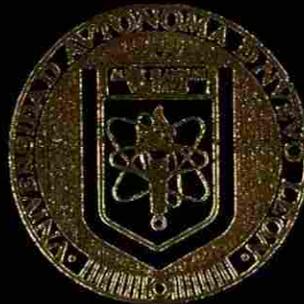


UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON  
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA  
DIVISION ESTUDIOS DE POST-GRADO



APLICACION DE OBSERVADORES DE ESTADO PARA  
VERIFICAR LAS MEDICIONES DE TEMPERATURA  
DE UN PROCESO DE EXTRUSION

POR  
ALEJANDRO HERNANDEZ GARZA

TESIS  
EN OPCION AL GRADO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS DE LA INGENIERIA ELECTRICA  
CON ESPECIALIDAD EN CONTROL

MONTERREY, N. L.

DICIEMBRE DE 1998

TM

Z5853

.M2

FIME

1998

H47

1998

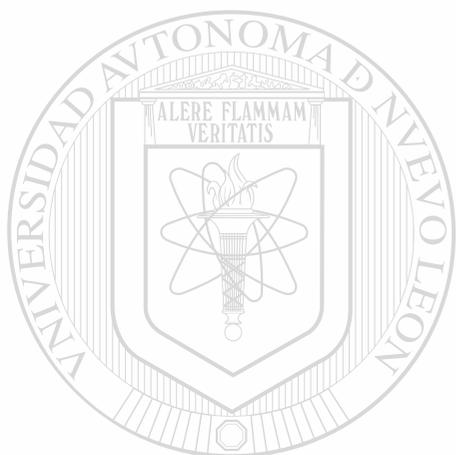
APPLICACION DE OBSERVADORS PARA  
VERIFICAR LAS MEDICIONES DE  
TEMPERATURA

A.H.G.

NOTIONEN FÜR DIE  
EXTRUSION



1020125423



# UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA

DIVISION DE ESTUDIOS DE POST-GRADO



APLICACION DE OBSERVADORES DE ESTADO PARA VERIFICAR LAS  
MEDICIONES DE TEMPERATURA DE UN PROCESO DE EXTRUSION

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

POR

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

ALEJANDRO HERNANDEZ GARZA

TESIS

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA  
INGENIERIA ELECTRICA CON ESPECIALIDAD EN CONTROL

MONTERREY, N.L., DICIEMBRE DE 1998

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA

DIVISION DE ESTUDIOS DE POST-GRADO



APLICACION DE OBSERVADORES DE ESTADO PARA VERIFICAR LAS  
MEDICIONES DE TEMPERATURA DE UN PROCESO DE EXTRUSION

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
POR

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

ALEJANDRO HERNANDEZ GARZA

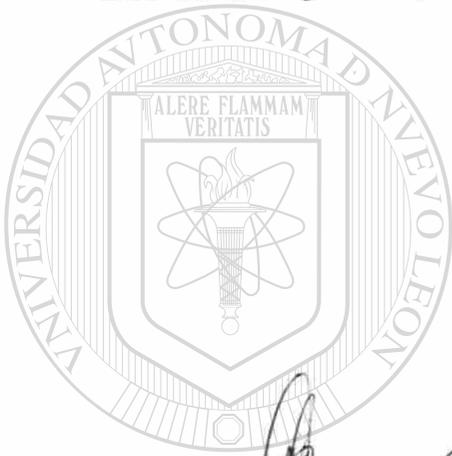
TESIS

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA  
INGENIERIA ELECTRICA CON ESPECIALIDAD EN CONTROL

MONTERREY, N.L., DICIEMBRE DE 1998

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON  
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA.  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POST-GRADO

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis “Aplicación de observadores de estado para verificar las mediciones de temperatura de un proceso de extrusión”, realizada por el alumno Alejandro Hernández Garza, matrícula 628472 sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestro en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica con especialidad en Control.



El Comité de Tesis

Asesor

Dr. Ernesto Vázquez Martínez

Coasesor

Dr. Carlos A. Guerrero Salazar

Coasesor

M.C. César Elizondo González®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Vo.Bo.

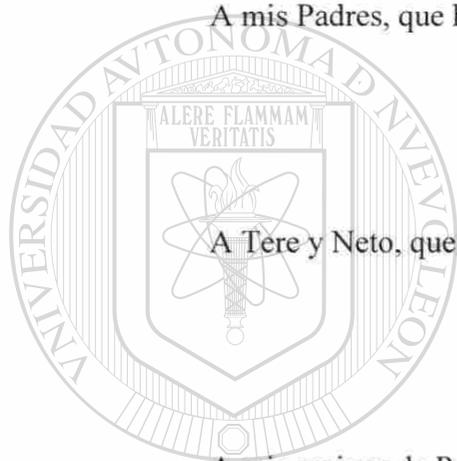
M.C. Roberto Villarreal Garza  
División de Estudios de Post-Grado

San Nicolás de los Garza, N.L., Diciembre de 1998

# DEDICATORIAS

A Dios, por darme la inteligencia para llegar hasta donde he llegado.

A mis Padres, que hicieron de mi un hombre de bien.



A Tere y Neto, que siempre me han dado su apoyo incondicional.

# UANL

A mis amigos de Poza Rica.

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



# AGRADECIMIENTOS

A mi asesor de tesis, Dr. Ernesto Vázquez Martínez, por todo ese tiempo que dedicó con sus asesorías y consejos a la elaboración de ésta.

Al Dr. Carlos A. Guerrero Salazar por sus valiosos consejos y facilidades para obtener información de su tesis doctoral.

Al Dr. Juan Manuel Ramírez por su apoyo en la elaboración de esta tesis.

Al Ing. Jorge H. Escamilla G., por sus aportaciones técnicas.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

A la Srita. Lulú y a Félix por su calidad en el servicio.

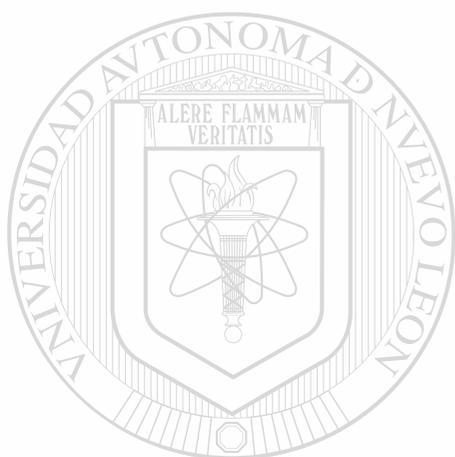
# PROLOGO

La presente tesis ha sido realizada conjuntamente por el Ing. Jorge Homero Escamilla Guerrero y el Ing. Alejandro Hernández Garza, con la finalidad de desarrollar una aplicación que sirva como herramienta potencial para verificar las mediciones de temperatura de un proceso industrial de extrusión.

Se pretende que esta herramienta sea de valiosa ayuda en la verificación de calibración en línea de los instrumentos de medición de temperatura, en especial en aquellos procesos que requieren un paro de producción para verificar la calibración de éstos, ocasionando pérdidas económicas originadas por el desperdicio de producto. Estas actividades son inherentes en cualquier compañía porque deben asegurar que los equipos operen correctamente, con mayor razón si desean obtener, o ya obtuvieron un certificado de calidad, ya que las compañías certificadoras realizan auditorías periódicamente para verificar que los instrumentos sean calibrados rigurosamente bajo un programa establecido.

En la presente tesis se desarrolló una aplicación de observadores de estado para verificar las mediciones de temperatura de un proceso de extrusión de plásticos, cuyo equipo utiliza sensores de temperatura del tipo RTD para controlar el proceso a lo largo del extrusor; el proceso analizado en esta tesis consta de cinco zonas, cada una con su correspondiente sensor de temperatura. A partir del modelo matemático del comportamiento dinámico del proceso de extrusión, se diseñó un observador de estado para estimar las temperaturas en las cinco zonas del proceso. Así la comparación entre las temperaturas registradas por los instrumentos de medición y las estimadas por el observador de estado permitirá determinar si los equipos de medición están operando correctamente. Se pretende que este trabajo sirva de base para aplicarlo en otros procesos

con diferentes variables e instrumentos de medición y lograr desarrollar también un modelo para la aplicación de observadores de estado para verificar las mediciones de otras variables de proceso.



# UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

# INDICE

	Página
DEDICATORIAS.....	i
AGRADECIMIENTOS.....	ii
PROLOGO.....	iii
INDICE.....	v
SINTESIS.....	1
CAPITULO 1. INTRODUCCION	
1.1 Objetivo de la tesis.....	3
1.2 Motivación.....	4
1.3 Limitaciones.....	5
1.4 Estructura.....	6

## DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

### CAPITULO 2. INSTRUMENTO DE MEDICION

2.1 Introducción.....	7
2.2 Características de un RTD.....	8
2.3 Configuración de las puntas de conexión.....	11
2.4 Medición de resistencia.....	14
2.5 Conversión de resistencia a temperatura.....	16
2.6 Conclusiones del capítulo.....	18

## CAPITULO 3. MODELO DEL PROCESO DE EXTRUSION DE PLASTICOS

3.1	Introducción.....	20
3.2	Descripción básica de un extrusor.....	21
3.3	Descripción del proceso de extrusión de plásticos.....	23
3.4	Modelo matemático.....	28
3.5	Conclusiones del capítulo.....	33

## CAPITULO 4. OBSERVADORES DE ESTADO

4.1	Introducción.....	34
4.2	Controlabilidad y observabilidad.....	37
4.2.1	Controlabilidad.....	37
4.2.1.1	Controlabilidad completa del estado para un sistema de control en tiempo discreto lineal e invariante en el tiempo.....	37
4.2.1.2	Controlabilidad de un sistema de control en tiempo continuo lineal e invariante en el tiempo.....	40
4.2.2	Observabilidad.....	42
4.2.2.1	Observabilidad completa de los sistemas de control en tiempo discreto.....	43
4.2.2.2	Observabilidad completa de los sistemas de control en tiempo continuo lineales e invariantes en el tiempo.....	44
4.3	Observadores de estado.....	45
4.3.1	Observador de estado de orden completo.....	51
4.4	Diseño del observador de estado para el modelo de extrusión de plásticos.....	56
4.5	Conclusiones del capítulo.....	61

## CAPITULO 5. ANALISIS DE RESULTADOS

5.1	Introducción.....	63
5.2	Metodología de evaluación.....	64
5.3	Análisis de resultados.....	65
5.3.1	Modelo del extrusor.....	65

5.3.2 Observador de estado.....	68
5.4 Aplicación del observador de estado en tiempo real.....	72
5.5 Conclusiones del capítulo.....	73

## CAPITULO 6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

6.1 Introducción.....	75
6.2 Conclusiones.....	76
6.3 Aportaciones.....	78
6.4 Recomendaciones.....	78

BIBLIOGRAFIA.....	80
-------------------	----

LISTADO DE FIGURAS.....	82
-------------------------	----

APENDICE 1. TABLA DE RESISTENCIA CONTRA TEMPERATURA.....	84
--	----

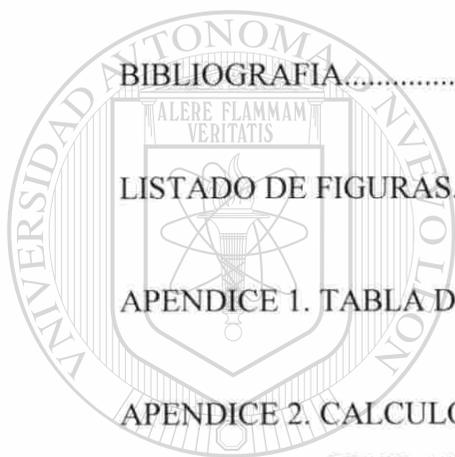
APENDICE 2. CALCULO DE PARAMETROS DEL MODELO DE EXTRUSION DE PLASTICO.....	85
---	----

APENDICE 3. NOMENCLATURA UTILIZADA.....	89
---	----

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS APENDICE 4. ESPECIFICACIONES TECNICAS DEL EXTRUSOR.....	91
---	----

GLOSARIO.....	93
---------------	----

RESUMEN AUTOBIOGRAFICO.....	99
-----------------------------	----



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

APENDICE 3. NOMENCLATURA UTILIZADA.....89



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

APENDICE 4. ESPECIFICACIONES TECNICAS DEL EXTRUSOR.....91

GLOSARIO.....93

RESUMEN AUTOBIOGRAFICO.....99

# SINTESIS

En el capítulo 1 de esta tesis se describe el objetivo primordial que se persigue en el desarrollo de la misma, es decir en dónde y cómo se puede aprovechar la realización de este tema en especial; también se presenta la motivación por la cual se decidió desarrollar este tema y cuales son sus principales limitaciones.

El capítulo 2 se refiere principalmente a las características de los sensores de temperatura así como también a los distintos tipos y comportamiento de los mismos. Se describen también los antecedentes sobre las mediciones de temperatura y los primeros sensores que surgieron; también se describen algunos conceptos de exactitud y errores de medición de los sensores de temperatura y conversiones de resistencia a temperatura.

En el capítulo 3 se describe el funcionamiento de un extrusor de plásticos, las características básicas y las partes principales que lo componen; también se analiza el proceso de extrusión de plásticos, en el cual se mencionan los puntos más importantes de este concepto. Posteriormente se analiza un modelo matemático basado en un balance macroscópico de energía en una de las zonas del barril en el cual se relacionan las variables de los coeficientes de temperatura involucradas así como también conductividades térmicas del barril y del tornillo del extrusor. Finalmente se plantea el modelo del sistema completo, compuesto por un sistema de cinco ecuaciones diferenciales que caracterizan el comportamiento dinámico de las temperaturas en cada zona del proceso.

En el capítulo 4 se analizan dos conceptos fundamentales de los sistemas de control: la controlabilidad y la observabilidad, los cuales son básicos para el diseño de un observador de estado. Se describe el procedimiento para el diseño de un observador de estado de orden completo, a partir de observaciones de las señales de salida y las

entradas de control, considerando un sistema dinámico. Finalmente se desarrolla el observador de estado en base a un modelo simplificado del proceso de extrusión descrito en el capítulo 3.

En el capítulo 5 se analizan los resultados de las simulaciones, donde se verifica la adaptación del extrusor para esta aplicación, así como el comportamiento del observador de estado propuesto en esta tesis como un método indirecto para la verificación de los registros de temperatura de los equipos de medición asociados. Los resultados demuestran la validez del modelo del extrusor, ya que se aprecian cambios de  $1/40^{\circ}\text{C}$  por segundo, lo que coincide con la respuesta de un extrusor de plásticos real; asimismo, las simulaciones indican que la salida del observador converge a los valores de temperatura del modelo en un tiempo de respuesta del observador menor a los 10 segundos, lo cual es bastante aceptable considerando que el proceso de extrusión de plásticos tiene asociadas constantes de tiempo muy grandes por tratarse de un fenómeno de transferencia de calor. Estos resultados demuestran la factibilidad de utilizar el observador de estado como un método indirecto para la verificación de los registros de temperatura de los equipos de medición.

---

En el capítulo 6 se describen las principales conclusiones derivadas del desarrollo de esta tesis, así como las aportaciones al conocimiento derivadas y las recomendaciones para trabajos de investigación futuros en este tema.

# CAPITULO 1

## INTRODUCCION

### 1.1 OBJETIVO DE LA TESIS

Definir un método alternativo que permita establecer en forma precisa, si los instrumentos de medición de temperatura utilizados en un proceso de extrusión de plástico proporcionan lecturas correctas, sin recurrir al método tradicional de calibración a través de la comparación directa con un patrón.

---

El trabajo APLICACION DE OBSERVADORES DE ESTADO PARA VERIFICAR LAS MEDICIONES DE TEMPERATURA EN UN PROCESO DE EXTRUSION, propone la aplicación de un observador de estado, que estime las temperaturas en cada una de las zonas del proceso. De esta forma, la comparación directa entre las temperaturas medidas y las estimadas, indicará si las lecturas de temperatura de los sensores son correctas o no, en cuyo caso se deberán recalibrar.

## 1.2 MOTIVACION

Las investigaciones sobre combustibles sintéticos, conversión de energía solar y el desarrollo de nuevas máquinas son algunas de las disciplinas que están creciendo, respondiendo al estado de disminución de los recursos naturales. Como todas las industrias ponen mucho énfasis en la eficiencia de la energía, la medición fundamental de temperatura asume una nueva importancia.

Una gran mayoría del equipo industrial que utiliza instrumentos de medición de temperatura para controlar el proceso son de operación continua, sin embargo, estos deben de ser calibrados periódicamente para asegurar su buen funcionamiento. Las plantas necesitan interrumpir la producción en sus equipos para verificar estas calibraciones, afectando esto el rendimiento productivo del equipo. En muchos de los procesos, el hecho de interrumpirlos, no solamente afecta en la continuidad de la operación, sino también en la estabilización del mismo al tiempo de ponerlos en operación de nuevo.

---

Debido a estas razones, la disponibilidad de un método indirecto que permita determinar el correcto funcionamiento de los equipos de medición, en este caso de temperatura, sería de gran importancia, ya que los procedimientos de revisión y recalibración de estos equipos se realizarían solo en caso necesario.

En la actualidad, las industrias que han obtenido un Certificado de Calidad o que desean obtenerlo, se ven en la necesidad de calibrar sus equipos rigurosamente, por lo cual esta herramienta podrá ser de gran utilidad.

### 1.3 LIMITACIONES

La aplicación de observadores de estado para verificar las mediciones de temperatura en un proceso de extrusión, persigue evitar interrupciones innecesarias de operación del equipo y por consecuencia, aumentar la productividad.

Este trabajo representa un primer paso hacia el establecimiento de un método para validar las lecturas de los sensores de temperatura, razón por la cual se restringió el alcance de la investigación. Este trabajo presenta dos limitaciones básicas; primero, no se realizó una extensa búsqueda bibliográfica para identificar todos los posibles modelos matemáticos de extrusión; tomando en cuenta que las características de estos modelos varían en dependencia de las dimensiones del extrusor, y el tipo de materia prima, se decidió adecuar el modelo desarrollado por el Dr. Carlos A. Guerrero Salazar [2], destacado profesor investigador de la Universidad Autónoma de Nuevo León.

La segunda limitación de este trabajo es que los resultados obtenidos, que demuestran el excelente desempeño del observador de estado para estimar las temperaturas del proceso, son en base a simulaciones en computadora digital. Aún falta validar su desempeño en tiempo real, donde se podrán evaluar los posibles errores originados por las simplificaciones del método utilizado.

No obstante estas limitaciones, la aplicación de este método en ambientes industriales puede llegar a proporcionar resultados satisfactorios una vez que sea implementado.

## 1.4 ESTRUCTURA

La APLICACION DE OBSERVADORES DE ESTADO PARA VERIFICAR LAS MEDICIONES DE TEMPERATURA EN UN PROCESO DE EXTRUSION consiste en simular una serie de señales a un modelo de extrusión, para obtener un resultado y comportamiento del mismo y posteriormente hacer lo mismo con el observador de estado, para después analizar estos resultados y poder llegar a una conclusión del estado del instrumento de medición.

Para esto primeramente se describen las características y el comportamiento de los sensores de temperatura, así como también algunos conceptos de exactitud y errores de medición. Después se describe el funcionamiento de un extrusor de plásticos, las características básicas, las partes principales que lo componen y se utiliza o adecua un modelo matemático que caracteriza el comportamiento dinámico de las temperaturas en cada zona del proceso. Posteriormente se analizan los conceptos de controlabilidad y observabilidad, se describe el procedimiento para el diseño de un observador de estado de orden completo y se diseña éste en base a un modelo simplificado del proceso de extrusión. Finalmente se analizan los resultados de las simulaciones, donde se verifica la adaptación del extrusor para esta aplicación, así como el comportamiento del observador de estado propuesto en esta tesis como un método indirecto para la verificación de los registros de temperatura de los equipos de medición asociados y se describen las principales conclusiones, así como las aportaciones y las recomendaciones para trabajos de investigación futuros en este tema.

## CAPITULO 2

# INSTRUMENTO DE MEDICION

### 2.1 INTRODUCCION

La medición de temperatura en cualquier proceso de fabricación es de vital importancia para asegurar la calidad del producto, por lo cual es necesario reducir al máximo los errores de medición y la necesidad de detectar mediciones erróneas en estos equipos; debido a esto es necesario contar con un método para verificar la medición de temperatura sin parar el proceso, evitando así pérdidas del producto y reduciendo costos de operación.

Los transductores de temperatura mas comunes son cuatro: el termopar, el RTD (detector de temperatura por resistencia), el termistor y el sensor de circuito integrado (ver Fig. 2.1), [7]. A pesar de la gran popularidad del termopar, éste es frecuentemente sustituido por un RTD, como en la aplicación que describiremos mas adelante; por esta razón nos concentraremos en las técnicas de medición del RTD.

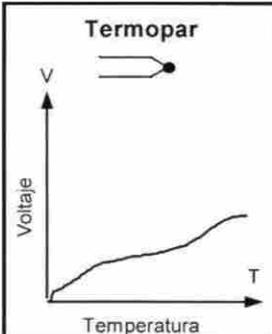
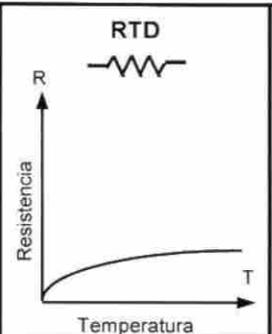
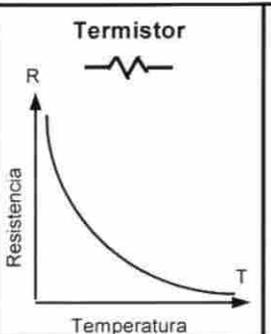
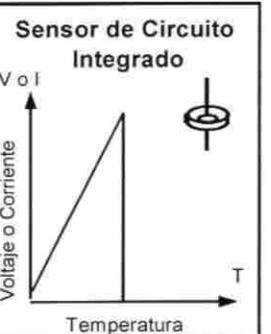
	<b>Termopar</b> 	<b>RTD</b> 	<b>Termistor</b> 	<b>Sensor de Circuito Integrado</b> 
<b>Ventajas</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Autoalimentado.</li> <li>• Simple.</li> <li>• De uso rudo.</li> <li>• Barato.</li> <li>• Amplia variedad.</li> <li>• Amplios rangos de temperatura.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Mas estable.</li> <li>• Mas preciso.</li> <li>• Mas lineal que el termopar.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Alta salida.</li> <li>• Rápido.</li> <li>• Medición de resistencia de dos cables.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Mas lineal.</li> <li>• La mas alta salida.</li> <li>• Barato.</li> </ul>
<b>Desventajas</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No lineal.</li> <li>• Bajo voltaje.</li> <li>• Requiere referencia.</li> <li>• Menos estable.</li> <li>• Menos sensible.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Caro.</li> <li>• Requiere una fuente de corriente.</li> <li>• Pequeño delta R.</li> <li>• Baja resistencia absoluta.</li> <li>• Se autocalienta.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No lineal.</li> <li>• Limitado rango de temperatura.</li> <li>• Frágil.</li> <li>• Requiere una fuente de corriente.</li> <li>• Se autocalienta.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>T &lt; 200\text{ }^{\circ}\text{C}</math></li> <li>• Requiere una fuente de voltaje.</li> <li>• Lento.</li> <li>• Se autocalienta.</li> <li>• Configuraciones limitadas.</li> </ul>

Fig. 2.1. Listado comparativo de ventajas y desventajas de los sensores de temperatura mas comunes.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## 2.2 CARACTERÍSTICAS DE UN RTD

Los elementos de resistencia son las unidades sensoras de temperatura, y vienen en muchas formas, conformando los diferentes estándares, capaces de medir diferentes rangos de temperatura con varios tamaños y exactitudes disponibles. Pero todos funcionan de la misma manera: cada uno tiene un valor de resistencia prespecificada a una temperatura conocida, la cual cambia de una manera predecible. De esta manera, midiendo la resistencia del elemento, la temperatura del elemento puede ser determinada

de tablas, cálculos o instrumentación. Existen dos tipos de elementos: de alambre enrollado y de película delgada.

