definición.

**EJEMPLO 5.2** Sea  $\mathcal{P}$  una familia definida de la siguiente forma:

$$\mathcal{P} \equiv \{p(s, \lambda) = \lambda p_0(s) + (1 - \lambda)p_1(s) : \lambda \in [0, 1]\}$$

como se puede ver claramente la familia de polinomios anterior es una combinación convexa de los polinomios fijos  $p_0(s)$  y  $p_1(s)$ ; además, se tomará en cuenta la condición de que  $\deg[p_0(s)] > \deg[p_1(s)]$ . Ahora se mostrará que la matriz de Hurwitz de  $p(s, \lambda)$  es una representación matricial de  $\mathcal{P}$ .

$$\begin{aligned} H[p(s, \lambda)] &= H[\lambda p_0(s) + (1 - \lambda)p_1(s)] \\ &= \lambda H[p_0(s)] + (1 - \lambda)H[p_1(s)] \end{aligned}$$

donde  $H[p_1(s)]$  es aumentada con ceros para completar la dimensión de  $H[p_0(s)]$ . Ahora, la expresión anterior puede ser transformada en la siguiente:

$$\begin{aligned} H[p(s, \lambda)] &= H[p_1(s)] + \lambda\{H[p_0(s)] - H[p_1(s)]\} \\ &= F_0 + \lambda F_1 \\ &= \sum_{i=0}^1 \lambda^i F_i \end{aligned}$$

donde  $F_0 = H[p_1(s)]$  y  $F_1 = H[p_0(s)] - H[p_1(s)]$ ; de la última expresión se puede observar que  $H[p(s, \lambda)]$  es una representación matricial de  $\mathcal{P}$ .

Estas definiciones son de gran importancia en la presentación del resultado principal que relaciona Guardian Maps con estabilidad robusta; ya que éste es expresado en función de la representación matricial y la representación determinante polinomial, ver [49].

**TEOREMA 5.2** Sea  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$  abierto y sea  $\mathcal{P} \equiv \{p(s, \lambda) : \lambda \in [0, 1]\}$  una familia de polinomios de grado  $n$  descrita por la siguiente ecuación:

$$p(s, \lambda) = \sum_{i=0}^1 \lambda^i p_i(s)$$

Además, suponer que el conjunto de polinomios que tienen todas las raíces en  $\mathcal{D}$  admiten un Guardian Map con una representación determinante polinomial  $\nu(p) = \det f(p)$  con matrices  $F_0, F_1, \dots, F_N$  que definen una representación matricial de  $f(p(s, \lambda))$ . Entonces, para  $N = 1$ , la familia  $\mathcal{P}$  es robustamente  $\mathcal{D}$ -estable si y sólo si,  $p_0(s)$  es  $\mathcal{D}$ -estable y la matriz

$$M(\mathcal{P}, \mathcal{D}) = -F_0^{-1}F_1$$

no tiene ningún valor propio puramente real en el intervalo  $[1, +\infty)$ . Para  $N > 1$  la misma condición se mantiene con la matriz formada como sigue:

$$M(\mathcal{P}, \mathcal{D}) = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & I \\ -F_0^{-1}F_N & -F_0^{-1}F_{N-1} & -F_0^{-1}F_{N-2} & -F_0^{-1}F_{N-3} & \dots & -F_0^{-1}F_1 \end{bmatrix}$$

como se puede observar, el teorema anterior resuelve, para  $N = 1$ , el problema de estabilidad robusta de una combinación convexa de polinomios. En la siguiente sección se presentarán algunos resultados para las familias de cuasi-polinomios definidas en (11); estos resultados son basados en la técnica que se presentó en esta sección.

## 5.3 Estabilidad Robusta de Sistemas Diferencia Diferencial

En esta sección será presentado el resultado principal de este capítulo, que consiste en obtener condiciones suficientes de estabilidad robusta para una familia de cuasi-polinomios con incertidumbre en los coeficientes y en el retardo. Estos resultados son apoyados en la siguiente definición y el teorema que se presentará después de dicha definición.

**DEFINICION 5.10** *Un polinomio  $p(s, T)$  asociado a un cuasi-polinomio  $p(s, e^{-\tau s})$  será definido de la siguiente forma:*

$$p(s, T) = \sum_{i=0}^n p_i(s) (1 - Ts)^{2i} (1 + Ts)^{2n-2i}$$

$$p(s, e^{-\tau s}) = \sum_{i=0}^n p_i(s) e^{-i\tau s}$$

las raíces de este polinomio asociado tienen una relación importante con las raíces del cuasi-polinomio  $p(s, e^{-\tau s})$ , esta relación es presentada en el siguiente teorema publicado en [52], [53].

**TEOREMA 5.3** *Suponer que  $s^0 = j\omega^0$  para algún valor de  $\omega^0 \geq 0$ , entonces  $s^0 = j\omega^0$  es una raíz de la ecuación característica  $p(s, e^{-\tau s})$  para algún valor de  $\tau \geq 0$  si y sólo si,  $s^0 = j\omega^0$  es una raíz de  $p(s, T)$  para algún valor de  $T \geq 0$ .*

La prueba de este teorema esta basada en la siguiente transformación:

$$e^{-\tau s} = \left[ \frac{(1 - Ts)}{(1 + Ts)} \right]^2$$

para valores de  $s = j\omega$  esta transformación queda expresada de la siguiente forma:

$$e^{-j\omega\tau} = \left[ \frac{(1 - jT\omega)}{(1 + jT\omega)} \right]^2$$

con esta transformación se puede obtener la relación entre  $\tau$  y  $T$ , la cual es válida en todo el eje imaginario  $j\omega$ .

$$\tau\omega = 4 \tan^{-1}(T\omega) + 2n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

esta relación fue obtenida igualando el ángulo de fase del retardo  $e^{-\tau s}$  con la transformación. El teorema anterior nos permite presentar el siguiente resultado que está relacionado con estabilidad de sistemas con retardo.

**COROLARIO 5.1** *Sea  $p(s, T)$  un polinomio asociado a  $p(s, e^{-\tau s})$  y considere  $H[p(s, T)]$  como la matriz de Hurwitz en función de  $T$  del polinomio asociado  $p(s, T)$ ; si  $p(s, e^{-\tau s})$  es*

estable para  $\tau = 0$ , entonces  $p(s, e^{-\tau s})$  es estable para todo  $\tau \in [0, \infty)$  si y sólo si:

$$\det \{H[p(s, T)] \neq 0\} \quad \forall T > 0$$

**Prueba.** Primeramente se hará notar que  $T = 0$  corresponde a  $\tau = 0$ , esto se puede verificar de la ecuación (12) por lo que no es necesario verificar la condición para  $T = 0$ . Ahora, el teorema anterior muestra que  $p(s, T)$  tiene las mismas raíces sobre el eje  $j\omega$  que  $p(s, e^{-\tau s})$  para algún valor de  $T > 0$ ; como las raíces de  $p(s, e^{-\tau s})$  representan una función continua de  $\tau$  y por hipótesis  $p(s, e^{-\tau s})$  es estable para  $\tau = 0$ , entonces si existe un valor  $\tau^0 > 0$  tal que  $p(s, e^{-\tau s})$  es inestable, deberá existir también un valor  $\tau = \tau^* < \tau^0$  tal que  $p(s, e^{-\tau s})$  tiene al menos un par de raíces sobre el eje  $j\omega$  y por lo tanto también existirá un valor  $T^* > 0$  tal que  $p(s, T^*)$  tiene raíces sobre el eje  $j\omega$ . El  $\det\{H[p(s, T)]\}$  es un Guardian Map de polinomios de dos variables que proporciona una forma de verificar que  $p(s, T)$  tenga raíces en  $j\omega$ . ■

Este resultado se puede extender al caso en que se tiene incertidumbre en los coeficientes del cuasi-polinomio; se asumirá que el tipo de incertidumbre genera una familia de cuasi-polinomios  $\mathcal{P}_\tau$ , la cual fue definida anteriormente en (11). El siguiente resultado hace la consideración de que el polinomio  $p(s, \lambda, T)$  asociado a  $p(s, \lambda, e^{-\tau s})$  se define como:

$$p(s, \lambda, T) = \lambda \tilde{p}_0(s, T) + (1 - \lambda) \tilde{p}_1(s, T) \quad (13)$$

y además:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_0(s, T) &= \sum_{i=0}^n p_i(s) (1 - Ts)^{2i} (1 + Ts)^{2n-2i} \\ \tilde{p}_1(s, T) &= \sum_{i=0}^m l_i(s) (1 - Ts)^{2i} (1 + Ts)^{2m-2i} \end{aligned}$$

estos últimos dos polinomios están asociados a  $p_0(s, e^{-\tau s}) = \sum_{i=1}^n p_i(s) e^{-i\tau s}$  y  $p_1(s, e^{-\tau s}) = \sum_{i=1}^m l_i(s) e^{-i\tau s}$  respectivamente; ahora, los polinomios considerados en (13) son definidos como sigue:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_0(s, T) &= \bar{p}_0(s, T) (1 + Ts)^{2(r-n)} \\ \tilde{p}_1(s, T) &= \bar{p}_1(s, T) (1 + Ts)^{2(r-m)} \end{aligned}$$

donde  $r = \max(m, n)$ ; nótese que la incertidumbre en los coeficientes aparece en el término  $\lambda$ . Con estas definiciones es posible postular el siguiente resultado.

**TEOREMA 5.4** Considerar la familia de cuasi-polinomios  $\mathcal{P}_\tau$ ; es decir una combinación convexa de cuasi-polinomios con retardo variable. Suponer también que  $p_0(s, e^{-\tau s})$  y  $p_1(s, e^{-\tau s})$

son estables para todo valor de retardo  $\tau \in [0, \infty)$ . Entonces, la familia de cuasi-polinomios  $\mathcal{P}_\tau$  es robustamente estable para todo valor de  $\tau \in [0, \infty)$  si y sólo si:

$$\sigma \left\{ H^{-1}[\tilde{p}_0(s, T)]H[\tilde{p}_1(s, T)] \right\} \notin (-\infty, 0] \quad \forall T \in (0, \infty)$$

**Prueba.** Primero, es necesario recordar que la familia de cuasi-polinomios  $\mathcal{P}_\tau$  fue definida como:

$$p(s, \lambda, e^{-\tau s}) = \lambda p_0(s, e^{-\tau s}) + (1 - \lambda)p_1(s, e^{-\tau s})$$

ahora, considerando la suposición del teorema;  $p_0(s, e^{-\tau s})$  y  $p_1(s, e^{-\tau s})$  estables para todo valor de  $\tau \in [0, \infty)$ ; entonces, la estabilidad de la familia de cuasi-polinomios  $\mathcal{P}_\tau$  es garantizada si  $p(s, \lambda, e^{-\tau s})$  no tiene raíces sobre el eje imaginario para algún valor de  $\lambda \in [0, 1]$  y  $\tau \in [0, \infty)$ . Aplicando la propiedad presentada en el teorema 5.3, se obtiene que  $p(s, \lambda, e^{-\tau s})$  tiene raíces sobre el eje imaginario para algún valor de  $\lambda \in [0, 1]$  y  $\tau \in [0, \infty)$  si y sólo si, la siguiente ecuación también tiene sus raíces sobre el eje imaginario:

$$g(s, \lambda, T) = \lambda p_0 \left( s, \lambda, \left( \frac{1 - Ts}{1 + Ts} \right)^2 \right) + (1 - \lambda) p_1 \left( s, \lambda, \left( \frac{1 - Ts}{1 + Ts} \right)^2 \right)$$

la ecuación anterior es equivalente a la siguiente:

$$g(s, \lambda, T) = \lambda \sum_{i=0}^n p_i(s) \left( \frac{1 - Ts}{1 + Ts} \right)^{2i} + (1 - \lambda) \sum_{i=0}^m q_i(s) \left( \frac{1 - Ts}{1 + Ts} \right)^{2i}$$

las raíces de la  $g(s, \lambda, T)$  son iguales que las raíces  $g(s, \lambda, T)(1 + Ts)^{2r}$  donde  $r = \max(n, m)$ ; esta operación produce un nuevo polinomio que denotaremos como  $h(s, \lambda, T)$  y tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} h(s, \lambda, T) &= \lambda(1 + Ts)^{2r-2n} \sum_{i=0}^n p_i(s)(1 - Ts)^{2i}(1 + Ts)^{2n-2i} \\ &\quad + (1 - \lambda)(1 + Ts)^{2r-2m} \sum_{i=0}^m q_i(s)(1 - Ts)^{2i}(1 + Ts)^{2m-2i} \\ h(s, \lambda, T) &= \lambda(1 + Ts)^{2r-2n} \bar{p}_0(s, T) + (1 - \lambda)(1 + Ts)^{2r-2m} \bar{p}_1(s, T) \\ h(s, \lambda, T) &= \lambda \tilde{p}_0(s, T) + (1 - \lambda) \tilde{p}_1(s, T) \\ h(s, \lambda, T) &= p(s, \lambda, T) \end{aligned}$$

por lo tanto  $p(s, \lambda, T)$  tiene las mismas raíces sobre el eje imaginario que  $p(s, \lambda, e^{-\tau s})$ ; para algún valor de  $T \in (0, \infty)$  y  $\lambda \in [0, 1]$ . Ahora, siguiendo el mismo procedimiento del corolario anterior,  $p(s, \lambda, T)$  tiene raíces sobre el eje imaginario si y sólo si:

$$\det\{H[p(s, \lambda, T)]\} \neq 0 \quad \forall T > 0 \text{ y } \lambda \in [0, 1]$$

sustituyendo términos en la ecuación anterior:

$$\det\{H[p(s, \lambda, T)]\} = \det\{H[\lambda\tilde{p}_0(s, T) + (1 - \lambda)\tilde{p}_1(s, T)]\}$$

donde, sin pérdida de generalidad se supondrá que  $\deg[\tilde{p}_0(s, T)] \geq \deg[\tilde{p}_1(s, T)]$  y que la matriz de Hurwitz es completada con ceros en caso requerido para igualar la dimensión de las matrices. Con las consideraciones anteriores la ecuación anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \det\{H[p(s, \lambda, T)]\} &= \det\{\lambda H[\tilde{p}_0(s, T)] + (1 - \lambda)H[\tilde{p}_1(s, T)]\} \\ &= \det\{(1 - \lambda)H[\tilde{p}_0(s, T)]\} \det\left\{\frac{\lambda}{1 - \lambda}I + H^{-1}[\tilde{p}_0(s, T)]H[\tilde{p}_1(s, T)]\right\} \end{aligned}$$

nótese que el  $\det\{(1 - \lambda)H[\tilde{p}_0(s, T)]\} \neq 0$  por suposición del teorema y entonces:

$$\det\{H[p(s, \lambda, T)]\} \neq 0 \Leftrightarrow \det\left\{\frac{\lambda}{1 - \lambda}I + H^{-1}[\tilde{p}_0(s, T)]H[\tilde{p}_1(s, T)]\right\}$$

para valores de  $\lambda = 0$  y  $\lambda = 1$  la prueba es trivial por la suposición realizada en el teorema, por lo que sólo falta verificar para valores  $\lambda \in (0, 1)$ ; entonces:

$$\det\{H[p(s, \lambda, T)]\} \neq 0 \Leftrightarrow \sigma\{H^{-1}[\tilde{p}_0(s, T)]H[\tilde{p}_1(s, T)]\} \notin (-\infty, 0] \forall T > 0$$

■

cuando se obtienen propiedades de estabilidad haciendo la consideración anterior, se dice que el sistema es estable independiente del retardo, ver [14], [27], [28], [50].

**NOTA 5.1** *Los resultados presentados en esta sección son semejantes al presentado en función de un Guardian Map con representación matricial; de hecho la condición presentada en estos resultados es, precisamente, la condición de estabilidad robusta presentada en el teorema 5.2, con la diferencia que ahora,  $F_i$  son matrices en función de una variable  $T$ ; lo cual incrementa el grado de complejidad para su cálculo.*

El hecho de que la transformación de  $p(s, e^{-\tau s})$  en el polinomio  $p(s, T)$  sea válida sólo sobre el eje imaginario  $j\omega$ , impide la definición de un Guardian Map de cuasi-polinomios. Algunos artículos como [12], [13], [50] han definido este Guardian Map en función de una suma Kronecker de las matrices  $A_0$  y  $A_1$  del sistema dinámico (1); sin embargo, de esta forma es muy complicado poder verificar los resultados obtenidos.

## 5.4 Ejemplo

El método anterior será aplicado al siguiente ejemplo para verificar la propiedad de estabilidad; considerar que se tiene el siguiente sistema dinámico:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & q \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x(t - \tau)$$

como se puede observar, es un sistema dinámico *diferencia-diferencial*; el cual se considerará que tiene incertidumbre en el parámetro  $q \in [0, 2]$  y el retardo  $\tau \in [0, \infty)$ . La estabilidad del sistema dinámico anterior es determinada por las raíces de la siguiente ecuación característica:

$$\det \left( sI - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & q \\ 0 & -1 \end{pmatrix} e^{-\tau s} \right)$$

desarrollando esta ecuación se obtiene el siguiente cuasi-polinomio:

$$p(s, e^{-\tau s}) = s^2 + s + 1 + (s + q)e^{-\tau s} \quad q \in [0, 2], \tau \in [0, \infty)$$

este cuasi-polinomio se puede expresar como una combinación convexa entre dos cuasi-polinomios fijos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} p(s, \lambda, e^{-\tau s}) &= \lambda p_0(s, e^{-\tau s}) + (1 - \lambda) p_1(s, e^{-\tau s}) \quad \forall \lambda \in [0, 1] \text{ y } \tau \in [0, \infty) \\ p_0(s, e^{-\tau s}) &= s^2 + s + 1 + (s)e^{-\tau s} \\ p_1(s, e^{-\tau s}) &= s^2 + s + 1 + (s + 2)e^{-\tau s} \end{aligned}$$

esta expresión es obtenida realizando el siguiente cambio de variable:

$$\lambda = \frac{2 - q}{2}$$

para aplicar el teorema (5.5) es necesario obtener los polinomios asociados  $\tilde{p}_0(s, T)$  y  $\tilde{p}_1(s, T)$ ; aplicando la definición de estos polinomios se obtiene:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_0(s, T) &= T^2 s^4 + (2T^2 + 2T)s^3 + (T^2 + 1)s^2 + (2T + 2)s + 1 \\ \tilde{p}_1(s, T) &= T^2 s^4 + (2T^2 + 2T)s^3 + (3T^2 + 1)s^2 + (2 - 2T)s + 3 \end{aligned}$$

las matrices de Hurwitz asociadas a los polinomios anteriores son:

$$\begin{aligned} H[\tilde{p}_0(s, T)] &= \begin{bmatrix} 2T^2 + 2T & 2 + 2T & 0 & 0 \\ T^2 & T^2 + 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2T^2 + 2T & 2 + 2T & 0 \\ 0 & T^2 & T^2 + 1 & 1 \end{bmatrix} \\ H[\tilde{p}_1(s, T)] &= \begin{bmatrix} 2T^2 + 2T & 2 - 2T & 0 & 0 \\ T^2 & 3T^2 + 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2T^2 + 2T & 2 - 2T & 0 \\ 0 & T^2 & 2T^2 + 2T & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

se puede verificar que  $\sigma(H^{-1}[\tilde{p}_0(s, T)]H[\tilde{p}_1(s, T)]) \in (-\infty, 0]$  para  $T = \frac{\sqrt{7}-2}{3}$ , por lo tanto el sistema no es robustamente estable para todo  $\tau \in [0, \infty)$ .

