CAPITULO 4

OBSERVADORES DE ESTADO

4.1 INTRODUCCION

En la sección 4.2 de este capítulo se presentarán dos conceptos fundamentales de los sistemas de control: controlabilidad y observabilidad. La controlabilidad se ocupa del problema de poder dirigir un sistema de un estado inicial dado, a un estado arbitrario. Un sistema es controlable si puede, mediante un vector de control no acotado, transferir dicho sistema de cualquier estado inicial a cualquier otro estado, en un número finito de períodos de muestreo. Por lo tanto, el concepto de controlabilidad trata de la existencia de un vector de control que puede causar que el estado del sistema llegue a algún estado arbitrario.

La observabilidad se ocupa del problema de determinar el estado de un sistema dinámico a partir de observaciones de los vectores de salida y de control en un número finito de períodos de muestreo. Un sistema es observable si, con el sistema en el estado $\mathbf{x}(0)$, se puede determinar el estado a partir de la observación de los vectores de salida y de control a lo largo de un número finito de períodos de muestreo.

En el estado final del proceso de diseño la realimentación del estado se lleva a cabo mediante el uso de variables de estado estimadas, mas que con variables de estado reales, mismas que probablemente no están disponibles para su medición directa. Si algunas de las variables de estado son medibles, entonces se pueden utilizar esas variables de estado disponibles y utilizar variables de estado estimadas en vez de aquellas verdaderamente no medibles.

La sección 4.3 analiza el diseño de observadores de estado, que estiman las variables de estado que realmente no son medibles. La estimación se basa en las mediciones de las señales de salida y control. Las variables de estado estimadas pueden ser utilizadas para la realimentación del estado, basado en le diseño de ubicación de polos.

Para sistemas lineales o no lineales de tiempo discreto variantes en el tiempo, la ecuación de estado se puede escribir como:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k]$$

y la ecuación de salida como

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k]$$

Para los sistemas lineales de tiempo discreto variantes en el tiempo, la ecuación de estado y la ecuación de salida se pueden simplificar a:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}(k)\mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k)$$

donde:

$\mathbf{x}(k)$ = vector n	(vector de estado)
$\mathbf{y}(k)$ = vector m	(vector de salida)
$\mathbf{u}(k)$ = vector r	(vector de entrada)
$\mathbf{G}(k)$ = matriz n x n	(matriz de estado)
$\mathbf{H}(k)$ = matriz n x r	(matriz de entrada)
$\mathbf{C}(k)$ = matriz m x n	(matriz de salida)
$\mathbf{D}(k)$ = matriz m x r	(matriz de transmisión directa)

La presencia de la variable k en los argumentos de las matrices $\mathbf{G}(k)$, $\mathbf{H}(k)$, $\mathbf{C}(k)$ y $\mathbf{D}(k)$ implica que estas matrices varían con el tiempo. Si la variable k no aparece en forma explícita en estas matrices, se supone que son invariables en el tiempo, es decir, constantes. Esto es, si el sistema es invariante en el tiempo, entonces las dos últimas ecuaciones se pueden simplificar a:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k)$$

Al igual que en el caso del tiempo discreto, los sistemas de tiempo continuo (lineal o no lineal) se pueden representar mediante la siguiente ecuación de estado y la siguiente ecuación de salida:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\left[\mathbf{x}(t),\ \mathbf{u}(t),\ t\right]$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}\left[\mathbf{x}(t),\ \mathbf{u}(t),\ t\right]$$

Para sistemas lineales de tiempo continuo variantes en el tiempo, las ecuaciones de estado y de salida están dadas por:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)$$

Si el sistema es invariante en le tiempo, entonces las dos últimas ecuaciones se simplifican a:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{4.1}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \tag{4.2}$$

Este tipo de sistema corresponde al modelo establecido en el capítulo 3 sobre las variaciones de temperatura en el proceso de extrusión de plásticos, por lo cual se tomará como base para diseñar el observador de estado en la sección 4.4; existen ciertas condiciones que hay que cumplir para implementar un observador de estado, las cuales se explicarán en la sección 4.2. El objetivo en este caso del observador de estado es determinar en que estado se encuentran las temperaturas del extrusor de plásticos.

4.2 CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIDAD

4.2.1 Controlabilidad. Se dice que un sistema de control es de estado completamente controlable, si es posible transferir el sistema de un estado inicial arbitrario a cualquier estado deseado (también un estado arbitrario), en un período finito. Es decir, un sistema de control es controlable si todas las variables de estado pueden ser controladas en un período finito mediante alguna señal de control no restringida. Si cualquiera de las variables de estado es independiente de la señal de control, entonces resulta imposible controlar esa variable de estado y, por lo tanto, el sistema es no controlable.

Puede no existir solución a un problema de control óptimo, si el sistema se considera no controlable. A pesar de que la mayor parte de los sistemas físicos son controlables, los modelos matemáticos correspondientes quizás no tengan la propiedad de controlabilidad. Por lo tanto, es necesario establecer la condición bajo la cual el sistema es controlable:

4.2.1.1 Controlabilidad completa del estado para un sistema de control en tiempo discreto lineal e invariante en el tiempo. Considere el sistema de control en tiempo discreto definido por:

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{G}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}\mathbf{u}(kT) \tag{4.3}$$

donde:

$\mathbf{x}(kT)$ = vector estado (de dimensión n) en el k-ésimo instante de muestreo

$\mathbf{u}(kT)$ = señal de control en el k-ésimo instante de muestreo

$\mathbf{G}$ = matriz de n x n

$\mathbf{H}$ = matriz de n x 1

T = Período de muestreo

Suponemos que $\mathbf{u}(kT)$ es constante para $kT \leq t < (k + T)T$.

El sistema de control en tiempo discreto dado por (4.3) es de estado completamente controlable, o simplemente de estado controlable [6], si existe una señal de control constante por intervalos $\mathbf{u}(kT)$, definida a lo largo de un número finito de períodos de muestreo de forma que, al partir de cualquier estado inicial, el estado $\mathbf{x}(kT)$ pueda ser transferido al estado deseado $\mathbf{x}_f$ en n períodos de muestreo como máximo. Al analizar la controlabilidad, el estado deseado $\mathbf{x}_f$ puede especificarse como el origen, o $\mathbf{x}_f$=0, sin embargo suponemos que $\mathbf{x}_f$ es un estado arbitrario en el espacio de n dimensiones, que incluye el origen.

Utilizando la definición que se acaba de dar, a continuación se deducirá la condición para la controlabilidad completa del estado. En vista que la solución a la ecuación (4.3) es:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(n\mathbf{T}) &= \mathbf{G}^n\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{n-1}\mathbf{G}^{n-j-1}\mathbf{Hu}(jT)\\ &= \mathbf{G}^n\mathbf{x}(0) + \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{Hu}(0) + \mathbf{G}^{n-2}\mathbf{Hu}(T) + \dots + \mathbf{Hu}((n-1)T)\end{aligned}$$

obtenemos:

$$\mathbf{x}(n\mathbf{T}) - \mathbf{G}^n\mathbf{x}(0) = \left[\mathbf{H} : \mathbf{GH} : \dots : \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}\right]\begin{bmatrix}\mathbf{u}((n-1)T)\\ \mathbf{u}((n-2)T)\\ \vdots\\ \mathbf{u}(0)\end{bmatrix} \tag{4.4}$$

Dado que $\mathbf{H}$ es una matriz de n x 1, encontramos que cada una de las matrices $\mathbf{H}$, $\mathbf{GH}, \dots \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}$ es una matriz de n x 1 o un vector de columna. Si el rango de la matriz siguiente $[\,\mathbf{H} : \mathbf{GH} : \dots : \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}\,]$ es n, entonces los n vectores $\mathbf{H}, \mathbf{GH}, \dots \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}$ pueden abarcar todo el espacio de n dimensiones. La matriz $[\,\mathbf{H} : \mathbf{GH} : \dots : \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}\,]$ se conoce como matriz de controlabilidad.

