

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA



DETERMINACION DE LA MAXIMA PERTURBACION TOTAL
DEL FLUJO EXTERNO EN REDES BALANCEADAS
Y FACTIBLES

POR

APOLINAR ZAPATA REBOLLOSO

Como requisito parcial para obtener el Grado de
DOCTOR EN INGENIERIA con Especialidad en
Ingeniería de Sistemas

DICIEMBRE, 1998

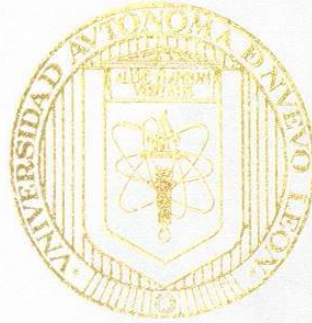
A. Z. R. A.
DETERMINACION DE LA MAXIMA PERTURBACION TOTAL DEL
FLUJO EXTERNO EN REDES BILANCOADAS Y FACCTIBLES

TD
Z5853
.M2
FIME
1998
Z3



1020126376

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA



DETERMINACION DE LA MAXIMA PERTURBACION TOTAL
DEL FLUJO EXTERNO EN REDES BALANCEADAS
Y FACTIBLES

POR

APOLINAR ZAPATA REBOLLOSO

Como requisito parcial para obtener el Grado de
DOCTOR EN INGENIERIA con Especialidad en
Ingeniería de Sistemas

DICIEMBRE, 1998

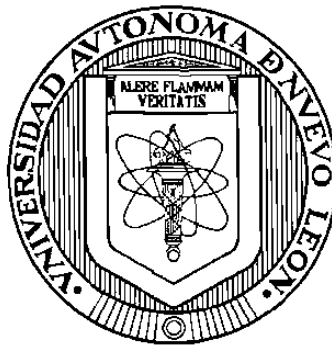




FONDO
TESIS

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA



DETERMINACION DE LA MAXIMA PERTURBACION TOTAL DEL FLUJO

EXTERNO EN REDES BALANCEADAS Y FACTIBLES

Por

APOLINAR ZAPATA REBOLLOSO

**Como requisito parcial para obtener el Grado de DOCTOR EN
INGENIERIA con Especialidad en Ingeniería de Sistemas**

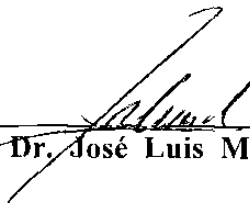
Diciembre, 1998

**DETERMINACION DE LA MAXIMA PERTURBACION
TOTAL DEL FLUJO EXTERNO EN REDES
BALANCEADAS Y FACTIBLES**

Aprobación de la Tesis :

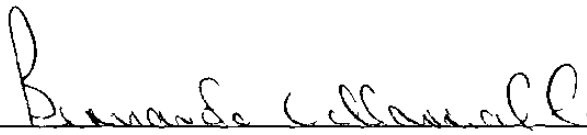


Presidente: Dra. Ada Margarita Alvarez Socarrás

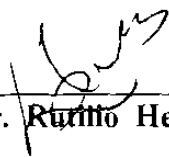


Secretario: Dr. José Luis Martínez Flores

Vocal: Dr. Rafael Colás Ortiz



Vocal: Dr. Bernardo Villarreal Celestino



Vocal: Dr. Rutilio Hernández Sosa



Subdirector de Estudios de Postgrado: M.C. Roberto Villarreal Garza

¡A mi familia! . . . bajo mi concepto.

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar un sincero agradecimiento a la Dra. Ada Margarita Alvarez Socarrás, asesora de esta Tesis, por su amistad, confianza, paciencia y, principalmente, por la dedicación que puso en mi persona; vaya para ella mi reconocimiento a su sabiduría.

Al Dr. José Luis Martínez Flores, Director Adjunto del Programa Doctoral en Ingeniería de Sistemas de la FIME-UANL, su afecto, fe para conmigo, consejos y por las recomendaciones con respecto a los resultados de esta Tesis.

Al los Doctores Rafael Colás Ortiz, Bernardo Villarreal Celestino y Rutilio Hernández Sosa por formar parte del Comité de Tesis, su interés en la revisión del presente trabajo y por sus valiosas sugerencias.

A los ciudadanos: Ing. David Cepeda Sánchez, Ing. Conrado Yépez Aguilar e Ing. Emigdio Guajardo Olguin, Ex-Director, Director y Subdirector Administrativo del Instituto Tecnológico de Matamoros, respectivamente; por el esfuerzo incondicional dirigido al trámite de dos becas. Gracias a ellas me fue posible realizar estos estudios.

A la Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior (ANUIES), por su apoyo económico.

A mi esposa e hijos, por el apoyo moral que siempre me brindaron.

A todas las personas que contribuyeron indirectamente a la realización de esta Tesis. En especial, al Comité de Damas Rotario de San Nicolás de los Garza, N. L., por haber puesto la primer semilla en el año de 1976.

RESUMEN

Es por todos conocido que en la actualidad, las empresas del ramo electrónico y automotriz se enfrentan a un acelerado incremento en la demanda de sus productos. Esto se debe, principalmente, al avance tecnológico de la microelectrónica. Por lo tanto, existen muchas empresas que en corto tiempo pueden aparecer con una capacidad productiva insuficiente para satisfacer las nuevas demandas. Bajo este ambiente, los administradores deben preocuparse por tomar decisiones en torno a cuándo y cuánto expandir su capacidad productiva.

Los problemas de expansión de la capacidad productiva han sido estudiados por casi 30 años y aplicados en una amplia variedad de áreas. Sin embargo, ¿de qué serviría aumentar la capacidad productiva, si no se tiene un sistema de distribución con una capacidad ilimitada?, es decir, podría suceder que en cierto momento no pueda distribuirse todo lo que se produce. Una acción natural para resolver este problema consiste en incrementar suficientemente la capacidad del sistema de distribución. Sin embargo, eso no siempre es posible de realizar, o al menos no lo es en corto tiempo, cuando el sistema de distribución está compuesto por buques petroleros, ferrocarriles, aviones, oleoductos, líneas de alta tensión, etc. Por lo tanto, bajo esta restricción adicional, el administrador debe examinar la expansión de la capacidad productiva cuidando que los bienes producidos puedan distribuirse utilizando el sistema actual de distribución.

Bajo el enfoque de la Teoría de Redes, la situación que enfrenta el administrador puede formularse de la siguiente manera: Dada una red balanceada y factible con ofertas y demandas expuestas a variaciones en una dirección conocida, determinar el máximo valor total de las perturbaciones que mantenga a la red resultante balanceada y factible.

En el presente trabajo se formula el problema del párrafo anterior mediante un modelo de programación lineal entero, en donde las variables de decisión comprenden las perturbaciones que mantienen balanceada a la red actual y los flujos factibles de la red resultante. También se presenta un algoritmo de complejidad polinomial que resuelve ese modelo matemático. Por último, se presentan dos extensiones del problema resuelto, con la intención de responder anticipadamente a ciertos planteamientos que podrían manifestarse en las aplicaciones del mundo real.

TABLA DE CONTENIDO

Capítulo	Página
1. INTRODUCCION	1
2. MARCO TEORICO.	9
2.1 Introducción	9
2.2 Estructura de las Redes.	11
2.2.1 Función de Flujo.	12
2.2.2 Función de Flujo Externo	13
2.2.3 Función de Capacidad	14
2.2.4 Función de Flujo Factible	14
2.2.5 Representación Gráfica de las Redes	15
2.2.6 Matrices Asociadas a una Red	15
2.3 Programas Lineales	16
2.4 Algunos Problemas en Redes	17
2.4.1 El Problema de la Ruta más Corta	17
2.4.2 El Problema de Transporte	18
2.4.3 El Problema de Transbordo	19
2.4.4 El Problema del Flujo Máximo	19
2.5 Análisis Paramétrico.	21
2.5.1 En Programas Lineales	23
2.5.2 En Problemas de Redes	26
2.6 Resumen	29
3. ANALISIS DEL PROBLEMA DE INVESTIGACION	31
3.1 Introducción	31
3.1 Formulación Matemática del Problema	32
3.2 Solución del Problema PLEM	38
3.3 Algoritmo Para Obtener la Solución del Problema	54
3.4 Complejidad del Algoritmo	56
3.5 Independencia Entre la Solución Óptima y el Flujo Factible	57
3.6 Resumen	61

4.	APLICACION DEL ALGORITMO AMPT A UN PROBLEMA DE PRODUCCION-CONSUMO	62
4.1	Introducción	62
4.2	Planteamiento del Problema	62
4.3	Solución del Problema	64
4.4	Resumen	71
5.	EXTENSIONES DEL PROBLEMA DE INVESTIGACION	72
5.1	Introducción	72
5.2	Perturbaciones Acotadas	73
5.3	Costos en las Perturbaciones y Costos de Transporte .	74
5.4	Resumen	76
6.	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	77
	BIBLIOGRAFIA	80

LISTA DE TABLAS

Tabla	Página
I. Datos del Problema	64
II. Conjunto de Nodos	64
III. Conjunto de Arcos	65
IV. Matriz de Capacidades	65
V. Matriz de Flujos	66
VI. Matriz de Capacidades de la Red	67
VII. Valores de la Función del Flujo Máximo	68
VIII. Valores de la Función de Flujo Asociada a la Red Perturbada	69

NOTACION

(N, A)	Red con nodos en N y arcos en A .
N	Conjunto de nodos.
x, y	Nodos.
A	Conjunto de arcos.
(x, y)	Arco con nodo inicial x y nodo terminal y .
E	Conjunto de arcos no dirigidos.
$A^+(x)$	$\{y : (x, y) \in A\}$.
$A^-(x)$	$\{y : (y, x) \in A\}$.
\triangleq	Igualdad por definición.
f	Función de flujo.
\mathbb{Z}^+	Conjunto de números enteros no negativos.
f_{xy}	Cantidad de flujo que pasa a través del arco $(x, y) \in A$.
\mathbb{Z}	Conjunto de números enteros.
a	Función de flujo externo.
a_x	Cantidad de flujo externo asociada al nodo x .
S	Conjunto de nodos fuente.
T	Conjunto de nodos sumidero.
O	Conjunto de nodos intermedios.
$ a_x $	Valor absoluto de a_x .
c	Función de capacidad
c_{xy}	Capacidad del arco (x, y) .
$(N, A; a, c, f)$	Red (N, A) con funciones a, c y f .
F	Matriz asociada a la función f .
C	Matriz asociada a la función c .
$\mathbf{0}$	Matriz $n \times n$ con entradas iguales a cero.
l	Función de longitud.
l_{xy}	Longitud del arco (x, y) .
\mathcal{T}	Una trayectoria dada.
\mathcal{L}	$\sum_{(x,y) \in \mathcal{T}} l_{xy}.$
\mathbb{R}	Conjuto de números reales.
b	Función de costo de transporte.

b_{xy}	Costo sobre el arco (x, y) .
v	Valor del flujo máximo
s	Nodo fuente.
t	Nodo sumidero.
f_m	Función de flujo máximo.
$(N^e, A^e; c^e)$	Extensión de la red $(N, A; c)$.
(s, S)	$\{(s, x) : x \in S\}$.
(T, t)	$\{(x, t) : x \in T\}$.
M	Un número entero muy grande.
d	Función de dirección de perturbación.
d_x	Dirección de perturbación sobre el nodo x .
δ_x	Valor de perturbación sobre el nodo x .
a'	Función de flujo externo que resulta cuando a es perturbada.
Δ	Perturbación total absoluta del flujo externo.
N^-	$\{x \in N : d_x = -1\}$.
N^0	$\{x \in N : d_x = 0\}$.
N^+	$\{x \in N : d_x = 1\}$.
B	$\{(y, x) : (x, y) \in A\}$.
u	Función de capacidad en la red auxiliar.
η_x	Cota superior de δ_x .
Λ	Valor dado de la perturbación total.
g	Función de costo por incrementar a .
SF_x	Suma de los elementos en la fila x .
SC_x	Suma de los elementos en la columna x .