## 5.5 Conclusiones

En este capítulo se presentaron algunos métodos que sirven para verificar la propiedad de estabilidad robusta de combinaciones convexas entre dos cuasi-polinomios. Este resultado se puede aplicar para verificar las aristas de una familia de cuasi-polinomios formada por combinaciones convexas de  $m$  cuasi-polinomios fijos y por lo tanto se puede extender al caso de sistemas *diferencia-diferencial* con incertidumbre paramétrica de tipo afín en una de las filas ó columnas de las matrices  $A_0$  y  $A_1$ . La principal aportación en este capítulo fue la consideración del retardo con incertidumbre. El principal problema del método aquí presentado, es que en ocasiones es difícil realizar la prueba del cálculo de los valores propios para diferentes valores de  $T$ ; por lo que resulta necesario obtener una forma más simple de verificarlo.



# CAPITULO 6

## Aplicaciones en Procesos Físicos

### 6.1 Introducción

En este capítulo serán analizados dos procesos físicos que tienen gran aplicación en la industria, como lo es el sistema de control de nivel hidráulico y el reactor químico. Estos sistemas serán analizados para garantizar la propiedad de estabilidad robusta cuando presentan incertidumbre paramétrica, la cual es reflejada como incertidumbre intervalo en los coeficientes de la ecuación característica y el retardo de tiempo que presentan estos procesos. El retardo de tiempo que aparece en algunos procesos causa grandes complicaciones en su análisis, por lo que es necesario introducir nuevas metodologías con el fin de simplificarlo; lo anterior es la motivación principal de presentar este capítulo, además de justificar en cierta forma los resultados teóricos obtenidos. Los modelos matemáticos de los procesos físicos, en el cual se basa nuestro análisis, fueron obtenidos de bibliografía que será referenciada posteriormente. Los modelos se obtuvieron bajo diferentes suposiciones, de tal forma que su estructura matemática coincide con el tipo de sistemas que fueron considerados para el análisis en los capítulos anteriores. Es necesario mencionar que este tipo de sistemas no son considerados en su forma más general, ya que no se toman en cuenta todos los aspectos que afectan el comportamiento dinámico del proceso; sin embargo, las mismas consideraciones son realizadas en la industria.

### 6.2 Sistema de Control de Nivel Hidráulico

El sistema de nivel hidráulico presentado en la figura 5.1 será considerado para su análisis en esta sección, este es un sistema de control típico que presenta retardo de transporte debido al tiempo que tarda el líquido en pasar a través de la tubería; este sistema de control fue presentado originalmente en [56] y [36] donde fueron obtenidos los modelos matemáticos de cada uno de los componentes del proceso; sin embargo, nuestra aportación será la consideración de incertidumbre paramétrica.

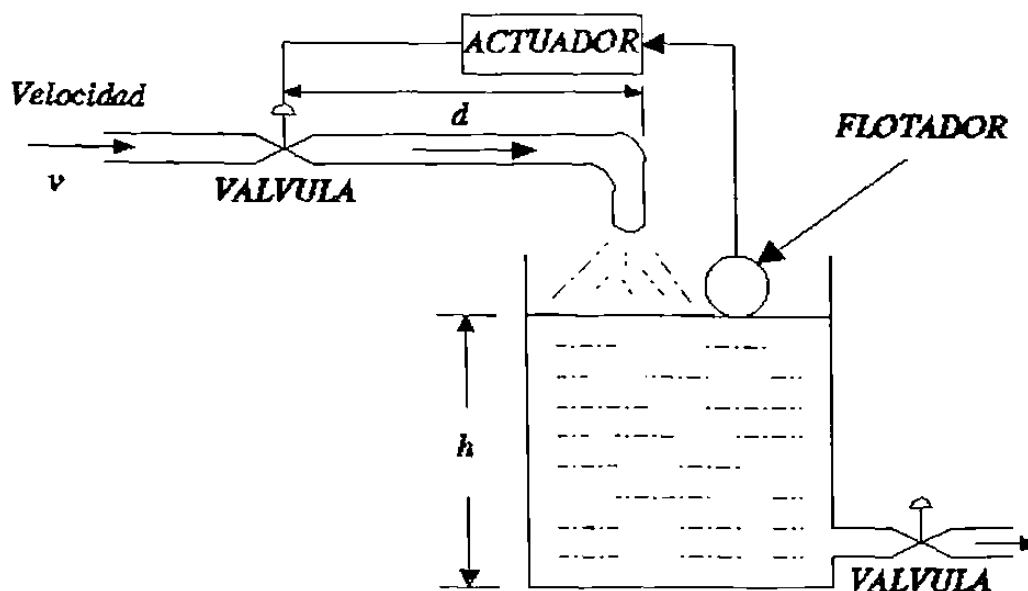


Figura 6.1 Sistema de Nivel Hidráulico.

El sistema anterior consiste en controlar el nivel del líquido  $h$  depositado en el tanque; el nivel es controlado mediante la dosificación del flujo de líquido en la entrada y la salida mediante las válvulas, tal como se muestra en la figura 6.1. Los elementos que presentan un comportamiento dinámico en el proceso anterior son: la válvula que permite la entrada del líquido al tanque, el tanque y el elemento sensor que en este caso está formado por el flotador; cada uno de ellos es representado por la siguiente función de transferencia, ver [36]:

$$G_a(s) = \frac{10}{s + 1}$$

$$G_t(s) = \frac{3.15}{30s + 1}$$

$$G_f(s) = \frac{9}{s^2 - 3s + 9}$$

donde  $G_a(s)$ ,  $G_t(s)$ ,  $G_f(s)$  son: la función de transferencia del actuador, tanque y flotador, respectivamente. Como se mencionó anteriormente, existe un retardo de tiempo entre la apertura de la válvula y la parte final del tubo donde sale el líquido de alimentación, tal como se muestra en la figura 6.1. En este caso el retardo de tiempo  $\tau$  depende de la distancia  $d$ , el área transversal de la tubería de alimentación  $A$  y la velocidad del fluido  $v$ ; es decir

$\tau = dA/v$ . Por lo tanto el sistema de control de nivel hidráulico se puede representar mediante el siguiente diagrama de bloques:

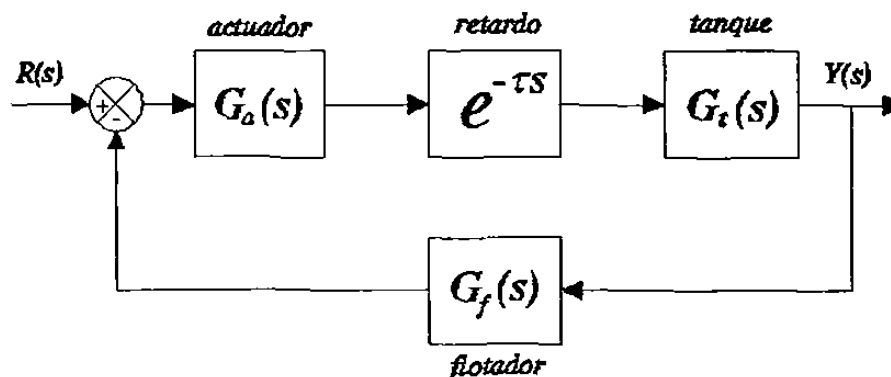


Figura 6.2 Diagrama de bloques del sistema de control de nivel.

$r(t)$  es el nivel deseado y  $y(t)$  es el nivel real del tanque. Dado que nuestro interés es el análisis de estabilidad del sistema anterior, entonces será necesario obtener la función de transferencia de lazo cerrado.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{31.5(s^2 + 3s + 9)e^{-\tau s}}{30s^4 + 121s^3 + 364s^2 + 282s + 9 + 283.5e^{-\tau s}}$$

por lo tanto la estabilidad del sistema anterior está determinada por la siguiente ecuación característica:

$$p(s, e^{-\tau s}) = 30s^4 + 121s^3 + 364s^2 + 282s + 9 + 283.5e^{-\tau s}$$

el retardo  $\tau$  depende de la longitud de la tubería así como de la velocidad del fluido  $v$  por lo que un cambio en cualquiera de estos términos produciría un cambio en el retardo de tiempo  $\tau$ ; un cambio en la longitud del tubo sería muy poco probable, sin embargo la velocidad del fluido si es factible de cambio. La primera consideración que se hará para iniciar el análisis de estabilidad será que el retardo presenta incertidumbre y se puede expresar como  $\tau \in [0, \tau_{\max}]$ . Uno de los problemas interesantes es determinar el máximo valor de  $\tau_{\max}$  para el cual el sistema físico permanece estable; para esto serán utilizados los resultados obtenidos

en la sección 4.3.1. Entonces, expresando al ecuación característica de la misma forma que en 4.3.1 obtenemos:

$$\begin{aligned} p(s, e^{-\tau s}) &= D(s) + N(s)e^{-\tau s} \\ D(s) &= 30s^4 + 121s^3 + 364s^2 + 282s + 9 \\ N(s) &= 283.5 \end{aligned}$$

se puede verificar que la condición del corolario 4.1 no se satisface por lo que el sistema no es estable para todo valor de retardo  $\tau \geq 0$ ; por lo tanto es necesario aplicar el corolario 4.2 para determinar el máximo retardo permisible. Para esto se tiene que encontrar el conjunto  $\mathcal{W}_c \equiv \{\omega \in [0, \infty) : |N(j\omega)| = |D(j\omega)|\}$ ; se puede notar que  $N(s)$  y  $D(s)$  evaluados en  $j\omega$  tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned} N(j\omega) &= 283.5 \\ D(j\omega) &= (30\omega^4 - 364\omega^2 + 9) + j(282\omega - 121\omega^3) \end{aligned}$$

por lo que el conjunto queda determinado:

$$\mathcal{W}_c \equiv \{\omega_1 = 0.8356\}$$

entonces:

$$\tau_1 = \frac{\pi + \angle N(j\omega_1) - \angle D(j\omega_1)}{\omega_1}$$

donde:

$$\begin{aligned} N(j\omega_1) &= 283.5 \\ D(j\omega_1) &= -230.51 + j165.04 \end{aligned}$$

realizando las operaciones anteriores se obtiene que  $\tau_1 = 0.7436$  por lo que el retardo máximo, aplicando el corolario 4.2, será igual a  $\tau_{\max} = 0.7436$ ; la hipótesis del corolario se satisface ya que el sistema de nivel de líquido es estable cuando el retardo es igual a cero. Entonces para que el sistema de nivel hidráulico permanezca estable, el retardo de tiempo deberá estar dentro del siguiente intervalo  $\tau \in [0, 0.7436)$ . Las unidades del retardo de tiempo depende de las unidades que se consideren en el sistema físico; por ejemplo, si se considera una distancia fija en la longitud del tubo de alimentación de 5 m, el área transversal del tubo igual a 1 m<sup>2</sup>. entonces para asegurar estabilidad en el sistema es necesario garantizar que la velocidad del fluido sea superior a 6.724 m<sup>3</sup>/min. Los resultados obtenidos anteriormente pueden verificarse mediante la respuesta transitoria del sistema de control en lazo cerrado para diferentes valores del retardo de tiempo, cuando se le aplica una entrada  $r(t)$  de tipo escalón unitario.

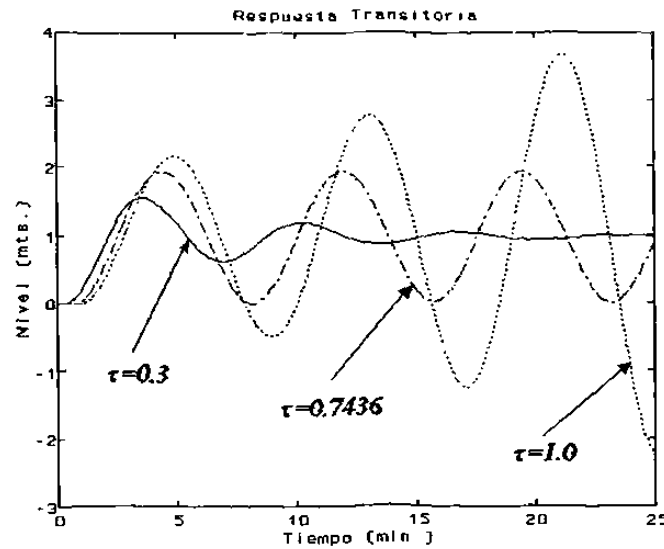


Figura 6.3 Resposta transitoria del sistema de nivel.

de la gráfica anterior se puede observar como el sistema pierde estabilidad cuando el retardo de tiempo es mayor a 0.7436 min. También se puede notar que para valores de  $\tau$  mayores a 0.7436 min, el nivel del líquido toma valores negativos; esto puede tener diferentes interpretaciones físicas, en nuestro caso supondremos que se tiene un tanque auxiliar de reserva y un valor negativo en el nivel del líquido indicará que se está utilizando líquido del tanque de reserva. El análisis que se ha realizado hasta ahora, ha sido considerando incertidumbre paramétrica únicamente en el retardo de tiempo; sin embargo un estudio más completo es considerar incertidumbre en otros parámetros. En seguida se analizará el sistema de nivel hidráulico considerando incertidumbre en sus parámetros; se tomará como sistema nominal ecuación característica original:

$$p(s, e^{-\tau s}) = 30s^4 + 121s^3 + 364s^2 + 282s + 9 + 283.5e^{-0.3s}$$

entonces si se considera que el sistema presenta una incertidumbre del  $\pm 10\%$  en cada uno de los coeficientes del cuasi-polinomio y el retardo de tiempo  $\tau \in [0, 0.6]$ , la ecuación característica queda expresada como:

$$p(s, q, r, e^{-\tau s}) = [27, 33]s^4 + [108.9, 133.1]s^3 + [327.6, 400.4]s^2 + [253.8, 310.2]s + [8.1, 9.9] + [255.15, 311.85]e^{-[0, .6]s}$$

esta ecuación característica coincide con el tipo de ecuación considerada en la sección 4.3; por lo tanto se puede utilizar el teorema 4.1 para verificar la propiedad de estabilidad. Utilizando los programas que se presentan en el apéndice se puede obtener la gráfica del "value set" que tiene la siguiente forma:

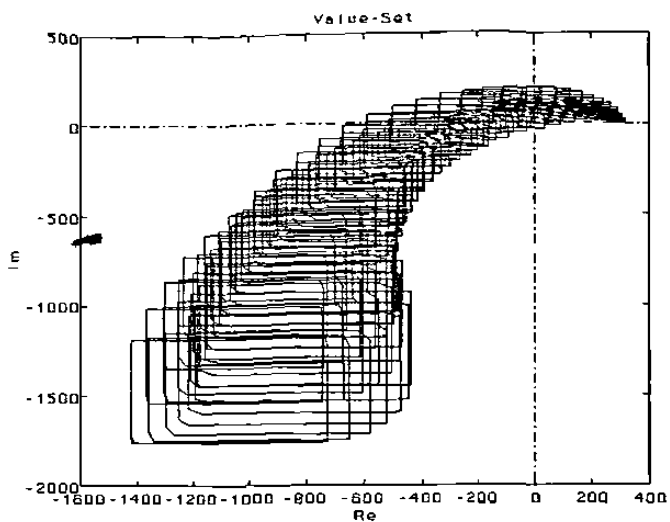


Figura 6.4 Value set de la ecuación característica del sistema de nivel.

de la gráfica anterior y aplicando el teorema 4.1 se puede establecer que el sistema de control de nivel, considerando la incertidumbre, es inestable; lo anterior debido a que el "value set" contiene al cero del plano complejo. En la gráfica anterior es posible que no se logre distinguir la contención del cero; sin embargo mediante el siguiente acercamiento se puede observar claramente dicha contención.

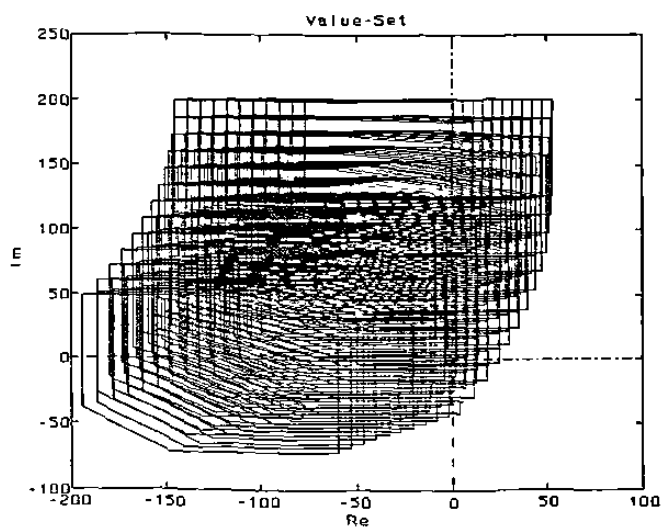


Figura 6.5 Acercamiento del "value set" del sistema de nivel.

Por otro lado, debido a que el sistema es inestable para algún valor de la incertidumbre es importante determinar el retardo máximo que permite al sistema conservar la propiedad de estabilidad. con la posibilidad de obtener la gráfica del "value set" con relativa facilidad se puede obtener un valor aproximado del retardo máximo; por inspección de una serie de gráficas se obtuvo que el retardo máximo considerando la incertidumbre del 10% en los coeficientes es de  $\tau \approx 0.4$ ; la gráfica del "value set" considerando este retardo es la siguiente:

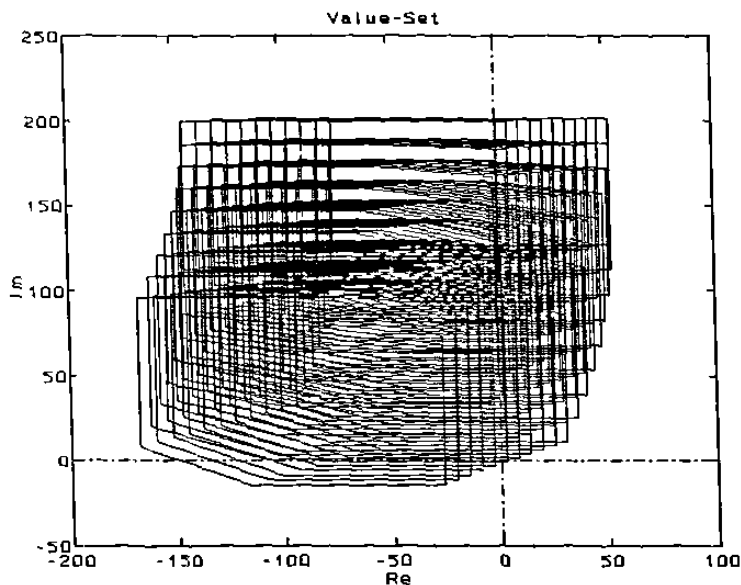


Figura 6.6 Value set para el retardo máximo del sistema de nivel.

El análisis presentando en esta sección permite determinar la robustez del sistema de control de nivel ante incertidumbre paramétrica de tipo intervalo en los coeficientes y en el retardo de tiempo. Esta propiedad es de gran importancia en los procesos físicos reales, debido a que siempre existen algunos parámetros que por las condiciones de operación no mantienen un valor fijo y entonces es necesario tomar las medidas adecuadas para no dañar, en un momento dado, algún componente del sistema.

