UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
DIVISION ESTUDIOS DE POST-GRADO

MODELOS MATEMATICOS CON APLICACION A LA DOCENCIA

POR

ARTURO BORJAS ROACHO

TESIS
EN OPCION AL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS DE LA ADMINISTRACION
CON ESPECIALIDAD EN FINANZAS

MONTERREY, N. L. OCTUBRE DE 1997

MODELOS MATEMATICOS CON APLICACION A LA DOCENCIA

1997

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO

MODELOS MATEMATICOS CON APLICACIÓN A LA DOCENCIA

POR

ARTURO BORJAS ROACHO

TESIS

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA ADMINISTRACION CON ESPECIALIDAD EN FINANZAS

MONTERREY, N.L. OCTUBRE DE 1997

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO

MODELOS MATEMATICOS CON APLICACIÓN A LA DOCENCIA

POR

ARTURO BORJAS ROACHO

TESIS

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA ADMINISTRACION CON ESPECIALIDAD EN FINANZAS

MONTERREY, N.L OCTUBRE DE 1997

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis: Modelos Matemáticos con Aplicación a la Docencia, realizada por el Ing. Arturo Borjas Roacho, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestro en Ciencias de la Administración, con especialidad en Finanzas.

El Comité de Tesis

M.C. Carlos Bernardo Garza Treviño
Asesor

M.C. Roberto Villarreal Garza
Coasesor

M.C. Vicente García Díaz
Coasesor

Vo. Bo.
M.C. Roberto Villarreal Garza
División de Estudios de Postgrado

San Nicolás de los Garza, N. L. a 12 de Enero de 1998

AGRADECIMIENTO

A DIOS.

Por haberme dado salud, fortaleza y sabiduría.

A MIS PADRES.

Benigno Borjas Vargas
Manuela Roacho de Borjas

Por haberme dado su soporte, apoyo y cariño durante todas las etapas de mi vida.

A MIS HERMANOS.

José Natividad	Manuel	María Guadalupe	Olivia
Mario	Julia Esperanza	Rogelio	
Pascual	Micaela	Carolina	

Por ser mis mejores amigos.

A MI ESPOSA.

Profra. Fca. Pura González de Borjas

Por su comprensión, respeto y amor.

A MIS HIJOS.

Arturo	Reyna Yadei	Yelenia
	Reyna Yadid	

Por ser una motivación en mi vida.

PROLOGO

La presente tesis fue elaborada por los ingenieros Arturo Borjas Roacho y Pablo Rodríguez Tristán, maestros de la Facultad e Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la U.A.N.L., pensando en que fuera un documento útil para nuestros alumnos.

La finalidad deseada es que el estudiante de licenciatura logre incrementar su habilidad en la solución de problemas lineales y no lineales, donde abordamos temas de optimización, tales como:

El método simplex, su dualidad, el análisis de sensibilidad, la programación paramétrica, los modelos de distribución, de asignación y secuenciación, programación entera, así como la no lineal.

A lo antes considerado habría que sumarle que en la actualidad la función administrativa, camina a la par de la cada vez mayor globalización de la economía mundial. Aquí en México la apertura de un mercado común entre los países de Canadá, Estados Unidos y México, obliga a nuestros productores a tomar medidas que conlleven a optimizar los recursos con que cuentan y realizar los ajustes necesarios a fin de lograr una administración más competitiva, más moderna y que garantice la buena marcha de los negocios, siempre en busca de lograr el máximo beneficio que promete el Tratado de Libre Comercio de Norte América.

Los productores y comerciantes que estén decididos a sobrevivir, deberán asumir los retos que el T.L.C. impone, donde los movimientos constantes del mercado y los nuevos sistemas de producción así como las nuevas tecnologías, dejan de lado los mercados tradicionales, los enfoques convencionales sobre técnicas y soluciones de las décadas pasadas tienen poco que ofrecer pues a menudo estas técnicas han sido desarrolladas para resolver problemas estáticos y no dinámicos que son a los cuales deberán enfrentarse nuestros productores y comerciantes ante la apertura comercial de Norte América, además de depender cada vez en mayor medida de las computadoras y de los métodos cuantitativos para formar modelos de empresas que eficienticen los innumerables y complejos problemas de la administración y las finanzas.

Solo nos resta hacer mención y agradecer la valiosa colaboración de los maestros que nos asesoraron con sus conocimientos, para el buen desarrollo de este documento.

INDICE

SINTESIS Pagina

Capitulo

SINTESIS

El contenido de esta tesis se preparó con el objetivo de servir como apoyo en el curso de investigación de operaciones a nivel licenciatura, alentando en el estudiante la habilidad de reconocer los problemas potenciales de programación lineal. Formularlos como modelos, empleando las técnicas de computo apropiadas para resolverlos y entender los aspectos matemáticos que ligan entre si a estos elementos de la programación lineal.

En la presente tesis, abordamos problemas de maximizar y minimizar una función objetivo, donde utilizamos técnicas de programación lineal, como son:

El algoritmo llamado SIMPLEX (donde aplicamos el método montante), paquetes de PROGRAMACION (como el lindo y el manager) y el método GRAFICO para obtener la solución óptima. En el caso del método simplex, mencionamos las ventajas que éste tiene con respecto al análisis de todos los puntos extremos (soluciones básicas) generados en un programa lineal.

Describimos por pasos el procedimiento del método simplex, así como las condiciones de factibilidad y optimidad, causas fundamentales que se deben de cumplir, para que en cada iteración se llegue a un punto extremo factible (solución básica factible).

Participamos en un caso práctico, relacionado con la producción en una fábrica de chocolates, donde la preocupación más importante de la empresa era la producción mensual para que su utilidad fuera lo más alta posible. El caso lo describimos en forma de diálogo, donde la solución se obtuvo por medio del paquete Lindo.

Para casos en los cuales un programa lineal cuenta con restricciones de igualdad y ($\geq$) utilizamos una variante del método simplex, llamado método de la M grande, se desarrolló un ejemplo, donde la solución óptima se obtuvo siguiendo el procedimiento del método simplex y comprobándose por el paquete Lindo.

Tratamos la dualidad que tienc todo programa lineal, representando la equivalencia del primal al dual, así como las reglas de equivalencia para representar un programa primal en forma simétrica, resolviendo un ejemplo para ello.

En el análisis de sensibilidad utilizamos algunas fórmulas para efectuar cambios que pueden ser originados en algunas partes de nuestro programa lineal; estas fórmulas se utilizaron tomando en cuenta la solución óptima del problema lineal.

En los modelos de distribución, tratamos el problema del transporte, donde trabajamos con los modelos que nos proporcionaron una solución inicial, para luego utilizar otros métodos que nos llevaron a la solución óptima, cumpliendo con las condiciones de optimidad y factibilidad

Los método de asignación y secuenciación que utilizamos fueron: El húngaro y el de ramificación y acotación, los cuales se complementaron con un ejemplo.

En la programación entera, le dimos solución a un problema donde ésta no era en enteros, utilizando el método de ramificación y acotación para que dicha solución quedara en enteros.

CAPITULO 1

INTRODUCCION

OBJETIVO

Cuando se escribió la presenta tesis se pensó en dos objetivos principales. El primero; dar respuesta de solución a los problemas de producción de una empresa de la localidad que produce chocolates de calidad. El segundo de los objetivos; contribuir a la formación profesional del alumnado de la Facultad de Ingeniería mecánica y Eléctrica de la U.A.N.L., mostrado el desarrollo de los temas del plan de estudios de la materia de Investigación de Operaciones I.

FORMULACION DEL PROBLEMA

Una empresa de la localidad, tenia problemas para la determinación de la mezcla óptima de producción, dado que elaboraban y empaquetaban sus productos, en tres presentaciones distintas, algunas de sus restricciones principales era el de la maquinaría, sin embargo, no tenían contemplado la adquisición de nuevo equipo en el corto plazo.

El problema fue planteado y recomendamos una serie de medidas para la optimización de su producción, el detalle de como llegamos al planteamiento del problema se muestra ampliamente en el capitulo 3 de nuestra tesis.

JUSTIFICACION DEL TRABAJO

Aunque nuestra investigación fue netamente dirigida hacia los problemas de producción de la empresa antes mencionada, pensamos que nuestra tesis pudiera servir como apoyo al material didáctico de nuestra facultad, contribuyendo en un ahorro substancial para la economía de nuestras alumnos.

METODOLOGIA

Se programó una serie de visitas a la planta de producción, realizando entrevistas al gerente y supervisores de producción, de los cuales pudimos recopilar la información tanto de los componentes tecnológicos del producto, así como las restricciones de Materiales y Mano de Obra. Una vez que se obtuvieron los datos, nos dimos a la tarea de realizar el planteamiento del problema y la aplicación del metodo de solución adecuado, en este caso se determinó que el problema podría ser resuelto por el Método Simplex y utilizamos el paquete computacional Manager para la solución del problema de la empresa.

HIPOTESIS

Basados en la búsqueda de aumentar las utilidades de la empresa referida, recomendamos la aplicación de la programación lineal para la solución de sus problemas de producción, sin embargo, matemáticamente se comprobó el aumento de sus ganancias, a pesar de ello, aunque era de nuestro interés conocer el resultado real de éstas, no estuvo en nuestras manos conocerlas, debido a la confidencialidad de estas. El Límite del estudio fue determinado hasta la consecución de la solución del problema, así como las recomendaciones hechas por nosotros.

CAPITULO 2

ASPECTOS GENERALES

El área más desarrollada en la Investigación de Operaciones, es quizá la Programación Matemática, que cubre tópicos tales como: Programación Lineal, Redes, Inventarios, Programación Entera, Programación Dinámica, Programación no Lineal , Teoría de Juegos, etc. La clasificación puede ser: Determinística, Probabilística o ambas. Todos ellos se usan para resolver problemas cuantitativos de decisión en el mundo real.

En el capítulo tres de nuestra tesis, abordaremos el tópico de Programación Lineal, donde se tratará un algoritmo llamado "Simplex", utilizando el método Montante para la obtención de la solución óptima.

En una forma dinámica exponemos un problema real, donde participamos como asesores en un problema de Producción de una fábrica de dulces.

En el capítulo cuarto, trataremos el tema del método simplex con penalización para la resolución de problemas de minimización.

En el capítulo quinto, se tratará la dualidad de problemas lineales, así como el desarrollo de un ejemplo.

En el capítulo sexto, se tocará el tema de análisis de sensibilidad, con algunos cambios que se pueden suscitar.

En el capítulo séptimo, tratamos modelos de distribución, tales como: Los de solución inicial y los de optimización .

En el capítulo octavo, trataremos los modelos de asignación y secuenciación más importantes como son: Método húngaro, Método de ramificación y acotación

En el capítulo noveno, se tratarán algunos de los métodos de la programación entera, donde el resultado de las variables de la solución óptima debe ser en enteros.

En el capítulo décimo, se tratará un tema muy importante, como es la programación no lineal, ya que no todos los modelos se comportan en forma lineal.

Todos los modelos tratados en esta tésis son de tipo determinístico. En cada uno de los capítulos se expone en forma breve el procedimiento para la solución, así como la utilización de un determinado paquete de computación según el caso. Esto con la finalidad de que el estudiante de esta materia, tenga un concepto más amplio en la solución de dichos problemas.

2.1 TIPOS DE MODELOS MATEMATICOS

Para tratar de dar una idea de los diferentes tipos de modelos matemáticos definiremos aquí algunos de ellos, sin embargo la primer clasificación que haremos, será la diferenciación de un modelo cualitativo y uno cuantitativo. La mayoría de las empresas, casi por regla general sus problemas son planteados en sus inicio en forma cualitativa, éstos generalmente desencadenan en el punto que son convertidos en modelos cuàntitativos, sin que con esto se pueda pensar que todos los modelos cualitativos puedan ser interpretados en modelos cuantitativos, ya que existe una gran variedad de Problemas que no pueden ser cuantificados con exactitud como por ejemplo; variables que no son conocidas, etc. Sin embargo con el empleo de técnicas como el análisis lógico, métodos de ordenamiento, teoría de decisiones, la probabilidad y la estadística etc. pueden ayudarnos para hacer que nuestros modelos cualitativos, puedan ser expresados en modelos cuantitativos, a continuación, daremos una breve definición de algunos diferentes modelos que nos podemos encontrar.

Modelos cualitativos. Son aquellos en que la representación del modelo solo expresan las cualidades o propiedades de los elementos o componentes.

Modelos cuantitativos. Son aquellos en los que insertamos símbolos que nos representan variables o constantes. Inician con números, operan con números y producen números.

Modelos probabilísticos. Llamados también **estocásticos** en éstos, algunos de los datos importantes se consideran inciertos, es decir que se ocupan de la incertidumbre.

Modelos determinísticos. Son aquellos donde todos los datos relevantes se dan por conocidos; y no deben de contener ninguna consideración probabilística.

Modelos de optimización. Son aquellos cuyo objetivo es dar una respuesta optima de un problema matemático planteado.

Modelos estáticos. Son aquellos que se ocupan de determinar una respuesta para una serie especial de condiciones fijas, que probablemente no cambiarán significativamente en el corto plazo.

Modelos dinámicos. Son aquellos que están sujetos al factor tiempo y desempeñan un papel esencial en las secuencias de las decisiones, sin depender de las decisiones anteriores este modelo nos permite encontrar soluciones óptimas para los períodos que quedan todavía en el futuro.

Modelos de simulación. Estos comprenden cálculos secuenciales donde puedan reproducirse el funcionamiento del problema o del sistema a gran escala; así como en muchos casos donde ocurren relaciones complejas de naturaleza predecible y no predecible o aleatoria.

Queda a las universidades del país tanto públicas como privadas, asumir el reto y preparar al estudiantado con las mejores herramientas para lograr una verdadera competencia de este mercado en los inicios del nuevo siglo, que deberá tender cada vez más hacia la especialización, con un mayor apoyo de las computadoras y de los métodos cuantitativos.

CAPITULO 3

EL METODO SIMPLEX

3.1 INTRODUCCION

A fines de la década de los años 40 el Dr. George Dantzig. Halló un método que permite solucionar un problema lineal sin necesidad de analizar explícitamente el valor de la función objetivo en cada punto extremo. Su método se conoce como **"método simplex"** la solución optima de un problema lineal se obtiene en un punto extremo. En teoría , habrá que ver el valor que tiene la función objetivo en cada punto extremo y seleccionar el mejor.

El número máximo de puntos extremos de una región factible proveniente de un programa lineal con "m" restricciones en la forma estándar y "n" variables, se obtiene mediante la siguiente fórmula :

$$nCm = \frac{n!}{(n-m)!\, m!}$$

ejemplo 3.1.1

Consideremos el siguiente problema lineal , que debe constar de :

$$\text{Max. } Z = 5\,x_1 + 2\,x_2 \quad \rightarrow \quad \textbf{función lineal (función objetivo)}$$

$$\begin{array}{lll} \text{s.a} \quad 4x_1 + 2x_2 \le 20 & \rightarrow & \textbf{conjunto} \\ \quad\quad 5x_1 + 10x_2 \le 60 & \rightarrow & \textbf{de} \\ \quad\quad 5x_1 \le 20 & \rightarrow & \textbf{restricciones} \\ \quad\quad\quad x_i \ge 0\ \forall_i & \rightarrow & \text{restricción de signo (no negativa)} \end{array}$$

Para transformar una restricción de "≤" a una restricción en forma de igualdad, se añade una variable de holgura "w_i" a la i-ésima restricción y la contribución de estas variables en la función objetivo es de **cero,** añadiendo la restricción de signo $w_i \ge 0\ \forall_i$. (Esta variable de holgura sirve para absorber el valor faltante a la igualdad en este tipo de restricción de "≤", así como para formar la matriz identidad en la tabla del simplex, como se verá más adelante). Por lo tanto nuestro problema lineal en la forma estándar será:

$$\text{Max. } Z = 5\,x1 + 2\,x2 + 0\,w1 + 0\,w2 + 0\,w3$$

$$\begin{array}{lllllll} \text{s.a} & 4x1 + & 2x2 & + & w1 & & = 20 \\ & 5x1 + & 10x2 & + & & w2 & = 60 \\ & 5x1 & & + & & w3 & = 20 \end{array}$$

$$xi \ge 0\ \forall i\ ;\ wi \ge 0\ \forall i$$

En nuestro ejemplo, el número de puntos extremos (soluciones básicas) será como máximo ${}_nC_m$ (ya que algunas soluciones básicas, pueden ser no factibles o no existentes) n=5 (x_1 , x_2 , w_1 , w_2 , w_3) , m= 3 (las tres ecuaciones o restricciones en forma de igualdad)

Puntos extremos = $\mathbf{{}_5C_3 = 10}$

Esta cantidad de puntos extremos nos indica que la solución óptima se encontrará después de examinar cuando mucho 10 soluciones **básicas.**

Para enumerar esta cantidad de soluciones **básicas,** hay que determinar el número de variables **básicas** (VB) y variables **no básicas** (VNB).

El número de VB siempre es igual a la cantidad de restricciones funcionales; el número de VNB de una solución básica siempre es igual a los grados de libertad **n-m**, donde **n** es el número de variables en la forma estándar (variables funcionales, de holgura y ficticias) y **m** es el número de restricciones funcionales.

Para dar inicio a la enumeración de las soluciones **básicas**, las variables **no básicas** se igualan a **cero**. Para nuestro ejemplo, las variables en la forma estándar son:

$X_1\ X_2\ W_1\ W_2\ W_3 = n = 5$

de restricciones = m = 3 (V:B)

Grados de libertad = n-m = 2 (V.N.B)

VNB	**VB**
$X_1,\ X_2$	W_1, W_2, W_3
$X_1,\ W_1$	X_2, W_2, W_3
$X_1,\ W_2$	X_2, W_1, W_3
$X_1,\ W_3$	X_2, W_1, W_2
$X_2,\ W_1$	X_1, W_2, W_3
$X_2,\ W_2$	X_1, W_1, W_3
$X_2,\ W_3$	X_1, W_1, W_2
$W_1,\ W_2$	X_1, X_2, W_3
$W_1,\ W_3$	X_1, X_2, W_2
$W_2,\ W_3$	X_1, X_2, W_1

CONJUNTO DE SOLUCIONES BASICAS

	$W_1 = 20$	$\mathbf{W_1 = 20}$	
a) $X_1 = X_2 = 0$	$W_2 = 60$	$\mathbf{W_2 = 60}$	**<u>Solución básica factible</u>**
	$W_3 = 20$	$\mathbf{W_3 = 20}$	**VB≥ 0**
		Z Max. = 5(0) + 2(0) = 0	
	$2X_2 = 20$	$\mathbf{X_2 = 10}$	**No es solución básica**
b) $X_1 = W_1 = 0$	$10X_2 + W_2 = 60$	$\mathbf{W_2 = -40}$	**factible, porque $W_2 < 0$**
	$W_3 = 20$	$\mathbf{W_3 = 20}$	
	$2X_2 + W_1 = 20$	$\mathbf{W_1 = 8}$	**<u>Solución básica factible</u>**
c) $X_1 = W_2 = 0$	$10X_2 = 60$	$\mathbf{X_2 = 6}$	**VB≥ 0**
	$W_3 = 20$	$\mathbf{W_3 = 20}$	
		Z Max. = 5(0) + 2(6) = 12	
	$2X_2 + W_1 = 20$	**No existe una solución básica**	
d) $X_1 = W_3 = 0$	$10X_2 + W_2 = 60$	**correspondiente a VB $\{X_2, W_1, W_2\}$**	
	$4X_1 = 20$	$\mathbf{X_1 = 5}$	**No es solución básica**
e) $X_2 = W_1 = 0$	$5X_1 + W_2 = 60$	$\mathbf{W_2 = 35}$	**factible porque $W_3 < 0$**
	$5X_1 + W_3 = 20$	$\mathbf{W_3 = -5}$	
	$4X_1 + W_1 = 20$	$\mathbf{W_1 = -28}$	**No es solución básica**
f) $X_2 = W_2 = 0$	$5X_1 = 60$	$\mathbf{X_1 = 12}$	**factible porque**
	$5X_1 + W_3 = 20$	$\mathbf{W_3 = -40}$	**W_1 y W_2 <0**

	$4X_1 + W_1 = 20$	$\mathbf{W_1 = 4}$	**<u>Solución básica factible</u>**
g) $X_2 = W_3 = 0$	$5X_1 + W_2 = 60$	$\mathbf{W_2 = 40}$	$\mathbf{VB \geq 0}$
	$5X_1 = 20$	$\mathbf{X_1 = 4}$	
		Z Max. = 5(4) + 2(0) = 20	

	$4X_1 + 2X_2 = 20$	$\mathbf{X_1 = 8/3}$	**<u>Solución básica factible</u>**
h) $W_1 = W_2 = 0$	$5X_1 + 10X_2 = 60$	$\mathbf{X_2 = 14/3}$	$\mathbf{VB \geq 0}$
	$5X_1 + W_3 = 20$	$\mathbf{W_3 = 20/3}$	
		Z Max. = 5(8/3) + 2(14/3) = 22.67	

	$4X_1 + 2X_2 = 20$	$\mathbf{X_2 = 2}$	**<u>Solución básica factible</u>**
i) $W_1 = W_3 = 0$	$5X_1 + 10X_2 + W_2 = 60$	$\mathbf{W_2 = 20}$	**" OPTIMA"**
	$5X_1 = 20$	$\mathbf{X_1 = 4}$	$\mathbf{VB \geq 0}$
		Z Max. = 5(4) + 2(2) = 24	

	$4X_1 + 2X_2 + W_1 = 20$	$\mathbf{W_1 = -4}$	**No es una solución**
j) $W_2 = W_3 = 0$	$5X_1 + 10X_2 = 60$	$\mathbf{X_2 = 4}$	**básica factible porque**
$5X_1 = 20$		$\mathbf{X_1 = 4}$	$\mathbf{W_1 < 0}$

Estos resultados del conjunto de soluciones básicas, fueron obtenidos sustituyendo los valores de las variables no básicas en las ecuaciones de la forma estandar. Al sustituir estos resultados en la función objetivo, la solución óptima (Z Max.) resulta ser la del inciso **"i"**.