Elementos de alambre enrollado.- Los elementos de los RTD's estándar están hechos de alambre de Platino con una pureza de 99.99% enrollados en un núcleo de cerámica o vidrio y herméticamente sellados en una cápsula de cerámica o vidrio. El alambre de platino fue seleccionado debido a que reunía las necesidades de precisión termométrica. Este resiste la contaminación, puede ser altamente refinado y es estable eléctrica y mecánicamente.

Los elementos están disponibles de acuerdo a las siguientes dos curvas [7]:

Europea  $\alpha = 0.00385$  ohms / ohm / °C

Americana  $\alpha = 0.00392$  ohms / ohm / °C

Los elementos cumplen con el 0.1 % de tolerancia del estándar DIN y cumplen con el estándar DIN 43760.

Elementos de película delgada.- Están hechos de Platino depositado como una película en una base y encapsulado. Este método permite la producción de pequeños sensores, de rápida respuesta y precisos.

## DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Estos elementos de resistencia son el corazón del RTD. Generalmente un elemento de resistencia desnudo es demasiado frágil y sensible para ser usado de esta manera, así que tiene que ser protegido dentro de un RTD. Un detector de temperatura por resistencia es un término general para cualquier dispositivo que sensa temperatura por medio de la medición del cambio de la resistencia de un material; en la Fig. 2.2 se muestran algunos elementos de resistencia. Los RTD's vienen en muchas formas, pero usualmente vienen con una funda. Una sonda RTD es un ensamble compuesto de un elemento de resistencia, una funda, cables de extensión y una terminación o conexión. La funda, un tubo con terminación cerrada, inmoviliza el elemento, protegiéndolo

contra humedad y el medio a ser medido. La funda además da protección y estabilidad a los cables de extensión de los frágiles alambres del elemento.

Algunas sondas RTD pueden ser combinadas con termopozos para protección adicional. En este tipo de aplicaciones, el termopozo no solamente agregará protección al RTD, además sellará cualquier sistema que el RTD mida (un tanque o boiler, por ejemplo) del contacto con éste. Esto llega a ser una gran ayuda en el reemplazo del RTD sin tener que drenar el tanque o sistema.

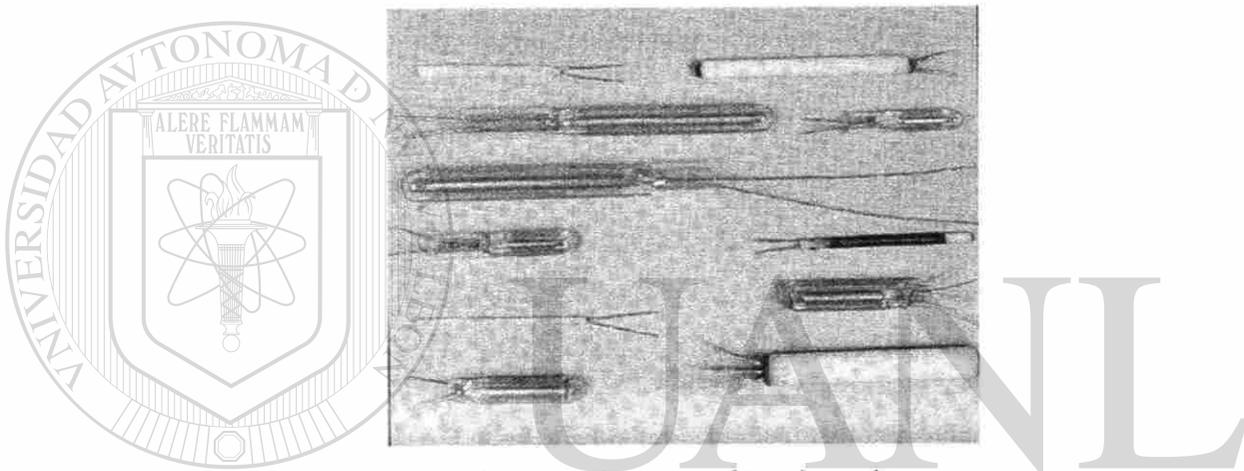


Fig. 2.2. Elementos de resistencia.

## UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Los termopares son un viejo intento y método verdadero de medición de temperatura eléctricamente. Estos funcionan muy diferente que los RTD's, pero generalmente aparecen en la misma configuración, frecuentemente con funda y posiblemente en un termopozo. Básicamente estos operan con el efecto de Seebeck, el cual resulta en un cambio en la fem termoeléctrica inducida por un cambio de temperatura. Muchas aplicaciones se prestan tanto para RTD's o termopares. Los termopares tienden a ser mas robustos, libres de errores de autocalentamiento y pueden usar un gran surtido de instrumentación. Sin embargo, los RTD's especialmente los de platino, son mas estables y exactos.

## 2.3 CONFIGURACION DE LAS PUNTAS DE CONEXION

Como se mencionó anteriormente, el elemento de un Detector de Temperatura por Resistencia (RTD) generalmente viene en una funda. Obviamente, todos los criterios aplicables a los elementos de resistencia también se aplican aquí, pero además deberán ser considerados el tamaño del elemento, la construcción y las dimensiones del ensamble completo del RTD. Ya que las puntas de conexión usadas entre el elemento de resistencia y el instrumento de medición tienen una propia resistencia, se tienen que proporcionar recursos para compensar esta inexactitud [7]. En la Fig. 2.3 se describe la configuración de dos puntas (Estilo 1).

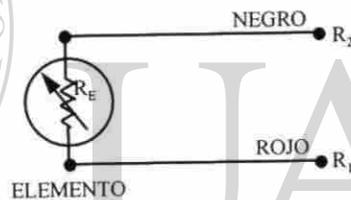
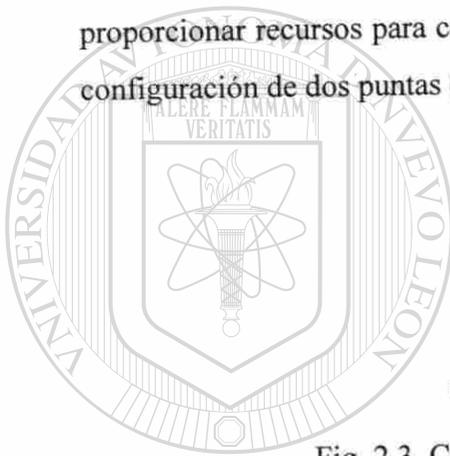


Fig. 2.3. Configuración de dos puntas (Estilo 1).

El círculo representa los límites del elemento de resistencia del punto de calibración. Una configuración de 2, 3 ó 4 puntas tendrá que extenderse del punto de calibración de tal manera que todas las resistencias fuera del punto de calibración serán compensadas.

El elemento de resistencia proporciona una cierta precisión a la medición de temperatura. Desafortunadamente, cuando se toma la lectura de resistencia, el instrumento indica  $R_{TOTAL}$  :

$$\text{Donde } R_T = R_1 + R_2 + R_E$$

Esto produce una lectura de temperatura más alta que la que está siendo medida actualmente. Muchos sistemas pueden ser calibrados para eliminar este problema.

Muchos RTD's incorporan una tercera punta con resistencia  $R_3$ . Esta punta es conectada a uno de los lados del elemento de resistencia junto con la punta 2, como se muestra en la Fig. 2.4.

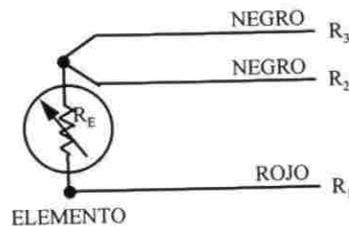


Fig. 2.4. Configuración de tres puntas (Estilo 2).

Esta configuración tiene una conexión a una de las puntas del sensor y dos conexiones a la otra punta del sensor. Conectadas a un instrumento diseñado para aceptar una señal de entrada de tres conexiones, se obtiene la compensación de resistencia de las puntas y del cambio de resistencia en las puntas, debido a la temperatura. Esta es la configuración más comúnmente usada.

Si los tres cables usados en las puntas de conexión son idénticos y de igual longitud, entonces  $R_1 = R_2 = R_3$ . Midiendo la resistencia a través de las puntas 1, 2 y el elemento de resistencia, se obtendrá la resistencia total del sistema ( $R_1 + R_2 + R_E$ ). Además es medida la resistencia a través de las puntas 2 y 3 ( $R_2 + R_3$ ), con esto se obtiene la resistencia solo de los cables de las puntas de conexión, y ya que la resistencia de todos los cables son iguales, restando este valor ( $R_2 + R_3$ ) de la resistencia total del sistema ( $R_1 + R_2 + R_E$ ) da como resultado  $R_E$ , obteniendo una medición precisa de temperatura.

Una configuración de cuatro puntas de conexión es también usada (ver Fig. 2.5). Se suministran dos conexiones a cada lado del sensor. Esta construcción es usada para mediciones de más alta precisión.

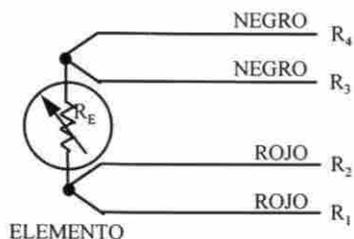


Fig. 2.5. Configuración de cuatro puntas (Estilo 3).

En esta configuración de cuatro puntas, circula una corriente constante a través de las puntas externas 1 y 4, y la caída de voltaje es medida a través de las puntas internas 2 y 3. De esta forma se determina el valor de resistencia del elemento, sin efectos de la resistencia de los cables de las puntas de conexión. Esto ofrece una ventaja sobre la configuración de tres puntas, sólo si se usan cables diferentes y este es un caso muy raro.

Existe otra configuración, ahora poco común, que consiste en dos puntas estándar con un lazo cerrado de cable a un costado (Fig. 2.6). Esta funciona de igual forma que la configuración de tres puntas, pero usa un cable extra para hacerlo. Un par de cables separados se suministran en forma de lazo para obtener la compensación de resistencia de las puntas y de los cambios ambientales en la resistencia de las puntas.

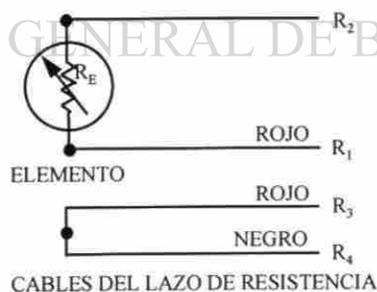


Fig. 2.6. Configuración de dos puntas mas lazo (Estilo 4).

## 2.4 MEDICION DE RESISTENCIA

Los valores comunes de resistencia para un RTD de platino son desde 10 ohms para los modelos de construcción normal hasta varios miles de ohms para RTD's de película. El valor más común es de 100 ohms a 0 °C. En el estándar DIN 43760, el coeficiente de temperatura del cable de platino es  $\alpha = 0.00385$ . Para un cable de 100 ohms, este corresponde a + 0.385 ohms / °C a 0 °C. Este valor de  $\alpha$  es actualmente el promedio de la pendiente de 0 a 100 °C. El cable de platino químicamente más puro usado en estándares de resistencias de platino tiene un  $\alpha$  de + 0.00392 ohms / ohm / °C.

Ambos valores, la pendiente y el absoluto son números pequeños, especialmente cuando consideramos el hecho de que desde la punta de los cables de medición hacia el sensor pueden tener varios ohms o inclusive decenas de ohms. Un cable de pequeña impedancia puede contribuir con error significativo a nuestra medición de temperatura.

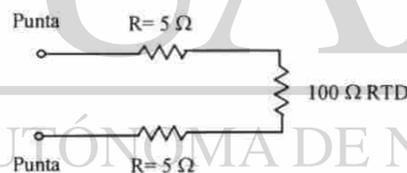


Fig. 2.7. Efecto de la resistencia de los cables de las puntas de conexión.

Un alambre de 10 ohms de impedancia implica  $10/0.385 \approx 26$  °C de error en la medición (ver Fig. 2.7). Inclusive el coeficiente de temperatura del alambre de las puntas puede contribuir al error de medición. El método clásico para evitar este problema ha sido el uso de un puente (ver Fig. 2.8).

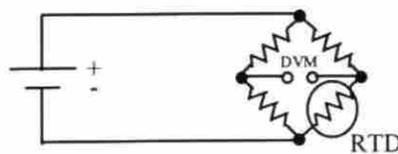


Fig. 2.8. Puente de Wheatstone.

La salida de voltaje del puente es una indicación indirecta de la resistencia del RTD. El puente requiere cuatro cables de conexión, una fuente externa y tres resistencias que tengan un coeficiente de temperatura de cero. Para evitar someter las tres resistencias del puente a la misma temperatura que el RTD, éste es separado del puente por medio de un par de cables de extensión (ver Fig. 2.9).

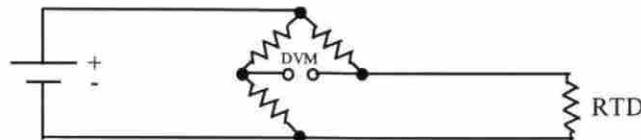


Fig. 2.9. Puente de Wheatstone con RTD separado.

Esos cables de extensión reviven el problema que se tenía inicialmente: la impedancia de los cables de extensión afecta la lectura de temperatura. Este efecto puede ser minimizado usando una configuración del puente de tres cables (ver Fig. 2.10). Si los cables A y B son perfectamente iguales en longitud, sus efectos de impedancia se cancelarán, debido a que cada uno está en una punta opuesta del puente. El cable C no lleva corriente y actúa como un cable sensor.

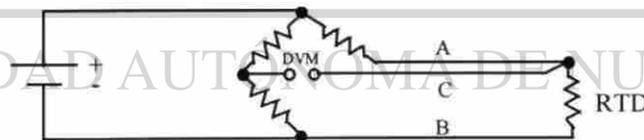


Fig. 2.10. Puente de Wheatstone de tres cables.

El puente de Wheatstone mostrado en la Fig. 2.10 crea una relación no lineal entre el cambio de resistencia y el cambio de la salida de voltaje del puente. Esta característica no lineal de temperatura contra resistencia del RTD requiere de una conversión de la salida de voltaje del puente a una impedancia equivalente del RTD.

La técnica de resistencia de cuatro cables, usando una fuente de corriente con un voltímetro digital (DVM) remoto, soluciona muchos problemas asociados con el uso del puente (ver Fig. 2.11).

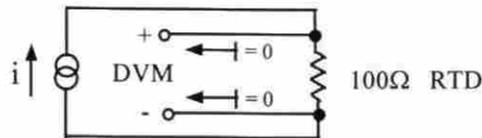


Fig. 2.11. Medición de resistencia de cuatro cables.

La salida de voltaje obtenida por el voltímetro digital es directamente proporcional a la resistencia del RTD, por lo que solo es necesario una única conversión. Las tres resistencias del puente son reemplazadas por una resistencia de referencia. El voltímetro digital mide solamente la caída de voltaje a través del RTD y es insensible a la longitud de los cables.

La única desventaja de usar una resistencia de cuatro cables es que se necesita un cable de extensión más que el puente de tres cables. Este es un pequeño precio que hay que pagar tomando en cuenta el requerimiento en la exactitud de la medición de temperatura.

## 2.5 CONVERSION DE RESISTENCIA A TEMPERATURA

El RTD es un dispositivo más lineal que el termopar, pero aún así requiere de una curva de adecuación para la determinación de la temperatura a partir de la medición de resistencia. La ecuación de Callendar-Van Dusen [7] ha sido usada por años para aproximar la curva del RTD. Esta se expresa como:

$$R_T = R_0 + R_0 \alpha \left[ T - \delta \left( \frac{T}{100} - 1 \right) \left( \frac{T}{100} \right) - \beta \left( \frac{T}{100} - 1 \right) \left( \frac{T^3}{100} \right) \right]$$

donde:

$R_T$  = Resistencia a temperatura T

$R_0$  = Resistencia a 0 °C

$\alpha$  = Coeficiente de temperatura a 0 °C (típicamente + 0.00392  $\Omega/\Omega/^\circ\text{C}$ )

$\delta$  = 1.49 (para el platino  $\alpha = 0.00392$ )

$\beta = 0$                        $T > 0$

$\beta = 0.11$  (típico)       $T < 0$

Los valores exactos para los coeficientes  $\alpha$ ,  $\beta$ , y  $\delta$  son determinados mediante pruebas al RTD a cuatro diferentes temperaturas y resolviendo las ecuaciones resultantes. Estas ecuaciones fueron reemplazadas en 1968 por un polinomio de orden 20 con la finalidad de obtener una curva de adecuación más exacta. La gráfica de esta ecuación (ver Fig. 2.15) muestra que el RTD es un dispositivo más lineal que un termopar.

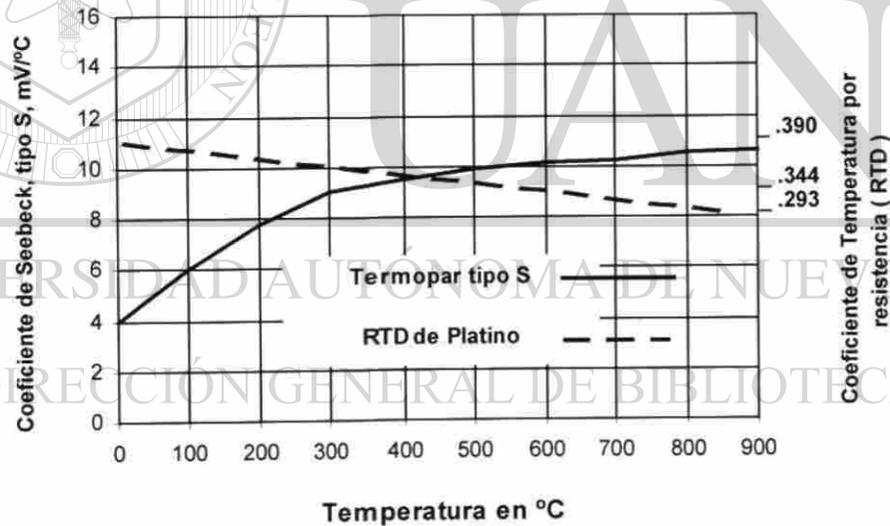


Fig. 2.12. Curva de adecuación de un termopar tipo S con respecto a un RTD.

## 2.6 CONCLUSIONES DEL CAPITULO

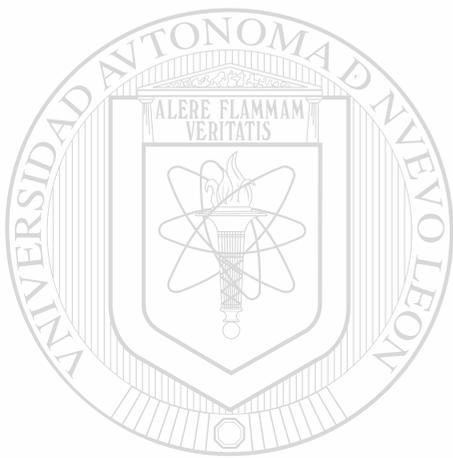
Los transductores de temperatura más comunes son cuatro: el termopar, el RTD (detector de temperatura por resistencia), el termistor y el sensor de circuito integrado [7]. A pesar de la gran popularidad del termopar, éste es frecuentemente sustituido por un RTD.

Una sonda RTD es un ensamble compuesto de un elemento de resistencia, una funda, cables de extensión y una terminación o conexión. El platino es usado como el elemento primario en todos los termómetros de resistencia de alta precisión; éste es especialmente conveniente para este propósito, debido a que puede resistir altas temperaturas mientras mantiene una excelente estabilidad y linealidad con la temperatura. Los elementos de resistencia son la parte más importante del RTD ya que son las unidades sensoras de temperatura; estas vienen en muchas formas, conformando los diferentes estándares, capaces de medir diferentes rangos de temperatura con varios tamaños y exactitudes disponibles; en general cada uno tiene un valor de resistencia preespecificada a una temperatura conocida, la cual cambia de una manera predecible con los cambios de temperatura. De esta manera, midiendo la resistencia del elemento, la temperatura del elemento puede ser determinada por tablas [7], cálculos o instrumentación.

Los elementos de resistencia están disponibles de acuerdo a dos curvas [7]: la Europea ( $\alpha = 0.00385 \text{ ohms / ohm / } ^\circ\text{C}$ ) y la Americana ( $\alpha = 0.00392 \text{ ohms / ohm / } ^\circ\text{C}$ ).

Debido a que las dos puntas de conexión usadas entre el elemento de resistencia y el instrumento de medición tienen una resistencia propia, se tienen que proporcionar recursos para compensar esta inexactitud [7]. Muchos RTD's incorporan una tercera punta, que se conecta a uno de los lados del elemento de resistencia. Esta configuración tiene una conexión a una de las puntas del sensor y dos conexiones a la otra punta del

sensor. De esta forma, captando una señal de entrada de tres conexiones, se obtiene la compensación de resistencia de las puntas y del cambio de resistencia en las puntas, debido a la temperatura; esta es la configuración mas comúnmente usada.



# UANL

---

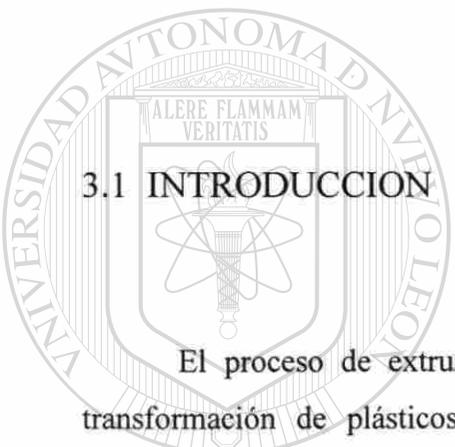
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## CAPITULO 3

# MODELO DEL PROCESO DE EXTRUSION DE PLASTICOS



### 3.1 INTRODUCCION

El proceso de extrusión es uno de los más importantes en la industria de transformación de plásticos. Entre los productos que se pueden manufacturar se encuentran: tubería, manguera, fibras, película y un número ilimitado de productos. El proceso de extrusión se utiliza además para “compounding”, es decir, para mezclar y formular compuestos de plástico, y producir materia prima como por ejemplo, gránulos de concentrado o de compuesto.

En este capítulo se mencionan algunos puntos importantes del proceso de extrusión de plásticos y las partes básicas que compone un extrusor. Se recalca el hecho de que un inadecuado control de temperatura en las zonas del proceso provocará variaciones de temperatura que se verán reflejadas en una mala calidad del producto de salida. Este aspecto pone de manifiesto la importancia de contar con una medición confiable de temperatura de los equipos de medición correspondientes. Finalmente, se describe el modelo matemático de un extrusor con cinco zonas de calentamiento, el cual será utilizado en el siguiente capítulo para el diseño de un observador de estado que

estime las temperaturas del proceso, permitiendo así determinar el correcto funcionamiento de los equipos de medición de temperatura.

### 3.2 DESCRIPCION BASICA DE UN EXTRUSOR

La parte básica de un extrusor es un husillo o tornillo que gira dentro de un barril o cilindro, y es capaz de bombear (empujar) un material, bajo ciertas condiciones de operación a una velocidad específica. Los materiales utilizados en el proceso de extrusión son por lo general, termoplásticos. Estos materiales se suavizan cuando se calientan y se transforman en fluidos, que posteriormente se solidifican cuando se enfrían.

Cuando un material termoplástico se alimenta al extrusor, el husillo lo empuja hacia delante a lo largo del barril, donde existe un proceso de calentamiento mediante resistencias y se transforma en fluido. Este fluido continúa y al final, se le hace pasar a través de un dado que da el perfil o la forma final deseada. Una vez que sale del dado, el fluido es enfriado rápidamente para mantener la forma. Este dado puede considerarse como una resistencia al flujo. Entre más largo y pequeño sea el orificio de paso, mayor será la potencia necesaria para empujar el material fundido a través del dado. La Fig. 3.1 muestra un diagrama típico de un extrusor, donde se señalan las partes principales.