### 6.3 Reactor Químico

Otro proceso de gran interés para su análisis es el conjunto de tres reactores químicos isotérmicos continuos conectados en serie tal como se muestra en la siguiente figura, ver [57]:

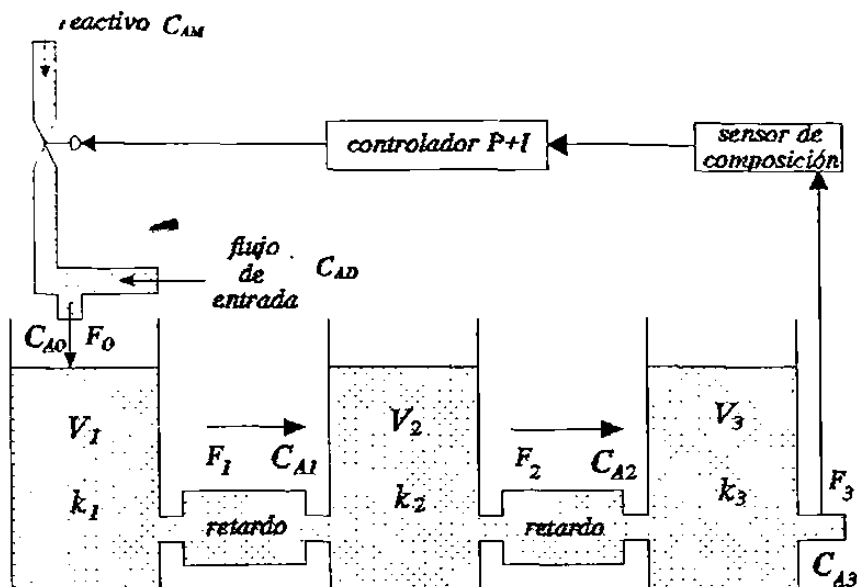


Figura 6.7 Sistema de reactores químicos conectados en serie.

El sistema de control formado por los reactores químicos tiene como objetivo controlar la composición de una reacción química entre dos elementos  $A$  y  $B$ . El modelo matemático del sistema anterior se obtiene, por una parte, aplicando balances de masa en cada uno de los reactores; si se considera que el volumen  $V_1 = V_2 = V_3 = V$  y la densidad  $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho$  son constantes, entonces por el principio de conservación de masa, el flujo  $F$  también permanece constante; es decir  $F_0 = F_1 = F_2 = F_3 \equiv F$ . La otra parte del modelo matemático es obtenida aplicando las ecuaciones de continuidad para cada uno de los elementos, tal como se muestra en seguida:

$$\begin{aligned} \frac{d(V_1 C_{A1})}{dt} &= F_0 C_{A0} - F_1 C_{A1} - V_1 k_1 C_{A1} \\ \frac{d(V_2 C_{A2})}{dt} &= F_1 C_{A1} - F_2 C_{A2} - V_2 k_2 C_{A2} \\ \frac{d(V_3 C_{A3})}{dt} &= F_2 C_{A2} - F_3 C_{A3} - V_3 k_3 C_{A3} \end{aligned}$$

donde  $C_{A_i}$  representa la composición del elemento  $A$  en cada reactor químico,  $k_i$  es la razón de reacción específica y está dado por la ecuación de Arrhenius, ver [57]. Es importante mencionar que el término  $k_i$  está en función de la temperatura en cada reactor, la cual se supondrá constante debido a que el proceso es isotérmico. También es necesario hacer notar que se deben obtener un conjunto de ecuaciones similares a las anteriores para el componente  $B$ ; sin embargo, debido a que se trata sólo de dos componentes, la composición  $C_B$  será el complemento de  $C_A$  por lo que no se requiere su obtención. Realizando la suposición de que



el volumen y el flujo en cada uno de los reactores es constante, la ecuación anterior queda simplificada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{dC_{A1}}{dt} + \left(k_1 + \frac{1}{a}\right) C_{A1} &= \frac{1}{a} C_{A0} \\ \frac{dC_{A2}}{dt} + \left(k_2 + \frac{1}{a}\right) C_{A2} &= \frac{1}{a} C_{A1} \\ \frac{dC_{A3}}{dt} + \left(k_3 + \frac{1}{a}\right) C_{A3} &= \frac{1}{a} C_{A2}\end{aligned}$$

donde  $a = V/F$ . Es importante mencionar que la composición  $C_{A1}$  y  $C_{A2}$  que alimentan al segundo y tercer reactor respectivamente, no están disponibles en forma instantánea ya que es necesario transportarlo a través de la tubería por lo que existe un retardo entra cada uno de los reactores, tal como se muestra en la figura 6.7. Es claro que la consideración de este retardo altera el modelo matemático obtenido anteriormente; las ecuaciones dinámicas de los tres reactores considerando el retardo de tiempo quedan expresadas como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{dC_{A1}(t)}{dt} + \left(k_1 + \frac{1}{a}\right) C_{A1}(t) &= \frac{1}{a} C_{A0}(t) \\ \frac{dC_{A2}(t)}{dt} + \left(k_2 + \frac{1}{a}\right) C_{A2}(t) &= \frac{1}{a} C_{A1}(t - \tau_1) \\ \frac{dC_{A3}(t)}{dt} + \left(k_3 + \frac{1}{a}\right) C_{A3}(t) &= \frac{1}{a} C_{A2}(t - \tau_2)\end{aligned}$$

donde  $\tau_1, \tau_2$  representan el retardo de tiempo que existe entre los reactores. Al igual que para el sistema de nivel presentado en la sección anterior, el retardo de tiempo está determinado por la velocidad del fluido y la distancia de la tubería; para nuestro caso será considerado que el retardo de tiempo es igual para los dos reactores; es decir  $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ . Ahora, sin pérdida de generalidad, se hará la suposición de que las condiciones iniciales del sistema anterior son iguales a cero y entonces la función de transferencia de cada reactor es la siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{C_{A1}(s)}{C_{A0}(s)} &= \frac{\frac{1}{a}}{s + \left(k_1 + \frac{1}{a}\right)} \\ \frac{C_{A2}(s)}{C_{A1}(s)} &= \frac{\frac{1}{a}}{s + \left(k_2 + \frac{1}{a}\right)} e^{-\tau s} \\ \frac{C_{A3}(s)}{C_{A2}(s)} &= \frac{\frac{1}{a}}{s + \left(k_3 + \frac{1}{a}\right)} e^{-\tau s}\end{aligned}$$

en el caso de que las condiciones iniciales no sean igual a cero, entonces con un cambio de variable se pueden obtener las mismas funciones de transferencia pero ahora para los incrementos en la composición correspondiente. El sistema de control presentado en la figura

6.7 tiene como objetivo controlar la composición  $C_{A3}$  que sale del tercer reactor a través de la dosificación del reactivo  $C_{AM}$  que sumado con el flujo de entrada  $C_{AD}$  son introducidos al primer reactor, se asume que se tiene un sensor de composición ideal; es decir, que la función de transferencia del sensor es unitaria y la misma suposición es realizada para la válvula que controla el flujo del reactivo; el algoritmo de control será considerado que es un proporcional más integral, tal como se muestra en la figura 6.7. Bajo las consideraciones anteriores el sistema formado por los reactores químicos se puede representar mediante el siguiente diagrama de bloques:

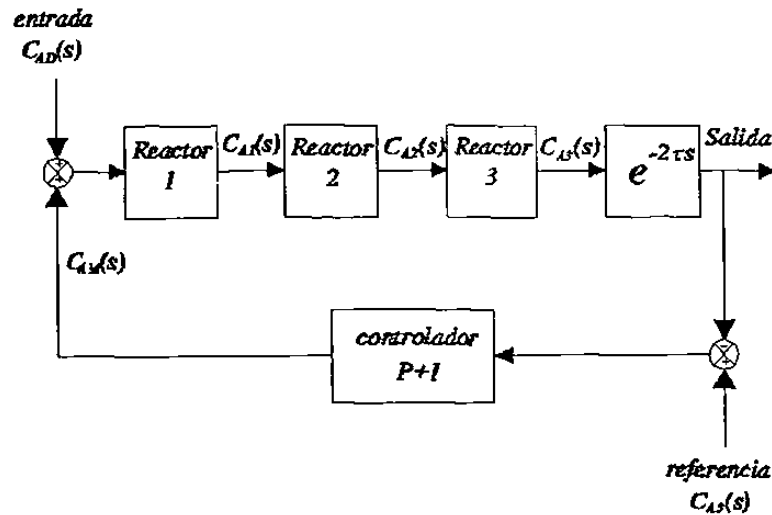


Figura 6.8 Diagrama de bloques del reactor químico.

el análisis se realizará considerando los siguientes valores de los parámetros:  $a = 2 \text{ min}$ ,  $k_1 = 0.5 \text{ min}^{-1}$ ,  $k_2 = 0.6 \text{ min}^{-1}$ ,  $k_3 = 0.7 \text{ min}^{-1}$ ,  $K_p = 20$ ,  $T_i = .2 \text{ seg}$ ; donde  $K_p$  y  $T_i$  representan la ganancia proporcional y el tiempo integral del controlador  $PI$ , respectivamente. Tomando en cuenta los valores asignados a los parámetros, la relación entre la salida del proceso y las entradas  $C_{AD}$  y  $C_{A3}^{ref}$  está determinada por la siguiente ecuación:

$$C_{A3}(s) = G_1(s, e^{-\tau s})C_{A3}^{ref}(s) + G_2(s, e^{-\tau s})C_{AD}(s)$$

donde:

$$G_1(s, e^{-\tau s}) = \frac{(4s + 1)e^{-2\tau s}}{0.2s^4 + 1.56s^3 + 4.054s^2 + 3.51s + (4s + 1)e^{-2\tau s}}$$

$$G_2(s, e^{-\tau s}) = \frac{0.2se^{-2\tau s}}{0.2s^4 + 1.56s^3 + 4.054s^2 + 3.51s + (4s + 1)e^{-2\tau s}}$$

de la ecuación anterior se puede observar que la estabilidad del sistema está determinada por la siguiente ecuación característica:

$$p(s, e^{-hs}) = 0.2s^4 + 1.56s^3 + 4.054s^2 + 3.51s + (4s + 1)e^{-hs}$$

donde  $h = 2\tau$ . Con estas condiciones se realizará el siguiente análisis de estabilidad robusta.

### 6.3.1 Incertidumbre en el Retardo de Tiempo

Primeramente se considerará que el sistema formado por los tres reactores químicos tiene incertidumbre paramétrica en el retardo pero no en los coeficientes de la ecuación característica. Bajo estas condiciones el análisis de estabilidad robusta se puede determinar de dos diferentes formas:

#### 1) Método Analítico

Aplicando el resultado presentado en el corolario 4.2 se puede obtener, en forma analítica, el máximo retardo de tiempo que soporta el sistema para garantizar su estabilidad, primeramente deberá satisfacerse la hipótesis del corolario; es decir,  $p(s, e^{-hs})$  debe ser estable para  $h = 0$ ; lo anterior se puede obtener verificando las raíces de la siguiente ecuación:

$$p(s, e^0) = 0.2s^4 + 1.56s^3 + 4.054s^2 + 7.51s + 1$$

las raíces de esta ecuación son:

$$\begin{aligned} s_1 &= -5.2721 \\ s_2 &= -1.1921 + j2.2757 \\ s_3 &= -1.1921 - j2.2757 \\ s_4 &= -0.1437 \end{aligned}$$

por lo tanto la hipótesis se satisface; en seguida es necesario encontrar el conjunto de valores de  $\omega \in \mathbb{R}_+$  tal que  $|N(j\omega)| = |D(j\omega)|$ ; para esto es necesario encontrar los valores de  $\omega$  que satisfagan la siguiente ecuación:

$$|0.2(j\omega)^4 + 1.56(j\omega)^3 + 4.054(j\omega)^2 + 3.51(j\omega)| = |4(j\omega) + 1|$$

desarrollando las operaciones de la ecuación anterior se obtiene la siguiente ecuación polinomial en función de  $\omega$ .

$$0.04\omega^8 + 0.8120\omega^6 + 5.4837\omega^4 - 3.6799\omega^2 - 1 = 0$$

la cual tiene las siguientes soluciones:  $\omega_{1,2} = \pm 0.8946$ ;  $\omega_{3,4} = \pm j0.4569$ ;  $\omega_{5,6} = 0.9450 \pm j3.3676$ ;  $\omega_{7,8} = -0.9450 \pm j3.3676$ . Entonces sólo existe un valor de  $\omega$  que satisface la

condición anterior y es  $\omega^* = 0.8946$ . Para ese valor se puede verificar que  $N(j\omega^*)$  y  $D(j\omega^*)$  tienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned} N(j\omega^*) &= 1 + j3.5784 \\ D(j\omega^*) &= -3.1164 + j2.0232 \end{aligned}$$

y entonces:

$$\begin{aligned} \angle N(j\omega^*) &= 1.2983 \text{ rad} \\ \angle D(j\omega^*) &= 2.5658 \text{ rad} \end{aligned}$$

con los valores anteriores se puede aplicar el resultado del corolario 4.2:

$$h_1 = \frac{\pi + 1.2983 - 2.5658}{0.8946} = 2.0949$$

por lo tanto  $h_{\max} = 2.0949$  y entonces  $\tau_{\max} = 1.0475$ , ya que  $h = 2\tau$ . Entonces podemos afirmar que el sistema formado por los reactores químicos, para los valores de los parámetros establecidos, soporta un retardo máximo de 1.0475 minutos para garantizar estabilidad.

## 2) Método Gráfico

El máximo retardo también puede ser obtenido en forma aproximada de la gráfica del "value set". Usando los programas presentados en el apéndice se puede obtener la siguiente gráfica:

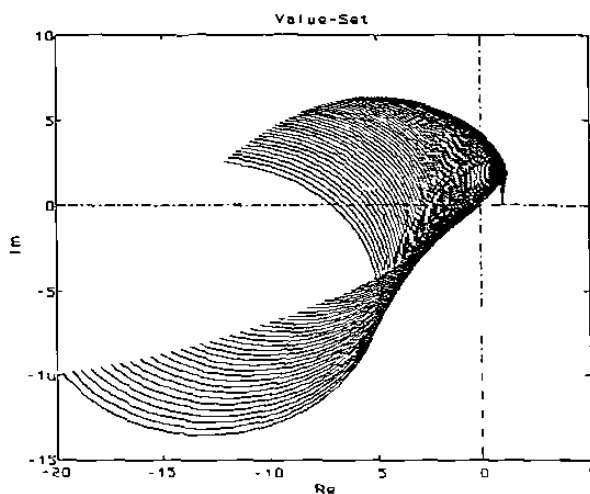


Figura 6.9 Value set del reactor con incertidumbre en el retardo.

esta gráfica fue obtenida para un intervalo de  $\omega = [0, 2]$  y  $h = [0, 2]$  en la ecuación característica  $p(s, e^{-\tau s})$ . El siguiente acercamiento de la gráfica permite verificar la condición de exclusión del cero necesaria para garantizar estabilidad:

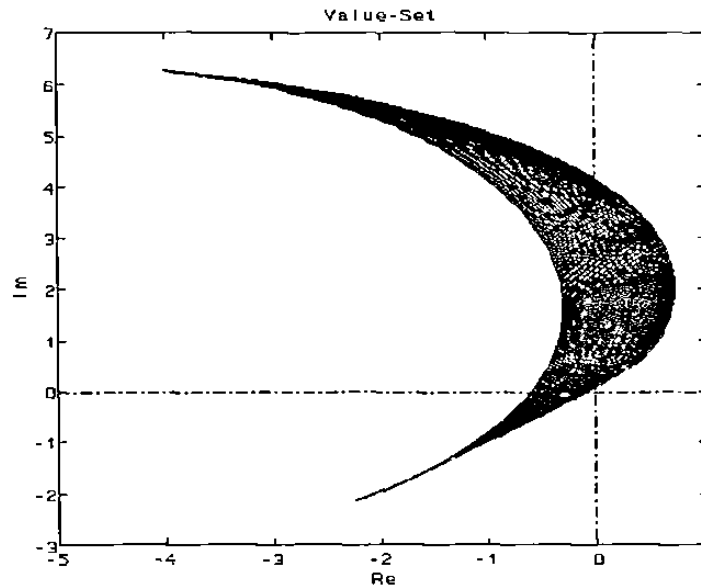


Figura 6.10 Acercamiento del "value set" del reactor con incertidumbre en el retardo.

Entonces, mediante la construcción del "value set" y aplicando el resultado del teorema 4.1 se puede obtener en forma aproximada el retardo máximo, es importante mencionar que este procedimiento es mucho más simple que el anterior; sin embargo el resultado es aproximado.

### 6.3.2 Incertidumbre en el Retardo y en los Coeficientes

Un caso más real es cuando se considera incertidumbre en los coeficientes y en el retardo, en esta sección se analizará el sistema cuando se tiene incertidumbre también en los coeficientes de la ecuación característica la cual será considerada que tiene la siguiente estructura:

$$\begin{aligned}
 p(s, \mathbf{q}, \mathbf{r}, e^{-\tau s}) &= D(s, \mathbf{r}) + N(s, \mathbf{q})e^{-2\tau s} \\
 N(s, \mathbf{q}) &= [3.8, 4.6]s + [0.95, 1.15] \\
 D(s, \mathbf{r}) &= [.19, .20]s^4 + [1.48, 1.56]s^3 + [3.85, 4.05]s^2 + [3.34, 3.51]s \\
 \tau &= [0, 0.5]
 \end{aligned}$$

es decir, con un  $\pm 5\%$  de incertidumbre en cada uno de los coeficientes. Nuevamente, aplicando el teorema 4.1, se pueden obtener las condiciones de estabilidad robusta; en seguida se presenta la gráfica del "value set" correspondiente.

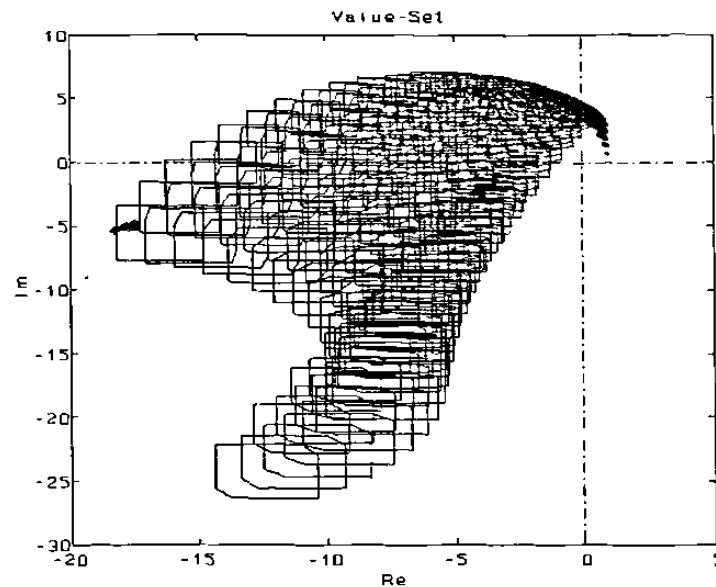


Figura 6.11 Value set del reactor con incertidumbre en los coeficientes y el retardo.

la gráfica anterior fue obtenida para un rango de valores de  $\omega = [0, 2.5]$ . Apoyándonos en el teorema 4.1 podemos concluir que el reactor es estable para el rango de incertidumbre definido anteriormente ya que el "value set" no contiene al cero del plano complejo. También se puede determinar por inspección de la gráfica, el retardo máximo considerando la incertidumbre en los coeficientes ya que con la ayuda del programa que construye el "value set" se pueden realizar muchas pruebas en muy poco tiempo.

## 6.4 Conclusiones

Se presentó el análisis de estabilidad para dos procesos físicos que se presentan muy frecuentemente en la industria, el interés de su análisis fue mostrar las ventajas que ofrecen los resultados obtenidos en este trabajo de investigación haciendo consideraciones que se aproximan más a la realidad como el caso de la incertidumbre paramétrica en cada uno de los procesos. Como se pudo observar, el análisis mediante la metodología utilizada resulta muy simple ya que se apoya en resultados gráficos únicamente y por lo mismo se pueden considerar sistemas dinámicos que tengan estructuras de orden grande, caso contrario a la mayoría de los métodos utilizados para el análisis.