Controlabilidad completa de la salida. En el diseño práctico de un sistema de control, se puede preferir controlar la salida en vez del estado del sistema. La controlabilidad completa del estado no es necesaria ni suficiente para controlar la salida de un sistema. Por esta razón es necesario definir por separado la controlabilidad completa de la salida.

Considere el sistema definido por las ecuaciones:

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{Gx}(kT) + \mathbf{Hu}(kT) \tag{4.5}$$

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{Cx}(kT) \tag{4.6}$$

donde:

$\mathbf{x}(kT)$ = vector estado (de dimensión n) en el k-ésimo instante de muestreo

$\mathbf{u}(kT)$ = señal de control (escalar) en el k-ésimo instante de muestreo

$\mathbf{y}(kT)$ = vector salida (de dimensión m) en el k-ésimo instante de muestreo

$\mathbf{G}$ = matriz de n x n

$\mathbf{H}$ = matriz de n x 1

$\mathbf{C}$ = matriz de m x n

El sistema definido por (4.5) y (4.6) es de salida completamente controlable, o simplemente de salida controlable, si es posible tener una señal de control no restringida $\mathbf{u}(kT)$, definida a lo largo de un número finito de períodos de muestreo $0 \leq kT < nT$ tales que, empezando a partir de una salida inicial $\mathbf{y}(0)$, la salida $\mathbf{y}(kT)$ pueda ser transferida al punto deseado (un punto arbitrario) $\mathbf{y}_f$ en el espacio de salidas, en n períodos de muestreo como máximo.

Después de haber deducido la condición para la controlabilidad completa de salida [6], se determina que si un sistema es de salida completamente controlable, entonces existe una señal de control constante unitaria, que transferirá cualquier salida inicial a cualquier punto deseado $\mathbf{y}_f$ en el espacio de salidas, en n períodos de muestreo como máximo. Al igual que en el caso de controlabilidad completa del estado, una condición necesaria y suficiente para que el sistema sea de salida completamente controlable, es que los vectores $\mathbf{GH}, \mathbf{CGH}, \ldots, \mathbf{CG}^{n-1}\,\mathbf{H}$ abarquen el espacio de salidas de dimensión m, es decir que el rango de $[\ \mathbf{GH}, \mathbf{CGH}, \ldots, \mathbf{CG}^{n-1}\,\mathbf{H}\ ]$ sea m.

De este análisis se puede ver que en el sistema definido por (4.5) y (4.6), la controlabilidad completa del estado implica controlabilidad completa de la salida, si y sólo si los m renglones de **C** son linealmente independientes.

Ahora considere el sistema definido por las ecuaciones:

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{G}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}\mathbf{u}(kT) \tag{4.7}$$

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{D}\mathbf{u}(kT) \tag{4.8}$$

donde:

$\mathbf{x}(kT)$ = vector estado (de dimensión n) en el k-ésimo instante de muestreo

$\mathbf{u}(kT)$ =vector control (de dimensión r) en el k-ésimo instante de muestreo

$\mathbf{y}(kT)$ = vector salida (de dimensión m) en el k-ésimo instante de muestreo

$\mathbf{G}$ = matriz de n x n

$\mathbf{H}$ = matriz de n x r

$\mathbf{C}$ = matriz de m x n

$\mathbf{D}$ = matriz de m x r

Después de haber deducido la condición para la controlabilidad completa de salida [6], encontramos que una condición necesaria y suficiente para que el sistema definido por (4.7) y (4.8) sea de salida completamente controlable, es que la matriz de $m \times (n+1)r$ $[\,\mathbf{D} : \mathbf{CH} : \mathbf{CGH} : \ldots : \mathbf{CG}^{n-1}\mathbf{H}\,]$ sea de rango m.

Hay que señalar que la presencia de la matriz **D** en la ecuación de salida del sistema siempre ayuda a establecer la controlabilidad completa de la salida.

4.2.1.2 Controlabilidad de un sistema de control en tiempo continuo lineal e invariante en el tiempo. A continuación se enunciará brevemente las condiciones para la controlabilidad completa del estado y la controlabilidad de la salida de los sistemas de control en tiempo continuo lineales e invariantes con el tiempo. Considere el sistema definido por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$$

donde:

$\mathbf{x}$ = vector de estado (de dimensión n)

$\mathbf{u}$ = vector de control (de dimensión r)

$\mathbf{y}$ = vector de salida (de dimensión m)

$\mathbf{G}$ = matriz de n x n

$\mathbf{H}$ = matriz de n x r

$\mathbf{C}$ = matriz de m x n

$\mathbf{D}$ = matriz de m x r

Controlabilidad completa del estado. Una condición necesaria y suficiente para la controlabilidad completa del estado para este sistema, puede deducirse en forma similar a como se hizo en el caso de un sistema en tiempo discreto [6], obteniendo como resultado que la condición para la controlabilidad completa del estado es que la matriz de n x nr $[\ \mathbf{B} : \mathbf{AB} : \ldots : \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\ ]$ sea de rango n, o que contenga n vectores columna linealmente independientes (esta matriz por lo regular se conoce como matriz de controlabilidad para el sistema en tiempo continuo).

La condición para controlabilidad completa del estado también se puede enunciar en términos de las funciones de transferencia o de las matrices de transferencia. Una condición necesaria y suficiente para la controlabilidad completa del estado es que no ocurra cancelación en la función de transferencia o en la matriz de transferencia. Si ocurre cancelación, el sistema no puede ser controlado en la dirección del modo cancelado.

Controlabilidad de la salida. Como en el caso del sistema de control en tiempo discreto, la controlabilidad completa del estado no es necesaria ni suficiente para controlar la salida de un sistema de control en tiempo continuo lineal e invariante en el tiempo. Se puede demostrar [6] que la condición para la controlabilidad completa de la salida es que el rango de la matriz de m x $(n + 1)r$ $[\mathbf{D} : \mathbf{CB} : \mathbf{CAB} : \mathbf{CA}^2\mathbf{B} : \ldots : \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B}]$ sea m.

4.2.2 Observabilidad. Para analizar la observabilidad de sistemas de control en tiempo discreto lineal e invariante con el tiempo, considere el sistema de control en tiempo discreto sin excitación definido por:

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{Gx}(kT) \tag{4.9}$$

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{Cx}(kT) \tag{4.10}$$

donde:

$\mathbf{x}(kT)$ = vector estado (de dimensión n) en el k-ésimo instante de muestreo

$\mathbf{y}(kT)$ = vector salida (de dimensión m) en el k-ésimo instante de muestreo

$\mathbf{G}$ = matriz de n x n

$\mathbf{C}$ = matriz de m x n

El sistema es completamente observable si cualquier estado inicial $\mathbf{x}(0)$ puede determinarse a partir de la observación de $\mathbf{y}(kT)$ sobre un número finito de períodos de muestreo. El sistema, por lo tanto, es completamente observable, si cualquier transición del estado de manera eventual afecta a todos los elementos del vector de salida. El concepto de observabilidad es útil para resolver el problema de la reconstrucción de variables de estado no medibles y para el diseño de los observadores de estado.