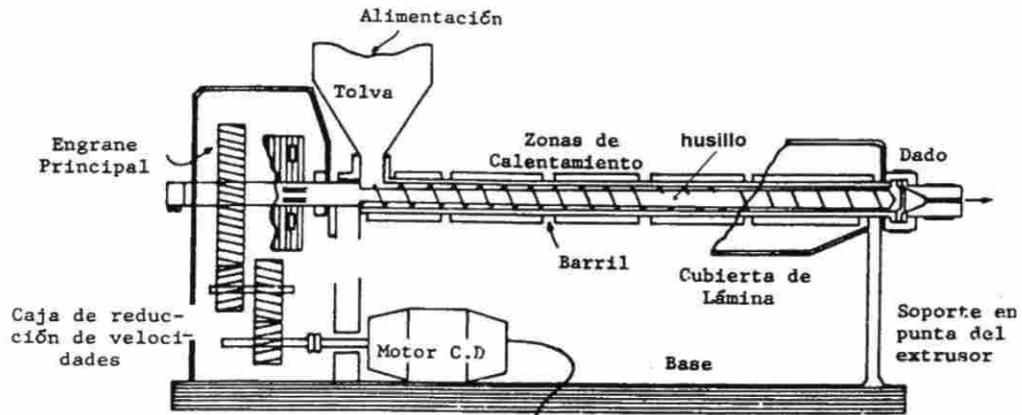


Fig. 3.1. Diagrama esquemático de un extrusor.

La Fig. 3.2 presenta un diagrama en dos dimensiones de un sistema husillo-barril; las variables implicadas en este sistema son:

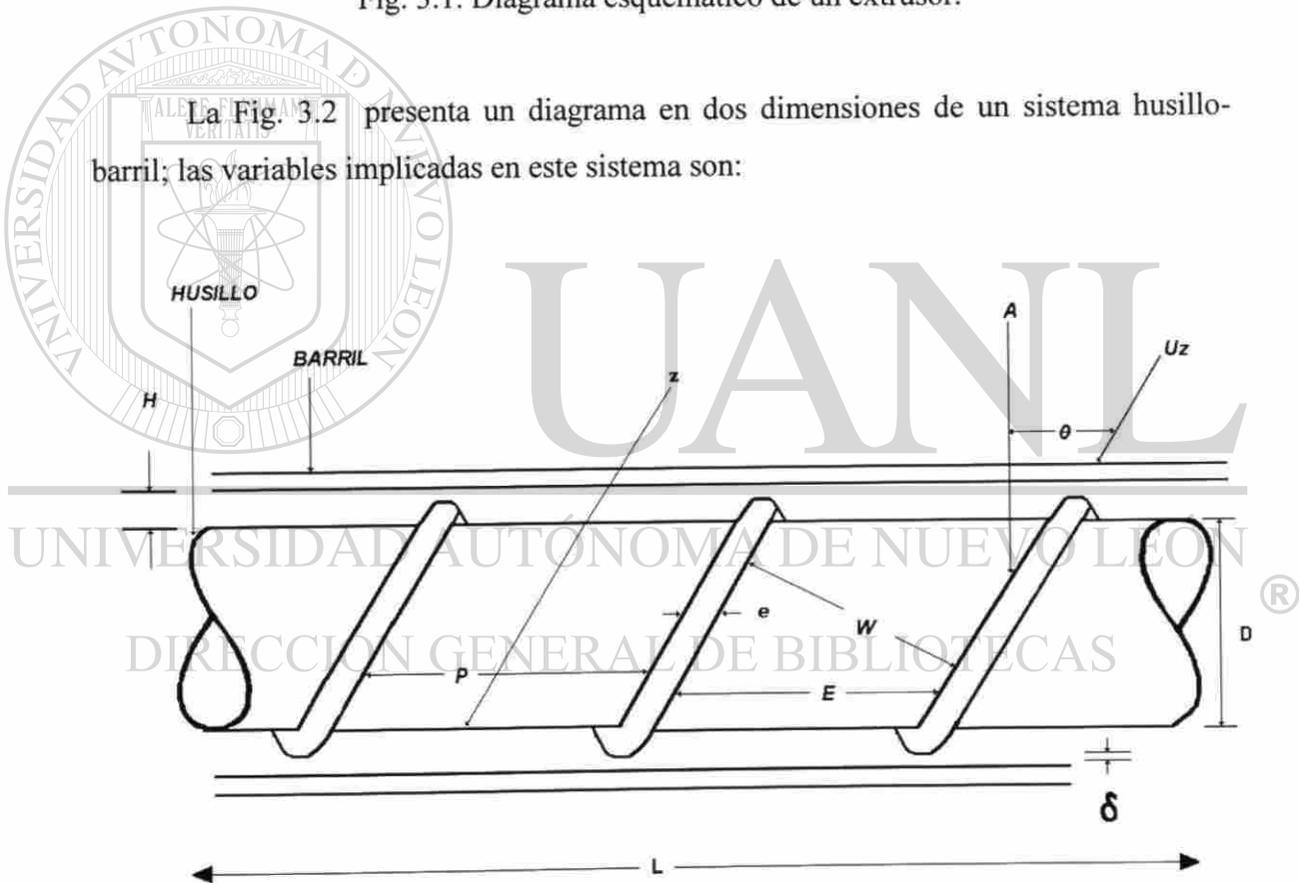


Fig. 3.2. Sistema husillo-barril.

$H$  = Profundidad del canal del Husillo (cm)

$w$  = Ancho del canal del Husillo (cm)

$D$  = Diámetro del barril (cm)

$L$  = Longitud del husillo (cm)

$Z$  = Longitud del canal del husillo

$E$  = Longitud (axial) entre dos hélices del husillo (cm)

$e$  = espesor del hélice del husillo (cm)

$P$  = Longitud de campo (cm) ( $P=E+e/\cos\theta$ )

$\theta$  = Angulo entre la hélice y la dirección perpendicular al husillo (grados)

$\delta$  = Separación entre la hélice y el barril (cm)

$U_z$  = Velocidad máxima del fluido en dirección del canal (cm/seg)

### 3.3 DESCRIPCIÓN DEL PROCESO DE EXTRUSIÓN DE PLÁSTICOS

La sección del husillo y barril en un extrusor tienen cuatro funciones principales que son calentar, fundir, mezclar y presurizar, en general, el proceso completo se divide en tres zonas:

Zona de alimentación.

Zona de compresión.

Zona de dosificación.

La función de la zona de alimentación es coleccionar los gránulos de la tolva y transportarlos hacia adelante en el canal del husillo. En la zona de compresión, como su nombre lo indica, se genera una compresión en los gránulos para forzar el aire contenido hacia atrás. La función de la zona de dosificación es hacer que la masa de plástico fundido alcance la consistencia y presión requerida para extrusión.

Para un transporte (bombeo) eficiente, los gránulos deben adherirse a la pared del barril y mostrar un alto grado de deslizamiento en la pared del canal del husillo. Para

La relación entre el volumen de la primera vuelta del canal del husillo (al lado de la tolva) y el volumen de la última vuelta (al lado del dado) se conoce como la relación de compresión. En máquinas comerciales ese valor varía por lo general desde 2:1 hasta 4:1 (una manera aproximada de medir la relación de compresión es tomar la relación entre la profundidad del canal del husillo en la primera vuelta y la profundidad del canal en la última vuelta). En la zona de dosificación, la masa del polímero fundido alcanza la consistencia correcta y la presión requerida para extrusión. Esta masa debe ser bombeada hacia el dado a una presión constante, y la consistencia también debe permanecer constante. Así, la función de la zona de dosificación es hacer que la masa de plástico fundido alcance la consistencia y presión requeridas para extrusión. En esta zona se requiere de una presión relativamente alta para obtener un mejor mezclado del material y obtener así propiedades constantes en el producto. Este incremento en la presión se obtiene al imponer restricciones al flujo del plástico fundido, ya sea en la zona de dosificación del husillo o en el cabezal. Esto también se logra al aumentar la viscosidad del plástico (disminuir la temperatura).

Al final de la zona de dosificación es común tener un filtro (Fig. 3.4), el cual consiste en un disco con perforaciones, que hace las funciones de una coladera. Las funciones de este filtro son las siguientes:

- a) Aumentar la presión.
- b) Transformar el flujo de rotación del plástico fundido, procedente de la zona de dosificación del husillo, en flujo lineal, paralelo al eje del husillo.
- c) Detener impurezas y material no plastificado.

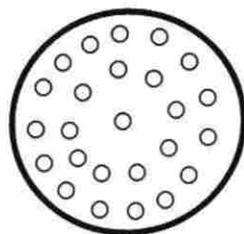


Fig. 3.4. Filtro.

Los husillos deben tener la longitud y el diámetro suficientes para poder acomodar las zonas de alimentación, compresión y dosificación de modo que la masa de plástico fundido se encuentre en las condiciones requeridas para su extrusión a través del dado. Sin embargo, otras dimensiones del husillo tales como el ángulo de la hélice, la profundidad y el ancho del canal, también son importantes.

La relación longitud/diámetro se utiliza para determinar la facilidad con que se alcanza la plastificación (asumiendo siempre que a mayor L/D, mayor facilidad de plastificación); por ejemplo, un husillo con una relación L/D de 10/1, y con D igual a 15 cm, plastificará más fácilmente que un husillo con una relación L/D de 20/1, pero con D igual a 2 cm. A pesar de lo anterior sin embargo, debe notarse que la mayoría de los extrusores para plásticos tienen una relación L/D entre 15/1 y 25/1.

Para fundir los gránulos, se genera calor internamente por fricción o se aplica calor del exterior por medio de calentadores eléctricos (colocados alrededor del barril). Para esto, se necesita un control de la cantidad de calor que se aplica, ya que si el material se calienta demasiado se puede degradar o hacerse demasiado fluido. Por otro lado, si el material se enfría demasiado, la plastificación será insuficiente. Esto da lugar a que las variaciones en temperatura produzcan además variaciones en flujo de salida, lo cual es indeseable. Normalmente se tiene de dos a seis zonas de calentamiento a lo largo del barril y el dado.

La salida de material de un extrusor depende de las dimensiones del husillo, de las dimensiones del dado, y de la velocidad de rotación del husillo [3]. Asimismo, la salida del material también depende de la relación entre la viscosidad en el dado comparada con la viscosidad en el barril, es decir:

$$\eta_{\text{dado}} < \eta_{\text{barril}} \longrightarrow \text{aumento en la salida}$$

La experiencia indica que la salida de material de un extrusor depende también de la forma en que el material plástico se alimenta a la tolva. En la mayoría de las circunstancias, se encuentra que entre mas cerca estén las partículas de tener una forma esférica de alrededor de 3 milímetros de diámetro, mayor será la salida. Algunos materiales tienden a producir gases volátiles durante la extrusión. Esto causa que los materiales presenten burbujas o porosidad. Esto se puede reducir utilizando un husillo con una zona de descompresión, como se muestra en la Fig. 3.5.

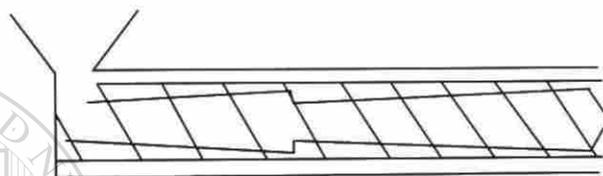


Fig. 3.5. Husillo con zona de descompresión.

Las variaciones de temperatura a lo largo del extrusor afectan directamente la viscosidad del material fundido, y por lo tanto se tendrán variaciones de flujo de material en el dado, reflejando inconsistencia en la salida del proceso. Es de suma importancia mantener controlada la temperatura en las zonas de calentamiento en el extrusor para evitar estas variaciones de viscosidad, esto se logra con controladores de temperatura instalados en cada una de las zonas. De aquí se desprende la importancia de tener una medición confiable de temperatura por parte de los equipos de medición.

En este caso el extrusor se está controlando en su totalidad con un sistema de control distribuido. Las cinco zonas de calentamiento se encuentran controlando la temperatura en modo de control PID. El actuador que se utiliza en este caso son thristores, que regulan el voltaje en las resistencias de las zonas de calentamiento. Cada una de las zonas cuenta con gráfica de tendencias.

En general, las variaciones de temperatura en un extrusor nos afecta en los siguientes aspectos:

- Variación de viscosidad en el material fundido.
- Variación en el flujo de material a la salida del extrusor.
- Variación de presión en el extrusor.
- Calidad en el proceso de extrusión.

### 3.4 MODELO MATEMATICO

El modelo matemático utilizado para el estudio del proceso de extrusión de plásticos está basado en un balance de energía macroscópica en cada una de las cinco zonas del barril. Para el desarrollo de este modelo, el barril fue subdividido en cinco subsistemas, cada uno correspondiendo a cinco diferentes zonas de calentamiento y, consecuentemente, con una longitud específica. El sensor RTD (descrito en el capítulo 2) mide la temperatura de las zonas de calentamiento de cada subsistema. En la Fig. 3.6 se muestra la localización, y en la Fig. 3.7 la contribución del análisis térmico en el subsistema  $n$ , donde:

$q1$  = calor de los elementos calefactores

$q2$  = calor del subsistema " $i + 1$ "

$q3$  = calor hacia el subsistema " $i - 1$ "

$q4$  = radiación y calor por convección

$q5$  = calor hacia el polímero y el tornillo

$T_{b,i+1}$  = temperatura de barril en el subsistema " $i$ "

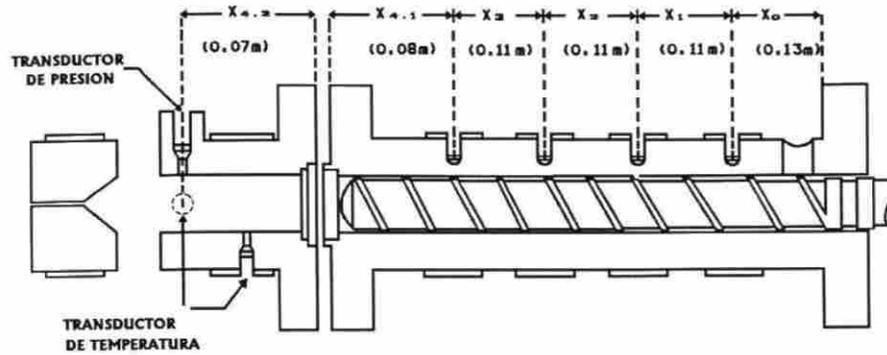


Fig. 3.6. Localización de las 5 zonas de calentamiento en el extrusor.

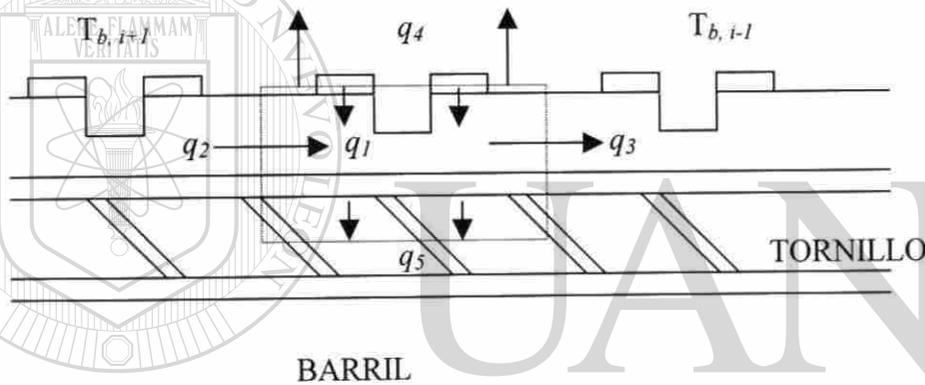


Fig. 3.7. Contribución térmica en el subsistema.

En condición transitoria el balance de calentamiento para el subsistema  $n$  es:

$$\frac{dE_b}{dt} + \frac{dE_v}{dt} = q_1 + q_2 - (q_3 + q_4 + q_5) \quad (3.1)$$

donde  $(dE_b/dt)$  y  $(dE_v/dt)$  son variaciones en el tiempo de la energía térmica del tornillo y barril. En esta ecuación, los cambios térmicos del polímero no son considerados por que son prácticamente despreciables por la variación mínima que en este caso se tiene. En estado estable, el lado izquierdo de (3.1) es cero; a continuación se indican las diferentes contribuciones térmicas para este modelo:

$$q_1 = W * \% \text{ calentamiento} \quad (3.2)$$

$$q_2 = \frac{K_b A_b (T_{b,j+1} - T_{b,j})}{x}$$

$$q_3 = \frac{K_b A_b (T_{b,j} - T_{b,j-1})}{x}$$

$$q_4 = h_a A_a (T_b - T_a) + \sigma A_a (T_b^4 - T_a^4)$$

$$q_5 = h_p A_p (T_b - T_p)$$

$$\frac{dE_b}{dt} = m_b CP_b \frac{dT_b}{dt}$$

$$\frac{dE_v}{dt} = m_b CP_v \frac{dT_v}{dt}$$

donde:

W	máxima potencia eléctrica de calentamiento
% calentamiento	porcentaje de calentamiento
$K_b$	conductividad térmica del barril
$A_a, A_b, A_p$	superficie de calentamiento barril-aire, barril-barril y barril-polímero
x	longitud del subsistema
$h_a, h_p$	coeficiente de transferencia de calor barril-aire y barril-polímero
$\sigma$	constante de Stefan-Boltzmann
$m_b, m_v$	masa del tornillo y barril
$CP_b, CP_v$	calor específico del tornillo y barril
$T_a, T_p, T_v, T_b$	temperatura del aire, del polímero, del tornillo y del barril

Sustituyendo (3.2) en (3.1) se tiene:

$$\frac{dT_{b,i}}{dt} = P * \%calentamiento + K_2(T_{b,i+1} - T_{b,i}) - [K_1(T_{b,i+1} - T_{b,i}) + H_{a,i}(T_{b,i} - T_a) + S(T_{b,i}^4 - T_a^4) + H_{p,i}(T_{b,i} - T_{p,i})] \quad (3.3)$$

donde:

$$P = W/R, \quad K_1 = K_2 = K_b A_b / xR, \quad H_a = h_a A_a / R, \quad H_p = A_p / R \quad (3.4)$$

$$S = \sigma A_a / R, \quad R = (m_b + m_v) CP_b$$

Se asume que la temperatura del tornillo sigue a la temperatura del barril que se observa en (3.3). Por lo tanto, el tornillo y el barril son considerados como dos sistemas paralelos con la misma temperatura, pero diferentes propiedades térmicas. Expresando (3.3) en variables de desviación:

$$\frac{d\tau_{b,i}}{dt} = PH\% + K_2(\tau_{b,i+1} - \tau_{b,i}) - K_1(\tau_{b,i} - \tau_{b,i-1}) - H_{p,i}(\tau_{b,i} - \tau_{p,i}) - S[(\tau_{b,i} + TBK)^4 - (\tau_{a,i} + TAK)^4 - (\tau_{a,i} + TBK^4 - TAK^4)] \quad (3.5)$$

con

$$\tau_b = T_b - T_{b,s}, \quad H\% = \%calentamiento - \%calentamiento_s, \quad \tau_a = T_a - T_{a,s} \quad (3.6)$$

$$\tau_p = T_b - T_{b,s}, \quad TBK = T_{b,s} (K), \quad TAK = T_{a,s} (K) \quad (3.6)$$

donde el subíndice "s" se refiere al valor en estado estable. Modificando (3.5):

$$\frac{d\tau_{b,i}}{dt} = K_1\tau_{b,i-1} + C_i\tau_{b,i} + K_2\tau_{b,i+1} + H_{p,i}\tau_{p,i} + H_{a,i}\tau_{a,i} + PH\% - S[(\tau_{b,i} + TBK)^4 - (\tau_{a,i} + TAK)^4 - (\tau_{a,i} + TBK^4 - TAK^4)] \quad (3.7)$$

$$C_i = -(K_1 + K_2 + H_{a,i} + H_{p,i})$$

Si se desprecia la variación en la temperatura ambiente, entonces tenemos:

$$\tau_{a,i} = 0$$

y finalmente:

$$\dot{\tau}_{b,i} = \frac{d\tau_{b,i}}{dt} = K_1\tau_{b,i-1} + C_i\tau_{b,i} + K_2\tau_{b,i+1} + H_{p,i}\tau_{p,i} + PH\% - S[(\tau_{b,i} + TBK)^4 - TAK^4] \quad (3.8)$$

Esta ecuación representa el balance térmico en un subsistema "i". En forma matricial los cinco subsistemas están presentados como:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tau}_{b,1} \\ \dot{\tau}_{b,2} \\ \dot{\tau}_{b,3} \\ \dot{\tau}_{b,4} \\ \dot{\tau}_{b,5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & K_{12} & 0 & 0 & 0 \\ K_{12} & C_2 & K_{23} & 0 & 0 \\ 0 & K_{23} & C_3 & K_{34} & 0 \\ 0 & 0 & K_{34} & C_4 & K_{45} \\ 0 & 0 & 0 & K_{45} & C_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{b,1} \\ \tau_{b,2} \\ \tau_{b,3} \\ \tau_{b,4} \\ \tau_{b,5} \end{bmatrix} - S \begin{bmatrix} F\tau_{b,1} \\ F\tau_{b,2} \\ F\tau_{b,3} \\ F\tau_{b,4} \\ F\tau_{b,5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H\%_1 \\ H\%_2 \\ H\%_3 \\ H\%_4 \\ H\%_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{p,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{p,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{p,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{p,4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_{p,5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{p,1} \\ \tau_{p,2} \\ \tau_{p,3} \\ \tau_{p,4} \\ \tau_{p,5} \end{bmatrix}$$

(3.9)

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

$$F\tau_{b,i} = (\tau_{b,i} + TBK)^4 - TBK^4$$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Es necesario remarcar que en esta representación del perfil de las temperaturas,  $T_{p,i}$  y el coeficiente de transferencia de calor del barril-polímero  $h_{p,i}$  no son parámetros directamente medibles del modelo.

### 3.5 CONCLUSIONES DEL CAPITULO

El proceso de extrusión es uno de los más importantes en la industria de transformación de plásticos. Entre los productos que se pueden manufacturar se encuentran: tubería, manguera, fibras, película y un número ilimitado de productos.

En general, las variaciones de temperatura a lo largo del extrusor afectan directamente las propiedades del proceso, es decir, se tendría una calidad inconsistente en el producto; por esta razón es de suma importancia mantener controlada la temperatura en cada una de las zonas de calentamiento del extrusor, lo cual requiere una medición confiable de temperatura. Estas variaciones de temperatura se deben principalmente a las variaciones en: la viscosidad en el material fundido, el flujo de material a la salida del extrusor, la presión en el extrusor y la calidad en el proceso de extrusión.

El balance macroscópico de energía de cada una de las zonas de calentamiento del barril permite la formulación de un modelo matemático del proceso de extrusión. Se describió el modelo matemático de un extrusor con cinco zonas de calentamiento, el cual será utilizado para el diseño de un observador de estado que estime las temperaturas del proceso, permitiendo así determinar el correcto funcionamiento de los equipos de medición de temperatura.

El modelo descrito consta de cinco ecuaciones diferenciales que caracterizan el comportamiento de las temperaturas en cada zona del proceso. En este modelo no se considera la temperatura ambiente donde se encuentra localizado el extrusor y también se desprecian las variaciones de temperatura del producto que se alimenta al extrusor; sin embargo, estas simplificaciones no afectan la validez del modelo, ya que las temperaturas normales de operación de estos equipos son mucho mayores que la temperatura ambiente.

# CAPITULO 4

## OBSERVADORES DE ESTADO

### 4.1 INTRODUCCION

En la sección 4.2 de este capítulo se presentarán dos conceptos fundamentales de los sistemas de control: controlabilidad y observabilidad. La controlabilidad se ocupa del problema de poder dirigir un sistema de un estado inicial dado, a un estado arbitrario. Un sistema es controlable si puede, mediante un vector de control no acotado, transferir dicho sistema de cualquier estado inicial a cualquier otro estado, en un número finito de periodos de muestreo. Por lo tanto, el concepto de controlabilidad trata de la existencia de un vector de control que puede causar que el estado del sistema llegue a algún estado arbitrario.

La observabilidad se ocupa del problema de determinar el estado de un sistema dinámico a partir de observaciones de los vectores de salida y de control en un número finito de periodos de muestreo. Un sistema es observable si, con el sistema en el estado  $x(0)$ , se puede determinar el estado a partir de la observación de los vectores de salida y de control a lo largo de un número finito de periodos de muestreo.

