UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE FILOSOFIA Y LETRAS

FACULTAD DE CIENCIAS FISICO-MATEMATICAS

PROPUESTA DIDACTICA:

METODOLOGIA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS EN LAS CARRERAS TECNICAS DEL NIVEL MEDIO SUPERIOR

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRIA EN LA ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS
CON ESPECIALIDAD EN MATEMATICAS

PRESENTA:

GLORIA AZUCENA TAMEZ VILLALON

CIUDAD UNIVERSITARIA MARZO DE 1999

MAE

MATEMATICAS

199

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE FILOSOFIA Y LETRAS

FACULTAD DE CIENCIAS FISICO-MATEMATICAS

PROPUESTA DIDACTICA:

METODOLOGIA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS EN LAS CARRERAS TECNICAS DEL NIVEL MEDIO SUPERIOR

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRIA EN LA ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN MATEMATICAS

PRESENTA:

GLORIA AZUCENA TAMEZ VILLALON

CIUDAD UNIVERSITARIA MARZO DE 1999

TM
27125
FFL
1919
T3

0130-61960

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS
FACULTAD DE CIENCIAS FISICO-MATEMATICAS

PROPUESTA DIDÁCTICA

Metodología para la enseñanza de las matemáticas en las carreras Técnicas del nivel medio superior

Que para obtener el grado de
Maestría en la Enseñanza de las Ciencias
con Especialidad en Matemáticas

Presenta:
GLORIA AZUCENA TAMEZ VILLALÓN

Ciudad Universitaria. San Nicolás de los Garza, N. L.

Marzo 1999

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS
FACULTAD DE CIENCIAS FISICO-MATEMATICAS

" Metodología para la enseñanza de las matemáticas en las carreras Técnicas del nivel medio superior "

Propuesta didáctica que presenta Gloria Azucena Tamez Villalón, como requisito final para la obtención del grado de Maestría en Enseñanza de las Ciencias con Especialidad en Matemáticas.

El presente trabajo surge de las experiencias y conocimientos adquiridos durante las actividades desarrolladas en los distintos cursos que integran el plan de estudios de la Maestría, ha sido revisado y autorizado por:

M.C. Roberto Nuñez Malherbe

M.C. Alfredo Alanís Durán

Mtra. Patricia Guadalupe García Silva

A MI ESPOSO Y A MI HIJA:

Ricardo y Kristal

Quienes siempre me han brindado, con amor, todo su apoyo y gran parte de su tiempo para superarme en todos los aspectos.

AGRADECIMIENTOS

A DIOS:

Por haber aceptado llevarme de su mano en todo momento de mi carrera profesional.

A MIS PADRES:

Ismael Tamez Cavazos
Gloria Aurora Villalón de Tamez

Quienes siempre me han apoyado en diversas circunstancias con su entusiasmo y motivación, especialmente en la realización de este postgrado.

A MIS MAESTROS:

Por sus grandes contribuciones durante todo el desarrollo de este postgrado, que no solo comienzan a ser necesarias en nuestra labor docente, sino que dan fruto agradable de estos esfuerzos. Especialmente a la Dra. Rosa A. Vázquez y al Dr. Roberto Nuñez Malherbe, por su gran dedicación y entusiasmo en la elaboración de este trabajo.

A MIS COMPAÑEROS

Quienes me brindaron un ambiente muy agradable durante todo el recorrido de este postgrado.

RESUMEN

En el presente trabajo se hace un análisis sobre la situación actual del proceso de Enseñanza-Aprendizaje en la asignatura de matemáticas en las carreras técnicas de la preparatoria no. 20 de la Universidad Autónoma de Nuevo León. Este se orienta al estudio de los métodos actuales de enseñanza de las matemáticas, la manera en que influyen en el perfil técnico del egresado y contribuye en la identificación y eliminación de algunas causas de desmotivación de los estudiantes hacia el estudio de la asignatura, relacionadas con la desvinculación de ésta con su contexto social y más aún con su perfil técnico.

La propuesta se desarrolla sobre un ambiente real, considerando las tendencias actuales tanto de los métodos de enseñanza de las matemáticas, como del trabajo independiente de los estudiantes.

El aporte de esta investigación es una estrategia metodológica, que consiste en una secuencia de métodos productivos de enseñanza, la cual contribuye a la adquisición de conocimientos, viendo a éstos como una herramienta importante para satisfacer una necesidad del estudiante: la de resolver algún problema presentado en su contexto social o simplemente la situación resultante de un conflicto cognoscitivo. De esta manera motivante para el estudiante, él mismo va construyendo el nuevo contenido, al mismo tiempo que va adquiriendo actitudes investigativas.

INDICE

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la matemática (así como la de la lengua: lectura y redacción) ha sido reconocida oficialmente por la Secretaría de Educación Pública como uno de los problemas mayores en la educación elemental, media y superior. Los estratos del problema en la lengua se inician con la alfabetización y terminan con la lectura comprensiva. En matemáticas el problema de la alfabetización ha sido atendido por la escuela convencional, pero el asunto de la comprensión ha sido dejado al libre virtuosismo de los propios estudiantes[1].

La tradición educativa confunde el rigor propio de la matemática con el rigorismo en su enseñanza y, en esa medida, no contribuye a la formación real de los estudiantes; por el contrario, hace redundancia en el fracaso escolar que hoy padecemos.

Un aspecto fundamental en la formación de los estudiantes está en el aprendizaje de la matemática cuando ésta se relaciona con la necesidad de resolver problemas que aquejan en su contexto social. Es entonces cuando los estudiantes deben ver en la matemática la herramienta necesaria para buscar la solución a estas situaciones.

Nuestra presencia como maestros no justifica sólo el aprendizaje de los estudiantes, sino la mejoría o evolución de su aprendizaje. Así, el maestro tiene la obligación, entre otras cosas, de mejorar el proceso docente educativo de la matemática, de tal manera que los estudiantes puedan utilizar eficiente y eficazmente los conocimientos adquiridos en su contexto escolar para resolver problemas en contextos diferentes o situaciones novedosas.

[1] Farfán Márquez R. M. (1997), Ingeniería Didáctica: Un estudio en la variación y el cambio. Edit. Iberoamérica.

Una de las dificultades se encuentra en la generalización y transferencia de los conocimientos adquiridos. Es esencial que los estudiantes tengan oportunidad de desarrollar o reconstruir los conocimientos en el salón de clases para que puedan hacer oportunamente estas generalizaciones.

El maestro, en vez de proporcionarle friamente al estudiante el conocimiento, debe proponerle una situación diseñada de forma tal que este conocimiento sea necesario para la solución óptima; si el estudiante se adapta a la situación y llega a la solución, podemos afirmar que se apropió del conocimiento, es decir, que aprendió. Como consecuencia, en cualquier variación de la situación él podrá recuperar sus conocimientos y aplicarlos sin gran dificultad. Este es el papel de la Ingeniería Didáctica.

Por su parte, un análisis epistemológico provee de historicidad a los conceptos matemáticos, y ayuda al estudiante, de alguna manera, a comprender cómo se construyeron algunos conceptos, lo motiva a buscar situaciones en su contexto social y, más aún, lo invita a iniciar la fase de investigación.

Es evidente que para construir conocimientos es necesario contar con un bagaje muy amplio de conceptos y tenerlos todos a la mano para utilizarlos cuando sea necesario. Una forma de facilitar esta recuperación es mediante el uso de representaciones como mapas conceptuales, diagramas, esquemas, etc. Esto se aborda desde el modelo de procesamiento de la información, sustentado en la psicología cognitiva.

Un hecho notable es la aceptación explícita de que las actuales reformas se estructuran bajo la premisa de que la construcción del curriculum matemático no puede reducirse a una aplicación algorítmica de resultados científicos sin tomar en cuenta los múltiples factores contextuales en donde se realiza (NCTM, 1988).

La matemática es universal, pero la enseñanza no; la enseñanza es diferente en EUA, en Alemania, en Francia, en México, etc., así como lo es cada contexto social al que pertenece el estudiante. Por ello cada maestro debe preocuparse por mejorar su enseñanza, adecuándola a su contexto. Esto no significa rechazar los métodos de enseñanza utilizados en otros lugares sino, al contrario, si han dado buenos resultados, ver si se pueden adecuar a nuestro contexto.

En la Universidad Autónoma de Nuevo León existen preparatorias foráneas que, sin duda, tienen muchos elementos en común con las preparatorias locales; sin embargo tienen ciertas características que las diferencian, las cuales hacen que se presenten diferentes situaciones problémicas, sobre todo en relación con su contexto social.

La Preparatoria número 20 de la UANL no es ajena a este tipo de situaciones en el proceso docente educativo. Esta preparatoria se encuentra en el municipio de Santiago, N.L. y, además de ser preparatoria foránea, es una preparatoria que cuenta con los sistemas de enseñanza técnica y tradicional; dentro del sistema técnico están las carreras Técnico en Contabilidad, Técnico en Electricidad, Técnico en Sistemas Computacionales y Técnico en Diseño de Modas.

El sistema técnico tiene más demanda que el sistema tradicional. El 62% de los egresados son del sistema técnico y 38% son del sistema tradicional; del porcentaje de técnicos, el 56% pertenece a la carrera Técnico en Contabilidad.

La situación problémica se presenta en la apatía que los alumnos de estas carreras manifiestan por las materias de tronco común como son las matemáticas, la física, la química, etc. Esta situación se expresa en el aula por los estudiantes mediante la incesante pregunta: " ¿Y eso para qué me sirve? ".

En el presente trabajo se analiza esta situación en el contexto de las matemáticas. Una de las perspectivas para estudiar y buscar una posible solución a la misma está en el análisis de la dificultad que presentan los estudiantes para vincular la teoría con la práctica en el contexto social, considerando que este tipo de estudiante tiene su perfil definido, y no lo motivan tanto las matemáticas que no se apliquen en su perfil.

Además de la falta de motivación presentada en matemáticas por los alumnos de las carreras técnicas, existen otras necesidades que implican la búsqueda de la solución a este problema, como son el análisis constante de los requerimientos de nuestra sociedad, las dificultades planteadas con el vínculo escuela-producción, la necesidad de desarrollar la ciencia (realizando investigaciones que producen conocimientos) y la inquietud de estudiar, de manera crítica, el contexto social de la preparatoria.

