

CAPITULO 6

SOLUCION A PROBLEMAS DE MECANICA DE MATERIALES EN UNA DIMENSION APLICANDO EL METODO DEL ELEMENTO FINITO CON AUXILIO DE UN PROGRAMA DE COMPUTADORA.

Problema 1. Considere una viga que tiene un apoyo empotrado en un extremo y el otro apoyado en un resorte (ver fig. 6.1). Una carga transversal variando linealmente es aplicada en el tramo $4 \text{ pies} \leq x \leq 10 \text{ pies}$. Debemos usar por lo menos dos elementos así dictados por la carga. Deberá usarse un modelo de un elemento cuando la carga es distribuída.

El vector fuerza $\{f^2\}$ debido a la carga distribuída sobre el elemento 2 puede calcularse de acuerdo a (4.12 c) :

$$f_i^2 = \int_0^6 f(\bar{x})\phi_i^2(\bar{x})d\bar{x}, \quad f(\bar{x}) = -\frac{100}{6}\bar{x}$$

y ϕ_i^2 son las funciones interpolación de Hermite dadas en (4.10 a). Llevando a cabo la integración obtenemos :

$$\{f^2\} = \begin{Bmatrix} -90lb \\ 120lb - \text{pie} \\ -210lb \\ -180lb - \text{pie} \end{Bmatrix}$$

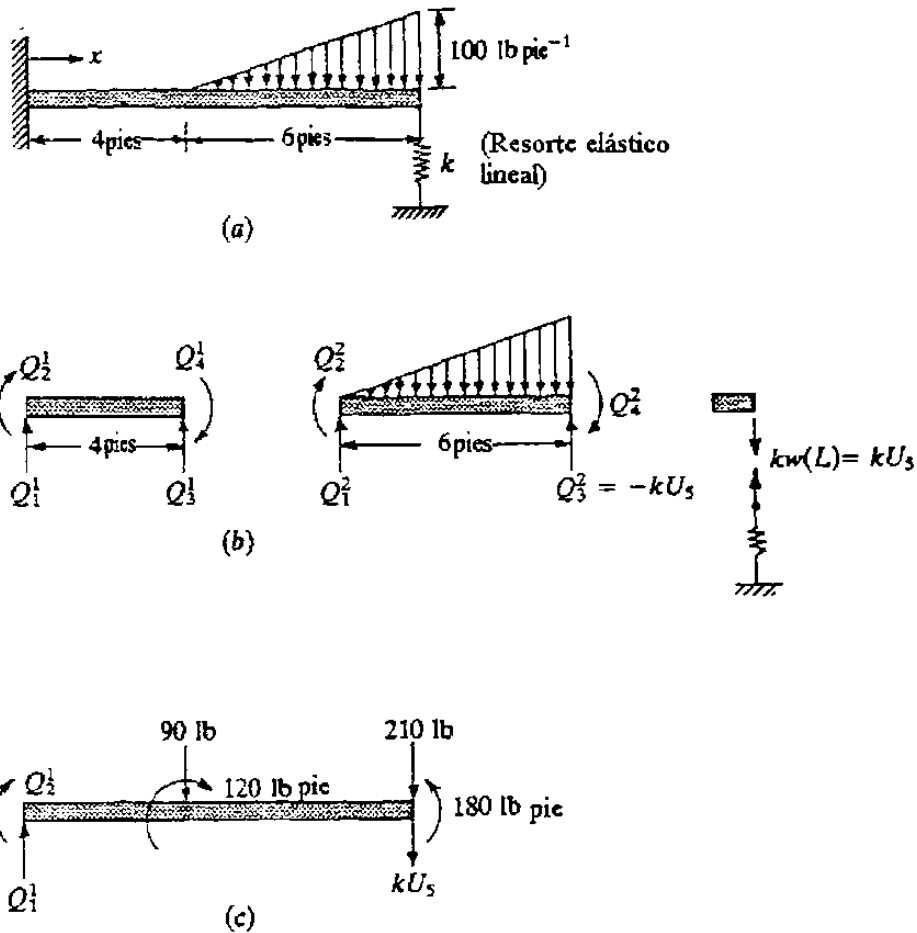


Fig. 6.1 Análisis del elemento finito de una viga cantiliver con carga discontinua; (a) problema físico; (b) discretización del elemento finito y fuerzas generalizadas del elemento; (c) ensamble del elemento finito y fuerzas generalizadas globales.

Las ecuaciones ensambladas son :

$$\frac{EI}{144} \begin{bmatrix} 27 & -54 & -27 & -54 & 0 & 0 \\ -54 & 144 & 54 & 72 & 0 & 0 \\ -27 & 54 & 27+8 & 54-24 & -8 & -24 \\ -54 & 72 & 54-24 & 144+96 & 24 & 48 \\ 0 & 0 & -8 & 24 & 8 & 24 \\ 0 & 0 & -24 & 48 & 24 & 96 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -90 \\ 120 \\ -210 \\ -180 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 \\ Q_3^1+Q_1^2 \\ Q_4^1+Q_2^2 \\ Q_3^2 \\ Q_4^2 \end{Bmatrix}$$

Las condiciones frontera de desplazamiento en $x = 0$ y las condiciones de frontera de fuerza en $x = L$ son :

$$w(0) = 0, \quad \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} = 0$$

$$\left[\frac{-d}{dx} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right]_{x=L} = -Kw(L), \quad \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=0} = 0$$

Las cuales pueden expresarse en términos de los grados de libertad nodales, como :

$$U_1 = 0, U_2 = 0, Q_3^2 = -KU_5, Q_4^2 = 0$$

Las ecuaciones condensadas para los desplazamientos generalizados U_3, U_4, U_5, U_6 están dadas por las últimas cuatro ecuaciones ensambladas.

$$\frac{EI}{144} \begin{bmatrix} 35 & 30 & -8 & -24 \\ 30 & 240 & 24 & 48 \\ -8 & 24 & 8+c & 24 \\ -24 & 48 & 24 & 96 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -90 \\ 120 \\ -210 \\ -180 \end{Bmatrix}$$

Donde $c = \frac{144K}{EI}$. La solución de esas ecuaciones para valores diferentes de $\frac{K}{EI}$ pueden calcularse como sigue :

Para $\frac{K}{EI} = 0$ (no resorte),

$$U_3 = \frac{-0.16 \times 10^5}{EI} (\text{pies}), \quad U_4 = \frac{0.72 \times 10^4}{EI} (\text{rad.})$$

$$U_5 = \frac{-0.7108 \times 10^5}{EI} (\text{pies}), \quad U_6 = \frac{0.99 \times 10^4}{EI} (\text{rad.})$$

Para $\frac{K}{EI} = 10^{-2}$ (un resorte suave),

$$U_3 = \frac{-0.4627 \times 10^4}{EI} (\text{pies}), \quad U_4 = \frac{0.1951 \times 10^4}{EI} (\text{rad.})$$

$$U_5 = \frac{-0.164 \times 10^5}{EI} (\text{pies}), \quad U_6 = \frac{0.1699 \times 10^4}{EI} (\text{rad.})$$

Para $\frac{K}{EI} = 10^2$ (un resorte duro)

$$U_3 = \frac{-0.1216 \times 10^4}{EI} (\text{pies}), \quad U_4 = \frac{0.3765 \times 10^3}{EI} (\text{rad})$$

$$U_5 = \frac{-2.132}{EI} (\text{pies}), \quad U_6 = \frac{-0.7617 \times 10^3}{EI} (\text{rad})$$

Las soluciones coinciden con la solución exacta en los nodos :

$$w(x) = \begin{cases} \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{6} R_1 x^3 + \frac{1}{2} M_1 x^2 \right) & \text{para } 0 \leq x \leq a \\ \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{6} R_1 x^3 + \frac{1}{2} M_1 x^2 - \frac{f_0}{120b} (x-a)^5 \right] & \text{para } a \leq x \leq L \end{cases}$$

Donde

$$R_1 = \left(\frac{f_0 b}{40} \right) \frac{60EI + 10KL^2 b - Kb^3}{2EI + KL^3}, \quad M_1 = \frac{1}{6} f_0 b^2 - R_1 L$$

$$f_0 = 100 \text{ lb pie}^{-1}, \quad a = 4 \text{ pies}, \quad b = 6 \text{ pies}, \quad L = 10 \text{ pies}$$

La figura 6.2 muestra gráficas de deflexión transversal, pendiente y momento de flexión para el caso $\frac{K}{EI} = 100$, la solución de elemento finito obtenida usando dos elementos es una buena concordancia con la solución exacta.

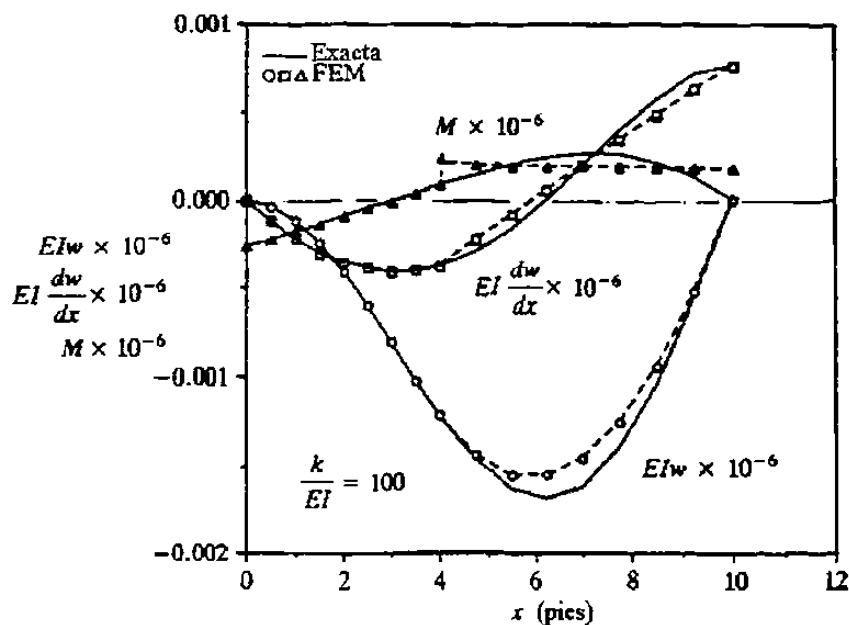


Figura 6.2 Comparación de las soluciones de elemento finito con las soluciones exactas para una viga en cantiliver apoyada en resorte.

Pueden esperarse mejoras si la región $4 \text{ pies} \leq x \leq 10 \text{ pies}$ es subdividida en dos o más elementos (notar que la escala particular usada en la figura 6.2 muestra la diferencia entre las soluciones del elemento finito y exacta). El efecto del resorte sobre la deflexión $w(L)$ en un extremo, el momento de flexión $M(0)$ en el extremo empotrado, y la fuerza del resorte $Q \equiv Q_3^2 = -Kw(L)$ se pueden ver en la figura 6.3.

Para $\frac{K}{EI} > 1$, el resorte actúa esencialmente como un apoyo rígido.

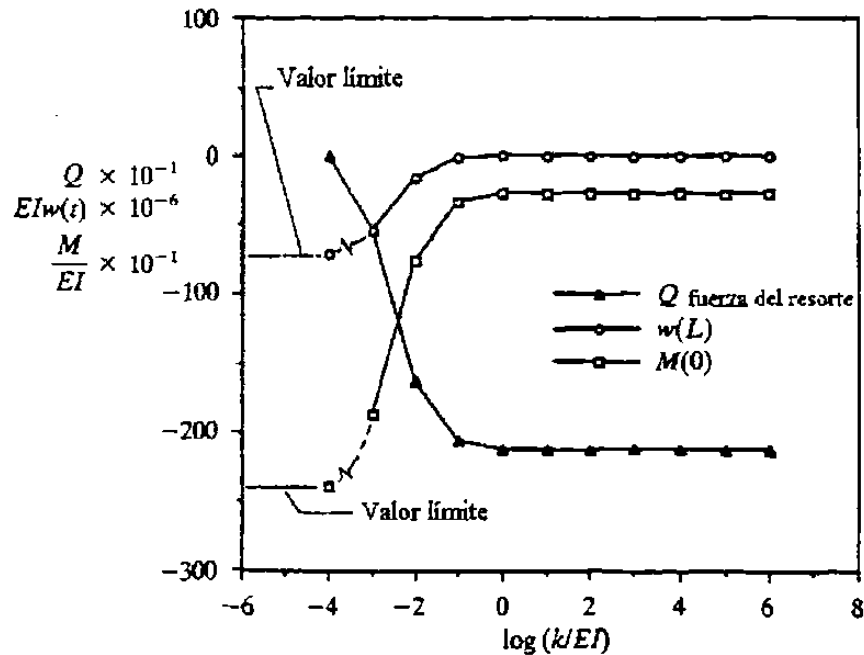


Figura 6.3 El efecto de la rigidez del resorte sobre la deflexión, momento flexionante, y fuerza del resorte para el problema.

Este problema puede resolverse con la ayuda de un programa de computadora FEM1DV2.

Antes de ver su aplicación considero necesario dar a conocer mas información con respecto a crear el archivo de entrada en el programa, esto es , tener información en cuanto al significado de algunas variables del programa, AX0, AX1,.....para varios campos de problemas.