CAPITULO 1

INTRODUCCION

Muchos problemas prácticos pueden modelarse como un programa lineal y, consecuentemente, resolverse utilizando el método simplex. Sin embargo, tomando como ejemplo el ámbito industrial, los costos de la materia prima cambian continuamente, las demandas de producción no se conocen con certeza, los recursos utilizados en la producción pueden escasear, las especificaciones del producto pueden cambiar, etc. Estos cambios, involuntarios en su mayoría, alteran los valores iniciales del programa lineal generando la duda de si la solución óptima del problema original, sigue siendo una solución óptima del problema resultante. La inquietud por responder a esta interrogante dió forma a una nueva área de investigación, la cual se conoce como análisis postóptimo.

El *análisis postóptimo* tuvo sus inicios poco después de que Dantzing

publicara su método simplex y, como su nombre lo indica, es un estudio que se aplica, en general, al modelo de un programa matemático justo después que se obtiene su solución óptima. Tanto como ha sido posible, los fundamentos del análisis postóptimo se han extendido a la programación no lineal, programación entera, programación estocástica, programación multicriterio y redes.

El análisis postóptimo se relaciona con preguntas del tipo “¿Qué pasa si...?”, y tiene como objetivo determinar el comportamiento de la solución óptima cuando se consideran cambios en el valor de algunos parámetros del modelo inicial (en programación lineal también se considera la introducción de nuevas variables de decisión o restricciones, y en redes se considera la creación de nuevos arcos).

En la literatura existen muchas investigaciones en las cuales se aplica el análisis postóptimo para determinar el intervalo de los valores que se pueden asignar a un parámetro, de tal forma que se mantenga el mismo conjunto de variables básicas en la solución óptima. Sin embargo, existen muy pocas investigaciones desarrolladas donde se estudia el efecto de las variaciones en los parámetros con otros propósitos. A continuación se citan los propósitos de algunas investigaciones de este tipo existentes en la literatura.

- Estudiar el efecto de reducir (o aumentar) la capacidad de algún arco

con respecto al flujo máximo entre cualesquiera dos nodos de una red capacitada [Elmaghraby, 1964].

- Estudiar el efecto de remover n arcos de una red capacitada sobre el flujo máximo [Wolmer, 1964].
- En una red de flujo, con un solo nodo fuente y múltiples nodos sumidero en donde la demanda depende de un solo parámetro, determinar el valor mínimo del parámetro para el cual exista un flujo factible [Doulliez, 1971a, 1971b].
- En un problema de transbordo, en donde las ofertas y demandas dependen de un parámetro, determinar los valores mínimos y máximos del parámetro para el cual exista un flujo factible [Minieka, 1973].
- Estudiar el efecto de agregar nuevos arcos (o incrementar la capacidad de los arcos existentes) en una red capacitada sobre el flujo máximo [Jarvis, 1977].
- En un problema de transporte, estudiar el efecto sobre un parámetro cuando otro parámetro es variado [Akinc, 1982].
- En un problema de transporte, estudiar la manera de enviar más bienes a menor costo [Arsham, 1992; Szwarc, 1971].
- Estudiar el efecto de remover un arco sobre la ruta más corta entre dos nodos específicos [Lin, 1994].

- En un problema de flujo máximo, donde las capacidades de los arcos son funciones de un parámetro, determinar el mínimo valor del parámetro tal que el flujo máximo sobre la red sea igual a un valor dado [Chen, 1995; Sung, 1994].

Por otro lado, es un hecho conocido que en un sistema real de producción-consumo, las demandas de bienes y servicios varían constantemente, es decir, sus valores no se mantienen fijos. El avance tecnológico y la inflación económica son las causas principales de tales perturbaciones. Supóngase que, por ejemplo, debido a la adquisición de nueva tecnología para la manufactura de computadoras de cierta marca, el precio de venta de esas computadoras se reduce en un 50%. Así, en países con una economía estable podría incrementarse la demanda de esas computadoras, sin embargo, en países con una fuerte inflación económica la demanda de esas computadoras podría disminuir.

El administrador del sistema de producción-consumo conoce la capacidad de transporte y, generalmente, está informado “al día” tanto de la capacidad de producción como del comportamiento de la demanda. Entonces éste, al conocer los nuevos valores en las demandas, debe elaborar rápidamente un nuevo programa general de distribución y después girar instrucciones claras y precisas a los responsables de cada centro productivo

con respecto a la cantidad que deben producir y la forma en que deben distribuirla.

Nótese que en ese ambiente de oferta-demanda variable no es posible garantizar que en todo momento exista un programa factible de distribución, es decir, podría producirse más de lo que es posible distribuir y, en consecuencia, habría algunas zonas cuya demanda no sería satisfecha. En otras palabras, el administrador debería anticiparse a cualquier “sorpresa”.

Principalmente, el administrador desearía determinar, para cada lugar de producción y de consumo, un intervalo de valores que representen las cantidades producidas y las cantidades requeridas, respectivamente, para los cuales se garantice la existencia de un programa factible de distribución. Con ese conocimiento, él podría negociar contratos que comprometan a sus diferentes proveedores de bienes y servicios, elaborar programas de mantenimiento, proponer proyectos de expansión de la capacidad productiva y, preferentemente, evitar contratos con los clientes sobre cantidades de producción que no pudiera cumplir.

En particular, el problema de expansión de la capacidad productiva se ha tratado desde hace más de 30 años [Manne, 1961, 1967]. Algunas publicaciones recientes sobre este problema se encuentran en las siguientes referencias: Freidenfelds [1980], Malcolm [1994], Bassok [1997], Gen [1997], y Rajagopalan [1998]. Sin embargo ellos suponen que la capacidad

de transporte es ilimitada, enfocándose sólo a determinar cuándo y cuánto expandir la capacidad de producción de modo que se satisfaga la demanda pronosticada.

Nótese que en la mayoría de los sistemas reales de producción-consumo no es posible suponer una capacidad de transporte ilimitada. En general, los sistemas de transporte están compuestos de cables, tubos, canales, ríos, camiones, ferrocarriles, aviones, y/o buques. Se observa que la construcción y/o la adquisición de algunos de estos medios de transporte es muy tardada y/o muy costosa, como sucede en el caso de buques petroleros, aviones de carga y líneas de ferrocarril. Es por ello que, la expansión de la capacidad de transporte de los sistemas de producción-consumo queda fuera de consideración en cualquier proyecto.

Por lo anterior, se considera importante realizar una investigación en torno a la resolución del siguiente problema:

En un sistema de producción-consumo con las siguientes características:

1. Los lugares de producción, de paso y de consumo están bien determinados y suman un número finito.
2. Está bien determinada la existencia de las conexiones entre cada dos lugares cualesquiera del sistema, así como su dirección y capacidad de transporte.
3. Actualmente se produce la cantidad requerida y se cuenta con un programa

de distribución con el cual se satisface la demanda en cada lugar de consumo.

4. Se esperan perturbaciones en las cantidades producidas/demandadas en algunos lugares del sistema. Para esos lugares se conoce la dirección de perturbación, esto es, se sabe si la cantidad producida/demandada tiende a aumentar o disminuir.

Determinar todos los valores posibles, a lo largo de la dirección de perturbación, que pueden ser asignados a los parámetros que representan las cantidades producidas/demandadas en cada lugar del sistema, de tal manera que: (i) la cantidad total producida sea igual a la cantidad total requerida, y que (ii) exista un programa de distribución que satisfaga la demanda en cada nodo de consumo, manteniendo invariables las capacidades de las conexiones.

La presente Tesis tiene los siguientes objetivos:

1. Formular el modelo matemático que exprese el problema planteado en el párrafo anterior.
2. Diseñar un algoritmo de complejidad polinomial que resuelva ese modelo matemático.

Los resultados publicados en esta Tesis pueden ser utilizados para determinar la máxima expansión de la capacidad productiva y, en

consecuencia, la máxima demanda que puede ser satisfecha con el sistema actual de transporte.

Puesto que el problema que se aborda en esta tesis corresponde a un problema paramétrico de flujos en redes, y éste puede ser formulado como un programa lineal entero multiparamétrico, en el Capítulo 2 se presentan algunos conceptos de la teoría de redes, se formulan algunos problemas clásicos en esta área, se explican brevemente las características de un programa lineal y se presentan algunos estudios sobre el análisis paramétrico encontrados en la literatura. Posteriormente, en el Capítulo 3, se presenta el modelo matemático del problema investigado en esta Tesis y se plantean y demuestran dos teoremas que constituyen la base del algoritmo de complejidad polinomial que se propone para resolver el modelo matemático. La manera de aplicar este algoritmo se ejemplifica en el Capítulo 4. En el Capítulo 5 se formulan dos extensiones del problema abordado en esta Tesis. Finalmente, en el último capítulo del presente trabajo, se presentan las conclusiones además de algunas recomendaciones para futuras investigaciones.

CAPITULO 2

MARCO TEORICO

2.1 Introducción

Las redes aparecen de manera natural en los sistemas de producción-consumo de agua, energía, datos, bienes, personas, etc.; tales como los sistemas eléctricos (distribución de electricidad), hidráulicos (distribución de agua), neumáticos (distribución de aire), de comunicaciones (distribución de datos), de transformación (distribución de sustancias químicas), de manufactura (distribución de materia prima), etc.

En esos sistemas se administra la distribución del flujo (agua, energía, etc.) producido o generado en algunos lugares, hacia las zonas de consumo de flujo, pasando posiblemente, por algunos lugares donde ni se produce ni se consume, o por lugares donde se produce o se consume.

Típicamente, en los problemas de redes se desea determinar, por ejemplo, el flujo máximo desde un punto a otro [Ford, 1962]; la distribución de flujo a mínimo costo, [Ford, 1962]; la ruta más corta desde un punto a otro [Hu, 1970]; el árbol generador mínimo [Grötschel, 1988]; o la secuencia óptima de trabajos [Jensen, 1980]. La disponibilidad de obtener, bajo ciertas condiciones, soluciones óptimas de valor entero, ha hecho posible extender el análisis de redes a muchas áreas tales como: ubicación de instalaciones [Minieka, 1978]; planeación de proyectos [Minieka, 1978]; y administración de recursos [Jensen, 1980].

Sin embargo, en las aplicaciones del mundo real, los valores iniciales de un programa lineal o de un problema de flujos en redes no se mantienen fijos. Esto crea la necesidad de determinar los intervalos para los valores iniciales de los parámetros sobre los cuales se mantenga cierto objetivo.

En este capítulo se presenta una recolección de algunos conceptos y problemas centrales de la Teoría de Flujos en Redes, que son necesarios para uniformizar los conceptos y la nomenclatura a utilizar, así como para fundamentar el planteamiento y solución del problema que fue objeto de esta investigación. Dado que los problemas centrales de flujos en redes pueden escribirse como programas lineales, también se explicarán brevemente las características de estos programas. Para finalizar, se presentan algunos estudios existentes en la literatura sobre el análisis paramétrico.

2.2 Estructura de las Redes

Para mayores detalles sobre Teoría de Redes y sus aplicaciones pueden verse, por ejemplo, las siguientes referencias: Ahuja [1993], Ford [1962], Günther [1991], Jensen [1980], y Lawler [1976].

Una *red dirigida*, o *digrafo*, es una estructura compuesta por un conjunto N de elementos distintos indicados $1, 2, \dots, n$ llamados *nodos* y un conjunto A de pares ordenados de índices distintos tomados de N , $(x, y) \in A$, llamados *arcos dirigidos*. Se dice que el arco (x, y) tiene su *nodo inicial* en x y su *nodo terminal* en y . Se denotará una red dirigida por (N, A) .

Los nodos x, y son nodos *adyacentes* si $(x, y) \in A$ o $(y, x) \in A$. Nótese que A podría contener simultáneamente los arcos (x, y) y (y, x) , pero no puede contener los arcos de la forma (x, x) ya que los nodos deben ser distintos.

Una *red no dirigida* (N, E) consiste en un conjunto N de elementos indicados $1, 2, \dots, n$ llamados nodos y un conjunto E de pares no ordenados de esos índices de nodos, $(x, y) \in E$, llamados *arcos no dirigidos*. (En una red no dirigida, el arco (x, y) es el mismo que (y, x)).

Si $x \in N$, se representará por $A^+(x)$ al conjunto de todos los nodos terminales adyacentes al nodo x , esto es, $A^+(x) \triangleq$

$\{y \in N : (x, y) \in A\}$; similarmente, $A^-(x)$ es el conjunto de todos los nodos iniciales adyacentes al nodo x , esto es, $A^-(x) \triangleq \{y \in N : (y, x) \in A\}$.