# CAPITULO 4

## OBSERVADORES DE ESTADO

### 4.1 INTRODUCCION

En la sección 4.2 de este capítulo se presentarán dos conceptos fundamentales de los sistemas de control: controlabilidad y observabilidad. La controlabilidad se ocupa del problema de poder dirigir un sistema de un estado inicial dado, a un estado arbitrario. Un sistema es controlable si puede, mediante un vector de control no acotado, transferir dicho sistema de cualquier estado inicial a cualquier otro estado, en un número finito de periodos de muestreo. Por lo tanto, el concepto de controlabilidad trata de la existencia de un vector de control que puede causar que el estado del sistema llegue a algún estado arbitrario.

La observabilidad se ocupa del problema de determinar el estado de un sistema dinámico a partir de observaciones de los vectores de salida y de control en un número finito de periodos de muestreo. Un sistema es observable si, con el sistema en el estado  $x(0)$ , se puede determinar el estado a partir de la observación de los vectores de salida y de control a lo largo de un número finito de periodos de muestreo.

En el estado final del proceso de diseño la realimentación del estado se lleva a cabo mediante el uso de variables de estado estimadas, más que con variables de estado reales, mismas que probablemente no están disponibles para su medición directa. Si algunas de las variables de estado son medibles, entonces se pueden utilizar esas variables de estado disponibles y utilizar variables de estado estimadas en vez de aquellas verdaderamente no medibles.

La sección 4.3 analiza el diseño de observadores de estado, que estiman las variables de estado que realmente no son medibles. La estimación se basa en las mediciones de las señales de salida y control. Las variables de estado estimadas pueden ser utilizadas para la realimentación del estado, basado en el diseño de ubicación de polos.

Para sistemas lineales o no lineales de tiempo discreto variantes en el tiempo, la ecuación de estado se puede escribir como:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k]$$

y la ecuación de salida como

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k]$$

Para los sistemas lineales de tiempo discreto variantes en el tiempo, la ecuación de estado y la ecuación de salida se pueden simplificar a:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}(k)\mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k)$$

donde:

$\mathbf{x}(k)$	= vector $n$	(vector de estado)
$\mathbf{y}(k)$	= vector $m$	(vector de salida)
$\mathbf{u}(k)$	= vector $r$	(vector de entrada)
$\mathbf{G}(k)$	= matriz $n \times n$	(matriz de estado)
$\mathbf{H}(k)$	= matriz $n \times r$	(matriz de entrada)
$\mathbf{C}(k)$	= matriz $m \times n$	(matriz de salida)
$\mathbf{D}(k)$	= matriz $m \times r$	(matriz de transmisión directa)

La presencia de la variable  $k$  en los argumentos de las matrices  $\mathbf{G}(k)$ ,  $\mathbf{H}(k)$ ,  $\mathbf{C}(k)$  y  $\mathbf{D}(k)$  implica que estas matrices varían con el tiempo. Si la variable  $k$  no aparece en forma explícita en estas matrices, se supone que son invariables en el tiempo, es decir, constantes. Esto es, si el sistema es invariante en el tiempo, entonces las dos últimas ecuaciones se pueden simplificar a:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k)$$

Al igual que en el caso del tiempo discreto, los sistemas de tiempo continuo (lineal o no lineal) se pueden representar mediante la siguiente ecuación de estado y la siguiente ecuación de salida:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t]$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t]$$

Para sistemas lineales de tiempo continuo variantes en el tiempo, las ecuaciones de estado y de salida están dadas por:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)$$

Si el sistema es invariante en el tiempo, entonces las dos últimas ecuaciones se simplifican a:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (4.1) \quad \text{®}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (4.2)$$

Este tipo de sistema corresponde al modelo establecido en el capítulo 3 sobre las variaciones de temperatura en el proceso de extrusión de plásticos, por lo cual se tomará como base para diseñar el observador de estado en la sección 4.4; existen ciertas condiciones que hay que cumplir para implementar un observador de estado, las cuales se explicarán en la sección 4.2. El objetivo en este caso del observador de estado es determinar en que estado se encuentran las temperaturas del extrusor de plásticos.

## 4.2 CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIDAD

**4.2.1 Controlabilidad.** Se dice que un sistema de control es de estado completamente controlable, si es posible transferir el sistema de un estado inicial arbitrario a cualquier estado deseado (también un estado arbitrario), en un período finito. Es decir, un sistema de control es controlable si todas las variables de estado pueden ser controladas en un período finito mediante alguna señal de control no restringida. Si cualquiera de las variables de estado es independiente de la señal de control, entonces resulta imposible controlar esa variable de estado y, por lo tanto, el sistema es no controlable.

Puede no existir solución a un problema de control óptimo, si el sistema se considera no controlable. A pesar de que la mayor parte de los sistemas físicos son controlables, los modelos matemáticos correspondientes quizás no tengan la propiedad de controlabilidad. Por lo tanto, es necesario establecer la condición bajo la cual el sistema es controlable:

**4.2.1.1 Controlabilidad completa del estado para un sistema de control en tiempo discreto lineal e invariante en el tiempo.** Considere el sistema de control en tiempo discreto definido por:

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{G}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}\mathbf{u}(kT) \quad (4.3)$$

donde:

$\mathbf{x}(kT)$  = vector estado (de dimensión  $n$ ) en el  $k$ -ésimo instante de muestreo

$\mathbf{u}(kT)$  = señal de control en el  $k$ -ésimo instante de muestreo

$\mathbf{G}$  = matriz de  $n \times n$

$\mathbf{H}$  = matriz de  $n \times 1$

$T$  = Período de muestreo

Suponemos que  $\mathbf{u}(kT)$  es constante para  $kT \leq t < (k+1)T$ .

El sistema de control en tiempo discreto dado por (4.3) es de estado completamente controlable, o simplemente de estado controlable [6], si existe una señal de control constante por intervalos  $\mathbf{u}(kT)$ , definida a lo largo de un número finito de períodos de muestreo de forma que, al partir de cualquier estado inicial, el estado  $\mathbf{x}(kT)$  pueda ser transferido al estado deseado  $\mathbf{x}_f$  en  $n$  períodos de muestreo como máximo. Al analizar la controlabilidad, el estado deseado  $\mathbf{x}_f$  puede especificarse como el origen, o  $\mathbf{x}_f=0$ , sin embargo suponemos que  $\mathbf{x}_f$  es un estado arbitrario en el espacio de  $n$  dimensiones, que incluye el origen.

Utilizando la definición que se acaba de dar, a continuación se deducirá la condición para la controlabilidad completa del estado. En vista que la solución a la ecuación (4.3) es:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(nT) &= \mathbf{G}^n \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{G}^{n-j-1} \mathbf{H} \mathbf{u}(jT) \\ &= \mathbf{G}^n \mathbf{x}(0) + \mathbf{G}^{n-1} \mathbf{H} \mathbf{u}(0) + \mathbf{G}^{n-2} \mathbf{H} \mathbf{u}(T) + \dots + \mathbf{H} \mathbf{u}((n-1)T)\end{aligned}$$

obtenemos:

$$\mathbf{x}(nT) - \mathbf{G}^n \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{G}\mathbf{H} & \dots & \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}((n-1)T) \\ \mathbf{u}((n-2)T) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(0) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Dado que  $\mathbf{H}$  es una matriz de  $n \times 1$ , encontramos que cada una de las matrices  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{G}\mathbf{H}$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}$  es una matriz de  $n \times 1$  o un vector de columna. Si el rango de la matriz siguiente  $[\mathbf{H} : \mathbf{G}\mathbf{H} : \dots : \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}]$  es  $n$ , entonces los  $n$  vectores  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{G}\mathbf{H}$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}$  pueden abarcar todo el espacio de  $n$  dimensiones. La matriz  $[\mathbf{H} : \mathbf{G}\mathbf{H} : \dots : \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}]$  se conoce como matriz de controlabilidad.

*Controlabilidad completa de la salida.* En el diseño práctico de un sistema de control, se puede preferir controlar la salida en vez del estado del sistema. La controlabilidad completa del estado no es necesaria ni suficiente para controlar la salida

de un sistema. Por esta razón es necesario definir por separado la controlabilidad completa de la salida.

Considere el sistema definido por las ecuaciones:

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{G}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}\mathbf{u}(kT) \quad (4.5)$$

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT) \quad (4.6)$$

donde:

$\mathbf{x}(kT)$  = vector estado (de dimensión  $n$ ) en el  $k$ -ésimo instante de muestreo

$\mathbf{u}(kT)$  = señal de control (escalar) en el  $k$ -ésimo instante de muestreo

$\mathbf{y}(kT)$  = vector salida (de dimensión  $m$ ) en el  $k$ -ésimo instante de muestreo

$\mathbf{G}$  = matriz de  $n \times n$

$\mathbf{H}$  = matriz de  $n \times 1$

$\mathbf{C}$  = matriz de  $m \times n$

El sistema definido por (4.5) y (4.6) es de salida completamente controlable, o simplemente de salida controlable, si es posible tener una señal de control no restringida  $\mathbf{u}(kT)$ , definida a lo largo de un número finito de periodos de muestreo  $0 \leq kT < nT$  tales que, empezando a partir de una salida inicial  $\mathbf{y}(0)$ , la salida  $\mathbf{y}(kT)$  pueda ser transferida al punto deseado (un punto arbitrario)  $\mathbf{y}_f$  en el espacio de salidas, en  $n$  periodos de muestreo como máximo.

## DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Después de haber deducido la condición para la controlabilidad completa de salida [6], se determina que si un sistema es de salida completamente controlable, entonces existe una señal de control constante unitaria, que transferirá cualquier salida inicial a cualquier punto deseado  $\mathbf{y}_f$  en el espacio de salidas, en  $n$  periodos de muestreo como máximo. Al igual que en el caso de controlabilidad completa del estado, una condición necesaria y suficiente para que el sistema sea de salida completamente controlable, es que los vectores  $\mathbf{G}\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{C}\mathbf{G}\mathbf{H}$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{C}\mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}$  abarquen el espacio de salidas de dimensión  $m$ , es decir que el rango de  $[\mathbf{G}\mathbf{H}, \mathbf{C}\mathbf{G}\mathbf{H}, \dots, \mathbf{C}\mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}]$  sea  $m$ .

De este análisis se puede ver que en el sistema definido por (4.5) y (4.6), la controlabilidad completa del estado implica controlabilidad completa de la salida, si y sólo si los  $m$  renglones de  $\mathbf{C}$  son linealmente independientes.

Ahora considere el sistema definido por las ecuaciones:

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{G}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}\mathbf{u}(kT) \quad (4.7)$$

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{D}\mathbf{u}(kT) \quad (4.8)$$

donde:

$\mathbf{x}(kT)$  = vector estado (de dimensión  $n$ ) en el  $k$ -ésimo instante de muestreo

$\mathbf{u}(kT)$  = vector control (de dimensión  $r$ ) en el  $k$ -ésimo instante de muestreo

$\mathbf{y}(kT)$  = vector salida (de dimensión  $m$ ) en el  $k$ -ésimo instante de muestreo

$\mathbf{G}$  = matriz de  $n \times n$

$\mathbf{H}$  = matriz de  $n \times r$

$\mathbf{C}$  = matriz de  $m \times n$

$\mathbf{D}$  = matriz de  $m \times r$

Después de haber deducido la condición para la controlabilidad completa de salida [6], encontramos que una condición necesaria y suficiente para que el sistema definido por (4.7) y (4.8) sea de salida completamente controlable, es que la matriz de  $m \times (n+1)r$   $[\mathbf{D} : \mathbf{C}\mathbf{H} : \mathbf{C}\mathbf{G}\mathbf{H} : \dots : \mathbf{C}\mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}]$  sea de rango  $m$ .

## DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Hay que señalar que la presencia de la matriz  $\mathbf{D}$  en la ecuación de salida del sistema siempre ayuda a establecer la controlabilidad completa de la salida.

**4.2.1.2 Controlabilidad de un sistema de control en tiempo continuo lineal e invariante en el tiempo.** A continuación se enunciará brevemente las condiciones para la controlabilidad completa del estado y la controlabilidad de la salida de los sistemas de control en tiempo continuo lineales e invariantes con el tiempo. Considere el sistema definido por:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}\end{aligned}$$

donde:

$\mathbf{x}$  = vector de estado (de dimensión  $n$ )

$\mathbf{u}$  = vector de control (de dimensión  $r$ )

$\mathbf{y}$  = vector de salida (de dimensión  $m$ )

$\mathbf{G}$  = matriz de  $n \times n$

$\mathbf{H}$  = matriz de  $n \times r$

$\mathbf{C}$  = matriz de  $m \times n$

$\mathbf{D}$  = matriz de  $m \times r$

*Controlabilidad completa del estado.* Una condición necesaria y suficiente para la controlabilidad completa del estado para este sistema, puede deducirse en forma similar a como se hizo en el caso de un sistema en tiempo discreto [6], obteniendo como resultado que la condición para la controlabilidad completa del estado es que la matriz de  $n \times nr$   $[\mathbf{B} : \mathbf{AB} : \dots : \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$  sea de rango  $n$ , o que contenga  $n$  vectores columna linealmente independientes (esta matriz por lo regular se conoce como matriz de controlabilidad para el sistema en tiempo continuo).

La condición para controlabilidad completa del estado también se puede enunciar en términos de las funciones de transferencia o de las matrices de transferencia. Una condición necesaria y suficiente para la controlabilidad completa del estado es que no ocurra cancelación en la función de transferencia o en la matriz de transferencia. Si ocurre cancelación, el sistema no puede ser controlado en la dirección del modo cancelado.

*Controlabilidad de la salida.* Como en el caso del sistema de control en tiempo discreto, la controlabilidad completa del estado no es necesaria ni suficiente para controlar la salida de un sistema de control en tiempo continuo lineal e invariante en el tiempo. Se puede demostrar [6] que la condición para la controlabilidad completa de la

salida es que el rango de la matriz de  $m \times (n + 1)r$   $[\mathbf{D} : \mathbf{CB} : \mathbf{CAB} : \mathbf{CA}^2\mathbf{B} : \dots : \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B}]$  sea  $m$ .

**4.2.2 Observabilidad.** Para analizar la observabilidad de sistemas de control en tiempo discreto lineal e invariante con el tiempo, considere el sistema de control en tiempo discreto sin excitación definido por:

$$\mathbf{x}((k + 1)T) = \mathbf{G}\mathbf{x}(kT) \quad (4.9)$$

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT) \quad (4.10)$$

donde:

$\mathbf{x}(kT)$  = vector estado (de dimensión  $n$ ) en el  $k$ -ésimo instante de muestreo

$\mathbf{y}(kT)$  = vector salida (de dimensión  $m$ ) en el  $k$ -ésimo instante de muestreo

$\mathbf{G}$  = matriz de  $n \times n$

$\mathbf{C}$  = matriz de  $m \times n$

El sistema es completamente observable si cualquier estado inicial  $\mathbf{x}(0)$  puede determinarse a partir de la observación de  $\mathbf{y}(kT)$  sobre un número finito de períodos de muestreo. El sistema, por lo tanto, es completamente observable, si cualquier transición del estado de manera eventual afecta a todos los elementos del vector de salida. El concepto de observabilidad es útil para resolver el problema de la reconstrucción de variables de estado no medibles y para el diseño de los observadores de estado.

## DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

La razón por la que se considera el sistema sin excitación es la siguiente. Si el sistema es el que está descrito por las ecuaciones:

$$\mathbf{x}((k + 1)T) = \mathbf{G}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}\mathbf{u}(kT)$$

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{D}\mathbf{u}(kT)$$

entonces:

$$\mathbf{x}(kT) = \mathbf{G}^k \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{G}^{k-j-1} \mathbf{H}\mathbf{u}(jT)$$

y  $\mathbf{y}(kT)$  es:

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{G}^k \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{C}\mathbf{G}^{k-j-1} \mathbf{H}\mathbf{u}(jT) + \mathbf{D} \mathbf{u}(kT)$$

Dado que las matrices  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{D}$  son conocidas, y  $\mathbf{u}(kT)$  también lo es, el segundo y tercer términos del segundo miembro de esta última ecuación son cantidades conocidas. Por lo tanto, pueden restarse del valor observado de  $\mathbf{y}(kT)$ . Entonces, para la investigación de una condición necesaria y suficiente para la observabilidad completa, basta considerar el sistema descrito por (4.9) y (4.10).

Una vez que a partir de la observación de la salida se pueda determinar  $\mathbf{x}(0)$ , también podrá determinarse  $\mathbf{x}(kT)$ , ya que  $\mathbf{u}(0)$ ,  $\mathbf{x}(T)$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{u}((k-1)T)$  son conocidas.

#### 4.2.2.1 Observabilidad completa de los sistemas de control en tiempo discreto.

Considere el sistema definido por (4.9) y (4.10). El sistema es completamente observable si, dada la salida  $\mathbf{y}(kT)$  sobre un número finito de períodos de muestreo, es posible determinar el vector de estado inicial  $\mathbf{x}(0)$ .

Ahora, se deducirá la condición para la observabilidad completa del sistema en tiempo discreto descrito por (4.9) y (4.10). En vista que la solución  $\mathbf{x}(kT)$  de (4.9) es

$$\mathbf{x}(kT) = \mathbf{G}^k \mathbf{x}(0)$$

se obtiene

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{G}^k \mathbf{x}(0)$$

La observabilidad completa significa que, dado  $\mathbf{y}(0)$ ,  $\mathbf{y}(T)$ ,  $\mathbf{y}(2T)$ ,  $\dots$ , es posible determinar  $x_1(0)$ ,  $x_2(0)$ ,  $\dots$ ,  $x_n(0)$ . Para determinar  $n$  incógnitas, se necesita únicamente  $n$  valores de  $\mathbf{y}(kT)$ . Por lo tanto, se pueden utilizar los primeros  $n$  valores de  $\mathbf{y}(kT)$ , o  $\mathbf{y}(0)$ ,  $\mathbf{y}(T)$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{y}((n-1)T)$  que permiten determinar  $x_1(0)$ ,  $x_2(0)$ ,  $\dots$ ,  $x_n(0)$ .

En el caso de un sistema completamente observable, dados

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{C}\mathbf{x}(0)$$

$$\mathbf{y}(T) = \mathbf{C}\mathbf{G}\mathbf{x}(0)$$

:

$$\mathbf{y}((n-1)T) = \mathbf{C}\mathbf{G}^{n-1}\mathbf{x}(0)$$

se debe ser capaz de determinar  $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$ . Al observar que  $\mathbf{y}(kT)$  es un vector de dimensión  $m$ , las  $n$  ecuaciones simultáneas anteriores dan como resultado  $nm$  ecuaciones, todas ellas incluyendo  $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$ . A fin de obtener un solo conjunto de soluciones  $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$  a partir de estas  $nm$  ecuaciones, se debe escribir exactamente de entre ellas  $n$  ecuaciones lineales independientes. Esto requiere que la matriz  $nm \times n$ ,  $[\mathbf{C} : \mathbf{C}\mathbf{G} : \dots : \mathbf{C}\mathbf{G}^{n-1}]^T$  sea de rango  $n$ .

Como el rango de una matriz y de su transpuesta conjugada es el mismo, es posible enunciar la condición correspondiente a la observabilidad completa como sigue. Una condición necesaria y suficiente para que el sistema definido por (4.9) y (4.10) sea completamente observable es que el rango de la matriz de  $n \times nm$ ,  $[\mathbf{C}^* : \mathbf{G}^*\mathbf{C}^* : \dots : (\mathbf{G}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*]$  sea  $n$ . Esta matriz de  $n \times nm$  se conoce comúnmente como matriz de observabilidad. Note que en esta matriz los asteriscos indican transpuestas conjugadas. Si las matrices  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{G}$  son reales, entonces la notación de transposición conjugada como  $\mathbf{G}^*\mathbf{C}^*$  puede ser cambiada a notación de transposición, como  $\mathbf{G}^T\mathbf{C}^T$ .

**4.2.2.2 Observabilidad completa de los sistemas de control en tiempo continuo lineales e invariantes con el tiempo.** El sistema se dice completamente observable, si todos los estados iniciales  $\mathbf{x}(0)$  pueden determinarse a partir de la observación de  $\mathbf{y}(t)$  durante un intervalo de tiempo finito. Similar al caso del sistema de control en tiempo discreto, se necesita considerar sólo un sistema sin excitación. Considere el sistema definido por las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}$$

donde:

- $\mathbf{x}$  = vector estado (de dimensión  $n$ )
- $\mathbf{y}$  = vector salida (de dimensión  $m$ )
- $\mathbf{A}$  = matriz de  $n \times n$

$C$  = matriz de  $m \times n$

Igual que en el caso de sistema de control en tiempo discreto [6], se puede decir que la condición para la observabilidad completa es que el rango de la matriz de  $n \times nm$   $[C^* : A^* C^* : \dots : (A^*)^{n-1} C^*]$  sea  $n$ . Esta matriz de  $n \times nm$  se conoce comúnmente como matriz de observabilidad del sistema en tiempo continuo.

### 4.3 OBSERVADORES DE ESTADO

En la práctica, sólo son medibles unas cuantas variables de estado de un sistema dado, mientras que las demás no están disponibles para la medición en forma directa. Puede ser, por ejemplo, que sólo las variables de salida sean medibles. En este caso, es necesario estimar las variables de estado que no puedan medirse directamente. Esa estimación suele llamarse observación. En un sistema práctico es necesario observar o estimar las variables de estado no medibles a partir de las variables de salida y las de control.

### DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Un observador de estado, también conocido como estimador de estado, es un subsistema del sistema de control que lleva a cabo una estimación de las variables de estado, a partir de las mediciones de las variables de salida y control. Aquí, el concepto de observabilidad juega un papel importante. Como se analizará más adelante, se pueden diseñar observadores de estado si, y sólo si, se satisface la condición de observabilidad.

En los siguientes análisis de observadores de estado, estaremos utilizaremos la notación  $\tilde{x}(k)$  para designar el vector estado observado. En muchos casos, este vector se utiliza en la realimentación del estado para generar el vector de control óptimo. En la

Fig. 4.1 se muestra un esquema de un observador de estado. El observador de estado tiene  $y(k)$  y  $u(k)$  como entradas, y  $\tilde{x}(k)$  como salida.

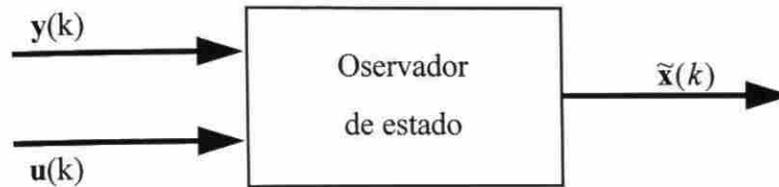


Fig. 4.1. Diagrama esquemático del observador de estado.

A continuación se analizará, primero, la condición necesaria y suficiente para la observación del estado, y después se estudiará el observador de estado de orden completo. La observación del estado de orden completo significa que se observan las  $n$  variables de estado, sin importar si algunas variables de estado están disponibles para la medición directa. A veces, cuando sólo se necesita la observación de las variables de estado no medibles, esto resulta innecesario. La observación de sólo las variables de estado no medibles se conoce como observación de estado de orden reducido, y se analizará más adelante.