Otra forma de solución, es por el método **gráfico**. Para nuestro ejemplo 3.1.1

$$\text{Max. } Z = 5X_1 + 2X_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad 4X_1 + 2X_2 &\leq 20 \\ 5X_1 + 10X_2 &\leq 60 \\ 5X_1 \quad &\leq 20 \end{aligned}$$

$$X_i \geq 0 \ \forall_i$$

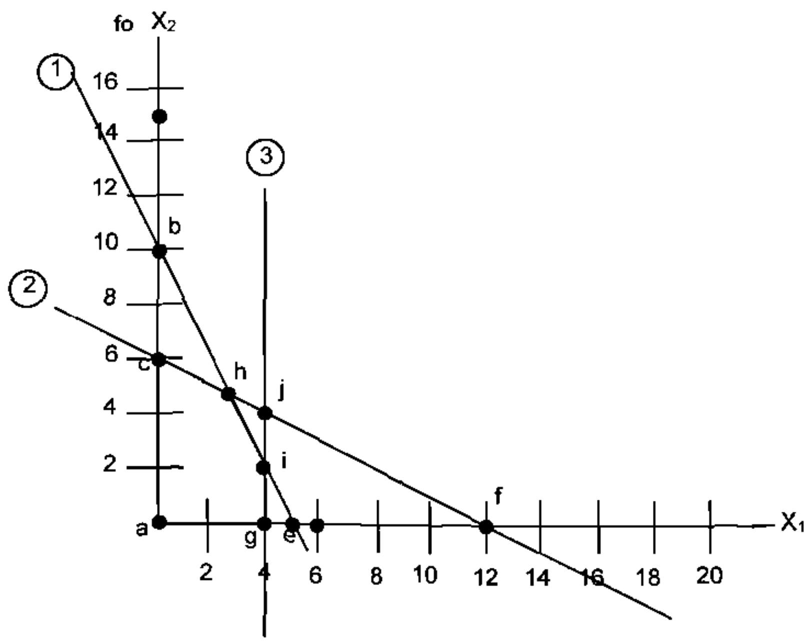
El procedimiento de este método es el siguiente: En cada restricción, la variable X_1 se iguala a **cero** y se despeja X_2, luego la variable X_2 se iguala a **cero** y se despeja X_1, quedando

1).- $X_1 = 0$; $X_2 \leq 10$
$X_2 = 0$; $X_1 \leq 5$

3).- $X_1 = 0$; $X_2 \leq 0$
$X_2 = 0$; $X_1 \leq 4$

2).- $X_1 = 0$; $X_2 \leq 6$
$X_2 = 0$; $X_1 \leq 12$

Graficando estos valores, se obtiene la siguiente figura.



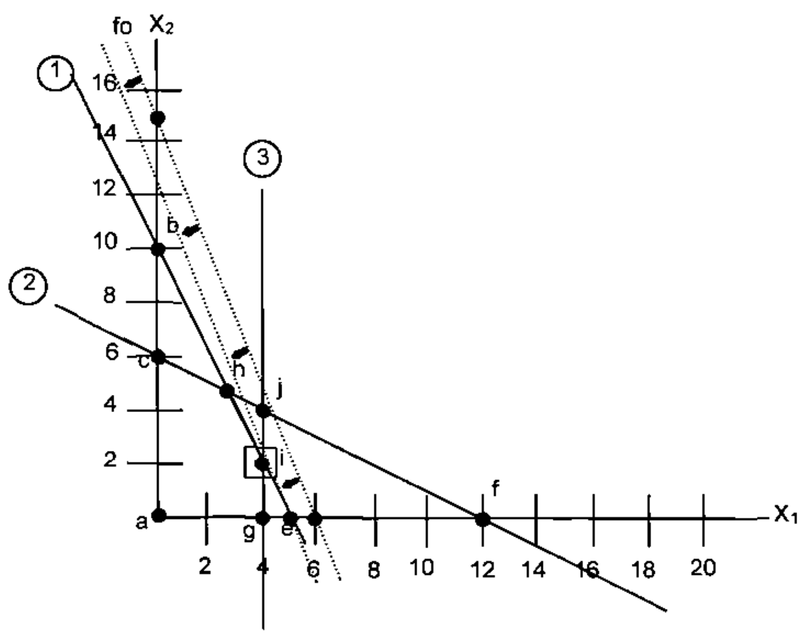
gráfica 3.1.1

Como se puede observar: Los puntos remarcados corresponden a las 9 soluciones básicas determinadas anteriormente. También podemos apreciar los 5 puntos extremos de la solución básica factible o región de la solución (figura sombreada), donde uno de los 5 es el óptimo. En la solución gráfica, ese punto óptimo se obtiene de la sig. manera:

Se le asigna un valor arbitrario a la función objetivo, se iguala a cero "X_1" y se despeja "X_2"; luego se iguala a cero "X_2" y se despeja "X_1".

$$30 = 5X_1 + 2X_2$$
$$X_1 = 0 \; ; X_2 = 15$$
$$X_2 = 0 \; ; X_1 = 6$$

La recta de la función objetivo, aparece como una línea punteada, fuera de la región de la solución, desplazándose perpendicularmente hacia ella, se puede observar que el punto que tocará primero es el punto **i**



gráfica 3.1.2

La regla nos dice que cuando esta línea se encuentra fuera de la región de la solución, esta puede desplazarse perpendicularmente a la derecha o a la izquierda. Si se desplaza a la derecha, el primer punto que toque es un mínimo: y el último punto que toque será el máximo. Si se desplaza a la izquierda, el primer punto que toque es una máximo; y el último punto que toque será un mínimo.

En nuestro ejemplo, la recta de la función objetivo se desplaza a la izquierda y el primer punto que toca es el máximo (punto **i**), donde $X_1 = 4$, $X_2 = 2$ y Z max = 5(4)+2(2)=24

3.2 PROPIEDADES DE LAS SOLUCIONES FACTIBLES

Primero.- Que exista una solución óptima; y en caso de tener más de una (solución múltiple), entonces deberá tener por lo menos dos vértices adyacentes de solución óptima.

Segundo.- La existencia de un número finito de vértices adyacentes formado por el conjunto convexo.

Tercero.- Si la solución en un vértice es igual o mayor que la solución en sus vértices adyacentes (según la pendiente de la función objetivo), entonces se habrá encontrado el vértice óptimo y por lo tanto la solución óptima.

Procedimiento del método simplex. El procedimiento de resolver los **nCm** conjuntos de ecuaciones simultáneas resulta ser ineficiente por la gran cantidad de ecuaciones generadas; y tener que resolver y comparar con la función objetivo hasta obtener la solución óptima. (Como se resolvió en el ejemplo 3.1.1)

El método simplex está diseñado para evitar estas ineficiencias, ya que su enfoque consiste en partir de una solución básica factible (punto extremo factible) y luego a través de una sucesión de soluciones básicas factibles (donde la solución de cada iteración mejora el valor de la función objetivo), se llega a la solución óptima. Para garantizar la generación de tal sucesión de soluciones básicas factibles, la base del método simplex, está formada por dos condiciones fundamentales que son:

Condición de optimidad. Esta asegura que nunca se encontrará una solución inferior, referente al punto de solución actual.

Condición de factibilidad. Garantiza que partiendo de una solución básica factible, únicamente se encontrará durante el cálculo "soluciones básicas factibles"

El procedimiento del método simplex, lo podemos resumir en tres principales pasos:

Paso 1.- Expresar en la forma estándar el problema lineal y formar la primera tabla.

Paso 2.- Elegir una solución básica factible inicial. Para esto, se pueden presentar dos casos: a) cuando todas las restricciones del problema original son $\leq$ b) cuando las restricciones en el problema original incluyen $\geq$ **o** $=$.

Paso 3.- Generar nuevas soluciones básicas factibles, utilizando las condiciones de **optimidad y factibilidad** hasta obtener la solución óptima (si existe y está acotada).

En nuestro ejemplo, emplearemos el método simplex para encontrar la solución, óptima, siguiendo los pasos anteriores.

Paso 1

Forma Estándar de nuestro problema original

$$\text{Max. } Z = 5\,x_1 + 2\,x_2 + 0\,w_1 + 0\,w_2 + 0\,w_3$$

$$\begin{aligned} \text{s.a}\quad 4x_1 + 2x_2 + w_1 &= 20 \\ 5x_1 + 10x_2 + w_2 &= 60 \\ 5x_1 + w_3 &= 20 \end{aligned}$$

$$x_i \geq 0\ \forall_i\ ;\ w_i \geq 0\ \forall_i$$

Formato de tabla a partir de la forma estándar

			Renglón de contribuciones	
			Renglón de variables	
Columna de Contribuciones	Columna de Variables de base	Columna de Términos Independientes	Cuerpo de la tabla	Parte identidad
		Z	Renglón índice	

Tabla 3.2.1

Paso 2

El método simplex inicia con una solución básica factible **(un punto extremo)** que para nuestro ejemplo debe tener **n - m** variables no básicas (5 - 3 = 2), obteniéndose así una solución básica factible inicial obvia $\mathbf{X_1 = X_2 = 0}$. Esto nos da la solución de inicio[1] donde los valores de las variables de holgura serán: $\mathbf{W_1 = 20, W_2 = 60}$ **y** $\mathbf{W_3 = 20}$. La solución de inicio la proporcionan las variables cuyos coeficientes en las ecuaciones normalizadas forman una matriz identidad. En nuestro ejemplo esas variables fueron todas de holgura.

Esta solución de inicio esta representada en la tabla 2-2, donde las variables básicas son las de holgura, con los valores expresados anteriormente y un valor **Z** de **cero.**

Renglón de contribuciones: Son los coeficientes de las variables de la función objetivo.

Renglón de variables: Son las variables de la función objetivo

Cuerpo de la tabla: Son los coeficientes de las variables funcionales de las ecuaciones estandarizadas.

Matriz identidad: Son los coeficientes de las variables de holgura de las ecuaciones estandarizadas.

---

[1]Cuando todas las restricciones son de $\leq$, las variables de holgura siempre proporcionan una solución de inicio.

Columna de solución o de constantes: Son los términos independientes de las ecuaciones estandarizadas.

Columna de variables básicas: Son los coeficientes de las variables que forman la matriz identidad.

Columna de contribuciones: Son los coeficientes de las variables que están en la base.

Renglón índice: Incluye el valor de **Z** y cada uno de los elementos de este renglón, llamados **números índices**

El valor de **Z** es el resultado de la sumatoria de cada uno de los elementos de la columna de contribuciones, multiplicada por cada uno de los elementos correspondientes de la columna de términos independientes.

El valor de los **números índices,** se obtienen multiplicando cada uno de los elementos de las columnas de contribuciones básicas por cada uno de los elementos correspondientes de las columnas que forman el cuerpo de la tabla y la matriz identidad, restándose a cada una de estas operaciones la contribución de la variable correspondiente a cada una de estas columnas.

Cálculo del renglón índice:

El valor de Z: (0x20 + 0x60 + 0x20) = 0

primer número índice: [(0x4 + 0x5 + 0x5) – 5] = – 5

segundo número índice: [(0x2 + 0x10 + 0x0) – 2] = – 2 y así sucesivamente para todos los demás valores del renglón índice, cuyos resultados aparecen en la siguiente tabla, que también nos reporta la solución de inicio; cuyo valor de Z es **cero**

			5	2	0	0	0
			X_1	X_2	W_1	W_2	W_3
0	W_1	20	4	2	1	0	0
0	W_2	60	5	10	0	1	0
0	W_3	20	5	0	0	0	1
		0	– 5	– 2	0	0	0

Tabla 3.2.2

Paso 3

En este paso se determina una nueva solución básica factible o punto extremo factible, con un valor mejorado en la función objetivo, para esto se elige una variable no básica actual, que debe hacerse básica, conocida como variable que **entra;** y está determinada por la condición de **optimidad.** La variable básica actual que va a ser no básica se conoce como la variable que **sale** y está determinada por la condición de **factibilidad.**

La condición de **optimidad** estipula que la variable que entra será elegida como la variable no básica que tenga un coeficiente positivo en la función objetivo (cuando se esta maximizando); en la función objetivo de nuestro ejemplo, tanto X_1 como X_2 tienen coeficientes positivos, calificando cada una como variable de entrada. Sin embargo, la variable con el **mayor** coeficiente positivo usualmente es la que se elige. Por lo tanto, X_1 es la variable que entra. Lo anterior equivale a decir que la variable que **entra** es aquella cuyo número índice es el más negativo (cuando se está maximizando), como se puede ver en la (tabla 2-2) es la misma variable X_1 la que entra

La condición de **factibilidad** nos indica que si la variable de entrada X_1 se aumenta, la solución debe moverse del punto **"a"** al punto **"g"** (gráfica 2-1), ya que el único punto extremo factible que puede ser alcanzado del punto actual **"a"** al aumentar X_1 es el punto **"g"** que es la nueva solución de punto extremo factible.

Una interpretación geométrica, es determinar las intersección de todas las restricciones con la dirección no negativa del eje X_1 (puesto que X_1 es la variable de entrada); entonces la restricción con la intersección más pequeña no negativa, define la variable que debe salir. En nuestro ejemplo, la gráfica 2-1 nos indica que las **tres** restricciones tienen intersecciones con la dirección no negativa del eje X_1 ; y están dadas por **ag = 20/5 = 4; ae = 20/4 = 5 y af = 60/5 = 12** (según las restricciones de nuestro ejemplo). Como **ag** es el valor más pequeño, el valor de X_1 es **ag = 4.** Ya que en **g**, la variable básica actual $\mathbf{W_3}$ asociada a la restricción 3 se hace cero, se deduce que esta variable es la que sale.

Para determinar la variable que **sale** cuando se está en la tabla de inicio, se divide cada uno de los elementos de la columna de constantes entre cada uno de los elementos correspondientes a la columna de la variable de **entrada** (X_1 en este caso); y el cociente más pequeño, "cuando se maximiza" (intersección más pequeña) es la base para saber cual es la variable de **salida**; esta variable será: **la variable de base asociada a la relación mínima obtenida.** (en caso de empate en dos o más cocientes, la variable de salida será la que corresponda al renglón superior)

Una vez determinadas las variables de **entrada y salida,** el paso siguiente es modificar la tabla; para esto, es necesario proceder de la siguiente manera:

Enmarcar la columna de la variable que entra **(columna clave)**

a) Enmarcar el renglón cuya variable básica sea donde se obtuvo el menor cociente no negativo mayor que cero **(renglón clave).**

b) La intersección de la columna y el renglón clave, nos da el **número clave.**

c) Con la variable de entrada y su respectiva contribución, se inicia **el renglón principal** de la siguiente tabla; los demás elementos de este renglón se obtienen dividiendo cada uno de los elementos del renglón clave (de la tabla anterior) entre el número clave. Teniendo ya todos los elementos de ese renglón, a los elementos restantes de la columna clave anterior se les asignan ceros en esta tabla. Se llenan todos los demás espacios (lo que resta del cuerpo de la tabla, lo que fue la parte identidad y el renglón índice). Para esto se utiliza la siguiente fórmula:

$$\text{E.N.} = \frac{[(\text{E.A})(\text{N.Clave}) - (\text{E.C.C.C})(\text{E.C.R.C.})]}{\text{N.Clave}}$$

Fórmula 3-1

E.N. = Elemento Nuevo.

E.A. = Elemento Antiguo.

N.Clave = Número Clave

E.C.C.C. = Elemento correspondiente de la columna clave.

E.C.R.C. = Elemento correspondiente del renglón clave

d) El renglón de contribuciones, el renglón de variables, la columna de contribuciones y la columna de variables básicas, permanecen sin cambios.

e) Una vez terminada la tabla, se procede a verificar si estamos o no en la solución óptima (en caso de que exista y esté acotada).

f) Si hay un número índice negativo (cuando se maximiza) existe todavía una solución mejor, por lo tanto se procede a formar otra nueva tabla, siguiendo el mismo procedimiento anterior, hasta que todos los números índices sean positivos, indicándonos esto que estamos en la **solución óptima.**

La solución de nuestro ejemplo por el método simplex, siguiendo los pasos anteriores es como se describe a continuación, partiendo de la tabla 3-2

			5	2	0	0	0	
			X_1	X_2	W_1	W_2	W_3	relacion
0	W_1	20	4	2	1	0	0	$\frac{20}{4}=5$
0	W_2	60	5	10	0	1	0	$\frac{60}{5}=12$
0	W_3	20	5	0	0	0	1	$\frac{20}{5}=4*$
		0	-5	-2	0	0	0	

Seleccionamos la columna y el renglón clave, formamos el renglón principal de la tabla siguiente y calculamos todos los demás elementos de acuerdo a la fórmula 3-1

			5	2	0	0	0	
			X_1	X_2	W_1	W_2	W_3	relacion
0	W_1	4	0	2	1	0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{4}{2}=2*$
0	W_2	40	0	10	0	1	-1	$\frac{40}{10}=4$
5	X_1	4	1	0	0	0	$\frac{1}{5}$	
		20	0	-2	0	0	1	

Como hay un número índice negativo, no estamos en la solución óptima, por lo tanto se sigue el procedimiento explicado anteriormente.

Tabla 3.2.3

			5	2	0	0	0
			X_1	X_2	W_1	W_2	W_3
2	X_2	2	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{2}{5}$
0	W_2	20	0	0	-5	1	3
5	X_1	4	1	0	0	0	$\frac{1}{5}$
		24	0	0	1	0	$\frac{1}{5}$

Como se puede observar, todos los números índices en la tabla anterior son positivos, lo que indica que estamos en la solución óptima. Donde $X_1 = 4$; $X_2 = 2$ y $Z = 24$

3.3 RESUMEN DEL MÉTODO SIMPLEX

Expresar en forma estándar el programa lineal y formar la tabla inicial.

Cuando todas las restricciones sean de $\leq$, se anexan puras variables de holgura (W) con una contribución de **cero** en la función objetivo.

Cuando haya restricciones de $\geq$ y de $=$, se utiliza la técnica de la **M,** llamada también de penalización. Esta técnica será vista en el tema siguiente.

Generar nuevas soluciones básicas factibles hasta llegar a la solución óptima, (si es que existe) utilizando las condiciones de optimidad y factibilidad.

Como detectar algunos casos que se presentan en el desarrollo del método simplex

a) Soluciones no acotadas: Cuando la función objetivo puede aumentar indefinidamente, pero también puede tener un valor acotado. Esta solución se detecta cuando en cualquier iteración cualquiera de los candidatos para variable de entrada, tienen todos los coeficientes **negativos o ceros**.

b) Soluciones óptimas alternativas: Cuando la función objetivo es paralela a una restricción, hay un número infinito de soluciones que nos da el mismo valor de la función objetivo. Esta solución se detecta cuando en el renglón índice de la tabla óptima aparecen más ceros que variables de decisión.

c) Soluciones factibles no existentes: Esto ocurre cuando el problema es tal, que ningún punto puede satisfacer todas las restricciones. Esta solución se detecta cuando en la solución óptima se tiene en la columna de variables básicas una variable **artificial o ficticia.**

Para la solución de programas lineales, existen varios paquetes de computadora como son: El Gino, el Go, el Manager, el Lindo, el QSB etc. Para nuestro ejemplo (ejemplo 3-1), usaremos el paquete Lindo, cuyo procedimiento para la entrada de datos es como sigue:

1. Se inserta en el drive de la computadora el disco flexible donde se tenga dicho paquete de computación, puede ser también que se tenga en el disco duro de la computadora. *En cualquiera de los dos casos, se manda traer a la pantalla utilizando* la palabra **lindo**.

2. En la pantalla aparecerán (**:**) , para enseguida anotar nuestra función objetivo, que puede ser maximizar o minimizar; una vez terminado lo anterior, dar un Enter en el teclado.

3. En nuestra pantalla aparecerá (?), donde se pondrá **subject to** (sujeto a); dar un Enter en el teclado.

4. En la pantalla aparecerá otra vez (?), anotando aquí la primera restricción, una vez terminada dar otro Enter, donde aparecerá de nuevo ese signo de interrogación, anotando nosotros la segunda restricción. Y así sucesivamente hasta terminar la última restricción de nuestro problema, seguido de un Enter.

5. Apareciendo en la pantalla otro signo de interrogación, donde pondremos "**go**", al hacer esto, en la pantalla se desplazarán los resultados óptimos de nuestro programa lineal, como se indica a continuación.

```
LINDO/PC (UC  25 MAR 83)
:max 5x1+2x2
?subject to
?4x1+2x2<=20
?5x1+10x2<=60
?5x1<=20
?go

LP OPTIMUM FOUND  AT STEP     2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE
   1) 24.0000000

VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
  X1           4.000000          .000000
  X2           2.000000          .000000

  ROW     SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
  2)           .000000          1.000000
  3)          20.000000          .000000
  4)           .000000          .200000

NO. ITERATIONS=       2
```

Como podemos apreciar, estos resultados son los mismos que determinamos por el método gráfico y el método simplex.

3.4 ASESORIA SOBRE PRODUCCION EN UNA EMPRESA

Planteamiento del problema de la investigación que realizamos.

Se dio asesoría a personal de la gerencia de una empresa de chocolates sobre un problema de producción, el cual se expone a continuación en forma amena entre el personal de gerencia que llamaremos **(G)** y los asesores que llamaremos **(A)**.