# CAPITULO 7

## Conclusiones Generales

Como se pudo observar en cada capítulo fueron presentadas las conclusiones relacionadas con la aportación correspondiente, lo anterior se realizó con el fin de enfatizar en forma independiente cada una de las aportaciones de este trabajo. Dado lo anterior en este capítulo se presentarán las conclusiones generales de la tesis; éstas se pueden enumerar de la siguiente forma:

1. Se planteó el problema de aproximación del operador retardo usando aproximaciones de Padé. Algunos resultados de simulaciones propiciaron una conjetura donde se establece una mejor aproximación de Padé.
2. Posteriormente se prefirió analizar los sistemas dinámicos con retardo en su forma más completa; es decir, considerando el retardo de tiempo en su forma natural (sin aproximación).
3. Se extendieron los resultados de estabilidad robusta basados en el concepto del "value set" al caso de plantas intervalo con retardo de tiempo, considerando incertidumbre en el retardo.
4. Finalmente se presentaron condiciones suficientes de estabilidad robusta para combinaciones convexas de cuasi-polinomios con incertidumbre en el retardo de tiempo.

Las aportaciones personales presentadas en esta tesis, simplifican en algunos casos y extienden en otros. los métodos analíticos publicados previamente.

### 7.1 Observaciones y Recomendaciones

Es importante mencionar que existen diferentes formas de analizar los sistemas dinámicos, en algunos casos se prefiere obtener un modelo matemático en su forma más general realizando pocas consideraciones sobre el proceso físico; lo anterior genera un modelo matemático muy

complejo al cual se le pueden obtener pocas propiedades y algunas de ellas son demasiado conservadoras. En esta tesis se optó por considerar modelos simplificados con el interés de obtener propiedades más completas; aunque es necesario mencionar que con la simplificación se pueden perder fidelidad del proceso físico, la cual se buscó compensar con la incertidumbre en los parámetros.

Algunas recomendaciones sobre el uso de las técnicas aquí propuestas serán presentadas a continuación:

1. La aproximación del retardo de tiempo en un sistema dinámico retardado, simplifica el análisis de sistema; sin embargo, es importante mencionar que los resultados obtenidos son únicamente aproximados, por lo que sería recomendable usarla sólo en los casos donde no se requiera mucha precisión.
2. El "value set" es un método muy simple y es recomendado para usarse en sistemas dinámicos de dimensiones grandes, los cuales representarían muchos problemas analizarlos en forma analítica.
3. Por último, el concepto del Guardian Map transforma un problema de funciones polinomiales de dos variables en un problema de una sola variable; sin embargo, el análisis puede resultar complicado para sistemas dinámicos de dimensiones grandes.
4. El análisis presentado en este trabajo, es válido para sistemas lineales invariantes en el tiempo con retardo en la entrada con incertidumbre independiente en los coeficientes del cuasi-polinomio característico y en el retardo; el caso en que la incertidumbre del modelo entre no linealmente en los coeficientes, no fue considerado en este trabajo y es un problema abierto para posteriores investigaciones.



## REFERENCIAS

- [1] J. Ackerman, *Robust Control*, Springer-Verlag, 1993.
- [2] A.T. Bahill. "A Simple Adaptive Smith-Predictor for Controlling Time-Delay Systems", *IEEE Control Systems Magazine*, Vol 1, No 3, pp 16-22, 1983.
- [3] B.R. Barmish, *New Tools for Robustness of Linear Systems*, Macmillan, 1994.
- [4] B.R. Barmish, "A Generalization of Kharitonov's Four-Polynomial Concept for Robust Stability Problems with Linearly Dependent Coefficient Perturbations", *IEEE T-AC*, Vol 34, No 2, pp 157-165, 1989.
- [5] B.R. Barmish, Z. Shi, "Robust Stability of Perturbed Systems with Time Delay", *Automatica*, Vol 25, No 3, pp 371-381, 1989.
- [6] B.R. Barmish, C.V. Hollot, F.J. Kraus, R. Tempo, "Extreme Point Result for Robust Stabilization of Interval Plants with First Order Compensators", *IEEE T-AC*, Vol 37, No 6, pp 707-714, 1992.
- [7] A.C. Bartlett, C.V. Hollot, L. Huang, "Roots Locations of an Entire Polytope of Polynomials: It Suffices to Check the Edges", *Mathematics of Control Signal and Systems*, pp 61-71, 1988.
- [8] F.G. Boese, "Stability in a Special Class of Retarded Difference-Differential Equations with Interval-Valued Parameters", *Z. angew. Math Mech*, 72, pp 84-87, 1992.
- [9] H. Chapellat, S.P. Bhattacharyya, "A Generalization of Kharitonov's Theorem: Robust Stability of Interval Plants", *IEEE T-AC*, Vol 34, No 3, pp 306-311, 1989.
- [10] H. Chapellat, M. Dahleh, S.P. Bhattacharyya, "On Robust Nonlinear Stability of Interval Control Systems", *IEEE T-AC*, Vol 36, No 1, pp 59-67, 1989.
- [11] C.T. Chen. *Linear System Theory and Design*, HBJ, 1984.
- [12] J. Chen. "On Computing the Maximal Delay Intervals for Stability of Linear Delay Systems". *Proceedings of the American Control Conference*, Baltimore Md, pp. 1934-1938, 1994.
- [13] J. Chen, G. Gu, C.N. Nett, "A New Method for Computing Delay Margins for Stability of Linear Systems", *Proceedings of the 33<sup>rd</sup> Conference on Decision and Control*, Lake Buena Vista Fl, pp. 433-437, 1994.
- [14] J. Chen. D. Xu, B. Shafai, "On Sufficient Conditions for Stability Independent of Delay",

- Proceedings of the American Control Conference*. Baltimore Md, pp. 1929-1933, 1994.
- [15] E.W. Cheney, Introduction to Approximation Theory, *McGraw-Hill*, 1966.
- [16] P.J. Davis, Interpolation & Approximation, *Dover Publications*, 1975.
- [17] S. Dasgupta, "Kharitonov's Theorem Revisited". *Systems & Control Letters* 11, pp 381-384, 1988.
- [18] J.C. Doyle, B.A. Francis, A.R. Tannenbaum, Feedback Control Theory, *Macmillan*, 1992.
- [19] M. Fu, B.R. Barmish, "A Generalization of Kharitonov's Interval Polynomial Framework to Handle Linearly Dependent Uncertainty", *Technical Report, Department of Electrical and Computer Engineering*. University of Wisconsin-Madison, WI 53706, 1987.
- [20] M. Fu, A.W. Olbrot, M.P. Polis, "Robust Stability for Time Delay Systems: The Edge Theorem and Graphical Test", *IEEE T-AC*, Vol 34, No 8, pp 813-820, 1989.
- [21] F.R. Gantmacher, The Theory of Matrices, Vol II, *Chelsea*, 1864.
- [22] K. Glover, J. Lam, J.R. Partington, "Rational Approximation of a Class of Infinite-Dimensional Systems II: Optimal Convergence Rates of  $L_\infty$  Approximants", *Mathematics of Control Signal and Systems*, Vol 4, pp 233-246, 1991.
- [23] H. Górecki, S. Fuksa, P. Grabowski, A. Korytowski, Analysis and Synthesis of Time Delay Systems, *John Wiley & Sons*, 1989.
- [24] M. Green, D.J.N. Limebeer, Linear Robust Control, *Prentice-Hall*, 1995.
- [25] J.K. Hale, S.M. Verduyn Lunel, Introduction to Functional Differential Equations, *Springer-Verlag*, 1993.
- [26] D. Hertz, E.I. Jury, E. Zeheb, "Stability Independent and Dependent of Delay for Delay Differential Equations", *Journal of the Franklin Institute*, Vol 318, No 3, pp 143-150, 1984.
- [27] E.W. Kamen, "Linear Systems with Commensurate Time Delays: Stability and Stabilization Independent of Delay", *IEEE T-AC*. Vol 27, No 4, pp 367-375, 1982.
- [28] E.W. Kamen, "Correction to Linear Systems with Commensurate Time Delay: Stability and Stabilization Independent of Delay", *IEEE T-AC*. Vol 28, No 2, pp 248-249, 1983.
- [29] V.L. Kharitonov, "Asymptotic Stability of an Equilibrium Position of a Family of Systems of Linear Differential Equations", *Plenum Publishing Corporation*, pp 1483-1485, 1979.

- [30] V.L. Kharitonov, A.P. Zhabko, "Robust Stability of Time Delay Systems", *IEEE T-AC*, Vol 39, No 12, pp 2388-2397, 1994.
- [31] J. Kogan, A. Leizarowitz, "Frequency Domain Criterion for Robust Stability of Interval Time-Delay Systems", *Automatica*, Vol 31, No 3, pp 463-369, 1995.
- [32] A. Kojima, S. Ishijima, " $H^\infty$  Controllers for Input Delayed Systems", *Proceedings of the 33<sup>rd</sup> Conference on Decision and Control*, Lake Buena Vista Fl, pp 1343-1349, 1994.
- [33] M.L. Krasnov, A.I. Kiselev, G.I. Makárenko, Funciones de Variable Compleja, *MIR*, 1983.
- [34] D.G. Luenberger, Optimization by Vector Space Methods, *John Wiley & Sons*, 1969.
- [35] A.M. Lyapunov, "The General Problem of the Stability of Motion", *International Journal Control*, Vol 55, No 3, pp 531-773, 1992.
- [36] M. Malek-Zavarei, M. Jamshidi, Time-Delay Systems, *North-Holland Systems and Control Series*, 1987.
- [37] A.Z. Manitius, A.W. Olbrot, "Finite-Spectrum Assignment for Systems with Delay", *IEEE T-AC*, Vol 24, No 4, pp 541-553, 1979.
- [38] M. Marden, The Geometry of the Zeros of a Polynomial in Complex Variable, *American Mathematics Society*, 1949.
- [39] T. Mori, H. Kokame, "Stability of  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau)$ ", *IEEE T-AC*, Vol 34, No 4, pp 460-462, 1989.
- [40] S.I. Niculescu, J.M. Dion, L. Dugard, "Robust Stabilization for Uncertain Time-Delay Systems Containing Saturating Actuators", *Proceedings of the 33<sup>rd</sup> Conference on Decision and Control*, Lake Buena Vista Fl, pp 431-432, 1994.
- [41] L.S. Pontryagin, "On the Zeros of Some Elementary Transcendental Functions", *American Math Society Trans*, pp 95-110, 1955.
- [42] A. Rantzer, "Stability Conditions for Polytopes of Polynomials". *IEEE T-AC*, Vol 37, No 2, pp 79-89, 1992.
- [43] T.J. Rivlin, An Introduction to the Approximation of Functions, *Dover Publications*, 1969.
- [44] G. Romero, J. Collado, "Aproximación del Retardo de un Sistema de Control", 6<sup>o</sup> Congreso Latino Americano de Controle Automático. Rio de Janeiro Brasil. Septiembre 1994.

- [45] G. Romero, J. Collado, "Robust Stability of Interval Plants with Perturbed Time Delay", *Proceedings of the 1995 American Control Conference*, Seattle Wash, Junio 1995.
- [46] G. Romero, J. Collado, "Construcción del Value Set para un Sistema de Control con Retardo de Transporte", *XVIII Congreso Internacional Académico de Ingeniería Electrónica*, Chihuahua Chih, Octubre 1996.
- [47] G. Romero, J. Collado, "Análisis de Estabilidad Robusta para Plantas Intervalo con Retardo", *XVIII Congreso Internacional Académico de Ingeniería Electrónica*, Chihuahua Chih, Octubre 1996.
- [48] W. Rudin, *Análisis Real y Complejo*, McGraw-Hill, 1988.
- [49] L. Saydy, A.L. Tits, E.H. Abed, "Guardian Maps and the Generalized Stability of Parametrized Families of Matrices and Polynomials", *Mathematics of Control Signal and Systems*, Vol 3, pp 345-371, 1990.
- [50] J.H. Su, I.K. Fong, C.L. Tseng, "Stability Analysis of Linear Systems with Time Delay", *IEEE T-AC*, Vol 39, No 6, pp. 1341-1344, 1994.
- [51] T.J. Su, Y.Y. Sun, T.S. Kuo, "Robust Stabilization of Observer based Linear Constrained Uncertain Time-Delay Systems", *Control Theory and Advanced Technology*, Vol 5, No 2, pp 205-213, 1989.
- [52] A. Thowsen, "The Routh-Hurwitz Method for Stability Test for a Class of Time-Delay Systems", *International Journal Control*, Vol 33, No 5, pp 991-995, 1981.
- [53] A. Thowsen, "An Analytic Stability Test for a Class of Time-Delay Systems", *IEEE T-AC*, Vol 26, No 3, pp. 735-736, 1981.
- [54] E. Tissir, A. Hmamed, "Stability Test of Interval Time Delay Systems", *Systems & Control Letters* 23, pp 263-270, 1994.
- [55] X. Xin, C. Feng, "Robust Stability of Control Systems with Parametric Uncertainties", *Proceedings of 31<sup>st</sup> Conference on Decision and Control*, Tucson Az, pp 1559-1564, 1992.
- [56] R. C. Dorf, *Sistemas de Control Automático*, Fondo Educativo Interamericano, 1978.
- [57] W.L. Luyben, *Process Medeling, Simulation and Control for Chemical Engineers*, McGraw-Hill. 1990.

# Apéndice

En este apéndice se presentan copias de las siguientes publicaciones realizadas en diferentes congresos:

- [1] G. Romero, J. Collado, "Aproximación del Retardo de un Sistema de Control", *6° Congreso Latino Americano de Control Automático*, Rio de Janeiro Brasil, pp. 76-81, Septiembre 1994.
- [2] G. Romero, J. Collado, "Robust Stability of Interval Plants with Perturbed Time Delay", *Proceedings of the 1995 American Control Conference*, Seattle Wash, pp. 326-327, Junio 1995.
- [3] G. Romero, J. Collado, "Construcción del Value Set para un Sistema de Control con Retardo de Transporte", *XVIII Congreso Internacional Académico de Ingeniería Electrónica*, Chihuahua Chih, pp. 228-233, Octubre 1996.
- [4] G. Romero, J. Collado, "Análisis de Estabilidad Robusta para Plantas Intervalo con Retardo", *XVIII Congreso Internacional Académico de Ingeniería Electrónica*, Chihuahua Chih, pp. 234-238, Octubre 1996.

10.<sup>o</sup>  
CONGRESSO BRASILEIRO  
DE AUTOMÁTICA

6.<sup>o</sup> CONGRESSO  
LATINO AMERICANO DE  
CONTROLE AUTOMÁTICO



RIO DE JANEIRO • 19 A 23 DE SETEMBRO • 1994



ORGANIZADO POR



SOCIEDADE BRASILEIRA DE AUTOMÁTICA

# Aproximación del Retardo de un Sistema de Control

Gerardo Romero G.<sup>1</sup>

Joaquín Collado M.

Universidad Autónoma de Nuevo León  
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica  
Cd. Universitaria, Apdo. Postal 65-F  
66450 San Nicolás de los Garza, Nuevo León  
FAX: (8) 332-08-70 TEL: (8) 332-08-70  
MEXICO

**RESUMEN:** En este trabajo se presenta una alternativa para la aproximación del retardo en un sistema de control (conocido también como DELAY). Comúnmente es utilizada una aproximación de Padé en el cual el grado del numerador es igual al grado del denominador, lo anterior es por que aparentemente preserva las propiedades del operador retardo; sin embargo, utilizando una aproximación de Padé en el cual el grado del numerador es menor en uno que el del denominador (grado relativo 1), la aproximación resulta ser mejor que la anterior. En éste trabajo se presentará un análisis de dicha aproximación.

## I. NOTACION

$A, M_1, M_2$	Matrices con elementos reales
$I_n$	Matriz identidad de dimensión $n \times n$
$0_{m \times n}$	Matriz de dimensión $m \times n$ ; en el cual todos los elementos son cero
$A^{-1}$	Inversa de la matriz $A$
$b_i$	$i$ -ésimo valor del vector $b$
$h_{(r,m)}$	Función racional con numerador de grado $n$ y denominador de grado $m$
$d^n f(s)/ds^n$	$n$ -ésima derivada de $f(s)$ con respecto a $s$
$\text{Real}(h)$	Parte real de la variable compleja $h$ .
$\text{Imag}(h)$	Parte imaginaria de la variable compleja $h$ .
$ h $	Magnitud de la variable compleja $h$ .

## II. INTRODUCCIÓN

Uno de los problemas que aparecen con mayor frecuencia en los sistemas de control, son los sistemas con retardo. En la gran mayoría de sistemas reales se presenta este fenómeno, ya que en ocasiones los elementos sensores demoran cierto tiempo en transmitir la información debida. En otros casos el retardo de transporte se presenta debido a las propiedades naturales obtenidas al modelar un proceso determinado. En ocasiones el retardo puede ser despreciable; sin embargo, no es el caso general. Existen variadas técnicas para resolver los problemas que se presentan dentro de este

tipo de sistemas, como por ejemplo: la ley de control para la estabilización de dichos sistemas presentadas en [3], [7]. También existen autores que se han preocupado por utilizar técnicas que pueden ser más aplicadas en la práctica [1], [5]; quienes proponen técnicas de control predictivo para resolver el problema. Una gran cantidad de artículos han sido enfocados a la estabilidad de sistemas con retardo, debido al problema que surge cuando retroalimentamos un sistema de este tipo. El problema de estabilidad es provocado, principalmente, por el hecho de que tienen una cantidad infinita de polos. Una de las publicaciones que son consideradas primordiales dentro de los sistemas con retardo es [9], ya que presenta una serie de teoremas que tratan sobre las raíces de la ecuación característica de un sistema de control con retardo. Otras aportaciones se refieren a el tema de estabilidad robusta de sistemas retardados [4], [6], quienes tratan el problema de la estabilidad de dichos sistemas cuando estos presentan incertidumbre en algunos de sus parámetros. En algunos casos el retardo en el sistema es aproximado por una función racional de primer orden; pero, en ocasiones esto es insuficiente. Este artículo propone el uso de la aproximación de Padé de grado relativo 1, con el fin de obtener una mejor aproximación del retardo, obteniendo con esto un resultado más confiable en el análisis del sistema aproximado. El artículo está organizado como sigue: la sección III presenta algunos conceptos sobre los cuales esta basada la aproximación, la sección IV sugiere la utilización de la aproximación de Padé de grado relativo 1, la sección V presenta las conclusiones del trabajo y por último la sección VI muestra un programa codificado

<sup>1</sup> El trabajo de este autor fue financiado por CONACYT.

en lenguaje MATLAB que calcula la aproximación de Padé de cualquier función analítica

### III PRELIMINARES

En esta sección se presentaran algunos conceptos básicos relacionados con la aproximación de funciones analíticas por funciones racionales. Partiremos del hecho de que toda función analítica puede ser expandida en una serie infinita de términos como sigue:

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k \quad (3.1)$$

la cual es válida en una región cercana al origen. Si el polinomio anterior es truncado para algún valor de  $k=n$ , podemos obtener un polinomio de grado  $n$ ; el cual podrá aproximarse a cualquier función continua según el teorema de Weirstrass [8]. Entonces el polinomio truncado quedaría como:

$$g_n(s) = \sum_{k=0}^n c_k s^k \quad (3.2)$$

este polinomio es comúnmente llamado "Polinomio de Taylor" y tiene la propiedad de que se interpola a la función original en los siguientes puntos:

$$g_n(0) = f(0), \dots, \frac{d^n g_n(0)}{ds^n} = \frac{d^n f(0)}{ds^n}$$

Así como las funciones continuas pueden ser aproximadas por polinomios; también, pueden ser aproximadas por funciones racionales del siguiente tipo:

$$h_{(n,m)}(s) = \frac{P_n(s)}{Q_m(s)} \quad (3.3)$$

donde

$$P_n(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n$$

$$Q_m(s) = b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m$$

el subíndice  $(n,m)$  indica el orden de la aproximación racional. El concepto de aproximación racional puede ser extendido al caso de variable compleja, ver [11]. Cuando las funciones racionales aproximantes tienen la propiedad de que interpolan a la función original y sus derivadas en el origen, entonces, la aproximación racional es conocida como aproximación de Padé. El siguiente teorema afirma formalmente lo antes mencionado.

