

**UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON**  
**FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA**  
**DIVISION DE ESTUDIOS DE POST-GRADO**



**EL METODO DEL ELEMENTO FINITO APLICADO  
EN LA SOLUCION DE PROBLEMAS DE  
MECANICA DE MATERIALES EN UNA  
DIMENSION**

**T E S I S**

**EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA  
INGENIERIA MECANICA CON ESPECIALIDAD EN  
DISEÑO MECANICO**

**P R E S E N T A**  
**TOMAS NORBERTO MARTINEZ PEREZ**

**SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L.**

**JUNIO DE 1998**

EL METODO DEL ELEMENTO FINITO APLICADO  
EN LA SOLUCION DE PROBLEMAS DE  
MECANICA DE MATERIALES EN UNA  
DIMENSION

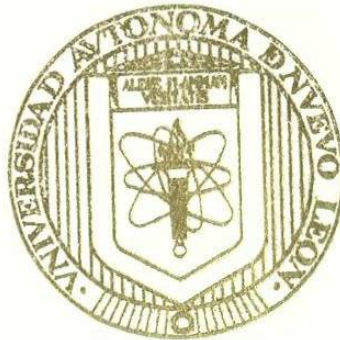
T.N.M.P.

TM  
Z5853  
.M2  
FIME  
1998  
M36



1020123029

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON  
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POST-GRADO



EL METODO DEL ELEMENTO FINITO APLICADO  
EN LA SOLUCION DE PROBLEMAS DE  
MECANICA DE MATERIALES EN UNA  
DIMENSION

T E S I S

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA  
INGENIERIA MECANICA CON ESPECIALIDAD EN  
DISEÑO MECANICO

PRESENTA  
TOMAS NORBERTO MARTINEZ PEREZ

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L.

JUNIO DE 1998

0119-65160

TM  
ZS853  
-M2  
FINE  
1998  
M36

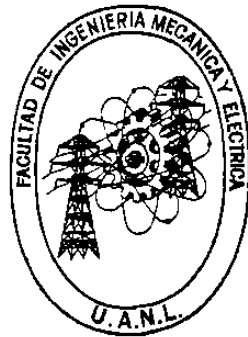


**FONDO  
TESIS**

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



EL METODO DEL ELEMENTO FINITO APLICADO EN LA SOLUCION DE  
PROBLEMAS DE MECANICA DE MATERIALES EN UNA DIMENSION

POR

TOMÁS NORBERTO MARTINEZ PEREZ

TESIS

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA  
INGENIERIA MECANICA CON ESPECIALIDAD  
EN DISEÑO MECANICO

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N.L. JUNIO DE 1998

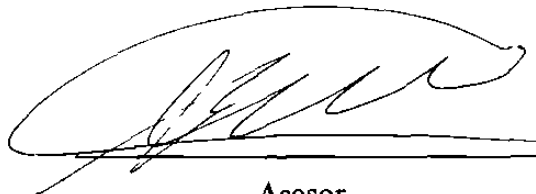


**FONDO  
TESIS**

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON  
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO

Los miembros de comité de tesis recomendamos que la tesis EL METODO DEL ELEMENTO FINITO APLICADO EN LA SOLUCION DE PROBLEMAS DE MECANICA DE MATERIALES EN UNA DIMENSION realizada por el ING. TOMAS NORBERTO MARTINEZ PEREZ sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestro en Ciencias de la Ingeniería Mecánica con especialidad en Diseño Mecánico.

El Comité de Tesis



Asesor

M.C. Guadalupe E. Cedillo Garza



Coasesor

M.C. Luis Manuel Camacho Velazquez



Coasesor

M.C. Roberto Villarreal Garza



Vo. Bo.

M.C. Roberto Villarreal Garza  
División de Estudios de Postgrado

San Nicolás de los Garza, N.L. a 12 de Junio de 1998



## DEDICATORIAS

A mis padres: Sr. Salomón Martínez Molina, y Sra. Lilia Pérez de Martínez a quienes ya el Señor nuestro Dios llamó a su presencia, por el apoyo y cariño que en vida siempre me manifestaron.

A mi esposa: Sra. Juanita García de Martínez por su amor, su apoyo y comprensión.

A mis hijos: Carlos Alberto, Tomás Norberto, Gabriela Deyanira, por el tiempo que no les pude dedicar mientras estuve desarrollando la tesis.

A mis hermanos: Leopoldo, Miguel Angel, Ma. Concepción, Ma. Teodora, Andrés, con cariño.

A todos mis familiares y amigos, con respeto y admiración.

A quienes fueron mis maestros en los estudios de la Maestría: M.C. Guadalupe E. Cedillo, M.C. Roberto Villarreal, M.C. Noé Hinojosa, M.C. Sabás Rodríguez, M.C. Juan Zamora, M.C. Rodolfo Ayala, M.C. Raúl Prieto, M.C. Manuel Amarante, M.C. Miguel Medina.

## AGRADECIMIENTOS.

**A Dios Nuestro Señor**, a quien debo mi existencia y todo lo que he logrado alcanzar, con su Gracia y por sus Bendiciones.