La razón por la que se considera el sistema sin excitación es la siguiente. Si el sistema es el que está descrito por las ecuaciones:

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{Gx}(kT) + \mathbf{Hu}(kT)$$

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{Cx}(kT) + \mathbf{Du}(kT)$$

entonces:

$$\mathbf{x}(kT) = \mathbf{G}^k\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1}\mathbf{G}^{k-j-1}\mathbf{Hu}(jT)$$

y $\mathbf{y}(kT)$ es:

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{CG}^k\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1}\mathbf{CG}^{k-j-1}\mathbf{Hu}(jT) + \mathbf{D}\,\mathbf{u}(kT)$$

Dado que las matrices **G**, **H**, **C** y **D** son conocidas, y $\mathbf{u}(kT)$ también lo es, el segundo y tercer términos del segundo miembro de esta última ecuación son cantidades conocidas. Por lo tanto, pueden restarse del valor observado de $\mathbf{y}(kT)$. Entonces, para la investigación de una condición necesaria y suficiente para la observabilidad completa, basta considerar el sistema descrito por (4.9) y (4.10).

Una vez que a partir de la observación de la salida se pueda determinar $\mathbf{x}(0)$, también podrá determinarse $\mathbf{x}(kT)$, ya que $\mathbf{u}(0), \mathbf{x}(T), \ldots, \mathbf{u}((k-1)T)$ son conocidas.

4.2.2.1 Observabilidad completa de los sistemas de control en tiempo discreto. Considere el sistema definido por (4.9) y (4.10). El sistema es completamente observable si, dada la salida $\mathbf{y}(kT)$ sobre un número finito de períodos de muestreo, es posible determinar el vector de estado inicial $\mathbf{x}(0)$.

Ahora, se deducirá la condición para la observabilidad completa del sistema en tiempo discreto descrito por (4.9) y (4.10) . En vista que la solución $\mathbf{x}(kT)$ de (4.9) es

$$\mathbf{x}(kT) = \mathbf{G}^k\mathbf{x}(0)$$

se obtiene

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{CG}^k\mathbf{x}(0)$$

La observabilidad completa significa que, dado $\mathbf{y}(0), \mathbf{y}(T), \mathbf{y}(2T), \ldots$, es posible determinar $x_1(0), x_2(0), \ldots, x_n(0)$. Para determinar n incógnitas, se necesita únicamente n valores de $\mathbf{y}(kT)$. Por lo tanto, se pueden utilizar los primeros n valores de $\mathbf{y}(kT)$, o $\mathbf{y}(0), \mathbf{y}(T), \ldots, \mathbf{y}((n-1)T)$ que permiten determinar $x_1(0), x_2(0), \ldots, x_n(0)$.

En el caso de un sistema completamente observable, dados

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{Cx}(0)$$

$$\mathbf{y}(T) = \mathbf{CGx}(0)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{y}((n-1)T) = \mathbf{CG}^{n-1}\mathbf{x}(0)$$

se debe ser capaz de determinar $x_1(0), x_2(0), \ldots, x_n(0)$. Al observar que $\mathbf{y}(kT)$ es un vector de dimensión m, las n ecuaciones simultáneas anteriores dan como resultado nm ecuaciones, todas ellas incluyendo $x_1(0), x_2(0), \ldots, x_n(0)$. A fin de obtener un solo conjunto de soluciones $x_1(0), x_2(0), \ldots, x_n(0)$ a partir de estas nm ecuaciones, se debe escribir exactamente de entre ellas n ecuaciones lineales independientes. Esto requiere que la matriz nm x n, $[\ \mathbf{C} : \mathbf{CG} : \ldots : \mathbf{CG}^{n-1}\ ]^{T}$ sea de rango n.

Como el rango de una matriz y de su transpuesta conjugada es el mismo, es posible enunciar la condición correspondiente a la observabilidad completa como sigue. Una condición necesaria y suficiente para que el sistema definido por (4.9) y (4.10) sea completamente observable es que el rango de la matriz de n x nm, $[\ \mathbf{C}^{*} : \mathbf{G}^{*}\mathbf{C}^{*} : \ldots : (\mathbf{G}^{*})^{n-1}\ \mathbf{C}^{*}\ ]$ sea n. Esta matriz de n x nm se conoce comúnmente como matriz de observabilidad. Note que en esta matriz los asteriscos indican transpuestas conjugadas. Si las matrices **C** y **G** son reales, entonces la notación de transposición conjugada como $\mathbf{G}^{*}\mathbf{C}^{*}$ puede ser cambiada a notación de transposición, como $\mathbf{G}^{T}\mathbf{C}^{T}$.

4.2.2.2 Observabilidad completa de los sistemas de control en tiempo continuo lineales e invariantes con el tiempo. El sistema se dice completamente observable, si todos los estados iniciales $\mathbf{x}(0)$ pueden determinarse a partir de la observación de $\mathbf{y}(t)$ durante un intervalo de tiempo finito. Similar al caso del sistema de control en tiempo discreto, se necesita considerar sólo un sistema sin excitación. Considere el sistema definido por las ecuaciones:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx}$$

donde:

$\mathbf{x}$ = vector estado (de dimensión n)

$\mathbf{y}$ = vector salida (de dimensión m)

$\mathbf{A}$ = matriz de n x n

$\mathbf{C}$ = matriz de m x n

Igual que en el caso de sistema de control en tiempo discreto [6], se puede decir que la condición para la observabilidad completa es que el rango de la matriz de n x nm [$\mathbf{C}^*$: $\mathbf{A}^*\mathbf{C}^*$: . . . : $(\mathbf{A}^*)^{n-1}$ $\mathbf{C}^*$] sea n. Esta matriz de n x nm se conoce comúnmente como matriz de observabilidad del sistema en tiempo continuo.

4.3 OBSERVADORES DE ESTADO

En la práctica , sólo son medibles unas cuantas variables de estado de un sistema dado, mientras que las demás no están disponibles para la medición en forma directa. Puede ser, por ejemplo, que sólo las variables de salida sean medibles. En este caso, es necesario estimar las variables de estado que no puedan medirse directamente. Esa estimación suele llamarse observación. En un sistema práctico es necesario observar o estimar las variables de estado no medibles a partir de las variables de salida y las de control.

Un observador de estado, también conocido como estimador de estado, es un subsistema del sistema de control que lleva a cabo una estimación de las variables de estado, a partir de las mediciones de las variables de salida y control. Aquí, el concepto de observabilidad juega un papel importante. Como se analizará mas adelante, se pueden diseñar observadores de estado si, y sólo si, se satisface la condición de observabilidad.

En los siguientes análisis de observadores de estado, estaremos utilizaremos la notación $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ para designar el vector estado observado. En muchos casos, este vector se utiliza en la realimentación del estado para generar el vector de control óptimo. En la

Fig. 4.1 se muestra un esquema de un observador de estado. El observador de estado tiene $\mathbf{y}(k)$ y $\mathbf{u}(k)$ como entradas, y $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ como salida.