Sea x_1, x_2, \dots, x_k ($k \geq 2$) una sucesión de nodos distintos de una red (N, A) tal que $(x_i, x_{i+1}) \in A$, para cada $i = 1, 2, \dots, k - 1$. Entonces la sucesión x_1, x_2, \dots, x_k es una *cadena* que va desde x_1 a x_k . Si $x_1 = x_k$ entonces la secuencia x_1, x_2, \dots, x_k es un *ciclo dirigido*.

Sea x_1, x_2, \dots, x_k ($k \geq 2$) una sucesión de nodos distintos de una red (N, A) tal que $(x_i, x_{i+1}) \in A$ o $(x_{i+1}, x_i) \in A$, para cada $i = 1, 2, \dots, k - 1$. Entonces la sucesión x_1, x_2, \dots, x_k es una *trayectoria* que va desde x_1 a x_k . Si $x_1 = x_k$ entonces la secuencia x_1, x_2, \dots, x_k es un *ciclo*.

2.2.1 Función de Flujo

Los problemas modelados como redes, en general, tienen como objetivo determinar los valores de la *función de flujo* $f : A \rightarrow \mathbb{Z}^+$ que satisfagan algunas condiciones y que optimice cierto criterio dado. El valor $f(x, y) = f_{xy}$ se conoce como el *flujo* sobre el arco (x, y) . El flujo f_{xy} modela la cantidad física que debe ser enviada desde el nodo x hacia el nodo y , a través del arco (x, y) , tal como productos, personas, datos, líquidos, gases, etc.

Se supondrá que, para todo $(x, y) \in A$, el flujo f_{xy} se *conserva* en los

arcos, es decir, la cantidad de flujo que sale del nodo x con destino al nodo y , es la misma que llega al nodo y .

Aunque existen aplicaciones que involucran flujos de varios tipos, se limitará al de una sola clase o también conocido como *flujo uniproducto*.

2.2.2 Función de Flujo Externo

En un modelo de red, el flujo entra y sale de ella desde y hacia el exterior de la misma. Como el flujo se conserva en los arcos, entonces éste debe entrar y salir de la red por medio de los nodos. La cantidad máxima de flujo que puede entrar o salir por cada uno de los nodos en la red está dada por la *función de flujo externo* $a : N \rightarrow \mathbb{Z}$. El valor $a(x) = a_x$ indica la cantidad máxima de flujo que puede entrar (salir) a (de) la red por el nodo x si $a_x > 0$ ($a_x < 0$).

Con respecto al flujo externo, es posible clasificar a los nodos en tres conjuntos disjuntos: S , de *nodos fuente* si $a_x > 0$; T , de *nodos sumidero* si $a_x < 0$; y O , de *nodos intermedios (de paso)* si $a_x = 0$.

El valor $|a_x|$ es la *oferta* o la *demanda* del nodo x , según $x \in S$ o $x \in T$, respectivamente.

Se denota por $(N, A; a)$ a la red con nodos en N , arcos en A y función de

flujo externo a . Se dice que la red $(N, A; a)$ está *balanceada* si la condición

$$\sum_{x \in N} a_x = 0 \quad (2.1)$$

se satisface.

2.2.3 Función de Capacidad

La *función de capacidad* $c : A \rightarrow \mathbb{Z}^+$ asocia valores a cada arco que limitan la cantidad de flujo que puede transitar sobre ellos. El valor $c(x, y) = c_{xy}$ es la *capacidad* del arco (x, y) , y representa la cantidad máxima de flujo que puede circular por el arco (x, y) . Se denota por $(N, A; a, c)$ la red $(N, A; a)$ con función de capacidad c .

2.2.4 Función de Flujo Factible

Dada la red $(N, A; a, c)$, se dice que es *factible* si existe una función $f : A \rightarrow \mathbb{Z}^+$ que satisfaga las siguientes condiciones:

$$\sum_{y \in A^+(x)} f_{xy} - \sum_{y \in A^-(x)} f_{yx} = a_x, \text{ para todo } x \in N \quad (2.2)$$

$$f_{xy} \leq c_{xy}, \text{ para todo } (x, y) \in A \quad (2.3)$$

Las ecuaciones (2.2) se conocen como las *ecuaciones de conservación de flujo*.

Cualquier función de flujo f que satisfaga las ecuaciones (2.2) y (2.3), si ésta existe, es una *función de flujo factible* asociada a la red $(N, A; a, c)$. Se denota por $(N, A; a, c, f)$ a la red factible $(N, A; a, c)$ con función de flujo factible f .

2.2.5 Representación Gráfica de las Redes

La red $(N, A; a, c, f)$ puede ser *modelada gráficamente*, para ello, cada nodo $x \in N$ se simboliza mediante un círculo, conteniendo el índice x ; cada arco $(x, y) \in A$ se representa mediante una flecha que va desde x a y ; el flujo externo a_x se coloca adyacente al nodo x y entre corchetes; la capacidad c_{xy} y el flujo f_{xy} se colocan adyacentes al arco (x, y) como una pareja ordenada entre paréntesis.

2.2.6 Matrices Asociadas a una Red

Sea $(N, A; a, c, f)$ una red factible y balanceada. Asociadas a esta red se pueden definir las siguientes dos matrices de dimensión $n \times n$: $F \triangleq [f_{xy}]$ y $C \triangleq [c_{xy}]$, cuyos valores en la fila x y columna y corresponden al flujo y capacidad, respectivamente, sobre el arco (x, y) , si $(x, y) \in A$, y cero de

otra manera. Se nombrarán a F y C , las matrices de *flujos* y *capacidades*, respectivamente. Se recuerda que $(x, x) \notin A$, de donde F y C tienen ceros en su diagonal principal.

Puesto que la red $(N, A; a, c, f)$ es factible, por suposición, entonces $0 \leq F \leq C$, donde la desigualdad se aplica a los elementos correspondientes de ambas matrices y 0 es la matriz de ceros. También, puede verificarse que en F , la suma de sus elementos sobre la fila y columna x corresponden a las sumas $\sum_{y \in A^+(x)} f_{xy}$ y $\sum_{y \in A^-(x)} f_{yx}$, respectivamente; y por lo tanto, la suma de sus elementos sobre la fila x menos la suma de sus elementos sobre la columna x , debe ser igual al flujo externo a_x .

2.3 Programas Lineales

La *Programación Lineal* atiende los problemas en donde se desea minimizar una función objetivo lineal en la presencia de restricciones lineales del tipo de desigualdad.

La forma estándar de un Programa Lineal es la siguiente.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & c^T x \\ \text{sujeto a} \quad & Ax \leq b \end{aligned}$$

en donde c es el vector de coeficientes de la función objetivo, A es la matriz de coeficientes de las restricciones, b es el lado derecho y x es el vector de las

variables de decisión.

Dantzing [1948] publicó el método simplex para resolver los problemas de programación lineal. Desde su descubrimiento, el campo de la programación lineal junto con sus extensiones (*programación matemática*) es, a la fecha, la herramienta más ampliamente utilizada en la industria para la programación y planeación de actividades.

Como se verá en la próxima sección, los problemas centrales de flujos en redes pueden formularse como un programa lineal.

En el libro *Linear Programming-1: Introduction*, por Dantzing [1997], se incluyen algunos relatos sobre los inicios de la Programación Lineal, su importancia histórica y comentarios acerca de sus extensiones matemáticas.

2.4 Algunos Problemas en Redes

Los siguientes problemas son clásicos en la teoría de redes.

2.4.1 El Problema de la Ruta más Corta

Sean (N, A) una red y $l : A \rightarrow \mathbb{Z}^+$ una función donde $l(x, y) = l_{xy}$ representa la *longitud del arco* $(x, y) \in A$. Sea \mathcal{T} cualquier trayectoria sobre la red. Se define la *longitud de \mathcal{T}* , la cual se representa por \mathcal{L} , como la suma de las longitudes de los arcos sobre la trayectoria, es decir, $\mathcal{L} \triangleq \sum_{(x,y) \in \mathcal{T}} l_{xy}$. El

problema de la ruta más corta consiste en encontrar la trayectoria de mínima longitud desde un nodo p , la fuente, a otro nodo q , el sumidero [Jensen, 1980].

Matemáticamente, el *problema de la ruta más corta desde p a q* puede formularse como el siguiente programa lineal binario [Bazaraa, 1990].

$$\text{Minimizar } \sum_{(x,y) \in A} l_{xy} f_{xy}$$

sujeto a

$$\sum_{y \in A^+(x)} f_{xy} - \sum_{y \in A^-(x)} f_{yx} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = p \\ 0 & \text{si } x \in N \setminus \{p, q\} \\ -1 & \text{si } x = q \end{cases}$$

$$f_{xy} \in \{0, 1\}, \quad \forall (x, y) \in A$$

2.4.2 El Problema de Transporte

Sean $(N, A; a, b)$ una red balanceada, con $N = S \cup T$, $A = \{(x, y) : x \in S, y \in T\}$, $a : N \rightarrow \mathbb{Z}$, y $b : A \rightarrow \mathbb{Z}^+$, donde $a_x > 0$ si $x \in S$, $a_x < 0$ si $x \in T$, y $b(x, y) = b_{xy}$ representa el costo por transportar una unidad de flujo utilizando el arco $(x, y) \in A$. El *problema de transporte* consiste en determinar la manera más económica de enviar todas las ofertas en los nodos de S satisfaciendo las demandas de los nodos en T [Gal, 1997]. Este problema fue planteado (en su versión clásica) a principios de 1941 [Hitchcock, 1941].

El problema de transporte puede formularse como el siguiente programa lineal.

$$\text{Minimizar } \sum_{(x,y) \in A} b_{xy} f_{xy}$$

sujeto a

$$\sum_{y \in A^+(x)} f_{xy} - \sum_{y \in A^-(x)} f_{yx} = a_x, \quad \forall x \in N$$

$$f_{xy} \geq 0, \quad \forall (x, y) \in A$$

2.4.3 El Problema de Transbordo

En el problema de Transporte se ha supuesto que cada nodo o es una fuente o es un sumidero. Supóngase que además existen nodos intermedios en los que no se dispone ni se requiere flujo, sino que en estos nodos sólo se transborda el flujo. El problema de encontrar el patrón de embarques con costo mínimo se llama el *Problema de Transbordo* [Bazaraa, 1990].

2.4.4 El Problema de Flujo Máximo

Sea $(N, A; c)$ una red capacitada. El *problema del flujo máximo* consiste en encontrar el flujo total máximo sobre la red $(N, A; c)$ desde un nodo s , la *fuelle*, a otro nodo t , el *sumidero* [Jensen, 1980].

Sean $s, t \in N$ dos nodos distinguidos y sea $a : N \rightarrow \{h, 0, -h\}$, donde

$h \in \mathbb{Z}^+$ es un parámetro, la función de flujo externo definida como

$$a(x) = \begin{cases} h & , \text{si } x = s \\ -h & , \text{si } x = t \\ 0 & , \text{si } x \in N \setminus \{s, t\} \end{cases}$$

Entonces, el problema de flujo máximo puede formularse como el siguiente programa lineal.

Maximizar h

sujeto a

$$\sum_{y \in A^+(x)} f_{xy} - \sum_{y \in A^-(x)} f_{yx} = \begin{cases} h & \text{si } x = s \\ 0 & \text{si } x \neq s, t \\ -h & \text{si } x = t \end{cases}$$

$$0 \leq f_{xy} \leq c_{xy}, \quad \forall (x, y) \in A$$

El valor óptimo de h , el cual se denotará por v , es el *flujo máximo* de la red y representa la máxima cantidad de flujo que puede enviarse desde el nodo s al nodo t sobre la red $(N, A; c)$.

Cualquier función de flujo factible asociada a v será nombrada, en lo adelante, como la *función de flujo máximo* y se representará por f_m .

Existen muchos algoritmos que resuelven el problema del flujo máximo, siendo el más conocido el de Ford y Fulkerson [1962]. En el libro *Algorithmic Aspects of Flows in Networks*, [Günther, 1991], se muestra una tabla con la historia de los algoritmos de flujo máximo con mejoras en la complejidad del peor caso (al menos para algunas clases de problemas).

El algoritmo más eficiente es el de Ahuja [1988] con una complejidad de $O(n \cdot m + n^2 \cdot (\log U)^{1/2})$, donde n y m representan la cardinalidad de N y A , respectivamente, y U representa una cota superior sobre la función c .