Estas consideraciones traen como resultado el planteamiento del siguiente **problema**:
Cómo desarrollar y organizar el proceso docente educativo de las matemáticas en el sistema técnico de la preparatoria núm. 20 de la UANL en relación con el perfil del egresado.

Su **objeto es** *el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas del nivel medio superior en el contexto de las preparatorias técnicas.*

Partiendo del principio de que el alumno debe aprender a trabajar en matemáticas sin apoyarse siempre en métodos estándar, sin esperar la ayuda del profesor en cuanto la actividad no le resulte familiar, se define el **campo de acción** de esta investigación en *los métodos de enseñanza de las matemáticas en carreras técnicas y la actividad independiente del estudiante.*

Su **objetivo** es *contribuir al perfeccionamiento del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas del nivel medio superior en relación a su aplicación en carreras técnicas.*

La **hipótesis** propuesta es la siguiente:

" Si se aplica una estrategia metodológica concebida y estructurada sobre la base del trabajo independiente de los estudiantes y la aplicación de métodos de enseñanza que los acerque a su perfil técnico, entonces se contribuirá al perfeccionamiento del proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas en las carreras técnicas de la preparatoria núm. 20 de la UANL".

Las **tareas** realizadas para el desarrollo de esta propuesta fueron:

- Estudio de materiales relativos a las matemáticas y su enseñanza.
- Estudio de materiales que profundicen en métodos de enseñanza y el trabajo independiente del estudiante.
- Revisión en las materias específicas del programa de las carreras técnicas para buscar una relación con la asignatura de matemáticas.
- Elaboración de la propuesta metodológica.

Los **métodos** de investigación utilizados en este trabajo fueron de carácter teórico; a saber: de análisis-síntesis, inducción-deducción e histórico-lógico.

El presente trabajo consta de introducción, dos capítulos, conclusiones, perspectivas y recomendaciones, bibliografía y dos anexos.

En el capítulo 1 se presentan los elementos que conformarán el marco teórico sobre el que se sustentará la propuesta didáctica. En el capítulo 2 se fundamenta y presenta la propuesta, y se ejemplifica la misma en un tema del módulo VIII de la disciplina de matemáticas.

CAPÍTULO 1
MARCO TEÓRICO

1.1 El papel del método en el proceso de Enseñanza-Aprendizaje

"Los métodos de enseñanza de la escuela son instrucciones para acciones y modos de conducta del profesor que sirven para provocar actividades necesarias de los alumnos y, por tanto, para la conducción efectiva y planificada dirigida hacia un objetivo, del proceso de instrucción y educación en la enseñanza"[2].

Del lugar que ocupa el método de enseñanza en la cadena lógica objetivo-contenido-método-organización-medios-evaluación y su dependencia "dialéctica" respecto a la relación objetivo-contenido, se derivan dos importantes exigencias para su selección en la enseñanza de las matemáticas:

- Seleccionar métodos que al aplicarlos en la enseñanza de las matemáticas hagan un importante aporte al logro de objetivos de esta enseñanza y de la enseñanza en general.
- Seleccionar métodos que tengan en cuenta las particularidades del contenido matemático (imágenes ideales de la realidad) y los modos objetivos de asimilación de este contenido por parte de los alumnos para que puedan determinar ese modo de proceder.

El contenido de enseñanza, aunque sea muy actualizado y muy exigente y no esté sobrecargado, no produce por sí mismo resultados cualitativamente superiores si el método de enseñanza no contribuye al máximo de la actividad intelectual para el aprendizaje.

---

[2] Ziller W., Complementos de Metodologías de la Enseñanza de la Matemática, p 117.

La determinación de qué métodos seguir implica también una organización del proceso en sí mismo. Si identificamos el proceso con la actividad, entonces el método es el orden, la consecutividad de las actividades que ejecuta el estudiante para aprender y el profesor para enseñar.

Sin embargo, si continuamos profundizando hacia la esencia misma del proceso de Enseñanza-Aprendizaje, que es "el conjunto de las relaciones sociales", encontramos que es la comunicación entre el profesor y los estudiantes, y de ellos entre sí, quien mejor refleja esta esencia. En este caso el método es la organización del proceso de comunicación entre los sujetos que intervienen en el proceso: estudiantes y profesor.

1.2 Clasificación de los métodos de Enseñanza

Existen muchas clasificaciones de los métodos de enseñanza. El anexo A (al final de este trabajo) presenta una clasificación formada de la fusión de puntos de vista de algunos autores.

Consideramos que los métodos productivos son los que más pueden contribuir en la solución de nuestra situación problémica; por esta razón sólo se consideran estos métodos, tanto a nivel de comunicación (participación) como a nivel de asimilación de contenidos en el desarrollo de esta propuesta. Además, los métodos participativos contribuyen con motivación en la asimilación de contenidos y solución de problemas.

Como métodos productivos podemos mencionar los siguientes:

* Elaboración conjunta

* Trabajo independiente
* Enseñanza Problémica
* Método Heurístico
* Método Investigativo.

A continuación se hace una breve descripción de cada uno de estos métodos:

1. Elaboración conjunta

El método de elaboración conjunta permite que el contenido se vaya desarrollando entre los estudiantes y el profesor; la tendencia de este método es que el estudiante, hasta donde sea posible, se haga más independiente, es decir, más participativo.

Este método adopta tres distintas formas de conversación: la conversación socrática, la conversación heurística y la discusión.

La conversación socrática está caracterizada por pasos cortos en la actividad mental de los alumnos, se utiliza en preguntas de controles orales y aseguramiento del nivel de partida.

La conversación heurística se caracteriza por dirigir el pensamiento de los alumnos para que encuentren o descubran, por sí mismos la vía para resolver determinados problemas matemáticos

En la búsqueda común de las vías de solución en que se analizan distintas proposiciones, la conversación en clase puede obtener el carácter de discusión en la que participan muchos alumnos que presentan sus opiniones, que intercambian ideas.

La conversación en clase puede ser empleada en la enseñanza de la matemática con diversas intenciones didácticas:

◊ La Conversación Socrática en:

- Ejercitaciones diarias de todo tipo: cálculo oral, trabajo con variables, etc.
- Controles breves con preguntas sobre fórmulas de cálculo.
- Preparación de conceptos conocidos, definiciones, teoremas para el trabajo siguiente, etc.

◊ La Conversación Heurística en:

- Elaboración de nuevos conocimientos sobre la base del poder y del saber ya adquiridos.
- Incorporación de nuevos conocimientos en sistemas de conocimientos ya adquiridos.
- Resúmenes de generalizaciones.
- Descubrimiento del núcleo matemático de una situación dada.
- Solución por pasos de ejercicios.
- Interpretación de expresiones matemáticas.

◊ La Discusión en:

- Búsqueda común de vías de solución.
- Análisis de problemas.
- Trabajo en el problema.
- Discusión de posibilidades de solución.
- Valorización y evaluación de soluciones ofrecidas.
- Contraposición con problemas actuales.

La conducción de la conversación en clase requiere que el profesor domine el contenido con seguridad, conozca y tenga siempre presente el objetivo a lograr, disponga de una buena técnica para preguntar y pueda proporcionar impulsos para activar el pensamiento de sus alumnos.

El éxito de la conversación de clase depende, en gran medida, de la forma de preguntar del profesor. Se pueden considerar las siguientes indicaciones para lograr este éxito:

⇒ Formular preguntas con claridad y precisión, sin adelantar el núcleo de la respuesta.

⇒ No limitar las iniciativas de los alumnos, aunque estén fijadas las respuestas.

⇒ Después de hacer la pregunta, dar tiempo para reflexionar y luego seleccionar al alumno que debe responder.

⇒ Valorar la calidad de respuesta, si tiene errores utilizar contraejemplos.

2. Trabajo independiente

El método de trabajo independiente permite que el alumno, por sí solo, desarrolle el proceso en un mayor grado de participación; es decir, debe predominar el aprendizaje productivo en la solución de ejercicios o en el trabajo con el libro de texto; el profesor sólo lo conduce indirectamente.

El trabajo independiente de los alumnos puede ser empleado en la enseñanza de la matemática con diversas intenciones didácticas:

◊ Para el trabajo individual:
  - Exposición de alumnos.
  - Hacer cálculos en el pizarrón, hacer construcciones y demostraciones.

- Controles orales de los resultados.
- Solución de tareas.

◊ Para el trabajo individual frontal:
- Ejercicios de cálculo, solución de ecuaciones.
- Ejercicios de demostración, descripciones de construcciones.
- Elaboración de resúmenes.
- Sistematización del saber adquirido.
- Elaboración independiente de nuevos conocimientos con el libro de texto.
- Controles escritos de los resultados.

◊ Trabajo en equipos:
- Solución comentada de ejercicios.

En el éxito del trabajo independiente en la clase de matemática intervienen muchos factores entre los que se encuentran: el desarrollo del pensamiento lógico de los alumnos, el trabajo en silencio, trabajo con notas de clases, realización independiente de tareas que incluye la habilidad para exponer y hacer valoraciones críticas de las mismas en cuanto a la comprensión y a la representación de relaciones matemáticas.

La preparación para el trabajo independiente pertenece al dominio de capacidades, luego no es tarea fácil ni breve para el profesor, ya que debe ir encaminada al desarrollo de la independencia cognoscitiva y actividad creadora en los alumnos.

3. Enseñanza problémica

El desarrollo de la independencia cognoscitiva y la capacidad creadora de los estudiantes sólo es posible en una enseñanza mediante la cual ellos se apropian de los procedimientos para resolver problemas teóricos y prácticos y reflejan creativamente la realidad, es decir, a través de la enseñanza problémica.

Esta enseñanza persigue que, mediante el proceso de solución de problemas especialmente elaborados y de ejercicios problémicos, los estudiantes lleguen a dominar la experiencia creadora, a asimilar (de manera creadora) los conocimientos y modos de la actividad en una u otra esfera del saber .

M. I. Majmutov caracteriza lo problémico como "el grado de complejidad de las preguntas y tareas y el nivel de habilidades del estudiante para analizar y resolver los problemas de manera independiente".