En la tabla 6.1 los subíndices 0,1 y 2 en las variables representan a los coeficientes constantes lineal y cuadrático de las variables [esto es, f_0, f_1 y f_2 representan los coeficientes en $f(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2$].

PARA CONSULTA EN LA TABLA 6.1.

Campo del
Problema

1. Pared plana
2. Aleta inter-
cambiadora
de calor
3. Transferencia
de calor radial-
mente simétrica
4. Flujo viscoso
en canales
5. Flujo viscoso
en tubos
6. Filtración una
dirección
7. Filtración radial
simétrico
8. Deformación axial
de barra
9. Deformación radial
simétrica de disco
(esfuerzo plano)
10. Deformación radial
simétrica cilindro
(deformación plana)
11. Teoría viga Euler
Bernoulli
12. Teoría Euler –Bernoulli

- placas circulares
13. Teoría de viga
Timoshenko (RIE)
 14. Teoría de viga
Timoshenko (CIE)
 15. Teoría Timoshenko
placas circulares (RIE)
 16. Teoría Timoshenko
placas circulares (CIE)
 17. Armazón
 18. Elemento bastidor
Euler- Bernoulli
 19. Elemento bastidor
Timoshenko

Para los campos 17-19, los parámetros AX0, AX1, BX0, BX1, CX0, CX1, FX0, FX1, FX2, CT0, CT1, no se leen; en su lugar, E= SE, A= SA, L= SL, y son leídos para cada miembro de la estructura: SE= módulo E, SA= Area de sección transversal SI=Momento de inercia I, SL= Longitud L del miembro, CN= $\cos \alpha$ SN= $\sin \alpha$

ITEM – Para variables dependientes del tiempo solamente; cuando se requieren soluciones de estado estable, ITEM = 0.

CT0 y CT1 – Para análisis transitorio solamente; la opción de análisis no transitorio es incluida para problemas de armazón y bastidor.

TABLA 6.1
Variables del programa, para diferentes campos de problemas

Campo	MODEL	NTYPE	ITEM:	AX0	AX1	BX0	BX1	CX0	CX1	FX0	FX1	FX2	CTD:	CTI:
1.	1	0	1	k_0	k_1	0.0	0.0	0.0	0.0	f_0	f_1	f_2	ρ_0	ρ_1
2.	1	0	1	$(kA)_0$	$(kA)_1$	0.0	0.0	c_0	c_1	f_0	f_1	f_2	ρ_0	ρ_1
3.	1	0	1	0.0	k_1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	f_1	f_2	0.0	ρ_1
4.	1	0	1	μ_0	μ_1	0.0	0.0	0.0	0.0	f_0	f_1	f_2	ρ_0	ρ_1
5.	1	0	1	0.0	μ_1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	f_1	f_2	0.0	ρ_1
6.	1	0	1	μ_0	μ_1	0.0	0.0	0.0	0.0	f_0	f_1	f_2	ρ_0	ρ_1
7.	1	0	1	0.0	μ_1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	f_1	f_2	0.0	ρ_1
8.	1	0	2	$(AE)_0$	$(AE)_1$	0.0	0.0	c_0	c_1	f_0	f_1	f_2	$(\rho A)_0$	$(\rho A)_1$
9.	1	1	2	E_1	E_2	ν_{12}	H	c_0	c_1	f_0	f_1	f_2	$(\rho A)_0$	$(\rho A)_1$
10.	1	2	2	E_1	E_2	ν_{12}	H	c_0	c_1	f_0	f_1	f_2	$(\rho A)_0$	$(\rho A)_1$
11.	3	0	2	0.0	0.0	$(EJ)_0$	$(EJ)_1$	c_0	c_1	f_0	f_1	f_2	ρA	ρI
12.	3	1	2	E_1	E_2	ν_{12}	H	c_0	c_1	f_0	f_1	f_2	ρA	ρI
13.	2	0	2	$(GAK)_0$	$(GAK)_1$	$(EJ)_0$	$(EJ)_1$	c_0	c_1	f_0	f_1	f_2	ρA	ρI
14.	2	2	2	$(GAK)_0$	$(GAK)_1$	$(EJ)_0$	$(EJ)_1$	c_0	c_1	f_0	f_1	f_2	ρA	ρI
15.	2	1	2	E_1	E_2	ν_{12}	H	c_0	c_1	f_0	f_1	G_{13}	ρA	ρI
16.	2	3	2	E_1	E_2	ν_{12}	H	c_0	c_1	f_0	f_1	G_{13}	ρA	ρI
17.	4	0	0											
18.	4	1	0											
19.	4	2	0											

TABLA 6.2
Descripción de las variables de entrada al programa FEM1DV2

- Tarjeta de datos 1 :

TITLE - Título del problema a resolver (ochenta caracteres)

NTYPE - Tipo de problema a resolver

MODEL = 1 , NTYPE = 0 : Problema de modelo de ecuación 1

MODEL = 1 , NTYPE = 1 : DISCO CIRCULAR (esfuerzo plano)

MODEL = 1 , NTYPE > 1 : DISCO CIRCULAR (deformación plana)

MODEL = 2 , NTYPE = 0 : Viga Timoshenko (RIE #)

MODEL = 2 , NTYPE = 1 : Placa Timoshenko (RIE)

MODEL = 2 , NTYPE = 2 : Viga Timoshenko (CIE ##)

MODEL = 2 , NTYPE > 2 : Placa Timoshenko (CIE)

MODEL = 3 , NTYPE = 0 : Viga Euler – Bernoulli

MODEL = 3 , NTYPE > 0 : Placa circular Euler – Bernoulli

MODEL = 4 , NTYPE = 0 : Armazón plana

MODEL = 4 , NTYPE = 1 : Bastidor Euler – Bernoulli

MODEL = 4 , NTYPE = 2 : Bastidor Timoshenko (CIE)

- Elemento de integración reducida (RIE)

- Elemento de interpolación consistente (CIE)

ITEM – Indicador para análisis transitorio

ITEM = 0 , Solución en estado estable

ITEM = 1 , Análisis transitorio de ecuaciones parabólicas

ITEM = 2 , Análisis transitorio de ecuaciones hiperbólicas

ITEM = 3 , Análisis de valor propio

- Tarjeta de datos 3 :

IELEM - Tipo de elemento finito

IELEM = 0 , Elemento finito cúbico Hermite

IELEM = 1 , Elemento finito lineal Lagrange

IELEM = 2 , Elemento finito cuadrático Lagrange

NEM – Número de elementos en la malla

- Tarjeta de datos 4 :

ICONT – Indicador de continuidad de datos para el problema :

ICONT = 1 , Datos (AX,BX, CX,EX y malla) son continuos

ICONT = 0 , Dato es elemento dependiente

- NPRNT – Indicador para imprimir matrices de elemento global
- NPRNT = 0 , - No imprime matrices elemento o global pero post procesa solución e imprime
- NPRNT = 1 , Imprime la matriz coeficiente del elemento 1, solo postprocesa la solución e imprime
- NPRNT =2 , Imprime las matrices del elemento 1 y global, pero no postprocesa la solución
- NPRNT > 2, No imprime las matrices de elemento ó global y no postprocesa la solución

Brincar tarjeta 5 hasta la 15 para problemas bastidor/ armazón (MODEL =4), y lea las tarjetas 5 a la 15 solo si MODEL no es igual a 4. Brincar tarjetas de la 5 a la 9 si los datos son discontinuos (ICONT = 0)

* Tarjeta de datos 5 :

DX(I) – Arreglo de longitudes del elemento. DX(1) representa la coordenada global del nodo 1 de la malla; DX(I) (I= 2, NEM 1) representa la longitud del elemento (I -1). Aquí NEM 1 = NEM + 1 , y NEM = número de elementos en la malla.

Las tarjetas 6 a la 9 definen los coeficientes en las ecuaciones modelo. Todos los coeficientes están expresados en términos de la coordenada global x. Ver la tabla 6.1 para el significado de los coeficientes, especialmente para deformación de placas circulares y elementos Timoshenko.

* Tarjeta de datos 6 :

AX0 – Término constante del coeficiente AX

AX1 – Término lineal del coeficiente AX

• Tarjeta de datos 7 :

BX0 – Término constante del coeficiente BX

BX1 – Término lineal del coeficiente BX

• Tarjeta de datos 8 :

CX0 – Término constante del coeficiente CX

CX1 – Término lineal del coeficiente CX

Brincar tarjeta 9 para problemas de valor propio (ITEM = 3)

• Tarjeta de datos 9:

- FX0 – Término constante del coeficiente FX
- FX1 – Término lineal del coeficiente FX
- FX2 – Término cuadrático del coeficiente FX

Brincar tarjetas de la 10 a la 15 si los datos son continuos (ICONT NO ES CERO).
 Tarjetas de la 10 a la 15 se leen para cada elemento (esto es NEM veces). Todos los coeficientes están expresados en términos de coordenada global.

- Tarjeta de datos 10 :
 { GLX } - Coordenada global x del primero y último nodos del elemento
- Tarjeta de datos 11 :
 { NOD } - Conectividad del elemento :
 $NOD(N, I) =$ Número de nodo global correspondiente al I - Th nodo del elemento
 $N(I = 1, NPE)$
 NPE representa al número de nodos por elemento
- Tarjeta de datos 12 :
 { DCAX } - Términos constante y lineal del coeficiente AX
- Tarjeta de datos 13 :
 { DCBX } - Términos constante y lineal del coeficiente BX
- Tarjeta de datos 14 :
 { DCCX } - Términos constante y lineal del coeficiente CX
- Tarjeta de datos 15 :
 { DCFX } - Términos constante, lineal y cuadrático de FX
 Lea tarjetas 16 a 21 para problemas armazón / bastidor (MODEL = 4)
 Brincar tarjetas 16 a 21 si MODEL no es igual a 4
- Tarjeta de datos 16 :
 NNM – Número de nodos en la malla del elemento finito
 Brincar tarjetas de la 17 a la 19 para problemas armazón (NTYPE = 0).
 Las tarjetas 17 a 19 se leen para cada elemento, esto es NEM veces
- Tarjeta de datos 17 :
 PR – Razón de Poissón del material #

- SE – Módulo de Young's del material
- SL – Longitud del elemento
- SA – Area seccional transversal del elemento
- SI – Momento de inercia del elemento
- CS – Coseno del ángulo de orientación del elemento
- SN – Seno del ángulo de orientación del elemento.

El ángulo se mide en contra de las manecillas del reloj desde el eje x.

#PR no se usa para el elemento Euler – Bernoulli

- Tarjeta de datos 18 :

- HF – Intensidad de la fuerza horizontal distribuida
- VF – Intensidad de la fuerza transversalmente distribuida
- PF – Carga punto del elemento
- XB – Distancia desde el nodo 1, a lo largo de la longitud del elemento hasta el punto de aplicación de la carga, PF.
- CNT – Coseno del ángulo de orientación de la carga PF
- SNT – Seno del ángulo de orientación de la carga PF.

El ángulo se mide en sentido contrario a las manecillas del reloj desde el eje x del elemento.

- Tarjeta de datos 19 :

{ NOD } - Conectividad del elemento.

$NOD(N, I) =$ Número de nodo global correspondiente al nodo I-Th del elemento N($I = 1, NPE$)

Leer tarjetas 20 y 21 solo para problemas de armazón ($NTYPE = 0$). Las tarjetas 20 y 21 se leen para cada elemento, esto es NEM veces.

- * Tarjeta de datos 20 :

- SE – Módulo de Young's del material
- SL – Longitud del elemento
- SA – Area seccional transversal del elemento
- CS – Coseno del ángulo de orientación del elemento
- SN – Seno del ángulo de orientación del elemento.

El ángulo se mide en sentido contrario a las manecillas del reloj desde el eje x.

HF – Intensidad de la fuerza horizontal distribuida

* Tarjeta de datos 21 :

{ NOD } - Conectividad del elemento:

$NOD(N, I) =$ Número de nodo global correspondiente al I-Th nodo del elemento N ($I = 1, NPE$)

• Tarjeta de datos 22 :

NSPV – Número de variables primarias especificadas.

Brincar tarjeta 23 si no se especifican variables primarias (NSPV = 0).

Repita la tarjeta 23 NSPV veces

• Tarjeta de datos 23 : ($I = 1$ a NSPV)

$ISPV(I, 1) =$ Número de nodo en el cual se especifica PV

$ISPV(I, 2) =$ DOF primario local especificado en el nodo

$VSPV(I) =$ valor especificado de la variable primaria (PV).

(No se leerá para problemas de valor propio)

Brincar tarjeta 24 para problema de valor propio (ITEM = 3)

• Tarjeta de datos 24 :

NSSV – Número de variables secundarias especificadas (no cero).

Brincar tarjeta 25 si no se especifica variable secundaria (NSSV = 0).

Repetir tarjeta 25 , NSSV veces

* Tarjeta de datos 25 : ($I = 1$ a NSSV)

$ISSV(I, 1) =$ Número de nodo en el cual se especifica la variable secundaria

$ISSV(I, 2) =$ DOF secundario local especificado en el nodo

$VSSV(I) =$ Valor especificado de la variable secundaria (PV)

• Tarjeta de datos 26 :

NNBC – Número de las condiciones frontera de Newton (mezclado)

Brincar la tarjeta 27 si no se especifica condición frontera mezclada, (NNBC = 0).