(G).- Sres. **A.** Tenemos un problema que creo cae dentro del campo que ustedes dominan; y, es el siguiente:

Producimos **cuatro** clases de bombones de chocolates, que vendemos en **tres** presentaciones diferentes, en tres tipos de cajas, cada una de ellas con un surtido bien definido. Por ahora no queremos cambiar la composición por que ya tiene su aceptación en el mercado. Por otra parte nuestro equipo actual no nos permite producir más de una cantidad diaria de cada tipo de bombón. Los costos y el precio de venta nos dejan buenos beneficios; *entonces tenemos la siguiente* interrogante: **¿ cuántas cajas de cada clase debemos producir al mes para que estos beneficios sean lo mas alto posible ?**

(A).- Bien, Sres. G. Lo que ustedes me exponen se trata de un programa lineal, que nos puede servir para establecer una buena estrategia de producción y de ventas, donde podemos representar las tres presentaciones como: Caja 1, Caja 2, Caja 3. También hay que tener en cuenta ciertas limitaciones técnicas como son su capacidad de producción de los cuatro tipos de chocolates, y sus recursos de personal. Dicho en otras palabras ustedes quieren un programa para que el margen de beneficios globales rinda al máximo tomando en cuenta ciertas restricciones.

(G).- Sres. A. Su última frase me inquieta, así expresado mi problema me parece muy fácil. De hecho, ¿qué Industrial no se esfuerza por alcanzar un objetivo, teniendo en cuenta ciertas restricciones?

(A).- Sres. G. Los entendemos, pero ha llegado el momento de entrar en detalles; podrían describirnos la composición de sus tres cajas.

(G).- Sres. A. Con mucho gusto, nosotros tenemos tres surtidos los cuales se describen en la siguiente tabla, donde la Caja 3 es de suma importancia por su gran demanda en el mercado

	CAJA 1	CAJA 2	CAJA 3
TABLETAS DE ORO	10	10	30
ALMENDRAS REALES	10	10	10
CEREZAS OVALADAS	20	10	10
NUECES MOSCADAS	10	20	30

(A).- Sres. G. En efecto, la caja tres por su gran venta es de suma importancia. Veamos ahora esas restricciones.

(G).- Sres. A. Nuestra capacidad de producción no excede de las cantidades que les mostramos a continuación:

TABLETAS DE ORO	3,000,000 de unidades al año.
ALMENDRAS REALES	2,000,000 de unidades al año.
CEREZAS OVALADAS	3,000,000 de unidades al año.
NUECES MOSCADAS	3,500,000 de unidades al año.

(A).- Sres. G. Ustedes deben de producir al año un número de cajas próximo a las 200,000. Solo resta tomar en cuenta los tiempos medios para el llenado de chocolates en cada una de las cajas, así como la cantidad de personal destinado para ello:

(G).- Sres. A. Los tiempos promedios que tenemos registrados para el llenado de cada caja son los que les mostramos en seguida.

CAJA 1 = 9 minutos.

CAJA 2 = 9 minutos.

CAJA 3 = 18 minutos.

También disponemos de 15 empaquetadoras, que nos representan aproximadamente 200 horas de trabajo al mes, para ser exactos 194 horas, es decir 11,640 minutos al mes en total (11,640) (12) (15) = 2.1 millones de minutos de mano de obra al año.

(A).- Sres. G. Los datos que nos proporcionaron, los describiremos de la siguiente manera, para que los puedan apreciar mejor.

	Cantidades unitarias requeridas			**Disposición máxima**
	CAJA 1	CAJA 2	CAJA 3	
TABLETAS DE ORO	10	10	30	3,000,000
ALMENDRAS REALES	10	10	10	2,000,000
CEREZAS OVALADAS	20	10	20	3,000,000
NUECES MOSCADAS	10	20	30	3,500,000
MINUTOS DE TRABAJO	9	9	18	2,100,000

Faltándonos por preguntarles. ¿Cuántas cajas vendieron el año pasado?

(G).- Sres. A. Las cajas vendidas el año pasado son las siguientes:

CAJA 1 = 52,000

CAJA 2 = 98,000

CAJA 3 = 34,000

(A).- Sres. G. Con esta información, verificamos si nuestra disposición máxima es suficiente.

TABLETAS DE ORO:

52,000 X 10 = 520,000

98,000 X 10 = 980,000

34,000 X 30 =1,020,000

TOTAL =2,520,000

Si disponen de como máximo 3, 000,000, no hay problema con las tabletas de oro.

ALMENDRAS REALES:

52,000 X 10 = 520,000

98,000 X 10 = 980,000

34,000 X 10 = 340,000

TOTAL =1,840,00

Si disponen de como máximo 2, 000,000, no hay problema con las almendras reales.

CEREZAS OVALADAS:

52,000 X 20 =1,040,000

98,000 X 10 = 980,000

34,000 X 20 = 680,000

TOTAL =2,700,000

Si disponen de como máximo 3, 000,000, no hay problema con las cerezas ovaladas

NUECES MOSCADAS:

52,000 X 10 = 520,000

98,000 X 20 =1,960,000

34,000 X 30 =1,020,000

TOTAL =3,500,000

Si disponen de como máximo 3, 500,000, por lo tanto apenas se cubre esta cantidad de nueces moscadas.

Este programa es posible realizarlo, la única dificultad sería que para que produzcan más cajas, es necesario que dispongan de más nueces moscadas.

Ahora, en lugar de ponderar las cifras de producción con el número de cajas respectivas asegurándonos que el total no exceda de cierta cantidad, el problema se los representaremos de la forma siguiente, llamando a:

" X " la cantidad de cajas # 1 a producir en el año

"Y " la cantidad de cajas # 2 a producir en el año

"Z " la cantidad de cajas # 3 a producir en el año

Ahora bien, de acuerdo a las cantidades unitarias de bombones, los minutos de trabajo y a la disposición máxima de bombones y tiempo, se tienen las siguientes restricciones.

$$10X + 10Y + 30Z \leq 3{,}000{,}000$$
$$10X + 10Y + 10Z \leq 2{,}000{,}000$$
$$20X + 10Y + 20Z \leq 3{,}000{,}000$$
$$10X + 20Y + 30Z \leq 3{,}500{,}000$$
$$9X + 9Y + 18Z \leq 2{,}100{,}000$$

Se formaron 5 restricciones con tres incógnitas, las primeras cuatro, referente a la materia prima y la quinta a la mano de obra.

Los números X, Y, Z, están sometidos a ser positivos o nulos.

Si quieren ustedes que el programa les proporcione un beneficio máximo es preciso que nos proporcionen las utilidades que tienen de cada Caja.

(G).- Sres. A. Claro que si, nuestro margen bruto por caja es de 5 pesos en la caja #1, 6 pesos en la caja #2, y 12 pesos en la caja #3.

(A).- Sres. G. Bueno, tenemos ya los elementos para resolver su problema que se formula de la siguiente manera:

$$Zmax. = 5X + 6Y + 12Z$$

$$\text{sujeto a:}\quad \begin{aligned} 10X + 10Y + 30Z &\leq 3{,}000{,}000 \\ 10X + 10Y + 10Z &\leq 2{,}000{,}000 \\ 20X + 10Y + 20Z &\leq 3{,}000{,}000 \\ 10X + 20Y + 30Z &\leq 3{,}500{,}000 \\ 9X + 9Y + 18Z &\leq 2{,}100{,}000 \end{aligned}$$

$$(X \geq 0;\ Y \geq 0;\ Z \geq 0)$$

(G).- Sr. (A). Háganos este favor, no tenemos la menor idea de la forma en que se puede proceder, en como se resuelve totalmente este problema.

Respondiendo a las peticiones de estas personas, les explicamos el paquete Manager y otros más, donde la solución proporcionada por el paquete Manager fue la siguiente:

$$\text{Max } Z = 5x1 + 6x2 + 12x3$$

Subject to:

$$C1 \quad 10x1 + 10x2 + 30x3 <= 3000000$$
$$C2 \quad 10x1 + 10x2 + 10x3 <= 2000000$$
$$C3 \quad 20x1 + 10x2 + 20x3 <= 3000000$$
$$C4 \quad 10x1 + 20x2 + 30x3 <= 3500000$$
$$C5 \quad 9x1 + 9x2 + 18x3 <= 2100000$$

Final optimal solution

Variable	Value
x 3	66,666.66
s 2	333,333.38
s 3	166,666.75
x 2	50,000.00
x 1	50,000.00

Z $1,349,999.88

Una vez resuelto el problema, acordaron producir 50,000 Cajas #1; 50,000 Cajas #2 y 66,667 Cajas #3 y así obtener una Utilidad de 1,350,000, que comparado con lo obtenido el año pasado, donde se vendieron 52,000 Cajas #1; 98,000 Cajas #2 y 34,000 Cajas #3, al mismo precio de 5 pesos, 6 pesos y 12 pesos respectivamente, la cual da una utilidad de un millón doscientos cincuenta *y seis mil pesos* ($1,256,000), *comparado con* la utilidad anterior, les da una diferencia de $94,000.

CAPITULO 4

METODO SIMPLEX CON PENALIZACION

Este método es también llamado: Método de la **M** grande.

En el capítulo anterior, el ejemplo tratado contenía puras restricciones de $\leq$ (menor o igual que), donde las variables introducidas al sistema de ecuaciones normalizadas eran puras variables de holgura (**W**); y nos servían para formar la matriz identidad en la tabla de inicio, la cual se convierte en la matriz inversa en la última tabla (óptima). Esta variable de holgura, también sirve para absorber el valor faltante de la igualdad.

En este capítulo trataremos otro tipo de variables que deben ser introducidas al modelo lineal. A estas variables se les llama **ficticias o artificiales** y las representaremos con la letra **"U"**; esta variable tiene la función de formar la parte identidad en la tabla de inicio del modelo, siendo solamente un artificio para la solución del problema lineal.

Cuando se tiene una restricción de ≥ (mayor o igual que).

ejemplo 4.1 $6X_1 \geq 24$

Cualquier valor de X que valga como mínimo 4, cumple con la desigualdad; pero al transformarla en igualdad, es decir. $6X_1 = 24$, el único valor que satisface esta igualdad es el valor de 4. Sin embargo, la restricción original se trató como una desigualdad, de tal manera que al dar un valor de 5 a X_1 ($X_1 = 5$), este valor satisface la desigualdad, más no la igualdad; por lo que debemos agregar una variable de **holgura o superflua** a dicha igualdad, quedando de la siguiente manera $6X_1 = 24 + W_1$. Al pasar esta variable al lado izquierdo, quedará: $6X_1 - W_1 = 24$. De esta manera no tenemos porque preocuparnos por el valor que tomará X_1, puesto que W_1 tomará el excedente de la igualdad, como sería el caso de $X_1 = 5$: $6(5) - W_1 = 24$, donde al despejar W_1 nos queda que $W_1 = 6$; por tanto, nuestra desigualdad una vez transformada en igualdad, se expresará como sigue:

$$6X_1 - W_1 = 24$$

Esto nos indica, que para transformar una desigualdad de la forma ≥ (mayor o igual que) en igualdad, se tiene que agregar una variable de holgura o superflua negativa ($-W_1$), la cual no formará parte de la matriz identidad en la primera tabla ni de la matriz inversa en la tabla de solución óptima, por tener signo **negativo.** Es por esto, que a la desigualdad transformada en igualdad, se le debe agregar una variable ficticia o artificial (**U**), que como ya mencionamos sirve para formar la matriz identidad en la tabla de inicio; y su coeficiente será **uno** y **positivo** (+1), como se muestra a continuación.

$$6X_1 - W_1 + U_1 = 24.$$

Cuando tengamos restricciones que sean igualdades (donde no hay complementos ni excesos), es decir que no se trata de desigualdades, sino de una igualdad como restricción original; la variable de holgura o superflua no aparecerá. Sin embargo para formar la parte identidad en la tabla de inicio, es necesario agregar una sola variable ficticia (U) a la restricción en forma de igualdad como se ve a continuación

ejemplo 4.2 $5X_1 + 3X_2 = 15$

A esta restricción solo se le agrega la variable ficticia (U) con un coeficiente de uno y positivo (+), quedando de la siguiente manera

$$5X_1 + 3X_2 + U_1 = 15$$

Donde esta nueva variable ficticia (U), cuyo significado real en el problema es para satisfacer la necesidad de formar la matriz identidad en la primera tabla; y en la tabla óptima la matriz inversa. Las variables ficticias deben de estar representadas en la función objetivo del problema lineal, penalizándose con un costo alto en dicha función objetivo. Este costo alto se representa con la letra **M** como contribución de esas variables ficticias en la función objetivo. Cuando se esté maximizando, deberá entrar con signo **negativo** (–M), cuando se esté minimizando, entrará con signo **positivo** (+M)

Para afianzar mejor este método de penalización, démosle solución al siguiente ejemplo:

ejemplo 4.3

$$\text{min. } Z = 4X_1 + 2X_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad 3X_1 + X_2 &= 6 \\ 8X_1 + 3X_2 &\geq 8 \\ X_1 + 2X_2 &\leq 4 \\ X_i &\geq 0 \ \forall_i \end{aligned}$$

Representación de la forma estándar y elaboración de la primera tabla.

$$\text{Min. } Z = 4X_1 + 2X_2 + 0W_1 + MU_1 + MU_2 + 0W_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.a:} \quad & 3X_1 + X_2 + U_1 = 6 \\ & 8X_1 + 3X_2 - W_1 + U_2 = 8 \\ & X_1 + 2X_2 + W_2 = 4 \\ & X_i;\ W_i;\ U_i \geq 0\ \forall_i \end{aligned}$$

Con la finalidad de que la matriz identidad quede a la derecha de la primera tabla. En la función objetivo, después de las variables de decisión, se pondrán todas las variables de holgura negativas que haya en las ecuaciones normalizadas (con una contribución de **cero**), empezando de la primera ecuación. En seguida se pondrán todas las variables de holgura y ficticias, (con signo positivo) empezando de la primera ecuación, donde: La contribución de las variables de holgura en la función objetivo será de **cero;** mientras que la contribución a la función objetivo de las variables ficticias será de una contribución muy grande (–**M**) si se está **maximizando;** y de (+**M**) si se está **minimizando.**

Con la forma estándar terminada, se procede a formar la primera tabla de la misma forma en que se llevó a cabo anteriormente.

tabla 4.1

			4	2	0	M	M	0
			X_1	X_2	W_1	U_1	U_2	W_2
M	U_1	6	3	1	0	1	0	0
M	U_2	8	8	3	−1	0	1	0
0	W_2	4	1	2	0	0	0	1
		14M	11M − 4	4M −2	− M	0	0	0

Una vez terminada la tabla de inicio, se busca cual va a ser la variable de entrada. Cuando se está **maximizando**, la variable de **entrada** es la que corresponde a la columna cuyo número índice es el más **negativo.** Cuando se está **minimizando,** la variable de **entrada** es la que corresponde a la columna cuyo número índice es el más **positivo.** En nuestro ejemplo esa columna que contiene a la variable de entrada es la que aparece enmarcada (columna clave). Para seleccionar el renglón clave, se efectúa el mismo procedimiento que para **maximizar**

Para generar nuevas soluciones básicas factibles, hay que determinar la siguiente tabla o iteración, siguiendo el procedimiento antes descrito: formar el renglón principal de la siguiente tabla etc. etc. quedando de la manera siguiente.

			4	2	0	M	M	0
			X_1	X_2	W_1	U_1	U_2	W_2
M	U_1	3	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	1	$-\frac{3}{8}$	0
4	X_1	1	1	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	0
0	W_2	3	0	$\frac{13}{8}$	$-\frac{1}{8}$	0	$-\frac{1}{8}$	1
		3M+4	0	$-\frac{1}{8}M-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}M-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{11}{8}M+\frac{1}{2}$	0

última tabla tabla 4.2

			4	2	0	M	M	0
			X_1	X_2	W_1	U_1	U_2	W_2
0	W_1	8	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{8}{3}$	-1	0
4	X_1	2	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0
0	W_2	4	0	$\frac{19}{12}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	1
		8	0	$-\frac{2}{3}$	0	$-M+\frac{4}{3}$	$-M$	0

Si observamos los elementos del renglón índice, encontramos que todos los elementos son **negativos** y **ceros,** por tanto ya no es posible seleccionar otra columna **clave.** Lo que indica que estamos en la solución óptima, donde:

Z mínima = 8; $X_1 = 2$; $X_2 = 0$ y $W_1 = 8$.

Al correr este programa con el paquete de computación **lindo,** se obtienen los siguientes resultados

```
:min 4x1 +2x2
?subject to
?3x1+x2=6
?8x1+3x2>8
?x1+2x2<4
?go

LP OPTIMUM FOUND  AT STEP     2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE
1) 8.00000000

VARIABLE        VALUE         REDUCED COST
  X1          2.000000          .000000
  X2           .000000          .666667

 ROW     SLACK OR SURPLUS    DUAL PRICES
  2)          .000000       -1.333333
  3)         8.000000         .000000
  4)         2.000000         .000000

NO. ITERATIONS=       2
```

Comparando estos resultados del paquete con los obtenidos por el método simplex, vemos que son los mismos.

Realizaremos otro ejemplo sencillo:

ejemplo 4.4

Una compañía de alimentos debe producir 10,000 kilos de un producto con una mezcla especial para un cliente prestigiado. La mezcla se compone de tres ingredientes X_1, X_2 y X_3; el ingrediente X_1 , tiene un costo de 5 pesos el kilo y el ingrediente X_2, un costo de 7 pesos el kilo y el ingrediente X_3, su costo es de 10 pesos el kilo. No pueden usarse mas de 3,000 kilos del ingrediente de X_1 y por lo menos deberán usarse 1,500 kilos del ingrediente de X_2. Requiriéndose además como mínimo 2,000 kilos del ingrediente X_3.

Determine el número de kilos de cada ingrediente que tendrá que emplear la compañía, a fin de reducir al mínimo el costo total de los 10,000 kilos de la mezcla solicitada.

Una vez formulado el modelo lineal de nuestro problema, nos queda de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
\text{Min } & Z = 5X_1 + 7X_2 + 10X_3 \\
\text{s.a } & X_1 + X_2 + X_3 = 10{,}000 \\
& X_1 \leq 3{,}000 \\
& X_2 \geq 1{,}500 \\
& X_3 \geq 2{,}000 \\
& X_i \geq 0 \ \forall_i .
\end{aligned}
$$

Para elaborar la forma estándar de nuestro problema, transformamos las restricciones en igualdades, y la función objetivo se transformará con las contribuciones de las variables que han sido anexadas a las desigualdades para su transformación en igualdades, iniciando con aquellas que tengan signo **negativo** y después las de signo **positivo,** según el orden de aparición en las restricciones transformadas. Esto con el fin de que la matriz identidad quede al lado derecho de la tabla, quedando de la siguiente manera.

$$\text{Min } Z = 5X_1 + 7X_2 + 10X_3 + 0W_2 + 0W_3 + MU_1 + 0W_1 + MU_2 + MU_3$$

$$\begin{aligned} \text{s.a:}\quad & X_1 + X_2 + X_3 + U_1 = 10{,}000 \\ & X_1 + W_1 = 3{,}000 \\ & X_2 - W_2 + U_2 = 1{,}500 \\ & X_3 - W_3 + U_3 = 2{,}000 \\ & X_i\,;\, W_i\,;\, U_i \geq 0\ \forall_i . \end{aligned}$$

Una vez transformado nuestro programa a su forma estándar, procedemos a formar la tabla de inicio:

primera tabla tabla 4.3

			5	7	10	0	0	M	0	M	M
			X_1	X_2	X_3	W_2	W_3	U_1	W_1	U_2	U_3
M	U_1	10000	1	1	1	0	0	1	0	0	0
0	W_1	3000	1	0	0	0	0	0	1	0	0
M	U_2	1500	0	1	0	−1	0	0	0	1	0
M	U_3	2000	0	0	1	0	−1	0	0	0	1
		13500M	M−5	2M−7	2M−10	−M	−M	0	0	0	0

			5	7	10	0	0	M	0	M	M
			X_1	X_2	X_3	W_2	W_3	U_1	W_1	U_2	U_3
M	U_1	8500	1	0	1	1	0	1	0	-1	0
0	W_1	3000	1	0	0	0	0	0	1	0	0
7	X_2	1500	0	1	0	−1	0	0	0	1	0
M	U_3	2000	0	0	1	0	−1	0	0	0	1
		10500M+10500	M−5	0	2M−10	M−7	−M	0	0	−2M+7	0

			5	7	10	0	0	M	0	M	M
			X_1	X_2	X_3	W_2	W_3	U_1	W_1	U_2	U_3
M	U_1	6500	1	0	0	1	1	1	0	-1	-1
0	W_1	3000	1	0	0	0	0	0	1	0	0
7	X_2	1500	0	1	0	−1	0	0	0	1	0
10	X_3	2000	0	0	1	0	−1	0	0	0	1
		6500M+30500	M−5	0	0	M−7	M−10	0	0	−2M+7	−2M+10

			5	7	10	0	0	M	0	M	M
			X_1	X_2	X_3	W_2	W_3	U_1	W_1	U_2	U_3
M	U_1	3500	0	0	0	1	1	1	-1	-1	-1
5	X_1	3000	1	0	0	0	0	0	1	0	0
7	X_2	1500	0	1	0	−1	0	0	0	1	0
10	X_3	2000	0	0	1	0	−1	0	0	0	1
		3500M+45500	0	0	0	M−7	M−10	0	− M + 5	−2M+7	−2M+10

tabla final tabla 4.4

			5	7	10	0	0	M	0	M	M
			X_1	X_2	X_3	W_2	W_3	U_1	W_1	U_2	U_3
0	W_2	3500	0	0	0	1	1	1	-1	-1	-1
5	X_1	3000	1	0	0	0	0	0	1	0	0
7	X_2	5000	0	1	0	0	1	1	-1	0	-1
10	X_3	2000	0	0	1	0	-1	0	0	0	1
		70000	0	0	0	0	-3	-M + 7	-2	-M	-M+3

Como todos los números índices son **ceros** y **negativos,** no es posible determinar otra columna clave, lo que nos indica que estamos en la solución óptima, cuyos resultados son

$X_1 = 3000$: $X_2 = 5000$; $X_3 = 2000$; $W_2 = 3500$ y Zmin. = 70000

La corrida de este problema con el paquete de computación **lindo** nos arroja los siguientes resultados.