**Teorema 3.1** [11] Si  $f(s)$  tiene  $n+m$  derivadas continuas en una región cercana al origen, entonces  $f(s)$  posee una aproximación de Padé de grado  $(n,m)$ . Además, los coeficientes  $a_j$  y  $b_j$ , ( $i=1, \dots, n$ ;  $j=1, \dots, m$ ) pueden ser obtenidos como sigue:

$$\sum_{j=0}^k c_j b_{k-j} = a_k \quad (3.4)$$

$$b_0 = 1, a_0 = c_0 b_0, a_{n+i} = b_{n+i} = 0 \quad \text{si } i > 1$$

donde:

$a_i, b_i$  - son los coeficientes de  $P_n(s)$  y  $Q_m(s)$  respectivamente

$c_i$  - son los coeficientes del polinomio de Taylor (3.2)

Desarrollando (3.4) se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas lineales que tienen solución única, la cual se puede representar matricialmente como sigue:

$$Ax = b \quad (3.5)$$

donde:

$$A = (M_1 | -M_2), \quad x = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n+m-1} \\ c_{n+m} \end{pmatrix}$$

y las matrices  $M_1$  y  $M_2$  tienen la siguiente estructura:

$$M_1 = \begin{pmatrix} I_n \\ 0_{m \times n} \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} c_0 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & c_0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & c_0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{n+m-1} & c_{n+m-2} & \dots & c_0 \end{pmatrix}$$

nuevamente los términos  $c_i$  son los coeficientes del polinomio de Taylor (3.2)

Es fácil verificar que  $A$  es una matriz de dimensión  $(n+m) \times (n+m)$  e invertible mientras que  $b$  es de dimensión  $(n+m)$ ; por lo tanto, los coeficientes se pueden obtener como:

$$x = A^{-1} b \quad (3.6)$$

**NOTA:** Es claro que la matriz  $A$  depende de los coeficientes del polinomio de Taylor, los cuales tienden a ser muy pequeños conforme se incrementa el grado del polinomio ya que aparece dividiendo un término factorial. Por tal razón la matriz tiende a ser mal



en el objeto de reducir problemas computacionales se recomienda utilizar coeficientes del polinomio de Taylor que sean menores a  $10^{-6}$ . El cálculo de los coeficientes de la función racional en la aproximación de Padé es realizada mediante un programa codificado en lenguaje MATLAB y se incluye en el apéndice de este artículo. Es conveniente mencionar que con la ecuación (36) se obtienen los coeficientes  $a_1, \dots, a_n$  y  $b_1, \dots, b_m$  debido a que  $b_0 = 1$  y  $a_0 = b_0 c_0$  y pueden obtenerse directamente.

#### IV. APROXIMACIÓN DEL RETARDO

Esta sección será enfocada al análisis de la aproximación de operador retardo en un sistema de control (ver figura 4.1).

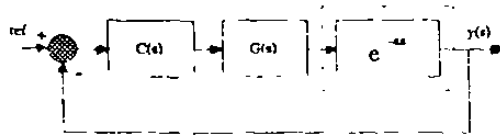


Figura 4.1 Diagrama de un sistema con retardo.

Es bien conocido que la propiedad más importante en todo sistema de control es la estabilidad, propiedad que puede fácilmente verificarse para el caso de sistemas lineales invariantes en el tiempo sin retardo. Sin embargo, esta propiedad se complica grandemente cuando introducimos el operador retardo dentro del proceso. El objetivo principal de este trabajo es presentar una nueva opción para aproximar dicho operador por una función racional. El motivo de seleccionar aproximantes racionales es, principalmente, por que son el tipo de funciones que se presentan al analizar un sistema de control en el dominio de la frecuencia. El aproximar el retardo por dichas funciones podría facilitar el análisis y síntesis de un sistema de control. La mayoría de los sistemas reales presentan retardo en su respuesta dinámica. El retardo que se presenta en los procesos es modelado en el dominio de la frecuencia por una función exponencial. Lo anterior genera una serie de problemas debido principalmente a que al retroalimentar el sistema; la estabilidad del sistema queda supeditada a la ganancia del mismo o el tiempo de duración del retardo, lo cual complica su análisis. Una forma de facilitar el análisis de estos sistemas es aproximando la función exponencial por una más simple, como:

##### Serie de Taylor

$$a) \quad e^{-s\theta} = 1 - s\theta + \frac{(s\theta)^2}{2!} - \frac{(s\theta)^3}{3!} + \dots$$

$$b) \quad e^{-s\theta} = \frac{1 - s\frac{\theta}{2}}{1 + s\frac{\theta}{2}}$$

##### Filtro Pasa Bajo

$$c) \quad e^{-s\theta} = \frac{1}{\left(1 + s\frac{\theta}{n}\right)^n}$$

en la gran mayoría de los casos la aproximación ante se acepta como válida sin presentar una análisis de. La aportación más importante de este artículo consiste en presentar un breve análisis de la aproximación retardo de un sistema de control así como proponer nueva forma de aproximarlos. En este trabajo se trata la aproximación de Padé propuesta en la sección anterior, es decir:

$$e^{-s\theta} = h_{(n,m)}(s) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} h_{(n,m)}(s) &= \frac{P_n(s)}{Q_m(s)} \\ &= \frac{a_0 + a_1(s) + \dots + a_n(s)^n}{b_0 + b_1(s) + \dots + b_m(s)^m} \end{aligned} \quad (2)$$

La aproximación del retardo más utilizada precisamente la aproximación de Padé de grado  $(n,1)$  (decir  $h_{(n,1)}$ ). Sin embargo aquí se propone la aproximación de Padé de grado  $(n-1, n)$ ; es decir,  $h_{(n-1, n)}$ , por el hecho de presentar mejores resultados. Para comenzar nuestro análisis obtendremos la respuesta a la frecuencia: error entre la función original y sus aproximantes:

##### Función Original

$$e^{-j\theta\omega}$$

##### Aproximación de Padé, grado relativo 0

$$h_{(n,n)}(j\omega) = r_n e^{j\theta_n}$$

$$r_n = |h_{(n,n)}(j\omega)|$$

$$\theta_n = \tan^{-1} \frac{\text{Imag}(h_{(n,n)}(j\omega))}{\text{Real}(h_{(n,n)}(j\omega))}$$

Aproximación de Padé, grado relativo 1

$$h_{(n-1,m)}(j\omega) = r_{n-1} e^{j\theta_{n-1}}$$

$$r_{n-1} = |h_{(n-1,m)}(j\omega)|$$

$$\theta_{n-1} = \tan^{-1} \frac{\text{Imag}(h_{(n-1,m)}(j\omega))}{\text{Real}(h_{(n-1,m)}(j\omega))}$$

el error es:

$$E_n(\omega) = e^{-j\theta\omega} - r_n e^{j\theta_n\omega}$$

$$E_{n-1}(\omega) = e^{-j\theta\omega} - r_{n-1} e^{j\theta_{n-1}\omega}$$

Es fácil verificar que  $r_n=1$  para todo valor de  $\omega$ ; mientras que  $r_{n-1} \rightarrow 0$  cuando  $\omega \rightarrow \infty$ . Por lo tanto es muy común pensar que por el hecho de que la magnitud de  $h_{(n,m)}$  es igual a la del retardo, el error será más pequeño que para el caso de  $h_{(n-1,m)}$ ; sin embargo, esto no sucede así ya que cuando la fase del retardo es igual a  $\theta_n + \pi$  el error es de magnitud 2, lo que no sucede con la aproximación  $h_{(n-1,m)}$ . Cuando  $\omega \rightarrow \infty$  el error  $E_{n-1}(\omega)$  se convierte en un círculo unitario centrado en el origen; mientras que  $E_n(\omega)$  se transforma en otro círculo unitario pero ahora corrido hacia la izquierda. Lo cual indica que el error máximo es obtenido por la aproximación de Padé  $h_{(n,m)}$ . Para obtener un mejor panorama de lo antes mencionado presentaremos un ejemplo, sean las siguientes aproximaciones de Padé:

$$1.- e^{-s} = \frac{1 - \frac{1}{2}s + \frac{1}{12}s^2}{1 + \frac{1}{2}s + \frac{1}{12}s^2} = h_{(2,2)}(s) \quad (4.3)$$

$$2.- e^{-s} = \frac{1 - \frac{1}{3}s}{1 + \frac{2}{3}s + \frac{1}{6}s^2} = h_{(1,2)}(s) \quad (4.4)$$

la ecuación del error esta representada por:

$$E_{(n,m)} = e^{-s} - h_{(n,m)}(s) \quad (4.5)$$

substituyendo  $s=j\omega$  y variando  $\omega \in \{80,100\}$  obtenemos las siguientes gráficas en el plano complejo:

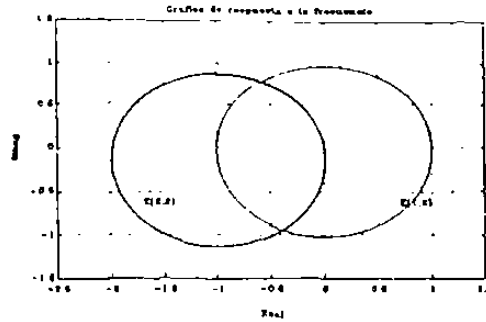


Figura 4.2 Gráfica del error de las dos aproximaciones

De la figura anterior podemos inferir que la aproximación  $h_{(1,2)}$  puede ser mejor que la  $h_{(2,2)}$  debido a que la cota superior mínima del error corresponde a  $h_{(1,2)}$ .

Otro aspecto importante es el comportamiento de la aproximación en el dominio del tiempo. A continuación se presenta la respuesta al escalón unitario de las aproximaciones realizadas anteriormente. Entonces se desea obtener la respuesta dinámica de  $h_{(2,2)}(t)$ ,  $h_{(1,2)}(t)$  así como las gráficas de los errores siguientes:

$$E_1(t) = h_{(2,2)}(t) - u(t-1) \quad (4.6)$$

$$E_2(t) = h_{(1,2)}(t) - u(t-1) \quad (4.7)$$

Las gráficas de la respuesta en el tiempo de las aproximaciones y del error de las mismas se presentan en las siguientes figuras:

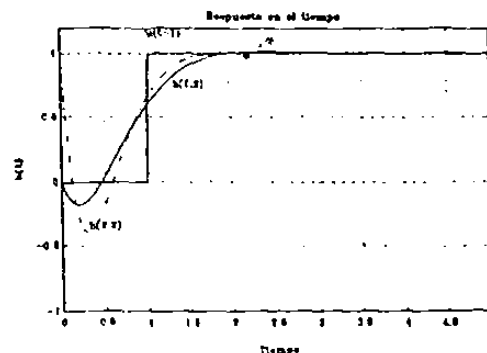


Figura 4.3 Gráfica de respuesta al escalón unitario de  $h_{(n,m)}(t)$ .

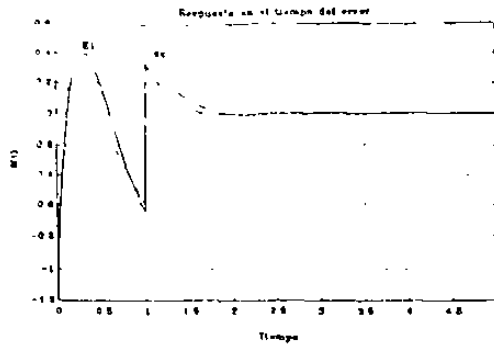


Figura 4.4 Gráfica de Respuesta al escalón unitario del error.

La forma más común de cuantificar el error es mediante el uso de alguna norma. Lo anterior es hecho con el fin de poder establecer una forma de comparar entre las diferentes aproximaciones realizadas. Algunas de las normas más comunes son las siguientes:

$$\|E(t)\|_1 = \int_0^{\infty} |E(t)| dt \quad (4.8)$$

$$\|E(t)\|_2 = \left( \int_0^{\infty} |E(t)|^2 dt \right)^{1/2} \quad (4.9)$$

$$\|E(t)\|_{\infty} = \max_t |E(t)| \quad (4.10)$$

El valor que se obtuvo de cada uno de los errores generados entre las aproximaciones y la función original fueron:

$$\begin{aligned} \|E_1(t)\|_1 &= .40589, & \|E_2(t)\|_1 &= .36391 \\ \|E_1(t)\|_2 &= .39272, & \|E_2(t)\|_2 &= .32596 \\ \|E_1(t)\|_{\infty} &= 1.0000, & \|E_2(t)\|_{\infty} &= 0.5917 \end{aligned}$$

De los valores obtenidos en la tabla podemos concluir que la aproximación más conveniente para utilizar sería la  $h_{(1,2)}$  debido principalmente a que el error es menor en todas las normas. Lo anterior puede presentarse formalmente como la conjetura de la siguiente proposición:

**Proposición 4.1:** Sea  $h_{(n,n)}(s)$  una aproximación de Padé de la función de variable compleja  $e^{st}$ . Entonces,  $h_{(n,2)}(s)$  es mejor aproximación en el sentido de que las normas 1, 2,  $\infty$  del error de la respuesta al escalón unitario, es menor que la aproximación de Padé  $h_{(n,n)}(s)$ ; excepto, para el caso  $n=1$ . Además, la aproximación de dicha función puede obtenerse mediante la siguiente fórmula:

$$D_p = \sum_{j=0}^p \frac{(2p-j-1)! p!}{(2p-1)! j! (p-j)!} (s\theta)^j$$

$$N_{p-1} = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{(2p-j-1)! (p-1)!}{(2p-1)! j! (p-1-j)!} (-s\theta)^j$$

NOTA: La tabla del error  $p$  anteriormente así como el análisis de respuesta frecuencia justifica, en cierta forma, la realizada en la proposición 4.1 (aunque, mencionar que carece de formalidad debido existe, en este momento, una prueba para este  $n$ ). Es necesario comentar que la norma  $\infty$  de la aproximación  $h_{(1,1)}$  resulta ser mejor que la misma del error  $h_{(0,0)}$  por lo cual se excluye esa proposición al hacer  $n=1$ . Para mayor información respecto a las formulas (4.16), (4.17) ver [10].

Por último presentaremos la ubicación de los polos y ceros "o" de las dos aproximaciones.

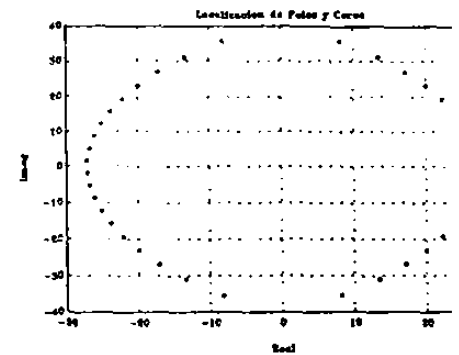


Figura 4.5 Localización de polos y ceros de  $h(20,20)$  (s)

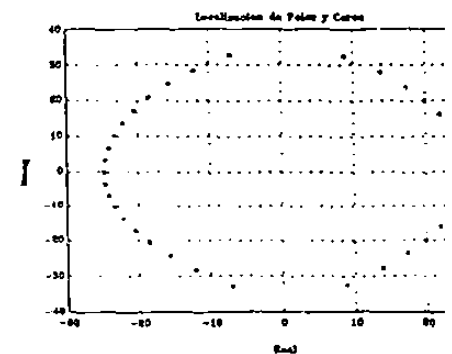


Figura 4.6 Localización de polos y ceros de  $h(19,20)$  (s)

## V. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

En este trabajo se propuso la aproximación de Padé como alternativa para utilizarla en la aproximación del retardo con el objeto de hacer una aproximación más fiel de dicho retardo. También, es necesario mencionar que algunos puntos podrían ser considerados como problemas abiertos a la investigación, tales como

- Presentar un análisis en cual se considere el grado relativo de proceso original y en base a esto seleccionar la aproximación más conveniente; ya que, como se vio anteriormente, el grado relativo de la aproximación es un factor importante

- Demostrar o probar lo contrario en la proposición 4.1.

## VI. APÉNDICE

```
%
%
% [NUM,DEN] = PADE(C,N,M)
%
%      Calcula los coeficientes de función racional que
%      aproxima al polinomio de Taylor. El programa
%      entrega los valores de los coeficientes del
%      numerador y denominador en los vectores NUM y DEN
%      respectivamente
%
% C - Terminos de la serie de Taylor
% N - Grado del numerador
% M - Grado del denominador
%
function [num,den] = pade(c,m,n)
% verifica error
lim = max(size(c)) - 1;
cot = m+n;
if (cot > lim),
    disp('*****');
    disp('** Faltan terminos a la serie de Taylor**');
    disp('*****');
    break
end
if (n == 0),
    num = 1;
    den = 1;
    break
end
[nf,nc] = size(c);
if (nf > nc),
    c = c;
else
    c = c';
end
% Forma matriz identidad
vec = c;
m1 = [eye(m);zeros(n,m)];
m2(:,1) = vec(1:n+m);
% Forma matrices M1 y M2
for i=2:n,
    vec = [0,vec(1:n+m-1)];
    m2(:,i) = vec;
end
% Forma matriz A
```

```
n = [m1 -n];
% Forma matriz B
b = -(2*n+m+1);
% Soluciona sistema de ecuaciones
x = inv(a)*b;
n1 = [1 x 1 m];
d1 = [1 x m+1 m+n];
% Ordena sal de coeficientes
num = B*tr(n1);
den = tr(d1);
end
```

## REFERENCIAS

- [1] - Bahill A T., "A Simple Adaptive Smith Predictor for Controlling Time-Delay System", IEEE Control Systems Mag., Vol 1, pp 16-22, Mayo 1983
- [2] - Cheney E W., Introduction to Approximation Theory, McGraw-Hill, New York, 1966
- [3] - Fiaghedzi YA and Pearson A E., "Feedback Stabilization of Linear Autonomous Time Lag Systems", IEEE Trans. Aut. Cont. Vol. AC-31, No 9, Septiembre 1986.
- [4] - Fu M., Olbrot A W. and Polis M P., "Robust Stability for Time-Delay Systems The Edge Theorem and Graphical Tests", IEEE Trans. Aut. Cont., Vol AC-34, No 8, Agosto 1989.
- [5] - Haeglund T., "A Predictive PI Controller for Process with Long Dead Times", IEEE Control Systems Mag., Vol 12, pp. 57-60, Febrero 1992.
- [6] - Kharitonov V L., "Stability of Interval Quasipolynomials", 2nd IFAC workshop on Systems Structure and Control, Prague Czechoslovakia, 3-5 Septiembre 1992.
- [7] - Manitius A. Z. and Olbrot A. W., "Finite Spectrum Assignment Problem for Systems with Delay", IEEE Trans. Aut. Cont., Vol AC-24, No 4, Agosto 1979
- [8] - Rivlin T. J., An Introduction to the Approximation of Function, Dover Publications Inc. New York, 1969
- [9] - Porovagin L. S., "On the Zeros of Some Elementary Transcendental Function", Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., Vol 6, pp. 115-134, 1942 Ver también, Amer. Math. Trans., Vol. 2-1, pp. 95-110, 1955
- [10] - Ramon C. A., "Control de Espesor en el Proceso del Galvanizado", Tesis de Maestría, FIME UANL, Marzo 1993
- [11] - Rudin W., Análisis Real y Complejo, McGraw-Hill, 1988

Proceedings of the

Köppen-Selig

# 1995 American Control Conference

The Westin Hotel, Seattle, Washington

June 21—June 23, 1995

Sponsoring Organization

*The American Automatic Control Council*

US. National Member Organization of the

*International Federation of Automatic Control (IFAC)*

## MEMBER ORGANIZATIONS

*American Institute of Aeronautics and Astronautics*

*American Institute of Chemical Engineers*

*Association of Iron and Steel Engineers*

*American Society of Mechanical Engineers*

*Institute of Electrical and Electronic Engineers*

*Instrument Society of America*

*Society of Computer Simulation*

The 1995 ACC is held in cooperation with IFAC

Volume 1 of 6

---

**WA 12 Adams  
Delay Systems**

---

Chair Armando A. Rodriguez *Arizona State Univ.*  
 Cochair Andrzej W. Olbrot *Wayne State Univ.*