La condición de frontera mezclada se supone es de la forma:

$SV + VNBC * (PV - UREF) = 0$. Repetir la tarjeta 28 NNBC veces.

• Tarjeta de datos 27 : ($I = 1$ a NNBC)

$INBC (I, 1) =$ Número de nodo en el cual se especifica la B.C mezclada

$INBC (I, 2) =$ DOF local de la PV y de la SV en el nodo

$VNBC (I) =$ Valor del coeficiente de la PV en el BC.

$UREF (I) =$ Valor de referencia de la PV

Brincar la tarjeta 28 si $ITEM = 0$ (leerla solamente para problemas de valor propio)

- Tarjeta de datos 28 :

$CT0 -$ Parte constante de $CT = CT0 + CT1 * X$

$CT1 -$ Parte lineal de $CT = CT0 + * X$

Brincar las tarjetas remanentes para análisis en estado estable ó valor propio

($ITEM = 0$ ó $ITEM = 3$)

- Tarjeta de datos 29 :

$DT -$ Incremento en el tiempo (uniforme)

$ALFA -$ Parámetro en el esquema aproximación tiempo

$BETA -$ Parámetro en el esquema aproximación tiempo

- * Tarjeta de datos 30 :

$INCOND -$ Indicador para condiciones iniciales

$INCOND = 0$, Condiciones iniciales homogéneas (cero)

$INCOND > 0$, Condiciones iniciales no homogéneas

$NTIME -$ Número de pasos tiempo para el cual es vista la solución

$INTVL -$ Intervalos en los cuales se imprime la solución

Brincar las tarjetas 31 y 32 si las condiciones iniciales son cero ($INCOND = 0$)

- Tarjeta de datos 31 :

$\{ GU0 \} -$ Arreglo de valores iniciales de las variables primarias

Brincar la tarjeta 32 para ecuaciones parabólicas ($ITEM = 1$)

- Tarjeta de datos 32 :

$\{ GUI \} -$ Arreglo de valores iniciales de la primera derivada en tiempo de las variables primarias.

SOLUCION DEL PROBLEMA 1 CON AUXILIO

DE UN PROGRAMA DE COMPUTADORA
FEM1DV2

Resolveremos el problema usando el elemento viga Euler – Bernoulli
(MODEL =3, NTYPE = 0, IELEM = 0).

Ya que la carga es discontinua, hacemos ICONT = 0. Se requieren por lo menos dos elementos para el modelo del problema (NEM = 2).

Si consideramos $EI = 1.0E6$ (10^6 lb pie²) entonces:

$$GAK = \frac{E}{2(1+\nu)} BH \frac{5}{6} = \frac{EI}{1+\nu} \frac{5}{H^2}$$

Para $L / H = 10$, Tenemos $H = 1.0$ debido a que $L = 10$ pies.

Para la selección $\nu = 0.25$ tenemos:

$$GAK = 4 EI / H^2 = 4 \times 10^6 \text{ lb}$$

Luego, usamos:

$$AX0 = 0.0, AX1 = 0.0, BX0 (= EI) = 1.0E6$$

$$BX1 = 0.0, CX0 = 0.0, CX1 = 0.0$$

La carga transversal distribuida es cero en el elemento 1, y es $f(x) = -\frac{100}{6}(x - 4)$

en el elemento 2.

De aquí,

$$FX0 = 0.0, FX1 = 0.0, FX2 = 0.0 \text{ en el elemento 1}$$

$$FX0 = 66.666, FX1 = -16.666, FX2 = 0.0 \text{ en el elemento 2.}$$

Las coordenadas globales de los nodos y la matriz de conectividad, dependerá de cada elemento y de la geometría, obviamente.

Para el elemento viga Euler – Bernoulli , el número de nodos es siempre igual a 2
(NPE=2)

Las condiciones frontera para el problema son :

Las condiciones frontera para el problema son :

$$w(0) = 0, \quad \left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=0} = 0, \quad (V + kw)_{x=L} = 0$$

Por lo tanto tenemos (NSSV = 0)

$$\text{NSPV} = 2, \quad \text{ISPV} (1, 1) = 1, \quad \text{ISPV} (1, 2) = 1, \quad \text{VSPV} (1) = 0.0$$

$$\text{ISPV} (2, 1) = 1, \quad \text{ISPV} (2, 2) = 2, \quad \text{VSPV} (2) = 0.0$$

$$\text{NNBC} = 1, \quad \text{INBC} (1, 1) = 3, \quad \text{INBC} (1, 2) = 1$$

$$\text{VNBC} (1) (=K) = 1,0\text{E}6 \quad (\text{Para } K/EI = 1) \text{ y } 0.0 \quad (\text{Para } k = 0.0)$$

$$\text{UREF} (1) = 0.0$$

En la tabla 6.3 se pueden observar los datos para el archivo de entrada para el elemento Euler – Bernoulli, notar que el elemento es un elemento cúbico Hermite.

TABLA 6.3
ARCHIVO: DATOS DE ENTRADA

Problema 1:Viga empotrada y apoyada en resorte (ELEMENTO E-B;K=1.0E4)

```

3  0      0
0  2
0  1
   0.0    4.0
   1      2
   0.0    0.0
  1.0E6   0.0
   0.0    0.0
   0.0    0.0      0.0
   4.0    10.0
   2      3
   0.0    0.0
  1.0E6   0.0
   0.0    0.0
  66.666667      -16.666667  0.0
2
1  1      0.0
1  2      0.0
0
1
3  1      1.0E04  0.0
MODEL, NTYPE, ITEM
IELEM, NEM
ICONT, NPRNT
GLX(I)
NOD(1,J)
AX0, AX1
BX0, BX1
CX0, CX1
FX0, FX1, FX2
GLX(I)
NOD(2,J)
AX0, AX1
BX0, BX1
CX0, CX1
FX0, FX1, FX2
NSPV
ISPV(1,J), VSPV(1)
ISPV(2,J), VSPV(2)
NSSV
NNBC (con resorte transversal)
Datos para
elemento 1
Datos para
elemento 2

```

Con los datos de archivo de entrada se procede a correr el programa obteniendo los siguientes resultados:

*** ECHO OF THE INPUT DATA STARTS ***

Problema 1:Viga empotrada y apoyada en resorte (ELEMENTO E-B;K=1.0E4)

```

3  0      0
0  2
0  1
   0.0    4.0
   1      2
   0.0    0.0
  1.0E6   0.0
   0.0    0.0
   0.0    0.0      0.0
   4.0    10.0
   2      3
   0.0    0.0
  1.0E6   0.0
   0.0    0.0
  66.666667      -16.666667  0.0
2
1  1      0.0
1  2      0.0
0
1
3  1      1.0E04  0.0
MODEL, NTYPE, ITEM
IELEM, NEM
ICONT, NPRNT
GLX(I)
NOD(1,J)
AX0, AX1
BX0, BX1
CX0, CX1
FX0, FX1, FX2
GLX(I)
NOD(2,J)
AX0, AX1
BX0, BX1
CX0, CX1
FX0, FX1, FX2
NSPV
ISPV(1,J), VSPV(1)
ISPV(2,J), VSPV(2)
NSSV
NNBC (con resorte transversal)
Datos para
elemento 1
Datos para
elemento 2

```

**** ECHO OF THE INPUT DATA ENDS ****

OUTPUT FROM PROGRAM FEM1DV2.1 BY J. N. REDDY

Problema 1:Viga empotrada y apoyada en resorte (ELEMENTO E-B;K=1.0E4)

*** ANALYSIS OF MODEL 3, AND TYPE 0 PROBLEM ***
(see the code below)

MODEL=1,NTYPE=0: A problem described by MODEL EQ. 1
 MODEL=1,NTYPE=1: A circular DISK (PLANE STRESS)
 MODEL=1,NTYPE>1: A circular DISK (PLANE STRAIN)
 MODEL=2,NTYPE=0: A Timoshenko BEAM (RIE) problem
 MODEL=2,NTYPE=1: A Timoshenko PLATE (RIE) problem
 MODEL=2,NTYPE=2: A Timoshenko BEAM (CIE) problem
 MODEL=2,NTYPE>2: A Timoshenko PLATE (CIE) problem
 MODEL=3,NTYPE=0: A Euler-Bernoulli BEAM problem
 MODEL=3,NTYPE>0: A Euler-Bernoulli Circular plate
 MODEL=4,NTYPE=0: A plane TRUSS problem
 MODEL=4,NTYPE=1: A Euler-Bernoulli FRAME problem
 MODEL=4,NTYPE=2: A Timoshenko (CIE) FRAME problem

Element type (0, Hermite,>0, Lagrange)..= 0
 No. of deg. of freedom per node, NDF....= 2
 No. of elements in the mesh, NEM.....= 2
 No. of total DOF in the model, NEQ.....= 6
 No. of specified primary DOF, NSPV.....= 2
 No. of specified secondary DOF, NSSV....= 0
 No. of specified Newton B. C.: NNBC.....= 1

Boundary information on primary variables:

1	1	.00000E+00
1	2	.00000E+00

Boundary information on mixed boundary cond.:

3	1	.10000E+05	.00000E+00
---	---	------------	------------

Properties of Element = 1

XA =	.0000E+00	XB =	.4000E+01	
AX0 =	.0000E+00	AX1 =	.0000E+00	
BX0 =	.1000E+07	BX1 =	.0000E+00	
CX0 =	.0000E+00	CX1 =	.0000E+00	
FX0 =	.0000E+00	FX1 =	.0000E+00	FX2 = .0000E+00

Properties of Element = 2

XA =	.4000E+01	XB =	.1000E+02	
AX0 =	.0000E+00	AX1 =	.0000E+00	
BX0 =	.1000E+07	BX1 =	.0000E+00	
CX0 =	.0000E+00	CX1 =	.0000E+00	
FX0 =	.6667E+02	FX1 =	-.1667E+02	FX2 = .0000E+00

Element coefficient matrix, [ELK]:

```
.18750E+06  -.37500E+06  -.18750E+06  -.37500E+06
-.37500E+06  .10000E+07  .37500E+06  .50000E+06
-.18750E+06  .37500E+06  .18750E+06  .37500E+06
-.37500E+06  .50000E+06  .37500E+06  .10000E+07
```

Element source vector, {ELF):

```
.00000E+00  .00000E+00  .00000E+00  .00000E+00
```

SOLUTION (values of PVs) at the NODES:

```
.00000E+00  .00000E+00  -.46272E-02  .19510E-02  -.16403E-01
.16985E-02
```

X	Deflect.	Rotation	B. Moment	Shear Force
.00000E+00	.00000E+00	.00000E+00	-.75969E+03	.13597E+03
.50000E+00	-.92129E-04	.36285E-03	-.69171E+03	.13597E+03
.10000E+01	-.35718E-03	.69171E-03	-.62372E+03	.13597E+03
.15000E+01	-.77817E-03	.98657E-03	-.55574E+03	.13597E+03
.20000E+01	-.13381E-02	.12474E-02	-.48775E+03	.13597E+03
.25000E+01	-.20200E-02	.14743E-02	-.41977E+03	.13597E+03
.30000E+01	-.28068E-02	.16672E-02	-.35178E+03	.13597E+03
.35000E+01	-.36815E-02	.18261E-02	-.28380E+03	.13597E+03
.40000E+01	-.46272E-02	.19510E-02	-.21582E+03	.13597E+03
.40000E+01	-.46272E-02	.19510E-02	-.95815E+02	.45969E+02
.47500E+01	-.61142E-02	.20099E-02	-.61338E+02	.45969E+02
.55000E+01	-.76357E-02	.20430E-02	-.26862E+02	.45969E+02
.62500E+01	-.91722E-02	.20502E-02	.76154E+01	.45969E+02
.70000E+01	-.10705E-01	.20316E-02	.42092E+02	.45969E+02
.77500E+01	-.12213E-01	.19871E-02	.76569E+02	.45969E+02
.85000E+01	-.13679E-01	.19167E-02	.11105E+03	.45969E+02
.92500E+01	-.15082E-01	.18205E-02	.14552E+03	.45969E+02
.10000E+02	-.16403E-01	.16985E-02	.18000E+03	.45969E+02

El mismo problema se puede resolver considerando un elemento viga Timoshenko
 MODEL=2, NTYPE=0, ó 2, IELEM=1, 2 ó 3

$$AX0(=GAK) = 4.0EG, AX1=0.0, BX0(=EI) = 1.0EG$$

$$BX1=0.0, CX0= 0.0 CX1= 0.0$$

Para el elemento viga Timoshenko, el número de nodos depende del grado de interpolación (ó tipo de elemento) seleccionado: $NPE = IELEM + 1$.

La tabla 6.4 muestra los datos de entrada para el elemento Timoshenko el cual es lineal Lagrange.