LINDO/PC (UC 25 MAR 83)

:min 5x1+7x2+10x3

?subject to

?x1+x2+x3=10000

?x1<3000

?x2>1500

?x3>2000

?go

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 4

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 70000.0000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	3000.000000	.000000
X2	5000.000000	.000000
X3	2000.000000	.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	.000000	-7.000000
3)	.000000	2.000000
4)	3500.000000	.000000
5)	.000000	-3.000000

NO. ITERATIONS= 4

Comparando estos resultados del paquete con los obtenidos por el método simplex, vemos que son los mismos.

CAPITULO 5

DUALIDAD DEL METODO SIMPLEX

Durante el desarrollo inicial de la programación lineal se realizo un descubrimiento muy importante respecto a la dualidad. Este descubrimiento reveló que, asociado a todo problema de programación lineal, existe otro problema lineal llamado **dual.**

Al planteamiento original del problema lineal, se le denomina **primal;** y para cada primal existe su **dual.** Para convertir un problema primal a su forma dual, se utilizan las equivalencias representadas a continuación en su formas **canónicas.**

primal		**dual**
Max. $Z = CX$ s.a: $AX \leq b$ $X_i \geq 0 \ \forall_i$	$\approx$	Min. $G = b^T V$ s.a: $A^T V \geq C^T$ $V_i \geq 0 \ \forall_i$
Min. $Z = CX$ s.a: $AX \geq b$ $X_i \geq 0 \ \forall_i$	$\approx$	Max. $G = b^T V$ s.a: $A^T V \leq C^T$ $V_i \geq 0 \ \forall_i$

Las formas canónicas del primal nos indican que **todas** las restricciones deben de ser:

Mayor o igual que ($\geq$), cuando se nos pida **minimizar.**

Menor o igual que ($\leq$), cuando se nos pida **maximizar.**

Cuando en nuestro problema original, todas las restricciones sean de $\leq$, inmediatamente se procede a plantearlo en su forma **dual,** lo mismo sucede cuando todas las restricciones del problema original sean de $\geq$. Cuando esto sucede, procedemos a formular la forma estándar de nuestro problema dual, según haya sido el caso de estas dos situaciones anteriores. Una vez teniendo nuestro problema dual en su forma estándar, se procede como en el Simplex desde la primera a la última tabla (solución óptima).

Cuando en nuestro problema original, se tienen restricciones de al menos dos de los tres tipos de desigualdad ($\geq$, $\leq$ y =), se utilizan las leyes de equivalencia para convertir nuestro problema primal que es asimétrico, en simétrico.

Cuando tenemos una restricción de $\leq$, esta se puede convertir en una restricción de $\geq$, cambiando de signo a todos los elementos que estén antes y después de la desigualdad ejemplo:

ejemplo 5.1

$$3X_1 - 8X_2 + 3X_3 \leq 3 \quad \approx \quad -3X_1 + 8X_2 - 3X_3 \geq -3$$

Lo mismo; si tenemos una restricción de $\geq$, para convertirla en una de $\leq$, realizamos el mismo procedimiento que en el ejemplo 4-1

ejemplo 5.2

$$6X_1 + 2X_2 + 4X_3 \geq 10 \quad \approx \quad -6X_1 - 2X_2 - 4X_3 \leq -10$$

Una restricción en forma de igualdad, se representará con dos restricciones, para después convertir una de ellas a $\geq$ o $\leq$, según sea el caso.

ejemplo 5-3

$$5X_1 + 4X_2 = 15 \quad \approx \quad \begin{array}{ll} 5X_1 + 4X_2 \leq 15 & (1) \\ 5X_1 + 4X_2 \geq 15 & (2) \end{array}$$

Si se esta maximizando en el primal, conviene dejar la (1) sin cambio; y determinar su equivalencia para la (2), quedando:

$$-5X_1 - 4X_2 \leq -15.$$

Si se esta minimizando en el primal, conviene dejar la (2) sin cambio; y determinar su equivalencia para la(1) ; quedando :

$$-5X_1 - 4X_2 \geq -15$$

El metodo **dual**, es ventajoso usarlo cuando en el primal se tienen mas restricciones que variables de decisión, como puede observarse en la forma canónica del primal y dual.

Para una mejor comprensión de este método, se resolverá el ejemplo 4.3 del capitulo anterior cuyo planteamiento es el siguiente:

ejemplo 5.4

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= 4X_1 + 2X_2 \\ \text{s.a:} \quad 3X_1 + X_2 &= 6 \\ 8X_1 + 3X_2 &\geq 8 \\ X_1 + 2X_2 &\leq 4 \\ X_i &\geq 0 \ \forall_i \end{aligned}$$

Como vemos, nuestro **primal** está en forma asimétrica; para poner su equivalente **dual**, es necesario transformar todas las restricciones a términos de $\geq$

La primera restricción está en términos de igualdad; que equivale a dos restricciones que son :

$$3X_1 + X_2 \geq 6$$

$$3X_1 + X_2 \leq 6$$

Como estamos minimizando hay que transformar únicamente la desigualdad de $\leq$ a la forma de $\geq$, quedándonos de la siguiente manera:

$$-3X_1 - X_2 \geq -6$$

La segunda restricción está en términos de $\geq$, por lo tanto no hay cambios que realizar, quedándonos igual.

$$8X_1 + 3X_2 \geq 8$$

La tercera restricción está en términos de $\leq$, por lo tanto hay que determinar su equivalencia en términos de $\geq$, quedándonos de la siguiente manera:

$$-X_1 - 2X_2 \geq -4$$

Una vez transformadas todas las restricciones del primal, éste nos queda en forma simétrica, representado en forma canónica como se ve a continuación:

$$
\begin{aligned}
&\text{Min. } Z = CX \\
&\text{s.a:}\quad AX \geq b \\
&\qquad X_i \geq 0\ \forall_i.
\end{aligned}
$$

El equivalente dual de este primal es el que a continuación se representa:

$$
\begin{aligned}
&\text{Max. } G = b^T V \\
&\text{s.a:}\quad A^T V \leq C^T \\
&\qquad V_i \geq 0\ \forall_i.
\end{aligned}
$$

La representación simétrica con todas sus restricciones, quedaría de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
&\text{Min } Z = 4X_1 + 2X_2 \\
&\text{s.a:}\quad 3X_1 + X_2 \geq 6 \\
&\qquad 3X_1 - X_2 \geq -6 \\
&\qquad 8X_1 + 3X_2 \geq 8 \\
&\qquad X_1 - 2X_2 \geq -4 \\
&\qquad X_i \geq 0\ \forall_i.
\end{aligned}
$$

La representación del dual con todas sus restricciones será la siguiente:

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } G = 6V_1 - 6V_2 + 8V_3 - 4V_4 \\
&\text{s.a:}\quad 3V_1 - 3V_2 + 8V_3 - V_4 \leq 4 \\
&\qquad V_1 - V_2 + 3V_3 - 2V_4 \leq 2 \\
&\qquad V_i \geq 0\ \forall_i.
\end{aligned}
$$

La solución de este programa **dual,** se efectúa como se vio en el método simplex. A continuación efectuaremos dicho procedimiento.

Forma estándar y formulación de la primera tabla.

$$\text{Max } G = 6V_1 - 6V_2 + 8V_3 - 4V_4 + 0W_1 + 0W_2$$

$$\text{s. a:} \quad 3V_1 - 3V_2 + 8V_3 - V_4 + W_1 = 4$$

$$V_1 - V_2 + 3V_3 - 2V_4 + W_2 = 2$$

$$V_i \geq 0 \ \forall_i.$$

primera tabla   tabla 5.1

			6	-6	8	-4	0	0
			V_1	V_2	V_3	V_4	W_1	W_2
0	W_1	4	3	-3	8	-1	1	0
0	W_2	2	1	-1	3	-2	0	1
		0	-6	6	-8	4	0	0

			6	-6	8	-4	0	0
			V_1	V_2	V_3	V_4	W_1	W_2
8	V_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{8}$	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0
0	W_2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{13}{8}$	$-\frac{3}{8}$	0
		4	-3	3	0	3	1	0

última tabla   tabla 5.2

			6	-6	8	-4	0	0
			V_1	V_2	V_3	V_4	W_1	W_2
6	V_1	$\frac{4}{3}$	1	-1	$\frac{8}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
0	W_2	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{19}{12}$	$-\frac{1}{3}$	0
		8	0	0	8	2	2	0

Como ya no es posible seleccionar otra columna clave por no haber números índices negativos, estamos en la solución óptima; donde el valor de Z óptima estará en la misma posición que en la solución del simplex, pero los valores de las variables de decisión X_1, X_2 estarán en el renglón índice, (abajo de las variables de holgura); $W_1 = 2 = X_1$; $W_2 = 0 = X_2$; G Max. = 8 = Z Min . Si comparamos estos resultados con los obtenidos por el paquete **lindo** , corrido en su forma primaria (en el ejemplo 3.3) vemos que son los mismos.

Aquí utilizaremos el paquete **lindo** para correr el programa en su forma dual.

```
:max 6v1-6v2+8v3-4v4
?subject to
?3v1-3v2+8v3-v4<4
?v1-v2+3v3-2v4<2
?go
```

```
LP OPTIMUM FOUND  AT STEP     1
OBJECTIVE FUNCTION VALUE
1) 8.00000000
```

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
V1	1.333333	.000000
V2	.000000	.000000
V3	.000000	8.000000
V4	.000000	2.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	.000000	2.000000
3)	.666667	.000000

NO. ITERATIONS= 1

Como podemos observar, el valor de la función objetivo, en este caso G Max..= 8 en 1); en (2), $W_1 = 2 = X_1$; en 3); $W_2 = 0 = X_2$

CAPITULO 6

ANALISIS DE SENSIBILIDAD

En la mayoría de las aplicaciones prácticas, los datos de un programa lineal no se conocen con exactitud, teniendo que hacer alguna estimación de ellos; o bien , hay ocasiones en que después de haber resuelto un programa lineal; donde sus resultados son aceptados durante cierto tiempo, podemos encontrar que las condiciones que se tomaron en cuenta para la solución, actualmente ya no son las mismas (debido a que los costos han cambiado, el proceso ya no es el mismo, las disponibilidades de los recursos son otros, etc.). Volver a resolver el problema con esos nuevos cambios, resultaría tedioso y tardado.

El **análisis de sensibilidad** es un método que se ocupa de estos cambios discretos en los programas lineales, iniciando con la solución óptima del programa lineal (última tabla del simplex).

Para darnos una mejor idea de los cambios en la solución óptima, que se van a originar, es necesario tener una idea de la tabla de inicio y tabla final, según la forma canónica

Tabla inicial tabla 6.1

			$C_1\ C_2\ C_3 \ldots\ldots C_n$	
			$X_1\ X_2 X_3 \ldots\ldots X_n$	
C_B^T	X_B	b_0	**A**	**I**
		Z_0	$Z_J - C_J$	

Descripción de los elementos de la primera tabla

X = Vector de variables de la función objetivo (comprende las de decisión, holgura y artificiales.

C = Vector de precios o contribuciones de la función objetivo.

$\mathbf{b_0}$=Vector columna con **m** componentes o vector de disponibilidad de recursos primarios (términos independientes)

A = Matriz de **m x n** o matriz de coeficientes tecnológicos de un programa primario

$\mathbf{Z_0}$ = Escalar (valor de la función objetivo en la tabla inicial)

Tabla final tabla 6.2

			$C_1\ C_2\ C_3 \ldots\ldots C_n$	
			$X_1\ X_2\ X_3\ \ldots\ldots X_n$	
C_B^T	X_B	b^*	$B^{-1}A$	B^{-1}
		Z^*	$Z_J - C_J$	π

Descripción de los elementos de la solución óptima, también puede ser de la segunda tabla en adelante).

B^{-1} = Inversa de la base óptima correspondiente a un programa primario

B^{-1} **A** = Resultado del producto de B^{-1} por la matriz **A,** del programa primario

b* = Vector óptimo de términos independientes

Z* = Escalar óptimo de la función objetivo

π = Vector correspondiente a los números índices a lo que era la matriz identidad.

Las fórmulas utilizadas en las variaciones de los factores que se originan una vez que se tiene la solución óptima, son las siguientes.

$\mathbf{Z^* = C_B\, b^*}$	$\mathbf{Z_j - C_j = C_B\, Y_J - C_j}$	$\mathbf{b^* = B^{-1}\, b_0}$
fórmula 6-1	fórmula 6-2	fórmula 6-3
$\mathbf{Z_j - C_j = \pi\, A_j - C_j}$	$\mathbf{\pi = C_B\, B^{-1}}$	$\mathbf{Y_j = B^{-1}\, A_j}$
fórmula 6-4	fórmula 6-5	fórmula 6-6

Donde $\mathbf{Y_j}$ es el vector correspondiente a la columna **j** de la segunda tabla en adelante: y $\mathbf{A_j}$ es el vector correspondiente a la columna **j** de la primera tabla.

Para encontrar la nueva solución de un programa lineal, cuando cambian algunos datos; y no tener que resolverlo desde el inicio, se considerarán, en particular las siguientes variaciones:

Cambios en el vector **C** de contribuciones o costos

Cambio en el vector **b** de términos independientes o constantes

Adición de una nueva actividad $\mathbf{X_j}$

Adición de una nueva restricción al problema.

Para una mejor comprensión y uso de las fórmulas anteriores, procederemos con un ejemplo:

ejemplo 6.1

$$
\begin{aligned}
\text{Max.}Z &= 3X_1 + 2X_2 + 5X_3 \\
\text{s.a:}\quad & X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 430 \\
& 3X_1 + 2X_3 \leq 460 \\
& X_1 + 4X_2 \leq 420 \\
& X_i \geq 0\ \forall_i
\end{aligned}
$$

primera tabla tabla 6.3

			3	2	5	0	0	0
			X_1	X_2	X_3	W_1	W_2	W_3
0	W_1	430	1	2	1	1	0	0
0	W_2	460	3	0	2	0	1	0
0	W_3	420	1	4	0	0	0	1
		0	−3	−2	−5	0	0	0

			3	2	5	0	0	0
			X_1	X_2	X_3	W_1	W_2	W_3
0	W_1	200	$-\frac{1}{2}$	2	0	1	$-\frac{1}{2}$	0
5	X_3	230	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0
0	W_3	420	1	4	0	0	0	1
		1150	$\frac{9}{2}$	−2	0	0	$\frac{5}{2}$	0

última tabla tabla 6-4

			3	2	5	0	0	0
			X_1	X_2	X_3	W_1	W_2	W_3
2	X_2	100	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0
5	X_3	230	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0
0	W_3	20	2	0	0	-2	1	1
		1350	4	0	0	1	2	0

Como podemos ver, esta es la solución óptima, con los siguientes resultados:

Zmax.= 1350; $X_1 = 0$; $X_2 = 100$; $X_3 = 230$; $W_3 = 20$

Cambio en las contribuciones (Cambio en el vector C).

Supóngase que en el problema anterior (ejemplo 6-1), se desea efectuar un cambio en la contribución de X_1 , de $C_1 = 3$, a $C_1' = 6$. Como podemos observar, la variable X_1, cuya contribución a cambiar, no se encuentra en la base de la solución óptima. Por consiguiente, en lo único que se verá afectada nuestra solución final, será en el número índice $Z_J - C_J$, en nuestro caso $(Z_1 - C_1)$ correspondiente al vector $\mathbf{Y}_j$, en nuestro caso $\mathbf{Y}_1$, calculado con la fórmula siguiente.

$$Z_j - C_j = Z_1 - C_1 = \mathbf{C_B\,Y_1 - C_1'}. \text{ Donde: } \mathbf{C_B} = \begin{pmatrix}2 & 5 & 0\end{pmatrix} ;\ \mathbf{Y_1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} \\ 2 \end{bmatrix} ;\ \mathbf{C_1' = 6.}$$

Entonces:

$$Z_1 - C_1 = \begin{pmatrix}2 & 5 & 0\end{pmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} \\ 2 \end{bmatrix} - (6) = \mathbf{1.}$$

Por lo tanto nuestra tabla óptima quedará como se ve a continuación.

solución óptima con el cambio tabla 6.5

			6	2	5	0	0	0
			X_1	X_2	X_3	W_1	W_2	W_3
2	X_2	100	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0
5	X_3	230	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0
0	W_3	20	2	0	0	-2	1	1
		1350	1	0	0	1	2	0

Donde: Zmax. = 1350, $X_1 = 0$, $X_2 = 100$, $X_3 = 230$ y $W_3 = 20$. Como vemos, la única diferencia, está en el número índice de la primera columna ($Z_1 - C_1$).

Otro **cambio** que puede efectuarse en **C,** es cuando la variable correspondiente a esa contribución se encuentra en la base de la *solución óptima, como es el caso siguiente.* Suponga que ahora la contribución de X_2 , aumenta en dos unidades más, es decir:

$\mathbf{C_2} = 2$, cambia a $\mathbf{C'_2} = 4$. Los valores afectados en la tabla final cuando la variable del coeficiente a cambiar está en la base, son:

- El valor de Z óptima (**Z***)
- Los $Z_j - C_j$ *para* toda j cuya X_j no esté en la base.
- Las contribuciones de las variables básicas $\mathbf{C_B}$

Utilizamos la fórmula 6-1 $\mathbf{Z^* = C_B\, b^*}$.

Como $\mathbf{C_B}$, cambia de $\mathbf{C_B} = (2 \quad 5 \quad 0)$ a $\mathbf{C'_B} = (4 \quad 5 \quad 0)$, entonces:

$$Z^* = \mathbf{C'_B}\ \mathbf{b^*} = (4 \quad 5 \quad 0)\begin{bmatrix} 100 \\ 230 \\ 20 \end{bmatrix} = \mathbf{1550}$$

$Zj - Cj = \{C'_B\, B^{-1}\, A_j - C_j\}$para toda j que no este en la base.

$$X_B = \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_6 \end{bmatrix}; \ X_{NB} = X_1,\ X_4,\ X_5;\ \text{donde } X_4,\ X_5 \text{ y } X_6 = \text{variables de holgura}$$

$\mathbf{A_j}$ = Matriz de los coeficientes de las variables no básicas de la primera tabla

$\mathbf{C_j}$ = Contribuciones de las variables no básicas

$$\mathbf{A_j} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \;;\; \mathbf{C_j} = (\,3 \;\; 0 \;\; 0\,)\;;\; \mathbf{B^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Z_j - C_j = (\,4 \;\; 5 \;\; 0\,) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - (\,3 \;\; 0 \;\; 0\,) = \left(\tfrac{7}{2} \;\; 2 \;\; \tfrac{3}{2}\right)$$

Una vez efectuados los cálculos anteriores, nuestra tabla óptima quedaría como sigue

tabla 6.6

			3	4	5	0	0	0
			X_1	X_2	X_3	W_1	W_2	W_3
4	X_2	100	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0
5	X_3	230	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0
0	W_3	20	2	0	0	-2	1	1
		1550	$\frac{7}{2}$	0	0	2	$\frac{3}{2}$	0

Donde esta sería la tabla óptima si el problema se hubiera desarrollado del inicio con el cambio efectuado.

Cambio en el vector de términos independientes b.

Cuando se efectúa un cambio en este vector, la factibilidad en la solución simplex se ve afectada, como se puede ver en el siguiente cambio. Suponga que la disponibilidad de la restricción **1** de nuestro (ejemplo 6-1) cambia de 430 a 500, tendríamos:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 430 \\ 460 \\ 420 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b}' = \begin{bmatrix} 500 \\ 460 \\ 420 \end{bmatrix} \text{ donde}$$

$$\mathbf{b}^* = \mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{b}' = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 500 \\ 460 \\ 420 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 135 \\ 230 \\ -120 \end{bmatrix}$$

Aquí vemos un elemento negativo en el vector óptimo, lo cual nos indica que la solución no es factible, por tanto, se recomienda sustituir el resultado de **b*** en la tabla final de nuestro ejemplo 6.1 (tabla 6.4), quedando de la siguiente manera.

tabla 6.7

			3	2	5	0	0	0
			X_1	X_2	X_3	W_1	W_2	W_3
2	X_2	135	-1/4	1	0	1/2	-1/4	0
5	X_3	230	3/2	0	1	0	1/2	0
0	W_3	-120	2	0	0	-2	1	1
			4	0	0	1	2	0

Para llegar a la solución óptima, se parte de esta tabla, siguiendo el procedimiento del simplex, pero ahora el lugar de seleccionar primero la columna clave, se selecciona el renglón clave, siendo éste el que tenga mayor elemento **negativo** en la columna de términos independientes, luego seleccionamos la columna clave. Para esto, dividimos cada uno de los elementos negativos del renglón clave entre cada uno de los números índices correspondientes a los elementos negativos del renglón clave; aquel que nos de el menor cociente negativo, ahí será la columna clave. Una vez con el renglón y columna clave seleccionados (tabla 6.7), se sigue el procedimiento del simplex hasta llegar a la solución óptima, que en este caso se encuentra en la siguiente iteración, quedando de la siguiente manera.

tabla 6.8

			3	2	5	0	0	0
			X_1	X_2	X_3	W_1	W_2	W_3
2	X_2	105	¼	1	0	0	0	¼
5	X_3	230	3/2	0	1	0	½	0
0	W_1	60	-1	0	0	1	-1/2	-1/2
		1360	5	0	0	0	5/2	½

Donde Zmax = 1360; $X_1 = 0$; $X_2 = 105$; $X_3 = 230$; $W_1 = 60$

Cuando el cambio efectuado en los términos independientes, nos genera un b* donde todos los elementos son positivos, lo que hay que calcular, es el valor de Z*.