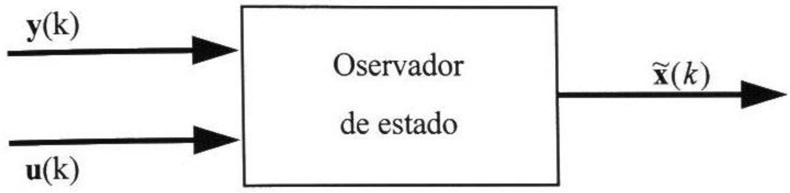

Fig. 4.1. Diagrama esquemático del observador de estado.

A continuación se analizará, primero, la condición necesaria y suficiente para la observación del estado, y después se estudiará el observador de estado de orden completo. La observación del estado de orden completo significa que se observan las n variables de estado, sin importar si algunas variables de estado están disponibles para la medición directa. A veces, cuando sólo se necesita la observación de las variables de estado no medibles, esto resulta innecesario. La observación de sólo las variables de estado no medibles se conoce como observación de estado de orden reducido, y se analizará más adelante.

Condición necesaria y suficiente para la observación de estado. La Fig. 4.2 muestra un sistema de regulación con un observador de estado, de la cual se obtienen las ecuaciones de estado y de salida como sigue:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \tag{4.11}$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \tag{4.12}$$

donde:

$\mathbf{x}(k)$ = vector de estado (de dimensión n)

$\mathbf{u}(k)$ = vector de control (de dimensión r)

$y(k)$ = vector de salida (de dimensión m)

$\mathbf{G}$ = matriz no singular de n x n

$\mathbf{H}$ = matriz de n x r

$\mathbf{C}$ = matriz de m x n

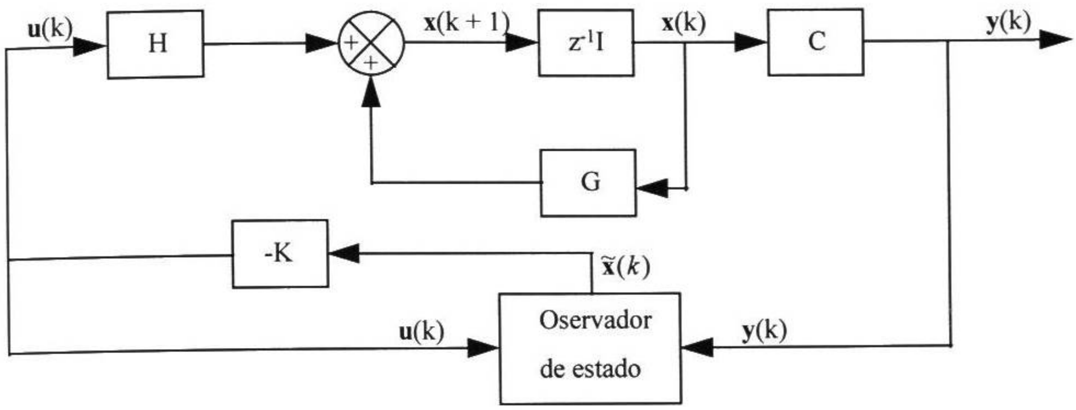

Fig. 4.2. Sistema de regulación con un observador de estado.

A fin de poder observar (estimar) las variables de estado, se debe de obtener $\mathbf{x}(k+1)$ en términos de $y(k), y(k-1),......, y(k-n+1)$, y $\mathbf{u}(k), \mathbf{u}(k-1),......, \mathbf{u}(k-n+1)$. De (4.11),

$$\mathbf{G}^{-1}\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) + \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k)$$

es decir,

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k) \tag{4.13}$$

Desplazando k en 1, se obtiene

$$\mathbf{x}(k-1) = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{x}(k) - \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-1) \tag{4.14}$$

sustituyendo (4.13) en (4.14), resulta:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k-1) &= \mathbf{G}^{-1}\,[\,\mathbf{G}^{-1}\,\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k)\,] - \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-1)\\ &= \mathbf{G}^{-2}\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{G}^{-2}\mathbf{H}\mathbf{u}(k) - \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-1)\end{aligned}$$

En forma similar,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k-2) &= \mathbf{G}^{-2}\mathbf{x}(k) - \mathbf{G}^{-2}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-1) - \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-2)\\ &= \mathbf{G}^{-3}\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{G}^{-3}\mathbf{H}\mathbf{u}(k) - \mathbf{G}^{-2}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-1) - \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-2)\\ &\;\vdots\\ \mathbf{x}(k-n+1) &= \mathbf{G}^{-n}\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{G}^{-n}\mathbf{H}\mathbf{u}(k) - \mathbf{G}^{-n+1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-1)\\ &\quad - ..... - \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-n+1)\end{aligned}$$

Sustituyendo (4.13) en (4.12), obtenemos

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) = \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k)$$

Asimismo,

$$\mathbf{y}(k-1) = \mathbf{Cx}\,(k-1) = \mathbf{CG}^{-2}\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{CG}^{-2}\mathbf{Hu}(k) - \mathbf{CG}^{-1}\mathbf{Hu}(k-1)$$

$$\mathbf{y}(k-2) = \mathbf{Cx}(k-2) = \mathbf{CG}^{-3}\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{CG}^{-3}\mathbf{Hu}(k) - \mathbf{CG}^{-2}\mathbf{Hu}(k-1) - \mathbf{CG}^{-1}\mathbf{Hu}(k-2)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{y}(k-n+1) = \mathbf{Cx}(k-n+1) = \mathbf{CG}^{-n}\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{CG}^{-n}\mathbf{Hu}(k) - \mathbf{CG}^{-n+1}\mathbf{Hu}(k-1) - \ldots - \mathbf{CG}^{-1}\mathbf{Hu}(k-n+1)$$

Si se combinan las n ecuaciones anteriores en una sola ecuación matricial, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}(k) \\ \mathbf{y}(k-1) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(k-n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{CG}^{-1} \\ \mathbf{CG}^{-2} \\ \vdots \\ \mathbf{CG}^{-n} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) - \begin{bmatrix} \mathbf{CG}^{-1}\mathbf{H} & 0 & \ldots & 0 \\ \mathbf{CG}^{-2}\mathbf{H} & \mathbf{CG}^{-1}\mathbf{H} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{CG}^{-n}\mathbf{H} & \mathbf{CG}^{-n+1}\mathbf{H} & \ldots & \mathbf{CG}^{-n+1}\mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{u}(k-1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(k-n+1) \end{bmatrix}$$

o bien

$$\begin{bmatrix} \mathbf{CG}^{-1} \\ \mathbf{CG}^{-2} \\ \vdots \\ \mathbf{CG}^{-n} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(k) \\ \mathbf{y}(k-1) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(k-n+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{CG}^{-1}\mathbf{H} & 0 & \ldots & 0 \\ \mathbf{CG}^{-2}\mathbf{H} & \mathbf{CG}^{-1}\mathbf{H} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{CG}^{-n}\mathbf{H} & \mathbf{CG}^{-n+1}\mathbf{H} & \ldots & \mathbf{CG}^{-n+1}\mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{u}(k-1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(k-n+1) \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

Se puede observar que el segundo miembro de (4.15) es totalmente conocido. Por lo tanto, $\mathbf{x}(k+1)$ puede determinarse si y sólo si

$$\text{rango} \begin{bmatrix} \mathbf{CG}^{-1} \\ \mathbf{CG}^{-2} \\ \vdots \\ \mathbf{CG}^{-n} \end{bmatrix} = n \tag{4.16}$$