TABLA 6.4

ARCHIVO DE DATOS DE ENTRADA PROBLEMA 1 TIMOSHENKO

Problema 1:Viga empotrada y apoyada en resorte (ELEMENTO TIM;K=1.0E4)

```

2  0  0
1  2
0  1
   0.0  4.0
   1  2
   4.0E6  0.0
   1.0E6  0.0
   0.0  0.0
   0.0  0.0  0.0
   4.0  10.0
   2  3
   4.0E6  0.0
   1.0E6  0.0
   0.0  0.0
   66.666667  -16.666667  0.0
2
1  1  0.0
1  2  0.0
0
1
3  1  1.0E04  0.0
MODEL, NTYPE, ITEM
IELEM, NEM
ICONT, NPRNT
GLX(I)
NOD(1,J)
AX0, AX1
BX0, BX1
CX0, CX1
FX0, FX1, FX2
GLX(I)
NOD(2,J)
AX0, AX1
BX0, BX1
CX0, CX1
FX0, FX1, FX2
NSPV
ISPV(1,J), VSPV(1)
ISPV(2,J), VSPV(2)
NSSV
NNBC (con resorte transversal)
INBC(1,J), VNBC(1), UREF(1)
Datos para
elemento 1
Datos para
elemento 2

```

Alimentando estos datos en el programa de computadora FEM1DV2 obtenemos los siguientes resultados:

```

*** ECHO OF THE INPUT DATA STARTS ***

Problema 1:Viga empotrada y apoyada en resorte (ELEMENTO TIM;K=1.0E4)

2  0  0
1  2
0  1
   0.0  4.0
   1  2
   4.0E6  0.0
   1.0E6  0.0
   0.0  0.0
   0.0  0.0  0.0
   4.0  10.0
   2  3
   4.0E6  0.0
   1.0E6  0.0
   0.0  0.0
   66.666667  -16.666667  0.0
2
1  1  0.0
1  2  0.0
0
1
3  1  1.0E04  0.0
MODEL, NTYPE, ITEM
IELEM, NEM
ICONT, NPRNT
GLX(I)
NOD(1,J)
AX0, AX1
BX0, BX1
CX0, CX1
FX0, FX1, FX2
GLX(I)
NOD(2,J)
AX0, AX1
BX0, BX1
CX0, CX1
FX0, FX1, FX2
NSPV
ISPV(1,J), VSPV(1)
ISPV(2,J), VSPV(2)
NSSV
NNBC (con resorte transversal)
INBC(1,J), VNBC(1), UREF(1)
Datos para
elemento 1
Datos para
elemento 2

```

```

1  1      0.0      ISPV(1,J), VSPV(1)
1  2      0.0      ISPV(2,J), VSPV(2)
0                                NSSV
1                                NNBC      (con resorte transversal)
3  1      1.0E04   0.0      INBC(1,J), VNBC(1), UREF(1)

```

**** ECHO OF THE INPUT DATA ENDS ****

OUTPUT FROM PROGRAM FEM1DV2.1 BY J. N. REDDY

Problema 1:Viga empotrada y apoyada en resorte (ELEMENTO TIM;K=1.0E4)

*** ANALYSIS OF MODEL 2, AND TYPE 0 PROBLEM ***
(see the code below)

```

MODEL=1,NTYPE=0: A problem described by MODEL.EQ. 1
MODEL=1,NTYPE=1: A circular DISK (PLANE STRESS)
MODEL=1,NTYPE>1: A circular DISK (PLANE STRAIN)
MODEL=2,NTYPE=0: A Timoshenko BEAM (RIE) problem
MODEL=2,NTYPE=1: A Timoshenko PLATE (RIE) problem
MODEL=2,NTYPE=2: A Timoshenko BEAM (CIE) problem
MODEL=2,NTYPE>2: A Timoshenko PLATE (CIE) problem
MODEL=3,NTYPE=0: A Euler-Bernoulli BEAM problem
MODEL=3,NTYPE>0: A Euler-Bernoulli Circular plate
MODEL=4,NTYPE=0: A plane TRUSS problem
MODEL=4,NTYPE=1: A Euler-Bernoulli FRAME problem
MODEL=4,NTYPE=2: A Timoshenko (CIE) FRAME problem

```

```

Element type (0, Hermite,>0, Lagrange)..= 1
No. of deg. of freedom per node, NDF....= 2
No. of elements in the mesh, NEM.....= 2
No. of total DOF in the model, NEQ.....= 6
No. of specified primary DOF, NSPV.....= 2
No. of specified secondary DOF, NSSV....= 0
No. of specified Newton B. C.: NNBC.....= 1

```

Boundary information on primary variables:

```

1  1      .00000E+00
1  2      .00000E+00

```

Boundary information on mixed boundary cond.:

```

3  1      .10000E+05      .00000E+00

```

Properties of Element = 1

```

XA = .0000E+00      XB = .4000E+01
AX0 = .4000E+07      AX1 = .0000E+00
BX0 = .1000E+07      BX1 = .0000E+00
CX0 = .0000E+00      CX1 = .0000E+00
FX0 = .0000E+00      FX1 = .0000E+00      FX2 = .0000E+00

```

Properties of Element = 2

XA = .4000E+01 XB = .1000E+02
 AX0 = .4000E+07 AX1 = .0000E+00
 BX0 = .1000E+07 BX1 = .0000E+00
 CX0 = .0000E+00 CX1 = .0000E+00
 FX0 = .6667E+02 FX1 = -.1667E+02 FX2 = .0000E+00

Element coefficient matrix, [ELK]:

.10000E+07 -2.0000E+07 -1.0000E+07 -2.0000E+07
 -2.0000E+07 .42500E+07 .20000E+07 .37500E+07
 -1.0000E+07 .20000E+07 .10000E+07 .20000E+07
 -2.0000E+07 .37500E+07 .20000E+07 .42500E+07

Element source vector, {ELF}:

.00000E+00 .00000E+00 .00000E+00 .00000E+00

SOLUTION (values of PVs) at the NODES:

.00000E+00 .00000E+00 -.38273E-02 .18473E-02 -.16727E-01
 .24364E-02

X	Deflect.	Rotation	B. Moment	Shear Force
.00000E+00	.00000E+00	.00000E+00	-.46182E+03	.38273E+04
.50000E+00	-.47841E-03	.23091E-03	-.46182E+03	.29036E+04
.10000E+01	-.95682E-03	.46182E-03	-.46182E+03	.19800E+04
.15000E+01	-.14352E-02	.69273E-03	-.46182E+03	.10564E+04
.20000E+01	-.19136E-02	.92364E-03	-.46182E+03	.13273E+03
.25000E+01	-.23920E-02	.11545E-02	-.46182E+03	-.79091E+03
.30000E+01	-.28705E-02	.13855E-02	-.46182E+03	-.17145E+04
.35000E+01	-.33489E-02	.16164E-02	-.46182E+03	-.26382E+04
.40000E+01	-.38273E-02	.18473E-02	-.46182E+03	-.35618E+04
.40000E+01	-.38273E-02	.18473E-02	-.98182E+02	.12109E+04
.47500E+01	-.54398E-02	.19209E-02	-.98182E+02	.91636E+03
.55000E+01	-.70523E-02	.19945E-02	-.98182E+02	.62182E+03
.62500E+01	-.86648E-02	.20682E-02	-.98182E+02	.32727E+03
.70000E+01	-.10277E-01	.21418E-02	-.98182E+02	.32727E+02
.77500E+01	-.11890E-01	.22155E-02	-.98182E+02	-.26182E+03
.85000E+01	-.13502E-01	.22891E-02	-.98182E+02	-.55636E+03
.92500E+01	-.15115E-01	.23627E-02	-.98182E+02	-.85091E+03
.10000E+02	-.16727E-01	.24364E-02	-.98182E+02	-.11455E+04

Problema 2. La estructura bastidor mostrada en la figura 6.4, se analiza para fuerzas y desplazamientos.

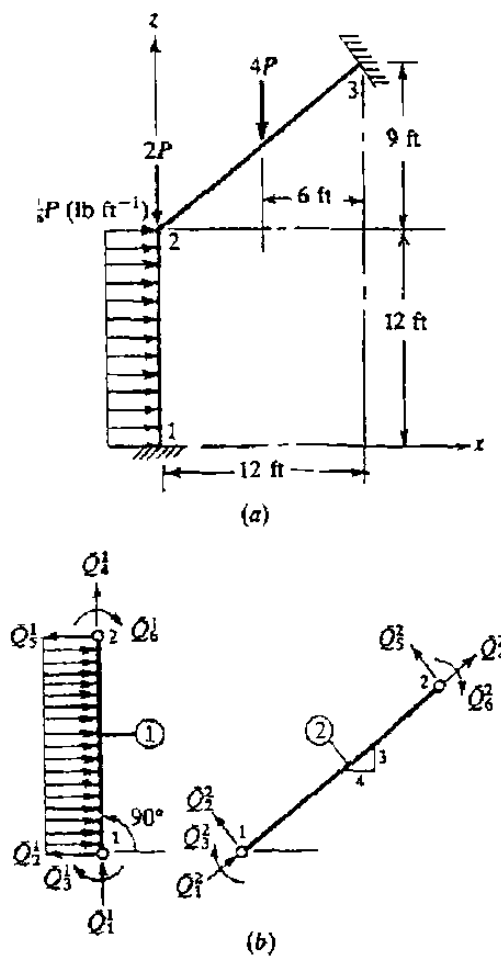


Figura 6.4 Geometría, carga y discretización del elemento finito de una estructura plana: (a) geometría y carga: (b) discretización del elemento finito, número de elementos y fuerzas del elemento en las coordenadas del elemento

Ambos miembros de la estructura se hacen del mismo material (E) y tienen las mismas propiedades geométricas (A,I). Las matrices de rigidez del elemento y vectores fuerza en el sistema de coordenadas global (x, y,z) pueden calcularse de (4.59) y (4.60). La geometría y propiedades del material de cada elemento son como sigue:

Elemento 1:

$$L = 144 \text{ pulg. } \quad A = 10 \text{ pulg}^2, \quad I = 10 \text{ pulg}^4, \quad \cos \alpha = 0.0, \quad \sin \alpha = 1.0$$

$$E = 10^6 \text{ lb/pulg}^2 \quad f_1 = \frac{1}{12} P \text{ lb pulg}^{-1}$$

Elemento 2:

$$L = 180 \text{ pulg}, \quad A = 10 \text{ pulg}^2, \quad I = 10 \text{ pulg}^4, \quad \cos \alpha = 0.8, \quad \sin \alpha = 0.6$$

$$E = 10^6 \text{ lb/pulg}^2 \quad f_2 = 0$$

La carga $F_0 = 4P$ está distribuida, en el centro del elemento, en los nodos, de acuerdo a (4.14).

La matriz de rigidez ensamblada y vectores fuerza, se obtienen mediante la superposición de las últimas tres hileras y columnas del elemento 1 en las primeras tres raices y columnas del elemento 2; esto es, la submatriz 3×3 asociada con hileras y columnas 4, 5 y 6 del elemento 1 y la submatriz 3×3 asociada con las raices y columnas 1, 2 y 3 del elemento 2, descansa en la matriz de rigidez global.

Las condiciones de frontera geométrica conocidas son:

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = 0, \quad U_7 = 0, \quad U_8 = 0, \quad U_9 = 0$$

Las condiciones frontera fuerza son:

$$Q_4^1 + Q_1^2 = 0, \quad Q_5^1 + Q_2^2 = -2P, \quad Q_6^1 + Q_3^2 = 0$$

Ya que los valores especificados de las condiciones frontera conocidas sobre las variables primarias son cero, las ecuaciones condensadas para los grados de libertad de los desplazamientos globales desconocidos son:

$$10^5 \begin{bmatrix} 0.3560 & 0.2666 & -0.0178 \\ 0.2666 & 0.8846 & -0.0148 \\ -0.0178 & -0.0148 & 5.0000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -4 \\ 48 \end{Bmatrix} P$$

Cuya solución es:

$$U_4 = 0.839 \times 10^{-4} P \quad (\text{pulg}), \quad U_5 = -0.681 \times 10^{-4} P \quad (\text{pulg})$$

$$U_6 = 0.961 \times 10^{-4} P \quad (\text{rad}).$$

Las reacciones y fuerzas en cada miembro en las coordenadas globales, pueden calcularse de las ecuaciones de elemento

$$\{Q^e\} = [K^e] \{u^e\} - \{f^e\}$$

Las fuerzas $\{Q^e\}$ pueden transformarse en las del sistema coordenado del elemento por medio de (4.39).

$$\{Q^e\} = [T^e] \{Q^e\}$$

Obtenemos:

$$\{Q^1\} = \begin{Bmatrix} 4.731 \\ 0.725 \\ -10.900 \\ -4.731 \\ 1.275 \\ 50.450 \end{Bmatrix} P, \quad \{Q^2\} = \begin{Bmatrix} 1.458 \\ -0.180 \\ 21.550 \\ -1.458 \\ -0.180 \\ 10.870 \end{Bmatrix} P$$

A continuación veremos la solución del problema 2 con auxilio de la computadora usando el programa FEM1DV2, considerando elemento Euler-Bernoulli.

Consideremos la estructura bastidor de dos miembros mostrada en la figura 6.4
 En este caso, MODEL = 4, NTYPE = 1. Se obtiene una solución exacta para todas las
 estructuras bastidor con miembros de sección transversal constante.