Adición de una nueva actividad X_j

Supóngase que en nuestro programa lineal se adiciona una nueva actividad X_4, cuya contribución $C_4 = 4$ y su vector de coeficientes tecnológicos $a_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

Si el Z_j - C_j es ≥ 0 la tabla optima que se tiene, sigue siendo la misma, con un vector adicional que seria:

$$Y_j = B^{-1} a_j \Rightarrow Y_4 = B^{-1} a_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Z_j - C_j \Rightarrow Z_4 - C_4 = \pi\, a_4 - C_4 = (\,1 \quad 2 \quad 0\,) \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} - (\,4\,) = 5 - 4 = 1$$

Quedándonos la tabla óptima de la siguiente manera:

tabla 6-9

			3	2	5	4	0	0	0
			X_1	X_2	X_3	X_4	W_1	W_2	W_3
2	X_1	100	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0
5	X_3	230	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
0	W_3	20	2	0	0	0	-2	1	1
		1350	4	0	0	1	1	2	0

Cuando el Z_j - C_J ≤ 0 , el vector Y_j , con su respectivo C_j se introduce a la tabla óptima, y se prosigue con el procedimiento del simplex, hasta llegar a la solución óptima.

Adición de una nueva restricción $AX \leq b$

Suponga que a nuestro problema lineal (ejemplo 6.1), se le agrega una nueva restricción:

$X_2 \leq 200$. Cuando esto sucede, a nuestra solución óptima (tabla 6.4) se le anexa una variable de holgura en el renglón de variables; y en la columna de variables básicas (con su respectiva contribución) quedándonos de la siguiente manera:

tabla 6.10

			2	5	3	0	0	0	0
			X_1	X_2	X_3	W_1	W_2	W_3	W_4
2	X_2	100	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	0
5	X_3	230	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0
0	W_3	20	2	0	0	-2	1	1	0
0	W_4	*	*			*	*		*

Los elementos de las variables no básicas del renglón de esta variable W_4 se obtienen considerando la nueva restricción en su forma estandar, que seria.

$$X_2 \leq 200 \quad \Rightarrow \quad X_2 + W_4 = 200$$

y despejando $X_2 = 200 - W_4$ como esta variable se encuentra en la base, se sustituye en términos de las variables no básicas, expresada como sigue:

$$-1/4\ X_1 + X_2 + 1/2\ W_1 - 1/4\ W_2 = 100$$

$$-1/4\ X_1 + (\ 200 - W_4\ ) + 1/2\ W_1 - 1/4\ W_2 = 100$$

Quedando la ultima expresión:

$$1/4\ X_1 - 1/2\ W_1 + 1/4\ W_2 + W_4 = 100$$

Los coeficientes de esta ecuación corresponden a los lugares que tenemos representados por un (*), correspondiéndoles un valor de cero a los lugares no marcados de ese renglón, porque sus variables están en la base (deben ser vectores unitarios)

tabla 6-11

			3	2	5	0	0	0	0
			X_1	X_2	X_3	W_1	W_2	W_3	W_4
2	X_2	100	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	0
5	X_3	230	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0
0	W_3	20	2	0	0	-2	1	1	0
0	W_4	100	$\frac{1}{4}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	1
		1350	4	0	0	1	2	0	0

Como se observa en esta tabla óptima, el valor de W_4 es de 100, pero no afecta a la solución que había antes de anexar la nueva restricción, por lo tanto la solución óptima será: Zmax. = 1350, $X_1 = 0$; $X_2 = 100$; $X_3 = 230$; $W_3 = 20$ y $W_4 = 100$

6.1 PROGRAMACION PARAMETRICA

Es una extensión del análisis de sensibilidad, investiga los cambios en la solución óptima del programa lineal, debido a cambios contínuos predeterminados en los parámetros del modelo (disponibilidad de recursos, cambios en las utilidades o costos etc). De la misma manera que en el análisis de sensibilidad, consideramos los siguientes tipos de cambios.

1.- Cambio en los coeficientes de la función objetivo " C "

2.- Cambio en la disponibilidad de recursos (términos independientes)

Procedimiento del análisis paramétrico

Suponga que (t) es el parámetro con el que cambian los diferentes coeficientes. La idea general de la programación paramétrica es calcular la solución optima en (t = 0). Luego, adoptando las condiciones de optimidad y factibilidad, encontrar el intervalo de (t) para el cual la solución en (t = 0) permanece óptima y factible. Suponga que este intervalo esta dado por (0, t_1).

Esto indica que cualquier incremento en (t) mas allá de (t_1) conducirá a una solución no factible (no óptima).

A continuación se mostrará como se determina el valor crítico (t_1) y su solución asociada para los cambios mencionados anteriormente.

Cambios en los coeficientes de la función objetivo

Sea C el vector objetivo parametrizado en función de t "C(t)". Consideremos que ($t \geq 0$); por lo tanto se inicia con un valor de t = 0, donde $\mathbf{b}^*$ es el vector óptimo de los términos independientes en el vector crítico (t_i), y $C_B(t)$ los coeficientes asociados de C(t). Estos cambios en C, solo afectan la optimidad de la solución o sea, los ($Z_j - C_j$). A continuación se determina el siguiente valor critico (t_{i+1}) y su vector de términos independientes.

$\mathbf{b}^* = \mathbf{B}_i^{-1}\, \mathbf{b}_0$, debiendo permanece óptima para toda $t \geq t_i$, para la que toda $\mathbf{Z}_j\,(\mathbf{t}) - \mathbf{C}_J\,(\mathbf{t})$ permanece positiva (caso de maximización), que se puede expresar como:

$\mathbf{C_B(t)\, B_i^{-1} A_j \; - C_j(t) \; \geq 0}$, para toda j.

Estas desigualdades se satisfacen para el intervalo de t entre t_i y t_{i+1}. Donde $\mathbf{t_{i+1}}$ se determina como la **t** mayor, mas allá de la cual no se cumple al menos una de las desigualdades.

Cambios en el vector C

Considere el siguiente programa lineal:

ejemplo 6.1.1

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3$$

$$\begin{aligned} \text{s.a:}\quad X_1 + 2X_2 + X_3 &\leq 40 \\ 3X_1 + 2X_3 &\leq 60 \\ X_1 + 4X_2 &\leq 30 \\ X_i &\geq 0\ \forall_i. \end{aligned}$$

Cuya primera y última tabla son:

primera tabla   tabla 6.1.1

			3	2	5	0	0	0
			X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
0	X_4	40	1	2	1	1	0	0
0	X_5	60	3	0	2	0	1	0
0	X_6	30	1	4	0	0	0	1
		0	-3	-2	-5	0	0	0

última tabla   tabla 6.1.2

			3	2	5	0	0	0
			X_{12}	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
2	X_2	5	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0
5	X_3	30	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0
0	X_6	10	2	0	0	-2	1	1
		160	4	0	0	1	2	0

Donde X_1, X_2, X_3 son las variables de decisión; y X_4, X_5, X_6 son las variables de Holgura W_1, W_2, W_3

Para el ejemplo 6.1.1, considere los siguientes cambios paramétricos:

ejemplo 6.1.2

$$\text{Max } Z = (3 - 6t)X_1 + (2 - 2t)X_2 + (5 + 5t)X_3$$

$$\begin{aligned} \text{s.a:}\quad & X_1 + 2X_2 + X_3 \le 40 \\ & 3X_1 + 2X_3 \le 60 \\ & X_1 + 4X_2 \le 30 \\ & X_i\,;\, t_i \ge 0\ \forall_i. \end{aligned}$$

Donde $C(t) = (\,3 - 6t,\quad 2 - 2t,\quad 5 + 5t\,)$

El procedimiento inicia con $t = t_0 = 0$, y al sustituir este valor en la función objetivo, se observa que nuestro ejemplo 6.1.2, nos queda exactamente igual que el ejemplo 6.1.1, por lo tanto:

$$b_0^* = \begin{bmatrix} 5 \\ 30 \\ 10 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{Z^*} = 160; \quad \mathbf{C_B} = (\,2,\ 5,\ 0\,)$$

$$\mathbf{X_B} = \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_6 \end{bmatrix}; \quad X_1 = 0;\ X_2 = 5;\ X_3 = 30$$

El siguiente paso es incrementar el valor de $t = t_{0+1} = t_1$, donde ahora:

$\mathbf{C_B} = (\,2 - 2t,\ 5 + 5t,\ 0\,)$, $\mathbf{B}^{-1}$ tendrá los mismos elementos, las variables básicas son las mismas. Entonces, los cambios se van a originar en Z, $Z_j(t) - C_j(t)$, y en π (todos elementos del renglón índice).

$$\pi = \mathbf{C_B\,B^{-1}} = \left(2-2t, \quad 5+5t, \quad 0\right)\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \left(1-t, \quad 2+3t, \quad 0\right),$$ luego se calculan

los $Z_j(t) - C_j(t)$ para j = 1, 4, 5 (X_j no básica)

$$Z_j(t) - C_j(t) = \{\, \mathbf{C_B\,B^{-1}\,A_j - C_j(t)} \,\}_{j=1,4,5} = \{\pi \mathbf{A_j} - \mathbf{C_j((t)}\}_{j=1,4,5}$$

$$Z_j(t) - C_j(t) = \left(1-t, \quad 2+3t, \quad 0\right)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \left(3-6t, \quad 0, \quad 0\right) = \left(4+14t, \quad 1-t, \quad 2+3t\right)$$

Dado $t \geq 0$, esto nos indica que la solución permanece óptima, en tanto, $4 + 14t \geq 0$, $1 - t \geq 0$, $2 + 3t \geq 0$ se satisfagan. La desigualdad $1 - t \geq 0$ muestra que t no puede ser mayor que 1. Esto significa que en t = 1, **b** sigue siendo óptima en el intervalo $0 \leq t \leq 1$. Indicándonos esto que cuando t toma valores entre cero y uno, los resultados de: $X_1 = 0$, $X_2 = 5$, $X_3 = 30$ y $Zmax = (3 - 6t)X_1 + (2 - 2t)X_2 + (5 + 5t)X_3$

$Zmax = (3 - 6t)0 + (2 - 2t)5 + (5 + 5t)30 = 160 + 140t$

$Zmax. = 160 + 140t$

Cambios en el vector b

Sea b el vector parametrizado de los términos independientes en función de t "b(t)" y definamos B_i como la base óptima en el vector critico t_i y b^* vector básico óptimo en t_i.

Los cambios en el vector b_i solo afectan la factibilidad de la solución. Así b^* permanece factible siempre que se satisfaga $B_i^{-1}b(t) \geq 0$.

Suponga que el cambio parametrizado se efectúa en los términos independientes de nuestro ejemplo 6.1.1, quedando como sigue:

ejemplo 6.1.3

$$\begin{aligned} &\text{Max } Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3 \\ &\text{s.a: } X_1 + 2X_2 + X_3 \leq (40 - t) \\ &3X_1 + 2X_3 \leq (60 + 2t) \\ &X_1 + 4X_2 \leq (30 - 7t) \\ &X_i \,;\, t_i \geq 0 \;\forall_i. \end{aligned}$$

Suponga que t ≥ 0. En $t = t_0 = 0$. El problema nos queda igual que el no parametrizado (ejemplo 6.1.1), por tanto, la primera y última tabla serán las mismas: (tablas 6.1.1 y 6.1.2) respectivamente, con :

$$b_0^* = \begin{bmatrix} 5 \\ 30 \\ 10 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad b\,(t) = \begin{bmatrix} 40 - t \\ 60 + 2t \\ 30 - 7t \end{bmatrix}$$

El primer vector crítico se determina considerando que $\mathbf{B}^{-1}$ b (t) ≥ 0.

$$\mathbf{b}^* = \mathbf{B}^{-1}\,b(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40-t \\ 60+2t \\ 30-7t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-t \\ 30+t \\ 10-3t \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La solución permanece óptima, en tanto las condiciones anteriores $5 - t \geq 0$, $30 + t \geq 0$ y $10 - 3t \geq 0$ se satisfagan . Estas desigualdades se satisfacen para $t \leq 10/3$. Así, $t_1 = 10/3$ y la base B_0 permanece factible en el intervalo $t_0, t_1 = (t_0 \leq t \leq t_1) = (0 \leq t \leq 10/3)$.

Esto nos indica que cuando ($0 \leq t \leq 10/3$); X1 = 0; X2 = 5 - t; X3 = 30 + t; y
Zmax. $=3X_1 + 2X_2 + 5X_3 = 3(0) + 2(5 - t) + 5(30 + t) = 160 + 3t$

Zmax. = 160 + 3t

CAPITULO 7

MODELOS DE DISTRIBUCION

INTRODUCCION

Uno de los principales problema de las grandes empresas, es y ha sido la distribución de sus productos y materias primas, las cuales desean que sus costos de distribución sean mínimos.

La programación lineal, basada en el algoritmo simplex, puede ser utilizada para proporcionarnos una ruta crítica de distribución con un costo mínimo, sin embargo la estructura de distribuir o transportar dichos productos es de una estructura especial.

En este capítulo utilizaremos algunos modelos o algoritmos, diseñados para aprovechar las características únicas de esta clase de problemas como lo es el transporte.

En el problema del transporte utilizaremos esos algoritmos especiales de distribución inicial, los cuales nos pueden dejar algo alejados o muy cerca de la solución óptima.

Para llegar a nuestra solución óptima, usaremos otros algoritmos especiales, llamados de optimización..

El algoritmo de transporte en su forma estándar, incluye:

m fuentes u orígenes, donde a cada uno de los cuales corresponde una disponibilidad $\mathbf{s_i}$ (i = 1,2,3,….,m); y **n** destinos, donde cada uno de los cuales requiere ciertas unidades $\mathbf{d_j}$ (j = 1,2,3…n). Donde $\mathbf{s_i}$ son las cantidades disponibles en cada origen, $\mathbf{d_j}$ las cantidades requeridas en cada destino y $\mathbf{c_{ij}}$ es el costo de transportar una unidad de producción del origen **i** al destino **j**, para cada **i** y para cada **j**

El objetivo es desarrollar un programa de transporte que cumpla todas las demandas a partir del inventario actual y con un costo total de embarque mínimo, considerando una oferta y una demanda total iguales. $\sum_{i=1}^{m} s_i = . \sum_{j=1}^{n} d_j$. Sea $\mathbf{x_{ij}}$ el número desconocido de unidades que se embarcan del origen **i** al destino **j** : entonces el modelo matemático es el siguiente.

$$\text{Min.Z} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{c_{ij}\, x_{ij}}$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{j=1}^{n} \mathbf{x_{ij} \leq s_i}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{x_{ij} = d_j}$$

$$\mathbf{x_{ij} \geq 0;\ \forall_{ij}\ y\ enteros}$$

La representación en forma de tabla del programa anterior es la siguiente

tabla 7.1

	1	2	.	n	Oferta
1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	$C_{..}$ $X_{..}$	C_{1n} X_{1n}	s_1
2	C_{21} X_{21}	C22 X_{22}	$C_{..}$ $X_{..}$	C_{2n} X_{2n}	s_2
.	$C_{..}$ $X_{..}$	$C_{..}$ $X_{..}$	$C_{..}$ $X_{..}$	$C_{..}$ $X_{..}$	$s_.$
m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	$C_{..}$ $X_{..}$	C_{mn} X_{mn}	s_m
demanda	d_1	d_2	. .	d_n	

Cuando la oferta es diferente de la demanda, se crea una columna ficticia; y si la demanda es mayor que la oferta, se crea un renglón o fila ficticia.

7.1 MODELOS DE SOLUCION INICIAL

Algunos de los modelos que describiremos a continuación, como lo son: Esquina Noroeste, Costo Menor y Vogel, nos generan una solución inicial, según su respectivo procedimiento

7.1.1 METODO DE ESQUINA NOROESTE

Procedimiento:

1. El punto de partida, es una matriz con orígenes, destinos, ofertas y demandas de un problema balanceado (oferta igual a demanda).

2. Asignar en la posición (1,1) el menor ($\mathbf{s}_1$ o $\mathbf{d}_1$) = $\mathbf{x}_{11}$; y completar con marcas el renglón si la oferta $\mathbf{s}_1$ ha sido agotada; o la columna si la demanda queda satisfecha.

3. Con las incógnitas que quedan en blanco, se procede de la misma forma, asignando todo la más posible a la casilla en blanco que se encuentra en la esquina superior izquierda y así hasta completar la asignación de toda la existencia (oferta); y se satisfaga toda la demanda. Esta será la solución inicial básica factible.

ejemplo 7.1.1.1

Una empresa que fabrica aires acondicionados tiene 3 almacenes, que surten el producto a cuatro tiendas situadas en diferentes zonas geográficas, teniendo las siguientes existencias: En el almacén **A** 50 unidades. En el almacén **B** 80 unidades y en el almacén **C** 70 unidades. Los requerimientos de las tiendas son: De la tienda T_1 son 40 unidades, de la tienda T_2 son 65 unidades, de la tienda T_3 son 35 unidades y de la tienda T_4 son 60 unidades. Los costos de transporte por unidad se representan en la siguiente tabla. (7.1.1.1).

tabla 7.1.1.1

	T_1	T_2	T_3	T_4
A	100	40	35	70
B	35	50	60	55
C	25	45	20	30

Determine la solución inicial por el método de Esquina Noroeste.

Siguiendo los pasos del método, la tabla nos queda de la siguiente manera.

tabla 7.1.1.2

	T_1	T_2	T_3	T_4	s_i
A	[100] 40	[40] 10	[35]	[70]	50
B	[35]	[50] 55	[60] 25	[55]	80
C	[25]	[45]	[20] 10	[30] 60	70
d_j	40	65	35	60	200

Esta primera tabla será la solución inicial del ejemplo 7.1.1.1, donde podemos observar que la oferta es igual que la demanda, cumpliéndose además la siguiente condición.(# de casillas asignadas = m + n - 1). En nuestro ejemplo, hay 6 casillas asignadas, la tabla es de m = 3, n = 4. Entonces 6= 3+4-1 cumple la condición. Por tanto la solución inicial será:

C.T = 100(40) + 40 (10) + 50 (55) + 60 (25) + 10 (20)

C.T = 8850

7.1.2 METODO DE COSTO MENOR

Procedimiento.

1. El punto de partida es una matriz con orígenes, destinos, ofertas y demandas de un problema balanceado.

2. En la casilla de la primera columna que tenga el costo menor, se le asignará el total de la demanda $\mathbf{d_1}$ (si $\mathbf{s_1} > \mathbf{d_1}$), completando con marcas todas las casillas de esa columna. Si ($\mathbf{s_1} < \mathbf{d_1}$), se le asignará el total de la oferta $\mathbf{s_1}$, y el resto de $\mathbf{d_1}$ será asignado a la casilla de esta misma columna que tenga el costo inmediato superior, completando con marcas la fila y columna.

3. Pasar a la segunda columna $\mathbf{d_2}$ y efectuar las mismas indicaciones del paso anterior, hasta llegar a la columna $\mathbf{d_j}$. Siendo ahí la solución inicial básica factible.

Resolver el ejemplo 7.1.1.1, utilizando para ello el método de Costo Menor.

tabla 7.1.2.1

	T_1	T_2	T_3	T_4	s_i
A	100	40 50	35	70	50
B	35	50	60 20	55 60	80
C	25 40	45 15	20 15	30	70
d_j	40	65	35	60	200

Esta primera tabla será la solución inicial del ejemplo 7.1.1.1, donde podemos observar que la oferta es igual que la demanda, cumpliéndose además la siguiente condición.(# de casillas asignadas = m + n - 1). En nuestro ejemplo, hay 6 casillas asignadas, la tabla es de m = 3, n = 4. Entonces 6= 3+4-1 cumple la condición. Por tanto la solución inicial será:

C T. = 50(40) + 20(60) + 60(55) + 40(25) + 15(45) + 15(20) = 8475

C:T. = 8475

7.1.3 METODO VOGEL

Procedimiento:

1. El punto de partida es una matriz con orígenes, destinos, ofertas y demandas de un problema balanceado.

2. Calcular las diferencias entre los costos mas bajos de cada renglón y columna, anotándolas después de la matriz de cálculo.

3. Se localiza la mayor diferencia (en caso de empate, seleccionar fila o columna), asignando el máximo valor posible s_i o d_j a la casilla con menor costo de ese renglón o columna que haya tenido la mayor diferencia, completando con marcas las casillas vacías correspondientes al renglón o columna satisfecho

4. Si un renglón o columna han sido satisfechos, seguir el paso 2, pero sin considerar los costos de la fila o columna ya satisfechos.