El problema de flujo máximo sobre la red capacitada $(N, A; c)$ con múltiples nodos fuente $S \subset N$ y múltiples nodos sumidero $T \subset N$, donde $S \cap T = \phi$, no representa un problema nuevo. El problema de flujo máximo con múltiples nodos fuente y sumidero es posible reducirlo a un problema de flujo máximo desde un solo nodo fuente s hacia un solo nodo sumidero t . La reducción del problema se logra de la siguiente manera: Se extiende la red $(N, A; c)$ a la red $(N^e, A^e; c^e)$ haciendo

$$N^e \triangleq N \cup \{s, t\}$$

$$A^e \triangleq A \cup (s, S) \cup (T, t)$$

$$c^e(x, y) = \begin{cases} c_{xy} & \text{si } (x, y) \in A \\ M & \text{si } (x, y) \in (s, S) \\ M & \text{si } (x, y) \in (T, t) \end{cases}$$

donde $(s, S) \triangleq \{(s, x) : x \in S\}$, $(T, t) \triangleq \{(x, t) : x \in T\}$ y M es un número muy grande.

2.5 Análisis Paramétrico

Desde el inicio de la programación lineal, a mediados de este siglo, el análisis paramétrico ha formado parte de su teoría, implementación y

aplicación. Tanto como ha sido posible, sus fundamentos se han extendido a la programación no lineal, programación entera, programación estocástica, programación multicriterio y redes, principalmente.

Sean N un conjunto de nodos y a una función de flujo externo sobre N . El *problema de diseño de red* [Ahuja, 1993; Minoux, 1989] consiste en determinar el conjunto de arcos A y una función c de capacidades, de modo que la red $(N, A; a, c)$ sea factible y optimice cierto criterio dado. Sin embargo, la explosión demográfica, el desarrollo de nueva tecnología y la incertidumbre económica, entre otros fenómenos, obligan los cambios en el flujo externo sobre las redes diseñadas. Estos cambios, unas veces involuntarios y otras estratégicos, pueden ser tan drásticos en tal forma que los nodos fuente lleguen a tener un flujo externo de cero (cierre total de empresas productoras).

Debido a la necesidad de elaborar planes de contingencia, o de inversión, con los cuales el administrador pueda hacerle frente a tales cambios, surge como una herramienta indispensable el Análisis Paramétrico. Con el Análisis Paramétrico, el administrador puede determinar los cambios máximos que, en el flujo externo, un subconjunto de nodos puede soportar de tal manera que la red diseñada se mantenga factible. Este es precisamente el enfoque utilizado en la investigación desarrollada para la elaboración de esta Tesis.

En esta sección se presenta un resumen de los trabajos de investigación

encontrados en la literatura sobre el análisis paramétrico.

2.5.1 En Programas Lineales

Como se mencionó en el capítulo introductorio, el análisis postóptimo tiene como objetivo determinar el comportamiento de la solución óptima cuando se consideran cambios en el valor de algunos parámetros del modelo inicial. El primer estudio de análisis postóptimo en programación lineal se llevó a cabo en el año de 1952 y se atribuye a Orchard-Hays. Orchard-Hays, en su tesis de maestría no publicada [Gal, 1997], trató con un programa lineal en donde los valores del lado derecho eran perturbados con el fin de determinar su efecto sobre la solución óptima. En el año siguiente, Manne [1953] escribió una nota técnica donde el término *programación paramétrica* aparecía por primera vez. Saaty [1955a, 1955b] y Gass [1954] publicaron los tres primeros artículos sobre programas lineales paramétricos con respecto a la función objetivo.

Shetty [1959] usó por primera vez el término análisis de sensibilidad en programación lineal. Sin embargo, análisis de sensibilidad es un término que también se usa en, por ejemplo, sistemas de diseño [Rohrer, 1965], redes estocásticas [Baker, 1970] y procesos semi-markovianos [Gaede, 1974].

En programación lineal existen varios tipos de análisis postóptimo. Los

más conocidos son: el análisis de sensibilidad, el análisis paramétrico y el análisis de tolerancia.

En el *análisis de sensibilidad* se estudian los cambios permisibles en cualquier parámetro particular mientras se mantiene el mismo conjunto de variables básicas en la solución óptima. Probablemente este sea el tipo más común de análisis postóptimo. Algunas referencias sobre este tema son las siguientes: Adler [1992]; Bazaraa [1990]; Camm [1991]; Cook [1986]; Dantzing [1955]; Dinkelbach [1969]; Evans [1982]; Flavell [1975]; Freud [1985]; Friez [1990], Gal [1986], [1997]; Greenberg [1994]; Hannan [1978]; Jarvis [1977]; Kornbluth [1974]; Labbe [1991]; Noltemeier [1970]; Radke [1975]; Schenkerman [1993]; Shetty [1959]; Wagner [1995]; Ward [1990]; Wendell [1982], [1984], [1985], [1992]; y Wolsey [1981].

En el *análisis paramétrico* se estudian los cambios simultáneos pero dependientes en los parámetros mientras se mantiene el mismo conjunto de variables básicas en la solución óptima. Este estudio es de particular interés siempre que exista dependencia entre los parámetros tal como la existente entre la demanda y la oferta. Algunas referencias sobre este tema son las siguientes: Bailey [1978]; Bazaraa [1990]; Dinkelbach [1969]; Gal [1979], [1980], [1997]; Gass [1955a], [1955b]; Geoffrion [1976]; Holm [1984]; Kausmann [1976]; Lorenzen [1974]; Magnanti [1988]; Manne [1953]; Mason [1980]; Murty [1980]; Nauss [1975]; y Saaty [1954].

En el *análisis de tolerancia* se estudian los cambios porcentuales simultáneos e independientes de los valores iniciales en ambas direcciones (aumento o reducción) para cada parámetro mientras se mantiene el mismo conjunto de variables básicas en la solución óptima. Algunas referencias son las siguientes: Hansen [1989]; Ravi [1985], [1988], [1989]; Wang [1993]; Wendell [1982], [1984], [1985], [1992]; y Wondolowski [1991].

En comparación con la programación entera, por ejemplo, la *programación paramétrica* no es un gran campo especializado de la *programación matemática* porque, en primer lugar, no existe una revista con exclusividad en este tópico. No obstante, la programación paramétrica ha sido foco de mucho interés, como lo indican los 7 libros publicados hasta 1980: Dinkelbach [1969]; Gal [1973], [1979]; Kausmann [1976]; Lorenzen [1974]; Noltemeier [1970]; y Tlegenov [1975]; más de 400 artículos en revistas y más de 30 tesis de maestría y doctorado, como lo cita Gal [1980].

En la Humboldt University en el este de Berlin existe un Departamento, el cual trata casi exclusivamente con la teoría y algoritmos de programación paramétrica. Alguna literatura relevante, indicativa de la producción de este Departamento, se encuentra en el libro escrito por Kausmann [1976].

2.5.2 En Problemas de Redes

El análisis paramétrico, aplicado en modelos de red, estudia el efecto de los cambios en los valores de las ofertas, demandas, capacidades, y/o costos. Principalmente se estudian los efectos sobre la factibilidad de la red [Minieka, 1973], el flujo de mínimo costo [Arsham, 1992], la ruta más corta [Lin, 1994], o el flujo máximo [Chen, 1995]. El análisis paramétrico se ha implementado en *redes de comunicación* [Doulliez, 1975; Yaged, 1973; Zadeh, 1974], *redes eléctricas* [Anderson, 1972; Dale, 1966; Malcolm, 1994; Noonan, 1977; Rogers, 1974; Sawey, 1977], *redes hidráulicas* [Butcher, 1969; Erlenkotter, 1989; Morin, 1971; O'Laoghaire, 1972, 1974], *redes de transporte* [Bergendahl, 1969; Hemaída, 1994], *redes de gas* [Jensen, 1981], *Escuelas* [Trifon, 1973], *recolección de desperdicios* [Schultz, 1969], y en *procesos industriales* [Akinc, 1982; Manne, 1967].

Los dos trabajos más antiguos sobre Análisis Postoptimal en redes, fueron escritos por Elmaghraby [1964] y Wolmer [1964]. Elmaghraby desarrolló un algoritmo para determinar el efecto que los cambios, en la capacidad de cualquier arco, ejercen sobre el flujo máximo. Wollmer propone un algoritmo para determinar cuáles n arcos, al ser removidos de la red provocan la menor reducción del flujo máximo.

Doulliez [1971a, 1971b] y Minieka [1973] consideran a la oferta y/o

demanda como una función del tiempo t . Ellos presentan algoritmos para determinar: (i) el *máximo valor* de t , representado por t^* , tal que todas las demandas son satisfechas; (ii) un conjunto de arcos, con un número de elementos especificado, que al removerse (o reduciendo sus capacidades por cantidades dadas) se obtiene la mayor reducción en t^* .

En particular, Minieka considera una red $(N, A; c)$. Define un flujo factible para el tiempo t como cualquier conjunto de números reales $f_{xy}, (x, y) \in A$, tal que

$$\begin{aligned} \sum_{y \in A^+(x)} f_{xy} - \sum_{y \in A^-(x)} f_{yx} &\leq a(x) + tb(x) & \forall x \in S \\ \sum_{y \in A^-(x)} f_{yx} - \sum_{y \in A^+(x)} f_{xy} &\geq a(x) + tb(x) & \forall x \in T \\ \sum_{y \in A^+(x)} f_{xy} - \sum_{y \in A^-(x)} f_{yx} &= 0 & \text{de otro modo} \\ 0 \leq f_{xy} \leq c_{xy} & & \forall (x, y) \in A \end{aligned}$$

donde todos los $a(x)$ y $b(x)$ son constantes reales. El problema resuelto por Minieka consiste en encontrar los valores máximo y mínimo de t para el cual exista un flujo factible. Sin embargo, se observa que Minieka no mantiene el balance en la red.

Un problema muy interesante sobre análisis paramétrico se debe a la llamada paradoja del transporte. Conocido el costo total óptimo de un problema de transporte, el sentido común indica que al incrementar el número total de unidades a transportar entonces aumentará el costo total óptimo del problema de transporte resultante. Szwarc [1971] y Arsham [1992]

estudiaron el efecto que tienen los incrementos, en una sola oferta y en una sola demanda, sobre la solución óptima de un problema de transporte. En particular, describen las condiciones necesarias y suficientes para que el costo total óptimo del problema de transporte que resulta de las perturbaciones, sea menor o igual al costo total óptimo del problema perturbado. Este fenómeno se conoce como la paradoja del transporte y su análisis se refiere como la situación Más por Menos.

El primer estudio a fondo de Análisis Paramétrico aplicado al problema de transporte lo aportó Srinvasan [1972a, 1972b, 1972c]. Srinvasan investigó el efecto sobre la solución óptima de un problema de transporte cuando las ofertas, demandas, costos y capacidades, varían como una función de un sólo parámetro. También estudió el efecto sobre el costo total, las ofertas, las demandas y el programa de embarques, cuando se incrementa el total de unidades a transportar.

Jarvis [1977] estudia el efecto de incrementar el número de arcos en una red sobre su flujo máximo.

Akinc [1982] estudia el efecto de incrementar la oferta en un nodo sobre el incremento potencial de las ofertas de los otros nodos.

Ravi [1989] desarrolla el enfoque de Tolerancia para perturbaciones en las ofertas, demandas y costos.

Arsham [1992] desarrolla un nuevo enfoque de Análisis Postoptimal

para el problema de transporte (cuyo procedimiento se basa en el algoritmo dado por él mismo [1989]) que cubre el Análisis Paramétrico, la regla del 100%, el Análisis de Tolerancia, el Análisis de Tolerancia Simétrica, y la identificación de la situación Más por Menos.

Lin [1994] estudia el efecto de eliminar un arco sobre la distancia total de la ruta más corta entre dos nodos determinados en la red.

Sung [1994] considera un problema de flujo máximo sobre una red, en donde algunas o todas las capacidades de los arcos son variables que deben ser determinadas de modo que se satisfagan requerimientos de flujo dados a un costo total mínimo.

Chen [1995] considera una red cuyas capacidades en algunos arcos son funciones de un solo parámetro. Presenta un algoritmo para encontrar el mínimo valor del parámetro, tal que, el flujo máximo sea igual a un valor previamente establecido.