Los datos de archivo de entrada para este problema se muestran en la tabla 6.5

TABLA 6.5

ARCHIVO DE DATOS DE ENTRADA PROBLEMA 2 E-B

Problema 2 :Análisis de una estructura plana (Elemento E-B)

```

4      1      0                                MODEL, NTYPE, ITEM
0      2                                IELEM, NEM
0      1                                ICONT, NPRNT
3                                NEM
0.3    1.0E6 144.0 10.0 10.0 0.0 1.0        PR, SE, SL, SA, SI, CS, SN
0.0    -0.0138888 0.0 0.0 0.0 0.0          HF, VF, PF, XB, CST, SNT
1      2                                NOD(1,J)
0.3    1.0E6 180.0 10.0 10.0 0.8 0.6
0.0    0.0   -4.0  90.0 0.6 0.8          Igual para elemento 2
2      3
6                                NSPV
1      1      0.0      -----
1      2      0.0
1      3      0.0
3      1      0.0                                ISPV, VSPV
3      2      0.0
3      3      0.0      -----
1                                NSSV
2      2      -2.0                                ISSV, VSSV
0                                NNBC

```

Con estos datos de entrada se procede a correr el programa obteniendo los siguientes
 resultados:

*** ECHO OF THE INPUT DATA STARTS ***

Problema 2 :Análisis de una estructura plana (Elemento E-B)

```

4      1      0                                MODEL, NTYPE, ITEM
0      2                                IELEM, NEM
0      1                                ICONT, NPRNT
3                                NEM
0.3    1.0E6 144.0 10.0 10.0 0.0 1.0        PR, SE, SL, SA, SI, CS, SN
0.0    -0.0138888 0.0 0.0 0.0 0.0          HF, VF, PF, XB, CST, SNT
1      2                                NOD(1,J)
0.3    1.0E6 180.0 10.0 10.0 0.8 0.6
0.0    0.0   -4.0  90.0 0.6 0.8          Igual para elemento 2
2      3
6                                NSPV
1      1      0.0      -----
1      2      0.0
1      3      0.0

```

```

3      1      0.0      ISPV, VSPV
3      2      0.0
3      3      0.0      -----
1
2      2      -2.0      NSSV
0      ISSV, VSSV
0      NNBC

```

**** ECHO OF THE INPUT DATA ENDS ****

OUTPUT FROM PROGRAM FEM1DV2.1 BY J. N. REDDY

Problema 2 : Analisis de una estructura plana (Elemento E-B)

*** ANALYSIS OF MODEL 4, AND TYPE 1 PROBLEM ***
(see the code below)

MODEL=1,NTYPE=0: A problem described by MODEL EQ. 1
MODEL=1,NTYPE=1: A circular DISK (PLANE STRESS)
MODEL=1,NTYPE>1: A circular DISK (PLANE STRAIN)
MODEL=2,NTYPE=0: A Timoshenko BEAM (RIE) problem
MODEL=2,NTYPE=1: A Timoshenko PLATE (RIE) problem
MODEL=2,NTYPE=2: A Timoshenko BEAM (CIE) problem
MODEL=2,NTYPE>2: A Timoshenko PLATE (CIE) problem
MODEL=3,NTYPE=0: A Euler-Bernoulli BEAM problem
MODEL=3,NTYPE>0: A Euler-Bernoulli Circular plate
MODEL=4,NTYPE=0: A plane TRUSS problem
MODEL=4,NTYPE=1: A Euler-Bernoulli FRAME problem
MODEL=4,NTYPE=2: A Timoshenko (CIE) FRAME problem

Element type (0, Hermite,>0, Lagrange)..= 0
No. of deg. of freedom per node, NDF....= 3
No. of elements in the mesh, NEM.....= 2
No. of total DOF in the model, NEQ.....= 9
No. of specified primary DOF, NSPV.....= 6
No. of specified secondary DOF, NSSV....= 1
No. of specified Newton B. C.: NNBC.....= 0

Boundary information on primary variables:

```

1      1      .00000E+00
1      2      .00000E+00
1      3      .00000E+00
3      1      .00000E+00
3      2      .00000E+00
3      3      .00000E+00

```

Boundary information on secondary variables:

```

2      2      -.20000E+01

```

Element No. = 1

```

The poisson ratio,      PR..... = .3000E+00
Modulus of elasticity, SE..... = .1000E+07
Length of the element, SL..... = .1440E+03
Area of cross section, SA..... = .1000E+02
Moment of inertia,     SI..... = .1000E+02
Cosine of orientation, CN..... = .0000E+00
Sine of orientation,   SN..... = .1000E+01

```

```

Axial body force (constant), HF..... = .0000E+00
Transverse body force (cnst),VF..... = -.1389E-01
Internal point force, PF..... = .0000E+00
Location of PF from node 1, XB..... = .0000E+00
Orientation of PF: cosine, CST..... = .0000E+00
Orientation of PF: sine, SNT..... = .0000E+00
Nodal connectivity: NOD(I,J).. = 1 2

```

Element No. = 2

```

The poisson ratio, PR..... = .3000E+00
Modulus of elasticity, SE..... = .1000E+07
Length of the element, SL..... = .1800E+03
Area of cross section, SA..... = .1000E+02
Moment of inertia, SI..... = .1000E+02
Cosine of orientation, CN..... = .8000E+00
Sine of orientation, SN..... = .6000E+00
Axial body force (constant), HF..... = .0000E+00
Transverse body force (cnst),VF..... = .0000E+00
Internal point force, PF..... = -.4000E+01
Location of PF from node 1, XB..... = .9000E+02
Orientation of PF: cosine, CST..... = .6000E+00
Orientation of PF: sine, SNT..... = .8000E+00
Nodal connectivity: NOD(I,J).. = 2 3

```

Element coefficient matrix, [ELK]:

```

.40188E+02 .00000E+00 .28935E+04 -.40188E+02 .00000E+00
.28935E+04
.00000E+00 .69444E+05 .00000E+00 .00000E+00 -.69444E+05
.00000E+00
.28935E+04 .00000E+00 .27778E+06 -.28935E+04 .00000E+00
.13889E+06
-.40188E+02 .00000E+00 -.28935E+04 .40188E+02 .00000E+00
-.28935E+04
.00000E+00 -.69444E+05 .00000E+00 .00000E+00 .69444E+05
.00000E+00
.28935E+04 .00000E+00 .13889E+06 -.28935E+04 .00000E+00
.27778E+06

```

Element source vector, {ELF}:

```

.99999E+00 .00000E+00 .24000E+02 .99999E+00 .00000E+00
-.24000E+02

```

SOLUTION (values of PVs) at the NODES:

```

.00000E+00 .00000E+00 .00000E+00 .83904E-04 -.68124E-04
.96098E-04 .00000E+00 .00000E+00 .00000E+00

```

Generalized forces in the element coordinates
(second line gives the results in the global coordinates)

Ele	Force, H1	Force, V1	Moment, M1	Force, H2	Force, V2	Moment, M2
1	.4731E+01	.7253E+00	-.1090E+02	-.4731E+01	.1275E+01	.5045E+02

```

-.7253E+00  .4731E+01  -.1090E+02  -.1275E+01  -.4731E+01  .5045E+02
2  .2658E+01  .1420E+01  -.5045E+02  -.2583E+00  .1780E+01  .8287E+02
   .1275E+01  .2731E+01  -.5045E+02  -.1275E+01  .1269E+01  .8287E+02

```

El problema 2 se resuelve también para elemento estructura Timoshenko, considerando MODEL=4, NTYPE=2.

La tabla 6.6 nos muestra los datos de archivo de entrada

TABLA 6.6

ARCHIVO DE DATOS DE ENTRADA PROBLEMA 2 TIMOSHENKO

Problema 2 : Analisis de una estructura plana (Elemento TIM)

```

4  2  0          MODEL, NTYPE, ITEM
0  2          IELEM, NEM
0  1          ICONT, NPRNT
3          NNM
0.3          1.0E6 144.0 10.0 10.0 0.0 1.0  PR, SE, SL, SA, SI, CS, SN
0.0          -0.0138888 0.0 0.0 0.0 0.0  HF, VF, PF, XB, CST, SNT
1  2          NOD(1,J)
0.3          1.0E6 180.0 10.0 10.0 0.8 0.6
0.0          0.0  -4.0  90.0 0.6  0.8  Igual para elemento 2
2  3
6          NSPV
1  1  0.0  -----
1  2  0.0
1  3  0.0
3  1  0.0  ISPV, VSPV
3  2  0.0
3  3  0.0  -----
1          NSSV
2  2  -2.0  ISSV, VSSV
0          NNBC

```

Con estos datos se corre el programa y se obtienen los siguientes resultados:

*** ECHO OF THE INPUT DATA STARTS ***

Problema 2 : Analisis de una estructura plana (Elemento TIM)

```

4  2  0          MODEL, NTYPE, ITEM
0  2          IELEM, NEM
0  1          ICONT, NPRNT
3          NNM
0.3          1.0E6 144.0 10.0 10.0 0.0 1.0  PR, SE, SL, SA, SI, CS, SN
0.0          -0.0138888 0.0 0.0 0.0 0.0  HF, VF, PF, XB, CST, SNT
1  2          NOD(1,J)

```

```

0.3      1.0E6 180.0 10.0 10.0 0.8 0.6
0.0      0.0   -4.0 90.0 0.6 0.8      Igual para elemento 2
2        3
6
1        1      0.0      -----
1        2      0.0
1        3      0.0
3        1      0.0      ISPV, VSPV
3        2      0.0
3        3      0.0      -----
1
2        2      -2.0      NSSV
0                          ISSV, VSSV
                          NNBC

**** ECHO OF THE INPUT DATA ENDS ****

```

OUTPUT FROM PROGRAM FEM1DV2.1 BY J. N. REDDY

Problema 2 : Analisis de una estructura plana (Elemento TIM)

*** ANALYSIS OF MODEL 4, AND TYPE 2 PROBLEM ***
 (see the code below)

MODEL=1,NTYPE=0: A problem described by MODEL EQ. 1
 MODEL=1,NTYPE=1: A circular DISK (PLANE STRESS)
 MODEL=1,NTYPE>1: A circular DISK (PLANE STRAIN)
 MODEL=2,NTYPE=0: A Timoshenko BEAM (RIE) problem
 MODEL=2,NTYPE=1: A Timoshenko PLATE (RIE) problem
 MODEL=2,NTYPE=2: A Timoshenko BEAM (CIE) problem
 MODEL=2,NTYPE>2: A Timoshenko PLATE (CIE) problem
 MODEL=3,NTYPE=0: A Euler-Bernoulli BEAM problem
 MODEL=3,NTYPE>0: A Euler-Bernoulli Circular plate
 MODEL=4,NTYPE=0: A plane TRUSS problem
 MODEL=4,NTYPE=1: A Euler-Bernoulli FRAME problem
 MODEL=4,NTYPE=2: A Timoshenko (CIE) FRAME problem

Element type (0, Hermite,>0, Lagrange)..= 1
 No. of deg. of freedom per node, NDF.....= 3
 No. of elements in the mesh, NEM.....= 2
 No. of total DOF in the model, NEQ.....= 9
 No. of specified primary DOF, NSPV.....= 6
 No. of specified secondary DOF, NSSV....= 1
 No. of specified Newton B. C.: NNBC.....= 0

Boundary information on primary variables:

```

1  1  .00000E+00
1  2  .00000E+00
1  3  .00000E+00
3  1  .00000E+00
3  2  .00000E+00
3  3  .00000E+00

```

Boundary information on secondary variables:

```

2  2  -.20000E+01

```

Element No. = 1

The poisson ratio,	PR..... =	.3000E+00
Modulus of elasticity,	SE..... =	.1000E+07
Length of the element,	SL..... =	.1440E+03
Area of cross section,	SA..... =	.1000E+02
Moment of inertia,	SI..... =	.1000E+02
Cosine of orientation,	CN..... =	.0000E+00
Sine of orientation,	SN..... =	.1000E+01
Axial body force (constant),	HF..... =	.0000E+00
Transverse body force (cnst),	VF..... =	-.1389E-01
Internal point force,	PF..... =	.0000E+00
Location of PF from node 1,	XB..... =	.0000E+00
Orientation of PF: cosine,	CST..... =	.0000E+00
Orientation of PF: sine,	SNT..... =	.0000E+00
Nodal connectivity:	NOD(I,J).. =	1 2

Element No. = 2

The poisson ratio,	PR..... =	.3000E+00
Modulus of elasticity,	SE..... =	.1000E+07
Length of the element,	SL..... =	.1800E+03
Area of cross section,	SA..... =	.1000E+02
Moment of inertia,	SI..... =	.1000E+02
Cosine of orientation,	CN..... =	.8000E+00
Sine of orientation,	SN..... =	.6000E+00
Axial body force (constant),	HF..... =	.0000E+00
Transverse body force (cnst),	VF..... =	.0000E+00
Internal point force,	PF..... =	-.4000E+01
Location of PF from node 1,	XB..... =	.9000E+02
Orientation of PF: cosine,	CST..... =	.6000E+00
Orientation of PF: sine,	SNT..... =	.8000E+00
Nodal connectivity:	NOD(I,J).. =	2 3