1. Repetir el paso 4 hasta quedar satisfechos renglones y columnas, esa será la solución inicial básica factible.

Resolver el ejemplo 7.1.1.1, utilizando para ello el método Vogel

tabla 7.1.3.1

	T_1	T_2	T_3	T_4	s_i					
A	100	40 25	35 25	70	50	5	5	5	5	40
B	35 40	50 40	60	55	80	5	15*	10	10	50*
C	25	45	20 10	30 60	70	5	5	25*		
d_j	40	65	35	60						
	10	5	15	25*						
	10	5	15							
		5	15							
		10	25*							
		10								

Esta primera tabla será la solución inicial del ejemplo 7.1.1.1, donde podemos observar que la oferta es igual que la demanda, cumpliéndose además la siguiente condición: # de casillas asignadas = m + n - 1. En nuestro ejemplo, hay 6 casillas asignadas, la tabla es de m = 3, n = 4. Entonces 6= 3+4-1 cumple la condición. Por tanto la solución inicial será:

C.T. = 40(25) + 35(25) + 35(40) + 50(40) + 20(10) + 30(60) = 7275

7.2 MODELOS DE OPTIMIZACION

Los modelos de optimización nos sirven para llevarnos a la solución óptima de problemas de esta naturaleza. Los métodos utilizados son: Método del cruce del Arroyo, y el Método Modi.

7.2.1 METODO DEL CRUCE DEL ARROYO.

Cuando se está en la solución básica inicial, obtenida por cualquiera de los métodos de distribución descritos anteriormente, el procedimiento del método del cruce del arroyo para llegar a la solución óptima es el siguiente:

1. Se efectúan recorridos cerrados en todas las casillas no asignadas de la tabla de solución inicial. El recorrido debe iniciar en una casilla no asignada, siendo su recorrido por puras casillas asignadas; en la casilla inicial irá un signo positivo (+), cambiando a negativo (-); y así sucesivamente en todas las casillas asignadas por donde se efectúa el recorrido cerrado.

2. Cuando se hayan efectuado todos los recorridos de las casillas no asignadas (donde los costos de las casillas asignadas, según el recorrido tendrán signo positivo o negativo).

3. La suma algebraica de estos costos, nos indicarán en cual casilla no asignada se efectuará un cambio. Este cambio será en la casilla cuya suma algebraica de los costos sea la más negativa; asignándose a ésta la cantidad más pequeña que tenga signo negativo, según su recorrido. Esta cantidad más pequeña, se resta en las casillas negativas (-) y se incrementa en las casillas positivas (+) del recorrido de la casilla donde se efectuará el cambio.

4. Se repite el paso 1, 2 y 3 hasta que la suma de los costos de los recorridos de las casillas no asignadas sean todas positivas (+). Ahí será la solución óptima. En cada una de las iteraciones, se debe cumplir que: # de casillas asignadas = m + n - 1.

ejemplo 7.2.1.1

Con los datos del problema 7.1.1.1, determine la cantidad de productos a transportar de los almacenes a las diferentes tiendas, tal que nos proporcione un costo mínimo, (costo mínimo de transporte) utilizando el método del cruce del arroyo.

	T_1	T_2	T_3	T_4	s_i
A	100	40 25	35 25	70	50
B	35 40	50 40	60	55	80
C	25	45	20 10	30 60	70
d_j	40	65	35	60	

El cruce del arroyo se inicia con cualquiera de las tres soluciones anteriores. En nuestro ejemplo, será con la solución del Vogel. (tabla 7.1.3.1)

Recorridos cerrados de las casillas no asignadas.

$A_1 T_1 = + C\, A_1 T_1 - C\, A_1 T_2 + C\, B_2 T_2 - C\, B_2 T_1 = 100 - 40 + 50 - 35 = +$

$A_1 T_4 = + C\, A_1 T_4 - C\, C_3 T_4 + C\, C_3 T_3 - C\, A_1 T_3 = 70 - 30 + 20 - 35 = +$

$B_2 T_3 = + C\, B_2 T_3 - C\, B_2 T_2 + C\, A_1 T_2 - C\, A_1 T_3 = 60 - 50 + 40 - 35 = +$

$B_2 T_4 = + C\, B_2 T_4 - C\, C_3 T_4 + C\, C_3 T_3 - C\, A_1 T_3 + C\, A_1 T_2 - C\, B_2 T_2 = 55 - 30 + 20 - 35$
$+ 40 - 50 = 0$

$C_3 T_1 = + C\, C_3 T_1 - C\, B_2 T_1 + C\, B_2 T_2 - C\, A_1 T_2 + C\, A_1 T_3 - C\, C_3 T_3 = 25 - 35 + 50 - 40$
$+ 35 - 20 = +$

$C_3 T_2 = + C\, C_3 T_2 - C\, A_1 T_2 + C\, A_1 T_3 - C\, C_3 T_3 = 45 - 40 + 35 - 20 = +$

Como todos los recorridos en las casillas no asignadas fueron positivos y ceros, estamos en la solución optima, donde la tabla nos indica que del almacén A, se deben transportar 25 unidades a la tienda T_2 y 25 unidades a la tienda T_2, del almacén B se deben transportar 40 unidades a la tienda T_1 y 40 unidades a la tienda T_2 y del almacén C, se deben transportar 10 unidades a la tienda T_3 y 60 unidades a tienda T_4. Con un costo total mínimo de:

C.T. = 25(40) + 25(35) + 40(35) + 40(50) + 10(20) + 60(30) = 7275

7.2.2 METODO MODI

Cuando se está en la solución básica inicial, obtenida por cualquiera de los métodos de distribución descritos anteriormente, el procedimiento del método Modi para llegar a la solución óptima es el siguiente:

1. A la tabla de la solución inicial, obtenida por cualquiera de los métodos de distribución inicial, se le anexa un nuevo renglón (V_j) y una nueva columna (μ_i)

2. Estos índices, se calculan exigiendo que el coeficiente de costo (C_{ij}) para cada casilla asignada sea igual a $\mu_i + V_j$ ($C_{ij} = \mu_i + V_j$). Aplicando esta fórmula se completa el nuevo renglón y columna anexados, partiendo de (i = 0) en aquel renglón que tenga más casillas asignadas. "Lo anterior equivale partir de $\mu_i = 0$, y después determinar:

   $V_j = C_{ij} - \mu_i$ y $\mu_i = C_{ij} - V_j$ en todas las casillas asignadas"

3. Para cada casilla no asignada, se calcula un valor ($C_{ij} - \mu_i - V_j = C_{ij} - \mu_i - V_j$), donde el cambio se va a originar en aquella casilla no asignada mas negativa.

4. Una vez determinada la casilla no asignada más negativa, se inicia de ésta un recorrido cerrado por todas las casillas asignadas, iniciando con un signo(+), luego uno (-) y así sucesivamente hasta completar el recorrido cerrado

5. El menor valor asignado de las casillas (del recorrido cerrado) con signo negativo, será sumado o restado, según el signo que les haya tocado a dichas casillas en el recorrido

6. Se repite el paso 2, 3, 4 y 5 hasta que al estar efectuando el paso 3, ninguna de las casillas no asignadas nos den todos positivos (+) o ceros.

ejemplo 7.2.2.1

Con los datos del problema 7.1.1.1, determine la cantidad de productos a transportar de los almacenes a las diferentes tiendas, tal que nos proporcione un costo mínimo, (costo mínimo de transporte) utilizando el método Modi

Partiendo de la solución inicial, del metodo Esquina Noroeste cuya tabla es 7.1.1.2, efectuamos el procedimiento del metodo Modi, quedándonos la tabla de la siguiente manera:

tabla 7.2.2.1

	V_j	100	40	50	60	
μ_i		**T1**	**T2**	**T3**	**T4**	s_i
0	**A**	[100] 40	[40] 10	[35]	[70]	50
10	**B**	[35]	[50] 55	[60] 25	[55]	80
-30	**C**	[25]	[45]	[20] 10	[30] 60	70
	d_j	40	65	35	60	

Donde los valores de la fila y columna anexadas, se determinaron con las siguientes fórmulas. $V_j = C_{ij} - \mu_i$ y $\mu_i = C_{ij} - V_j$ en todas las casillas asignadas, iniciando con $\mu_i = 0$, en aquella fila con más casillas asignadas (cuando hay empate, se inicia con cualquiera de ellas).

Para determinar la casilla donde se va a efectuar el cambio, se aplica la siguiente fórmula en todas las casillas no asignadas, quedando.

$$C.N.A. = C_{ij} - \mu_i - V_j$$

$$AT_3 = 35 - 0 - 50 = -15$$

$AT_4 = 70 - 0 - 60 = +$

$\mathbf{BT_1 = 35 - 10 - 100 = -75}$

$BT_4 = 55 - 10 - 60 = -15$

$CT_1 = 25 + 30 - 100 = -45$

$CT_2 = 45 + 30 - 40 = +$

La casilla no asignada mas negativa fue la **BT_1**, lo que indica que ahi va a efectuarse el cambio, por tanto tendremos que realizar recorrido cerrado en esa casilla, quedando como sigue.

tabla 7.2.2.2

V_j		100	40	50	60	
μ_i		**T1**	**T2**	**T3**	**T4**	s_i
0	**A**	100 - / 40	40 + / 10	35	70	50
10	**B**	35 +	50 - / 55	60 / 25	55	80
-30	**C**	25	45	20 / 10	30 / 60	70
	d_j	40	65	35	60	

Como podemos observar, el valor menor en las casillas con signo negativo (-), es 40. Esa cantidad se sumara a las cantidades de las casillas del recorrido que tengan signo (+) y se restará a las cantidades de las casillas del recorrido que tengan signo (-), quedando la tabla de la siguiente manera, con nuevos valores en la fila y columna anexados (calculados con las nuevas casillas asignadas)

tabla 7.2.2.3

μ_i	V_j	35	50	60	70	
		T1	**T2**	**T3**	**T4**	s_i
-10	**A**	$\boxed{100}$	$\boxed{40}$ - 50	$\boxed{35}$ +	$\boxed{70}$	50
0	**B**	$\boxed{35}$ 40	$\boxed{50}$ + 15	$\boxed{60}$ - 25	$\boxed{55}$	80
-40	**C**	$\boxed{25}$	$\boxed{45}$	$\boxed{20}$ 10	$\boxed{30}$ 60	70
	d_j	40	65	35	60	

Efectuamos el recorrido cerrado en todas las casillas no asignadas.

$$C.N.A. = C_{ij} - \mu_i - V_j$$

$$AT_1 = 100 + 10 - 35 = +$$

$$\mathbf{AT_3 = 35 + 10 - 60 = - 15}$$

$AT_4 = 70 + 10 - 70 = +$

$BT_4 = 55 + 0 - 70 = -15$

$CT_1 = 25 + 40 - 35 = +$

$CT_2 = 45 + 40 - 50 = +$

En nuestro ejemplo el cambio se realizó en $\mathbf{AT_3}$, por lo tanto, después de efectuado el recorrido cerrado en esa casilla; y calculados los valores del renglón y columna anexados, la tabla nos queda

tabla 7.2.2.4

μ_1	V_j	T1 (25)	T2 (40)	T3 (35)	T4 (45)	s_i
0	**A**	[100]	[40] 25	[35] 25	[70]	50
10	**B**	[35] 40	[50] 40	[60]	[55]	80
-15	**C**	[25]	[45]	[20] 10	[30] 60	70
	$\mathbf{d_j}$	40	65	35	60	

C.N.A. = $C_{ij} - \mu_i - V_j$

$AT_1 = 100 - 0 - 25 = +$

$AT_4 = 70 - 0 - 45 = +$

$BT_3 = 60 - 10 - 45 = +$

$BT_4 = 55 - 1\ 0 - 45 = 0$

$CT_1 = 25 + 15 - 25 = +$

$CT_2 = 45 + 15 - 40 = +$

Como todas las casillas no asignadas dieron cantidades positivas (+) o cerros, esto nos indica que estamos en la solución óptima, donde el costo total mínimo es:

C.Tmin. = 25(40) + 25(35) + 40(35) + 40(50) + 10(20) + 60(30) = **7275.**

CAPITULO 8

METODOS DE ASIGNACION

Los problemas de asignación son lineales, con una estructura de transporte, solo que la oferta en cada origen, tiene valor de 1 y la demanda en cada destino, también vale 1.

La aplicación del método simplex o del método de transporte, resultan ineficientes para este tipo de problemas; sin embargo existen métodos o algoritmos de asignación, que son más eficientes que estos dos métodos mencionados.

La formulación de un problema de asignación es el siguiente.

$$\text{Min.}Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{c_{ij}\, x_{ij}}$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{j=1}^{n} \mathbf{x_{ij} = 1} \qquad \mathbf{i = 1, 2, \ldots, m}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{x_{ij} = 1} \qquad \mathbf{j = 1, 2, \ldots, n}$$

$$\mathbf{x_{ij} \geq 0;\ \forall_{ij}}$$

Donde las variables $\mathbf{x}_{ij}$ solo pueden tomar valores de 0 y 1.

Si el origen **i** se hace corresponder al destino **j** , la variable $\mathbf{x}_{ij}$ toma el valor de 1.

Si el origen **i** no se hace corresponder al destino **j**, la variable $\mathbf{x}_{ij}$ toma el valor de 0

La restricción que existe en este tipo de problemas, es que a cada persona se le asignará un solo trabajo, y a cada trabajo se le asignará una sola persona.

Existe un costo $\mathbf{c}_{ij}$ por asignar la persona **i** a un trabajo **j.**

Con lo anterior, se puede deducir, que en un problema de asignación, los orígenes son personas buscando un trabajo; y los destinos son trabajos disponibles, y el costo de una mala asignación puede ser muy elevado. Por ejemplo: si se asigna un intendente al puesto de ejecutivo

La condición necesaria y suficiente para que este tipo de problemas tenga una solución, es que estén balanceados, es decir, si hay **m** orígenes y **n** destinos, **m** debe ser igual a **n.** Si **m > n**, se introducen **m - n** destinos con demanda unitaria cada uno y costos nulos. Si **m < n**, se introducen **n - m** orígenes, cada uno con oferta unitaria y costo nulo.

Algunos de los algoritmos utilizados en este tipo de problemas son: El Método Húngaro y el algoritmo de Gomori

8.1 METODO HUNGARO

Este método nos sirve para resolver problemas de asignación. El enfoque general de este algoritmo consiste en reducir la matriz de costos mediante una serie de operaciones aritméticas; estas operaciones se utilizan para establecer costos reducidos de cero en la matriz de costos. La asignación optima se logra mediante selección de celdillas con un costo reducido de cero.

Procedimiento:

Paso 1. Se reduce la matriz inicial de costos por filas y columnas. Esto es; restar en cada una de las filas el elemento menor del resto de los demás, quedándonos una matriz reducida por filas. Luego, en esa matriz reducida por filas, restar en cada columna el elemento menor del resto de los demás, quedándonos una matriz reducida por filas y columnas.

Paso 2. Encontrar el número el número mínimo de rectas que se pueden trazar en la matriz obtenida en el paso 1. Este número mínimo de líneas, se obtiene de la siguiente manera: Se elige cualquier fila o columna que tenga un solo cero, marcando con una recta todos los elementos correspondientes a su fila (si el cero se encuentra en la columna). Si el cero se encuentra en una fila, marcar con una recta todos los elementos de la columna, y así sucesivamente hasta que no haya filas o columnas que elegir. Si el número de líneas es igual al número de columnas, esta será la solución óptima. En caso contrario seguir con el paso 3.

Paso 3. De la matriz obtenida en el paso 2 con sus respectivas rectas trazadas, se determina la siguiente matriz como sigue: Los elementos que se encuentran en la recta trazada no sufren cambios, a excepción de o los elementos que se encuentran en la intersección de las rectas; a éste se le sumará el valor más pequeño de los elementos que no se encuentran enmarcados en las rectas, a estos elementos no enmarcados en las rectas, se les restará ese valor pequeño. A esta matriz resultante, se le determina el número mínimo de rectas, siguiendo el paso 2 y luego el paso 3; y así sucesivamente hasta que en el paso 2, no el mínimo número de líneas sea igual al número de columnas. Por lo tanto ahí deberá estar la asignación óptima.

Paso 4. La manera de enmarcar los ceros para la asignación óptima, en la matriz resultante cuyo mínimo número de líneas, igual al número de columnas, será la siguiente: Se busca el renglón que tenga un cero en una de las rectas: y esta será una casilla enmarcada, eliminándose los ceros de la columna. Luego buscar la columna que tenga un cero en una recta y esta será otra casilla enmarcada, eliminándose los ceros de la fila. Se prosigue con el inciso a y b, hasta enmarcar un cero por cada renglón y columna. Esta será la asignación óptima.

ejemplo 8.1.1

Un socio de una agencia de publicidad trata de decidir cual de cuatro ejecutivos de contabilidad debe asignar a cada uno de cuatro clientes mayores. En la siguiente tabla se muestran los costos estimados de la asignación de cada ejecutivo. Encuentre la solución óptima del problema, de tal manera que los costos de asignación sean los minimos.

tabla 8.1.1

	Clientes			
Ejecutivos	1	2	3	4
A	15	19	20	18
B	14	15	17	14
C	11	15	15	14
D	21	24	26	24

La matriz reducida por fila y columna, utilizando el método húngaro aparece a continuación.

tabla 8.1.2

por fila

0	4	5	3
0	1	3	0
0	4	4	3
0	3	5	3

tabla 8.1.3

por columna

0	3	2	3
0	0	0	0
0	3	1*	3
0	2	2	3

Mínimo número de líneas ≠ número de columnas (tabla 8.1.3), donde: el menor número (*), se restará a los elementos que no estén en las líneas, permaneciendo iguales los elementos que estén sobre ellas, excepto el de la intersección, ahí se sumará (*), quedando la siguiente tabla ya con sus respectivas líneas mínimas, como lo muestra la siguiente tabla, (tabla 8.1.4)

tabla 8.1.4

0	2	1	2
1	0	0	0
0	2	0	2
0	1*	1	2

tabla 8.1.5

0	1	1	1
2	0	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1

En la tabla 8.1.4., el número de líneas ≠ del número de columnas, donde el menor número (*), se restará a los elementos que no estén en las líneas, permaneciendo iguales los elementos que estén sobre ellas, excepto el de la intersección, ahí se sumará (*), quedando la tabla 8.1.5, ya con sus cantidad de líneas mínimas.

Como en esta tabla (8.1.5), el número mínimo de líneas es igual al número de columnas, ahí será la asignación óptima. Para determinar la asignación, se busca el renglón que tenga un cero en una de las rectas y esta será una casilla enmarcada, eliminándose los ceros de la columna, luego buscar la columna que tenga un cero en una recta y esta será otra casilla enmarcada, eliminándose los ceros de la fila, y así sucesivamente hasta que no haya casillas que enmarcar. Quedando la tabla con cada asignación enmarcada como podemos ver a continuación tabla 8.1.6.

tabla 8.1.6

$\boxed{0}$	1	1	1
2	$\cancel{0}$	1	$\boxed{0}$
$\cancel{0}$	1	$\boxed{0}$	1
$\cancel{0}$	$\boxed{0}$	1	1

Según nuestro ejemplo 8.1.1, esta asignación corresponde a que: El Ejecutivo A, sea asignado al cliente 1. El Ejecutivo B, sea asignado al cliente 4. El Ejecutivo C, sea asignado al cliente 3. El Ejecutivo D, sea asignado al cliente 2.

Ejectutivo	cliente	costo
A	1	15
B	4	14
C	3	15
D	2	24

Donde los costos de asignación son: **Total = 68**

8.2 METODO DE RAMIFICACION Y ACOTACION

Este método consiste en ir ramificando las asignaciones encontradas, iniciando con un costo que se obtiene, según el procedimiento siguiente:

Paso 1. Se parte de la matriz de costos o tiempos, etc. según el problema, verificando que esté balanceada.

Paso 2. En cada una de las filas, se resta el menor valor a todos los elementos, anexando en cada fila esos valores menores, obteniendo un total.

Paso 3. A la matriz resultante en el paso 2, se le resta el menor valor en cada una de las columnas, anexando en cada una de ellas esos valores menores, obteniendo un total.

Paso 3.1 La suma de totales menores de filas y columnas del paso 2 y 3, será el valor con que se inicie el diagrama de ramificación.

Paso 4. La matriz obtenida en el paso 3, debe tener por lo menos un cero en cada fila y columna. Si esto se cumple, pasar al paso 5. Si no se cumple, pasar al paso 8.

Paso 5. Se encuentra el costo de cada casilla con valor cero. Esto se obtiene de la suma de los valores mínimos de la fila y columna correspondientes a la casilla con valor cero.

Paso 6. La casilla con valor cero que haya resultado con el mayor costo, será la primera asignación obtenida, por lo tanto se elimina su fila y columna, no apareciendo en la siguiente matriz.

Paso 6.1. Del inicio del diagrama (paso 3.1) salen dos ramas o ramificaciones, una con el mayor costo de la casilla con valor cero; y la otra con el costo cero. En cada rama se anotan dichos costos que corresponden a que se efectúe o no la asignación.

Paso 7. Se dibuja una nueva tabla sin la fila y columna que desaparecieron, checando de nuevo que cada fila y columna tengan al menos un cero.

Paso 7.1 Si se cumple lo anterior, se repiten los pasos 5, 6, 6.1, y 7. En el paso 6, será la siguiente asignación, en el paso 6.1 se partirá de la rama que tenga menor costo total (costo inicial más el costo de las ramas). Y así sucesivamente hasta que en el paso 7, al dibujar la nueva tabla, se encuentre la última asignación. Esta será la asignación óptima.

Paso 8. Si una fila no tiene ceros, a los elementos de esa fila se les resta el menor valor.

Paso 8.1. Este menor valor irá en la rama del diagrama, según la asignación en que se esté cuando esto ocurra.

Paso 9. Si la columna es la que no tiene cero, a los elementos de esa columna se les resta el menor valor, luego se sigue el paso 8.1.