Una situación problémica se define como la relación entre el sujeto y el objeto del conocimiento en el proceso docente que surge a modo de contradicción, cuando aquel no puede entender la esencia de los fenómenos estudiados porque carece de los elementos para el análisis, y que sólo la actividad creadora puede resolver.

M. I. Majmutov considera cuatro tipos de situaciones problémicas:

Primer tipo: Cuando los alumnos tropiezan con la necesidad de emplear conocimientos asimilados anteriormente en condiciones prácticas nuevas.

Segundo tipo: Cuando existe una contradicción entre las vías teóricamente posibles para solucionar la tarea y la imposibilidad práctica del procedimiento seleccionado.

Tercer tipo: Cuando existe una contradicción entre el resultado práctico alcanzado en la realización de una tarea docente y la falta de conocimientos de los alumnos para su fundamentación teórica.

Cuarto tipo: Cuando los alumnos no conocen el procedimiento para resolver la tarea planteada y no pueden responder la pregunta problémica, ni explicar el hecho en una situación docente o en la vida.

4. Método Heurístico

La asimilación por elementos de la experiencia creadora y el dominio de algunas etapas de solución de ejercicios problémicos se garantiza con el método heurístico de búsqueda parcial.

La conversación heurística constituye la forma más conocida y expresiva de este método. La misma consta de una serie de preguntas interrelacionadas, cada una de las cuales constituye un eslabón hacia la solución del problema y la respuesta de las mismas requiere de la producción de los conocimientos, así como de la realización de una pregunta de búsqueda.

El proceso de dominio de la experiencia creadora es paulatina, prolongada, y necesita de cierto modelo de la manifestación, aunque sea externa, de este proceso. Este modelo se ofrece por el maestro mediante la llamada exposición problémica.

El maestro, mediante la exposición problémica, transmite los conocimientos científicos no en su forma determinada, sino que muestra, en cierta medida, la vía del descubrimiento de la verdad correspondiente, hace conocer a los alumnos un problema frente al cual se encontraba la sociedad o un investigador, en una situación concreta determinada, indica las contradicciones entre el saber actual y la nueva problemática y, con ello, los alumnos se motivan a hacer proposiciones, buscar vías de solución, etc.

5. Método Investigativo.

La esencia de este método radica en que los alumnos resuelven problemas nuevos para ellos, aunque éstos ya han sido resueltos por la ciencia.

El profesor presenta los problemas para que los alumnos los investiguen independientemente. De esos problemas el profesor conoce cuál es el resultado, cómo llegar a la solución y los rasgos de la actividad creadora que deben manifestarse en el proceso de solución. El alumno desarrolla independientemente el proceso del conocimiento.

Este método puede ser utilizado al trabajar con problemas que puedan resolverse por diferentes vías, donde el maestro debe aprovechar esta oportunidad para discutirlas.

Cada etapa del proceso de solución de un ejercicio problémico puede constituir, a su vez, un ejercicio problémico, el cual se debe resolver como requisito para pasar a otro.

1.3 El aprendizaje como investigación

¿Qué sentido tiene hacer que los alumnos expliciten y afiancen sus ideas para seguidamente cuestionarlas?, ¿cómo no ver en ello un artificio que aleja la situación de lo que constituye la construcción de conocimientos?. Esa construcción nunca se plantea cuestionar ideas o provocar cambios conceptuales si continuamos repitiendo la resolución de los problemas ya analizados. Por esta razón la estrategia de enseñanza que nos parece más coherente con la orientación constructivista es la que plantea el aprendizaje como tratamiento de nuevas situaciones problemáticas de interés.

Ello nos remite, a su vez, a las investigaciones sobre resolución de problemas de lápiz y papel y sobre el trabajo de laboratorio: ¿Acaso las dificultades encontradas por los estudiantes en ambas actividades no proceden de no tener adecuadamente en cuenta su carácter de tratamiento de situaciones problemáticas, transformándolas en simples algoritmos, en recetas?.

Se afianza así la idea de orientar el aprendizaje de las ciencias como una construcción de conocimientos a través del tratamiento de situaciones problemáticas, es decir, como un trabajo de investigación dirigida.

"Un problema es una situación, cuantitativa o no, que pide una solución para la cual los individuos implicados no conocen medios o caminos evidentes para obtenerla".

Un mínimo análisis de la práctica docente habitual muestra, sin embargo, que los "problemas" son explicados como algo que se sabe hacer, como algo cuya solución se conoce y que no genera dudas ni exige tentativas: el profesor conoce la situación (para él no es un problema) y la explica linealmente "con toda claridad"; consecuentemente, los alumnos pueden aprender dicha solución y repetirla ante situaciones idénticas, pero no aprenden a abordar un verdadero problema y cualquier pequeño cambio les supone dificultades insuperables provocando el abandono.

El hilo conductor seguido hasta aquí permite concebir que la inclusión de los datos en el enunciado como punto de partida, respondiendo a concepciones inductivistas, orienta la resolución hacia el manejo de unas determinadas magnitudes sin que ello responda a una reflexión cualitativa ni a las subsiguientes hipótesis. De este modo, al resolver un problema, el alumno se ve abocado a buscar aquellas ecuaciones que pongan en relación los datos e incógnitas proporcionados en el enunciado, cayendo así en un puro operativismo. No basta, pues, denunciar dicho operativismo: se trata de hacerlo imposible atacando sus causas. La comprensión de que la presencia de los datos en el enunciado, así como la indicación de todas las condiciones existentes -todo ello como punto de partida- responde a concepciones inductivistas y orienta incorrectamente la resolución, constituye un paso esencial en el desbloqueo de la enseñanza habitual de problemas y sus limitaciones. Es cierto que ello genera un desconcierto inicial entre el profesorado, porque choca con la práctica reiterada, con lo que "siempre" se ha hecho. Un enunciado sin datos, se señala, ¿no será algo excesivamente ambiguo frente a lo cual los alumnos acaben extraviándose?. Ahora bien, la ambigüedad, o, dicho con otras palabras, las situaciones abiertas, ¿no son acaso una característica esencial de las situaciones genuinamente problemáticas?. ¿Y no es también una de las tareas fundamentales del trabajo científico acotar los problemas abiertos, imponer condiciones simplificatorias?

Subsiste, naturalmente, la cuestión de cómo orientar a los alumnos para abordar dichas situaciones, puesto que no basta, obviamente, con enfrentarles a enunciados sin datos para lograr una actividad exitosa. A continuación se enuncian "Propuestas para orientar el aprendizaje como una construcción de conocimientos a través del tratamiento de situaciones problémicas" las cuales en conjunto, suponen un modelo de resolución de problemas como investigación (Gil et al 1991):

I. Considerar cuál puede ser el interés de la situación problemática abordada.

Es absolutamente necesario evitar que los alumnos se vean sumergidos en el tratamiento de una situación sin haber podido siquiera formarse una primera idea motivadora.

II. Comenzar por un estudio cualitativo de la situación, intentando acotar y definir de manera precisa el problema, explicitando las condiciones que se consideran reinantes, etc.

Los alumnos han de imaginar necesariamente la situación física, tomar decisiones para acotar dicha situación, explicitar qué es lo que se trata de determinar, etc.

III. Emitir hipótesis fundadas sobre los factores de los que puede depender la magnitud buscada y sobre la forma de esta dependencia, imaginando, en particular, casos límite de fácil interpretación física.

El sentido de la orientación científica se encuentra en el cambio de un razonamiento basado en "evidencias", en seguridades, a un razonamiento en términos de hipótesis, a la vez más creativo (es necesario ir más allá de lo que parece evidente e imaginar nuevas posibilidades) y más riguroso (es necesario fundamentar y después someter a prueba cuidadosamente las hipótesis, dudar del resultado, buscar la coherencia global). Así, son las hipótesis las que focalizan y orientan la resolución, las que indican los parámetros a tener en cuenta (los datos a buscar). Y son las hipótesis, y el bagaje de conocimientos en que se basan, las que permitirán analizar los resultados y todo el proceso. Un problema de este tipo puede ser: ¿Cuál será la altura máxima a la que llegará una piedra lanzada hacia arriba?.

IV. Elaborar y explicitar posibles estrategias de resolución antes de proceder a ésta, evitando el puro ensayo y error. Buscar distintas vías de resolución para posibilitar la contrastación de los resultados obtenidos y mostrar la coherencia del cuerpo de conocimientos de que se dispone.

El corpus de conocimientos de que dispone el alumno juega un papel esencial en los procesos de resolución, desde la representación inicial del problema y la manera de modelizar la situación, hasta en las hipótesis que se avanzan es, sin duda, en la búsqueda de caminos de resolución donde su papel resulta más evidente. En efecto, los problemas de lápiz y papel son situaciones que se abordan disponiendo ya de un corpus de conocimientos suficientemente elaborado para permitir la resolución: su estatus en los libros de texto es el de problemas "de aplicación". Son, en efecto, situaciones que se pueden resolver con los conocimientos ya elaborados, sin que haya necesidad de nuevas verificaciones experimentales.

Se olvida así que las estrategias de resolución no derivan automáticamente de los principios teóricos sino que son también construcciones tentativas, que parten del planteamiento cualitativo realizado, de las hipótesis formuladas y de los conocimientos que se poseen en el dominio particular, pero que exigen imaginación y ensayos. Es por ello que resulta conveniente buscar varios caminos de resolución, lo que además de facilitar la contrastación de los resultados, puede contribuir a mostrar la coherencia del cuerpo de conocimientos.

V. Realizar la resolución verbalizando al máximo, fundamentando lo que se hace y evitando, una vez más, operativismos carentes de significación.

Es necesario que la resolución esté fundamentada y claramente explicada lo que exige verbalización y se aleja de los tratamientos puramente operativos, sin ninguna explicación, que se encuentran tan a menudo en los libros de texto. Ello facilitará, además, el análisis de los resultados. Como indican Jansweijer et Al (1987) "Cuando la tarea es un verdadero problema, las dificultades y las revisiones son inevitables" y ello se ve facilitado, sin duda, por una resolución literal en la que los factores considerados como pertinentes aparecen explícitamente y se pueden reconocer los principios aplicados.

VI. Analizar cuidadosamente los resultados a la luz de las hipótesis elaboradas y, en particular, de los casos límite considerados.