2.6 Resumen

En este capítulo se ha uniformizado la nomenclatura y los conceptos sobre la teoría de flujos en redes. En la literatura revisada sólo existe un trabajo [Minieka, 1973] con las características y objetivos similares al presente, sin embargo, en el siguiente capítulo se observa que ese trabajo

constituye una versión relajada de éste.

CAPITULO 3

ANALISIS DEL PROBLEMA DE INVESTIGACION

3.1 Introducción

Las perturbaciones aplicadas al flujo externo en una red que modele un sistema de producción-consumo, pueden provocar que ésta pierda su balance y/o su factibilidad. La pérdida del balance debe ser eludida porque ello implica que se está produciendo más (o menos) flujo del requerido. La pérdida de la factibilidad también debe ser evitada, porque ello implicaría que el flujo producido no puede distribuirse completamente en los lugares requeridos. Indudablemente, el administrador desea conocer la máxima magnitud total de las perturbaciones que no afecte a la red, más aún, desaría conocer la magnitud máxima de la perturbación sobre cada uno de los nodos que mantenga a la red balanceada y factible. Esa es la aportación obtenida en esta investigación.

En este capítulo se formula matemáticamente el problema abordado en esta Tesis. Enseguida, se define lo que se conocerá como una red auxiliar, se establece y demuestra el teorema principal de este trabajo y se propone un algoritmo de complejidad polinomial con el cual se resuelve el modelo matemático. Para finalizar, se demuestra la independencia que existe entre el flujo factible inicial y la solución óptima del problema.

3.2 Formulación Matemática del Problema

Sea $(N, A; a, c, d, f)$ una red dirigida, capacitada, balanceada y factible, con nodos en N , arcos en A , función de flujo externo a , función de capacidad c , función de dirección de perturbación $d : N \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ y función de flujo factible f . Los valores de la función d son definidos por el administrador, el cual conoce (o impone) la tendencia de cambio del flujo externo para cada nodo de la red.

Se asocia con cada nodo $x \in N$ un parámetro $\delta_x \in \mathbb{Z}^+$ con valor desconocido. El valor que tome δ_x representará la magnitud de perturbación sobre el flujo externo a_x en la dirección d_x , es decir, el flujo externo a_x se reduce, aumenta o no cambia, en la magnitud δ_x , si $d_x = -1$, $d_x = 1$ o $d_x = 0$, respectivamente.

Se denota como $(N, A; a', c, d)$ a la red que resulta después de fijar

valores a los parámetros δ_x donde $a'_x = a_x + d_x\delta_x, \forall x \in N$. Se observa que la función f no será un flujo factible de $(N, A; a', c, d)$ si existe al menos un $x \in N$ en donde $a_x \neq a'_x$. Más aún, la red $(N, A; a', c, d)$ podría no estar balanceada y/o no ser factible.

El problema abordado en esta investigación consiste en determinar el máximo valor para cada una de las perturbaciones δ_x , en la dirección d_x , de tal manera que la red $(N, A; a', c, d)$ sea balanceada y factible.

Este problema puede formularse como un programa lineal entero multiparamétrico. Con ese propósito, primero se observa lo siguiente:

1. Puesto que la red $(N, A; a', c, d)$ debe estar balanceada, entonces al perturbar el flujo externo en un nodo también se debe perturbar el flujo externo en al menos otro nodo. Esta relación de dependencia entre las perturbaciones, sugiere que debe determinarse la máxima perturbación en cada nodo considerando los máximos valores de las perturbaciones en los otros nodos. En otras palabras, se debe maximizar la suma total de las perturbaciones δ_x en la dirección d_x , es decir, $\max \sum_{x \in N} |d_x\delta_x|$.
2. La red $(N, A; a', c, d)$ está balanceada si

$$\sum_{x \in N} (a_x + d_x\delta_x) = 0$$

esto es, si

$$\sum_{x \in N} a_x + \sum_{x \in N} d_x \delta_x = 0$$

Pero como $\sum_{x \in N} a_x = 0$, lo anterior se cumple si:

$$\sum_{x \in N} d_x \delta_x = 0 \quad (3.4)$$

3. La red $(N, A; a', c, d)$ es factible si existe una función de flujo f' tal que

$$\sum_{y \in A^+(x)} f'_{xy} - \sum_{y \in A^-(x)} f'_{yx} = a_x + d_x \delta_x \quad \forall x \in N$$

$$f'_{xy} \leq c_{xy} \quad \forall (x, y) \in A$$

$f'_{xy}, \delta_x \in \mathbb{Z}^+, \forall (x, y) \in A$ y $\forall x \in N$, respectivamente.

Con la intención de simplificar la expresión $\sum_{x \in N} |d_x \delta_x|$, se definen los siguientes conjuntos de nodos:

$$N^- \triangleq \{x \in N : d_x = -1\}$$

$$N^0 \triangleq \{x \in N : d_x = 0\}$$

$$N^+ \triangleq \{x \in N : d_x = 1\}$$

Se observa que

$$N = N^- \cup N^+ \cup N^0$$

por lo que la ecuación de balance (3.4) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\sum_{x \in N^-} (-1) \delta_x + \sum_{x \in N^+} (1) \delta_x + \sum_{x \in N^0} (0) \delta_x = 0$$

obteniéndose la siguiente ecuación:

$$\sum_{x \in N} \delta_x = \sum_{x \in N^+} \delta_x \quad (3.5)$$

por lo que

$$\begin{aligned} & \sum_{x \in N} |d_x \delta_x| \\ = & \sum_{x \in N^-} |(-1) \delta_x| + \sum_{x \in N^+} |(1) \delta_x| + \sum_{x \in N^0} |(0) \delta_x| \\ = & \sum_{x \in N^-} \delta_x + \sum_{x \in N^+} \delta_x \\ = & 2 \sum_{x \in N^-} \delta_x, \quad \text{por (3.5)} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el problema enunciado anteriormente puede formularse como el siguiente *Programa Lineal Entero Multiparamétrico (PLEM)*.

$$\text{Maximizar } \Delta = 2 \sum_{x \in N^-} \delta_x \quad (3.6)$$

Sujeto a

$$\sum_{x \in N^-} \delta_x - \sum_{x \in N^+} \delta_x = 0 \quad (3.7)$$

$$\sum_{y \in A^+(x)} f'_{xy} - \sum_{y \in A^-(x)} f'_{yx} = a_x, \forall x \in N^0 \quad (3.8)$$

$$\sum_{y \in A^+(x)} f'_{xy} - \sum_{y \in A^-(x)} f'_{yx} = a_x + \delta_x, \forall x \in N^+ \quad (3.9)$$

$$\sum_{y \in A^+(x)} f'_{xy} - \sum_{y \in A^-(x)} f'_{yx} = a_x - \delta_x, \forall x \in N^- \quad (3.10)$$

$$f'_{xy} \leq c_{xy}, \forall (x, y) \in A \quad (3.11)$$

$$\delta_x \in \mathbb{Z}^+, \forall x \in N \quad (3.12)$$

$$f'_{xy} \in \mathbb{Z}^+, \forall (x, y) \in A \quad (3.13)$$

En este modelo matemático, los a_x y c_{xy} son valores constantes, mientras que, los δ_x y f'_{xy} denotan las variables de decisión. Nótese que la restricción (3.7) asegura que los valores máximos de δ_x conservan balanceada a la red resultante, mientras que las restricciones (3.8)-(3.10) aseguran que los

valores f'_{xy} constituyen un flujo factible.

Si en la solución óptima del programa *PLEM* las variables de decisión toman los valores δ_x^* , f'_{xy} , entonces la red original conserva su balance y su factibilidad siempre que el flujo externo en el nodo x , $\forall x \in N^- \cup N^+$, sea perturbado en $\bar{\delta}_x \in \mathbb{Z}^+$, donde $0 \leq \bar{\delta}_x \leq \delta_x^*$ y $\sum_{x \in N^-} \bar{\delta}_x - \sum_{x \in N^+} \bar{\delta}_x = 0$.

Debe aclararse que no se conoce la función de flujo factible para la red balanceada que resulta de perturbaciones menores a los δ_x^* ; sin embargo, el problema de obtener una función de flujo factible, cuando ésta existe, es muy fácil de resolver [Bazaraa, 1990].

Se observa que el problema resuelto por Minieka, página 27, es una versión particular relajada del problema tratado en esta Tesis. Se nota que Minieka consideró $d(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \in O \\ b_x & \forall x \in N \setminus O \end{cases}$, con $b_x \in \mathbb{R}$, y asignó el mismo parámetro $\delta_x = t$ en todos los nodos.

Nótese la condición de enteros para las variables de decisión en el programa *PLEM*. Para utilizar el método simplex, o el método elipsoidal [Grötschel, 1988], en la resolución del programa *PLEM*, habría que garantizar que puede omitirse esa restricción. Es posible omitir la restricción de enteros en algunos modelos, de hecho, Grötschel [1988] plantea algunos problemas que pueden formularse como un programa lineal entero, sobre el cual es posible omitir dicha condición sin que se afecte su solución óptima.

Se sabe que el método simplex es un algoritmo no polinomial [Klee,

1972], mientras que el método elipsoidal, aunque polinomial, es de orden $O(ro^3L)$ [Grötschel, 1988] donde r y o son la cantidad de filas y columnas en la matriz de restricciones expresadas como desigualdades, respectivamente, y L representa la longitud de codificación binaria del sistema de desigualdades.

En la sección 3.4 se propone un algoritmo polinomial de orden $O(n \cdot m + n^2 \cdot \sqrt{\log U})$ para resolver el *PLEM*.

3.3 Solución del problema *PLEM*

Sea $(N, A; a, c, d, f)$ una red dada. Se desea determinar la máxima perturbación total absoluta del flujo externo a en la dirección d que mantenga a la red resultante balanceada y factible, es decir, se desea resolver el *PLEM*.

La forma en que se aborda este problema es la siguiente:

A partir de la red dada, se construye cierta red auxiliar con determinadas características, sobre la cual se resuelve un problema de flujo máximo formulado convenientemente.

Para ello, se requiere conocer primeramente las características de diseño de la llamada red auxiliar.

DEFINICIÓN 1

La Red Auxiliar asociada a la red $(N, A; a, c, d, f)$, será la red capacitada $(N, A \cup B; u)$ con nodos en N , arcos en $A \cup B$ y función de capacidad u definida sobre $A \cup B$; donde

$$B \triangleq \{(y, x) : (x, y) \in A\}$$

y

$$u_{xy} = \begin{cases} f_{xy} & \forall (x, y) \in A \\ c_{yx} - f_{yx} & \forall (x, y) \in B \end{cases}$$

Puesto que $f_{xy} \leq c_{xy}$, $\forall (x, y) \in A$, entonces la Red Auxiliar tiene capacidades con valores $u_{xy} \in \mathbb{Z}^+$, $\forall (x, y) \in A \cup B$.

La solución óptima del PLEM (3.6)-(3.13) se encuentra resolviendo un problema de flujo máximo sobre la red auxiliar desde los nodos en el conjunto N^- hacia los nodos en el conjunto N^+ , lo cual se demuestra en el siguiente teorema.

TEOREMA 1

Sean $(N, A; a, c, d, f)$ una red balanceada y v el valor del flujo máximo desde los nodos en N^- a los nodos en N^+ sobre la red auxiliar $(N, A \cup B; u)$ con función de flujo máximo fm definida sobre los arcos de $A \cup B$. Entonces la solución óptima del PLEM (3.6)-(3.13) es $\Delta^* = 2v$, y se obtiene haciendo

$$\delta_x = \begin{cases} \sum_{y \in (A \cup B)^+(x)} fm_{xy} - \sum_{y \in (A \cup B)^-(x)} fm_{yx} & , \forall x \in N^- \\ - \left(\sum_{y \in (A \cup B)^+(x)} fm_{xy} - \sum_{y \in (A \cup B)^-(x)} fm_{yx} \right) & , \forall x \in N^+ \\ 0 & , \forall x \in N^0 \end{cases}$$

$$f'_{xy} = f_{xy} - fm_{xy} + fm_{yx}, \quad \forall (x, y) \in A$$

Demostración.