Element coefficient matrix, [ELK]:

.22258E+05	.00000E+00	.16026E+07	-.22258E+05	.00000E+00
.16026E+07				
.00000E+00	.69444E+05	.00000E+00	.00000E+00	-.69444E+05
.00000E+00				
.16026E+07	.00000E+00	.11545E+09	-.16026E+07	.00000E+00
.11532E+09				
-.22258E+05	.00000E+00	-.16026E+07	.22258E+05	.00000E+00
-.16026E+07				
.00000E+00	-.69444E+05	.00000E+00	.00000E+00	.69444E+05
.00000E+00				
.16026E+07	.00000E+00	.11532E+09	-.16026E+07	.00000E+00
.11545E+09				

Element source vector, {ELF}:

.99999E+00	.00000E+00	.24000E+02	.99999E+00	.00000E+00
-.24000E+02				

SOLUTION (values of PVs) at the NODES:

.00000E+00	.00000E+00	.00000E+00	.28435E-04	-.44315E-04
.36241E-07	.00000E+00	.00000E+00	.00000E+00	

Generalized forces in the element coordinates
(second line gives the results in the global coordinates)

Ele	Force, H1	Force, V1	Moment, M1	Force, H2	Force, V2	Moment, M2
1	.3077E+01 -.1575E+01	.1575E+01 .3077E+01	-.6539E+02 -.6539E+02	-.3077E+01 -.4252E+00	.4252E+00 -.3077E+01	-.1738E+02 -.1738E+02
2	.9866E+00 .4252E+00	.6069E+00 .1077E+01	.1738E+02 .1738E+02	.1413E+01 -.4252E+00	.2593E+01 .2923E+01	.1614E+03 .1614E+03

Problema 3. Un puente está soportado por varios pilares de concreto y la geometría y cargas de un pilar típico se muestran en la figura 6.5

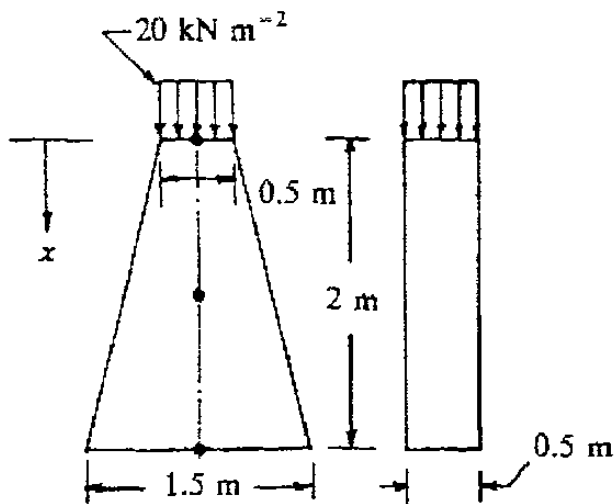


Figura 6.5 Geometría y carga en el pilar de concreto del problema 3.

La carga 20 KN m^{-2} representa al peso del puente y una distribución supuesta del tráfico sobre el puente. El concreto pesa aproximadamente 25 KN m^{-3} y su módulo es $E = 28 \times 10^6 \text{ KN m}^{-2}$. Deseamos analizar el pilar para desplazamientos y fuerzas usando el método del elemento finito. El pilar es realmente una estructura de tres dimensiones, sin embargo, deseamos aproximar el campo de deformación y esfuerzos en un pilar como unidimensional.

A esto último, representamos la fuerza distribuida en la parte superior del pilar como una fuerza de punto.

$$F = (0.5 \times 0.5) 20 = 5 \text{ KN}$$

El peso del concreto está representado como la fuerza cuerpo por unidad de longitud. La fuerza total a cualquier distancia x es igual al peso del concreto arriba de este punto. El peso a una distancia x y el peso específico del concreto:

$$w(x) = 0.5 \frac{0.5 + (0.5 + 0.5x)}{2} x \times 25.0 = 6.25(1 + 0.5x)x$$

La fuerza cuerpo por unidad de longitud se calcula de :

$$f = \frac{dw}{dx} = 6.25(1 + x) = 6.25 + 6.25x$$

Esto completa la representación de la carga del problema.

La ecuación diferencial que rige para el problema está dada por : $-\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) = f(x)$

con $E = 28 \times 10^6 \text{ KN m}^{-2}$ y área de sección transversal $A(x)$:

$$A(x) = (0.5 + 0.5x)0.5 = \frac{1}{4}(1 + x)$$

Por lo tanto:

$$-\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{4} E(1+x) \frac{du}{dx} \right] = 6.25(1+x)$$

Sujeto a condiciones frontera:

$$\left[\frac{1}{4} E(1+x) \frac{du}{dx} \right]_{x=0} = -5, \quad u(2) = 0$$

El modelo del elemento finito es:

$$[K^e] \{u^e\} = \{f^e\} + \{Q^e\}$$

donde:

$$K_{ij}^e = \int_{x_A}^{x_B} EA \frac{d\psi_i^e}{dx} \frac{d\psi_j^e}{dx} dx$$

$$f_i^e = \int_{x_A}^{x_B} f(x) \psi_i^e dx$$

$$Q_A^e = \left(-EA \frac{du}{dx} \right)_A, \quad Q_B^e = \left(EA \frac{du}{dx} \right)_B$$

Para la selección de las funciones interpolación lineales:

$$\psi_1^e(x) = \frac{1}{h_e} (\alpha_1^e + \beta_1^e x) = \frac{x_B - x}{x_B - x_A}, \quad \psi_2^e(x) = \frac{1}{h_e} (\alpha_2^e + \beta_2^e x) = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}$$

Tenemos:

$$K_{11}^e = \int_{x_e}^{x_{e+1}} E \frac{1}{4} (1+x) \left(-\frac{1}{h}\right)^2 dx = \frac{E}{4h_e} \left[1 + \frac{1}{2} (x_e + x_{e-1}) \right]$$

$$f_1^e = \int_{x_e}^{x_{e+1}} 6.25(1+x)\psi_1^e dx = 6.25h_e \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{6}(x_{e+1}) + 2x_e \right]$$

Similarmente, otras componentes pueden evaluarse:

$$[K^e] = \frac{E}{4h_e} \left[1 + \frac{1}{2}(x_e + x_{e+1}) \right] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{f^e\} = 6.25 \frac{h_e}{2} \left(\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} x_{e+1} + 2x_e \\ 2x_{e+1} + x_e \end{Bmatrix} \right)$$

Consideremos una malla de dos elementos con $h_1 = h_2 = 1m$, tenemos:

$$[K^1] = \frac{E}{4} \begin{bmatrix} 1.5 & -1.5 \\ -1.5 & 1.5 \end{bmatrix}, \quad \{f^1\} = \frac{6.25}{6} \begin{Bmatrix} 3+1 \\ 3+2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.167 \\ 5.208 \end{Bmatrix}$$

$$[K^2] = \frac{E}{4} \begin{bmatrix} 2.5 & -2.5 \\ -2.5 & 2.5 \end{bmatrix}, \quad \{f^2\} = \frac{6.25}{6} \begin{Bmatrix} 3+4 \\ 3+5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7.292 \\ 8.333 \end{Bmatrix}$$

Las ecuaciones ensambladas son :

$$E \begin{bmatrix} 0.375 & -0.375 & 0.000 \\ -0.375 & 1.000 & -0.625 \\ 0.000 & -0.625 & 0.625 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.167 \\ 12.500 \\ 8.333 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 + Q_1^2 \\ Q_2^2 \end{Bmatrix}$$

Las condiciones de frontera y equilibrio requieren:

$$U_3 = 0, \quad Q_2^1 + Q_1^2 = 0, \quad Q_1^1 = 5 \text{ KN}$$

Las ecuaciones condensadas son :

$$E \begin{bmatrix} 0.375 & -0.375 \\ -0.375 & 1.000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9.167 \\ 12.50 \end{Bmatrix}, \quad Q_2^2 = -0.6255U_2 - 8.333$$

y la solución está dada por:

$$U_1 = 2.111 \times 10^{-6} \text{ m}, \quad U_2 = 1.238 \times 10^{-6} \text{ m}, \quad Q_2^2 = -30 \text{ KN}$$

Aquí los esfuerzos en el extremo empotrado están dados por:

$$\sigma_x = Q_2^2 / A = -30 / 0.75 = -40 \text{ KN m}^{-2}$$

La solución exacta:

$$u(x) = \frac{1}{E} \left[56.25 - 6.25(1+x)^2 - 7.5 \ln \left(\frac{1+x}{3} \right) \right]$$

Los valores exactos de u en los nodos 1 y 2 son :

$$u(0) = 2.08 \times 10^{-6} \text{ m}, \quad u(1) = 1.225 \times 10^{-6} \text{ m}$$

El modelo de cuatro elementos da $2.008 \times 10^{-6} \text{ m}$ y $1.228 \times 10^{-6} \text{ m}$, respectivamente.

La solución del elemento finito no es exacta en los nodos debido a que $\alpha = EA$ no es constante en el problema.

El problema 3 se resolverá mediante el programa de computadora primeramente considerando 4 elementos cuadráticos y después 8 elementos lineales.

La tabla 6.7 muestra los datos para el archivo de entrada para 4 elementos cuadráticos los cuales servirán para correr el programa.

TABLA 6.7

ARCHIVO DE DATOS DE ENTRADA PROBLEMA 3 (4 EL. CUAD.)

```

Problema 3: Pilar de puente: 4 elementos cuadraticos
1  0  0                                MODEL,NTYPE, ITEM
2  4                                    IELEM, NEM
1  1                                    ICONT, NPRTN
0.0 0.5 0.5 0.5 0.5                    DX(I)
7.0E6 7.0E6                             AX0, AX1
0.0 0.0                                  BX0, BX1
0.0 0.0                                  CX0, CX1
6.25 6.25 0.0                           FX0, FX1, FX2
1                                          NSPV
9  1  0.0                                ISPV (I,1), (I,2),VSPV(I)
1                                          NSSV
1  1  5                                    ISSV (I,1), (I,2),VSSV(I)
0                                          NNBC

```

Los resultados que se obtienen al correr el programa se muestran a continuación:

*** ECHO OF THE INPUT DATA STARTS ***

```

Problema 3: Pilar de puente: 4 elementos cuadraticos
1  0  0                                MODEL,NTYPE, ITEM
2  4                                    IELEM, NEM
1  1                                    ICONT, NPRTN
0.0 0.5 0.5 0.5 0.5                    DX(I)
7.0E6 7.0E6                             AX0, AX1
0.0 0.0                                  BX0, BX1
0.0 0.0                                  CX0, CX1
6.25 6.25 0.0                           FX0, FX1, FX2
1                                          NSPV
9  1  0.0                                ISPV (I,1), (I,2),VSPV(I)
1                                          NSSV
1  1  5                                    ISSV (I,1), (I,2),VSSV(I)
0                                          NNBC

```

**** ECHO OF THE INPUT DATA ENDS ****

OUTPUT FROM PROGRAM FEMLDV2.1 BY J. N. REDDY

Problema 3: Pilar de puente: 4 elementos cuadraticos

*** ANALYSIS OF MODEL 1, AND TYPE 0 PROBLEM ***
(see the code below)

```

MODEL=1,NTYPE=0: A problem described by MODEL EQ. 1
MODEL=1,NTYPE=1: A circular DISK (PLANE STRESS)
MODEL=1,NTYPE>1: A circular DISK (PLANE STRAIN)
MODEL=2,NTYPE=0: A Timoshenko BEAM (RIE) problem
MODEL=2,NTYPE=1: A Timoshenko PLATE (RIE) problem
MODEL=2,NTYPE=2: A Timoshenko BEAM (CIE) problem
MODEL=2,NTYPE>2: A Timoshenko PLATE (CIE) problem
MODEL=3,NTYPE=0: A Euler-Bernoulli BEAM problem
MODEL=3,NTYPE>0: A Euler-Bernoulli Circular plate
MODEL=4,NTYPE=0: A plane TRUSS problem

```

MODEL=4,NTYPE=1: A Euler-Bernoulli FRAME problem
 MODEL=4,NTYPE=2: A Timoshenko (CIE) FRAME problem

Element type (0, Hermite,>0, Lagrange)..= 2
 No. of deg. of freedom per node, NDF....= 1
 No. of elements in the mesh, NEM.....= 4
 No. of total DOF in the model, NEQ.....= 9
 No. of specified primary DOF, NSPV.....= 1
 No. of specified secondary DOF, NSSV....= 1
 No. of specified Newton B. C.: NNBC.....= 0

Boundary information on primary variables:

9 1 .00000E+00

Boundary information on secondary variables:

1 1 .50000E+01

Global coordinates of the nodes, {GLX}:

.00000E+00 .25000E+00 .50000E+00 .75000E+00 .10000E+01
 .12500E+01 .15000E+01 .17500E+01 .20000E+01

Coefficients of the differential equation:

AX0 = .7000E+07 AX1 = .7000E+07
 BX0 = .0000E+00 BX1 = .0000E+00
 CX0 = .0000E+00 CX1 = .0000E+00
 FX0 = .6250E+01 FX1 = .6250E+01 FX2 = .0000E+00