El análisis de los resultados constituye un aspecto esencial en el aborde de un verdadero problema y supone, sobre todo, su contrastación con relación a las hipótesis emitidas y al corpus de conocimientos. Desde este punto de vista adquieren pleno sentido propuestas como la que Reif (1983) denomina "verificación de la consistencia interna":

- ¿Es razonable el valor de la respuesta?
- ¿Depende la respuesta, de una forma cualitativa, de los parámetros del problema en el sentido que cabría esperar?
- ¿Se ajusta la respuesta a lo que se podría esperar en situaciones sencillas y especiales (por ejemplo las correspondientes a valores extremos de las variables)?
- ¿Se obtiene la misma respuesta por otro medio diferente de resolución?.

Añadamos que, al igual que ocurre en una verdadera investigación, los resultados pueden ser origen de nuevos problemas. Sería conveniente que los alumnos (y los profesores) llegasen a considerar este aspecto como una de las derivaciones más interesantes de la resolución de problemas, poniendo en juego de nuevo su creatividad.

1.4 El aprendizaje como construcción de conocimientos científicos

Se precisa aquí el modelo de aprendizaje de las ciencias como investigación, utilizando una metáfora que ve en los alumnos a "investigadores noveles" y en el profesor a un "director de investigaciones" en campos en los que es experto.

Muchos profesores e investigadores han criticado las propuestas constructivistas, señalando que "No tiene sentido suponer que los alumnos, por si solos (?) puedan construir todos (?) los conocimientos que tanto tiempo y esfuerzo exigieron de los más relevantes científicos". Esta y parecidas críticas se repiten una y otra vez. Es difícil no estar de acuerdo, por supuesto, en que los alumnos por si solos no pueden construir todos los conocimientos científicos. Sin embargo, de aquí no se sigue que se haya de recurrir necesariamente a la transmisión de dichos conocimientos ni que se hayan de poner en cuestión las orientaciones constructivistas. En efecto, es bien sabido que cuando alguien se incorpora a un equipo de investigadores, rápidamente puede alcanzar el nivel del resto del equipo. Y ello no mediante una transmisión verbal, sino abordando problemas en los que quienes actúan de directores/ formadores son expertos. La situación cambia, por supuesto, cuando se abordan problemas que son nuevos para todos. El avance -si lo hay- se hace entonces lento y sinuoso. La propuesta de organizar el aprendizaje de los alumnos como una construcción de conocimientos, responde a la primera de las situaciones, es decir, a la de una investigación dirigida, en dominios perfectamente conocidos por el "director de investigaciones" (profesor) y en la que los resultados parciales, embrionarios, obtenidos por los alumnos, pueden ser reforzados, matizados o puestos en cuestión, por los obtenidos por los científicos que les han precedido. No se trata, pues, de "engañar" a los alumnos, de hacerles creer que los conocimientos se construyen con la aparente facilidad con que ellos los adquieren, sino de colocarles en una situación por la que los científicos habitualmente pasan durante su formación, y durante la que pueden familiarizarse mínimamente con lo que es el trabajo científico y sus resultados, replicando para ello investigaciones ya realizadas por otros, abordando problemas conocidos por quienes dirigen su trabajo.

Se trata, pues, de favorecer en el aula un trabajo colectivo de investigación dirigida, tan alejado del descubrimiento autónomo como de la transmisión de conocimientos ya elaborados (Gil 1983; Millar y Driver 1987). Ello exige la elaboración de "programas de actividades" (programas de investigación) capaces de estimular y orientar adecuadamente la (re)construcción de conocimientos por los alumnos (Gil 1982). Como señalan Driver y Oldham (1986), quizás la más importante implicación del modelo constructivista en el diseño del curriculum sea "concebir el curriculum no como un conjunto de conocimientos y habilidades, sino como el programa de actividades a través de las cuales dichos conocimientos y habilidades pueden ser construidos y adquiridos".

1.5 Conciencia de la importancia de la motivación

Cada vez va siendo más patente la enorme importancia que los elementos afectivos que involucran a toda la persona pueden tener incluso en la vida de la mente en su ocupación con la matemática. Es claro que una gran parte de los fracasos matemáticos de muchos de nuestros estudiantes tienen su origen en un posicionamiento inicial afectivo totalmente destructivo de sus propias potencialidades en este campo, que es provocado, en muchos casos, por la inadecuada introducción por parte de sus maestros. Por eso se intenta también, a través de diversos medios, que los estudiantes perciban el sentimiento estético, el placer lúdico que la matemática es capaz de proporcionar, a fin de involucrarlos en ella de un modo más hondamente personal y humano.

La enseñanza, a partir del conocimiento directo de los objetos, fenómenos y hechos particulares, de la realización de actividades prácticas y de la acumulación de vivencias personales relacionadas con los contenidos de la escuela, apoya la experiencia de aprendizaje de los conocimientos en hechos de la vida cotidiana del estudiante como sujeto activo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Estas vivencias y experiencias previas pueden obtenerse en:

- La comunidad.
- Juegos, bailes, adivinanzas u otras situaciones lúdicas.
- Revistas, periódicos, boletines.
- Instituciones públicas y privadas que usan la matemática.

- Experimentos de observación y medición en ciencias naturales o física.

Este tipo de aprendizaje provoca en los alumnos motivación por los contenidos matemáticos, valoran la matemática como una herramienta necesaria y de uso frecuente en la vida diaria, comprenden la relación entre la matemática y otras ciencias.

CAPÍTULO 2
PROPUESTA METODOLÓGICA

2.1 Formulación de la propuesta

Los métodos de enseñanza generalmente no se aplican aislados sino que se interrelacionan unos con otros. La selección de estos métodos y la forma en que se interrelacionan dependen de diversos factores, tales como:

- El nivel de preparación de los estudiantes
- El grado de desarrollo de sus habilidades
- El tiempo disponible en el programa
- Los objetivos del aprendizaje
- Los tipos de contenidos
- Las características psicológicas de los estudiantes
- La preparación, tanto matemática como pedagógica, de los maestros.

En particular, para determinar cuándo resulta apropiada la utilización de la enseñanza problémica en el tratamiento de la asignatura se deben considerar aquellos contenidos que demandan una mayor utilización de formas de pensamiento no algorítmicas, dando preferencia a aquellos para los cuales se exigen niveles de asimilación aplicativo o creador.

A su vez, para decidir cuál método problémico utilizar, debe tomarse en cuenta el nivel de relación de dicho contenido con los contenidos precedentes y las particularidades fisico-psicológicas de los alumnos, sobre la base de que el método de búsqueda parcial es el que puede ser utilizado con frecuencia, aunque es conveniente incorporar, en la medida de lo posible, los dos restantes métodos problémicos.

Atendiendo a estos aspectos, proponemos la siguiente secuencia, basada en el espíritu de la resolución de problemas, como soporte para estructurar los métodos productivos de enseñanza que identificamos en el capítulo anterior:

P resentación de una situación problémica.
R econocer el problema.
O bservar las variables involucradas en el problema.
B úsqueda de estrategias posibles.
L aborar en el inicio del proceso de solución.
E nseñanza del contenido en cuestión.
M anifestar su aplicación en el proceso de solución.
I nmiscuirse en la solución del problema.
T rabajar retrospectivamente.
A fianzar los conocimientos adquiridos.

PASO 1 **Presentación de una situación problémica.**

El acercamiento inicial se puede hacer del intento directo de una modelización de la realidad en la que el profesor sabe que ha de aparecer el conocimiento matemático en cuestión. Se puede acudir para ello a las circunstancias de la realidad cotidiana en donde el estudiante se sienta involucrado directamente; a las aplicaciones interesantes en relación al perfil del egresado; a las otras ciencias que hacen uso de las matemáticas; a la presentación de juegos tratables matemáticamente; o incluso, a la propia historia de las matemáticas, donde muchos de los problemas que han surgido, en ocasiones con una pequeña modificación, pueden ser llevados, con la misma lógica, al salón de clase. Naturalmente, esto no siempre es posible, porque muchos problemas históricos están inmersos dentro de una situación que, de llevarse al aula, implicaría, más que una simplificación, una complicación al estudiante.

Esta modelización de la realidad debe ser motivadora y creativa, que propicie un ambiente agradable en el grupo, que logre una disposición total de los estudiantes de atacar el problema de manera colaborativa.

PASO 2 **Reconocer el problema.**

Significa comprender el problema de manera tal que el estudiante se apropie de él, que se familiarice con el mismo. El estudiante debe tener claridad acerca de lo que trata el problema antes de iniciar el proceso de solución.

Algunas técnicas que ayudan a comprender mejor el problema son:

* Hacer preguntas específicas en relación con el texto del problema.
* Volver a plantear el problema con sus propios términos.
* Explicar a los compañeros en qué consiste el problema.
* Cambiar el formato de presentación del problema (utilizar dibujos, etc.).
* Cuando es muy general, concretar el problema en ejemplos, o viceversa.
* Adaptar los problemas al contexto de los intereses de los estudiantes.

PASO 3 **Observar las variables involucradas en el problema**.

El estudiante debe estar seguro de que entiende el problema antes de comenzar el proceso de solución. Generalmente resulta recomendable dibujar un diagrama o algún tipo de representación pictórica que ayude a identificar las componentes del problema. Posteriormente, una nueva lectura al problema permitirá añadir al diagrama las variables involucradas, y señalar (de ser posible) qué datos no presentes necesitaríamos para resolver el problema. El estudiante debe identificar y clasificar a las variables como conocidas (datos) y desconocidas (incógnitas). En ocasiones, al momento de identificarlas, surge la propuesta de cómo resolver el problema, cuando se tienen en mente, por ejemplo, fórmulas, o cuando los conocimientos adquiridos previamente aportan gran información a la solución del problema; esto da la pauta para continuar con el siguiente paso.

PASO 4 **Búsqueda de estrategias posibles.**

No es suficiente que el alumno conozca diversas estrategias para resolver problemas, sino que es importante que participe en experiencias relacionadas con el cuándo y cómo utilizarlas. La heurística ayuda a buscar estrategias de solución dando la oportunidad al maestro de conversar o discutir con sus alumnos sobre los procesos de solución del problema.