Paso 10. A la matriz resultante del paso 8 o del 9, se le aplican los pasos del 6 al 10, según sea el caso. Hasta que en el paso 7, la tabla tenga la última asignación.

ejemplo 8.2.1

Un entrenador de un equipo de natación, debe asignar competidores en la prueba de 200 metros, para asistir a la olimpiadas juveniles. Las competencias son: En nado libre, nado de mariposa y nado de pecho. Como muchos de sus nadadores, son rápidos en mas de uno de estos estilos, no le es fácil decidir que estilo asignar a cada uno. Los cuatro mejores nadadores y sus mejores tiempos (en segundos) en cada estilo, se representan en la siguiente tabla. Utilice el método de Ramificar y acotar para encontrar la mejor asignación.

	competidores			
tipo de nado	Luis	Ramón	Julia	Mario
pecho	42.4	43.1	40.2	40.5
mariposa	25.1	26.4	25.4	25.0
libre	29.3	25.0	26.5	24.8

Como vemos, nuestra matriz no está balanceada, tenemos que agregar un tipo de nado ficticio **f**, con tiempos de cero. Quedándonos:

tabla 8.2.2

	L	R	J	M
P	42.4	43.1	40.2	40.5
M	25.1	26.4	25.4	25.0
L	29.3	25.0	26.5	24.8
f	0	0	0	0

Hacemos reducción por filas.

tabla 8.2.3

	L	R	J	M	
P	2.2	2.9	0	0.3	40.2
M	0.1	1.4	0.4	0	25.0
L	4.5	0.2	1.7	0	24.8
f	0	0	0	0	0
				total =	90.0

Reducción por columas

tabla 8.2.4

	L	R	J	M
P	2.2	2.9	0	0.3
M	0.1	1.4	0.4	0
L	4.5	0.2	1.7	0
f	0	0	0	0
	0	0	0	= 0

Como podemos observar, en la reducción por filas, el costo fue de 90; y la de columnas cero; la suma de estos costos, es el costo con que se inicia el diagrama de ramificación. La matriz (tabla 8.2.4), debe tener al menos un cero en cada fila y columna, si esto se cumple, s determinan los costos en cada casilla que tengan cero de acuerdo al procedimiento, obteniendo la siguiente tabla.

Tabla 8.2.5

2.2	2.9	0 $\boxed{.3}$	0.3
0.1	1.4	0.4	0 $\boxed{.1}$
4.5	0.2	1.7	0 $\boxed{.2}$
0 $\boxed{.1}$	0 $\boxed{.2}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$

Una vez calculado los costos en las casillas que tenían cero, se selecciona aquella que haya resultado con mayor costo, ahí será una de las asignaciones (Pecho - Julia), cuyo costo será de 0.3 y cero, estos se ponen en las dos ramificaciones que van después del inicio del diagrama, truncándose aquella rama que tenga mayor costo total. De acuerdo al procedimiento, la fila y columna correspondiente a la casilla de mayor costo, en la siguiente tabla ya no aparecerán, quedando la tabla como sigue.

Tabla 8.2.6

0.1	1.4	0 $\boxed{.1}$
4.5	0.2	0 $\boxed{.2}$
0 $\boxed{.1}$	0 $\boxed{.2}$	0 $\boxed{0}$

En la tabla 7.2.5, todas las filas y columnas tuvieron al menos un cero, por lo que no hay que hacer ninguna reducción de fila o columna; también se observan dos casillas con el mismo costo mayor, en estos casos se selecciona cualquiera de ellas. Aquí se obtiene otra asignación (Libre - Mario), cuyo costo de que se lleve a cabo o no esa asignación es cero y 0.2 respectivamente. Estos costos irán en la ramas del diagrama cuyos costos totales son menores. En la siguiente tabla no aparecerán la fila y columna correspondientes a la casilla asignada, quedando de la siguiente forma.

tabla 8.2.7

	L	R
M	0.1	1.4
f	0	0

Aquí se observa que una fila no cumple con la condición de que debe haber al menos un cero, por lo que se procede a la reducción de esa fila, quedando la tabla de la siguiente manera.

Tabla 8.2.8

	L	R
M	1.3 0	1.3
f	$\boxed{0}$ 0	$\boxed{1.3}$ 0

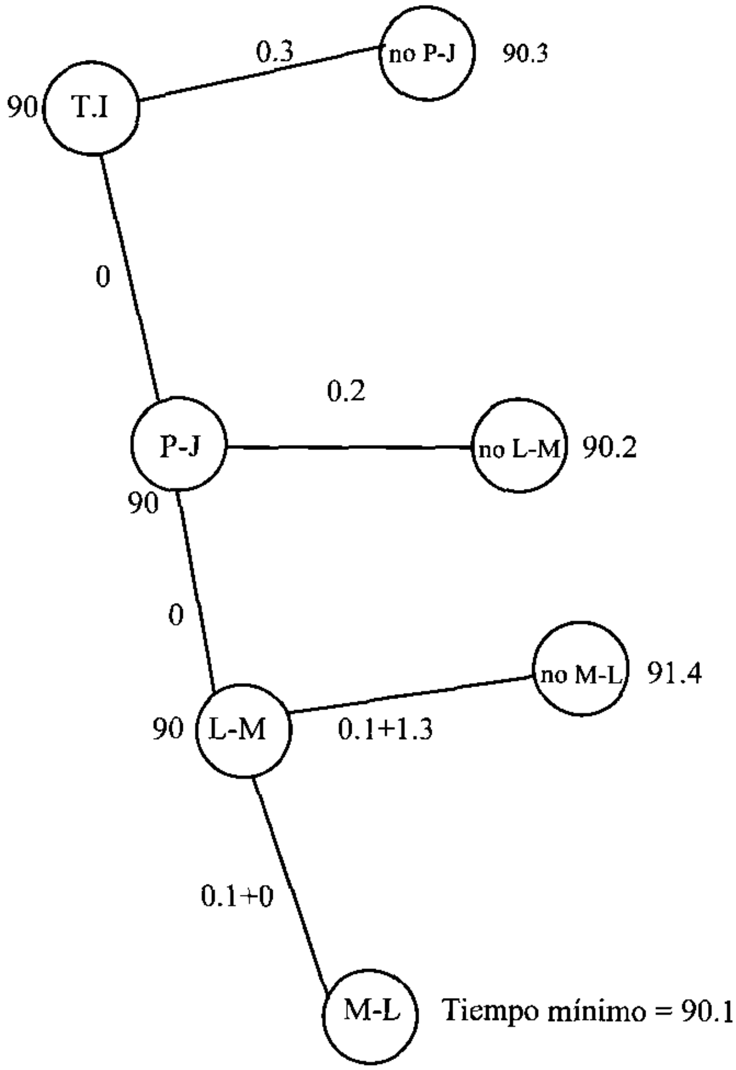
Se observa que hay dos casillas con el mismo costo en nuestra tabla 8.2.7, procediéndose a seleccionar cualquiera de las dos. Aquí se efectúa otra asignación (Mariposa - Luis), con un costo de cero para que se haga la asignación y de 1.3 de que no se haga tal asignación, estos costos irán en las ramas del diagrama. Siguiendo el procedimiento, la siguiente tabla nos queda:

	R
f	0

Dicha tabla tiene el nado ficticio, lo que nos indica que Ramón quedará fuera de la asignación. El tiempo mínimo de la asignación obtenida será:

Nado	Personas	Tiempo
Pecho	Julia	40.2
Libre	Mario	24.8
Mariposa	Luis	25.1
	Tiempo mínimo	**90.1**

El diagrama de ramificación de todas las asignaciones efectuadas es el siguiente



CAPITULO 9

PROGRAMACION ENTERA

La programación entera es un programa lineal, con un requerimiento más, "que todas las variables en la solución óptima sean enteras"

Una aproximación a la solución de cualquier programa, puede obtenerse ignorando el requerimiento de variables enteras; esto es, resolver el problema lineal por cualquiera de las técnicas. Si las variables básicas de la solución óptima resultan en enteros; entonces, esta será la solución de nuestro programa lineal entero. De otra forma, se pueden aproximar estos resultados a los enteros factibles más próximos; y los resultados de estas aproximaciones, se pueden ir ramificando.

Ejemplo 9.1

$$\begin{aligned} \text{Max. } Z &= X_1 + 9X_2 + X_3 \\ \text{s.a:} \quad & X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq 9 \\ & 3X_1 + 2X_2 + 2X_3 \leq 15 \\ & X_i \geq 0 \;\; \forall_i \text{ y en enteros} \end{aligned}$$

A. Utilizando el método simplex, para la primera aproximación.

tabla 9.1

			1	9	1	0	0
			X_1	X_2	X_3	W_1	W_2
0	W_1	9	1	2	3	1	0
0	W_2	15	3	2	2	0	1
		0	-1	-9	-1	0	0

tabla 9.2

			1	9	1	0	0
			X_1	X_2	X_3	W_1	W_2
9	X_2	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	W_2	6	2	0	-1	-1	1
		$\frac{81}{2}$	$\frac{7}{2}$	0	$\frac{25}{2}$	$\frac{9}{2}$	0

Solución óptima no entera: $X_1 = 0$; $X_2 = 9/2 = 4.5$; Zmax. = 81/2 = 40.5. Por lo tanto nuestros enteros factibles más próximos de X_2, serán: **$X_2 \leq 4$; $X_2 \geq 5$;** con esto iniciamos la ramificación, que al final podremos apreciar.

B. A nuestro problema original se agrega una nueva restricción **$X_2 \leq 4$**

ejemplo 9.2

$$\text{Max.}Z = X_1 + 9X_2 + X_3$$

$$\text{s.a:} \quad X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq 9$$

$$3X_1 + 2X_2 + 2X_3 \leq 15$$

$$X_2 \leq 4$$

$$X_i \geq 0 \ \forall_i \text{ y en enteros}$$

tabla 9.3

			1	9	1	0	0	0
			X_1	X_2	X_3	W_1	W_2	W_3
0	W_1	9	1	2	3	1	0	0
0	W_2	15	3	2	2	0	1	0
0	W_3	4	0	1	0	0	0	1
		0	−1	−9	−1	0	0	0

tabla 9.4

			1	9	1	0	0	0
			X_1	X_2	X_3	W_1	W_2	W_3
0	W_1	1	1	0	3	1	0	-2
0	W_2	7	3	0	2	0	1	-2
9	X_2	4	0	1	0	0	0	1
		36	−1	0	−1	0	0	0

tabla 9.5

			1	9	1	0	0	0
			X_1	X_2	X_3	W_1	W_2	W_3
1	X_1	1	1	0	3	1	0	-2
0	W_2	4	0	0	-7	-3	1	4
9	X_2	4	0	1	0	0	0	1
		37	0	0	2	1	0	7

Como podemos ver, ésta es la solución óptima, cuyos valores son los siguientes. Zmax. = 37; $X_1 = 1$; $X_2 = 4$; $X_3 = 0$ y en enteros; pero falta agregar a nuestro problema la otra restricción, para ver si se mejora la Zmax.

C. A nuestro problema original, agregamos la otra restricción $\mathbf{X_2 \geq 5}$; de tal manera que nuestro problema queda:

ejemplo 9.3

$$\text{Max.}Z = X_1 + 9X_2 + X_3$$

$$\text{s.a:}\quad X_1 + 2X_2 + 3X_3 \le 9$$

$$3X_1 + 2X_2 + 2X_3 \le 15$$

$$X_2 \ge 4$$

$$X_i \ge 0 \;\; \forall_i \text{ y en enteros}$$

tabla 9.6

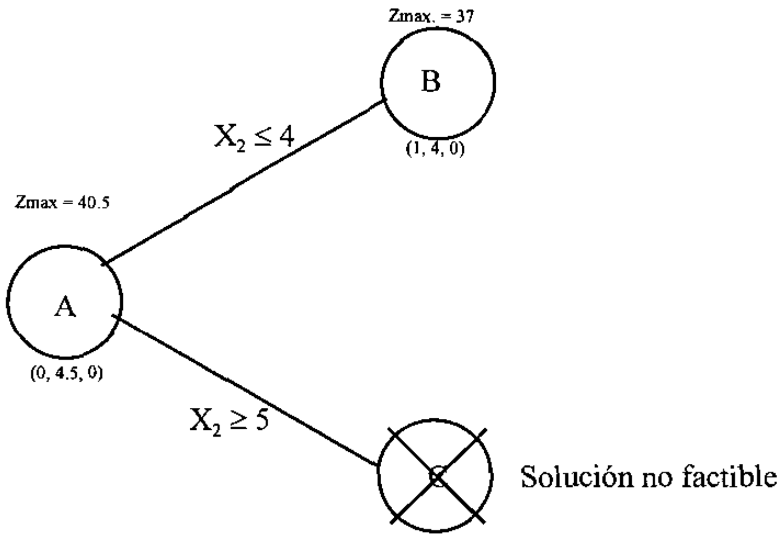
			1	9	1	0	0	0	-M
			X_1	X_2	X_3	W_3	W_1	W_2	U_1
0	W_1	9	1	2	3	0	1	0	0
0	W_2	15	3	2	2	0	0	1	0
-M	U_1	5	0	1	0	-1	0	0	1
		-5M	-1	-M-9	-1	M	0	0	0

tabla 9.7

			1	9	1	0	0	0	-M
			X_1	X_2	X_3	W_3	W_1	W_2	U_1
9	X_2	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
0	W_2	6	2	0	-1	0	-1	1	0
-M	U_1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1
		$-\frac{1}{2}M+\frac{81}{2}$	$\frac{1}{2}M+\frac{7}{2}$	0	$\frac{3}{2}M+\frac{25}{2}$	M	$\frac{1}{2}M+\frac{9}{2}$	0	0

Como podemos observar, la solución es no factible cuando se agrega $\mathbf{X_2 \ge 5}$; por lo tanto, la solución óptima entera es la de la tabla 9.5, como la podremos observar en diagrama de ramificación y acotación.

gráfica 9.1



Los resultados de la gráfica anterior, pueden también obtenerse partiendo de la solución óptima del problema con la ayuda del análisis de sensibilidad, sin estar resolviendo por el simplex cada una de las restricciones formadas por los enteros factibles más próximos.

Dado el siguiente programa lineal con su respectiva solución óptima, obtenga el diagrama de ramificación, partiendo de la solución óptima

ejemplo 9.4

$$\text{MAX } Z = 5X_1 + 2X_2$$

$$\text{s.a:} \quad 2X_1 + 2X_2 \leq 9$$

$$3X_1 + X_2 \leq 11$$

$$X_i \geq 0 \ \ \forall_i \text{ y en enteros}$$

nodo 1. Cuya solución óptima es la siguiente:

tabla 9.8

			5	2	0	0
			X_1	X_2	W_1	W_2
2	X_2	$\frac{5}{4}$	0	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$
5	X_1	$\frac{13}{4}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
		$\frac{75}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$

Como podemos observar, las variables en la solución óptima no están en enteros; y los enteros factibles más próximos de las variables de base, son:
$\mathbf{X_1 \leq 3}$; $\mathbf{X_1 \geq 4}$ **y** $\mathbf{X_2 \leq 1}$; $\mathbf{X_2 \geq 2}$. Resolver un programa para cada una de estas restricciones, sería un procedimiento muy laborioso. Sin embargo, podemos acortar el procedimiento de la siguiente manera:

Consideremos los valores no enteros de las variables en la solución óptima, cuyos resultados son: $X_1 = 3.25$, $X_2 = 1.25$. Donde el valor mayor de la diferencia del resultado no entero de la variable y su entero, será la variable a ramificar, como se puede ver:

$X_1 = 3.25 \longrightarrow 3.25 - 3 = 0.25$

$X_2 = 1.25 \longrightarrow 1.25 - 1 = 0.25$

Como hay empate, se inicia con cualquiera de las dos, no tomando en cuenta la otra variable para la ramificación, para nuestro ejemplo tomaremos la $\mathbf{X_2}$; generando las dos restricciones con sus enteros factibles más próximos que son: $\mathbf{X_2 \leq 1}$; $\mathbf{X_2 \geq 2}$

nodo 2. A la solución óptima (tabla 9.8), agregamos la restricción $\mathbf{X_2 \leq 1}$, quedando

tabla 9.9

			5	2	0	0	0
			X_1	X_2	W_1	W_2	W_3
2	X_2	$\frac{5}{4}$	0	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0
5	X_1	$\frac{13}{4}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0
0	W_3	1	0	1	0	0	1
		$\frac{75}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	0

Al anexar la nueva restricción, verificamos que las variables básicas tengan vectores unitarios: Como se observa, la única que no lo tiene es la variable X_2, por tanto se hará una transformación por fila, quedando:

tabla 9.10

			5	2	0	0	0
			X_1	X_2	W_1	W_2	W_3
2	X_2	$\frac{5}{4}$	0	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0
5	X_1	$\frac{13}{4}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0
0	W_3	$-\frac{1}{4}$	0	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
		$\frac{75}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	0

En esta tabla se observa un término independiente negativo, cuando eso sucede se selecciona primero el renglón clave (b_i más negativo), luego la columna clave. Esta será la del menor cociente negativo de la división del número índice con su correspondiente elemento elemento del renglón clave, como se observa en la tabla 9.11. Luego aplicando el método Montante, se llega a la solución óptima:

tabla 9.11

			5	2	0	0	0
			X_1	X_2	W_1	W_2	W_3
2	X_2	1	0	1	0	0	1
5	X_1	$\frac{10}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
0	W_1	$\frac{1}{3}$	0	0	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$
		$\frac{56}{3}$	0	0	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$

Siendo la solución óptima no entera (cuando $X_2 \leq 1$) es: $X_1 = 10/3 = 3.33$; $X_2 = 1$; Zmax.= 18.6667; y las nuevas restricciones serán: $\mathbf{X_1 \leq 3}$; $\mathbf{X_1 \geq 4}$

$X_1 = 3.33 \longrightarrow 3.33 - 3 = 0.33$ *

$X_2 = 1 \longrightarrow 1 - 1 = 0$

nodo 3. Antes de dar solución a las restricciones anteriores, hay que resolver la restricción $\mathbf{X_2 \geq 2}$, agregándola a la solución óptima del nodo **1**, quedando:

tabla 9.12

			5	2	0	0	0	-M
			X_1	X_2	W_1	W_2	W_3	U_1
2	X_2	$\frac{5}{4}$	0	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	0
5	X_1	$\frac{13}{4}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0
-M	U_1	2	0	1	0	0	-1	1
		$-2M + 18.75$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	M	0

tabla 9.13

			5	2	0	0	0	-M
			X_1	X_2	W_1	W_2	W_3	U_1
2	X_2	$\frac{5}{4}$	0	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	0
5	X_1	$\frac{13}{4}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0
-M	U_1	$\frac{3}{4}$	0	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	-1	1
		$-0.75M + 18.75$	0	0	$\frac{3}{4}M + \frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}M + \frac{3}{2}$	M	0

tabla 9.14

			5	2	0	0	0	-M
			X_1	X_2	W_1	W_2	W_3	U_1
2	X_2	2	0	1	0	0	-1	1
5	X_1	$\frac{5}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	1	-1
0	W_2	$\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{3}{2}$	1	-2	2
		$\frac{33}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$	0	3	M - 3

Solución óptima no entera: $X_1 = 5/2 = 2.5$; $X_2 = 2$; Zmax. = 16.5. Como podemos ver, este valor de Z es menor que la Z del nodo 2, esto indica que la ramificación se trunca en el nodo 3.

nodo 4. Se parte de la tabla óptima del nodo 2 (tabla 9.11), agregando primero la restrición $\mathbf{X_1 \leq 3}$, generándose la tabla siguiente.

tabla 9.15

			5	2	0	0	0	0
			X_1	X_2	W_1	W_2	W_3	W_4
2	X_2	1	0	1	0	0	1	0
5	X_1	$\frac{10}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
0	W_1	$\frac{1}{3}$	0	0	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0
0	W_4	3	1	0	0	0	0	1
		$\frac{56}{3}$	0	0	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	0

tabla 9.16

			5	2	0	0	0	0
			X_1	X_2	W_1	W_2	W_3	W_4
2	X_2	1	0	1	0	0	1	0
5	X_1	$\frac{10}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
0	W_1	$\frac{1}{3}$	0	0	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0
0	W_4	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1
		$\frac{56}{3}$	0	0	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	0

tabla 9.17

			5	2	0	0	0	0
			X_1	X_2	W_1	W_2	W_3	W_4
2	X_2	1	0	1	0	0	1	0
5	X_1	3	1	0	0	0	0	0
0	W_1	1	0	0	1	0	-2	-2
0	W_2	1	0	0	0	1	-1	-3
		17	0	0	0	0	2	5

Solución óptima entera: $X_1 = 3$; $X_2 = 1$; Zmax. = 17. Faltando por analizar la otra restricción (**$X_1 \geq 4$**)

nodo 5. La restricción **$X_1 \geq 4$** se anexará a la tabla óptima del nodo 2 (tabla 9.11), resultando la tabla siguiente.

tabla 9.18

			5	2	0	0	0	0	-M
			X_1	X_2	W_1	W_2	W_3	W_4	U_1
2	X_2	1	0	1	0	0	1	0	0
5	X_1	$\frac{10}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0
0	W_1	$\frac{1}{3}$	0	0	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	0
-M	U_1	4	1	0	0	0	0	-1	1
		$-4M+\frac{56}{3}$	-M	0	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	M	0

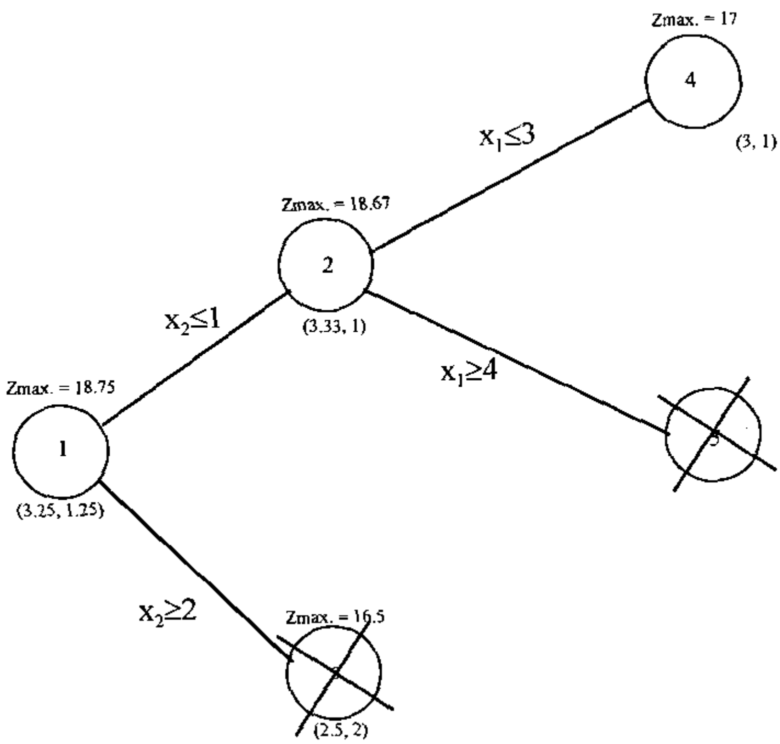
tabla 9.19

			5	2	0	0	0	0	-M
			X_1	X_2	W_1	W_2	W_3	W_4	U_1
2	X_2	1	0	1	0	0	1	0	0
5	X_1	$\frac{10}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0
0	W_1	$\frac{1}{3}$	0	0	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	0
-M	U_1	$\frac{2}{3}$	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	-1	1
		$-\frac{2}{3}M+\frac{56}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}M+\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}M+\frac{1}{3}$	M	0

			5	2	0	0	0	0	$-M$
			X_1	X_2	W_1	W_2	W_3	W_4	U_1
0	W_3	1	0	1	0	0	1	0	0
5	X_1	$\frac{11}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	0
0	W_1	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	0	0	0
$-M$	U_1	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	-1	1
		$-\frac{1}{3}M+\frac{61}{3}$	0	$\frac{1}{3}M+\frac{5}{3}$	0	$\frac{1}{3}M+\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}M+\frac{1}{3}$	M	0

La solución óptima de la tabla anterior es una solución no factible, por lo tanto nuestra solución óptima y entera, es la del nodo 4, tabla 9.17, donde: $X_1 = 3$; $X_2 = 1$; Zmax. = 17. En seguida podemos apreciar el diagrama de ramificación para este ejemplo.

gráfica 9.2



CAPITULO 10

PROGRAMACION NO LINEAL

En muchos problemas prácticos, las funciones o relaciones que se manejan, no son todas lineales. Los problemas de programación no lineal se presentan de muchas formas distintas, por lo que no se dispone de un algoritmo (como el simplex en programación lineal) que resuelva todos estos tipos de problemas especiales. Sin embargo, se han desarrollado algoritmos para algunos casos de problemas de programación no lineal, haciendo algunas suposiciones sobre sus funciones.