Element coefficient matrix, [ELK]:

.36167E+08 -.42000E+08 .58333E+07
 -.42000E+08 .93333E+08 -.51333E+08
 .58333E+07 -.51333E+08 .45500E+08

Element source vector, {ELF}:

.52083E+00 .26042E+01 .78125E+00

SOLUTION (values of PVs) at the NODES:

.20800E-05 .18947E-05 .16924E-05 .14697E-05 .12247E-05
 .95597E-06 .66268E-06 .34418E-06 .00000E+00

X	P. Variable	S. Variable
.00000E+00	.20800E-05	-.49493E+01
.62500E-01	.20352E-05	-.53854E+01
.12500E+00	.19895E-05	-.58364E+01
.18750E+00	.19426E-05	-.63023E+01
.25000E+00	.18947E-05	-.67832E+01
.31250E+00	.18457E-05	-.72789E+01
.37500E+00	.17957E-05	-.77895E+01
.43750E+00	.17445E-05	-.83151E+01
.50000E+00	.16924E-05	-.88556E+01
.50000E+00	.16924E-05	-.88806E+01
.56250E+00	.16388E-05	-.94956E+01

*** ECHO OF THE INPUT DATA STARTS ***

```

      Problema 3: Pilar de puente: 8 elementos lineales
1      0      0      MODEL,NTYPE, ITEM
1      8      IELEM, NEM
1      1      ICONT, NPRTN
0.0 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 DX(I)
7.0E6 7.0E6 AX0, AX1
0.0 0.0 BX0, BX1
0.0 0.0 CX0, CX1
6.25 6.25 0.0 FX0, FX1, FX2
1      NSPV
9      1      0.0 ISPV
(I,1), (I,2), VSPV(I)
1      NSSV
1      1      5      ISSV
(I,1), (I,2), VSSV(I)
0      NNBC
**** ECHO OF THE INPUT DATA ENDS ****

```

OUTPUT FROM PROGRAM FEM1DV2.1 BY J. N. REDDY

Problema 3: Pilar de puente: 8 elementos lineales

*** ANALYSIS OF MODEL 1, AND TYPE 0 PROBLEM ***
 (see the code below)

MODEL=1,NTYPE=0: A problem described by MODEL EQ. 1
 MODEL=1,NTYPE=1: A circular DISK (PLANE STRESS)
 MODEL=1,NTYPE>1: A circular DISK (PLANE STRAIN)
 MODEL=2,NTYPE=0: A Timoshenko BEAM (RIE) problem
 MODEL=2,NTYPE=1: A Timoshenko PLATE (RIE) problem
 MODEL=2,NTYPE=2: A Timoshenko BEAM (CIE) problem
 MODEL=2,NTYPE>2: A Timoshenko PLATE (CIE) problem
 MODEL=3,NTYPE=0: A Euler-Bernoulli BEAM problem
 MODEL=3,NTYPE>0: A Euler-Bernoulli Circular plate
 MODEL=4,NTYPE=0: A plane TRUSS problem
 MODEL=4,NTYPE=1: A Euler-Bernoulli FRAME problem
 MODEL=4,NTYPE=2: A Timoshenko (CIE) FRAME problem

Element type (0, Hermite,>0, Lagrange)..= 1
 No. of deg. of freedom per node, NDF....= 1
 No. of elements in the mesh, NEM.....= 8
 No. of total DOF in the model, NEQ.....= 9
 No. of specified primary DOF, NSPV.....= 1
 No. of specified secondary DOF, NSSV....= 1
 No. of specified Newton B. C.: NNBC.....= 0

Boundary information on primary variables:

9 1 .00000E+00

Boundary information on secondary variables:

1 1 .50000E+01

Global coordinates of the nodes, {GLX}:

.00000E+00 .25000E+00 .50000E+00 .75000E+00 .10000E+01

.12500E+01 .15000E+01 .17500E+01 .20000E+01

Coefficients of the differential equation:

AX0 = .7000E+07 AX1 = .7000E+07
 BX0 = .0000E+00 BX1 = .0000E+00
 CX0 = .0000E+00 CX1 = .0000E+00
 FX0 = .6250E+01 FX1 = .6250E+01 FX2 = .0000E+00

Element coefficient matrix, [ELK]:

.31500E+08 -.31500E+08
 -.31500E+08 .31500E+08

Element source vector, {ELF}:

.84635E+00 .91146E+00

SOLUTION (values of PVs) at the NODES:

.20819E-05 .18963E-05 .16937E-05 .14708E-05 .12255E-05
 .95657E-06 .66307E-06 .34436E-06 .00000E+00

X	P. Variable	S. Variable
.00000E+00	.20819E-05	-.51968E+01
.31250E-01	.20587E-05	-.53592E+01
.62500E-01	.20355E-05	-.55216E+01
.93750E-01	.20123E-05	-.56840E+01
.12500E+00	.19891E-05	-.58464E+01
.15625E+00	.19659E-05	-.60088E+01
.18750E+00	.19427E-05	-.61712E+01
.21875E+00	.19195E-05	-.63336E+01
.25000E+00	.18963E-05	-.64959E+01
.25000E+00	.18963E-05	-.70904E+01
.28125E+00	.18710E-05	-.72677E+01
.31250E+00	.18457E-05	-.74450E+01
.34375E+00	.18204E-05	-.76222E+01
.37500E+00	.17950E-05	-.77995E+01
.40625E+00	.17697E-05	-.79767E+01
.43750E+00	.17444E-05	-.81540E+01
.46875E+00	.17191E-05	-.83313E+01
.50000E+00	.16937E-05	-.85085E+01
.50000E+00	.16937E-05	-.93630E+01
.53125E+00	.16659E-05	-.95580E+01
.56250E+00	.16380E-05	-.97531E+01
.59375E+00	.16101E-05	-.99482E+01
.62500E+00	.15823E-05	-.10143E+02
.65625E+00	.15544E-05	-.10338E+02
.68750E+00	.15265E-05	-.10533E+02
.71875E+00	.14987E-05	-.10728E+02
.75000E+00	.14708E-05	-.10923E+02
.75000E+00	.14708E-05	-.12019E+02
.78125E+00	.14402E-05	-.12234E+02
.81250E+00	.14095E-05	-.12448E+02
.84375E+00	.13788E-05	-.12663E+02
.87500E+00	.13482E-05	-.12878E+02
.90625E+00	.13175E-05	-.13092E+02
.93750E+00	.12868E-05	-.13307E+02
.96875E+00	.12562E-05	-.13521E+02

.10000E+01	.12255E-05	-.13736E+02
.10000E+01	.12255E-05	-.15061E+02
.10313E+01	.11919E-05	-.15297E+02
.10625E+01	.11583E-05	-.15532E+02
.10938E+01	.11247E-05	-.15767E+02
.11250E+01	.10910E-05	-.16003E+02
.11563E+01	.10574E-05	-.16238E+02
.11875E+01	.10238E-05	-.16473E+02
.12188E+01	.99019E-06	-.16709E+02
.12500E+01	.95657E-06	-.16944E+02
.12500E+01	.95657E-06	-.18491E+02
.12813E+01	.91988E-06	-.18748E+02
.13125E+01	.88320E-06	-.19005E+02
.13438E+01	.84651E-06	-.19261E+02
.13750E+01	.80982E-06	-.19518E+02
.14063E+01	.77313E-06	-.19775E+02
.14375E+01	.73644E-06	-.20032E+02
.14688E+01	.69975E-06	-.20289E+02
.15000E+01	.66307E-06	-.20546E+02
.15000E+01	.66307E-06	-.22309E+02
.15313E+01	.62323E-06	-.22588E+02
.15625E+01	.58339E-06	-.22867E+02
.15938E+01	.54355E-06	-.23146E+02
.16250E+01	.50371E-06	-.23424E+02
.16563E+01	.46388E-06	-.23703E+02
.16875E+01	.42404E-06	-.23982E+02
.17188E+01	.38420E-06	-.24261E+02
.17500E+01	.34436E-06	-.24540E+02
.17500E+01	.34436E-06	-.26516E+02
.17813E+01	.30132E-06	-.26817E+02
.18125E+01	.25827E-06	-.27119E+02
.18438E+01	.21523E-06	-.27420E+02
.18750E+01	.17218E-06	-.27721E+02
.19063E+01	.12914E-06	-.28023E+02
.19375E+01	.86091E-07	-.28324E+02
.19688E+01	.43046E-07	-.28625E+02
.20000E+01	.00000E+00	-.28927E+02

CAPITULO 7

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En una simulación numérica de un proceso físico, empleamos un método numérico y una computadora para evaluar un modelo matemático del proceso. El método del elemento finito es una técnica numérica efectiva diseñada para evaluar procesos físicos complejos.

Para resolver un problema, como se ha visto, se debe representar el dominio del problema con un conjunto de subdominios (elementos finitos), formando el conjunto de ellos una malla .

El proceso físico sobre cada elemento finito se aproxima con funciones polinomiales y ecuaciones algebraicas que relacionan cantidades físicas en nodos del elemento que se analiza.

De aquí, se procede a ensamblar las ecuaciones usando la continuidad y / o el balance de las cantidades físicas.

Se debe buscar una solución aproximada u de la forma:

$$u \approx \sum_{j=1}^n u_j \psi_j + \sum_{j=1}^m c_j \phi_j$$

Donde u_j representa a los valores de u en los nodos del elemento, ψ_j son las funciones interpolación, c_j son los coeficientes sin nodo, y ϕ_j son las funciones aproximación asociadas.

Se requiere de un número suficiente de ecuaciones para obtener los coeficientes no determinados c_j y u_j .

Por esta razón es necesario un procedimiento como el de la integral pesada de la ecuación diferencial que rige.

Pueden ser más de un elemento finito u en un mismo problema, el tipo de modelo depende de las ecuaciones diferenciales y métodos usados para obtener los coeficientes no determinados sobre un elemento.

La integral pesada se requiere para generar las ecuaciones algebraicas para resolver los parámetros c_i en la solución aproximada. Esto equivale a minimizar el error en la aproximación de la ecuación diferencial en sentido de integral pesada.

Es necesario seguir el procedimiento de los tres pasos para obtener la forma débil de una ecuación diferencial y para obtener las ecuaciones algebraicas en función de los parámetros desconocidos de la solución aproximada, lo que se trató en el capítulo dos se considera como el corazón del método del elemento finito.

Los métodos variacionales presentados son un medio sencillo para encontrar soluciones aproximadas continuas en problemas físicos, las cuales son funciones continuas de posición en el dominio.

Encuentro una desventaja de los métodos variacionales con respecto a los métodos de diferencia finita tradicionales, la dificultad para seleccionar las funciones aproximación no existe un procedimiento único para construir las sobre todo cuando el dominio es geoméricamente complejo y / o las condiciones frontera son complicadas.

Los métodos variacionales proveen un medio potente para encontrar soluciones aproximadas para la construcción de las funciones aproximación que dependen de la ecuación diferencial a ser resuelta y no de las condiciones frontera del problema. Un problema difiere de otro solo en los datos y por ésta razón se puede usar un programa de propósito general.

Una vez construida la región, las funciones se pueden representar con formas geométricas simples, de modo que sea más sencilla la construcción de las funciones aproximación.

En el método del elemento finito, se debe discretizar un dominio mediante representaciones geométricas simples en cada elemento, para formular la ecuación que rige usando cualquier método variacional. Se generan las funciones aproximación sistemáticamente usando las condiciones de frontera esencial, se conectan los elementos

imponiendo la continuidad de las variables dependientes a través de los límites del inter elemento.

El modelo del elemento finito, se desarrolla siguiendo tres pasos:

1. Formulación débil de la ecuación diferencial en un elemento.
2. Interpolación de las variables primarias de la forma débil.
3. Formular el elemento finito sobre un elemento típico.

Las variables primarias deben ser continuas en el dominio, incluyendo los nodos de conexión de los elementos. Se identifican con la forma débil.

Las funciones de interpolación requieren continuidad e independencia lineal. Con el método del elemento finito, se sustituye la interpolación de la variable primaria en la forma débil de la ecuación diferencial.

Las variables secundarias se pueden calcular usando las ecuaciones algebraicas de la malla del elemento finito (ecuaciones condensadas) ó por interpolación del elemento finito.

Las variables secundarias calculadas, usando elementos lineales **Lagrange** son elementos constantes, y son elementos lineales para elementos cuadráticos **Lagrange**.

En la aplicación del método del elemento finito a problemas en mecánica de materiales en una dimensión, la teoría de vigas clásica, se rige por una ecuación diferencial de cuarto orden y así la forma débil contiene en las variables primarias la deflexión transversal y su primera derivada. Para imponer la continuidad se necesita la interpolación **Hermite** de la deflexión transversal y su derivada en los nodos entre los elementos.

En la teoría de viga de **Timoshenko**, hay dos ecuaciones de segundo orden que gobiernan la deflexión transversal y la rotación. La forma débil necesita de la interpolación de Lagrange de la deflexión transversal y de la rotación.

El grado de interpolación para la rotación es uno menos que para la deflexión porque la función de rotación es la negativa de la deflexión transversal (derivada). La interpolación de las variables es la interpolación consistente.