Aquí el docente se puede apoyar de las siguientes preguntas:

* ¿Cómo comenzamos la solución del problema?
* ¿Conocen alguna fórmula que nos pueda ayudar?
* ¿Qué estrategias podrían ayudar a resolver este problema?
* ¿Has resuelto un problema similar a éste antes? Describe ese problema.
* ¿Buscamos un método para reducir el problema mediante divisiones?
* ¿Cómo haríamos un modelo del problema?

Una vez consideradas varias estrategias para resolver el problema, es necesario seleccionar la más conveniente, teniendo siempre presente a dónde queremos llegar. No todos los problemas se pueden resolver directamente sobre un modelo funcional, algunos requieren ser transportados a otros dominios (submetas) para resolverlos. Y en estas submetas puede encontrarse el contenido que se quiere introducir.

Además es recomendable que el docente le dé nombres a las estrategias utilizadas antes, durante y después de la solución del problema, (Ensayo y error, submetas, casos particulares etc.) para que los estudiantes se familiaricen con éstas.

PASO 5 **Laborar en el inicio del proceso de solución.**

El alumno comienza a resolver el problema con la estrategia seleccionada y sobre la aplicación de ésta, se le pueden presentar conflictos que lo lleven a pensar que le faltan datos al problema, que está mal planteado, o que no tiene solución.

Los conflictos pueden provenir de dos situaciones:

1) En el proceso, cuando se eligió erróneamente el método de solución.

Aunque se piense en principio que las etapas de resolver un problema deben transcurrir linealmente desde el proceso de familiarización hasta el proceso de verificación final, en la práctica realmente no es así, es decir, las etapas en el proceso de resolución, están en un constante ir y venir porque muchas veces, (digamos en el momento de aplicación de una estrategia), se encuentran dificultades que hacen retroceder a las etapas anteriores porque pueden venir dadas, o por una mala selección de estrategias o por una mala comprensión del problema. En el proceso de resolución de problemas, el maestro debe tener bien claro que este proceso no es un proceso lineal sino realmente dialéctico, donde cada etapa puede implicar un retroceso, porque cada una influye en la otra.

Por ello, después de haber avanzado en algún intento de solución, es necesario que se haga una pausa y se discuta la vialidad del método; aún cuando la dirección sea la correcta, esto permitirá decidir si se continúa en esta dirección o se considera otra vía de solución. Este tipo de evaluaciones debe estar presente en todo el proceso de solución. También puede suceder que no se comprendió el problema como debiera.

2) En los conocimientos previos, cuando el estudiante se enfrenta a situaciones nunca vistas ni experimentadas y se da cuenta que le faltan herramientas para resolver el problema. Es precisamente aquí donde la labor del docente interviene para dotarlo de ese contenido que necesita

para resolver el problema como una herramienta "necesaria" (como surgen muchas teorías en la historia de matemáticas: por necesidad). Para esto se introduce el próximo paso.

PASO 6 **Enseñanza del contenido a introducir.**

El contenido en cuestión se da a desear por la necesidad de resolver el problema. En este momento se introduce el contenido matemático, para el cual pueden aplicarse dos tipos de métodos problémicos:

Búsqueda Parcial, si se trata de un contenido que el estudiante pueda descubrir por sí mismo de manera independiente o con la ayuda del profesor. Aquí el maestro, si interviene, es sólo para orientar la búsqueda.

Al utilizar este método de búsqueda parcial no solamente logramos que el estudiante descubra o investigue en relación a un conocimiento sino que también está logrando iniciarlo en la metodología de la investigación científica, lo cual demuestra que el enfoque propuesto es multifacético.

Exposición Problémica, cuando el contenido presenta niveles de dificultad más elevados para los estudiantes. La exposición, en este caso, está apoyada en el problema, ya que está en función de él. Por ello, resulta muy diferente a la exposición tradicional, donde el estudiante se enfrenta friamente a un contenido expuesto por el profesor, sin generar ningún tipo de necesidad que justifique su análisis. En cuántas ocasiones los alumnos preguntan *"¿y dónde se aplica?"* y el docente sólo responde "*más adelante veremos dónde se aplica*" o *"este contenido es muy importante o muy interesante"*, estas explicaciones generalmente resultan totalmente frías para el estudiante, y no lo motivan. Se le dice "verás" pero no está viendo, entonces debe asumirlo como un acto de fe. Éste, si es necesario, hay que remitirlo a los últimos extremos. Y es precisamente éste el papel de la exposición problémica; lo ideal sería que el estudiante descubriera todos los conocimientos, pero no es posible que él, en tres años de preparatoria, haga el recorrido que ha hecho el hombre durante miles de años.

En casos especiales se puede optar por el método investigativo; por ejemplo, cuando la sesión ha terminado se puede solicitar al estudiante que investigue con otros maestros o en la bibliografía sobre otras herramientas que podrían utilizarse en la resolución del problema.

PASO 7 **Manifestar la aplicación del contenido en el problema.**

Este nuevo conocimiento debe ser de vital importancia para resolver la situación problémica presentada, pero no puede quedarse sólo como herramienta necesaria para este problema, ni debe aprenderse sólo para hacer ejercicios de rutina; es necesario, desde este momento, que el estudiante valorice este nuevo conocimiento del cual él pueda hacer transferencias o generalizaciones, proyectando su utilidad en problemas futuros o en otras necesidades que requieran este conocimiento.

PASO 8 **Inmiscuirse en la solución del problema.**

En este paso, una vez seleccionada la estrategia, y provisto el estudiante de un instrumento teórico que va a apoyar la aplicación de esta estrategia, se aplica ésta concretamente y se llega a la solución del problema.

PASO 9 **Trabajar retrospectivamente.**

Se verifica la solución, se analiza lo que se hizo al resolverlo y se discuten otras alternativas de solución. Algunas preguntas que pueden ayudar son:

* ¿ Escribiste la respuesta completa?
* ¿Tu respuesta tiene sentido con respecto a las condiciones del problema?
* ¿Qué estrategias utilizaste?, Explica su uso.

* ¿Piensas que tu solución es correcta? Explica.
* ¿Fue el problema fácil o difícil para tí? Explica.
* ¿Podrías haber resuelto el problema en otra forma?
* ¿Podrías explicarme el proceso de solución sin necesidad de resolverlo otra vez?

PASO 10 **Afianzar los conocimientos adquiridos**

El conocimiento recién aprendido debe afianzarse inmediatamente mediante la proposición de nuevos ejercicios y problemas, ya sean más sencillos, que resulten de agregarle más información o de eliminar algunas condiciones al problema, o más complicados, al eliminar algunas de las restricciones de los datos o al considerar aspectos más generales.

Hay que señalar que la aplicación de esta metodología requiere, por parte del maestro, un gran dominio de contenido y gran creatividad.

El profesor debe evaluar continuamente el trabajo de los alumnos, tomando como fuente útil de información para su trabajo el análisis de los errores cometidos por ellos en todo el proceso de resolución del problema. Aunque resulte imposible una observación cotidiana de cada uno de los alumnos, si es posible una observación más o menos regular en la que no sólo se dedique una atención individual sino que se tenga en cuenta la actuación del alumno en pequeños grupos y se evalúen los procesos de solución del alumno, y no sólo sus resultados finales.

Incluso, una de las aspiraciones mayores que se podría tener dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje sería lograr que el propio estudiante identificara una situación problémica y la trajera al aula, es decir, que la situación problémica no partiera del maestro, sino que fuera creada por los propios estudiantes, a partir de sus propias inquietudes cognoscitivas.

Pero para llegar a ese nivel, el maestro tendría que estar capacitado, tanto pedagógica como matemáticamente, para poder aprovechar esa situación problémica dentro del proceso. Evidentemente, ello permitiría contar con un alumno enteramente involucrado en el análisis de la situación. Ya sería un alumno que tendría una actitud investigativa: que ve un fenómeno, se lo cuestiona, encuentra contradicciones y se plantea el problema.

Trabajar con esta metodología hace una demanda al docente mucho mayor desde el punto de vista del conocimiento de su ciencia y desde el punto de vista del dominio de los métodos pedagógicos que la que le plantea la enseñanza tradicional, en la cual el profesor no tiene que hacer ningún tipo de elaboración metodológica del contenido, pues lo presenta muchas veces tal como está en una secuencia de un libro, o en la forma que él vio que lo hizo uno de sus maestros, por pura imitación. No aparece así el elemento creativo que tiene que existir en toda actividad docente.

2.2 Ejemplificación

A continuación se presenta un ejemplo del diseño de una clase utilizando la metodología propuesta.

Existe una gran variedad de problemas que pueden ser trabajados en clase para introducir conceptos, relaciones, propiedades, etc. utilizando esta metodología.

Presentaremos un diseño de clase donde se hace una construcción de la función logaritmo. La elección de este concepto se relaciona con la necesidad de involucrar problemas del contexto social que tengan que ver con el perfil del egresado mencionado en la introducción. (Ver más ejemplos en el anexo B al final de este trabajo).

Presentación de la situación problémica:

La presentación del problema se hace inicialmente en forma verbal para despertar la inquietud del grupo y después en forma escrita, con ayuda del grupo.

Considerando los gastos que intervienen en la graduación se abre una cuenta de ahorros en el banco, inicialmente se deposita la cantidad de $1,000.00 y la tasa de interés es del 12% anual. Si solamente se reinvierten los intereses, ¿En cuánto tiempo se duplicará la cantidad depositada?.

Como se observa se ha seleccionado una situación del contexto real en el que se desarrollan estos estudiantes, con la intensión de buscar no solamente una componente cognitiva en el proceso del conocimiento sino también una componente afectiva.

Reconocimiento del problema.

Si no es suficiente la descripción escrita del problema por parte de los alumnos, para garantizar su comprensión, se pueden hacer las siguientes preguntas:

Profesor: ¿Pueden explicar con otras palabras el problema?
Alumno: Se trata de saber cuándo se tendrán $2,000.00 en el banco si se depositan $1000.00 y la tasa de interés anual es del 12%.

Observar las variables involucradas en el problema

Profesor: ¿Cuáles son las variables involucradas en este problema?

Alumno: El depósito o inversión inicial, la tasa de interés, el tiempo o número de capitalizaciones anuales, y la inversión final.

Profesor: ¿Cómo podemos expresar simbólicamente a las variables involucradas?