9:15 — 9:35  
**Relay-tuned FSA Control for Unstable Processes  
 with Deadtime** .....311  
 Q.G. Wang *National Univ. of Singapore*  
 T. H. Lee *National Univ. of Singapore*  
 K.K. Tan *National Univ. of Singapore*

9:35 — 9:55  
**Mixed Sensitivity Problem for Delay-free Systems  
 and Time-delay Systems** .....316  
 Keiji Watanabe *Yamagata Univ.*  
 Pramod P. Khargonekar *Univ. of Michigan*  
 Takaharu Hiroe *Mitsubishi Heavy Ind., Ltd.*

9:55 — 10:15  
 **$H_\infty$  Control in Systems with a Single Input Delay** .....321  
 Gilead Tadmor *Northeastern Univ.*

10:15 — 10:35  
**Robust Stabilizability of Uncertain Linear Time Delay  
 Systems with Markovian Jumping Parameters** .....326  
 K. Benjelloun *Ecole Poly. de Montreal*  
 El-Kebir Boukas *Ecole Poly. de Montreal*  
 H. Yang *Ecole Poly. de Montreal*

10:35 — 10:55  
**On a Sufficient Condition for Robust Stability of Delay  
 Systems** .....328  
 Pin-Lin Liu Chien *Kao Inst. of Tech.*  
 Te-Jen Su *National Kaohsiung of Tech.*

10:55 — 11:15  
**Robust Stability of Interval Plants with Perturbed  
 Time Delay** .....330  
 Gerardo G. Romero *Univ. Auton. de Nuevo Leon*  
 Joaquin M. Collado-Moctezuma *Univ. Auton. de Nuevo Leon*

---

**WA 13 Olympic  
Neural Networks for Control & Identification**

---

Chair Benito Fernandez *Univ. of Texas at Austin*  
 Cochair R. Hyland *Harris Corporation*

9:15 — 9:35  
**Adaptive Critic Based Neural Networks for Control** .....335  
 S.N. Balakrishnan *Univ. of Missouri, Rolla*  
 Victor Blega *Univ. of Missouri, Rolla*

9:35 — 9:55  
**A Hybrid Algebraic Equations of Motion and Neural  
 Estimator to Implement the Direct Control Method** .....340  
 Hayran Oz *Ohio State Univ.*  
 Gary G. Yen *Phillips Research Labs.*

9:55 — 10:15  
**Neural Network System Identification for Improved  
 Noise Rejection** .....345  
 David C Hyland *Harris Corp.*  
 Emmanuel G. Collins, Jr. *Florida A&M/Florida State*  
 Wassim M. Haddad *Georgia Inst. of Tech.*  
 Douglas L. Hunter *Florida Inst. of Tech.*

10:15 — 10:35  
**A Novel Neural Internal Model Control Structure** .....350  
 Gordon Lightbody *Queen's Univ. of Belfast*  
 George W. Irwin *Queen's Univ. of Belfast*

10:35 — 10:55  
**Adaptive Control using Neural Networks and  
 Approximate Models** .....355  
 Kumpati S. Narendra *Yale Univ.*  
 Snehasis Mukhopadhyay *Indiana-Purdue Univ.*

10:55 — 11:15  
**Near-time-optimal Neural Control of Discrete  
 Time Systems** .....360  
 R. R. Zakrzewski *Oregon State Univ.*  
 Ronald R. Mohler *Oregon State Univ.*

---

**WA 14 Cascade I  
Robotics: Force Control**

---

Chair Nikolaos Papanikolopoulos *Univ. of Minnesota*  
 Cochair Haruhiko Asada *Massachusetts Inst. of Tech.*

9:15 — 9:35  
**Hybrid Force/position Control for Manipulators with  
 Motor Dynamics using a Sliding-adaptive Approach** .....361  
 Chi-Man Kwan *Univ. of Texas at Arlington*

9:35 — 9:55  
**Direct Adaptive Control of Force-guided Assembly  
 Robots using Tuned Dither** .....37  
 Sooyong Lee *Massachusetts Inst. of Tech.*  
 Haruhiko Asada *Massachusetts Inst. of Tech.*

9:55 — 10:15  
**Adaptive Motion/force Control of Mechanical Systems  
 with Nonholonomic Pfaffian Constraints** .....37  
 Yury Stepanenko *Univ. of Victoria*  
 Chun-Yi Su *Univ. of Victoria*

$$\begin{aligned}
 N_2(s) &= q_0^2 + q_1^2 s + q_2^2 s^2 + q_3^2 s^3 + q_4^2 s^4 + q_5^2 s^5 + \dots \\
 N_3(s) &= q_0^3 + q_1^3 s + q_2^3 s^2 + q_3^3 s^3 + q_4^3 s^4 + q_5^3 s^5 + \dots \\
 N_4(s) &= q_0^4 + q_1^4 s + q_2^4 s^2 + q_3^4 s^3 + q_4^4 s^4 + q_5^4 s^5 + \dots \\
 N_5(s) &= q_0^5 + q_1^5 s + q_2^5 s^2 + q_3^5 s^3 + q_4^5 s^4 + q_5^5 s^5 + \dots
 \end{aligned} \quad (2.8)$$

For the denominator we define  $D_1(s), D_2(s), D_3(s), D_4(s)$  as above polynomials substituting  $q=r$ .

**Lemma 2.3:** The value set of the family of quasipolynomials (2.1) is composed at each frequency by the union of octagons which change their vertices when the delay  $\tau$  is increased, i.e. the value set is as follows:

$$V_s(\omega, \tau) = \bigcup_{\substack{\omega \in \Omega \\ \tau \in \tau_{max}}} P(j\omega, Q, R, e^{-j\omega\tau})$$

where:

$$P(j\omega_s, Q, R, e^{-j\omega_s\tau}) = \text{Conv}(v_l : l=1, \dots, 8)$$

$$v_{1,1} = D_{1,1}(j\omega_s) + N_1(j\omega_s) e^{-j\omega_s\tau}$$

$$v_{1,2} = D_{1,1}(j\omega_s) + N_2(j\omega_s) e^{-j\omega_s\tau}$$

$$l=0, 1, 2, 3; k = (s+0) \bmod 4 + 1; h = (s+1) \bmod 4 + 1$$

$$\begin{cases}
 0 - \# 0 + 2n\pi \leq \omega\tau < \frac{\pi}{2} + 2n\pi, & 1 - \# \frac{\pi}{2} + 2n\pi \leq \omega\tau < \pi + 2n\pi \\
 2 - \# \pi + 2n\pi \leq \omega\tau < \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, & 3 - \# \frac{3\pi}{2} + 2n\pi \leq \omega\tau < 2\pi + 2n\pi
 \end{cases}$$

for  $\omega_s, \tau$  fixed and  $n=0, 1, 2, 3, \dots$

**Proof:** The proof is similar as the lemma 2.2, we can use the result of [2] where the value set of  $N(j\omega)$  and  $D(j\omega)$  are rectangles with vertex in the Kharitonov polynomials.

**Remark:** Notice that the above result permits an easy way to compute the value set of interval plants with perturbed time delay and it can be calculated with a MATLAB program. Notice also, that the value set is not convex, neither generated by a finite number of points; e.g. it has "curved" edges.

### III MAIN RESULT

This section will present necessary and sufficient condition for Robust Stability of an Interval Plant with delay output with unit feedback. The result is based on Zero Exclusion Principle, see [1], [3].

**THEOREM 3.1 [Zero Exclusion] :** If there is at least one quasipolynomial in the family that is stable, then (2.1) is Robust Stable if and only if  $\forall \omega \in [0, \infty)$  and  $\forall \tau \in [0, \tau_{max}] 0 \notin P(j\omega, Q, R, e^{-j\omega\tau})$ .

**Proof:** the zeros of the quasipolynomials are continuous of their arguments (coefficients and delay), [14], [19]. Then, continuity and existence of one quasipolynomial stable allow us to apply the Zero Exclusion Principle, and the result follows. We guarantee the interval  $\omega \in [0, \infty)$  from Lemma 2.1, it is enough.

We can see that this result is different from others, because this includes perturbed time delay.

**Remark:** This result is generalized to the case  $\tau \in [\tau_{min}, \tau_{max}]$ .

#### Important Case

Consider the case in which there is not uncertainty in  $N(s, q)$  and  $D(s, r)$ ; i.e.:

$$P(s, e^{-s\tau}) = D(s) + N(s)e^{-s\tau} \quad \tau \in [0, \tau_{max}] \quad (3.1)$$

**COROLLARY [Stability independent of delay]:** If there is at least one quasipolynomial (3.1) stable, then the whole family (3.1)  $\forall \tau \in \mathbb{R}$ ,

is Robust Stable if and only if  $|N(j\omega)| < |D(j\omega)| \forall \omega \in [0, \infty)$ .

**Proof:** the proof is omitted due to lack of space.

**Remark:** the previous corollary is a particular version of the small gain theorem, notice that  $|N(j\omega)| < |D(j\omega)|$  is equivalent to  $|G(s)| < 1$ , see [8]

**COROLLARY:** Let  $P(j\omega, e^{-s\tau})$  with  $\tau \in [0, \tau_{max}]$  and let  $\omega_s \in W = \{\omega \in [0, \infty) \mid |D(j\omega)| = |N(j\omega)|\}$  the set of frequency points such that Magnitud of numerator is equal to Magnitud of denominator. And suppose that  $P(s, e^{-s\tau})$  is stable for  $\tau=0$ . Then  $\tau_{max}$  such that plant is stable  $\forall \tau \in [0, \tau_{max}]$  is given by:

$$\tau_{max} = \min(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$$

$n$  - number of times that  $\omega_s$  appears.

$$\tau_l = \frac{\pi + \Delta N(j\omega_l) - \Delta D(j\omega_l)}{\omega_l}, \quad \omega_l \in \omega_n, \quad l=1, 2, \dots, n.$$

**Proof:** Just check for these values if the value set contains the zero. See Lemma (2.2).

**Remark:** The result of previous Corollary is the same of presented in [19], nevertheless the proof is simpler. Also this result does not imply that the system remains unstable for  $\forall \tau > \tau_{max}$ .

### IV CONCLUSIONS

We have shown necessary and sufficient conditions for Robust Stability of systems with delay at the output and unit feedback, and a characterization of value set was presented too. However, an important open research problem is to determine Robust Stability using only some specific polynomials. The goal of this paper was present a value set characterization of a class of quasipolynomials and make an easy approach to verify robust stability. We have to say that there exist some results about this problem, for example in [4] the result is more general, but here the approach is easier. This result is different from [5], [6], because we consider uncertainty in the coefficients and time delay of a class of quasipolynomials and they consider a more general class of quasipolynomials without uncertainty in the coefficients, then the results are not comparable.

### REFERENCES

- [1] R.R. Bitenski, "New Tools for Robust Control Systems", Short Course, Monterey N.L., México, Jan 1992
- [2] R.R. Bitenski, C.V. Hollot, F.J. Kraus, R. Tempo, "Extreme Point Result for Robust Stabilization of Interval Plants with First Order Compensator", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol 37, pp 707-714, June 1992
- [3] R.R. Bitenski, "New Tools for Robustness of Linear Systems", Macmillan Publishing Company, 1994
- [4] R.R. Bitenski and Z. Ben, "Robust Stability of Perturbed Systems with Time Delay", Automatica, Vol 25, pp 371-381, 1989
- [5] J. Chen, D. Xu, B. Shakh, "On Sufficient Conditions For Stability Independent of Delay", Proceedings of the American Control Conference, Baltimore Md, pp 1929-1933, June 1994.
- [6] J. Chen, "On Computing The Maximal Delay Interval For Stability Of Linear Delay Systems", Proceedings of the American Control Conference, Baltimore Md, pp 1934-1938, June 1994.
- [7] E. Desoer, "Kharitonov's Theorem revisited", Systems & Control Letters 11, pp 381-384, 1988.
- [8] C.A. Desoer and M. Vidyasagar, "Feedback Systems: Input-Output Properties", Academic Press, 1975.
- [9] R. Dornes, "A solution of Optimum Time Delay Margin Problem for SISO Systems", Proceedings of 31st Conference on Decision and Control, Tucson-AZ, pp 2982-2986, December 1992.
- [10] H. Dym, T.T. Georgiou, M.C. Smith, "Direct Design of Optimal Controllers for Delay Systems", Proceedings of 32nd Conference on Decision and Control, San Antonio-Tx, pp 3621-3623, December 1993
- [11] M. Fu, A.W. Olbrot, M.P. Polis, "Robust Stability for Time Delay Systems: The Edge Theorem and Graphical Tests", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol 34, pp 813-820, August 1989.
- [12] J. Hochman, J. Kogan, E. Zahab, "Simple Stability Criterion for quasipolynomial families with uncertain coefficients and uncertain delay", Proceedings of 32nd Conference on Decision and Control, San Antonio-Tx, pp 3482-3484, December 1993.
- [13] M. Malik-Zavari and M. Jamshidi, "Time-Delay Systems Analysis, Optimization and Applications", North-Holland Systems and Control Series Volume 8, 1987
- [14] A.Z. Manitla, A.W. Olbrot, "Finite Spectral Assignment for Systems with Delay", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol 34, pp 841-853, August 1979
- [15] S. Phadjaracharath and K. Furuta, "Deterministic Control of Uncertain State Delayed Systems", Proceedings of 31st Conference on Decision and Control, Tucson-AZ, pp 2670-2673, December 1992.
- [16] S. Phadjaracharath and K. Furuta, "Memoryless Stabilization of Uncertain Linear System Including Time-Varying State Delay", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol 37, pp 1022-1026, July 1992.
- [17] T. Bu and C. Huang, "Robust Stability of Delayed Dependence for Linear Uncertain Systems", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol 37, pp 1456-1458, October 1992.
- [18] H. Wu and K. Masuhara, "Quantitative Measure of Robustness for Uncertain Time-Delay Dynamical Systems", Proceedings of 32nd Conference on Decision and Control, San Antonio-Tx, pp 3004-3008, December 1993.
- [19] X. Zou and C. Peng, "Robust Stability of Control Systems with Parametric Uncertainty", Proceedings of 31st Conference on Decision and Control, Tucson-AZ, pp 1868-1869, December 1992.

XVIII CONGRESO INTERNACIONAL ACADEMICO DE  
INGENIERIA ELECTRONICA

ELECTRO  
LECTRO  
ECTRO  
CTRO  
TRO  
RO  
O 96

INSTITUTO TECNOLOGICO DE CHIHUAHUA  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACION



## CONSTRUCCION DEL "VALUE SET" PARA SISTEMAS DE CONTROL CON RETARDO DE TRANSPORTE

**Gerardo Romero G.<sup>1</sup>**

Instituto Tecnológico de Nuevo Laredo  
Depto. de Ingeniería Eléctrica y Electrónica  
Av. Reforma No. 2007  
Nuevo Laredo, Tamps.  
Tel: (87) 15-56-56 Fax: (87) 15-56-56  
Email: gromero@gama.fime.uanl.mx

**Joaquín Collado M.**

F. I. M. E. - U. A. N. L.  
Doctorado en Ingeniería Eléctrica  
Cd. Universitaria, Apdo. Postal 30-F  
San Nicolás de los Garza, N. L.  
Tel: (8) 329-40-20 Fax: (8) 376-45-14  
Email: jcollado@ccr.dsi.uanl.mx

**RESUMEN:** En este artículo se presenta una caracterización del "value set" para una clase de sistemas de control con retardo. Esta caracterización está basada, principalmente, en algunas propiedades y operaciones que se definen para "value sets" de tipo rectangulares, los cuales son generados por ecuaciones características que tienen incertidumbre de tipo intervalo. La caracterización que aquí se presenta permite realizar un programa para su construcción, simplificando en gran forma su obtención.

**ABSTRACT:** In this paper we show a characterization of the "value set" for a class of time delay systems. We get the main result using some properties which they are defined for rectangular "value sets". With this characterization we can compute the "value set" using the computer.

**Palabras Clave:** *Curva de Mikhailov, Polinomios de Kharitonov.*

### NOTACION

<b>R</b>	Campo de los números reales.
<b>C</b>	Campo de los números complejos.
$ \beta $	Valor absoluto o magnitud de $\beta$ .
$\Delta\beta$	Angulo de $\beta$ .
$\text{Im}(z)$	Parte imaginaria de $z$ .
$\text{Re}(z)$	Parte real de $z$ .

### 1. INTRODUCCIÓN

El concepto del "value set" aparece en la década de los 60's como una técnica para realizar análisis en diferentes áreas como la ingeniería, matemáticas, economía, etc. A finales de la década de los 80's, surgen grandes aplicaciones en el área de

control automático para hacer análisis de estabilidad robusta; la gran ventaja de utilizar esta técnica es que transforma el problema original de estabilidad robusta, que es un problema analítico, en un problema únicamente gráfico; simplificando en gran forma la verificación de esta propiedad. En este artículo será presentado un método para la construcción del "value set" para una clase de sistemas de control con retardo de tiempo, el cual será definido dentro de esta sección. El artículo está organizado de la siguiente forma: en la primer sección se presenta una breve introducción sobre el concepto del "value set", así como su definición; en la sección 2 una serie de definiciones y operaciones con "value sets" serán presentadas; la sección 3 muestra el resultado principal de este trabajo y por último en la sección 4 las conclusiones de este artículo.

#### 1.1 Definición del "value set"

Como se mencionó con anterioridad, el "value set" fue definido, recientemente, para realizar análisis de estabilidad en sistemas de control lineales invariantes en el tiempo representados por funciones de transferencia; es claro que la propiedad de estabilidad de este tipo de sistemas dinámicos queda determinada solamente por los polos de la función de transferencia o lo que es lo mismo, la raíces de la ecuación característica, que para este tipo de sistemas, son funciones polinomiales. Cuando se obtiene un modelo matemático de un sistema físico, para simplificarlo es necesario hacer una serie de consideraciones que realmente no satisfacen el sistema físico, por lo que el modelo matemático no representa en forma exacta el comportamiento dinámico del sistema; esta falta de exactitud se puede compensar de diferentes formas, una de estas es considerar cierta incertidumbre que puede tener diferentes formas, ver [1], [3], [5]. El "value set" se define para sistemas

<sup>1</sup> El trabajo de este autor fue parcialmente financiado por CONACYT.

dinámicos que presentan incertidumbre de tipo paramétrica; existen diferentes tipos de incertidumbre paramétrica, ver [2]. En este artículo se considerará que la incertidumbre que presenta el sistema físico es de tipo intervalo y se puede expresar como incertidumbre en cada uno de los coeficientes del polinomio formado por la ecuación característica, tal como se muestra en la siguiente ecuación:

$$p(s, q) = \sum_{k=1}^n q_k s^k \quad q_k^- \leq q_k \leq q_k^+ \quad (1)$$

donde cada uno de los coeficientes  $q_k$  tienen incertidumbre con límites entre  $q_k^-$  y  $q_k^+$ ; es claro que la ecuación (1) representa una familia de polinomios para todo valor de la incertidumbre, la cual será definida como sigue:

$$p \triangleq \{ p(s, q) : \forall q_i^- \leq q_i \leq q_i^+ \} \quad (2)$$

El "value set" es la gráfica en el plano complejo de la familia de polinomios presentada en (2) cuando es evaluada en  $s=j\omega$ ; esta definición es presentada a continuación:

**DEFINICION 1** El value set de la familia de polinomios definida en (2) es la gráfica en el plano complejo de  $p(s, q)$  cuando  $s=j\omega$ ; es decir:

$$V(\omega) \triangleq \{ p(j\omega, q) : \forall q_i^- \leq q_i \leq q_i^+ ; \omega \in \mathbb{R} \} \quad (3)$$

entonces, el "value set" de la familia de polinomios (2) será denotado como  $V(\omega)$ . Esta gráfica en el plano complejo toma diferentes formas geométricas dependiendo del tipo de incertidumbre que se considere; en nuestro caso sólo se considerará incertidumbre intervalo y para este caso la figura que forma es un rectángulo, tal como se muestra en seguida, ver [4]:

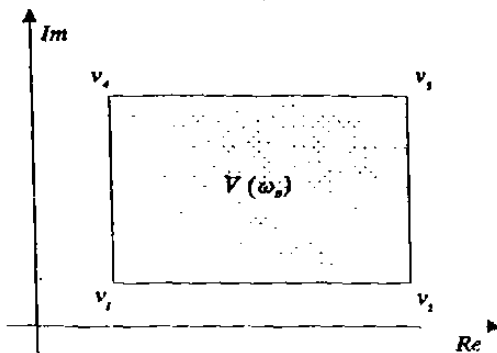


Figura 1. Value set rectangular.

donde los vértices del rectángulo  $v_i$  son los polinomios

de Kharitonov evaluados para en una frecuencia fija  $\omega_0$ , ver [6]. Es importante mencionar que cuando se considera otro tipo de incertidumbre, figura que se forma es diferente; sin embargo en este artículo sólo se trabajará con "value sets" rectangulares, como el presentado en la figura anterior.