La interpolación consistente con aproximación lineal en la rotación y la interpolación cuadrática de la deflexión transversal dan la misma matriz de rigidez que la obtenida con

un elemento de integración reducida con aproximación lineal de la rotación y de la deflexión.

Sin embargo, el vector carga del elemento de interpolación consistente para una carga transversal distribuida uniformemente, es igual a la del elemento cúbico Hermite de la teoría de viga clásica.

Un elemento estructura, es un elemento barra que tiene cargas axiales solamente y orientada un ángulo desde el eje horizontal. (el eje global x se toma como horizontal). Se modifica agregando columnas e hileras de ceros correspondientes a los desplazamientos (axial y transversal) así que tiene dos grados de libertad por nodo.

El elemento estructura plana tiene dos grados de libertad por nodo (desplazamientos horizontal y vertical) y lleva solo cargas axiales.

El elemento bastidor tiene tres grados de libertad (desplazamiento axial, deflexión transversal y rotación alrededor de las coordenadas transversal y axial). Está orientado en un ángulo desde la posición horizontal y las ecuaciones se obtienen transformando sus ecuaciones a coordenadas locales.

Después de haber hecho un análisis detallado en cuanto a los tipos de errores de aproximación del elemento finito, de ecuaciones diferenciales y sus mediciones para ecuación diferencial de segundo orden simple, se llega a la conclusión de que las ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes son exactas en los nodos. Sin embargo, esto no se mantiene para ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas con coeficientes constantes.

Del capítulo 6 se deduce que, el uso de un programa de computadora como el descrito, es una herramienta computacional importante dada la simplicidad en su implementación para la solución de problemas de mecánica de materiales en una dimensión y la rapidez con que se lleva a cabo el proceso de solución aproximada.

El trabajo aquí presentado es solamente un preámbulo para la implementación del método del elemento finito a problemas en dos y tres dimensiones así como para aplicarlo a otros campos como mecánica de fluidos, transferencia de calor etc.

He de reconocer que la elaboración de la tesis ha requerido de mucha dedicación y estudio, en cuanto a la aplicación de las matemáticas diferenciales e integrales así como del análisis vectorial básicamente, luego, para la comprensión del método, sus

aplicaciones, el uso de sistemas computacionales para facilitar el proceso. Razón por la cual recomiendo, a quien desee aplicarlo en la solución a problemas en los campos anteriormente descritos prepararse adecuadamente en los aspectos matemáticos, en el tema y en sistemas de computación, para que pueda encontrar las ventajas que ofrece éste método como una alternativa de solución de problemas.

CAPITULO 8

BIBLIOGRAFIA

- | | |
|----------------------|--|
| Krishnamachari, S.I. | Applied Stress Analysis of Plastics A Mechanical Engineering Approach. |
| ISBN 0-442-23907-6 | Van Nostrand Reinhold
1993 |
| Rao, Singiresu S. | Mechanical Vibrations |
| ISBN 0-201-52581-X | Addison-Wesley Publishing Company
Second Edition 1990 |
| Reddy, J.N. | An Introduction to the Finite Element Method |
| ISBN 0-07-051355-4 | Mc. Graw Hill
Second Edition 1993 |
| Segerlind, Larry J. | Applied Finite Element Analysis |
| ISBN 0-471-80662-5 | John Wiley and Sons. Inc.
Second Edition 1984 |

CAPITULO 9

LISTADO DE TABLAS

TABLA	CONTENIDO	PAGINA
2.1	Comparación de la solución Rayleigh – Ritz con la exacta . $u(0) = u(1) = 0$	56
2.2	Comparación de la solución Rayleigh-Ritz con la exacta $u(0) = 0, \frac{du}{dx} \Big _{x=1} = 1$	57
3.1	Pasos involucrados en el análisis del elemento finito en un problema.	72
3.2	Ejemplos de ecuaciones de segundo orden en una dimensión.	76
4.1	Tipos de condiciones de apoyo comunmente usados para vigas y estructuras.	145
5.1	El error L_2 y el error en la norma de energía.	184
6.1	Variables del programa para diferentes campos de problemas	198
6.2	Descripción de las variables de entrada al programa FEM1DV2	198
6.3	Archivo de datos de entrada para el problema 1 E-B	207
6.4	Archivo de datos de entrada problema 1 Timoshenko.	210
6.5	Archivo de datos de entrada problema 2 E-B.	216
6.6	Archivo de datos de entrada problema 2 Timoshenko.	219
6.7	Archivo de datos de entrada problema 3 (4 elementos cuadráticos).	227
6.8	Archivo de datos de entrada problema 3 (8 elementos lineales).	229

CAPITULO 10

LISTADO DE FIGURAS

Figura	Nombre	Pagina
1.1	Aproximación de la circunferencia de un círculo Mediante elementos línea.	5
1.2	Determinación aproximada del centroide de masa.	10
2.1	Frontera y dominio.	24
2.2	Comparación de las soluciones Rayleigh-Ritz y exacta $u(0) = u(1) = 0$	57
2.3	Comparación solución Rayleigh-Ritz y exacta viga en cantilíver con carga transversal uniforme.	61
3.1	Discretización del elemento finito de un dominio, una dimensión	75
3.2	Discretización del elemento, coordenadas local y global , elemento típico, variables primarias y secundarias en los nodos del elemento.	82
3.3	Funciones de interpolación global y local para nodos de elemento.	88
3.4	Refinamiento de soluciones del elemento finito.	90
3.5	Elemento cuadrático Lagrange en una dimensión y sus funciones de interpolación.	92
3.6	Aproximación de un elemento con sección transversal variable linealmente mediante un elemento con sección transv. constante	101
3.7	Ensamble de dos elementos lineales de Lagrange.	105
3.8	La geometría y malla del elemento finito de una estructura barra	109

4.1	Flexión de vigas relaciones fuerza cortante flexión momento- deflexión y la convención de signos.	128
4.2	Discretización de una viga Euler-Bernoulli.	130
4.3	Funciones interpolación cúbica de Hermite y sus primeras derivadas usadas en el modelo del elemento finito de la teoría de viga Euler-Bernoulli.	136
4.4	Ensamble de dos elementos finitos viga Euler-Bernoulli y la solución del elemento finito como combinación lineal de los valores nodales y funciones interpolación	141
4.5	Ejemplos típicos de la armazón plana y bastidor.	152
4.6	Elemento bastidor con variables primaria y secundaria en el sistema de coordenadas local y global.	154
4.7	Transformación de condiciones de frontera especificadas, desde un sistema coordenadas local hasta el sistema de coordenadas global.	171
5.1	Diversas medidas de error $E = u - uh$ entre la solución exacta u y la solución del elemento finito uh	179
5.2	Gráficas de norma energía y L_2 de errores contra tamaño de malla	186
6.1	Análisis de elemento finito de viga en cantiliver con carga discontinua	190
6.2	Comparación de soluciones del elemento finito con soluciones exactas para una viga en cantiliver apoyada en resorte	194
6.3	Efecto de la rigidez del resorte sobre la deflexión, momento flexionante y fuerza del resorte para el problema.	195
6.4	Geometría, carga y discretización del elemento finito de una estructura bastidor plana.	213
6.5	La geometría y carga en un pilar de concreto.	222

CAPITULO 11

APENDICE

GLOSARIO DE TERMINOS USADOS EN EL METODO DEL ELEMENTO FINITO

Convergencia.- Exactitud conforme se incrementa el número de elementos en la malla.

Componente de rigidez.- Fuerza causada por un desplazamiento unitario aplicado.

Condición de frontera esencial (EBC).- Especificación de la variable primaria en la frontera.

Condición de frontera natural (NBC).- Especificación de las variables secundarias en la frontera.

Condiciones de frontera homogéneas.- Cuando los valores especificados son cero $u_0 = 0$ ó $Q_0 = 0$

Condiciones de frontera no homogéneas.- Cuando los valores especificados son diferentes de cero $u_0 \neq 0$, $Q_0 \neq 0$

Conectividad del elemento.- Número de nodos que limitan al elemento.

DEM.- Método del elemento discreto donde los elementos individuales pueden tener movimientos finitos.

Discretización.- El dominio del problema es dividido en regiones más pequeñas. Es la

Preparación de un archivo de entrada que contenga:

- (1).- Coordenadas de todos los puntos nodales.
- (2).- Tipos de elementos.
- (3).- Conectividad de elementos.
- (4).- Elementos constantes aplicables.
- (5).- Propiedades del material.

Dominio (Ω) .- Conjunto de puntos en el espacio, con la propiedad de que si P es un punto en el dominio, entonces todos los puntos cierran hacia P, perteneciendo al dominio.

Dominio convexo.- Cuando dos puntos cualesquiera del dominio se pueden unir con una línea tendida completamente dentro de él.

Ecuaciones consistentes.- Son las que no tienen solución.

Elemento finito.- Dominio en miniatura (subdominio), desde el cual se pueden obtener una serie de ecuaciones algebraicas para las incógnitas nodales.

Ensamble de matriz de rigidez global. Se refiere a la suma de las rigideces de los elementos individuales, cuando se calculan en el sistema de coordenadas global.

Exactitud de la solución.- Diferencia entre la solución exacta y la solución del elemento finito

Forma débil de una ecuación diferencial.- Es una exposición de integral pesada de una ecuación diferencial en la que la diferenciación se distribuye entre las variables dependientes y la función peso e incluye las condiciones frontera naturales del problema. Se conoce también como “ forma variacional”.

Frontera de un dominio (Γ) .- Serie de puntos tal que, en cualquier cercanía de esos puntos, hay puntos que pertenecen al dominio y puntos que no. Los puntos en la frontera no corresponden al dominio.

Funcional.- Expresión integral de la forma $I(u) = \int_a^b F(x, u, u') dx$

$$u = u(x), \quad u' = \frac{du}{dx}$$

Donde el integrando $F(x, u, u')$ es una función dada de los argumentos :

$$x, u, \text{ y } \frac{du}{dx}$$

Funcional bilineal.- Funcional lineal en cada uno de sus argumentos u y v

Forma bilineal simétrica.- Cuando $B(u, v) = B(v, u)$

Grado de libertad (DOF).- Se refiere a las incógnitas a resolver para un problema, las cuales dependen de la manera de modelar el problema.

Integral pesada.- Procedimiento para dar lugar a un número necesario y suficiente de ecuaciones para los coeficientes no determinados, c_j y u_j

Malla del elemento finito. Conjunto de elementos finitos.

Malla uniforme.- Todos los elementos son de igual longitud.

Malla no uniforme.- Los elementos son de diferente longitud.

Matriz bandeda.- Todos los términos de la matriz están colocados alrededor de la diagonal principal.

Matriz de elasticidad $[D]$.- Es una propiedad del material del elemento.

Matriz de rigidez $[B]$.- Es una propiedad de la forma del elemento. En mecánica de materiales expresa ecuaciones esfuerzo- deformación. Es la matriz de las derivadas de las funciones interpolación, por lo cual recibe el nombre de matriz gradiente.

Matriz simétrica.- Implica que la matriz es cuadrada, significa que $K_{i,j} = K_{j,i}$

Método variacional de aproximación.- Método que sirve para obtener una solución aproximada en la forma de una combinación lineal de funciones aproximación ϕ_j , conve-
niente y parámetros c_j no determinados.

$$\sum_j c_j \phi_j$$

Nodos.- Puntos de conexión de unos elementos con otros.

RIE.- Elemento de integración reducida.

Símbolo variacional.- Operador δ en el cambio αv , donde α es una constante y v es una función : $\delta u = \alpha v$

Singularidad de $[K]$.- Significa que la ecuación $[K]\{u\} = \{f\}$ no se resuelve como tal ya que la matriz $[K]$ tiene un determinante cero.

Variable primaria PV .- Es la variable dependiente de un problema, expresada en la misma forma que la función peso que aparece en el término frontera

Variables secundarias SV.- Son los coeficientes de la función peso y sus derivadas en las expresiones frontera. Siempre tienen significado físico.

CAPITULO 12

AUTOBIOGRAFIA

Nombre: Tomas Norberto Martínez Pérez

Candidato a obtener el grado de: Maestro en Ciencias de la Ingeniería Mecánica
con especialidad en Diseño Mecánico.

Tesis que presenta: “EL METODO DEL ELEMENTO FINITO APLICADO EN LA
SOLUCION DE PROBLEMAS DE MECANICA DE MATE-
RIALES EN UNA DIMENSION”

Título Profesional: Ingeniero Mecánico Electricista

Fecha de nacimiento: 7 de Marzo de 1950

Lugar de nacimiento: Linares, N. L.

Nombre de los Padres: Sr. Salomón Martínez Molina⁽⁺⁾ y Sra. Lilia Pérez de
Martínez⁽⁺⁾

Grado obtenido en estudios Profesionales : Ingeniero Mecánico Electricista

Egresado de la Institución : Universidad Autónoma de Nuevo León

Dependencia: Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Fecha: 15 de Diciembre de 1972

Actividades Profesionales: Maestro en la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de
la Universidad Autónoma de Nuevo León desde el 1 de
Septiembre de 1969 a la fecha.

Areas: Coordinación de Ciencias Exactas y Coordinación de Ingeniería Térmica y
Fluidos.