Alumno: Inversión inicial : C (capital)

Inversión final (monto): I (Inversión)

Tasa de interés: i (interés)

Número de capitalizaciones: n (número)

Profesor: ¿Cuáles variables son conocidas y cuáles desconocidas?

Alumno: Las conocidas: la inversión inicial, la tasa de interés y la inversión final; las desconocidas: el tiempo o número de capitalizaciones anuales.

Profesor: ¿Qué valores toman las variables?

Alumno: $C = 1000$; $I = 2000$; $i = 12\%$ (0.12); $n = ?$

Búsqueda de estrategias posibles.

Profesor: ¿Conocen alguna fórmula directa para encontrar la variable desconocida?

Alumno: No

Profesor: ¿Cómo podríamos comenzar a solucionar este problema?

Alumno: Viendo cuánto se acumula cada año.

Profesor: Es decir, vamos a utilizar una estrategia de ensayo y error.

Se recomienda decirle a los alumnos el tipo de estrategias utilizadas para que ellos asimilen las estrategias generales para resolver problemas.

Laborar en el inicio del proceso de solución.

Profesor: Empecemos de esta forma a resolver el problema.

Alumnos: años Inversión acumulada *(Trabajo Independiente)*

años	Inversión acumulada
0	1000
1	1000 + 1000(0.12) = 1120
2	1120 + 1120(0.12) = 1254.4
3	1254.4 + 1254.4(0.12) = 1404.928
4	1404.928 + 1404.28(0.12) = 1573.5193
5	1573.5193 + 1573.5193(0.12) = 1762.3416
6	1762.3416 + 1762.3416(0.12) = 1973.8225
7	1973.8225 + 1973.8225(0.12) = 2210.6812

Los $2000.00 andan entre 6 y 7 capitalizaciones.

Pero sacando el promedio .....

Aquí, si el alumno piensa que tal vez el promedio pueda ser la solución, es necesario que valide con las capitalizaciones anteriores; por ejemplo, si la capitalización 3 es promedio de la capitalización 2 y 4.

Los alumnos pueden predecir que si hubiese la solución, por este método (ensayo y error) sería muy tedioso encontrarlo.

Profesor: ¿Cómo podríamos tabular estos resultados? *(Búsqueda Parcial)*

Alumno:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
I	1000	1120	1254.4	1404.92	1573.51	1762.34	1973.82	2210.68

Profesor: ¿Se puede encontrar un patrón?

Alumno: No

Profesor: Consideremos como submeta esta tabulación.

(Submeta, resolver un problema más simple)

n	0	1	2	3	4
I	1	2	4	8	16

¿Se puede encontrar un patrón?

Alumno: Sí, la variable I se va multiplicando por 2.

Profesor: ¿Cómo se puede expresar la I en términos de n?

Alumno:

n	0	1	2	3	4	
I	$1=2^0$	$2=2^1$	$4=2^2$	$8=2^3$	$16=2^4$	$I = 2^n$

Profesor: Regresemos a nuestra tabulación. ¿Se puede ahora encontrar algún patrón?

Alumno: Sí, la variable I se va multiplicando por 1.12.

Profesor: ¿Cómo se puede expresar la I en términos de n?

Alumno:

n	0	1	2	3	4	
I	1000	1120	1254.4	1404.92	1573.51	
I	1000	1000(1.12)	$1000(1.12)^2$	$1000(1.12)^3$	$1000(1.12)^4$	$I=1000(1.12)^n$

(Aquí se puede introducir la propiedad de la suma-multiplicación de una función exponencial: Si $f(x) = ab^x$, entonces $f(x+c) = f(x)b^c$)

Profesor: Tenemos una ecuación matemática que involucra a la Inversión y al número de capitalizaciones.

En Contablilidad se la llama Fórmula para calcular el monto de un capital sujeto a un interés compuesto y se representa por $I= C(1 + i)^n$

Volvamos a nuestro problema inicial. ¿Cuál es la dificultad de nuestro problema?.

Alumno: Encontrar el número de capitalizaciones que permitan llegar a una inversión de $ 2000.00, es decir encontrar n, cuando I= 2000.

Profesor: ¿Cómo podemos lograrlo ?

Alumno: Sustituyendo en la ecuación el valor de "I" y despejando "n".

$I=1000(1.12)^n$

$2000 = 1000(1.12)^n$

$(1.12)^n = 2$

No podemos despejar "n" porque está en el exponente.

Enseñanza del contenido a introducir

(Exposición problémica)

Profesor: Cuando en una función la x está en el exponente se dice que la función es exponencial y su forma general es $y = ab^x$. Para nuestro problema tenemos la ecuación exponencial $2 = (1.12)^n$. La pregunta es: ¿Quién es n? y ¿Cómo se puede despejar?.

En una función exponencial tal como $y = b^x$, el exponente "x" al que se tiene que elevar una base "b" para obtener un número "y" se le llama **logaritmo** del número "y" en base b, y se abrevia $\log_b y$ (buscar la tecla "log" en la calculadora).

Esto es: $b^x = y$ sí y solo sí $x = \log_b y$.

La calculadora sólo calcula el logaritmo base 10, es decir, $\log_{10} y$, (cuando la base es 10, $\log_{10} y$ se expresa log y), pero la función logaritmo tiene propiedades que permiten resolver ecuaciones exponenciales sin necesidad de cambiar la base por un potencia de 10. Esto se logra aplicando logaritmo base 10 en ambos lados.

Estas propiedades de los logaritmos son:

1) Logaritmo de un producto $\log_b(m^*n) = \log_b m + \log_b n$

2) Logaritmo de un cociente $\log_b(m/n) = \log_b m - \log_b n$

3) Logaritmo de una potencia $\log_b(m)^n = n^* \log_b m$

<u>Manifestar su aplicación en el proceso de solución.</u>

Esto es: Tenemos $b^x = y$

aplicando logaritmos $\log b^x = \log y$

aplicando la propiedad 3) $x \log b = \log y$

¿Puede aquí despejarse la variable x?

Alumno: Sí, $x = \log y / \log b$.

Es importante hacer aquí analogías con otros problemas para darle la importancia a este contenido matemático.

<u>Inmiscuirse en la solución del problema.</u>

Profesor: ¿Cuál sería el procedimiento para nuestro problema?

Alumno: Tenemos $(1.12)^n = 2$

aplicando logaritmos $\log(1.12)^n = \log 2$

aplicando la propiedad 3) $n \log(1.12) = \log 2$

Despejando la variable n $n = \log 2 / \log(1.12)$

utilizando la calculadora $n = 6.1162553742$

Profesor: ¿Cómo se puede interpretar este resultado?

Alumno: Que se necesitan 6.12 reinversiones o capitalizaciones para alcanzar una inversión final de $2000.00.

Profesor: ¿En cuanto tiempo sucederá esto?

Alumno: Como las capitalizaciones son por año, sucederá en 6.12 años aproximadamente, es decir, en 6 años, 1 mes y 13 días, aproximadamente.

Trabajar retrospectivamente.

Profesor: ¿Se estimaba esta respuesta?

Alumno: Sí, n debería estar entre 6 y 7.

Profesor: ¿Será el valor de n encontrado exactamente el que se buscaba? Comprueba.

Alumno: La ecuación era $I=1000(1.12)^n$

simplificada $(1.12)^n = 2$

sustituyendo "n" $(1.12)^{6.1162553742} = 2$

$2 = 2$

Profesor: ¿Alguien puede resumir el procedimiento?

Alumno: 1°) Se entiende el problema

3°) Se sustituyen las variables conocidas

4°) Si queda una ecuación exponencial, aplicar logaritmos.

5°) Se encuentra la solución

6°) Se comprueba en la ecuación original.

Afianzar los conocimientos adquiridos.

Profesor: En el problema anterior, ¿Cuánto dinero se tendrá en el banco después de 10 años?

Alumno: Tenemos la fórmula $I = C(1 + i)^n$

sustituyendo los valores conocidos C =1000; i = 12% y n = 10

$I = 1000(1 + .12)^{10}$

$I= 1000(1.12)^{10}$

I= 3105.85 Esto es $ 3,105.85

Profesor: Un nuevo problema:

La cantidad de energía Richter de un temblor de tierra está determinada por el logaritmo base 10 de la intensidad (amplitud de vibración del temblor). El temblor que ocurrió en la ciudad de San Francisco en Abril '65 midió 7 en la escala de Ritcher. El temblor en la ciudad de México en Sep'85 midió cerca de 8.25 en la escala de Ritcher. Para una persona que conoce poco acerca de la función logaritmo, 8.25 no le representa mucha diferencia con respecto a 7. Utilizando tus conocimientos acerca de logaritmos, determina cuántas veces fue más intenso el temblor de la ciudad de México que el de la ciudad de San Francisco.

Las propiedades de los logaritmos vistos en este ejemplo, puede ser construidas mediante la utilización de esta metodología.

CONCLUSIONES

Los docentes debemos dirigir el proceso de enseñanza-aprendizaje mediante el uso de métodos que estimulen la capacidad productiva de los estudiantes, así, el uso de métodos productivos en la enseñanza, propicia el desarrollo de su actividad creadora.

Con la utilización de la metodología propuesta en la enseñanza de las matemáticas, los estudiantes participan activamente en el desarrollo de las ideas matemáticas, los problemas son definidos con menos rigidez y el aprendizaje se desarrolla con la práctica de desarrollar matemáticas, es decir, el estudiante aprende matemáticas al ser inmerso en un medio similar al de los individuos que hacen matemáticas.

Además, la sociedad tiene derecho a esperar de los estudiantes que egresan de la universidad, personas con creatividad para resolver una gran heterogeneidad de situaciones problémicas que en ella se presentan. El encargo social representa uno de los problemas científicos que intenta resolver la didáctica. La aplicación de esta metodología debe contribuir a la solución de este problema.

En lo que respecta al contenido, mediante la utilización de esta metodología se logran alcanzar los cuatro niveles de asimilación, a saber, el nivel de familiarización, el nivel de reproducción, el nivel de producción y el nivel de creación, ya que todos se encuentran presentes en la secuencia mencionada.