**Al M.C. Guadalupe E. Cedillo Garza**, por la asesoría tan valiosa que de él recibí para la realización de mi tesis.

**Al M.C. Roberto Villarreal Garza**, por las orientaciones y motivación de él recibidas durante el desarrollo de mi tesis.

**A la Universidad Autónoma de Nuevo León**, a la **Facultad De Ingeniería Mecánica y Eléctrica**, por los estudios Profesionales que he recibido y el apoyo que me han dado.

**A quienes fueron mis maestros** en mis estudios de la Maestría, por todo lo que de ellos recibí.

**A mi hijo Carlos Alberto** por su apoyo.

## PROLOGO

El método del elemento finito es un método que puede ser utilizado para la solución de problemas complejos de mecánica de materiales. Es por ello que la tesis que presento tiene por objetivo el análisis del método aplicado a la solución de problemas en una dimensión, como una alternativa de solución, sobre todo cuando la situación es compleja, en cuanto al uso de métodos de solución tradicionales.

En éste método, la estructura real es reemplazada por varias piezas ó elementos, cada uno de los cuales se supone que actúa como un miembro estructural continuo llamado un elemento finito.

Los elementos se supone que están interconectados en ciertos puntos conocidos como nodos. En vista de que es muy difícil encontrar la solución exacta (tales como los desplazamientos) de la estructura original bajo las cargas especificadas, una solución conveniente aproximada se supone en cada elemento finito. La idea es que si las soluciones de los diversos elementos, se selecciona apropiadamente, se puede tender hacia la solución exacta de la estructura total, así como se reduzca el tamaño del elemento.

Durante el proceso de solución, el equilibrio de fuerzas en los nodos y la compatibilidad de los desplazamientos entre los elementos se satisfacen de modo que la estructura completa (ensamble de elementos) se comporta como una ente simple.

El procedimiento básico del elemento finito con aplicación a problemas de mecánica de materiales es lo que trato en la tesis.

Se derivarán las matrices de rigidez, de masa y vectores fuerza del elemento para carga actuando sobre una viga, estructura, y bastidor. Las transformaciones de matrices de elemento y vectores del sistema de coordenadas local al global, los conceptos de matrices de masa consistente. En la tesis trataré solo con elementos en una dimensión, aunque las técnicas que aquí se emplean, se pueden aplicar a problemas mas complejos que envuelven elementos finitos en dos y tres dimensiones.

Existen otras aplicaciones del método del elemento finito, en análisis de esfuerzos elástico-estático, plasticidad, fatiga, mecánica de fractura, transmisión de calor, dinámica de fluidos, campos eléctricos y magnéticos, pero, cada uno requiere de la obtención de resultados particulares.

La disponibilidad en los tiempos modernos, de los medios computacionales, y las técnicas tan avanzadas, se facilita el procedimiento de solución a los problemas, usando el método del elemento finito, auxiliado con un programa de computadora. En la tesis se incluye la solución de problemas de mecánica de materiales en una dimensión con auxilio de una computadora y del programa FEM1DV2.

INDICE	Página
Síntesis	i
CAPITULO 1. Introducción.	
1.1. - Comentarios generales.	1
1.2. - Antecedentes históricos.	3
1.3. - El concepto básico del elemento finito.	4
CAPITULO 2. - Formulaciones integrales y métodos variacionales.	
2.1. - La forma integral pesada.	16
2.2. - Conceptos y fórmulas matemáticas.	19
2.3. - Formulación débil en problemas de valor frontera.	30
2.4. - Métodos variacionales de aproximación.	47
CAPITULO 3. - Análisis del elemento finito en problemas de una dimensión con valor frontera de segundo orden.	
3.1. - Comparación del elemento finito con los métodos variacionales.	72
3.2. - Pasos básicos para el análisis del elemento finito.	76
CAPITULO 4. - Aplicación del método del elemento del elemento finito en flexión de vigas, estructuras y bastidores.	
4.1. - Análisis preliminar.	126
4.2. - El elemento viga Euler-Bernoulli.	126
4.3. - Elementos estructura plana y bastidor Euler-Bernoulli.	148
4.4. - Elementos viga y bastidor de Timoshenko.	157
4.5. - Ecuaciones necesarias.	168

CAPITULO 5. - Análisis de error del elemento finito.	
5.1. - Errores de aproximación.	174
5.2. - Diversas medidas de errores.	176
5.3. - Convergencia de la solución.	177
5.4. - Exactitud de la solución.	178
CAPITULO 6. - Solución a problemas de mecánica de materiales en una dimensión aplicando el método del elemento finito con auxilio de un programa de computadora.	188
CAPITULO 7. - Conclusiones y recomendaciones.	233
CAPITULO 8. - Bibliografía.	238
CAPITULO 9. - Listado de tablas.	239
CAPITULO 10. - Listado de figuras.	240
CAPITULO 11. - Apéndice.	242
CAPITULO 12. - Resumen autobiográfico	246

## SINTEISIS

CAPITULO 1. Se presenta una introducción al método del elemento finito, en cuanto a sus aplicaciones, ventajas con respecto a los métodos variacionales, antecedentes históricos, características distintivas, se citan algunos ejemplos y se dan a conocer los pasos fundamentales del método del elemento finito con algunas observaciones importantes.