Dado que la matriz $\mathbf{G}$ es no singular, multiplicar por $\mathbf{G}^n$ cada uno de los renglones del primer miembro de (4.16) no cambia la condición de rango. Por lo tanto, (4.16) es equivalente a:

$$\text{rango}\begin{bmatrix} \mathbf{CG}^{n-1} \\ \mathbf{CG}^{n-2} \\ \vdots \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} = n$$

que también equivale a:

$$\text{rango}\,[\,\mathbf{C}^* \ \ \mathbf{G}^*\,\mathbf{C}^* \ \ldots\ldots\ (\mathbf{G}^*)^{n-1}\,\mathbf{C}^*\,] = n \tag{4.17}$$

que es la condición de observabilidad completa del sistema definido por (4.11) y (4.12). Esto significa que si se satisface (4.17), (es decir, si el sistema es completamente observable), entonces se puede determinar $\mathbf{x}(k+1)$ a partir de $\mathbf{y}(k)$, $\mathbf{y}(k-1)$,.., $\mathbf{y}(k-n+1)$ y $\mathbf{u}(k)$, $\mathbf{u}(k-1)$,......., $\mathbf{u}(k-n+1)$. Por lo tanto, se ha demostrado que la condición necesaria y suficiente para la observación del estado es que el sistema sea completamente observable.

Como caso especial, si $\mathbf{y}(k)$ es un escalar y la matriz C es una de 1 x n, entonces se puede obtener $\mathbf{x}(k+1)$ premultiplicando ambos miembros de (4.15) por el inverso de la matriz dada en (4.16), como sigue:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{CG}^{-1} \\ \mathbf{CG}^{-2} \\ \vdots \\ \mathbf{CG}^{-n} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{y}(k) \\ \mathbf{y}(k-1) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(k-n+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{CG}^{-1} \\ \mathbf{CG}^{-2} \\ \vdots \\ \mathbf{CG}^{-n} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{CG}^{-1}\mathbf{H} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{CG}^{-2}\mathbf{H} & \mathbf{CG}^{-1}\mathbf{H} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{CG}^{-n}\mathbf{H} & \mathbf{CG}^{-n+1}\mathbf{H} & \cdots & \mathbf{CG}^{-n+1}\mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{u}(k-1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(k-n+1) \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

La ecuación (4.18) proporciona el valor $\mathbf{x}(k+1)$ cuando $\mathbf{y}(k)$ es un escalar.

Como quedó demostrado en el análisis anterior, el estado $\mathbf{x}(k+1)$ puede determinarse a partir de (4.15), siempre que el sistema sea completamente observable. Por lo tanto, para un sistema de esta clase, el vector de estado puede determinarse en n períodos de muestreo como máximo. En presencia de perturbaciones externas y ruido en la medición, sin embargo, este método puede no ofrecer una determinación no precisa del vector de estado. Por ello, para determinar el vector de estado, en presencia de perturbaciones y ruido en la medición, es necesario un enfoque distinto. Asimismo, si la matriz **C** no es de 1 x n sino de m x n (con $m > 1$), no puede definirse la inversa de la matriz de (4.16), y (4.18) no es aplicable. Con el fin de resolver estos casos, un método muy poderoso para la estimación del vector de estado es utilizar un modelo dinámico del sistema original, como sigue:

Considere el sistema de control definido por (4.11) y (4.12). Supongamos que el estado $\mathbf{x}(k)$ debe aproximarse al estado $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ del modelo dinámico:

$$\tilde{\mathbf{x}}(k + 1) = \mathbf{G}\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \tag{4.19}$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(k) \tag{4.20}$$

donde las matrices **G**, **H** y **C** son las mismas que las del sistema original. Asimismo, supongamos que el modelo dinámico está sujeto a la misma señal de control $\mathbf{u}(k)$ que el modelo original. Si las condiciones iniciales para el sistema real definido por (4.11) y (4.12), y para el modelo dinámico definido por (4.19) y (4.20), son las mismas, entonces el estado $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ y el estado $\mathbf{x}(k)$ serán iguales. Si las condiciones iniciales son distintas, entonces el estado $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ y el estado $\mathbf{x}(k)$ serían distintos.

No obstante, si la matriz **G** es una matriz estable, $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ se acercará a $\mathbf{x}(k)$, aún en el caso en que las condiciones iniciales sean diferentes. Si identificamos la diferencia entre $\mathbf{x}(k)$ y $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ como $\mathbf{e}(k)$, y definimos:

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k)$$

entonces, al sustraer (4.9) de (4.11), se obtiene:

$$\mathbf{x}(k + 1) - \tilde{\mathbf{x}}(k + 1) = \mathbf{G}\left[\mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k)\right]$$

es decir,

$$\mathbf{e}(k + 1) = \mathbf{G}\mathbf{e}(k)$$

Si la matriz **G** es estable, entonces $\mathbf{e}(k)$ se acercaría a cero y $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ a $\mathbf{x}(k)$. Sin embargo, el comportamiento del vector de error, que sólo depende de la matriz G, puede ser no aceptable. Asimismo, si la matriz **G** no es una matriz estable, entonces el error

$\mathbf{e}(k)$ no se acercará a cero. Es, por lo tanto, deseable modificar el modelo dinámico definido por (4.9) y (4.10).

Debe mencionarse que a pesar de que el estado $\mathbf{x}(k)$ puede ser no medible, la salida $\mathbf{y}(k)$ si lo es. El modelo dinámico definido por (4.9) y (4.10) no utiliza la salida medida $\mathbf{y}(k)$. El desempeño del modelo dinámico puede mejorar si se utiliza la diferencia entre la salida medida $\mathbf{y}(k)$ y la salida estimada $\mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(k)$ para vigilar o monitorear el estado de $\tilde{\mathbf{x}}(k)$; es decir, si el modelo dinámico de (4.9) se modifica de la forma siguiente:

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{G}\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) + \mathbf{K}_e\left[\mathbf{y}(k) - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(k)\right]$$

donde la matriz $\mathbf{K}_e$ sirve como matriz de ponderación. (Esto significa que la dinámica del observador de estado que se mostró en la Fig. 4.2 debe estar dada por esta última ecuación). En presencia de discrepancias entre las matrices **G** y **H** utilizadas en el modelo y las del sistema real, la adición de la diferencia entre la salida medida y la salida estimada ayudará a reducir las diferencias entre el modelo dinámico y el modelo real.

A continuación se analizará en detalle la dinámica del observador que está caracterizado por las matrices **G** y **H**, y por el término adicional de corrección, formado por la diferencia entre la salida medida y la salida estimada.

4.3.1 Observador de estado de orden completo. El orden del observador de estado que se analizará aquí es el mismo que el correspondiente al sistema. Como ya se indicó, un observador de estado como éste se conoce como observador de estado de orden completo.

En el análisis siguiente se supondrá que el estado real $\mathbf{x}(k)$ no puede medirse en forma directa. Si el estado $\mathbf{x}(k)$ debe estimarse, es conveniente que el estado observado o el estado estimado $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ sean tan cercanos al estado real $\mathbf{x}(k)$ como sea posible. Aunque no es necesario, resulta conveniente que el observador de estado tenga las matrices **G** y **H** iguales a las del sistema original.