Es importante señalar que esta metodología simultáneamente puede cumplir con los siguientes objetivos:

1. Ser una medida correctiva dirigida a la prevención del alto índice de reprobación en matemáticas.

2. Remediar las deficiencias detectadas en los cursos de matemáticas previos que involucren temas afines y requieran de generalizaciones.
3. Engendrar en el estudiante el espíritu de investigación científica, el análisis crítico de la situación que lo rodea, saber escuchar a sus compañeros, discutir sin pelear, trabajar en equipo, etc.

Es cierto que el tiempo que dedicamos en clase no corresponde al tiempo que los estudiantes necesitan para asimilar el tema, pero aquí la planeación juega un papel muy importante. Esta debe basarse en el uso de buenos métodos de enseñanza y en el trabajo independiente de los estudiantes.

La propuesta facilita al docente un material con el que puede impulsar la formación de los alumnos: todo ello, sin menoscabo de la necesaria apertura del curriculum a la realidad del entorno, de los alumnos y del mismo profesor.

PERSPECTIVAS Y RECOMENDACIONES

- Diseñar y aplicar un experimento pedagógico fundamentado en esta propuesta, que permita validar su efectividad.

- Debido a la gran demanda, tanto de conocimientos como de creatividad por parte de los maestros que implica la aplicación de esta propuesta, éstos deben capacitarse continuamente para realizar estas tareas eficaz y eficientemente. Esto incluye, tanto consultar y analizar las publicaciones actuales respecto las perspectivas de la enseñanza de las matemáticas (tanto en su contenido como sus métodos de enseñanza), como cursar niveles de postgrado.

- Estudiar la posibilidad de aplicar esta propuesta en el proceso de enseñanza-aprendizaje de todas las materias de la asignatura de matemáticas y en el de otras asignaturas.

- Buscar en la sociedad y producción problemas que interesen a nuestros alumnos, es decir, que los maestros al hacer su lista de problemas para resolverlos en el aula, tengan siempre presente tanto el contexto social del estudiante, como su perfil técnico. Cuanto más responda el aprendizaje a las necesidades del estudiante y cuantas más áreas de la personalidad abarque, más significativo y duradero será.

- Además de analizar que métodos de enseñanza utilizar, el docente debe navegar por todas las técnicas de trabajo independiente, para que el estudiante tenga más expectativas de trabajo.

- Identificar los factores extracurriculares que influyen en el aprendizaje del alumno y que no pueden aislarse, como lo son la etapa de adolescencia por la que atraviesan, los factores socio-económicos, en general los aspectos afectivos.

- Promover los valores continuamente, considerando que no solo los aspectos informativos nos añaden a los docentes sino también los aspectos formativos.

- Se debe de tener conocimientos de psicología para despertar interés y mantener la atención de los alumnos, para evitar el olvido y propiciar la durabilidad de los conocimientos, para elevar la efectividad en la formación y desarrollo de las habilidades y capacidades matemáticas y determinar los métodos adecuados de enseñanza.

- Es necesario, por lo que a la sociedad le va en ello, que se formen en nuestras universidades buenos equipos de investigación en educación matemática que ayuden a resolver los muchos problemas que se presentan en el camino para una enseñanza matemática más eficaz.

BIBLIOGRAFÍA

Alvarez V., Notas del curso de *Perspectivas de las Matemáticas*, Maestría en la Enseñanza de las Ciencias con especialidad en Matemáticas, U.A.N.L., 1998.

Arango C., Almeida B., Ballester S., Hernández S., Santana H., Torres P., *Metodología de la Enseñanza de la Matemática*, Tomo I. Cap. 2 Editorial Pueblo y Educación, 1992.

Cantoral Uriza R., Alanís Rdz. J. A., Notas del curso de *Historia, Filosofía y Epistemología de las Matemáticas*, Maestría en la Enseñanza de las Ciencias con especialidad en Matemáticas, U.A.N.L., 1997.

Farfán Márquez R. M., *Ingeniería Didáctica: Un estudio en la variación y el cambio.* Editorial Iberoamérica, 1997.

Garrido M. R., Notas del curso de *Psicología Cognitiva*, Maestría en la Enseñanza de las Ciencias con especialidad en Matemáticas, U.A.N.L., 1998.

Pérez González O. L. , Notas del curso de *Didáctica de las Matemáticas*, Maestría en la Enseñanza de las Ciencias con especialidad en Matemáticas, U.A.N.L., 1998.

Roldán R. , Notas del curso de *Profundización en problemas de la enseñanza de las matemáticas*, Maestría en la Enseñanza de las Ciencias con especialidad en Matemáticas, U.A.N.L., 1997.

Santos Trigo L. M. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas.* Editorial Iberoamérica, 1997.

Sobel M., Lerner N., *Precálculo*, 5ª Ed., Prentice Hall, 1995.

Vázquez R. A. , Notas del curso de *Recursos y medios didácticos para la eseñanza de las matemáticas (Metodología de la Investigación)*, Maestría en la Enseñanza de las Ciencias con especialidad en Matemáticas, U.A.N.L., 1998.

Zillmer W. *Complementos de Metodología de la Enseñanza de la Matemática*, p 117.

http://www.oei.org.co/oeivirt/edumat.htm#B
De Guzmán Ozámiz M., *Enseñanza de la Matemática*, Universidad Complutense de Madrid.

http://www.oei.org.co/oeivirt/gil02.htm
Gil Perez D., Modelo constructivista de Enseñanza/aprendizaje de las ciencias. Universitat de València.

ANEXOS

ANEXO A

CLASIFICACIÓN DE LOS MÉTODOS DE ENSEÑANZA

MÉTODOS

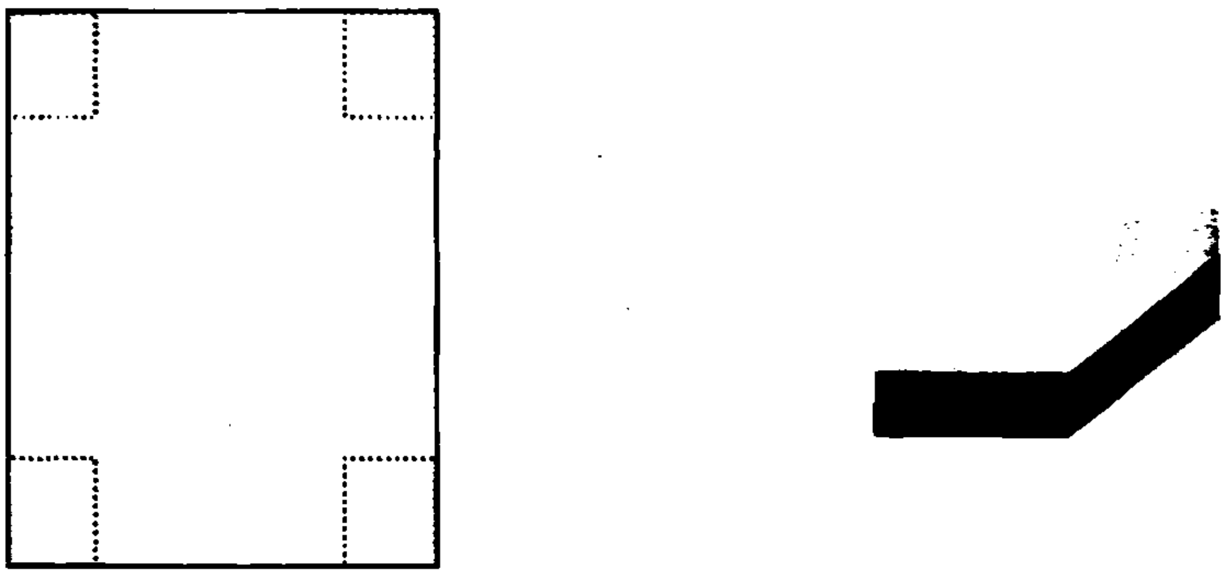
(Cómo se enseña)

- **Según el grado de participación de los sujetos** (Aspecto Externo)
  (relación: maestro-alumno-materia)
  - Tipos d e procesos de comunicación en la enseñanza y el grado de independencia del trabajo de los alumnos
    - 1. Exposición del profesor (Receptivo)
      - Carácter: 1) Aclaración
        2) Instrucción
        3) Ejemplificación
    - 2. Elaboración Conjunta (Dirigido-Productivo)
      - Conversación: 1) Socrática
        2) Heurística
        3) Discusión
    - 3. Trabajo independiente (Productivo)
      - Tipos: 1) Trabajo Individual
        2) Tr. Individual-frontal
        3) Trabajo en Equipos
- **Según los niveles de Asimilación del contenido**
  - A) Método Receptivo
  - B) Método Reproductivo
  - C) Métodos Productivos o Problémicos
    - 1. Enseñanza Problémica
    - 2.- Método Heurístico (o de Búsqueda Parcial)
    - 3.- Método Investigativo (o creativo)
- **Según la lógica interna del proceso docente educativo** (Aspecto Interno)
  (Observación minuciosa del aprendizaje de los alumnos)
  - A) Desarrollo de procedimientos lógicos y operaciones lógicas del pensamiento.
    - 1. M. Deductivo
    - 2. M. Inductivo
    - 3. M. Analítico
    - 4. M: Sintético
    - 5. M. de Abstracción
    - 6. M. de Concreción
    - 7. M. de Generalización
  - B) Las funciones didácticas (actividades en clase)

ANEXO B

El Problema de Diseño de una caja sin tapa

Como parte de su estrategia de ventas, en una dulcería desean mostrar al público la rica variedad de sus productos. Para ello, han pensado en construir pequeñas cajas sin tapa a partir de hojas de cierto papel especial que inhibe la humedad ambiental protegiendo con ello la presentación de los dulces. Por este motivo, han comprado 1000 hojas de este papel especial cortadas a tamaño carta, de las que habrán de recortar un cuadrado en cada esquina y doblar las *cejas* que se forman para formar cajas sin tapa, como se indica en la siguiente figura.