Para demostrar este teorema se debe probar lo siguiente:

- (a) Que los valores δ_x y f'_{xy} , calculados como se indica en el teorema, constituyen una solución factible del programa *PLEM*.
- (b) Que el valor $2v$ es la solución óptima del programa *PLEM*.

a) Se prueba que los valores de δ_x y f'_{xy} satisfacen cada una de las restricciones (3.7)-(3.13).

- En este punto se prueba que se satisface la restricción (3.7).

Se observa que

$$\sum_{x \in N^-} \delta_x = \sum_{x \in N} \left(\sum_{y \in (A \cup B)^+(x)} f m_{xy} - \sum_{y \in (A \cup B)^-(x)} f m_{yx} \right)$$

representa el flujo neto que sale desde el conjunto de nodos N^- sobre la red auxiliar $(N, A \cup B; u)$, por lo que su valor debe ser igual a v . Similarmente, se observa que

$$\sum_{x \in N^+} \delta_x = \sum_{x \in N^+} \left(\sum_{y \in (A \cup B)^-(x)} f m_{yx} - \sum_{y \in (A \cup B)^+(x)} f m_{xy} \right)$$

representa el flujo neto que llega a los nodos en N^+ sobre la red auxiliar $(N, A \cup B; u)$, debiendo ser este valor también igual a v .

Entonces $\sum_{x \in N^-} \delta_x = \sum_{x \in N^+} \delta_x$, satisfaciéndose la restricción (3.7).

- En este punto se obtiene una ecuación muy importante.

Para todo $x \in N$ se tiene que

$$\begin{aligned}
& \sum_{y \in A^+(x)} f'_{xy} - \sum_{y \in A^-(x)} f'_{yx} \\
&= \sum_{y \in A^+(x)} (f_{xy} - fm_{xy} + fm_{yx}) - \sum_{y \in A^-(x)} (f_{yx} - fm_{yx} + fm_{xy}) \\
&= \sum_{y \in A^+(x)} f_{xy} - \sum_{y \in A^+(x)} fm_{xy} + \sum_{y \in B^-(x)} fm_{yx} - \sum_{y \in A^-(x)} f_{yx} \\
&+ \sum_{y \in A^-(x)} fm_{yx} - \sum_{y \in B^+(x)} fm_{xy} \\
&= \left(\sum_{y \in A^+(x)} f_{xy} - \sum_{y \in A^-(x)} f_{yx} \right) + \sum_{y \in A^-(x)} fm_{yx} + \sum_{y \in B^-(x)} fm_{yx} \\
&- \sum_{y \in A^+(x)} fm_{xy} - \sum_{y \in B^+(x)} fm_{xy}
\end{aligned}$$

De la ecuación (2.2), se tiene que

$$\sum_{y \in A^+(x)} f_{xy} - \sum_{y \in A^-(x)} f_{yx} = a_x$$

además, se observa que

$$\begin{aligned}
& \sum_{y \in (A \cup B)^-(x)} fm_{yx} - \sum_{y \in (A \cup B)^+(x)} fm_{xy} \\
&= \sum_{y \in A^-(x)} fm_{yx} + \sum_{y \in B^-(x)} fm_{yx} - \sum_{y \in A^+(x)} fm_{xy} - \sum_{y \in B^+(x)} fm_{xy}
\end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{aligned} & \sum_{y \in A^+(x)} f'_{xy} - \sum_{y \in A^-(x)} f'_{yx} \\ &= a_x - \left(\sum_{y \in (A \cup B)^+(x)} fm_{xy} - \sum_{y \in (A \cup B)^-(x)} fm_{yx} \right) \end{aligned}$$

- En este punto se probará que se satisfacen las restricciones (3.8).

Sea $x \in N^0$ un nodo arbitrario. Nótese que, con respecto a la red auxiliar $(N, A \cup B; u)$ el nodo x es un nodo intermedio sobre esa red, por lo que su flujo neto debe ser cero, es decir

$$\sum_{y \in (A \cup B)^+(x)} fm_{xy} - \sum_{y \in (A \cup B)^-(x)} fm_{yx} = 0$$

Entonces,

$$\sum_{y \in A^+(x)} f'_{xy} - \sum_{y \in A^-(x)} f'_{yx} = a_x$$

satisfaciéndose las restricciones (3.8).

- En este punto se prueba que se satisfacen las restricciones (3.9).

Para cada $x \in N^+$ se tiene que

$$\delta_x = - \left(\sum_{y \in (A \cup B)^+(x)} fm_{xy} - \sum_{y \in (A \cup B)^-(x)} fm_{yx} \right)$$

de donde

$$\sum_{y \in A^+(x)} f'_{xy} - \sum_{y \in A^-(x)} f'_{yx} = a_x + \delta_x, \quad \forall x \in N^+$$

satisfaciéndose las restricciones (3.9).

- En este punto se prueba que se satisfacen las restricciones (3.10).

Para cada $x \in N^-$ se tiene que

$$\delta_x = \sum_{y \in (A \cup B)^+(x)} fm_{xy} - \sum_{y \in (A \cup B)^-(x)} fm_{yx}$$

de donde,

$$\sum_{y \in A^+(x)} f'_{xy} - \sum_{y \in A^-(x)} f'_{yx} = a_x - \delta_x, \quad \forall x \in N^-$$

satisfaciéndose las restricciones (3.10).

- En este punto se prueba que se satisfacen las restricciones (3.11).

Para cada $(x, y) \in A$ se tiene que

$$f'_{xy} = f_{xy} - fm_{xy} + fm_{yx}$$

Como $(y, x) \in B$ entonces $fm_{yx} \leq u_{yx} = c_{xy} - f_{xy}$. De donde

$$f'_{xy} \leq f_{xy} - fm_{xy} + c_{xy} - f_{xy} = c_{xy} - fm_{xy}$$

es decir

$$f'_{xy} \leq c_{xy}$$

satisfaciéndose las restricciones (3.11).

- En este punto se prueba que se satisfacen las restricciones (3.12).

Como $a_x \in \mathbb{Z}^+$, $\forall x \in N$, y puesto que $u_{xy} \in \mathbb{Z}^+$, $\forall (x, y) \in A \cup B$, entonces la función de flujo máximo fm tiene valores $fm_{xy} \in \mathbb{Z}^+$, $\forall (x, y) \in A \cup B$ [Ford, 1962; Grötschel, 1988].

Se nota que los valores δ_x , $\forall x \in (N^- \cup N^+)$, son la diferencia de números enteros no negativos, y que $\delta_x = 0$, $\forall x \in N^0$. Por lo que, δ_x es un número entero, $\forall x \in N$.

Se observa que, sobre la red auxiliar $(N, A \cup B; u)$, cada nodo $x \in N^-$ es un nodo fuente de la red, por lo que su flujo neto debe ser no negativo (ver la sección 2.4.4, página 19). Es decir,

$$\sum_{y \in (A \cup B)^+(x)} fm_{xy} - \sum_{y \in (A \cup B)^-(x)} fm_{yx} \geq 0$$

Como

$$\delta_x = \sum_{y \in (A \cup B)^+(x)} fm_{xy} - \sum_{y \in (A \cup B)^-(x)} fm_{yx}$$

entonces $\delta_x \geq 0$, $\forall x \in N^-$.

Similarmente, cada nodo $x \in N^+$ es un nodo sumidero, por lo que su flujo neto debe ser no positivo. Es decir

$$\sum_{y \in (A \cup B)^+(x)} fm_{xy} - \sum_{y \in (A \cup B)^-(x)} fm_{yx} \leq 0$$

Como

$$\delta_x = - \left(\sum_{y \in (A \cup B)^+(x)} fm_{xy} - \sum_{y \in (A \cup B)^-(x)} fm_{yx} \right)$$

entonces $\delta_x \geq 0$, $\forall x \in N^+$.

Puesto que $\delta_x = 0$, $\forall x \in N^0$, entonces $\delta_x \geq 0$, $\forall x \in N$, satisfaciéndose las restricciones (3.12).

- En este punto se prueba que se satisfacen las restricciones (3.13).

Para cada $(x, y) \in A$ se tiene que

$$f'_{xy} = f_{xy} - fm_{xy} + fm_{yx}$$

es decir

$$f'_{xy} \geq f_{xy} - fm_{xy}$$

Como $fm_{xy} \leq u_{xy} = f_{xy}$ entonces $f_{xy} - fm_{xy} \geq 0$. De donde,

$$f'_{xy} \geq 0$$

Se observa que $f'_{xy} = (f_{xy} + fm_{yx}) - fm_{xy}$ es la diferencia de números enteros no negativos, entonces f'_{xy} es un número entero, $\forall (x, y) \in A$, satisfaciéndose las restricciones (3.13).

b) Ya se sabe que los $\delta_x, \forall x \in N$, y los $f'_{xy}, \forall (x, y) \in A$, son una solución factible del programa *PLEM* (3.6)-(3.13).

Sea $(N, A; a', c, d, f')$ la red que resulta desde $(N, A; a, c, d, f)$ cuando el flujo externo a_x es perturbado en δ_x a lo largo de la dirección $d_x, \forall x \in N$, donde δ_x y f'_{xy} se obtienen como se indica en este teorema.

Por contradicción, se supondrá que $2v$ no es la solución óptima del programa *PLEM* (3.6)-(3.13). Entonces existen funciones a'' y f'' tal que $(N, A; a'', c, d, f'')$ es una red balanceada y factible, donde

$$\sum_{x \in N} a''_x < \sum_{x \in N^-} a'_x \quad (3.14)$$

La desigualdad anterior indica que debe existir al menos un nodo $p \in N^-$ tal que $a''_p < a'_p$. Más aún, de acuerdo a la ecuación de balance del flujo externo (3.7), también debe existir al menos un nodo $q \in N^+$, tal que $a''_q > a'_q$.

Como

$$a''_p = \sum_{y \in A^+(p)} f''_{py} - \sum_{y \in A^-(p)} f''_{yp}$$

y

$$a'_p = \sum_{y \in A^+(p)} f'_{py} - \sum_{y \in A^-(p)} f'_{yp}$$

entonces

$$\sum_{y \in A^+(p)} f''_{py} - \sum_{y \in A^-(p)} f''_{yp} < \sum_{y \in A^+(p)} f'_{py} - \sum_{y \in A^-(p)} f'_{yp} \quad (3.15)$$

de donde, ya sea que exista al menos un arco $(p, y_1) \in A$, tal que $f''_{py_1} < f'_{py_1}$, o en su defecto, debe existir al menos un arco $(y_1, p) \in A$, tal que $f''_{y_1p} > f'_{y_1p}$.

Primeramente, se observa que existen 3 posibilidades para el nodo y_1 :

- (i) $y_1 \in N^+$
- (ii) $y_1 \in N^0$
- (iii) $y_1 \in N^-$

Se analizan cada una de ellas:

(i) Sea $y_1 \in N^+$. Puesto que $(p, y_1) \in A$ o $(y_1, p) \in A$, entonces la sucesión de nodos p, y_1 es una trayectoria desde N^- a N^+ sobre la red (N, A) . Además, como el arco $(p, y_1) \in A \cup B$, entonces la sucesión p, y_1 es una cadena desde N^- a N^+ sobre la red auxiliar $(N, A \cup B; u)$ asociada a la red $(N, A; a, c, d, f)$.

Como f_m es la función de flujo máximo sobre la red auxiliar $(N, A \cup B; u)$ desde los nodos en N^- a los nodos en N^+ , entonces $f_{m_{py_1}} = u_{py_1}$ y $f_{m_{y_1p}} = 0$. En este momento, es necesario observar que, en general, cualquier arco $(x, y) \in A \cup B$ puede pertenecer a una o varias cadenas

que vayan desde algún nodo en N^- a algún nodo en N^+ sobre la red $(N, A \cup B; u)$. Sin embargo, cualquier algoritmo que pueda ser utilizado para obtener la función fm (como, por ejemplo, el algoritmo de etiquetado [Ford, 1962]) garantiza que los valores fm_{xy} y fm_{yx} no sean simultáneamente diferentes de cero. Esto es, si $fm_{xy} > 0$ entonces $fm_{yx} = 0$, y viceversa.

Si $(p, y_1) \in A$, entonces $f''_{py_1} < f'_{py_1}$ y $u_{py_1} = f_{py_1}$. Se observa que, en este caso, $f'_{py_1} = f_{py_1} - fm_{py_1} + fm_{y_1p} = f_{py_1} - f_{py_1} + 0 = 0$. Esto último implica que

$$f''_{py_1} < 0$$

lo cual indica que f'' en realidad no es una función de flujo factible. Por lo tanto la suposición es falsa, y $2v$ es la solución óptima del programa *PLEM*.