**1.2 Definición del "value set" para sistemas con retardo**

Nuestro trabajo está enfocado a la construcción del "value set" de una clase particular de sistemas de control con retardo, los cuales son llamados comúnmente, sistemas de control con retardo de transporte, ver [7]. Como se presentó anteriormente, el "value set" se define para una ecuación característica que tiene incertidumbre; en este caso se considerará la siguiente ecuación característica con incertidumbre:

$$p(s, q, r, e^{-\tau s}) = d(s, r) + n(s, q)e^{-\tau s} \quad (4)$$

donde:

$$d(s, r) = \sum_{k=0}^n r_k s^k$$

$$n(s, q) = \sum_{k=0}^m q_k s^k$$

$$q_i^- \leq q_i \leq q_i^+ ; r_i^- \leq r_i \leq r_i^+ \quad (5)$$

al tipo de funciones presentadas en la ecuación (4), se les conoce como quasipolinomios y determinan la propiedad de estabilidad de un sistema con retardo; considerando la incertidumbre en el quasipolinomio anterior, se obtiene una familia de quasipolinomios que será definida como:

$$p_r \triangleq \{ p(s, q, r, e^{-\tau s}) : \forall q_i^- \leq q_i \leq q_i^+ ; r_i^- \leq r_i \leq r_i^+ ; \tau \in [0, \tau_{max}] \} \quad (5)$$

el "value set" para el tipo de sistemas representado por la ecuación característica (4), será definido de la siguiente forma:

**DEFINICION 2** El value set  $V_r(\omega)$  de la familia de quasipolinomios definida en (5) es la gráfica en el plano complejo de  $p(s, q, r, e^{-\tau s})$  cuando  $s=j\omega$ ; es decir:

$$V_r(\omega) \triangleq \{ p(j\omega, q, r, e^{-\tau s}) : \forall q_i^- \leq q_i \leq q_i^+ ; r_i^- \leq r_i \leq r_i^+ ; \tau \in [0, \tau_{max}] \} \quad (6)$$

**2. PROPIEDADES PARA "VALUE SETS" RECTANGULARES**

En esta sección se presentarán algunas

definiciones y operaciones para "value sets" rectangulares, las cuales serán de gran importancia en la construcción del "value set"  $V_s(\omega)$  definido en (6). Estas operaciones son válidas para "value sets" rectangulares, como el presentado en la figura 1.

**DEFINICION 3** La suma directa de dos value sets se define como:

$$V_1(\omega_0) + V_2(\omega_0) \triangleq \{ p = p_1 + p_2 : p_1 \in V_1(\omega_0) ; p_2 \in V_2(\omega_0) \} \quad (7)$$

**DEFINICION 4** El producto de un término escalar por el value set se define como:

$$\beta V(\omega_0) \triangleq \{ p = \beta p_1 : \beta \in \mathbb{C} ; p_1 \in V(\omega_0) \} \quad (8)$$

es importante mencionar que el producto de un factor escalar por el "value set" evaluado en un valor fijo  $\omega_0$ , amplifica y rota el "value set" original; el incremento en el tamaño del "value set" es determinado por  $|\beta|$  y el ángulo de rotación lo determina  $\Delta\beta$ . Entonces, el "value set" de un polinomio con incertidumbre intervalo, como el presentado en la ecuación (1), multiplicado por un término escalar puede quedar como se muestra en la siguiente figura:

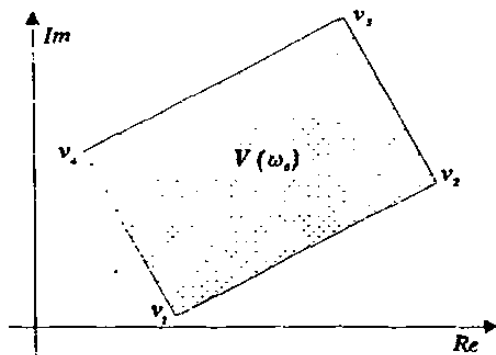


Figura 2. Value set multiplicado por un factor escalar.

donde nuevamente los vértices del rectángulo girado  $v_i$  ( $i=1,2,3,4$ ) corresponden a los polinomios de Kharitonov evaluados en  $s=j\omega_0$ , pero en esta ocasión no están ordenados; es decir,  $v_1$  puede ser cualquiera de los cuatro polinomios de Kharitonov y lo mismo para  $v_2, v_3, v_4$ . Lo anterior es por que el ángulo de rotación puede ser mayor a  $\pi/2$  y entonces el orden de los vértices es alterado. Las definiciones y operaciones que se presentarán posteriormente se harán considerando que los vértices del "value set" rectangular no están en orden.

**DEFINICION 5** Considérese dos value sets rectangulares  $V_1(\omega_0)$  y  $V_2(\omega_0)$  evaluados en un valor fijo

$\omega_0 \in \mathbb{R}$ , entonces se dirá que  $V_1(\omega_0)$  y  $V_2(\omega_0)$  están ALINEADOS para ese valor de  $\omega_0$  si  $\theta_1 = \theta_2$ , donde,

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left( \frac{\text{Im}(v_1) - \text{Im}(v_{1-1})}{\text{Re}(v_1) - \text{Re}(v_{1-1})} \right)$$

$$\theta_2 = \tan^{-1} \left( \frac{\text{Im}(v'_1) - \text{Im}(v'_{1-1})}{\text{Re}(v'_1) - \text{Re}(v'_{1-1})} \right)$$

Entonces, dos "value sets" están alineados si tienen el mismo ángulo de inclinación como se muestra en la siguiente figura:

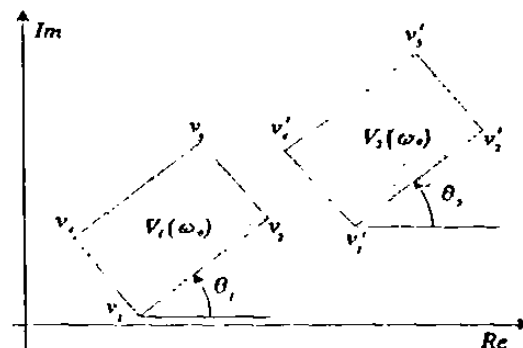


Figura 3. Value sets rectangulares alineados.

por el contrario, si dos "value sets" no están alineados, entonces se dirá que están desalineados. Si dos "value sets" rectangulares están alineados para cualquier frecuencia  $\omega \in \mathbb{R}$ ; entonces, se dirá que están alineados para toda frecuencia. Para finalizar esta sección se presentarán los siguientes resultados.

**LEMA 1** Sean  $V_1(\omega_0)$  y  $V_2(\omega_0)$  dos value sets rectangulares y alineados, como en la figura 3, entonces, la suma directa  $V_1(\omega_0) + V_2(\omega_0)$  también es un value set rectangular con vértices formados por  $p_i = v_i + v'_i$  ( $i=1,2,3,4$ ).

**LEMA 2** Sean  $V_1(\omega_0)$  y  $V_2(\omega_0)$  dos value sets rectangulares y desalineados. Entonces, la suma directa  $V_1(\omega_0) + V_2(\omega_0)$  es un octágono formado con los vértices  $p_i$  ( $i=1, \dots, 8$ ); los cuales están determinados como sigue

$$\begin{aligned}
 p_1 &= v_1 + v_1' \\
 p_2 &= v_2 + v_1' \\
 p_3 &= v_2 + v_2' \\
 p_4 &= v_3 + v_2' \\
 p_5 &= v_3 + v_3' \\
 p_6 &= v_4 + v_3' \\
 p_7 &= v_4 + v_4' \\
 p_8 &= v_1 + v_4'
 \end{aligned}$$

esta suma de dos "value sets" desalineados tiene la siguiente forma:

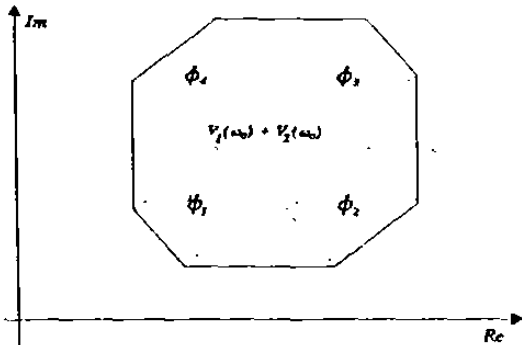


Figura 4. Suma de dos value sets desalineados.

donde  $\phi_i$  están determinados como:

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= v_1' + V_2(\omega_0) \\
 \phi_2 &= v_2' + V_2(\omega_0) \\
 \phi_3 &= v_3' + V_2(\omega_0) \\
 \phi_4 &= v_4' + V_2(\omega_0)
 \end{aligned}$$

La demostración de los lemas anteriores se obtiene en forma directa de la figura que forman dos "value sets" rectangulares. De la forma que tiene la ecuación característica de un sistema de control con retardo (4), se puede observar que el "value set" resultante está formado por la suma de dos "value sets" en el cual, uno de ellos es multiplicado por un factor escalar, que en este caso lo forma la función que representa el retardo  $e^{-s\tau}$ .

### 3. CONSTRUCCION DEL VALUE SET PARA SISTEMAS CON RETARDO

En esta sección se presenta el resultado principal de este artículo, que es una caracterización del "value set" para el sistema dinámico con la ecuación característica definida en (4). Para presentar

este resultado, es necesario introducir los polinomios de Kharitonov correspondientes a los polinomios con incertidumbre  $n(s,q)$  y  $d(s,r)$ .

$$\begin{aligned}
 n_1 &= q_0^- + q_1^- s + q_2^- s^2 + q_3^- s^3 + \dots \\
 n_2 &= q_0^+ + q_1^- s + q_2^- s^2 + q_3^- s^3 + \dots \\
 n_3 &= q_0^+ + q_1^+ s + q_2^- s^2 + q_3^- s^3 + \dots \\
 n_4 &= q_0^- + q_1^+ s + q_2^- s^2 + q_3^- s^3 + \dots
 \end{aligned}$$

en el cual los valores  $q_i$  y  $q_i'$  son los valores límites de la incertidumbre como se definió en (1) Ahora se definirán los polinomios de Kharitonov para el polinomio  $d(s,r)$ :

$$\begin{aligned}
 d_1 &= r_0^- + r_1^- s + r_2^- s^2 + r_3^- s^3 + \dots \\
 d_2 &= r_0^+ + r_1^- s + r_2^- s^2 + r_3^- s^3 + \dots \\
 d_3 &= r_0^+ + r_1^+ s + r_2^- s^2 + r_3^- s^3 + \dots \\
 d_4 &= r_0^- + r_1^+ s + r_2^- s^2 + r_3^- s^3 + \dots
 \end{aligned}$$

también será necesario considerar la siguiente definición:

**DEFINICION 6** Considerar los cuatro polinomios de Kharitonov  $d_1(s)$ ,  $d_2(s)$ ,  $d_3(s)$ ,  $d_4(s)$ ; entonces, el polinomio intermedio será definido como:

$$M(s) = \frac{d_1(s) + d_3(s)}{2} = \frac{d_2(s) + d_4(s)}{2} \quad (9)$$

por último definiremos el siguiente factor de switcheo  $\gamma$ , el cual será usado en la descripción del "value set" que se presentará en el siguiente resultado.

$$\begin{aligned}
 \gamma &\triangleq 0 & \text{si } 0 + 2n\pi \leq \omega\tau < \frac{\pi}{2} + 2n\pi \\
 \gamma &\triangleq 1 & \text{si } \frac{\pi}{2} + 2n\pi \leq \omega\tau < \pi + 2n\pi \\
 \gamma &\triangleq 2 & \text{si } \pi + 2n\pi \leq \omega\tau < \frac{3\pi}{2} + 2n\pi \\
 \gamma &\triangleq 3 & \text{si } \frac{3\pi}{2} + 2n\pi \leq \omega\tau < 2\pi + 2n\pi
 \end{aligned}$$

donde  $n$  puede ser cualquier número entero entre cero e infinito.

**LEMA 3** El value set para la familia de quasipolinomios  $p$ , está formado por anillos centrados en la curva de Mikhailov de  $M(j\omega)$ . Los anillos están formados, para cada valor fijo de  $\omega$ , por octágonos que cambian su forma en función del parámetro  $\tau$ ; estos octágonos tienen sus vértices en los siguientes puntos:

$$\begin{aligned}
 v_{i,1} &= d_{i,1}(j\omega) + n_i(j\omega)e^{-j\omega\tau} \\
 v_{i,5} &= d_{i,1}(j\omega) + n_i(j\omega)e^{-j\omega\tau}
 \end{aligned} \quad (10)$$

donde:

$$i = 0, 1, 2, 3$$

$$k = (\gamma + i) \bmod_4 + 1$$

$$h = (\gamma + i + 1) \bmod_4 + 1$$

$(x) \bmod_4$  representa la operación modulo entero base cuatro de  $x$ , por ejemplo:

$$(2) \bmod_4 = 2 ; (4) \bmod_4 = 0 ; (7) \bmod_4 = 3$$

en seguida se realizará la demostración de este resultado.

**Prueba.** De la ecuación característica  $p(s, q, r, e^{-s\tau})$  y de la definición de suma directa de dos "value sets" se puede observar que el "value set" de la familia de quasipolinomios  $p$ , está formado por la suma de dos "value sets" rectangulares en el cual uno de ellos es multiplicado por un producto escalar, que en este caso es el término que representa el retardo de tiempo ó de transporte. Como se mencionó anteriormente un producto escalar amplifica y rota la figura formada por el "value set", que en este caso es un rectángulo; el factor de amplificación es en este caso igual a la unidad; es decir, el rectángulo permanece del mismo tamaño al ser multiplicado por el retardo; sin embargo, el ángulo de rotación si cambia para cada valor del retardo  $\tau$ . Entonces, el "value set" del término que contiene el retardo en la ecuación característica  $n(s, q)e^{-s\tau}$  es la unión de rectángulos que están rotando un ángulo que está entre 0 y  $\omega_0 \tau_{max}$ ; como se muestra en la siguiente figura:

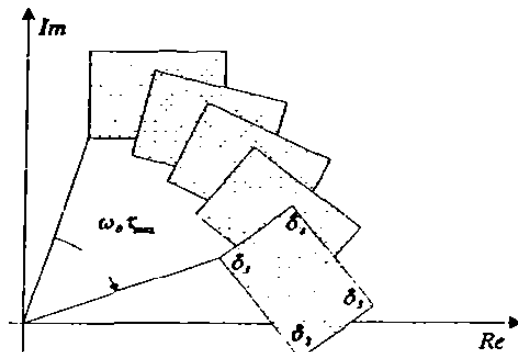


Figura 4. Value set multiplicado por el retardo.

donde los parámetros  $\delta_i$  están definidos para como:

$$\delta_1 = n_1(j\omega_0)$$

$$\delta_2 = n_2(j\omega_0)$$

$$\delta_3 = n_3(j\omega_0)$$

$$\delta_4 = n_4(j\omega_0)$$

por lo tanto, el "value set" de la ecuación

característica  $p(s, q, r, e^{-s\tau}) = d(s, r) + n(s, q)e^{-s\tau}$  está formado por la suma de dos "value sets" rectangulares que están alineados para todo valor de  $\tau\omega_0 = n\pi/2$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) y están desalineados para todo valor  $\tau\omega_0 = n\pi/2$ ; entonces, aplicando el Lema 2 y considerando la incertidumbre en el retardo, se obtiene que el "value set" para cada valor fijo  $\omega_0$  está formado por la unión de octágonos que se colapsan en rectángulos para cada valor de  $\tau\omega_0 = n\pi/2$ ; tal como se muestra en la siguiente figura:

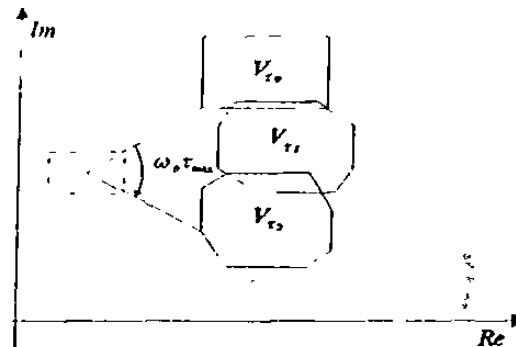


Figura 5. Value set de  $p_r$

donde el rectángulo trazado con líneas discontinuas corresponde al "value set" de  $d(s, r)$  y los rectángulos con líneas punteadas a  $d(s, r) + n(s, q)$ . Se puede observar que los octágonos trazados con líneas continuas cambian sus vértices cada vez que el "value set" de  $n(s, q)e^{-s\tau}$  rota  $n\pi/2$  radianes; por lo tanto se pueden definir como:

$$v_{i,1} = d_{i,1}(j\omega) + n_k(j\omega)e^{-j\omega\tau}$$

$$v_{i,5} = d_{i,1}(j\omega) + n_h(j\omega)e^{-j\omega\tau}$$

donde:

$$\tau = [0, \tau_{max}]$$

$$i = 0, 1, 2, 3$$

$$k = (\gamma + i) \bmod_4 + 1$$

$$h = (\gamma + i + 1) \bmod_4 + 1$$

de la figura anterior, es claro que los octágonos giran con respecto al centro del rectángulo correspondiente al polinomio  $d(s, r)$ , el cual está determinado por el polinomio  $M(s)$  evaluado en  $s=j\omega_0$ . Entonces, el "value set" para toda frecuencia  $\omega \in [0, \infty)$  está formado por arcos generados por octágonos centrados en la curva de Mikhailov de  $M(s)$ ; tal como se muestra en la figura siguiente:

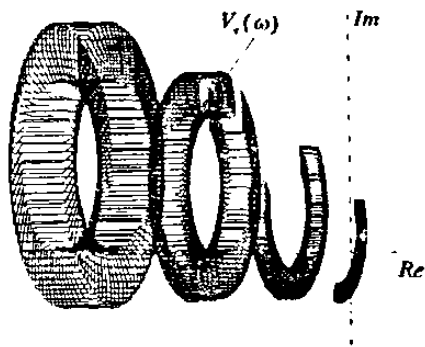


Figura 6. Value set de  $\phi$ , para un rango de frecuencias.