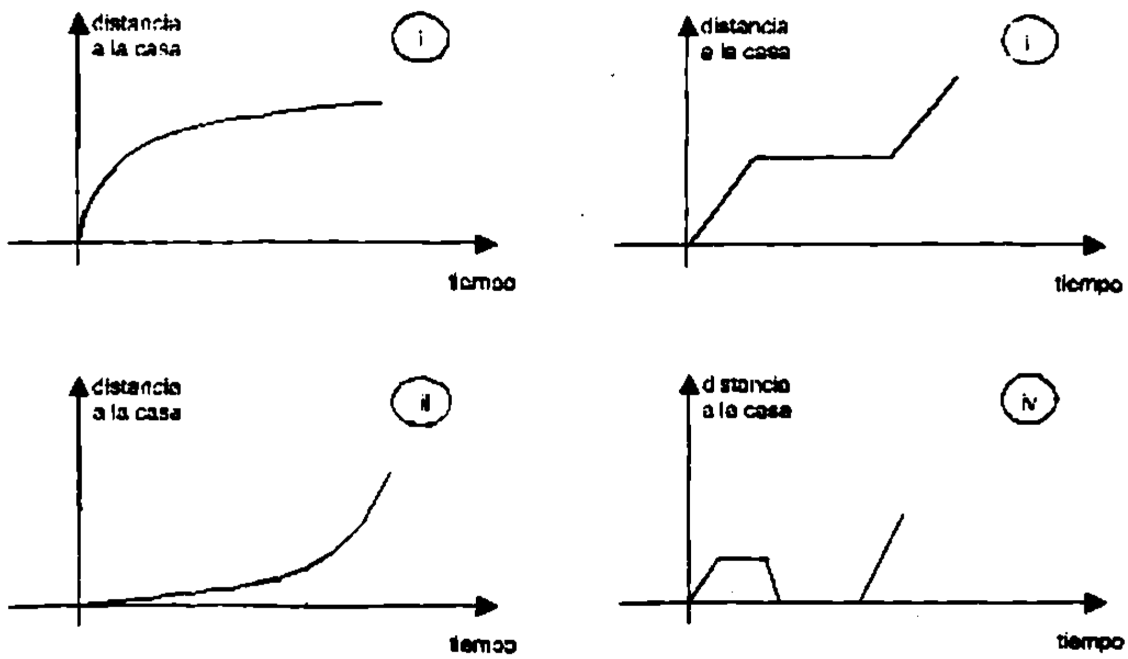


En esta situación, se trata de determinar las medidas de un prototipo de caja que asegure que el papel será usado para construir la caja con la mayor capacidad posible.

Correlatos distancia - tiempo: Historieta &λαθυο; Gráfica

Relacione las siguientes situaciones con tres de las gráficas en la siguiente secuencia y construya una historieta que describa una situación que se corresponda con la gráfica restante.

- Apenas habia salido de mi casa, cuando me di cuenta que había olvidado mi libro y me regresé por él.
- Las cosas iban bien hasta que se poncho una llanta de mi auto.
- Salí en calma, pero me apuré cuando me di cuenta que iba a llegar tarde.



Un nuevo tipo de variación?... ¿Cómo caracterizarla matemáticamente? ...

Población

1. En 1993, la población de la República Mexicana era de alrededor de 82 millones de habitantes y crece a una tasa del *2.2* % anual aproximadamente. ¿Cuál será la población al cabo de *1,2,3,... x* ... años?

Ahorros

2. Una caja de ahorros ofrece una tasa de interés compuesto del *p%* mensual. Una persona deposita *N* pesos cada mes todos los meses. ¿Cuánto tendrá ahorrado al cabo de *1,2,3,...,x,...* meses?

Algunos problemas de optimización

1. (*Teoría de números*) Determine dos números cuya suma sea 10 y tales que su producto sea máximo.

2. (*Teoría de números*) Encuentre dos números con suma igual a 8, de modo que la suma de sus cuadrados sea mínima.

3. (*Teoría de números*) Determine dos números positivos cuya suma sea 75, tales que el producto de uno por el cuadrado del otro sea máximo.

4. (*Teoría de números*) Determine dos números positivos con suma igual a 12 de modo que la suma de sus cubos sea mínima.

5. (*Geometría*) Demuestre que entre todos los rectángulos de área igual a 100 centímetros cuadrados, el que tiene perímetro más pequeño es el cuadrado de lado igual a 10 centímetros.

6. (*Geometría*) ¿Cuál es el área del máximo rectángulo que puede inscribirse en un semicírculo de radio a?

7. (*Costos de cercas*) Un granjero desea delimitar una parcela rectangular de área 900 metros cuadrados. La cerca tiene un costo de $15 por metro. ¿Cuáles deberían ser las dimensiones de la parcela de modo que se minimice el costo del cercado? ¿Cómo cambia su respuesta si el costo de cercado sube a $20? ¿y en el caso en que sólo sea necesario cercar tres lados?

8. (*Diseño de un folleto impreso*) Un folleto impreso ha de contener 48 pulgadas cuadradas de espacio impreso con márgenes de 3 pulgadas en la parte superior e inferior y márgenes laterales de 1 pulgada. ¿Qué dimensiones del folleto consumirán la mínima cantidad de papel?

9. (*Diseño de una cisterna*) Se construirá una cisterna con capacidad de 324 pues cúbicos de agua. Deberá tener una base cuadrada con cuatro lados verticales, todos fabricados con concreto, y una tapa superior de acero. Si la unidad de área de acero cuesta el doble que la correspondiente en concreto, determine las dimensiones de la cisterna que minimizan el costo total de construcción.

10. (*Costo promedio mínimo*) El costo promedio de fabricar cierto artículo es $\overline{C} = 5 + \dfrac{48}{x} + 3x^2$, en donde x es el número de artículos producidos. Encuentre el valor mínimo de $\overline{C}$.

11. (*Modelo de control de inventarios*) El costo de la producción anual de un artículo es

$$C = 5000 + \frac{8000000}{x} + \frac{x}{20}$$

en donde x es el tamaño promedio del lote por serie de producción. Encuentre el valor de x que hace mínimo a C.

12. (*Utilidad máxima*) Una empresa vende todas las unidades que produce a $4 cada una. El costo total de la empresa, C, por producir x unidades está dado en pesos por la expresión

$$C = 50 + 1.3x + 0.001x^2$$

- Escriba la expresión para la utilidad total, P, como una función de x
- Determine el volumen de producción x de modo que la utilidad P sea máxima
- ¿Cual es el valor de la utilidad máxima?

13. (*Utilidad máxima*) Una compañía advierte que puede vender toda la existencia de cierto producto que elabora a una tasa de $2 por unidad. Si estima la función de costo del producto como

$$1000 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{50}\right)^2$$ dólares por x unidades producidas:

- Encuentre una expresión para la utilidad total si se producen y venden x unidades.
- Determine el número de unidades producidas que harían que utilidad fuera máxima.
- ¿Cuál es la cantidad de utilidad máxima?
- ¿Cuál seria la utilidad si se produjeran 6000 unidades?

14. (*Tamaño del lote económico a ordenar*) Un material se demanda a una tasa de 10,000 unidades por año; el precio al costo del material es de $2 por unidad; el costo de volver a llenar el almacén del material por orden, sin importar el tamaño de la orden, x, es de $40 por orden; el costo de almacenar el material por un año es del 10% del valor de las existencias, $x/2$. Suponiendo que llamamos C al costo anual de acomodar y tener almacenado el material

- Verifique que $$C = 20{,}000 + \frac{400{,}000}{x} + \frac{x}{10}$$
- Encuentre el tamaño del lote más económico a ordenar

15. (*Producción máxima de madera*) Una compañía forestal planea desmontar cierta área de pinos después de cierto número de años. El número promedio de pies que se obtienen por árbol en un periodo dado de tiempo se sabe que es igual a $5 - 0.5x$, en donde x es el número de árboles por acre, con x entre 35 y 80. ¿Qué densidad de árboles debe conservarse a fin de maximizar la cantidad de madera por acre?

16. (*Producción de cultivos*) La producción y (en toneladas) por hectárea de cierto cultivo de trigo está dado por la expresión $y = a\left(1 - e^{-kx}\right) + b$, donde a, b y k son constantes y x es el número de kilos de fertilizante por hectárea. La utilidad generada por la venta de trigo está dada por $P = py - c_0 - cx$ en donde p es la utilidad por tonelada, c es el costo por kilo de fertilizante y c0 es un costo fijo. Determine cuánto fertilizante debe usarse a fin de maximizar la utilidad P.

17. (*Viajes de grupo*) Un agente de viajes ofrece un plan de vacaciones a grupos sobre las bases siguientes: Para grupos de tamaño hasta 50, la tarifa es de $400 por persona, mientras que en el caso de grupos más grandes, la tarifa por persona se reducen en $2 por cada viajero que exceda a 50. Determine el tamaño del grupo que permita un ingreso máximo para el agente de viajes.

18. (*Ingreso y utilidad máximas*) Un fabricante fija el precio de un producto en \$10 cada uno para órdenes menores de 200 unidades y ofrece una reducción en el precio de 2¢ por cada artículo ordenado que exceda a 200; la reducción se aplica a la orden completa. Calcule el tamaño de la orden que hace que el ingreso del fabricante sea máximo. Si el costo del producción de cada artículo es de \$5, determine el tamaño de la orden que hace que la utilidad del fabricante sea máxima. ¿Cómo se modifica este último resultado si los costos del fabricante se incrementan a \$7 por artículo?

19. (*Costos de instalación de una línea telefónica*) Se desea construir una línea telefónica entre dos torres A y B situadas a orillas opuestas de un río. El ancho del río es de 1 kilómetro, y B está situada a 2 kilómetros río abajo de A. La instalación de la línea tiene un costo de $\$c$ por kilómetro en tierra y de $\$2c$ por kilómetro bajo el agua. Determine la trayectoria de instalación que hace que el costo sea mínimo.

20. (*Refinería costera*) Una compañía petrolera requiere un oleoducto que va desde una torre de perforación situada mar adentro a una refinería que se construye en la costa cercana. La distancia de la torre de perforación al punto más cercano P sobre la costa es de 20 kilómetros y la distancia a lo largo de la costa de P hasta la refinería es de 50 kilómetros. A partir de la refinería, el oleoducto recorrerá una distancia x a lo largo de la costa, después seguirá una línea recta hasta la torre de perforación. Suponiendo que el costo de instalación del oleoducto bajo el agua es de tres veces el correspondiente al costo del instalado sobre tierra, encuentre el valor de x que minimiza el costo total del oleoducto.