Es importante observar que en el análisis presente, el estado $\mathbf{x}(k)$ no está disponible para la medición directa y, en consecuencia, el estado observado $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ no puede compararse con el estado real $\mathbf{x}(k)$. Sin embargo, dado que la salida si puede medirse $\tilde{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}\,\tilde{\mathbf{x}}(k)$, es posible comparar ésta con $\mathbf{y}(k)$.

Considere el sistema de control con realimentación del estado que se muestra en la Fig. 4.3. Las ecuaciones del sistema son :

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \tag{4.21}$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \tag{4.22}$$

$$\mathbf{u}(k) = -\,\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$$

donde:

$\mathbf{x}(k)$ = vector de estado (de dimensión n)

$\mathbf{u}(k)$ = vector de control (de dimensión r)

$\mathbf{y}(k)$ = vector de salida (de dimensión m)

$\mathbf{G}$ = matriz no singular de n x n

$\mathbf{H}$ = matriz de n x r

$\mathbf{C}$ = matriz de m x n

$\mathbf{K}$ = matriz de ganancia de realimentación de estado (matriz de m x n)

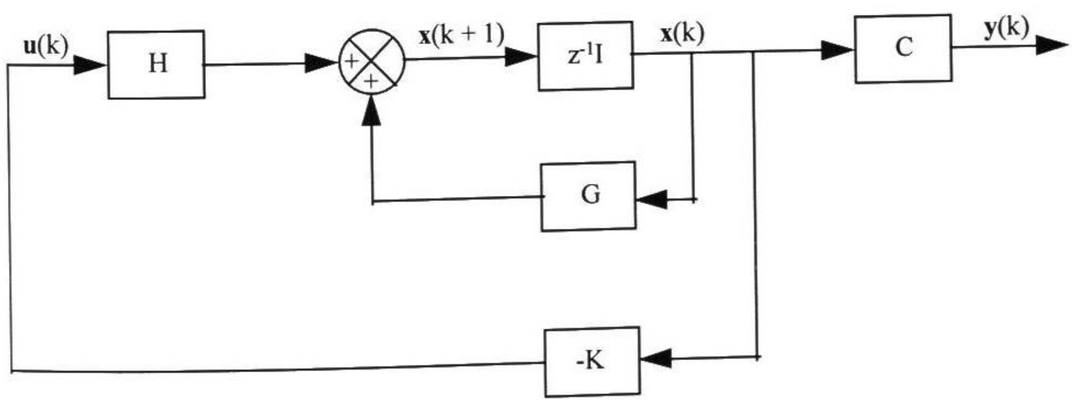

Fig. 4.3. Sistema de control con realimentación del estado.

Suponemos que el sistema es de estado completamente controlable y completamente observable, pero que $\mathbf{x}(k)$ no está disponible para medición directa. La Fig. 4.4 muestra un observador de estado incorporado a el sistema de la Fig. 4.3. El estado observado $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ se utiliza para formar el vector de control $\mathbf{u}(k)$, es decir

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}(k) \tag{4.23}$$

De la Fig.4.4, tenemos que

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{G}\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) + \mathbf{K}_e\left[\mathbf{y}(k)-\tilde{\mathbf{y}}(k)\right] \tag{4.24}$$

donde $\mathbf{K}_e$ es la matriz de ganancia de realimentación del observador (una matriz de n x m). Esta última ecuación puede modificarse y resultar

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{G}-\mathbf{K}_e\mathbf{C})\,\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) + \mathbf{K}_e\mathbf{y}(k) \tag{4.25}$$

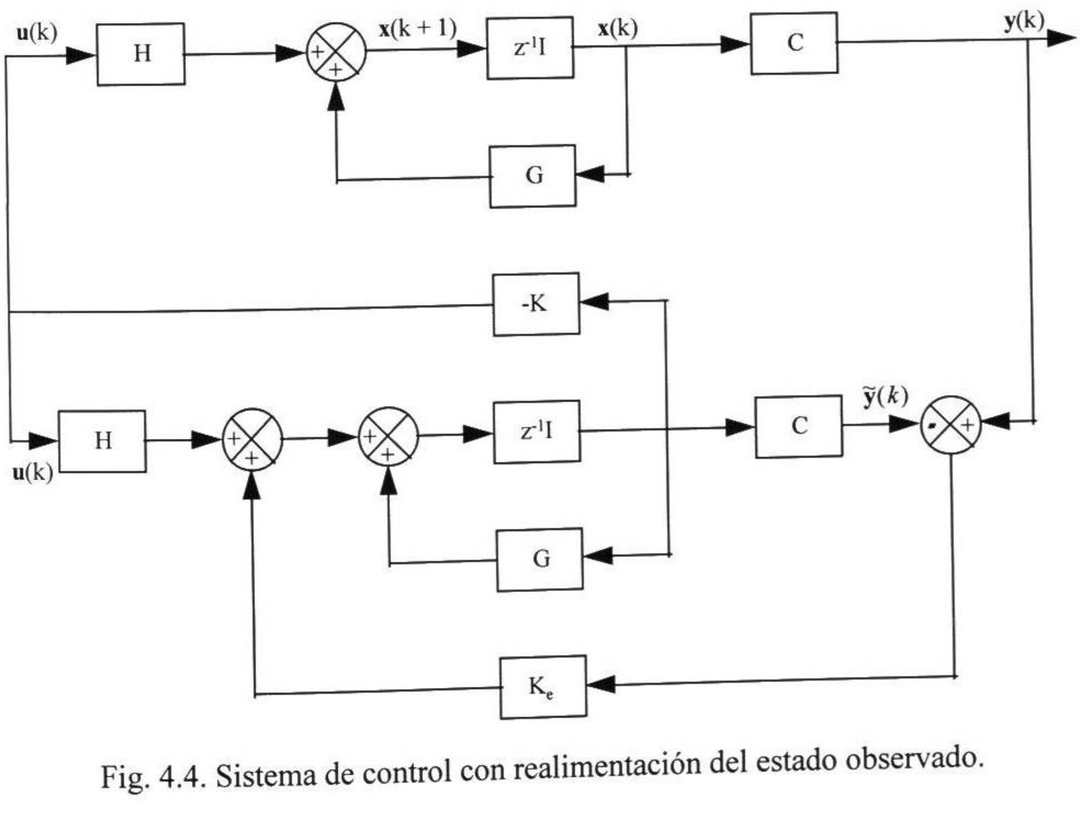

Fig. 4.4. Sistema de control con realimentación del estado observado.

El observador de estado dado por (4.25) se llama observador de predicción [6], pues el estimado $\tilde{\mathbf{x}}(k+1)$ está un período de muestreo adelante de la medición $\mathbf{y}(k)$. Los valores característicos de $\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{G}$ suelen conocerse como polos del observador.

Dinámica del error del observador de estado de orden completo. Se puede observar que si $\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k)$, entonces (4.25) se convierte en

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{G}\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{Hu}(k)$$

que es idéntica a la ecuación de estado del sistema. Por lo tanto, si $\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k)$, la respuesta del sistema de observador de estado es idéntica a la del sistema original.