*Condición necesaria y suficiente para la observación de estado.* La Fig. 4.2 muestra un sistema de regulación con un observador de estado, de la cual se obtienen las ecuaciones de estado y de salida como sigue:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \quad (4.11)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \quad (4.12)$$

donde:

$\mathbf{x}(k)$  = vector de estado (de dimensión  $n$ )

$\mathbf{u}(k)$  = vector de control (de dimensión  $r$ )

$\mathbf{y}(k)$  = vector de salida (de dimensión  $m$ )

$\mathbf{G}$  = matriz no singular de  $n \times n$

$\mathbf{H}$  = matriz de  $n \times r$

$\mathbf{C}$  = matriz de  $m \times n$

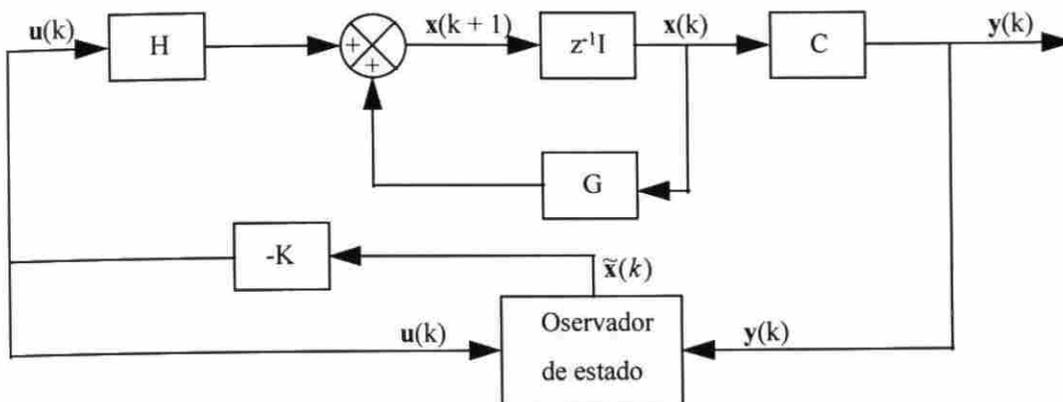


Fig. 4.2. Sistema de regulación con un observador de estado.

A fin de poder observar (estimar) las variables de estado, se debe de obtener  $\mathbf{x}(k+1)$  en términos de  $\mathbf{y}(k), \mathbf{y}(k-1), \dots, \mathbf{y}(k-n+1)$ , y  $\mathbf{u}(k), \mathbf{u}(k-1), \dots, \mathbf{u}(k-n+1)$ . De (4.11),

$$\mathbf{G}^{-1}\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) + \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k)$$

es decir,

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k) \quad (4.13)$$

Desplazando  $k$  en 1, se obtiene

$$\mathbf{x}(k-1) = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{x}(k) - \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-1) \quad (4.14)$$

sustituyendo (4.13) en (4.14), resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k-1) &= \mathbf{G}^{-1} [ \mathbf{G}^{-1}\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k) ] - \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-1) \\ &= \mathbf{G}^{-2}\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{G}^{-2}\mathbf{H}\mathbf{u}(k) - \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-1) \end{aligned}$$

En forma similar,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k-2) &= \mathbf{G}^{-2}\mathbf{x}(k) - \mathbf{G}^{-2}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-1) - \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-2) \\ &= \mathbf{G}^{-3}\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{G}^{-3}\mathbf{H}\mathbf{u}(k) - \mathbf{G}^{-2}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-1) - \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-2) \end{aligned}$$

:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k-n+1) &= \mathbf{G}^{-n}\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{G}^{-n}\mathbf{H}\mathbf{u}(k) - \mathbf{G}^{-n+1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-1) \\ &\quad - \dots - \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-n+1) \end{aligned}$$

Sustituyendo (4.13) en (4.12), obtenemos

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) = \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k)$$

Asimismo,

$$\mathbf{y}(k-1) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k-1) = \mathbf{C}\mathbf{G}^{-2}\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{C}\mathbf{G}^{-2}\mathbf{H}\mathbf{u}(k) - \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-1)$$

$$\mathbf{y}(k-2) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k-2) = \mathbf{C}\mathbf{G}^{-3}\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{C}\mathbf{G}^{-3}\mathbf{H}\mathbf{u}(k) - \mathbf{C}\mathbf{G}^{-2}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-1) \\ - \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-2)$$

:

$$\mathbf{y}(k-n+1) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k-n+1) = \mathbf{C}\mathbf{G}^{-n}\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{C}\mathbf{G}^{-n}\mathbf{H}\mathbf{u}(k) \\ - \mathbf{C}\mathbf{G}^{-n+1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-1) - \dots - \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-n+1)$$

Si se combinan las  $n$  ecuaciones anteriores en una sola ecuación matricial, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}(k) \\ \mathbf{y}(k-1) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(k-n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1} \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{-2} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{-n} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) - \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{-2}\mathbf{H} & \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{-n}\mathbf{H} & \mathbf{C}\mathbf{G}^{-n+1}\mathbf{H} & \dots & \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{u}(k-1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(k-n+1) \end{bmatrix}$$

o bien

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1} \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{-2} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{-n} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(k) \\ \mathbf{y}(k-1) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(k-n+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{-2}\mathbf{H} & \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{-n}\mathbf{H} & \mathbf{C}\mathbf{G}^{-n+1}\mathbf{H} & \dots & \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{u}(k-1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(k-n+1) \end{bmatrix}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN (4.15)

Se puede observar que el segundo miembro de (4.15) es totalmente conocido. Por lo tanto,  $\mathbf{x}(k+1)$  puede determinarse si y sólo si

$$\text{rango} \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1} \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{-2} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{-n} \end{bmatrix} = n \quad (4.16)$$

Dado que la matriz  $\mathbf{G}$  es no singular, multiplicar por  $\mathbf{G}^n$  cada uno de los renglones del primer miembro de (4.16) no cambia la condición de rango. Por lo tanto, (4.16) es equivalente a:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} \mathbf{CG}^{n-1} \\ \mathbf{CG}^{n-2} \\ \vdots \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} = n$$

que también equivale a:

$$\text{rango} [ \mathbf{C}^* \ \mathbf{G}^* \ \mathbf{C}^* \ \dots \ (\mathbf{G}^*)^{n-1} \ \mathbf{C}^* ] = n \quad (4.17)$$

que es la condición de observabilidad completa del sistema definido por (4.11) y (4.12). Esto significa que si se satisface (4.17), (es decir, si el sistema es completamente observable), entonces se puede determinar  $\mathbf{x}(k+1)$  a partir de  $\mathbf{y}(k)$ ,  $\mathbf{y}(k-1)$ , ...,  $\mathbf{y}(k-n+1)$  y  $\mathbf{u}(k)$ ,  $\mathbf{u}(k-1)$ , ...,  $\mathbf{u}(k-n+1)$ . Por lo tanto, se ha demostrado que la condición necesaria y suficiente para la observación del estado es que el sistema sea completamente observable.

Como caso especial, si  $\mathbf{y}(k)$  es un escalar y la matriz  $\mathbf{C}$  es una de  $1 \times n$ , entonces se puede obtener  $\mathbf{x}(k+1)$  premultiplicando ambos miembros de (4.15) por el inverso de la matriz dada en (4.16), como sigue:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{CG}^{-1} \\ \mathbf{CG}^{-2} \\ \vdots \\ \mathbf{CG}^{-n} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{y}(k) \\ \mathbf{y}(k-1) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(k-n+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{CG}^{-1} \\ \mathbf{CG}^{-2} \\ \vdots \\ \mathbf{CG}^{-n} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{CG}^{-1}\mathbf{H} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{CG}^{-2}\mathbf{H} & \mathbf{CG}^{-1}\mathbf{H} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CG}^{-n}\mathbf{H} & \mathbf{CG}^{-n+1}\mathbf{H} & \dots & \mathbf{CG}^{-n+1}\mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{u}(k-1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(k-n+1) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

La ecuación (4.18) proporciona el valor  $\mathbf{x}(k+1)$  cuando  $\mathbf{y}(k)$  es un escalar.

Como quedó demostrado en el análisis anterior, el estado  $\mathbf{x}(k+1)$  puede determinarse a partir de (4.15), siempre que el sistema sea completamente observable. Por lo tanto, para un sistema de esta clase, el vector de estado puede determinarse en  $n$  períodos de muestreo como máximo. En presencia de perturbaciones externas y ruido en la medición, sin embargo, este método puede no ofrecer una determinación no precisa

del vector de estado. Por ello, para determinar el vector de estado, en presencia de perturbaciones y ruido en la medición, es necesario un enfoque distinto. Asimismo, si la matriz  $\mathbf{C}$  no es de  $1 \times n$  sino de  $m \times n$  (con  $m > 1$ ), no puede definirse la inversa de la matriz de (4.16), y (4.18) no es aplicable. Con el fin de resolver estos casos, un método muy poderoso para la estimación del vector de estado es utilizar un modelo dinámico del sistema original, como sigue:

Considere el sistema de control definido por (4.11) y (4.12). Supongamos que el estado  $\mathbf{x}(k)$  debe aproximarse al estado  $\tilde{\mathbf{x}}(k)$  del modelo dinámico:

$$\tilde{\mathbf{x}}(k + 1) = \mathbf{G}\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \quad (4.19)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(k) \quad (4.20)$$

donde las matrices  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{C}$  son las mismas que las del sistema original. Asimismo, supongamos que el modelo dinámico está sujeto a la misma señal de control  $\mathbf{u}(k)$  que el modelo original. Si las condiciones iniciales para el sistema real definido por (4.11) y (4.12), y para el modelo dinámico definido por (4.19) y (4.20), son las mismas, entonces el estado  $\tilde{\mathbf{x}}(k)$  y el estado  $\mathbf{x}(k)$  serán iguales. Si las condiciones iniciales son distintas, entonces el estado  $\tilde{\mathbf{x}}(k)$  y el estado  $\mathbf{x}(k)$  serían distintos.

No obstante, si la matriz  $\mathbf{G}$  es una matriz estable,  $\tilde{\mathbf{x}}(k)$  se acercará a  $\mathbf{x}(k)$ , aún en el caso en que las condiciones iniciales sean diferentes. Si identificamos la diferencia entre  $\mathbf{x}(k)$  y  $\tilde{\mathbf{x}}(k)$  como  $\mathbf{e}(k)$ , y definimos:

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k)$$

entonces, al sustraer (4.9) de (4.11), se obtiene:

$$\mathbf{x}(k + 1) - \tilde{\mathbf{x}}(k + 1) = \mathbf{G}[\mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k)]$$

es decir,

$$\mathbf{e}(k + 1) = \mathbf{G}\mathbf{e}(k)$$

Si la matriz  $\mathbf{G}$  es estable, entonces  $\mathbf{e}(k)$  se acercaría a cero y  $\tilde{\mathbf{x}}(k)$  a  $\mathbf{x}(k)$ . Sin embargo, el comportamiento del vector de error, que sólo depende de la matriz  $\mathbf{G}$ , puede ser no aceptable. Asimismo, si la matriz  $\mathbf{G}$  no es una matriz estable, entonces el error

$e(k)$  no se acercará a cero. Es, por lo tanto, deseable modificar el modelo dinámico definido por (4.9) y (4.10).

Debe mencionarse que a pesar de que el estado  $\mathbf{x}(k)$  puede ser no medible, la salida  $\mathbf{y}(k)$  si lo es. El modelo dinámico definido por (4.9) y (4.10) no utiliza la salida medida  $\mathbf{y}(k)$ . El desempeño del modelo dinámico puede mejorar si se utiliza la diferencia entre la salida medida  $\mathbf{y}(k)$  y la salida estimada  $\mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(k)$  para vigilar o monitorear el estado de  $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ ; es decir, si el modelo dinámico de (4.9) se modifica de la forma siguiente:

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{G}\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{H}u(k) + \mathbf{K}_e[\mathbf{y}(k) - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(k)]$$

donde la matriz  $\mathbf{K}_e$  sirve como matriz de ponderación. (Esto significa que la dinámica del observador de estado que se mostró en la Fig. 4.2 debe estar dada por esta última ecuación). En presencia de discrepancias entre las matrices  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{H}$  utilizadas en el modelo y las del sistema real, la adición de la diferencia entre la salida medida y la salida estimada ayudará a reducir las diferencias entre el modelo dinámico y el modelo real.

A continuación se analizará en detalle la dinámica del observador que está caracterizado por las matrices  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{H}$ , y por el término adicional de corrección, formado por la diferencia entre la salida medida y la salida estimada.

**4.3.1 Observador de estado de orden completo.** El orden del observador de estado que se analizará aquí es el mismo que el correspondiente al sistema. Como ya se indicó, un observador de estado como éste se conoce como observador de estado de orden completo.

En el análisis siguiente se supondrá que el estado real  $\mathbf{x}(k)$  no puede medirse en forma directa. Si el estado  $\mathbf{x}(k)$  debe estimarse, es conveniente que el estado observado o el estado estimado  $\tilde{\mathbf{x}}(k)$  sean tan cercanos al estado real  $\mathbf{x}(k)$  como sea posible. Aunque

no es necesario, resulta conveniente que el observador de estado tenga las matrices  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{H}$  iguales a las del sistema original.

Es importante observar que en el análisis presente, el estado  $\mathbf{x}(k)$  no está disponible para la medición directa  $y$ , en consecuencia, el estado observado  $\tilde{\mathbf{x}}(k)$  no puede compararse con el estado real  $\mathbf{x}(k)$ . Sin embargo, dado que la salida si puede medirse  $\tilde{y}(k) = \mathbf{C} \tilde{\mathbf{x}}(k)$ , es posible comparar ésta con  $y(k)$ .

Considere el sistema de control con realimentación del estado que se muestra en la Fig. 4.3. Las ecuaciones del sistema son :

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \quad (4.21)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \quad (4.22)$$

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$$

donde:

$\mathbf{x}(k)$  = vector de estado (de dimensión  $n$ )

$\mathbf{u}(k)$  = vector de control (de dimensión  $r$ )

$\mathbf{y}(k)$  = vector de salida (de dimensión  $m$ )

$\mathbf{G}$  = matriz no singular de  $n \times n$

$\mathbf{H}$  = matriz de  $n \times r$

$\mathbf{C}$  = matriz de  $m \times n$

$\mathbf{K}$  = matriz de ganancia de realimentación de estado (matriz de  $m \times n$ )

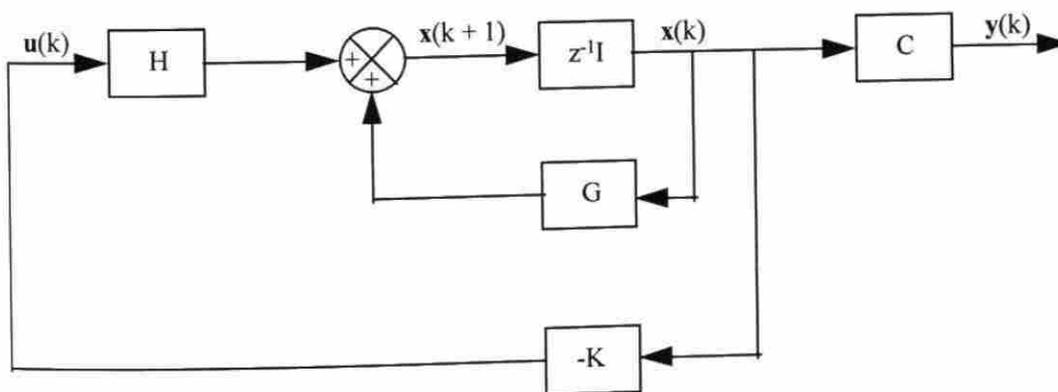


Fig. 4.3. Sistema de control con realimentación del estado.

Suponemos que el sistema es de estado completamente controlable y completamente observable, pero que  $\mathbf{x}(k)$  no está disponible para medición directa. La Fig. 4.4 muestra un observador de estado incorporado a el sistema de la Fig. 4.3. El estado observado  $\tilde{\mathbf{x}}(k)$  se utiliza para formar el vector de control  $\mathbf{u}(k)$ , es decir

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}(k) \quad (4.23)$$

De la Fig.4.4, tenemos que

$$\tilde{\mathbf{x}}(k + 1) = \mathbf{G}\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) + \mathbf{K}_e [\mathbf{y}(k) - \tilde{\mathbf{y}}(k)] \quad (4.24)$$

donde  $\mathbf{K}_e$  es la matriz de ganancia de realimentación del observador (una matriz de  $n \times m$ ). Esta última ecuación puede modificarse y resultar

$$\tilde{\mathbf{x}}(k + 1) = (\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}) \tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) + \mathbf{K}_e\mathbf{y}(k) \quad (4.25)$$

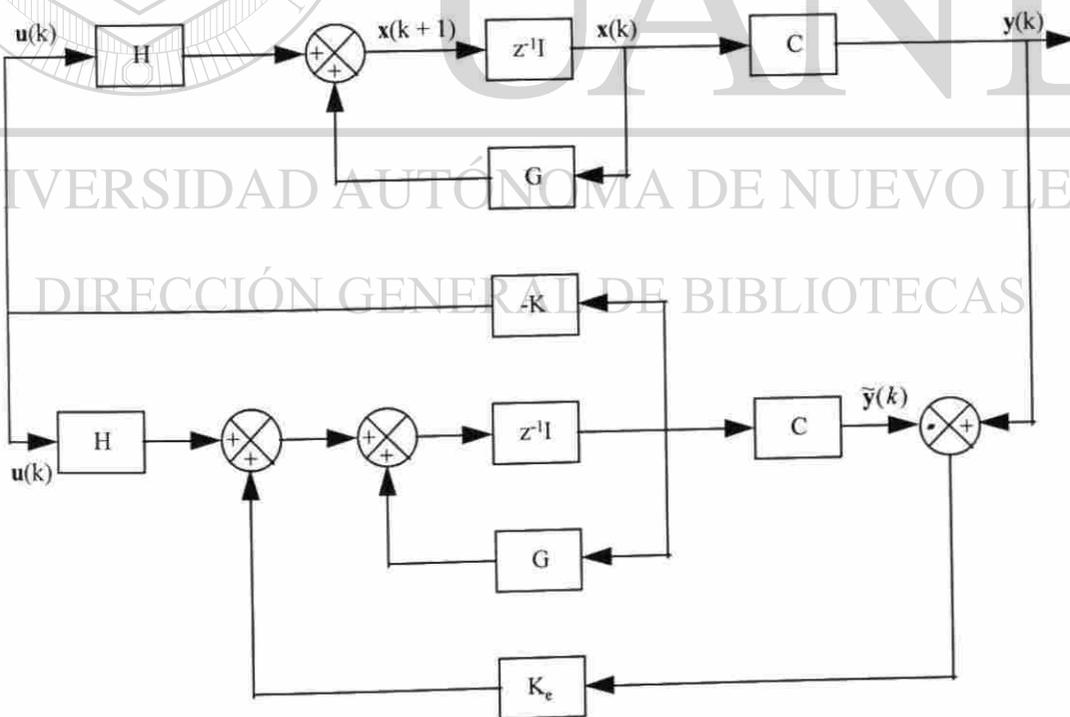


Fig. 4.4. Sistema de control con realimentación del estado observado.

El observador de estado dado por (4.25) se llama observador de predicción [6], pues el estimado  $\tilde{\mathbf{x}}(k + 1)$  está un período de muestreo adelante de la medición  $\mathbf{y}(k)$ . Los valores característicos de  $\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{G}$  suelen conocerse como polos del observador.

*Dinámica del error del observador de estado de orden completo.* Se puede observar que si  $\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k)$ , entonces (4.25) se convierte en

$$\tilde{\mathbf{x}}(k + 1) = \mathbf{G}\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{H}u(k)$$

que es idéntica a la ecuación de estado del sistema. Por lo tanto, si  $\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k)$ , la respuesta del sistema de observador de estado es idéntica a la del sistema original.

Para obtener la ecuación de error del observador, restemos (4.25) de (4.21):

$$\mathbf{x}(k + 1) - \tilde{\mathbf{x}}(k + 1) = (\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})[\mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k)] \quad (4.26)$$

Ahora se definirá la diferencia entre  $\mathbf{x}(k)$  y  $\tilde{\mathbf{x}}(k)$  como el error  $\mathbf{e}(k)$ :

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k)$$

La ecuación (4.26) se convierte, entonces, en

$$\mathbf{e}(k + 1) = (\mathbf{G} + \mathbf{K}_e\mathbf{C})\mathbf{e}(k) \quad (4.27)$$

De (4.27) se ve que el comportamiento dinámico de la señal de error queda determinado por los valores característicos de  $\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$ . Si la matriz  $\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$  es una matriz estable, el vector de error convergirá a cero para cualquier error inicial  $\mathbf{e}(0)$ . Es decir,  $\tilde{\mathbf{x}}(k)$  convergirá a  $\mathbf{x}(k)$  independientemente de los valores de  $\mathbf{x}(0)$  y  $\tilde{\mathbf{x}}(0)$ . Si los valores característicos de  $\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$  están localizados de forma tal que el comportamiento dinámico del vector de error es adecuadamente rápido, entonces cualquier error tenderá a cero con una velocidad adecuada. Una forma de obtener una respuesta rápida es utilizar una respuesta con oscilaciones muertas. Esto puede obtenerse si a todos los valores característicos de  $\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$  se les da un valor igual a cero.

A continuación se analizará un ejemplo de un observador de estado. Considere el sistema

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k)\end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & -0.16 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [0 \quad 1]$$

Diseñe un observador de estado de orden completo, suponiendo que la configuración del sistema es idéntica a la mostrada en la Fig. 4.4. Los valores característicos deseados para la matriz del observador son

$$z = 0.5 + j0.5, \quad z = 0.5 - j0.5$$

y por lo tanto la ecuación característica que se requiere es

$$(z - 0.5 - j0.5)(z - 0.5 + j0.5) = z^2 - z + 0.5 = 0$$

Dado que la configuración del observador de estado está especificada como se muestra en la Fig. 4.4, el diseño del observador de estado se reduce a la determinación de una matriz de ganancia de realimentación del observador  $\mathbf{K}_e$  apropiada. Antes de continuar se examinará la matriz de observabilidad. El rango de

$$[\mathbf{C}^* : \mathbf{G}^* \mathbf{C}^*] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

es 2. Por ello, el sistema es completamente observable y es posible determinar la matriz de ganancia de realimentación del observador deseada.

Haciendo referencia a (4.27),

$$\mathbf{e}(k+1) = (\mathbf{G} - \mathbf{K}_e \mathbf{C}) \mathbf{e}(k)$$

donde

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k)$$

la ecuación característica del observador se convierte en

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{K}_e \mathbf{C}| = 0$$

se identificará la matriz de ganancia de realimentación del observador  $\mathbf{K}_e$  como sigue

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

entonces, la ecuación característica deseada es

$$\left| z \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -0.16 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{array}{cc} z & 0.16+k_1 \\ -1 & z+1+k_2 \end{array} \right| = 0$$

que se reduce a

$$z^2 + (1 + k_2)z + k_1 + 0.16 = 0 \quad (4.28)$$

Dado que la ecuación característica deseada es

$$z^2 - z + 0.5 = 0$$

al comparar (4.28) con esta última, obtenemos

$$k_1 = 0.34, \quad k_2 = -2$$

es decir,

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 0.34 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Se observa que existe una relación dual entre la ecuación de estado del sistema considerado en el ejemplo y la del sistema presente. La matriz de ganancia de realimentación del estado  $\mathbf{K}$  obtenida en el ejemplo es  $\mathbf{K} = [0.34 \ -2]$ . La matriz de ganancia de realimentación del observador  $\mathbf{K}_e$  obtenida aquí se relaciona con la matriz  $\mathbf{K}$  mediante la relación  $\mathbf{K}_e = \mathbf{K}^*$ .