CAPITULO 2. Se dan a conocer las formulaciones integrales y se exponen los métodos variacionales, presentando primeramente la integral pesada para la obtención de ecuaciones algebraicas, de acuerdo a los coeficientes desconocidos en la aproximación. Se construyen diferentes tipos de exposiciones integrales usadas en diferentes métodos variacionales. Se introducen terminología y anotaciones en cuanto a dominio y frontera, problemas de valor inicial y valor propio, se obtiene la fórmula para integración por partes y la forma débil. Se establece el teorema del gradiente, el teorema de la divergencia, funcionales, símbolo variacional, formulación débil en problemas de valor frontera, integral pesada y formulación débil. Se dan a conocer los pasos para la obtención de la formulación débil, las formas lineal y bilineal, las funciones cuadráticas, se presentan algunos ejemplos, se hace un análisis de los métodos variacionales de aproximación, Raileigh-Ritz, Petrov- Galerkin, cuadrado mínimo, de colocación, citando ejemplos y mostrando comparación de resultados.

CAPITULO 3. Se lleva a cabo un análisis del elemento finito en problemas de una dimensión con valor frontera de segundo orden. Se expone primero, cuándo los métodos variacionales tradicionales dejan de ser efectivos. Se dan a conocer las características que debe tener un método computacional para obtener solución a problemas, las características básicas del elemento finito, se presentan los pasos involucrados para el análisis del elemento finito de un problema, se hace un estudio en cuanto a los pasos básicos para el análisis del elemento finito, presentando un problema de valor frontera,

así como los pasos para la formulación de la ecuación modelo del problema, mediante el método del elemento finito, esto es, discretización del dominio, derivación de las ecuaciones elemento, pasos para la formulación débil, aproximación de la solución, se presentan las funciones interpolación de la familia Lagrange, y de la familia Hermite. Se analiza el método del elemento finito, la matriz de rigidez, el vector fuerza, en aplicación a problemas de mecánica de materiales (estructuras, bastidores, vigas). Se establecen las ecuaciones para elemento lineal, elemento cuadrático, la conectividad de los elementos para obtener las ecuaciones de ensamble de los elementos y las condiciones para imponer el ensamble, se resuelve un ejemplo, se indica cómo imponer las condiciones frontera en un problema, sobre la serie ensamblada de ecuaciones algebraicas. Se establecen la solución de las ecuaciones y el postprocesamiento de la solución en cuanto a la relación error-número de elementos y se hacen algunos comentarios de interés sobre los pasos descritos para el modelo de ecuación.

CAPITULO 4. En éste capítulo, se presenta un análisis de la ecuación para viga Euler-Bernoulli, la discretización del dominio, la derivación de las ecuaciones elemento, las funciones interpolación, el modelo de elemento finito para la viga Euler-Bernoulli, se da a conocer el procedimiento para el ensamble de las ecuaciones del elemento viga, la imposición de las condiciones frontera, tipos y el postprocesamiento de la solución. También se hace un análisis para estructura plana, bastidor y armazón Euler-Bernoulli para formular el elemento finito armazón y el elemento finito bastidor, basado en notación matricial. Se presenta además, las ecuaciones que rigen la teoría Timoshenko, la fórmula débil, el modelo de elemento finito, elemento de interpolación consistente CIE, elemento con igual interpolación de integración reducida (RIE), ecuaciones elemento y ecuaciones necesarias.

CAPITULO 5. El capítulo contiene la presentación de las fuentes básicas de error en la solución de una ecuación diferencial dada, dando a conocer las diferentes maneras de medir la diferencia entre dos funciones, la convergencia de la solución del elemento finito en la norma energía a la solución verdadera, la exactitud de la solución, se cita un ejemplo para estimar el error de aproximación y verificar el error estimado.



CAPITULO 6. Se plantean y resuelven problemas de mecánica de materiales en una dimensión, utilizando para ello el método del elemento finito y un programa de computadora FEM1DV2 como herramienta auxiliar para obtener la solución mediante los métodos variacionales y con el auxilio de una computadora, dando a conocer la manera de elaborar el archivo para los datos de entrada al programa de acuerdo al campo de aplicación y condiciones particulares, anexando los resultados obtenidos al correr el programa con los datos de archivo de entrada para cada problema.

CAPITULO 7. Tomando como base lo expuesto en el desarrollo de la tesis y analizando los resultados obtenidos en la solución de los problemas planteados con relación a la solución exacta que se obtendría con los métodos tradicionales se presentan conclusiones y recomendaciones para el uso del método del elemento finito y el auxilio de la computadora.

CAPITULO 8. Bibliografía utilizada como apoyo para el desarrollo de la tesis.

CAPITULO 9. Lista de tablas utilizadas en el desarrollo de la tesis y páginas de ubicación.

CAPITULO 10. Lista de figuras utilizadas en la tesis y páginas de ubicación

CAPITULO 11. En el apéndice se presenta una lista de términos y conceptos usados en el desarrollo.

CAPITULO 12. Se presenta una autobiografía del sustentante.