#### 4. CONCLUSIONES

En este artículo se presentó una caracterización del "value set" de una ecuación característica que se obtiene al considerar un sistema de control con retardo de transporte. Esta caracterización permite obtener el "value set", para este tipo de sistemas, mediante el uso de la computadora; el "value set" es de gran importancia para realizar análisis de estabilidad robusta de sistemas lineales invariantes en el tiempo y ahora extendido también a sistemas con retardo. Una aplicación de este resultado al problema de estabilidad robusta es presentado en [8].

#### REFERENCIAS

- [1] J. Ackerman, *Robust Control*, Springer-Verlag, 1993.
- [2] B.R. Barmish, *New Tools for Robustness of Linear Systems*, Macmillan, 1994.
- [3] B.R. Barmish, "A Generalization of Kharitonov's Four-Polynomial Concept for Robust Stability Problems with Dependent Coefficient Perturbations", *IEEE TAC*, Vol 34, No 2, pp 157-165, 1989.
- [4] S. Dasgupta, "Kharitonov's Theorem Revisited", *Systems & Control Letters*, pp 383-384, 1988.
- [5] J.C. Doyle, B.A. Francis, A R Tannenbaum,

*Feedback Control Theory*, Macmillan, 1992

- [6] V Kharitonov, "Asymptotic Stability of an Equilibrium Position of a Family of Systems of Linear Differential Equations", *Plenum Publishing Corporation*, pp 1483-1485,
- [7] M Malek Zaverzi, M Jamshidi, *Time-Delay Systems*, North Holland Systems and Control Series, 1987.
- [8] G Romero, J. Collado, "Estabilidad Robusta para Plantas Intervalo con Retardo", *aceptado para su publicación en XVIII Congreso Internacional Académico de Ingeniería Electrónica*, Chihuahua Chih, Octubre 1996

XVIII CONGRESO INTERNACIONAL ACADEMICO DE  
INGENIERIA ELECTRONICA

ELECTRO  
LECTRO  
ECTRO  
CTRO  
TRO  
RO  
O 96

INSTITUTO TECNOLOGICO DE CHIHUAHUA  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACION

## ANÁLISIS DE ESTABILIDAD ROBUSTA PARA PLANTAS INTERVALO CON RETARDO

**Gerardo Romero G.<sup>1</sup>**

Instituto Tecnológico de Nuevo Laredo  
Depto. de Ingeniería Eléctrica y Electrónica  
Av. Reforma No. 2007  
Nuevo Laredo, Tamps.  
Tel: (87) 15-56-56 Fax: (87) 15 56 56  
Email: gromero@gama.fime.uanl.mx

**Joaquín Collado M.**

F I M E - U. A. N. L.  
Doctorado en Ingeniería Eléctrica  
Cd. Universitaria, Apdo Postal 30-F  
San Nicolás de los Garza, N. L.  
Tel (8) 329-40-20 Fax: (8) 376-45-14  
Email: jcollado@ccr.dsi.uanl.mx

**RESUMEN:** En este artículo se presentan condiciones necesarias y suficientes de estabilidad robusta para una clase de sistemas de control con retardo; estos sistemas son representados por modelos matemáticos que reciben el nombre de plantas intervalo. La aportación principal de este trabajo es la inclusión de un término que representa un retardo de tiempo, que puede ser debido al retardo que presentan los elementos sensores ó bien, debido al retardo de tiempo que por las características del proceso, aparece en el modelo matemático. El resultado principal consiste en la aplicación del principio de exclusión del cero para sistemas dinámicos con incertidumbre paramétrica.

**ABSTRACT:** In this paper we present necessary and sufficient condition of robust stability for a class of dynamical systems described by interval plants with time delay. We apply the zero exclusion to get the main result.

**Palabras Clave:** *Polinomios de Kharitonov, quasipolinomios, "value set".*

### NOTACION

**R** Campo de los números reales.  
**C** Campo de los números complejos  
**Im(z)** Parte imaginaria de z.  
**Re(z)** Parte real de z.

### I. INTRODUCCION

El problema de plantas intervalo ha sido de gran interés por que existe una gran cantidad de aplicaciones prácticas. Uno de los primeros resultados relacionados con plantas intervalo fue publicado en [5], quienes presentan condiciones necesarias y suficientes de estabilidad robusta para plantas intervalo que pueden ser multivariantes; otro resultado importante es [3], donde se obtienen condiciones de estabilidad robusta para un sistema dinámico representado por una planta intervalo conectada con un compensador de primer orden; la ventaja principal del trabajo anterior es que presenta las condiciones en base a 16 puntos extremo que se calculan con los polinomios de Kharitonov. La propiedad de estabilidad robusta de plantas intervalo ha sido extendida a sistemas de control no lineales, tal como lo presentan los artículos [4], [6] quienes tratan el problema de "Lure" considerando plantas intervalo en la parte lineal.

En este artículo se presentarán condiciones necesarias y suficientes de estabilidad robusta para sistemas dinámicos representados por plantas intervalo con retardo de tiempo; el resultado principal es una extensión del principio de exclusión del cero a este tipo de sistemas. Este resultado es de gran importancia, por su simplicidad, cuando se puede realizar la construcción del "value set", ver [15]. Algunos antecedentes relacionados con sistemas con retardo son presentados en los artículos [8],[2] también, recientemente fue publicado [10] quienes extienden el concepto de direcciones convexas presentado en [13]. Otros resultados que están relacionados con este problema son [7], [9],[11] donde se presentan algunos resultados rel

<sup>1</sup> El trabajo de este autor fue parcialmente financiado por CONACYT.



con sistemas dinámicos con retardo, aunque algunos no tratan directamente el problema de plantas intervalo con retardo de tiempo.

La aportación principal de este artículo es la consideración del retardo de tiempo con incertidumbre de tipo intervalo; ya que, por su complejidad, la mayoría de los resultados anteriores no lo consideran. Finalmente, la organización de este artículo es la siguiente: en la sección 2 se presentará el planteamiento del problema a resolver, el resultado principal y su posible extensión es presentado en la sección 3, la sección 4 presenta un ejemplo numérico donde se aplica el resultado obtenido y por último en la sección 5 las conclusiones de este trabajo.

## 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Esta sección está dividida en dos partes: la primera, presenta la definición de una planta intervalo y el planteamiento original del problema de robustez de plantas intervalo; en la segunda se presentará la modificación del problema original al problema de plantas intervalo con retardo de tiempo.

### 2.1 Definición de Plantas Intervalo

En términos generales, una planta intervalo es una función de transferencia que representa el comportamiento dinámico de un proceso determinado; las plantas intervalo se definen para sistemas dinámicos lineales invariantes en el tiempo con condiciones iniciales iguales a cero; la diferencia principal entre una planta normal y una planta intervalo es que la última considera incertidumbre de tipo intervalo en los coeficientes del numerador y denominador de la función de transferencia. La definición formal de una planta intervalo se presenta en seguida:

**DEFINICION 1 [1]** Una planta intervalo es una función de transferencia que representa un sistema dinámico con incertidumbre que tiene la siguiente estructura matemática:

$$G(s,q,r) = \frac{N(s,q)}{D(s,r)} = \frac{\sum_{i=0}^m [q_i^-, q_i^+] s^i}{s^n + \sum_{i=0}^{n-1} [r_i^-, r_i^+] s^i} \quad (1)$$

$$\forall q \in Q ; r \in R$$

donde  $Q$  y  $R$  definen conjuntos de vectores cuyos elementos son los coeficientes del numerador y denominador respectivamente; es decir:

$$Q = \{ q \in \mathbb{R}^m : q_i^- \leq q_i \leq q_i^+ \}$$

$$R = \{ r \in \mathbb{R}^n : r_i^- \leq r_i \leq r_i^+ \}$$

es claro que una planta intervalo es una familia de plantas formada por un conjunto de funciones racionales que pueden representar sistemas físicos que tienen elementos con incertidumbre de tipo intervalo. Esta familia de plantas será definida como:

$$\mathfrak{h} \triangleq \{ G(s,q,r) : q \in Q ; r \in R \} \quad (2)$$

donde se establece la suposición de que la familia  $\mathfrak{h}$  sea estrictamente propia; es decir, que  $m < n$  para todo elemento de la familia. Para describir el problema de plantas intervalo es necesario presentar el siguiente diagrama de bloques:

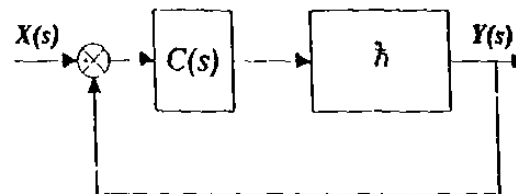


Figura 1. Diagrama de bloques de una planta intervalo.

donde  $C(s)$  y  $\mathfrak{h}$  representan un controlador fijo y una planta intervalo respectivamente; considerando que el controlador tiene la siguiente estructura:

$$C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

en el cual  $N_c(s)$  y  $D_c(s)$  son polinomios de grado  $p$  y  $s$  respectivamente, con la condición  $p \leq s$ ; entonces, el objetivo es encontrar un controlador  $C(s)$  que logre estabilizar el sistema de control en lazo cerrado de la figura 1; este problema es conocido como estabilización robusta de plantas intervalo. Es claro que la estabilidad robusta del sistema en lazo cerrado presentado en la figura 1, está determinada por la siguiente ecuación característica:

$$p(s,q,r) = N_c(s)N(s,q) + D_c(s)D(s,r) \quad (3)$$

entonces, el problema de estabilización robusta se puede plantear como un problema de estabilidad robusta de la ecuación característica (3). Ahora será presentado el problema de interés en este trabajo.

2.2 Plantas Intervalo con Retardo

En esta sección se define el problema de interés en este artículo, que es el problema de estabilidad robusta de plantas intervalo con retardo; éste, a diferencia del problema original de plantas intervalo, considera un retardo  $e^{-\tau}$  en lugar de un controlador  $C(s)$ , como se muestra en la siguiente figura:

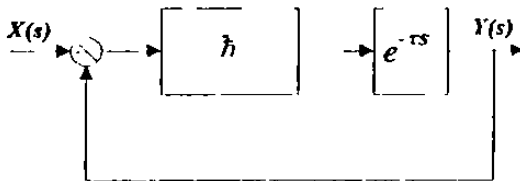


Figura 2. Diagrama de bloques de una planta intervalo con retardo.

donde  $h$  define nuevamente una familia de plantas intervalo; la estabilidad del sistema dinámico presentado en la figura 2 está determinada por la siguiente ecuación característica:

$$p(s, q, r, e^{-\tau s}) = D(s, r) + N(s, q)e^{-\tau s} \quad (4)$$

donde  $D(s, r)$  y  $N(s, q)$  son los polinomios intervalo definidos en (1) y en este trabajo se considerará que el retardo de tiempo  $\tau$  es un parámetro que tiene incertidumbre de tipo intervalo. Como se puede observar, la ecuación característica (4) representa una familia de quasipolinomios, la cual será definida como sigue:

$$Q_\tau = \{ p(s, q, r, e^{-\tau s}) : q \in Q ; r \in R ; \tau \in [0, \tau_{max}] \} \quad (5)$$

Entonces, el objetivo de este trabajo es obtener condiciones necesarias y suficientes para garantizar estabilidad robusta del sistema dinámico representado por la figura 2; lo anterior es equivalente a obtener condiciones de estabilidad para la familia de quasipolinomios (5).

3. RESULTADO PRINCIPAL

En esta sección se presenta el resultado principal de este trabajo; para presentar el este resultado es necesario realizar las siguiente definición:

DEFINICION 2 El value set  $V_\tau(\omega)$  de la familia de quasipolinomios  $Q_\tau$  es la gráfica en el plano complejo de  $p(s, q, r, e^{-\tau s})$  cuando  $s=j\omega$ ; es decir

$$V_\tau(\omega) = \{ p(s, q, r, e^{-\tau s}) : \forall r \in R ; q \in Q ; \tau \in [0, \tau_{max}] ; \omega \in R \} \quad (6)$$

entonces, se denotará como  $V_\tau(\omega)$  al "value set" correspondiente a la familia de quasipolinomios  $Q_\tau$ . Ahora será presentado el resultado principal.

TEOREMA 1 [Exclusión del cero] Si existe al menos un elemento estable de la familia de quasipolinomios  $Q_\tau$  definida en (6), entonces,  $Q_\tau$  es robustamente estable si y sólo si,  $0 \notin V_\tau(\omega) \forall \omega \in [0, \infty)$ .

Prueba. La prueba está basada en al propiedad de continuidad de las raíces de la ecuación característica (4) con respecto a los coeficientes  $q, r$ , y también con respecto al retardo  $\tau$ , ver [11], [12].

necesidad. Se asume por hipótesis que  $Q_\tau$  es robustamente estable y se demostrará que  $0 \notin V_\tau(\omega)$ . La demostración se realizará por contradicción. Si  $0 \in V_\tau(\omega)$ ; entonces de la definición de "values set" presentada en (6), existe un elemento  $p(j\omega, q^*, r^*, e^{-\tau^* s}) \in Q_\tau$ ; tal que  $p(j\omega, q^*, r^*, e^{-\tau^* s}) = 0$ , lo cual implica que tiene al menos una raíz sobre el eje imaginario y esto contradice la hipótesis de que  $Q_\tau$  es robustamente estable; por lo tanto  $0 \notin V_\tau(\omega)$ .

suficiencia. Por contradicción; supóngase que  $0 \in V_\tau(\omega)$  y que existe un elemento  $p(s, q, r, e^{-\tau s}) \in Q_\tau$ , que es inestable; con la suposición de que al menos un elemento de la familia es estable y aplicando la propiedad de continuidad de las raíces de la ecuación característica, implica que existe un elemento  $p(s^*, q^*, r^*, e^{-\tau^* s}) \in Q_\tau$ , tal que  $p(s^*, q^*, r^*, e^{-\tau^* s}) = 0$ , lo cual significa que  $0 \in V_\tau(\omega)$  y por lo tanto se contradice la hipótesis  $0 \notin V_\tau(\omega)$ ; entonces,  $Q_\tau$  es robustamente estable. ■

NOTA 1 Este resultado garantiza la propiedad de estabilidad robusta del sistema dinámico representado en el diagrama de la figura 2. El resultado es una extensión del artículo presentado en [14].

4. EJEMPLO NUMERICO

En esta sección se presenta una aplicación del resultado anterior a un ejemplo numérico. Considerar que se obtiene la siguiente ecuación característica de algún sistema de control representado por una planta intervalo con retardo:

$$p(s,q,r,e^{-\tau s}) = D(s) + N(s,q)e^{-\tau s} \quad (7)$$

donde:

$$D(s) = s^5 + 7s^4 + 19.4s^3 + 26.6s^2 + 18.0384s + 4.8384$$

$$N(s,q) = s^3 + (5.8 + q_2)s^2 + (11.05 + q_1)s + (6.9 + q_0)$$

$$-1.8 \leq q_i \leq 1.8 \quad 0 \leq \tau \leq 1$$

utilizando un programa para construir el "value set" se obtiene lo siguiente:

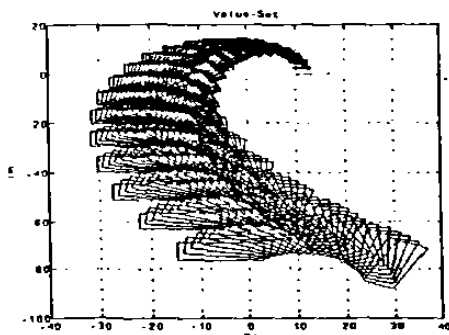


Figura 3. Value set del ejemplo anterior.

la figura anterior es la gráfica del "value set" para un rango de frecuencias de  $\omega \in [0,2]$ . por lo tanto aplicando el teorema 1 podemos concluir que el sistema representado por (7) es robustamente estable; ya que el value set  $V_i(\omega)$  no toca el cero del plano complejo.

### 5. CONCLUSIONES

Esta forma de analizar la propiedad de estabilidad robusta es muy simple y la ventaja principal es que no depende de la dimensión del sistema dinámico, por lo que se puede aplicar a sistemas dinámicos de dimensiones grandes sin ningún problema; otra ventaja es que el cálculo realizado no requiere hacer operaciones que puedan representar problemas de error numérico, ya que sólo se requiere realizar operaciones básicas con números complejos. Las condiciones de estabilidad se obtienen en función de una gráfica en el plano complejo; es decir, por inspección visual, por lo que resulta muy sencilla la forma de verificarla.

### REFERENCIAS

[1] B.R. Barmish, *New Tools for Robustness of Linear Systems*, Macmillan, 1994.

[2] B.R. Barmish, Z. Shi, "Robust Stability of Perturbed Systems with Time Delay", *IFAC Automatica*, Vol 25, No 3, pp 371-381, 1989.

[3] B.R. Barmish, C.V. Hollot, F.J. Kraus, R. Tempo, "Extreme Point Result for Robust Stabilization of Interval Plants with First Order Compensators", *IEEE T-AC*, pp 707-714, 1992.

[4] S.P. Bhattacharyya, H. Chapellat, M. Dahleh, "Strict Positive Realness Condition for Interval Plants with Applications", *Reporte Técnico No 88-038 Universidad de Texas A & M*, 1988.

[5] H. Chapellat, S.P. Bhattacharyya, "A Generalization of Kharitonov's Theorem: Robust Stability of Interval Plants", *IEEE T-AC*, Vol 34, No 3, pp 306-311, 1989.

[6] H. Chapellat, M. Dahleh, S.P. Bhattacharyya, "On Robust Nonlinear Stability of Interval Control Systems", *IEEE T-AC*, Vol 36, No 1, pp 59-67, 1989.

[7] R. Devanathan, "A Solution of Optimum Time Delay Margin Problem for SISO Systems", *Proceedings of the 31st Conference on Decision and Control*, Tucson Az, pp 2866-2869, 1992.

[8] M. Fu, A.W. Olbrot, M.P. Polis, "Robust Stability for Time Delay Systems: The Edge Theorem and Graphical Test", *IEEE T-AC*, Vol 34, No 8, pp 813-820, 1989.

[9] J. Hocheman, J. Kogan, E. Zeheb, "Simple Stability Criterion for Quasipolynomial Families with Uncertain Coefficients and Uncertain Delay", *Proceedings of 32nd Conference on Decision and Control*, San Antonio Tx, pp 3463-3464, 1993.

[10] V. Kharitonov, A.P. Zhabko, "Robust Stability of Time Delay Systems", *IEEE T-AC*, Vol 39, No 12, pp 2388-2397, 1994.

[11] A.Z. Manitius, A.W. Olbrot, "Finite Spectrum Assignment for Systems with Delay", *IEEE T-AC*, Vol 24, No 4, pp 541-553, 1979.

[12] M. Marden, *The Geometry of the Zeros of a Polynomial in Complex Variable*, American Mathematics Society, 1949.

- [13] A. Rantzer, "Stability Conditions for Polytopes of Polynomials", *IEEE T-AC*, Vol 37, No 2, pp 79-89, 1992.
- [14] G. Romero, J. Collado, "Criterio Gráfico de Estabilidad para Sistemas con Retardo", *XVI Congreso Nacional Académico de Ingeniería Electrónica*, Chihuahua Chih, Octubre 1994.
- [15] G. Romero, J. Collado, "Construcción del "Value Set" para Sistemas de Control con Retardo de Transporte", *aceptado para su publicación en XVII Congreso Internacional Académico de Ingeniería Electrónica*, Chihuahua Chih, Octubre 1996.
- [16] H. Wu, K. Mizukami, "Quantitative Measure of Robustness for Uncertain Time Delay Dynamical Systems", *Proceedings of 32nd Conference on Decision and Control*, San Antonio Tx, pp 2004-2005.
- [17] X. Xin, C. Feng, "Robust Stability of Control Systems with Parametric Uncertainties", *Proceedings of 31st Conference on Decision and Control*, Tucson Az, pp 1559-1564, 1992.