Similarmente, si $(y_1, p) \in A$, entonces $f''_{y_1p} > f'_{y_1p}$ y $u_{py_1} = c_{y_1p} - f_{y_1p}$. Se observa que, en este caso, $f'_{y_1p} = f_{y_1p} - fm_{y_1p} + fm_{py_1} = f_{y_1p} - 0 + (c_{y_1p} - f_{y_1p}) = c_{y_1p}$. Esto último implica que

$$f''_{y_1p} > c_{y_1p}$$

lo cual indica que f'' en realidad no es una función de flujo factible. Por lo tanto la suposición es falsa, y $2v$ es la solución óptima del programa *PLEM*.

(ii) Sea $y_1 \in N^0$. En este caso $a''_{y_1} = a'_{y_1}$.

Si el arco $(p, y_1) \in A$ entonces $f''_{py_1} < f'_{py_1}$. Como $a''_{y_1} = a'_{y_1}$, entonces

debe existir al menos un arco $(y_1, y_2) \in A$ tal que $f''_{y_1 y_2} < f'_{y_1 y_2}$.

Si el arco $(y_1, p) \in A$ entonces $f''_{y_1 p} > f'_{y_1 p}$. Como $a''_{y_1} = a'_{y_1}$, entonces debe existir al menos un arco $(y_2, y_1) \in A$ tal que $f''_{y_2 y_1} > f'_{y_2 y_1}$.

Por lo tanto, si $y_1 \in N^0$, se forma la trayectoria p, y_1, y_2 y se analiza el nodo y_2 .

(iii) Sea $y_1 \in N^-$. En este caso se deben analizar las siguientes 3 posibilidades:

$$\begin{aligned} (a) \quad & a''_{y_1} < a'_{y_1} \\ (b) \quad & a''_{y_1} = a'_{y_1} \\ (c) \quad & a''_{y_1} > a'_{y_1} \end{aligned}$$

(a) Sea $a''_{y_1} < a'_{y_1}$.

Se sabe que si $(p, y_1) \in A$, entonces $f''_{p y_1} < f'_{p y_1}$, y si $(y_1, p) \in A$, entonces $f''_{y_1 p} > f'_{y_1 p}$. Se observa que debe existir al menos un arco $(y_1, y_2) \in A$ tal que $f''_{y_1 y_2} < f'_{y_1 y_2}$, o al menos un arco $(y_2, y_1) \in A$ tal que $f''_{y_2 y_1} > f'_{y_2 y_1}$; porque de otro modo

$$\sum_{x \in A^+(y_1)} f''_{y_1 x} - \sum_{x \in A^-(y_1)} f''_{x y_1} > \sum_{x \in A^+(y_1)} f'_{y_1 x} - \sum_{x \in A^-(y_1)} f'_{x y_1}$$

y con ello, $a''_{y_1} > a'_{y_1}$.

Por lo tanto, en este caso, se forma la trayectoria p, y_1, y_2 y se analiza el nodo y_2 .

(b) Sea $a''_{y_1} = a'_{y_1}$.

Si $(p, y_1) \in A$ entonces $f''_{py_1} < f'_{py_1}$. De donde, debe existir al menos un arco $(y_1, y_2) \in A$ tal que $f''_{y_1y_2} < f'_{y_1y_2}$, porque de otro modo, $a''_{y_1} \neq a'_{y_1}$.

Si $(y_1, p) \in A$, entonces $f''_{y_1p} > f'_{y_1p}$. De donde, debe existir al menos un arco $(y_2, y_1) \in A$ tal que $f''_{y_2y_1} > f'_{y_2y_1}$, porque de otro modo, $a''_{y_1} \neq a'_{y_1}$.

Por lo tanto, en este caso, se forma la trayectoria p, y_1, y_2 y se analiza el nodo y_2 .

(c) Sea $a''_{y_1} > a'_{y_1}$.

Si $(p, y_1) \in A$, se busca un arco $(y_1, y_2) \in A$ tal que $f''_{y_1y_2} < f'_{y_1y_2}$. En tal caso, se forma la trayectoria p, y_1, y_2 y se analiza el nodo y_2 .

Si $(y_1, p) \in A$, se busca un arco $(y_2, y_1) \in A$ tal que $f''_{y_2y_1} > f'_{y_2y_1}$. En tal caso, se forma la trayectoria p, y_1, y_2 y se analiza el nodo y_2 .

Se debe aclarar que tales arcos podrían no existir. En tal caso abandonamos el nodo y_1 y buscamos en N^- otro nodo con las mismas características de y_1 de tal forma que los nodos y_1 y y_2 sean seleccionados como parte de la trayectoria. La existencia de dicho nodo en N^- se garantiza

porque $\sum_{x \in N} a''_x < \sum_{x \in N^-} a'_x$; $p, y_1 \in N^-$; $a''_p < a'_p$ y $a''_{y_1} > a'_{y_1}$.

Se supone que se ha formado la trayectoria p, y_1, y_2 con $y_1 \in N^0$ o $y_1 \in N^-$. Enseguida, se posiciona sobre el nodo y_1 y se aplica el mismo procedimiento que con el nodo p , con el fin de seleccionar un tercer nodo y_3 . Continuando de esta manera se forma la trayectoria $y_0, y_1, y_2, \dots, y_k$ donde $y_k \in N^+$, $p = y_0$, $y_i \neq y_j$, $i \neq j = 0, 1, 2, \dots, k$.

Durante el procedimiento de construcción de la trayectoria, cuando a partir del nodo y_i seleccionado no sea posible seleccionar el nodo y_{i+1} , se debe eliminar de la selección al nodo y_i (sin descartar la posibilidad de que este nodo pueda ser nuevamente seleccionado, pero en otra posición), inclusive se podría eliminar de la selección a todos los nodos $y_i, j, j = 0, 1, \dots, i - 1$; si eso fuera necesario.

La garantía de que se llegue a seleccionar un nodo $y_k \in N^+$, se basa en el hecho de que existe al menos un nodo $q \in N^+$ tal que $a''_q > a'_q$.

Se observa que la sucesión de nodos $y_0, y_1, y_2, \dots, y_k$; donde $p = y_0$, forman una trayectoria desde N^- a N^+ sobre la red (N, A) , en donde $f''_{y_i y_{i+1}} < f'_{y_i y_{i+1}}$ o $f''_{y_{i+1} y_i} > f'_{y_{i+1} y_i}$ si $(y_i, y_{i+1}) \in A$ o $(y_{i+1}, y_i) \in A$, respectivamente, para todo $i = 0, 1, 2, \dots, k - 1$. Por otro lado, con respecto a la red auxiliar $(N, A \cup B; u)$, los arcos $(y_i, y_{i+1}), (y_{i+1}, y_i) \in A \cup B$, para todo $i = 0, 1, 2, \dots, k - 1$, de donde, la sucesión $y_0, y_1, y_2, \dots, y_k$ forman una cadena desde N^- a N^+ sobre la red auxiliar.

Como fm es la función del flujo máximo sobre la red $(N, A \cup B; u)$, entonces existe un $0 \leq j \leq k - 1$, tal que $fm_{y_j y_{j+1}} = u_{y_j y_{j+1}}$. Puesto que fm es la función de flujo máximo desde N^- a N^+ sobre la red auxiliar, entonces $fm_{y_{j+1} y_j} = 0$.

Si $(y_j, y_{j+1}) \in A$, entonces

$$(i) \quad f''_{y_j y_{j+1}} < f'_{y_j y_{j+1}}$$

$$(ii) \quad fm_{y_j y_{j+1}} = u_{y_j y_{j+1}} = f_{y_j y_{j+1}}$$

$$(iii) \quad fm_{y_{j+1} y_j} = 0$$

de donde

$$f'_{y_j y_{j+1}} = f_{y_j y_{j+1}} - fm_{y_j y_{j+1}} + fm_{y_{j+1} y_j} = 0$$

pero esto implica que

$$f''_{y_j y_{j+1}} < 0$$

lo cual indica que f'' en realidad no es una función de flujo factible. Por lo tanto la suposición es falsa, y $2v$ es la solución óptima del programa *PLEM*.

Si $(y_{j+1}, y_j) \in A$ entonces $f''_{y_{j+1} y_j} > f'_{y_{j+1} y_j}$; $(y_j, y_{j+1}) \in B$; $fm_{y_j y_{j+1}} = u_{y_j y_{j+1}} = c_{y_{j+1} y_j} - f_{y_{j+1} y_j}$; $fm_{y_{j+1} y_j} = 0$; de donde

$$f'_{y_{j+1} y_j} = f_{y_{j+1} y_j} - fm_{y_{j+1} y_j} + fm_{y_j y_{j+1}} = c_{y_{j+1} y_j}$$

pero esto implica que

$$f''_{y_{j+1} y_j} > c_{y_{j+1} y_j}$$

lo cual indica que f'' en realidad no es una función de flujo factible. Por lo tanto la suposición es falsa, y $2v$ es la solución óptima del programa *PLEM*. ■

3.4 Algoritmo AMPT Para Obtener la Solución del Problema

Teniendo en cuenta el teorema (3.3), el algoritmo que calcule la máxima perturbación total sobre el flujo externo a , en la dirección d , de cualquier red balanceada $(N, A; a, c, d, f)$ dada, tendrá los siguientes pasos.

ALGORITMO: MAXIMA PERTURBACION TOTAL (AMPT)

Entrada: Una red balanceada $(N, A; a, c, d, f)$.

Salida:

- La máxima perturbación total Δ^* ;
- Una función de flujo externo $a' : N \rightarrow \mathbb{Z}$;
- Una función de flujo factible $f' : A \rightarrow \mathbb{Z}^+$, asociado a la función de flujo externo a' .

Procedimiento:

Paso 1. Determinar los conjuntos de nodos N^- , N^0 y N^+ .

$$N^- = \{x \in N : d_x = -1\}$$

$$N^0 = \{x \in N : d_x = 0\}$$

$$N^+ = \{x \in N : d_x = +1\}$$

Paso 2. Determinar el conjunto de arcos B .

$$B = \{(y, x) : (x, y) \in A\}$$

Paso 3. Determinar la función de capacidades $u : A \cup B \rightarrow \mathbb{Z}^+$.

$$u_{xy} = \begin{cases} f_{xy} & \text{si } (x, y) \in A \\ c_{yx} - f_{yx} & \text{si } (x, y) \in B \end{cases}$$

Paso 4. Construir la red $(N, A \cup B; u)$

Paso 5. Sobre la red $(N, A \cup B; u)$ determinar el flujo máximo, v , y la función de flujo máximo, $fm : A \cup B \rightarrow \mathbb{Z}^+$, desde el conjunto de nodos N^- al conjunto de nodos N^+ .

Paso 6. Hacer $\Delta^* = 2v$.

Paso 7. Hacer $a'_x = a_x - \sum_{y \in (A \cup B)^+(x)} fm_{xy} + \sum_{y \in (A \cup B)^-(x)} fm_{yx}$,

$$\forall x \in N.$$

Paso 8. Hacer $f'_{xy} = f_{xy} - fm_{xy} + fm_{yx}$, $\forall (x, y) \in A$.

Fin.