#### 4.4 DISEÑO DEL OBSERVADOR DE ESTADO PARA EL MODELO DE EXTRUSION DE PLASTICOS

Para el diseño del observador de estado se considera el esquema mostrado en la Fig. 4.4. El observador es manipulado por la señal de entrada, así como también la señal de salida del sistema original. La salida del observador de estado  $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$  es comparada

con  $y \triangleq C\hat{x}$ , y la diferencia es utilizada como un término de corrección. La diferencia de  $y$  y  $C\hat{x}$ ,  $y - C\hat{x}$ , es multiplicada por una matriz real constante  $L$  de  $n \times q$  y alimentada a la señal de entrada de los integradores del observador. En nuestro caso, el modelo matemático del proceso de extrusión de plásticos [2], es el siguiente

$$\begin{bmatrix} \dot{\tau}_{b,1} \\ \dot{\tau}_{b,2} \\ \dot{\tau}_{b,3} \\ \dot{\tau}_{b,4} \\ \dot{\tau}_{b,5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & K_{12} & 0 & 0 & 0 \\ K_{12} & C_2 & K_{23} & 0 & 0 \\ 0 & K_{23} & C_3 & K_{34} & 0 \\ 0 & 0 & K_{34} & C_4 & K_{45} \\ 0 & 0 & 0 & K_{45} & C_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{b,1} \\ \tau_{b,2} \\ \tau_{b,3} \\ \tau_{b,4} \\ \tau_{b,5} \end{bmatrix} - S \begin{bmatrix} F\tau_{b,1} \\ F\tau_{b,2} \\ F\tau_{b,3} \\ F\tau_{b,4} \\ F\tau_{b,5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H\%_1 \\ H\%_2 \\ H\%_3 \\ H\%_4 \\ H\%_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{p,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{p,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{p,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{p,4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_{p,5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{p,1} \\ \tau_{p,2} \\ \tau_{p,3} \\ \tau_{p,4} \\ \tau_{p,5} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

En este modelo se desprecian las variaciones de la temperatura ambiente, así como las variaciones de temperatura en el barril y en el polímero, quedando el modelo simplificado de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} \dot{\tau}_{b,1} \\ \dot{\tau}_{b,2} \\ \dot{\tau}_{b,3} \\ \dot{\tau}_{b,4} \\ \dot{\tau}_{b,5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & K_{12} & 0 & 0 & 0 \\ K_{12} & C_2 & K_{23} & 0 & 0 \\ 0 & K_{23} & C_3 & K_{34} & 0 \\ 0 & 0 & K_{34} & C_4 & K_{45} \\ 0 & 0 & 0 & K_{45} & C_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{b,1} \\ \tau_{b,2} \\ \tau_{b,3} \\ \tau_{b,4} \\ \tau_{b,5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H\%_1 \\ H\%_2 \\ H\%_3 \\ H\%_4 \\ H\%_5 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Utilizando los parámetros del extrusor (apéndice 2), el modelo matemático se expresa de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} \tau_{b,1} \\ \tau_{b,2} \\ \tau_{b,3} \\ \tau_{b,4} \\ \tau_{b,5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -73.81 \times 10^{-6} & 2.58 \times 10^{-6} & 0 & 0 & 0 \\ 1.88 \times 10^{-6} & -75.55 \times 10^{-6} & 1.88 \times 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 1.88 \times 10^{-6} & -75.55 \times 10^{-6} & 1.88 \times 10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 1.88 \times 10^{-6} & -75.55 \times 10^{-6} & 1.88 \times 10^{-6} \\ 0 & 0 & 0 & 1.59 \times 10^{-6} & -24.36 \times 10^{-6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{b,1} \\ \tau_{b,2} \\ \tau_{b,3} \\ \tau_{b,4} \\ \tau_{b,5} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0.01361 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.02723 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02723 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.02723 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.00689 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H\%_1 \\ H\%_2 \\ H\%_3 \\ H\%_4 \\ H\%_5 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

donde

$$G = \begin{bmatrix} -73.81 \times 10^{-6} & 2.58 \times 10^{-6} & 0 & 0 & 0 \\ 1.88 \times 10^{-6} & -75.55 \times 10^{-6} & 1.88 \times 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 1.88 \times 10^{-6} & -75.55 \times 10^{-6} & 1.88 \times 10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 1.88 \times 10^{-6} & -75.55 \times 10^{-6} & 1.88 \times 10^{-6} \\ 0 & 0 & 0 & 1.59 \times 10^{-6} & -24.36 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0.01361 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.02723 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02723 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.02723 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.00689 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinando los polos de la matriz  $G$  [8], estos son:

$$\begin{bmatrix} -7.1831 \times 10^{-5} \\ -7.8545 \times 10^{-5} \\ -7.3730 \times 10^{-5} \\ -7.6412 \times 10^{-5} \\ -7.4302 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

Como todos los polos son negativos y el objetivo del observador no es retroalimentar el estado de la planta (temperaturas en las cinco zonas del extrusor), únicamente el diseño persigue determinar el estado actual de las temperaturas del extrusor en un momento determinado. Esto se reduce a la determinación de una matriz de ganancia de realimentación del observador  $\mathbf{K}_e$  apropiada.

Analizando la matriz de observabilidad  $[\mathbf{C}^* : \mathbf{G}^* \mathbf{C}^* : (\mathbf{G})^2 \mathbf{C}^* : (\mathbf{G})^3 \mathbf{C}^* : (\mathbf{G})^4 \mathbf{C}^*]$  Se determina que esta es de rango 5 [8]. Por ello, el sistema es completamente observable y es posible determinar la matriz de ganancia de realimentación del observador deseada.

Haciendo referencia a (4.27),

$$\mathbf{e}(k+1) = (\mathbf{G} - \mathbf{K}_e \mathbf{C}) \mathbf{e}(k)$$

donde

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k)$$

la ecuación característica del observador se convierte en

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{K}_e \mathbf{C}| = 0$$

se identificará la matriz de ganancia de realimentación del observador  $\mathbf{K}_e$  como sigue

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{21} & k_{31} & k_{41} & k_{51} \\ k_{12} & k_{22} & k_{32} & k_{42} & k_{52} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{43} & k_{53} \\ k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} & k_{54} \\ k_{15} & k_{25} & k_{35} & k_{45} & k_{55} \end{bmatrix}$$

Seleccionando los polos del observador como:

$$\begin{bmatrix} -2+4j \\ -2-4j \\ -1+5j \\ -1-5j \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

se obtiene la matriz de  $\mathbf{K}_e$ :

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & -1.88 \times 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & -1.88 \times 10^{-6} & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -1 & -1.88 \times 10^{-6} \\ 0 & 0 & 0 & -1.59 \times 10^{-6} & -0.5 \end{bmatrix}$$

Así, la configuración del observador de estado para el modelo de extrusión de plásticos es mostrado en la Fig. 4.5.

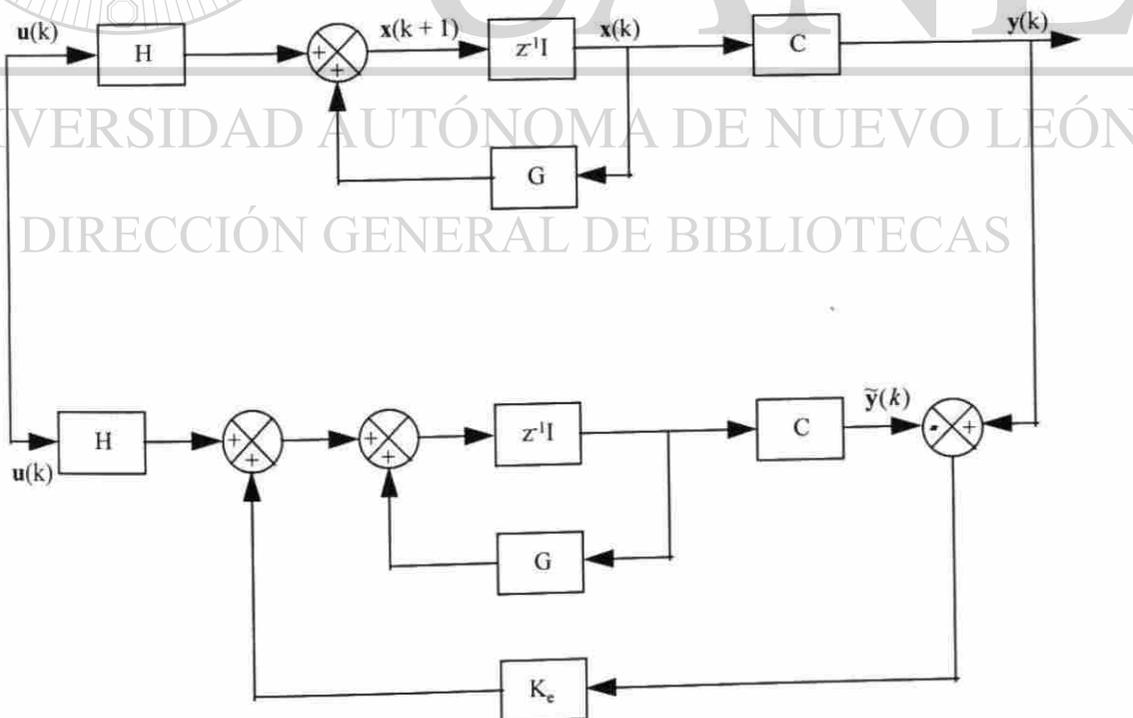


Fig. 4.5. Esquema del observador de estado para el modelo de extrusión de plásticos.

## 4.5 CONCLUSIONES DEL CAPITULO

En este capítulo se presentan los conceptos generales sobre estimadores de estado, los cuales tienen la función de reconstruir los estados de un sistema dinámico a partir de las mediciones de sus salidas.

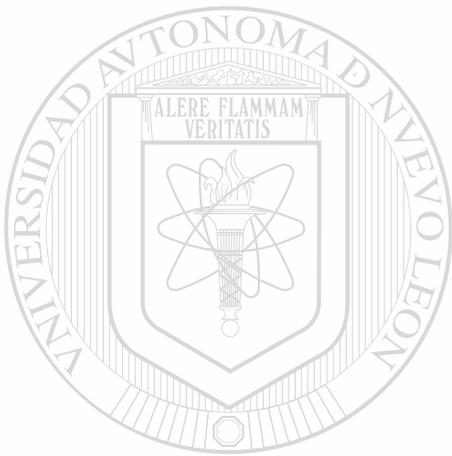
Se describen los conceptos fundamentales de controlabilidad y observabilidad, los cuales representan las base teórica para el diseño de un observador de estado. El concepto de controlabilidad está asociado a la capacidad de un sistema de control, que a partir de un estado inicial, sea capaz de alcanzar un estado final arbitrario en un período finito de tiempo. Asimismo, el concepto de observabilidad está asociado a la capacidad de un sistema de control de determinar exactamente los estados del proceso a partir de las mediciones de su salida en un período de tiempo finito.

El concepto de observabilidad es útil para resolver el problema de la reconstrucción de variables de estado no medibles. En este sentido, se fundamentó el hecho de que para la realización de un observador de estado, el sistema tiene que ser completamente observable, lo que representa que la matriz de observabilidad sea de rango completo.

Se presentó la metodología para el diseño de un observador de estado de orden completo, lo cual se reduce a la determinación de la ganancia de retroalimentación para asegurar que los polos de lazo cerrado sean estables, y obtener una respuesta adecuada del observador.

Finalmente, se describe el diseño del observador de estado para el proceso de extrusión de plásticos; para esto se consideró que los efectos de radiación y la transferencia de calor del polímero son mínimos, con lo que se obtiene un modelo reducido del proceso de la forma:  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$ . Como los polos del modelo son

estables, además de que el objetivo del observador de estado es estimar las temperaturas del proceso, mas que retroalimentar el estado como una acción de control, el diseño del observador se redujo al cálculo de la matriz de ganancia del observador.



# UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

# CAPITULO 5

## ANALISIS DE RESULTADOS

### 5.1 INTRODUCCION

En el capítulo 3 se describió el modelo matemático del proceso de extrusión de plásticos, que sirvió como base para el diseño del observador de estados para estimar las temperaturas de las cinco zonas en que se divide el proceso, descrito en el capítulo 4.

---

Hay que puntualizar que la función del observador desarrollado en este trabajo no es retroalimentar los estados como estrategia de control, sino más bien estimar las temperaturas del proceso con el fin de validar en forma indirecta los registros de temperatura de los equipos de medición instalados para ese fin.

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos de las simulaciones para verificar primero, la adaptación de el modelo de extrusión de plásticos utilizado y segundo, el comportamiento del observador de estado propuesto.

## 5.2 METODOLOGIA DE EVALUACION

Para validar el modelo matemático del extrusor de plásticos y analizar el comportamiento del observador se realizaron un conjunto de simulaciones utilizando MatLab [8] como software de simulación.

El modelo de extrusión se expresa como

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (5.1)$$

y el modelo del observador, tal y como se describió en el capítulo 4, es

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(k+1) &= \mathbf{G}\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) + \mathbf{K}_e(-\mathbf{y}(k) + \tilde{\mathbf{y}}(k)) \\ \tilde{\mathbf{y}}(k) &= \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(k) \end{aligned}$$

Manipulando algebraicamente las expresiones del observador, se llega a

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(k+1) &= \mathbf{G}\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) + \mathbf{K}_e(-\mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(k)) \\ \tilde{\mathbf{y}}(k) &= \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(k) \end{aligned}$$

ó bien

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{G} + \mathbf{K}_e\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{K}_e\mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \quad (5.2)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(k)$$

Combinando (5.1) y (5.2) se obtiene

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \tilde{\mathbf{x}}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & 0 \\ -\mathbf{K}_e\mathbf{C} & \mathbf{G} + \mathbf{K}_e\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \tilde{\mathbf{x}}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} \mathbf{u}(k)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}(k) \\ \tilde{\mathbf{y}}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \tilde{\mathbf{x}}(k) \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

donde  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{K}_e$  fueron definidos en la sección 4.4. Simplificando (5.3) se tiene

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \tilde{\mathbf{x}}(k+1) \end{bmatrix} = \mathbf{A}_m \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \tilde{\mathbf{x}}(k) \end{bmatrix} + \mathbf{B}_m \mathbf{u}(k)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}(k) \\ \tilde{\mathbf{y}}(k) \end{bmatrix} = \mathbf{C}_m \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \tilde{\mathbf{x}}(k) \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

El sistema (5.4) representa el modelo completo del extrusor y del observador de estados en forma conjunta, para su simulación en MatLab. A continuación se analizan los resultados obtenidos en algunas de las simulaciones realizadas, las cuales ponen de manifiesto la validez del modelo del extrusor y del observador desarrollado.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

### 5.3 ANALISIS DE RESULTADOS

**5.3.1 Modelo del extrusor.** En primera instancia se realizaron un conjunto de simulaciones para validar el modelo de extrusión descrito en el capítulo 3, y que representa la base para el diseño del observador de estados desarrollado en esta tesis. Con este objetivo se presentan los resultados de dos simulaciones para dos distintas entradas; la primera de estas entradas está compuesta por una entrada cero con duración de 50 s y un escalón unitario de igual duración. La segunda señal de entrada está compuesta inicialmente por un escalón unitario con una duración de 10 s, seguido de una entrada cero de 40 s de duración y finalmente un segundo escalón unitario con una

duración de 50 s. En ambos casos, las variables de control del proceso, representadas por la cantidad de calor suministrado expresado en por ciento (% $H$ ) de las cinco zonas de mantuvieron fijas en los siguientes valores:

$$\%H = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

En la Fig. 5.1 se aprecian ambas señales de entrada, utilizadas para verificar el modelo del extrusor como para analizar el comportamiento del observador.

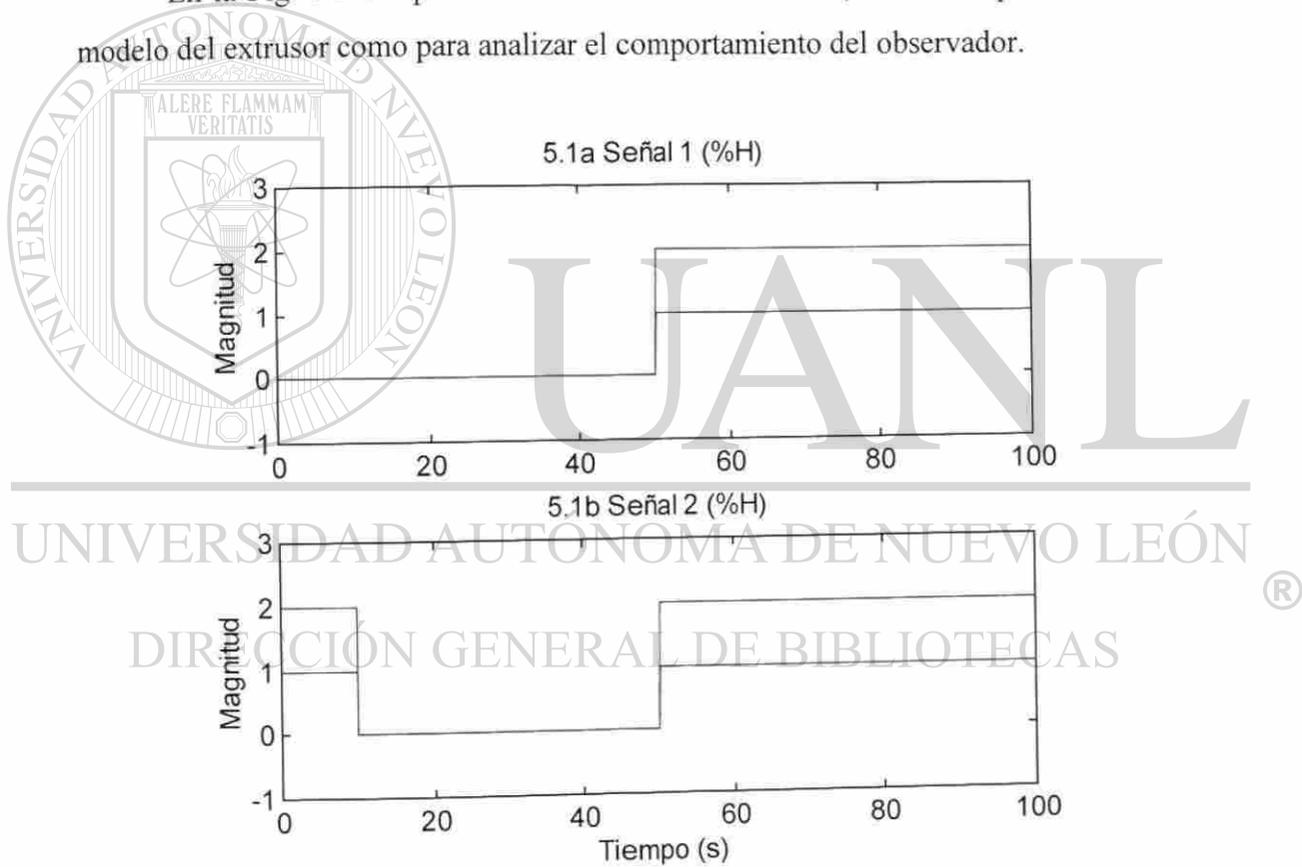


Fig. 5.1. Señales de entrada utilizadas en las simulaciones.

El objetivo de esta simulación es verificar el comportamiento del modelo ante una condición de pérdida de suministro de energía en las bandas calefactoras que suministran calor al proceso de extrusión. Ante estas perturbaciones, se han reportado

caídas de temperatura de alrededor de  $1^{\circ}\text{C}$  a  $2^{\circ}\text{C}$  cuando el suministro de energía se pierde durante aproximadamente 40 s.

Los resultados de simulación para la primera señal de entrada (Fig. 5.1a) se muestran en la Fig. 5.2. Las gráficas muestran el comportamiento de la temperatura en las cinco zonas del proceso. Se puede apreciar como ante una entrada cero, la temperatura del proceso comienza a disminuir hasta el punto en el cual se suministra calor, 50 s después del inicio de la simulación. El análisis de las temperaturas indican una reducción de  $1^{\circ}\text{C}$  durante el tiempo en el cual no se suministró calor al proceso, comportamiento que es muy similar al del proceso real.

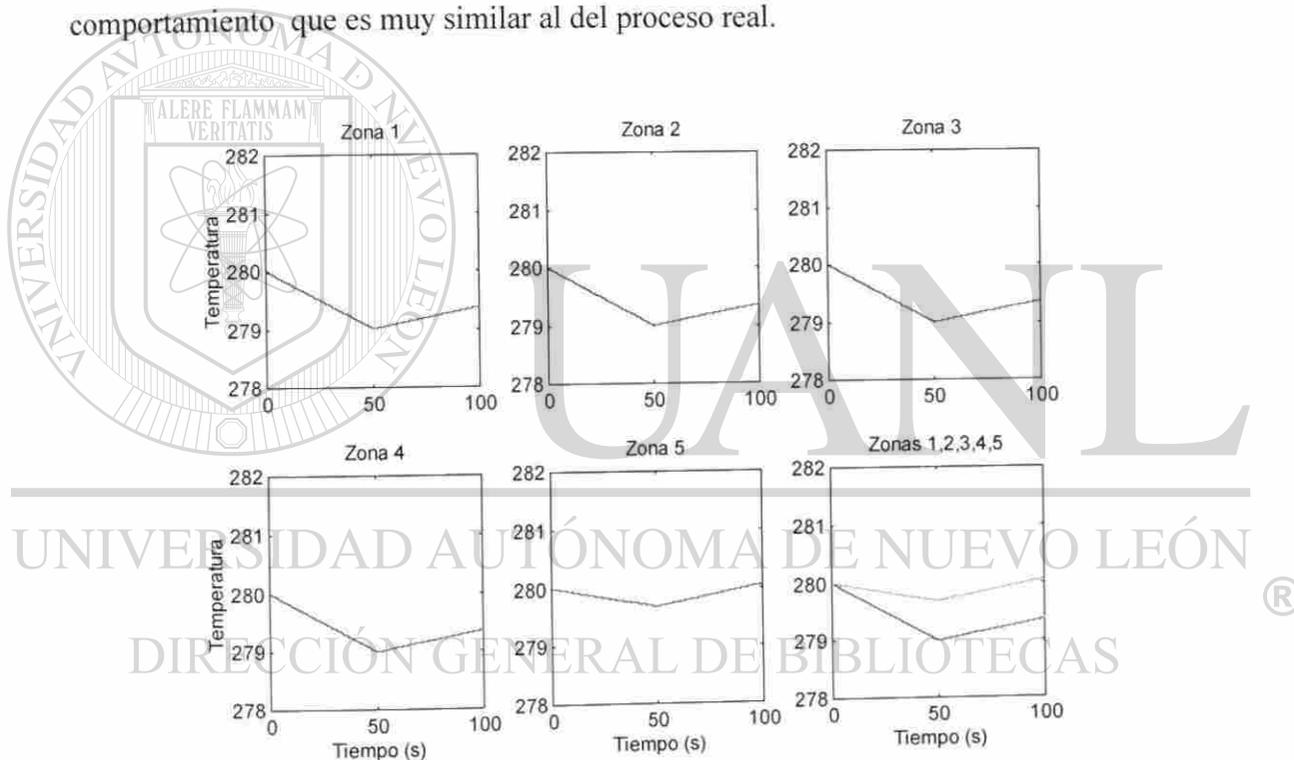


Fig. 5.2. Comportamiento del modelo del extrusor ante la señal de la Fig. 5.1a.

En el caso de la temperatura en la zona 5, la reducción que se presenta es de menor magnitud que las primeras cuatro zonas, debido a que continúa el transporte de material, transfiriendo energía térmica de las primeras a la última zona.

Los resultados de simulación aplicando la segunda señal de entrada, mostrada en la Fig. 5.1b se muestran en la Fig. 5.3. Analizando estos resultados, se puede observar el incremento inicial de temperatura, seguido por una reducción de aproximadamente  $1^{\circ}\text{C}$  durante los 40 s correspondientes a la entrada cero. Nuevamente, este es el comportamiento esperado ante una perturbación de este tipo en el proceso real.

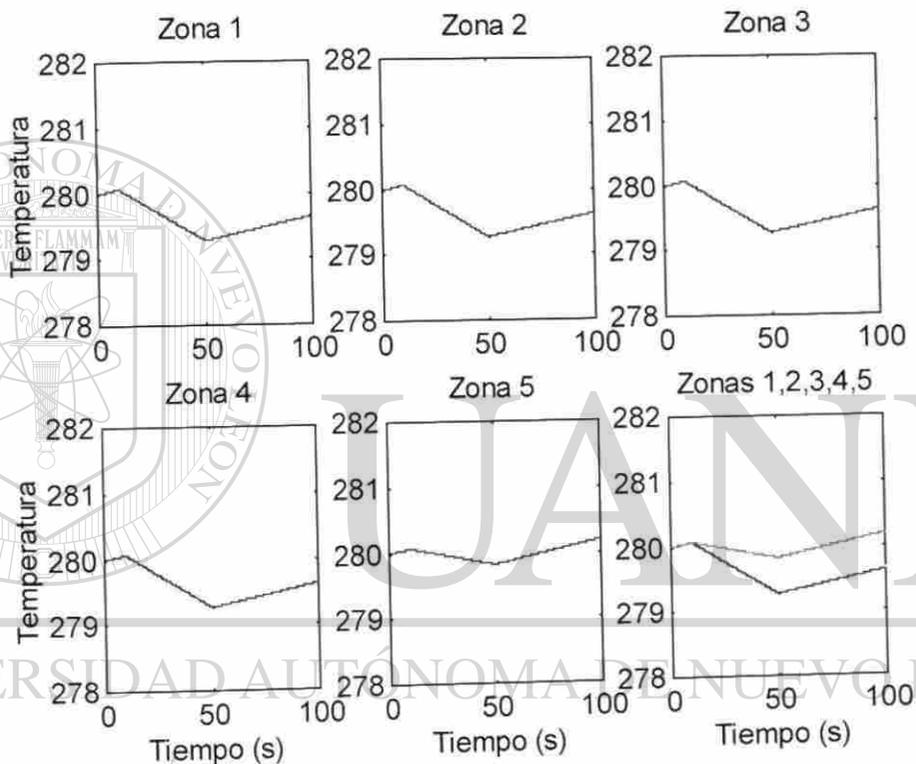


Fig. 5.3. Comportamiento del modelo del extrusor ante la señal de la Fig. 5.1b.