Para obtener la ecuación de error del observador, restemos (4.25) de (4.21):

$$\mathbf{x}(k+1) - \tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \left(\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}\right)\left[\mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k)\right] \tag{4.26}$$

Ahora se definirá la diferencia entre $\mathbf{x}(k)$ y $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ como el error $\mathbf{e}(k)$:

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k)$$

La ecuación (4.26) se convierte, entonces, en

$$\mathbf{e}(k+1) = (\mathbf{G} + \mathbf{K}_e\mathbf{C})\,\mathbf{e}(k) \tag{4.27}$$

De (4.27) se ve que el comportamiento dinámico de la señal de error queda determinado por los valores característicos de $\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$. Si la matriz $\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$ es una matriz estable, el vector de error convergirá a cero para cualquier error inicial $\mathbf{e}(0)$. Es decir, $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ convergirá a $\mathbf{x}(k)$ independientemente de los valores de $\mathbf{x}(0)$ y $\tilde{\mathbf{x}}(0)$. Si los valores característicos de $\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$ están localizados de forma tal que el comportamiento dinámico del vector de error es adecuadamente rápido, entonces cualquier error tenderá a cero con una velocidad adecuada. Una forma de obtener una respuesta rápida es utilizar una respuesta con oscilaciones muertas. Esto puede obtenerse si a todos los valores característicos de $\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$ se les da un valor igual a cero.

A continuación se analizará un ejemplo de un observador de estado. Considere el sistema

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k)$$
$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$$

donde

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix} 0 & -0.16 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Diseñe un observador de estado de orden completo, suponiendo que la configuración del sistema es idéntica a la mostrada en la Fig. 4.4. Los valores característicos deseados para la matriz del observador son

$$z = 0.5 + j0.5\,, \qquad z = 0.5 - j0.5$$

y por lo tanto la ecuación característica que se requiere es

$$(z - 0.5 - j0.5)\,(z - 0.5 + j0.5) = z^2 - z + 0.5 = 0$$

Dado que la configuración del observador de estado está especificada como se muestra en la Fig. 4.4, el diseño del observador de estado se reduce a la determinación de una matriz de ganancia de realimentación del observador $\mathbf{K}_e$ apropiada. Antes de continuar se examinará la matriz de observabilidad. El rango de

$$[\mathbf{C}^* : \mathbf{G}^*\mathbf{C}^*] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

es 2. Por ello, el sistema es completamente observable y es posible determinar la matriz de ganancia de realimentación del observador deseada.

Haciendo referencia a (4.27),

$$\mathbf{e}(k+1) = (\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\,\mathbf{e}(k)$$

donde

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k)$$

la ecuación característica del observador se convierte en

$$|\, z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{K}_e\mathbf{C} \,| = 0$$

se identificará la matriz de ganancia de realimentación del observador $\mathbf{K}_e$ como sigue

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

entonces, la ecuación característica deseada es

$$\left| z\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -0.16 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} z & 0.16+k_1 \\ -1 & z+1+k_2 \end{vmatrix} = 0$$

que se reduce a

$$z^2 + (1 + k_2)z + k_1 + 0.16 = 0 \qquad (4.28)$$

Dado que la ecuación característica deseada es

$$z^2 - z + 0.5 = 0$$

al comparar (4.28) con esta última, obtenemos

$$k_1 = 0.34, \qquad k_2 = -2$$

es decir,

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 0.34 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Se observa que existe una relación dual entre la ecuación de estado del sistema considerado en el ejemplo y la del sistema presente. La matriz de ganancia de realimentación del estado **K** obtenida en el ejemplo es $\mathbf{K} = [0.34 \quad -2]$. La matriz de ganancia de realimentación del observador $\mathbf{K}_e$ obtenida aquí se relaciona con la matriz **K** mediante la relación $\mathbf{K}_e = \mathbf{K}^*$.

4.4 DISEÑO DEL OBSERVADOR DE ESTADO PARA EL MODELO DE EXTRUSION DE PLASTICOS

Para el diseño del observador de estado se considera el esquema mostrado en la Fig. 4.4. El observador es manipulado por la señal de entrada, así como también la señal de salida del sistema original. La salida del observador de estado $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Cx}$ es comparada con $\hat{y} \underline{\underline{\Delta}} C\hat{x}$, y la diferencia es utilizada como un término de corrección. La diferencia de y y $C\hat{x}$, $y - C\hat{x}$, es multiplicada por una matriz real constante **L** de n x q y alimentada a la señal de entrada de los integradores del observador. En nuestro caso, el modelo matemático del proceso de extrusión de plásticos [2], es el siguiente

$$\begin{bmatrix} \dot{\tau}_{b,1} \\ \dot{\tau}_{b,2} \\ \dot{\tau}_{b,3} \\ \dot{\tau}_{b,4} \\ \dot{\tau}_{b,5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & K_{12} & 0 & 0 & 0 \\ K_{12} & C_2 & K_{23} & 0 & 0 \\ 0 & K_{23} & C_3 & K_{34} & 0 \\ 0 & 0 & K_{34} & C_4 & K_{45} \\ 0 & 0 & 0 & K_{45} & C_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{b,1} \\ \tau_{b,2} \\ \tau_{b,3} \\ \tau_{b,4} \\ \tau_{b,5} \end{bmatrix} - S \begin{bmatrix} F\tau_{b,1} \\ F\tau_{b,2} \\ F\tau_{b,3} \\ F\tau_{b,4} \\ F\tau_{b,5} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H\%_1 \\ H\%_2 \\ H\%_3 \\ H\%_4 \\ H\%_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{p,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{p,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{p,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{p,4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_{p,5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{p,1} \\ \tau_{p,2} \\ \tau_{p,3} \\ \tau_{p,4} \\ \tau_{p,5} \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

En este modelo se desprecian las variaciones de la temperatura ambiente, así como las variaciones de temperatura en el barril y en el polímero, quedando el modelo simplificado de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} \dot{\tau}_{b,1} \\ \dot{\tau}_{b,2} \\ \dot{\tau}_{b,3} \\ \dot{\tau}_{b,4} \\ \dot{\tau}_{b,5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & K_{12} & 0 & 0 & 0 \\ K_{12} & C_2 & K_{23} & 0 & 0 \\ 0 & K_{23} & C_3 & K_{34} & 0 \\ 0 & 0 & K_{34} & C_4 & K_{45} \\ 0 & 0 & 0 & K_{45} & C_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{b,1} \\ \tau_{b,2} \\ \tau_{b,3} \\ \tau_{b,4} \\ \tau_{b,5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H\%_1 \\ H\%_2 \\ H\%_3 \\ H\%_4 \\ H\%_5 \end{bmatrix} \tag{4.30}$$