La teoría de optimización clásica, considera el uso del cálculo diferencial para determinar máximos y mínimos para funciones restringidas y no restringidas.

A continuación describiremos algunos tipos de problemas de programación no lineal.

OPTIMIZACION NO RESTRINGIDA

Recordemos que la primera derivada de una función sin restricciones, debe ser igual a cero en un máximo o en un mínimo local, tomando esto como la **primera condición.** Sin embargo, aparte de que puede ser un máximo o un mínimo, también puede ser un punto de inflexión; por lo cual, se tendrá que determinar la segunda derivada. Si la segunda derivada es mayor que cero, entonces el punto es un mínimo local; y si la segunda derivada es menor que cero, entonces el punto es un máximo local, ésta es la **segunda condición.**

Los ejemplos siguientes, corresponden al caso explicado a continuación:

ejemplo 10.1

$$\text{Max. } f(x) = 4X - \frac{1}{45}X^2$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = 4 - \frac{2}{45}X \Rightarrow 4 - \frac{2}{45}X = 0 \therefore X = 90$$

Este resultado puede ser un máximo local, un mínimo local o un punto de inflexión. Para estar seguros, determinamos la segunda derivada (diferenciación de la primera derivada).

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = -\frac{2}{45} \Rightarrow -\frac{2}{45} < 0 \therefore \text{max. local}$$

Como podemos observar, la segunda derivada nos dio menor que cero, indicando que el 90 es un máximo local. Y el máximo global se obtiene sustituyendo en la función original nuestro máximo local, quedando:

$$f(x)\text{max.} = f(90) = 4(90) - \frac{1}{45}(90)^2 = 180$$

El máximo global es 180, el cual podemos observar cuando damos valores a X, como aparece en la siguiente tabla:

tabla 10.1

X	f(x)
0	0
1	3.97777
20	71.1111
40	124.444
60	160
80	177.777
90	180*
100	177.777
110	171.111

En la tabla anterior, podemos ver que cuando X = 90, f(x) = 180, que será el valor máximo, ya que para valores mayores que 90, f(x) empieza a disminuir. Un ejemplo más relacionado con este punto es el siguiente:

$$\text{Min.} f(x) = 36X - 3X^3 - 30$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = 36 - 9X^2 \Rightarrow 36 - 9X^2 = 0 \therefore X^2 = 4; X = \pm 2$$

Donde X = 2 y X = -2; estos valores se sustituyen en la segunda derivada, para ver cual de los dos es el mínimo

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = -18X$$

$$f(2) = -18(2) = -36 < 0 \therefore \text{max.local}$$
$$f(-2) = -18(-2) = 36 > 0 \therefore \text{min.local}$$

Como ya sabemos cual es nuestro mínimo local, el mínimo global se obtiene sustituyendo ese valor en la función original, como se ve a continuación.

$$\text{min.global} \quad \text{de} \qquad f(x) = 36X - 3X^3 - 30 = f(-2)$$

$$\text{min.global} \quad \text{de} \quad f(-2) = 36(-2) - 3(-2)^3 - 30 = -78$$

Nuestro máximo global es -78. Al dar valores a X, podemos observar ese valor mínimo en la tabla siguiente.

tabla 10.2

X	f(x)
0	-30
-1	-63
-2	-78*
-4	-57
-5	18

MODELO DE UNA VARIABLE, RESTRINGIDA A UN INTERVALO

El procedimiento para este tipo de modelos es el siguiente:

1. Determinar la primera derivada de la función e igualarla a cero, para encontrar el o los valores de la variable de decisión.

2. Calcular la segunda derivada, para determinar si el o los valores, producen un máximo o un mínimo.

3. Sustituir en la función objetivo el valor máximo o mínimo del paso 2

4. Evaluar la función objetivo en los extremos del intervalo

5. Comparar el resultado obtenido en el paso 3 (máximo o mínimo), con los valores obtenidos en el paso 4; si se está maximizando, el mayor de ellos será el máximo global; si se está minimizando, el menor de ellos, será el mínimo global.

ejemplo 10.3

$$\min. f(x) = 3X^3 - 3X^2 + 20$$

$$\text{en el intervalo} \quad 1 \leq X \leq 3$$

Paso 1

$$\frac{d}{dx} f(x) = 9X^2 - 6X \Rightarrow 9X^2 - 6X = 0 \Rightarrow 3X(3X - 2) \therefore X = 0; X = \frac{2}{3}$$

Paso 2

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = 18X - 6$$

$$f(0) = 18(0) - 6 = -6 < 0 \therefore \text{max.}$$
$$f(\tfrac{2}{3}) = 18(\tfrac{2}{3}) - 6 = 6 > 0 \therefore \text{min}$$

Como estamos minimizando, X= 2/3 nos da un mínimo, cuyo valor lo obtenemos en el paso 3

Paso 3

$$\textit{min.local:} \quad f(\tfrac{2}{3}) = 3(\tfrac{2}{3})^3 - 3(\tfrac{2}{3})^2 + 20 = \tfrac{176}{9} = 19.55$$

Paso 4

Evaluar $1 \leq X \leq 3$ en la función objetivo.

$$f(1) = 3(1)^3 - 3(1)^2 + 20 = 20$$
$$f(3) = 3(3)^3 - 3(3)^2 + 20 = 74$$

Paso 5

Como estamos minimizando, el resultado obtenido en el paso 3 se compara con el menor valor del paso 4 y el menor de ellos, será el mínimo global.

$$f(\tfrac{2}{3}) = 19.55; f(1) = 20 \Rightarrow 19.55 < 20 \therefore \text{min.global} = 19.55; X = \tfrac{2}{3}$$

A continuación se desarrollará otro ejemplo de este tipo:

ejemplo 10.4

$$\text{max. } f(x) = -4X^2 - 16X + 6$$

$$\text{en el intervalo} \quad 3 \leq X \leq 5$$

Paso 1

$$\frac{d}{dx}f(x) = -8X - 16 \Rightarrow -8X - 16 = 0 \therefore X = -2$$

Paso 2

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = -8 < 0 \therefore \text{max.}$$

Paso 3

$$\text{max. local:} \quad f(-2) = -4(2)^2 - 16(-2) + 6 = 22$$

Paso 4

$$f(3) = -4(3)^2 - 16(3) + 6 = -78$$
$$f(5) = -4(5)^2 - 16(5) + 6 = -174$$

Paso 5

$f(3) = -78$ y $f(-2) = 22$ por lo tanto $f(-2) > f(3)$, lo que indica que el máximo local, es también el máximo global.

MODELOS CON DOS VARIABLES SIN RESTRICCIONES

La representación de este modelo es: optimizar $f(x_1, x_2)$, cuyo procedimiento es el siguiente:

Paso 1

Se calcula la primera derivada parcial para cada una de las variables de la función objetivo, se igualan a cero y se determinan sus valores.

Paso 2

Se calcula la segunda derivada; esto es: Diferenciar las primeras derivadas parciales, con respecto a las variables que se derivaron (paso 1). La segunda derivada con respecto a X_1 y X_2, se obtiene diferenciando con respecto a X_1 la primera derivada parcial que se obtuvo con respecto a X_2.

Paso 3

Las segundas derivadas obtenidas en el paso 2, nos sirven para determinar lo siguiente:

Existe un Mínimo local, si:

$$\frac{d^2f}{dx_1^2} > 0 \quad y \quad \left(\frac{d^2 f}{dx_1^2}\right)\left(\frac{d^2 f}{dx_2^2}\right) - \left(\frac{d\ f}{dx_1 x_2}\right)^2 > 0$$

Existe un máximo local, si

$$\frac{d^2f}{dx_1^2} < 0 \quad y \quad \left(\frac{d^2 f}{dx_1^2}\right)\left(\frac{d^2 f}{dx_2^2}\right) - \left(\frac{d\ f}{dx_1 x_2}\right)^2 > 0$$

No existe máximo ni mínimo local, si:

$$0 < \frac{d^2f}{dx_1^2} < 0 \ y \quad \left(\frac{d^2 f}{dx_1^2}\right)\left(\frac{d^2 f}{dx_2^2}\right) - \left(\frac{d\ f}{dx_1 x_2}\right)^2 > 0$$

Si el resultado de segunda derivada con respecto a X_1 es una constante, puede ser mayor o menor que cero, procediendo a verificar si es un máximo o mínimo local.

Paso 3.1

Si el resultado de la segunda derivada con respecto a X_1 no es una constante, se sustituye en ésta, el o los valores obtenidos en el paso 1, para determinar si esta derivada es mayor o menor que cero. Una vez determinado lo anterior, seguir con el paso 3 y 4.

Paso 4

Si el resultado en el paso 3 fué un máximo o un mínimo local; y estamos maximizando o minimizando, los valores de las variables obtenidas en el paso 1, se sustituyen en la función objetivo, donde el resultado será un máximo o mínimo $f(x_1, x_2)$.

Ejemplo 10.4

$$\min. f(x_1,x_2) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 - 8x_1 - 6x_2 + 35$$

$$\frac{df}{dx_1} = 8x_1 + 4x_2 \Rightarrow 8x_1 + 4x_2 = 0 \qquad \frac{df}{dx_2} = 4x_2 + 4x_1 \Rightarrow 4x_2 + 4x_1 = 0$$

la solución de este sistema de ecuaciones, es: $X_1 = 1/2$: $X_2 = 1$

$$\frac{d^2f}{dx_1^2} = 8; \quad \frac{d^2f}{dx_2^2} = 4; \quad \frac{d^2f}{dx_1x_2} = 4 \qquad \text{Como} \qquad \frac{d^2f}{dx_1^2} = 8 > 0$$

$$\left(\frac{d^2f}{dx_1^2}\right)\left(\frac{d^2f}{dx_2^2}\right) - \left(\frac{d\ f}{dx_1x_2}\right)^2 = 8(4) - (4)^2 = 16 > 0, \therefore \text{min.local}$$

$$\text{mínimo}\ \ f(x_1,x_2) = 4(\tfrac{1}{2}) + 2(1)^2 + 4(\tfrac{1}{2})(1) - 8(\tfrac{1}{2}) - 6(1) + 35 = 30$$

Esto nos indica que el mínimo de la función es 30, cuando $X_1 = 1/2$ y $X_2 = 1$

MODELOS CON MAS DE UNA VARIABLE, CON RESTRICCION DE IGUALDAD

La forma de representar este tipo de modelo es la siguiente:

$$\text{Optimizar}\ \ f(x_1,x_2)$$
$$\text{s.a:}\ \ g(x_1,x_2) = b$$

El procedimiento para la solución de este tipo de modelo es el siguiente:

Paso 1

Se introduce una nueva variable (w), denominada multiplicador de lagrange, utilizada para combinar en una sola función tanto la restricción como la función objetivo, llamándose a esa nueva función **"función lagrangiana"**, cuya representación es la siguiente:

$$L(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) + w[g(x_1, x_2) - b]$$

Paso 2

Determinar las derivadas parciales de la función lagrangiana, con respecto a: x_1, x_2 y w, $\left(\frac{dL}{dx_1}; \frac{dL}{dx_2}; \frac{dL}{dw}\right)$. Luego se igualan a cero estas derivadas, para determinar los valores de x_1, x_2 y w, de este sistema de ecuaciones

Paso 3

Sustituir el valor obtenido de w en el paso 2, quedándonos una nueva función, a la cual se le determinará su primera y segunda derivada , con respecto a x_1, x_2 y x_1x_2; y observar que:

$$\text{Si} \quad \frac{d^2L}{dx_1^2} > 0; \quad \text{y} \quad \left(\frac{d^2L}{dx_1^2}\right)\left(\frac{d^2L}{dx_2^2}\right) - \left(\frac{d^2L}{dx_1x_2}\right)^2 > 0, \quad \Rightarrow \quad \text{min.local}$$

$$\text{Si}\quad \frac{d^2L}{dx_1^2} < 0; \quad \text{y} \quad \left(\frac{d^2L}{dx_1^2}\right)\left(\frac{d^2L}{dx_2^2}\right) - \left(\frac{d^2L}{dx_1 x_2}\right)^2 > 0, \quad \Rightarrow \quad \text{max.local}$$

Paso 4

Si el resultado en el paso 3 fué un máximo o un mínimo local; y estamos maximizando o minimizando, los valores de las variables x_1 y x_2, obtenidas en el paso 2, se sustituyen en la función objetivo, donde el resultado será un máximo o mínimo $f(x_1, x_2)$.

En seguida se resolverá un ejemplo, siguiendo los pasos anteriores.

ejemplo 10.5

$$\min. f(x_1, x_2) = x_1^2 - 14x_1 + x_2^2 - 16x_2 + 113$$
$$\text{s.a:} \quad g(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 = 12$$

$$L(x_1, x_2) = x_1^2 + 14x_1 + x_2^2 - 16x_2 + 113 + w(2x_1 + 3x_2 - 12)$$

$$\frac{dL}{dx_1} = 2x_1 + 14 + 2w \Rightarrow 2x_1 + 14 + 2w = 0$$

$$\frac{dL}{dx_2} = 2x_2 - 16 + 3w \Rightarrow 2x_2 - 16 + 3w = 0$$

$$\frac{dL}{dw} = 2x_1 + 3x_2 - 12 \Rightarrow 2x_1 + 3x_2 - 12 = 0$$

La solución de este sistema de ecuaciones, es: $x_1 = 3$; $x_2 = 2$ y $w = 4$.

$$L(x_1, x_2) = x_1^2 - 14x_1 + x_2^2 - 16x_2 + 113 + 4(2x_1 + 3x_2 - 12)$$

$$L(x_1, x_2) = x_1^2 - 6x_1 + x_2^2 - 4x_2 + 65$$

$$\frac{dL}{dx_1} = 2x_1 - 6 \Rightarrow \frac{d^2L}{dx_1^2} = 2$$

$$\frac{dL}{dx_2} = 2x_2 - 4 \Rightarrow \frac{d^2L}{dx_2^2} = 2$$

$$\frac{dL}{dx_1 x_2} = 0$$

Si $\frac{d^2L}{dx_1^2} > 0$; y $\left(\frac{d^2L}{dx_1^2}\right)\left(\frac{d^2L}{dx_2^2}\right) - \left(\frac{d^2L}{dx_1 x_2}\right)^2 > 0$, $\Rightarrow$ min.local $(2)-(0)^2 = 4 > 0$.

Por lo tanto es un mínimo local; y como se está minimizando en nuestra función objetivo, entonces los valores obtenidos de las ecuaciones, nos darán un mínimo. Si en la función existe un mínimo local, éste será el mínimo global, cuyo valor es:

$$f(x_1, x_2)\text{min.} = x_1^2 - 14x_1 + x_2^2 - 16x_2 + 113 \therefore$$

$$f(x_1, x_2)\text{min.} = (3)^2 - 14(3) + (2)^2 - 16(2) + 113$$

$$f(x_1, x_2)\text{min.} = 52$$

CAPITULO 11

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Esperemos que el contenido de esta tesis sea de gran ayuda para los estudiantes, donde abordamos temas de optimización. Ya que tiene una variedad de herramientas que permiten incrementar la probabilidad de tomar mejores decisiones para facilitar la solución de problemas lineales y no lineales

Existen también otras herramientas importantes (los paquetes de computación), que facilitan soluciones mas rápidas en los problemas de empresas públicas y privadas:

En esta tesis aplicamos el paquete manager para un caso práctico de una empresa, para dar solución a un problema de producción que presentaba dicha empresa.

Es necesario que todos los estudiantes en ingeniería y ciencias de la administración conozcan y manejen al menos un paquete de computación. También se recomienda que cuando se aplique un paquete, se formule claramente el problema, se definan los objetivos que se desean alcanzar con el estudio, así como tener un pleno conocimiento de las limitaciones en recursos y tiempo. Por otra parte en el proceso de enseñanza - aprendizaje se resuelven ejercicios sugeridos en un libro de texto, en cuyo planteamiento se encuentra bien definido el objetivo del problema y provee además todos los datos necesarios para su solución sin embargo existe una gran diferencia entre resolver problemas del libro y resolver problemas de la vida real. En estos últimos nada esta definido se parte de cero y solo se cuenta con la creatividad, habilidad y firmeza del practicante. Es por lo anterior, que existe la necesidad de fomentar las aplicaciones reales que permitan al estudiante tener acceso a las experiencias adquiridas por aquellos que han tenido la oportunidad de hacerlo, brindándoles un recorrido libre de obstáculos para evitarle algunos tropiezos.

BIBLIOGRAFIA

Saul I. Gass
Programación Lineal
Editorial: C.E.C.S.A.
Primera Edición, 1972

James E. Shamblin and G. T. Stevens, Jr.
Investigación de Operaciones
Editorial: Mc.Graw_Hill
Primera Edición 1974

Hamdy A. Taha
Investigación de Operaciones
Editorial: Representaciones y Servícios de Ingenieria S.A.
Primera Edición, 1981

Frederick S. Hillier and Gerald J. Lieberman
Introducción a la Investigación de Operaciones
Editorial: Mc. Graw-Hill
Quinta Edición, 1990

Juan Prawda W.
Métodos y modelos de Investigación de Operaciones
Editorial: Limusa
Décima Edición, 1991

David R. Anderson and Dennis J. Sweeney

Introducción a los modelos cuantitativos para administración

Editorial: Iberoamericana

Primera Edición, 1993

LISTADO DE GRAFICAS

LISTADO DE TABLAS

GLOSARIO DE TERMINOS

Término	Significado	Página
nCm	Combinaciones de **n** elementos, tomados de **m** en **m**	10
Max.Z	Maximización de una función **Z**	15
$\geq$	Mayor o igual que	16
$\leq$	Menor o igual que	16
$\forall_i$	Para todo valor de **i**	
C.N.A.	Columna no asignada	93

RESUMEN AUTOBIOGRAFICO

La presente tesis fue realizada por los ingenieros Arturo Borjas Roacho y Pablo Rodríguez Tristán, con el fin de obtener el grado de Maestría en Ciencias de la Administración, con especialidad en Finanzas.

El objetivo de la tesis, cuyo título es: Modelos Matemáticos con Aplicación a la Docencia, es servir de apoyo al estudiante de nivel Licenciatura que cursan materias de Investigación de Operaciones.

Datos Personales

Nombre: Arturo Borjas Roacho

Lugar y Fecha de Nacimiento: Sta. Ma. del Oro, Durango. Diciembre 15 de 1949

Estudios Realizados: Ingeniero Mecánico Administrador, nivel Licenciatura.

Rama Profesional: Docencia

Nombre de los padres

Padre: Benigno Borjas Vargas

Madre: Manuela Roacho de Borjas