**5.3.2 Observador de estado.** Una vez verificado el modelo del extrusor, se procedió a realizar un conjunto de simulaciones para analizar el comportamiento del observador diseñado en el capítulo 4. En la Fig. 5.4 se observa el comportamiento del observador de estado aplicando la señal de entrada de la Fig. 5.1a. En este caso, la condición inicial del proceso es de  $280^{\circ}\text{C}$ , mientras que las variables del observador son inicializadas en valor cero.

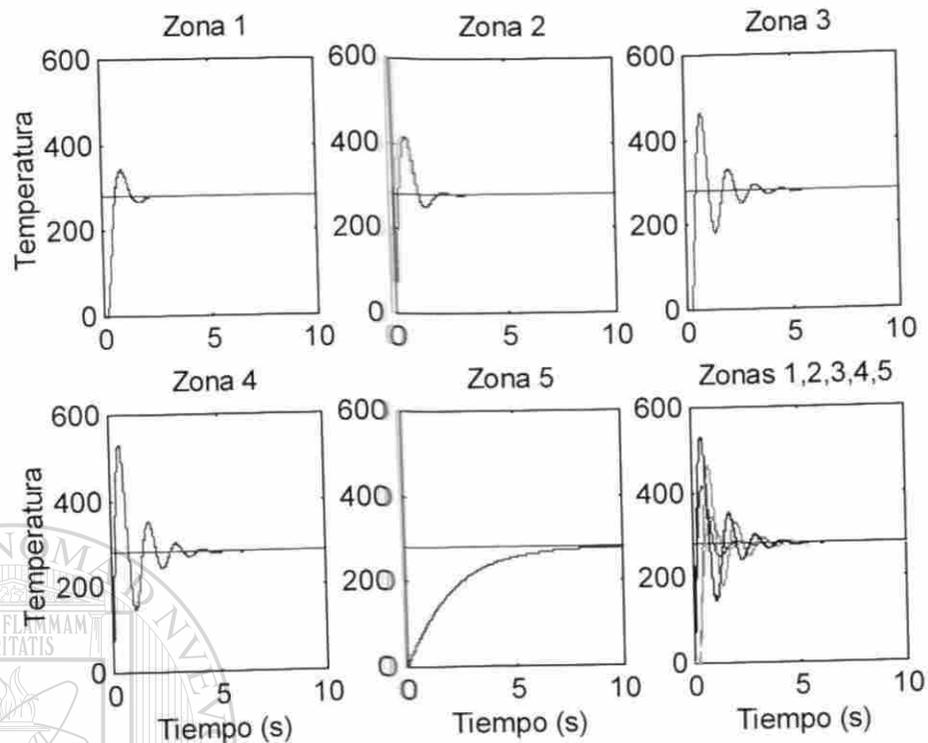


Fig. 5.4. Comportamiento del observador ante la señal de la Fig. 5.1a.

En estas gráficas se puede apreciar claramente como las salidas del observador

tienden a sus valores reales, es decir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k) = 0$$

Este aspecto se puede apreciar en la Fig. 5.5, donde se grafican los errores entre las temperaturas del proceso y las temperaturas estimadas por el observador.

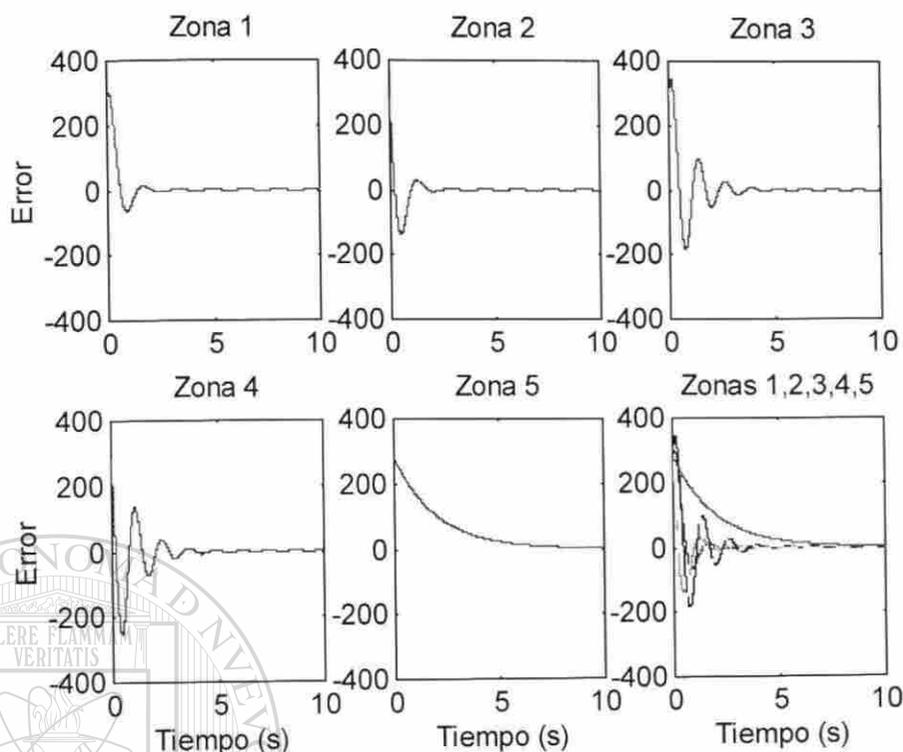


Fig. 5.5. Comportamiento de los errores ante la señal de la Fig. 5.1a.

En lo que respecta al tiempo de respuesta, éste se puede analizar en las gráficas de las Fig. 5.4 y 5.5. Los resultados muestran que en un tiempo promedio de 5 s el error del observador es prácticamente cero; la única excepción se tiene en la temperatura de la zona 5, donde el valor estimado requiere alrededor de 10 s para converger a su valor real.

Este tipo de respuesta es aceptable, ya que el objetivo del observador no es retroalimentar los estados como estrategia de control, sino más bien estimar las temperaturas del proceso como un método indirecto para validar las lecturas de los equipos de medición de temperatura. Además, considerando que el proceso de extrusión de plásticos tiene asociadas constantes de tiempo muy grandes por tratarse de un fenómeno de transferencia de calor, un tiempo de respuesta de 10 s es totalmente aceptable, si lo comparamos con la respuesta del modelo descrita en la sección 5.3.1, donde se registran cambios de  $1/40^{\circ}\text{C}$  por cada segundo [2].

En las Fig. 5.6 y 5.7 se muestra el comportamiento del observador de estados y los errores entre las variables del modelo y las variables estimadas para una entrada como la indicada en la Fig. 5.1b. De nueva cuenta se puede apreciar como el tiempo de respuesta del observador es adecuado, ya que éste se estabiliza antes de que se manifiesten cambios apreciables en las temperaturas del proceso, ya sean debido a una perturbación o acción de control, cualquiera que ésta sea.

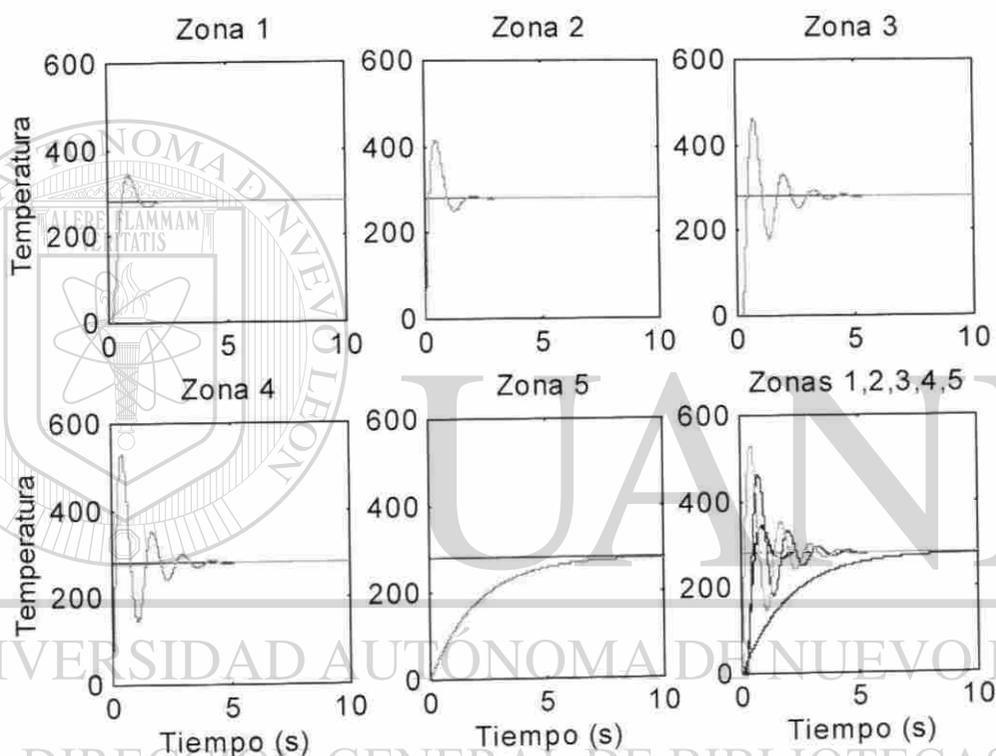


Fig. 5.6. Comportamiento del observador ante la señal de la Fig. 5.1b.

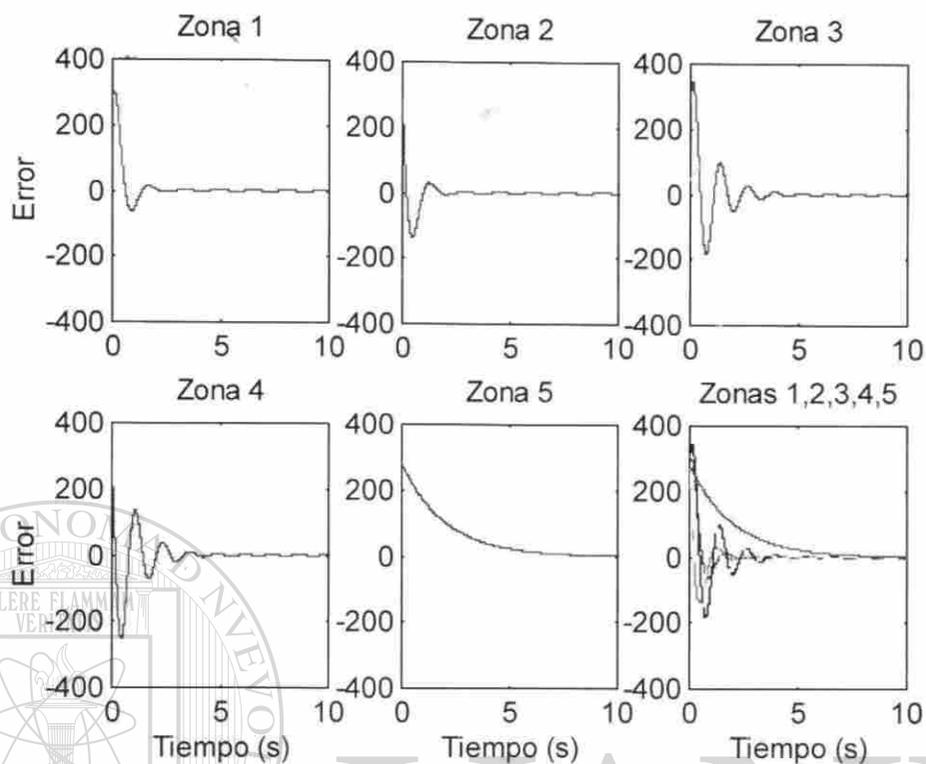


Fig. 5.7. Comportamiento de los errores ante la señal de la Fig. 5.1b.

## UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

### 5.4 APLICACIÓN DEL OBSERVADOR DE ESTADO EN TIEMPO REAL

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

En base a los resultados analizados anteriormente, se puede llegar a la conclusión de que el observador de estados desarrollado en este trabajo puede ser utilizado como un método indirecto para la verificación de los registros de temperatura de los equipos de medición.

Una vez implementado el observador en tiempo real, será posible establecer un registro histórico entre las temperaturas medidas y las estimadas del proceso; de esta

forma, una diferencia de cierta magnitud entre ambos registros sería señal de que uno de los equipos de medición esta fallando, y requiere revisión.

De esta forma, las revisiones y recalibración de equipos de medición se realizarían solo en caso necesario, con lo cual se reducirían pérdidas originadas por el paro del proceso asociado al proceso de recalibración.

## 5.5 CONCLUSIONES DEL CAPITULO

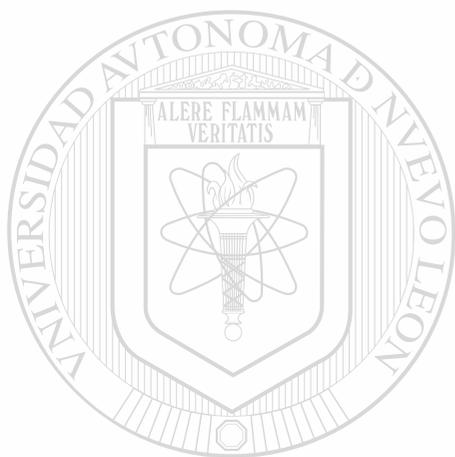
En este capítulo se analizan los resultados de la validación del modelo matemático del extrusor, así como del comportamiento del observador de estados propuesto en esta tesis como un método indirecto para la verificación de los registros de temperatura de los equipos de medición asociados.

Para la validación del modelo del extrusor se simuló su respuesta ante dos situaciones, la pérdida de energía en las bandas calefactoras del extrusor y una acción de control encaminada a aumentar la temperatura del proceso. En ambas situaciones se observó una respuesta correcta del modelo, ya que se aprecian cambios de  $1/40^{\circ}\text{C}$  por segundo, lo que coincide con la respuesta de un extrusor de plásticos real.

La respuesta del observador de estado se analizó también ante las mismas situaciones en que se validó el modelo del extrusor. En los resultados obtenidos se observa que la salida del observador converge a los valores de temperatura del modelo en forma apropiada cuando sus variables se inicializan en valor cero. El tiempo de respuesta del observador es menor a los 10 s, lo cual es bastante aceptable considerando que el proceso de extrusión de plásticos tiene asociadas constantes de tiempo muy grandes por tratarse de un fenómeno de transferencia de calor.

Adicionalmente, también se puede observar que el observador de estado se estabiliza antes de que se manifiesten cambios apreciables en las temperaturas del proceso, ya sean debido a una perturbación o acción de control, cualquiera que ésta sea.

Finalmente, y en base a los resultados obtenidos, se puede llegar a la conclusión de que el observador de estado desarrollado en esta tesis puede ser utilizado como un método indirecto para la verificación de los registros de temperatura en tiempo real, de un proceso de extrusión de plásticos.



# UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



# CAPITULO 6

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

### 6.1 INTRODUCCION

En la presente tesis se desarrolló un observador de estado para estimar las temperaturas de un proceso de extrusión, con el objetivo de establecer un método indirecto que permita verificar la medición de temperatura de los equipos de medición asociados al proceso.

Se pretende que esta herramienta sea de valiosa ayuda en la verificación de calibración en línea de los instrumentos de medición de temperatura, en especial en aquellos procesos que requieren un paro de producción para verificar la calibración de éstos, ocasionando pérdidas económicas originadas por el desperdicio de producto. Estas actividades son inherentes en cualquier compañía porque deben asegurar que los equipos operen correctamente, con mayor razón si desean obtener, o ya obtuvieron un certificado de calidad, ya que las compañías certificadoras realizan auditorias periódicamente para verificar que los instrumentos sean calibrados rigurosamente bajo un programa establecido.

A continuación se presentan las conclusiones más importantes derivadas de este trabajo de investigación, las aportaciones de este trabajo y un conjunto de recomendaciones para la realización de trabajos de investigación futuros en esta misma área.

## 6.2 CONCLUSIONES

Las principales conclusiones derivadas de este trabajo de investigación son:

- El proceso de extrusión es altamente sensible a las variaciones de temperatura del proceso, ya que afectan directamente la viscosidad del material fundido, ocasionando variaciones de flujo del material que se reflejan como una mala calidad del producto de salida. De este hecho se concluye la importancia de tener una medición de temperatura confiable que permita controlar las temperaturas del proceso.

- Se utilizó el modelo matemático de un extrusor con cinco zonas de calentamiento, que caracteriza el comportamiento de las temperaturas en cada zona del proceso. En este modelo no se considera la temperatura ambiente donde se encuentra localizado el extrusor y también se desprecian las variaciones de temperatura del producto que se alimenta al extrusor; sin embargo, estas simplificaciones no afectan la validez del modelo, ya que las temperaturas normales de operación de estos equipos son mucho mayores que la temperatura ambiente.

- En el diseño del observador de estado se consideró un sistema del tipo  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$ , al despreciar los efectos de radiación y transferencia de calor del polímero, dada la temperatura normal de operación del extrusor. Como los polos del modelo son estables, además de que el objetivo del observador de estado es estimar

las temperaturas del proceso, mas que retroalimentar el estado como una acción de control, el diseño del observador se redujo al cálculo de la matriz de ganancia del observador.

- Para la validación del modelo del extrusor se simuló su respuesta ante dos situaciones, la pérdida de energía en las bandas calefactoras del extrusor y una acción de control encaminada a aumentar la temperatura del proceso. En ambas situaciones se observo una respuesta correcta del modelo, ya que se aprecian cambios de  $1/40^{\circ}\text{C}$  por segundo, que son similares a los reportados en la literatura sobre simulación de procesos de extrusión [2].
- La respuesta del observador de estado se analizó también ante las mismas situaciones en que se validó el modelo del extrusor. En los resultados obtenidos se observa que la salida del observador converge a los valores de temperatura del modelo en forma apropiada cuando sus variables se inicializan en valor cero. El tiempo de respuesta del observador es menor a los 10 s, lo cual es bastante aceptable considerando que el proceso de extrusión de plásticos tiene asociadas constantes de tiempo muy grandes por tratarse de un fenómeno de transferencia de calor.

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

- Adicionalmente, también se puede observar que el observador de estado estabiliza antes de que se manifiesten cambios apreciables en las temperaturas del proceso, ya sean debido a una perturbación o acción de control, cualquiera que ésta sea.
- Finalmente, y en base a los resultados obtenidos, se puede llegar a la conclusión de que el observador de estado desarrollado en esta tesis puede ser utilizado como un método indirecto para la verificación de los registros de temperatura en tiempo real, de un proceso de extrusión de plásticos.

### 6.3 APORTACIONES

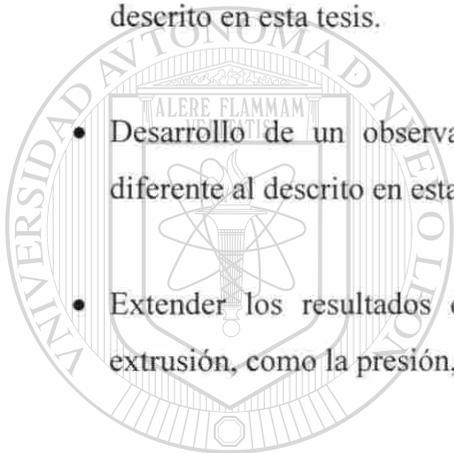
La principal aportación de este trabajo de investigación es la propuesta de un método indirecto para verificar en tiempo real la calibración de los sensores de temperatura en procesos de extrusión de plásticos. Este consiste en un observador de estado que estima las temperaturas del proceso. Implementado el observador en tiempo real, será posible establecer un registro histórico entre las temperaturas medidas y las estimadas del proceso; de esta forma, una diferencia de cierta magnitud entre ambos registros sería señal de que uno de los equipos de medición está fallando, y requiere revisión. Así, las revisiones y recalibración de equipos de medición se realizarían solo en caso necesario, con lo cual se reducirían pérdidas originadas por el paro del proceso asociado al proceso de recalibración.

Esta herramienta está orientada principalmente a mantener la continuidad de operación del proceso de extrusión, lo cual trae como consecuencia numerosas ventajas, como son un mejoramiento en el rendimiento, la eficiencia y la utilización de los equipos, mantener una calidad constante del producto, tener menores desperdicios del producto debido a paros de los equipos para verificar sus instrumentos de medición de temperatura, entre otras; todo lo anterior se refleja económicamente en reducción de costos y por consecuencia en incremento de utilidad del negocio.

### 6.4 RECOMENDACIONES

En base a los resultados obtenidos, se recomienda continuar investigando en los siguientes aspectos:

- Establecer un procedimiento para la operación en tiempo real del observador de estado propuesto en esta tesis, tomando en cuenta las distintas condiciones de operación en los procesos de extrusión.
- Estudiar el comportamiento del observador de estado para evaluar el efecto de desprestigiar los efectos de la radiación y transferencia de calor en el polímero en el modelo matemático del proceso de extrusión.
- Desarrollo de un observador de estado considerando el modelo completo del extrusor descrito en esta tesis.
- Desarrollo de un observador de estado considerando otro modelo del extrusor, diferente al descrito en esta tesis.
- Extender los resultados de esta investigación a otras variables del proceso de extrusión, como la presión, la viscosidad del polímero, o a otros procesos industriales.



UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

# BIBLIOGRAFIA

[1] Dr. Carlos A. Guerrero Salazar

Journal of Polymer Engineering

Vol. 12 No. 3 1993.

[2] Dr. Carlos A. Guerrero Salazar

Simulation en Régime Stationnaire

et en régime transitoire d'une extrudeuse monovis

Ph. D. tesis, Ecole Polytechnique de Montreal

Abril 1986.

[3] Dr. Luis Francisco Ramos Devalle.

Propiedades de flujo y extrusión: Principios básicos

Centro de Investigación en Química

Editorial Limusa, México

[4] Ernest O. Doebelin

Measurement systems, application and design

Editorial McGraw-Gill

Cuarta edición, 1990.

[5] Gene F. Franklin

J. David Powell

Abbas Emami-Naeini

Editorial Addison Wesley Publishing Company

Mayo, 1987.

[6] Katsuhiko Ogata  
 Sistemas de Control en Tiempo Discreto  
 Editorial Hall Hispanoamericana  
 Segunda edición.

[7] Omega engineering, Inc., 1992  
 The temperature handbook vol.28

[8] MatLab for windows, versión 4.2  
 Mathworks, Inc., 1994

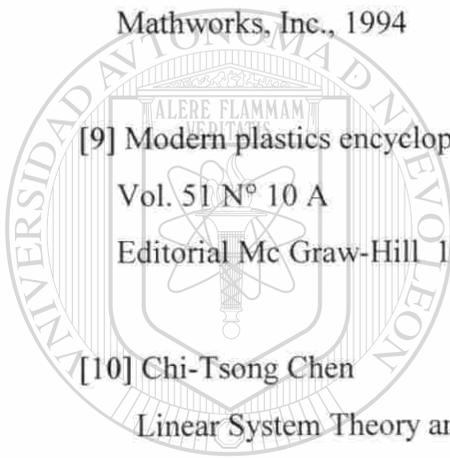
[9] Modern plastics encyclopedia  
 Vol. 51 N° 10 A  
 Editorial Mc Graw-Hill 1974

[10] Chi-Tsong Chen  
 Linear System Theory and Design

[11] Holt, Rinehart and Winston, Inc.