Utilizando los parámetros del extrusor (apéndice 2), el modelo matemático se expresa de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} \dot{\tau}_{b,1} \\ \dot{\tau}_{b,2} \\ \dot{\tau}_{b,3} \\ \dot{\tau}_{b,4} \\ \dot{\tau}_{b,5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -73.81\text{x}10^{-6} & 2.58\text{x}10^{-6} & 0 & 0 & 0 \\ 1.88\text{x}10^{-6} & -75.55\text{x}10^{-6} & 1.88\text{x}10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 1.88\text{x}10^{-6} & -75.55\text{x}10^{-6} & 1.88\text{x}10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 1.88\text{x}10^{-6} & -75.55\text{x}10^{-6} & 1.88\text{x}10^{-6} \\ 0 & 0 & 0 & 1.59\text{x}10^{-6} & -24.36\text{x}10^{-6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{b,1} \\ \tau_{b,2} \\ \tau_{b,3} \\ \tau_{b,4} \\ \tau_{b,5} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0.01361 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.02723 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02723 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.02723 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.00689 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H\%_1 \\ H\%_2 \\ H\%_3 \\ H\%_4 \\ H\%_5 \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

donde

$$G = \begin{bmatrix} -73.81\text{x}10^{-6} & 2.58\text{x}10^{-6} & 0 & 0 & 0 \\ 1.88\text{x}10^{-6} & -75.55\text{x}10^{-6} & 1.88\text{x}10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 1.88\text{x}10^{-6} & -75.55\text{x}10^{-6} & 1.88\text{x}10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 1.88\text{x}10^{-6} & -75.55\text{x}10^{-6} & 1.88\text{x}10^{-6} \\ 0 & 0 & 0 & 1.59\text{x}10^{-6} & -24.36\text{x}10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0.01361 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.02723 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02723 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.02723 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.00689 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1. & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinando los polos de la matriz **G** [8], estos son:

$$\begin{bmatrix} -7.1831x10\text{-}5 \\ -7.8545x10\text{-}5 \\ -7.3730x10\text{-}5 \\ -7.6412x10\text{-}5 \\ -7.4302x10\text{-}5 \end{bmatrix}$$

Como todos los polos son negativos y el objetivo del observador no es retroalimentar el estado de la planta (temperaturas en las cinco zonas del extrusor), únicamente el diseño persigue determinar el estado actual de las temperaturas del extrusor en un momento determinado. Esto se reduce a la determinación de una matriz de ganancia de realimentación del observador $\mathbf{K}_e$ apropiada.

Analizando la matriz de observabilidad [C* : G*C* : $(G)^2$ C* : $(G)^3$ C* : $(G)^4$ C*] Se determina que esta es de rango 5 [8]. Por ello, el sistema es completamente observable y es posible determinar la matriz de ganancia de realimentación del observador deseada.

Haciendo referencia a (4.27),

$$\mathbf{e}(k+1) = (\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\ \mathbf{e}(k)$$

donde

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k)$$

la ecuación característica del observador se convierte en

$$|\ z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{K}_e\mathbf{C}\ | = 0$$

se identificará la matriz de ganancia de realimentación del observador $\mathbf{K}_e$ como sigue

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{21} & k_{31} & k_{41} & k_{51} \\ k_{12} & k_{22} & k_{32} & k_{42} & k_{52} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{43} & k_{53} \\ k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} & k_{54} \\ k_{15} & k_{25} & k_{35} & k_{45} & k_{55} \end{bmatrix}$$

Seleccionando los polos del observador como:

$$\begin{bmatrix} -2+4j \\ -2-4j \\ -1+5j \\ -1-5j \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

se obtiene la matriz de $\mathbf{K}_e$:

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & -1.88\text{x}10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & -1.88\text{x}10^{-6} & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -1 & -1.88\text{x}10^{-6} \\ 0 & 0 & 0 & -1.59\text{x}10^{-6} & -0.5 \end{bmatrix}$$

Así, la configuración del observador de estado para el modelo de extrusión de plásticos es mostrado en la Fig. 4.5.

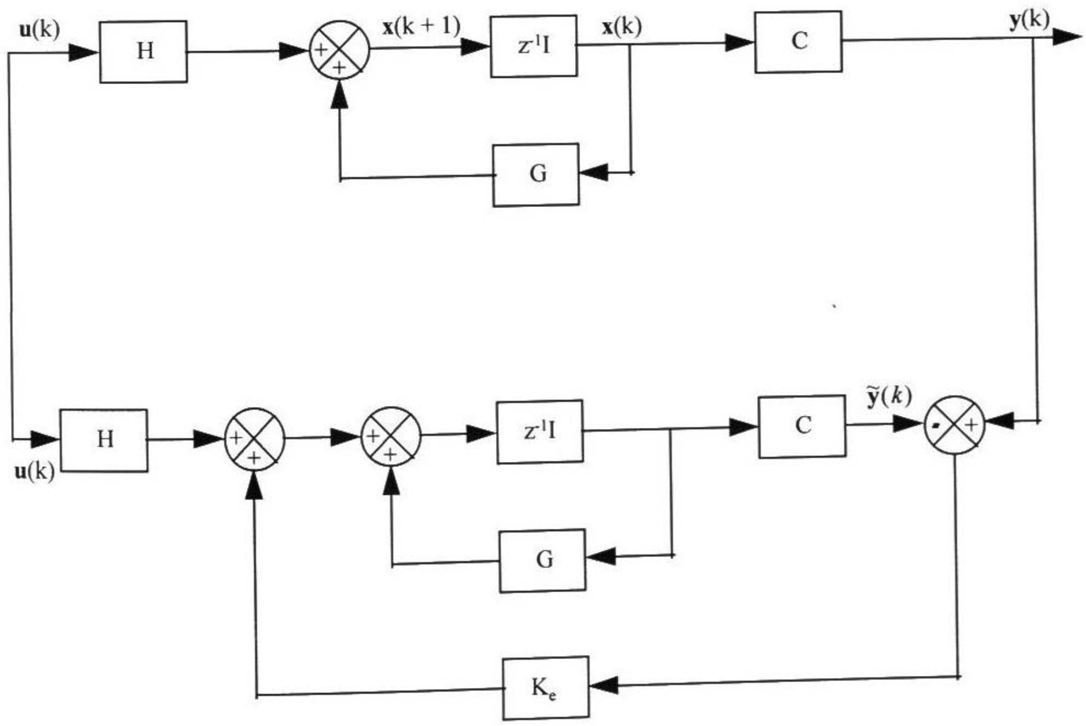

Fig. 4.5. Esquema del observador de estado para el modelo de extrusión de plásticos.

4.5 CONCLUSIONES DEL CAPITULO

En este capítulo se presentan los conceptos generales sobre estimadores de estado, los cuales tienen la función de reconstruir los estados de un sistema dinámico a partir de las mediciones de sus salidas.

Se describen los conceptos fundamentales de controlabilidad y observabilidad, los cuales representan las base teórica para el diseño de un observador de estado. El concepto de controlabilidad está asociado a la capacidad de un sistema de control, que a partir de un estado inicial, sea capaz de alcanzar un estado final arbitrario en un período finito de tiempo. Asimismo, el concepto de observabilidad está asociado a la capacidad de un sistema de control de determinar exactamente los estados del proceso a partir de las mediciones de su salida en un período de tiempo finito.

El concepto de observabilidad es útil para resolver el problema de la reconstrucción de variables de estado no medibles. En este sentido, se fundamentó el hecho de que para la realización de un observador de estado, el sistema tiene que ser completamente observable, lo que representa que la matriz de observabilidad sea de rango completo.

Se presentó la metodología para el diseño de un observador de estado de orden completo, lo cual se reduce a la determinación de la ganancia de retroalimentación para asegurar que los polos de lazo cerrado sean estables, y obtener una respuesta adecuada del observador.

Finalmente, se describe el diseño del observador de estado para el proceso de extrusión de plásticos; para esto se consideró que los efectos de radiación y la transferencia de calor del polímero son mínimos, con lo que se obtiene un modelo reducido del proceso de la forma: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$. Como los polos del modelo son estables, además de que el objetivo del observador de estado es estimar las temperaturas del proceso, mas que retroalimentar el estado como una acción de control, el diseño del observador se redujo al cálculo de la matriz de ganancia del observador.