Editorial The Dryden Press  
 Saunders College Publishing

[12] Kurt Gieck  
 Manual de fórmulas técnicas  
 19a. edición, 1993  
 Editorial Alfaomega



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
 DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



## LISTADO DE FIGURAS

Fig. 2.1. Listado comparativo de ventajas y desventajas de los sensores de temperatura mas comunes.

Fig. 2.2. Elementos de resistencia.

Fig. 2.3. Configuración de dos puntas (Estilo 1).

Fig. 2.4. Configuración de tres puntas (Estilo 2).

Fig. 2.5. Configuración de cuatro puntas (Estilo 3).

Fig. 2.6. Configuración de dos puntas mas lazo (Estilo 4).

Fig. 2.7. Efecto de la resistencia de los cables de las puntas de conexión.

Fig. 2.8. Puente de Wheatstone.

Fig. 2.9. Puente de Wheatstone con RTD separado.

Fig. 2.10. Puente de Wheatstone de tres cables.

Fig. 2.11. Medición de resistencia de cuatro cables.

Fig. 2.12. Curva de adecuación de un termopar tipo S con respecto a un RTD.

Fig. 3.1. Diagrama esquemático de un extrusor.

Fig. 3.2. Sistema husillo-barril.

Fig. 3.3. Diferentes diseños de husillos.

Fig. 3.4. Filtro.

Fig. 3.5. Husillo con zona de descompensación.

Fig. 3.6. Localización de las 5 zonas de calentamiento en el extrusor.

Fig. 3.7. Contribución térmica en el subsistema.

Fig. 4.1. Diagrama esquemático del observador de estado.

Fig. 4.2. Sistema de regulación con un observador de estado.

Fig. 4.3. Sistema de control con realimentación del estado.

Fig. 4.4. Sistema de control con realimentación del estado observado.

Fig. 4.5. Esquema del observador de estado para el modelo de extrusión de plásticos.

Fig. 5.1. Señal de entrada utilizadas en las simulaciones.

Fig. 5.2. Comportamiento del modelo del extrusor ante la señal de la Fig. 5.1a.

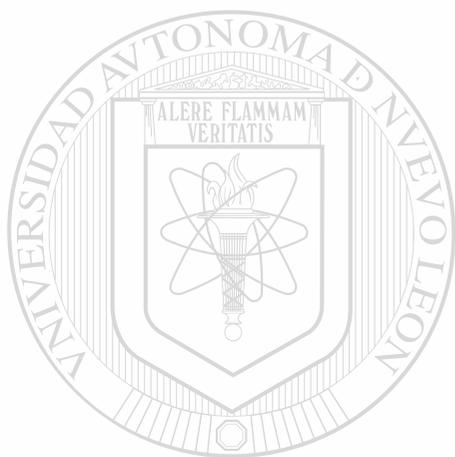
Fig. 5.3. Comportamiento del modelo del extrusor ante la señal de la Fig. 5.1b.

Fig. 5.4. Comportamiento del observador ante la señal de la Fig. 5.1a.

Fig. 5.5. Comportamiento de los errores ante la señal de la Fig. 5.1a.

Fig. 5.6. Comportamiento del observador ante la señal de la Fig. 5.1b.

Fig. 5.7. Comportamiento de los errores ante la señal de la Fig. 5.1b.



# UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

# APENDICE 1

## TABLA DE RESISTENCIA CONTRA TEMPERATURA

Curva americana ( $\alpha = 0.00392$  ohms / ohm / °C).

°C	OHMS	°C	OHMS	°C	OHMS	°C	OHMS
0	100.00	26	110	60	123.2	330	223
1	100.39	27	111	70	127.1	340	226
2	100.78	28	111	80	130.9	350	230
3	101.17	29	111	90	134.7	360	233
4	101.56	30	112	110	138.5	370	237
5	101.95	31	112	120	142.3	380	240
6	102.34	32	112	130	146.1	390	244
7	102.73	33	113	140	149.8	400	247
8	103.12	34	113	150	157.3	410	250
9	103.51	35	114	160	161	420	254
10	103.9	36	114	170	164.8	430	257
11	104.29	37	114	180	168.5	440	261
12	104.68	38	115	190	172.2	450	264
13	105.07	39	115	200	175.8	460	267
14	105.46	40	116	210	179.5	470	271
15	105.85	41	116	220	183.2	480	274
16	106.24	42	116	230	186.8	490	278
17	106.63	43	117	240	190.5	500	281
18	107.02	44	117	250	194.1	510	284
19	107.4	45	117	260	197.7	520	288
20	107.79	46	118	270	201.3	530	291
21	108.18	47	118	280	204.8	540	294
22	108.57	48	119	290	208.5	550	297
23	108.96	49	119	300	212	560	301
24	109.35	50	119	310	215.6	570	304

## APENDICE 2

### CALCULO DE PARAMETROS DEL MODELO DE EXTRUSION DE PLASTICO

a) Datos del extrusor:

Parámetro	Valor
$x_b$	3.1500 m
$x_{b,1}$	0.4668 m
$x_{b,2}$	0.6417 m
$x_{b,3}$	0.6417 m
$x_{b,4}$	0.6417 m
$x_{b,5}$	0.7582 m
$y$	0.0110 m
$\delta$	0.0010 m
$w$	0.0900 m
$x_{v,1}$	0.0450 m
$x_{v,2}$	0.0450 m
$x_{v,3}$	0.0450 m
$x_{v,4}$	0.0450 m
$x_{v,5}$	0.0000 m
$D_{b \text{ ext}}$	0.2626 m
$D_{b \text{ int}}$	0.1070 m

$D_v$	0.1050 m
$A_{a,1}$	0.3851 m <sup>2</sup>
$A_{a,2}$	0.5293 m <sup>2</sup>
$A_{a,3}$	0.5293 m <sup>2</sup>
$A_{a,4}$	0.5293 m <sup>2</sup>
$A_{a,5}$	0.6255 m <sup>2</sup>
$A_{b,1}$	0.0451 m <sup>2</sup>
$A_{b,2}$	0.0451 m <sup>2</sup>
$A_{b,3}$	0.0451 m <sup>2</sup>
$A_{b,4}$	0.0451 m <sup>2</sup>
$A_{b,5}$	0.0451 m <sup>2</sup>
$A_{p,1}$	0.1569 m <sup>2</sup>
$A_{p,2}$	0.2157 m <sup>2</sup>
$A_{p,3}$	0.2157 m <sup>2</sup>
$A_{p,4}$	0.2157 m <sup>2</sup>
$A_{p,5}$	0.2549 m <sup>2</sup>
$A_{v,1}$	0.1540 m <sup>2</sup>
$A_{v,2}$	0.2117 m <sup>2</sup>
$A_{v,3}$	0.2117 m <sup>2</sup>
$A_{v,4}$	0.2117 m <sup>2</sup>
$A_{v,5}$	0.2501 m <sup>2</sup>
$m_b$	1,112.2 kg
$m_v$	213.2 kg
$W_1$	8300 W
$W_2$	16600 W
$W_3$	16600 W
$W_4$	16600 W
$W_5$	4200 W
$T_a$	25 °C

$T_b$	280 °C
-------	--------

b) Datos de las tablas:

Parámetro	Valor
$\rho$	7817 kg/m <sup>3</sup>
$CP_b$	* 460 W seg/kg°C
$K_b$	* 16.3 W/m°C
$K_p$	0.2429 W/m°C
$Nu$	58.15

c) Parámetros calculados del modelo:

Parámetro	Valor
$R$	609,684
$K_1$	$2.58 \times 10^{-6}$
$K_2$	$1.88 \times 10^{-6}$
$K_3$	$1.88 \times 10^{-6}$
$K_4$	$1.88 \times 10^{-6}$
$K_5$	$1.59 \times 10^{-6}$
$H_{a,1}$	$4.65 \times 10^{-6}$
$H_{a,2}$	$6.39 \times 10^{-6}$
$H_{a,3}$	$6.39 \times 10^{-6}$
$H_{a,4}$	$6.39 \times 10^{-6}$
$H_{a,5}$	$7.56 \times 10^{-6}$
$H_{p,1}$	$6.47 \times 10^{-5}$
$H_{p,2}$	$6.47 \times 10^{-5}$

$H_{p,3}$	$6.47 \times 10^{-5}$
$H_{p,4}$	$6.47 \times 10^{-5}$
$H_{p,5}$	$1.99 \times 10^{-5}$
$C_1$	$-73.81 \times 10^{-6}$
$C_2$	$-75.55 \times 10^{-6}$
$C_3$	$-75.55 \times 10^{-6}$
$C_4$	$-75.55 \times 10^{-6}$
$C_5$	$-24.36 \times 10^{-6}$
$P_1$	0.01361
$P_2$	0.02723
$P_3$	0.02723
$P_4$	0.02723
$P_5$	0.00689

Las fórmulas usadas para el cálculos de los parámetros son las siguientes [2]:

$$C_i = - (K_1 + K_2 + H_{a,i} + H_{p,i})$$

$$K_i = K_b A_{b,i} / x_{b,i} R$$

$$R = (m_b + m_v) C_{p_b}$$

$$H_{a,i} = h_a A_{a,i} / R$$

$$H_{p,i} = [(x_{v,i}/w) h_{p,f} x_{v,i} D_v + (1 - x_{v,i}/w) h_{p,m} w D_v] / R$$

$$h_a = 1.3195 [(T_b - T_a)/D_{b \text{ ext}}]^{0.25}$$

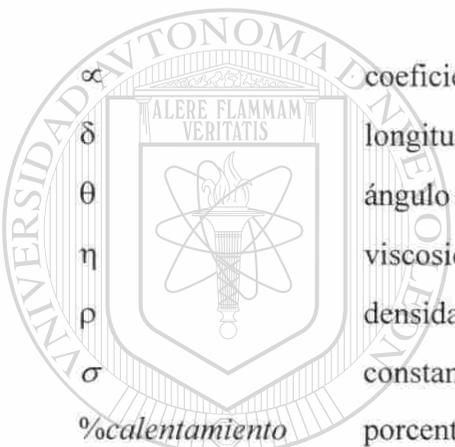
$$h_{p,f} = Nu K_p / \delta$$

$$h_{p,m} = Nu K_p / y$$

$$P_i = W_i / R$$

## APENDICE 3

### NOMENCLATURA UTILIZADA

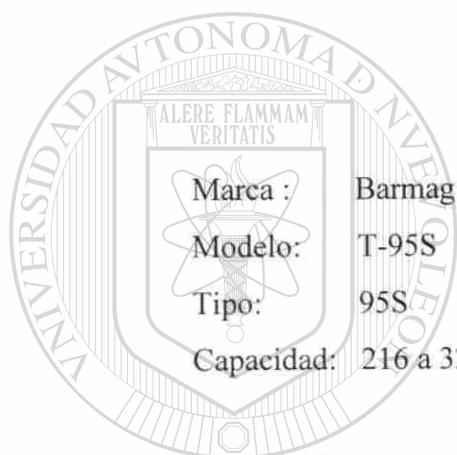


$\alpha$	coeficiente de temperatura
$\delta$	longitud de la hélice del tornillo al barril
$\theta$	ángulo entre la hélice y la dirección perpendicular al husillo
$\eta$	viscosidad
$\rho$	densidad del barril y tornillo (acero inoxidable 8%Cr, 8% Ni)
$\sigma$	constante de Stefan-Boltzmann
%calentamiento	porcentaje de calentamiento
$A_{a,ts}, A_{b,ts}, A_{p,t}$	área de la superficie de calentamiento barril-aire, barril-barril, barril-polímero
$A_{v,i}$	área de la superficie de calentamiento del tornillo
$CP_b, CP_v$	calor específico del barril y tornillo
$D_{b,ext}$	diámetro exterior del barril
$D_{b,int}$	diámetro interior del barril
$D_v$	diámetro del tornillo
$e$	espesor del hélice del husillo
$E$	longitud (axial) entre dos hélices del husillo
$h_a, h_p$	coeficiente de transferencia de calor barril-aire y barril-polímero
$H$	longitud de la profundidad del canal del husillo
$K_b$	conductividad térmica del barril

$K_p$	conductividad térmica del polímero
$L$	longitud del husillo
$m_b, m_v$	masa del barril y del tornillo
$P$	longitud de campo ( $P=E+e/\cos\theta$ )
$q1$	calor del elemento calefactor
$q2$	calor del subsistema " $i + 1$ "
$q3$	calor hacia el subsistema " $i - 1$ "
$q4$	radiación y calor por convección
$q5$	calor hacia el polímero y el tornillo
$R_1$	resistencia de la punta 1
$R_2$	resistencia de la punta 2
$R_3$	resistencia de la punta 3
$R_4$	resistencia de la punta 4
$R_T$	resistencia total
$R_E$	resistencia del elemento
$R_0$	resistencia a 0 °C
$T_a, T_b, T_p, T_v$	temperatura del aire, del barril, del polímero y del tornillo
$T_{b,i+1}$	temperatura de barril en el subsistema " $i$ "
$U_z$	velocidad máxima del fluido en dirección del canal
$w$	longitud del ancho del canal del husillo
$W_i$	máximo poder eléctrico de calentamiento del subsistema $i$
$x_b$	longitud total del barril
$x_{b,i}$	longitud del barril del subsistema $i$
$x_{v,i}$	longitud de la fase sólida entre hélices del tornillo
$y$	longitud de la masa del tornillo al barril
$z$	longitud del canal del husillo

## APENDICE 4

# ESPECIFICACIONES TECNICAS DEL EXTRUSOR



Marca : Barmag  
 Modelo: T-95S  
 Tipo: 95S  
 Capacidad: 216 a 324 kg./hr.

UANL

El rango de operación de temperatura es de 260-295 °C. La operación esta basada

en 65 RV nylon 6,6 con una viscosidad de 2000 poise a 288 °C a un promedio de 10 r.p.m. y una presión de 69 Bar.

### DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

El extruder es de husillo sencillo. Está diseñado para suministrar una alimentación estable y una salida de presión constante. La capacidad del motor es de la siguiente:

Motor CD.

Voltaje de 0-380 V.C.D.

Potencia de 66.3 kw.

El extruder consta con 5 zonas de calentamiento, todas las zonas tienen sistema de enfriamiento por abanicos. Las resistencias de calentamiento son de las siguientes capacidades:

Zona 1: 8.3 kw.

Zona 2: 16.6 kw.

Zona 3: 16.6 kw.

Zona 4: 16.6 kw.

Zona 5: 4.2 kw.

Los sensores de temperatura son RTD con doble sensor en todas las zonas.



# UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



# GLOSARIO

**Actuador.-** Dispositivo final de control que actúa directamente con la variable de control para modificarla.

**Alfa ( $\alpha$ ).**- Es el promedio del porcentaje de cambio de resistencia por grado centígrado de un dispositivo de resistencia de metal puro entre 0 °C y 100 °C. Usualmente se designa la letra griega alfa ( $\alpha$ ), con unidades de ohm / ohm / °C. La alfa común para un RTD de Platino, es 0.00385 ohm / ohm / °C.

**ANSI.-** Instituto Nacional de Estándares Americanos.

**Calibración.-** Es el proceso de ajustar un instrumento o compilar una tabla de desviación, de esta manera la lectura puede ser correlacionada con el valor que se esta midiendo actualmente.

**Celsius (Centígrados).**- Es una escala de temperatura que define 0 °C al punto de congelación del agua y 100 °C al punto de ebullición del agua, al nivel del mar.

**Cero Absoluto.-** Es la temperatura a la cual la energía térmica esta al mínimo. Kelvin calculó que para 0 K, serían -273.15 °C o -459.7 °F.

**Conductividad térmica.-** Es la propiedad de un material para conducir calor, en forma de energía térmica.

**CPS.-** Ciclos por segundo. Es la unidad en la cual se expresa la frecuencia, sinónimo de Hertz.

**DIN.-** Instituto Holandés de Normas. Es una agencia holandesa que establece estándares de ingeniería y dimensión, que son reconocidos mundialmente.

**DIN 43760.-** Es el estándar que define las características de un RTD de Platino de 100 ohms, teniendo una curva de resistencia contra temperatura especificada por  $\alpha = 0.00385$  ohms por ohm por grado centígrado.

**DMM.-** Multímetro digital.

**DVM.-** Voltímetro digital.

**Elemento del RTD.-** Es la unidad sensora de temperatura. Existen dos tipos de elementos, el de alambre enrollado y el de película delgada.

**Extrusor.-** Maquinaria o equipo utilizado para extruir material termoplástico.

**Extruir.-** Empujar con fuerza hacia fuera.

**Fahrenheit.-** Es una escala de temperatura que define 32 °F al punto de congelación del agua y 212 °F al punto de ebullición del agua, al nivel del mar.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

**FEM.-** Fuerza contraelectromotriz.

**Funda.-** Es un tubo cerrado que inmoviliza al elemento protegiéndolo contra humedad y el medio a ser medido. La funda además proporciona protección y estabilidad a los alambres de transición del frágil elemento.

**Husillo.-** Tornillo, mandril.

**IEC.-** Comisión Electrotécnica Internacional.

**ISA.-** Sociedad de Instrumentistas de América.

**IPTS.-** Escala de Temperatura Práctica Internacional.

**IPTS-48.-** Escala de Temperatura Práctica Internacional de 1948. Puntos determinados en termometría establecidos por la Novena Conferencia General de Pesos y Medidas de 1948.

**IPTS-68.-** Escala de Temperatura Práctica Internacional de 1968. Puntos determinados en termometría establecidos por la Conferencia General de Pesos y Medidas de 1968.

**Kelvin.-** Símbolo K. Es la unidad de la escala de temperatura absoluta o termodinámica, basada en la escala Celcius, con 100 unidades entre el punto de congelación y ebullición del agua.  $0^{\circ}\text{C} = 273.15\text{ K}$  (no se usa el símbolo de grado “°” en la escala Kelvin).

**Lazo de compensación.-** Son los cables de compensación de resistencia para los elementos de los RTD's, donde un cable extra es puesto del instrumento hacia el RTD y de regreso al instrumento, sin conexión con el RTD.

**Macroscópico.-** Lo que se alcanza a ver a simple vista.

**DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS**  
**NIST.-** Instituto Nacional de Estándares y Tecnología.

**PID.-** Modo de control proporcional, integral y derivativo.

**Precisión.-** Es la cercanía de una lectura o indicación de un instrumento de medición al valor actual de la cantidad que está siendo medida.

**PSI.-** Libras por pulgada cuadrada.

**Puente de Wheatstone.-** Es una red de cuatro resistencias, una fuente de voltaje y un galvanómetro, conectadas de tal forma que cuando las cuatro resistencias se igualen, el galvanómetro indique cero deflexión o nula lectura.

**Puntas de conexión.-** Son los cables de extensión del elemento, existen cuatro estilos de conexión (dos cables, tres cables, cuatro cables y cuatro cables con lazo de resistencia).

**Punto de congelación.-** Es la temperatura a la cual una sustancia en fase líquida se transforma a la fase sólida; comúnmente se refiere al punto de congelación del agua, el cual es  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  ( $32\text{ }^{\circ}\text{F}$ ) al nivel del mar.

**Punto de ebullición.-** Es la temperatura a la cual una sustancia en fase sólida se transforma a la fase líquida.

**Punto de fusión.-** Es la temperatura a la cual una sustancia en fase líquida se transforma a la fase gaseosa; comúnmente se refiere al punto de ebullición del agua, el cual es  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$  ( $212\text{ }^{\circ}\text{F}$ ) al nivel del mar.

**Punto de hielo.-** Es la temperatura a la cual se congela el agua pura,  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $32\text{ }^{\circ}\text{F}$ ,  $273.15\text{ K}$ .

## DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

**Rankine ( $^{\circ}\text{R}$ )-** Es una escala de temperatura absoluta, basada en la escala Fahrenheit, con  $180^{\circ}$  entre el punto de congelación y ebullición del agua.  $0\text{ }^{\circ}\text{F} = 459.67\text{ }^{\circ}\text{R}$ .

**Repetibilidad.-** Es la habilidad de una sonda o instrumento de dar la misma salida o lectura bajo repetidas condiciones idénticas.

**Resistencia.-** Es la resistencia al flujo de la corriente eléctrica, y se mide en ohms ( $\Omega$ ). Para un conductor, la resistencia esta en función del diámetro, la resistividad (una propiedad interna del material) y la longitud.

**RTD.-** Detector de temperatura por resistencia. Un detector de temperatura por resistencia opera con el principio del cambio de la resistencia eléctrica en alambre del elemento con respecto a la temperatura.

**Seebeck coeficiente.-** es el rango de cambio de una fem térmica, con respecto a una temperatura, normalmente se expresa en milivolts por grado.

**Seebeck efecto.-** Cuando un circuito esta formado por la unión de dos diferentes metales y las uniones están puestas a diferentes temperaturas, una corriente fluirá en el circuito causada por la diferencia de temperaturas entre las dos uniones.

**Seebeck fem.-** El circuito abierto causa un voltaje por la diferencia de temperatura entre las uniones fría y caliente de un circuito hecho de dos metales diferentes.

**Sistema de control distribuido.-** Centralización de las señales de sensores y actuadores en un gabinete el cual estos se encuentran distribuidos en diferentes áreas de la planta y que a la vez también se comunican entre sí.

**Sonda.-** Es un término genérico, que es usado para describir muchos tipos de sensores de temperatura, generalmente es un ensamble compuesto por un elemento, una funda, cables de conexión y una terminación o conector.

**Terminación o conector.-** Es la parte final de la sonda, a la cual se le conectarán los cables de extensión hacia el instrumento. Las terminaciones o conexiones estándar son: conector de cabeza, conector rápido, block terminal o cables de extensión.

**Termistor.-** Es un elemento sensor de temperatura compuesto de material semiconductor, el cual presenta un gran cambio en resistencia, proporcional a un cambio pequeño de temperatura.

**Termopar.-** Es la unión de dos diferentes metales, los cuales tienen una salida de voltaje proporcional a la diferencia de temperatura entre la junta caliente y la junta fría.

**Termopozo.-** Es un tubo cerrado diseñado para proteger sensores de temperatura de ambientes severos, altas presiones y flujos. Estos pueden ser instalados al sistema por medio de un tubo roscado o una brida soldada y usualmente están hechos de metales resistentes a la corrosión o materiales cerámicos, dependiendo de la aplicación.

**Transductor.-** Es un dispositivo que convierte la energía del parámetro que se está midiendo en otra forma de energía, la cual será la salida del dispositivo. Por ejemplo: un termopar convierte la energía térmica en energía eléctrica (milivolts de salida).

**Transmisor.-** Es un dispositivo que es usado para transmitir la señal de temperatura de un termopar o RTD, por medio de un lazo de corriente de dos cables. El lazo tiene una fuente de voltaje externa y el transmisor actúa como una resistencia variable con respecto a la señal de entrada.

**Triple punto del agua.-** Es el estado termodinámico donde están presentes en equilibrio las tres fases: sólido, líquido y gas. El triple punto del agua es .01 °C.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

# RESUMEN AUTOBIOGRAFICO

El Ing. Alejandro Hernández Garza es hijo del Ing. Antonio Hernández Rosas (†) y de María de la Luz Garza de Hernández (†), nació en la Cd. de Reynosa, Tamaulipas, México el día 2 de Octubre de 1971, realizó sus estudios de primaria, secundaria y preparatoria en la Cd. de Poza Rica, Veracruz, México. Sus estudios de licenciatura los realizó en la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, de la Universidad Autónoma de Nuevo León, en San Nicolás de los Garza, Nuevo León, México, obteniendo en el año de 1992 los títulos de Ingeniero en Control y Computación e Ingeniero en Electrónica y Comunicaciones.

Su experiencia profesional es de 8 años en el área de Automatización y Control en la empresa Cementos Mexicanos S.A. de C.V. , ubicada en la Cd. de Monterrey, Nuevo León, México.

Es miembro de Sociedad de Instrumentistas de América (ISA) desde el año de 1994.

## DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Esta Tesis titulada “Aplicación de observadores de estado para verificar las mediciones de temperatura en un proceso de extrusión” es presentada por el Ing. Hernández para obtener el grado de Maestro en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica con Especialidad en Control.