Nótese que, $a'_x = a_x + d_x \delta_x$, $\forall x \in N$. En efecto,

$$a'_x = a_x - \sum_{y \in (A \cup B)^+(x)} fm_{xy} + \sum_{y \in (A \cup B)^-(x)} fm_{yx}, \forall x \in N$$

$$= \begin{cases} a_x - \sum_{y \in (A \cup B)^+(x)} fm_{xy} + \sum_{y \in (A \cup B)^-(x)} fm_{yx} & \text{si } x \in N^- \\ a_x - \sum_{y \in (A \cup B)^+(x)} fm_{xy} + \sum_{y \in (A \cup B)^-(x)} fm_{yx} & \text{si } x \in N^0 \\ a_x - \sum_{y \in (A \cup B)^+(x)} fm_{xy} + \sum_{y \in (A \cup B)^-(x)} fm_{yx} & \text{si } x \in N^+ \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} a_x + (-1) \left(\sum_{y \in (A \cup B)^+(x)} fm_{xy} - \sum_{y \in (A \cup B)^-(x)} fm_{yx} \right) & \text{si } x \in N^- \\ a_x + (-1) \left(\sum_{y \in (A \cup B)^+(x)} fm_{xy} - \sum_{y \in (A \cup B)^-(x)} fm_{yx} \right) & \text{si } x \in N^0 \\ a_x + (1) \left(- \sum_{y \in (A \cup B)^+(x)} fm_{xy} + \sum_{y \in (A \cup B)^-(x)} fm_{yx} \right) & \text{si } x \in N^+ \end{cases} \\
&= \begin{cases} a_x + d_x \delta_x & \text{si } x \in N^- \\ a_x + (-1) 0 & \text{si } x \in N^0 \\ a_x + d_x \delta_x & \text{si } x \in N^+ \end{cases} \\
&= a_x + d_x \delta_x, \forall x \in N
\end{aligned}$$

3.5 Complejidad del Algoritmo

Para determinar la complejidad de este algoritmo se estimará su tiempo de corrida. El tiempo de corrida de un algoritmo es el número de pasos elementales que él ejecuta, entendiéndose como paso elemental a cada operación aritmética: $+$, $-$, \times , \div y comparación [Grötschel, 1988].

Puede observarse que el número de pasos elementales depende del tamaño de la red $(N, A; a, c, d, f)$. Si la cardinalidad de N y A es n y

m , respectivamente, entonces el paso 1 puede ser hecho en $O(n)$ pasos elementales; el paso 2 en $O(m)$ pasos elementales; el paso 3 en $O(m)$ pasos elementales; el paso 4 en $O(n^2)$ pasos elementales; el paso 5 en $O(n \cdot m + n^2 \cdot \sqrt{\log U})$ pasos elementales, donde U denota una cota superior sobre u [Ahuja, 1988]; el paso 6 en un paso elemental; el paso 7 en $O(n)$ pasos elementales; y por último, el paso 8 en $O(m)$ pasos elementales. Entonces el número total de pasos elementales ejecutados por el algoritmo, suponiendo que $n \leq m$, es: $2 \cdot O(n) + 3 \cdot O(m) + O(n^2) + O(n \cdot m + n^2 \cdot \sqrt{\log U}) + 1 = O(n \cdot m + n^2 \cdot \sqrt{\log U})$. Por lo tanto, la complejidad de este algoritmo es equivalente a la del algoritmo del flujo máximo.

3.6 Independencia Entre la Solución Óptima y el Flujo Factible

Puede observarse que la solución óptima del programa *PLEM* (3.6)-(3.13), dada por el Teorema 1, se obtiene a partir de la función f_m del flujo máximo que puede enviarse desde N a N^+ , sobre la red auxiliar $(N, A \cup B; u)$. Nótese que los valores de la función f_m dependen de los valores de la función u y estos, a su vez, dependen de los valores de las funciones f y c . Por otro lado, la red factible $(N, A; a, c, d)$ no tiene, necesariamente, una única función de flujo factible f asociada a ella. En

otras palabras, pueden existir dos funciones, $f^1, f^2 : A \rightarrow \mathbb{Z}^+$, que sean ambas funciones de flujo factible asociadas a la red $(N, A; a, c, d)$, tal que $f^1 \neq f^2$.

Por lo tanto, surge de manera natural la siguiente pregunta: ¿Serán iguales los valores óptimos de los programas (3.6)-(3.13) asociados a las redes $(N, A; a, c, d, f^1)$ y $(N, A; a, c, d, f^2)$, respectivamente? La respuesta es afirmativa, como se demuestra en el siguiente teorema.

TEOREMA 2

Sea $(N, A; a, c, d)$ una red balanceada y factible con funciones de flujo factible f^1 y f^2 , donde $f^1 \neq f^2$. Sean $(N, A \cup B; u^1)$ y $(N, A \cup B; u^2)$ las redes auxiliares asociadas a $(N, A; a, c, d)$ con respecto a f^1 y f^2 , respectivamente. Sean v^1 y v^2 el flujo máximo desde N^- a N^+ sobre las redes $(N, A \cup B; u^1)$ y $(N, A \cup B; u^2)$, respectivamente. Entonces $v^1 = v^2$.

Demostración:

Sea $f^1 \neq f^2$ y $x \in N$, un nodo arbitrario. Puesto que f^1 y f^2 son funciones de flujo factible, entonces se tiene que

$$\sum_{y \in A^+(x)} f_{xy}^1 - \sum_{y \in A^-(x)} f_{yx}^1 = a_x \quad (3.16)$$

$$\sum_{y \in A^+(x)} f_{xy}^2 - \sum_{y \in A^-(x)} f_{yx}^2 = a_x \quad (3.17)$$

Por otro lado, la cantidad máxima de flujo que puede salir desde el nodo x es igual a la suma de las capacidades de todos los arcos que tienen a x como su nodo inicial, es decir, sobre la red $(N, A \cup B; u^1)$ ese valor es:

$$\begin{aligned} \sum_{y \in (A \cup B)^+(x)} u_{xy}^1 &= \sum_{y \in A^+(x)} u_{xy}^1 + \sum_{y \in B^+(x)} u_{xy}^1 \\ &= \sum_{y \in A^+(x)} f_{xy}^1 + \sum_{y \in A^-(x)} (c_{yx} - f_{yx}^1) \\ &= \sum_{y \in A^-(x)} c_{yx} + a_x, \text{ por (3.16)} \end{aligned}$$

y sobre la red $(N, A \cup B; u^2)$, es:

$$\begin{aligned} \sum_{y \in (A \cup B)^+(x)} u_{xy}^2 &= \sum_{y \in A^+(x)} u_{xy}^2 + \sum_{y \in B^+(x)} u_{xy}^2 \\ &= \sum_{y \in A^+(x)} f_{xy}^2 + \sum_{y \in A^-(x)} (c_{yx} - f_{yx}^2) \\ &= \sum_{y \in A^-(x)} c_{yx} + a_x, \text{ por (3.17)} \end{aligned}$$

Luego, la cantidad máxima de flujo que puede salir desde x permanece

invariable con respecto a la función de flujo factible.

Similarmente, la cantidad máxima de flujo que puede entrar al nodo x sobre la red $(N, A \cup B; u^1)$, es:

$$\begin{aligned} \sum_{y \in (A \cup B)^-(x)} u_{yx}^1 &= \sum_{y \in A^-(x)} u_{yx}^1 + \sum_{y \in B^-(x)} u_{yx}^1 \\ &= \sum_{y \in A^-(x)} f_{yx}^1 + \sum_{y \in A^+(x)} (c_{xy} - f_{xy}^1) \\ &= \sum_{y \in A^+(x)} c_{yx} - a_x \end{aligned}$$

y sobre la red $(N, A \cup B; u^2)$, es:

$$\begin{aligned} \sum_{y \in (A \cup B)^-(x)} u_{yx}^2 &= \sum_{y \in A^-(x)} u_{yx}^2 + \sum_{y \in B^-(x)} u_{yx}^2 \\ &= \sum_{y \in A^-(x)} f_{yx}^2 + \sum_{y \in A^+(x)} (c_{xy} - f_{xy}^2) \\ &= \sum_{y \in A^+(x)} c_{yx} - a_x \end{aligned}$$

De nuevo, la cantidad máxima de flujo que puede entrar a x permanece invariable con respecto a la función de flujo factible.

Como ambas redes auxiliares tienen los mismos arcos y el nodo x es arbitrario, entonces el valor del flujo máximo v que puede enviarse desde N^- a N^+ es el mismo en ambas redes auxiliares. Esto es, $v^1 = v^2$ ■

3.7 Resumen

Este capítulo constituye la parte medular del presente trabajo. Aquí se ha definido una red muy importante, esencial para los propósitos de este trabajo, la llamada red auxiliar. Sin embargo, la aportación científica de más peso corresponde al Teorema 1, sin que ello, claro, demerite el valor que le corresponde al Teorema 2. Con estos resultados se ha construido un algoritmo con el cual puede resolverse en tiempo polinomial, exactamente y sin errores, cualquier instancia del programa *PLEM*.

CAPITULO 4

APLICACION DEL ALGORITMO AMPT A UN PROBLEMA DE PRODUCCION-CONSUMO

4.1 Introducción

Corresponde a este capítulo mostrar, mediante un ejemplo, la manera en que debe ser aplicado el algoritmo *AMPT*. Aquí se ilustrará cómo se diseña la red auxiliar y cómo se determinan los diferentes conjuntos y demás valores que el algoritmo requiere para su ejecución.

4.2 Planteamiento del Problema

Se considera una compañía compuesta por 2 plantas ensambladoras de chasises automotrices y 2 almacenes. Se supone lo siguiente:

1. Las plantas ensambladoras están ubicadas en Monterrey (Mty) y el Distrito Federal (DF).
2. Los almacenes están ubicados en Torreón (Ton) y Toluca (Tol).
3. El tamaño de cada almacén es de tal magnitud que puede guardar cualquier cantidad de unidades (chasis).
4. Las unidades (chasis) son requeridas en dos plantas automotrices ubicadas en, Puebla (Pue) y Saltillo (Sal), respectivamente.
5. En la actualidad, la cantidad mensual de unidades requeridas en Saltillo y Puebla es de: *70000* y *50000*, respectivamente.
6. La cantidad de unidades producidas en Monterrey y el Distrito Federal es de: *40000* y *80000*, respectivamente.
7. Las unidades solo pueden transportarse utilizando las rutas indicadas en la tabla I. En esa tabla se incluyen las capacidades y costos por unidad de transporte, así como el programa actual de envíos.
8. Se espera un gran incremento en la demanda de unidades para el próximo año.
9. Existen algunas fricciones con el personal de la planta ensambladora ubicada en el Distrito Federal. Se estima que esa planta podría cerrarse.
10. Es posible habilitar una parte o todo el espacio que ocupa cada almacén para ensamblar chasis.

11. Se puede comprar todo el equipo necesario para incrementar la producción de chasis.

TABLA I
DATOS DEL PROBLEMA

Desde:	A:	Transporte Capacidad / Costo	Programa Actual
DF	Ton	80000 / \$50	40000
DF	Tol	50000 / \$10	40000
Ton	Tol	60000 / \$70	0
Ton	Sal	80000 / \$10	40000
Tol	Pue	40000 / \$30	40000
Tol	Mty	50000 / \$80	0
Pue	DF	60000 / \$20	0
Mty	Ton	10000 / \$40	0
Mty	Sal	40000 / \$20	40000
Sal	Tol	80000 / \$60	0
Sal	Pue	10000 / \$70	10000

El problema consiste en determinar el máximo incremento total de la demanda que pueda ser satisfecho, con el sistema actual de distribución.

4.3 Solución del Problema

Con la información dada se construye la red $(N, A; a, c, d, f)$. El conjunto de nodos N y de arcos A se muestran en las tablas II y III, respectivamente.

TABLA II
CONJUNTO DE NODOS

Ciudad	DF	Ton	Tol	Pue	Mty	Sal
Nodo asociado	1	2	3	4	5	6
Flujo externo a_x ($\times 10000$)	8	0	0	-5	4	-7
Dirección de perturbación d_x	-1	1	1	-1	1	-1

TABLA III
CONJUNTO DE ARCOS

Desde:	A:	Arco asociado	Capacidad c_{xy} ($\times 10000$)	Flujo f_{xy} ($\times 10000$)
DF	Ton	(1, 2)	8	4
DF	Tol	(1, 3)	5	4
Ton	Tol	(2, 3)	6	0
Ton	Sal	(2, 6)	8	4
Ton	Pue	(3, 4)	4	4
Tol	Mty	(3, 5)	5	0
Pue	DF	(4, 1)	6	0
Mty	Ton	(5, 2)	10	0
Mty	Sal	(5, 6)	4	4
Sal	Tol	(6, 3)	8	0
Sal	Pue	(6, 4)	10	1

Se observa que la red $(N, A; a, c, d, f)$ está balanceada, ya que

$$\sum_{x \in N} a_x = 8 + 0 + 0 - 5 + 4 - 7 = 12 - 12 = 0$$

También se puede verificar que f es un flujo factible sobre la red $(N, A; a, c, d)$. Para ello, se forman las matrices de capacidades C y de flujos F , presentadas en las tablas IV y V, respectivamente, donde las celadas en blanco tienen valor cero, SF es la suma de fila y SC es la suma de columna.

TABLA IV
MATRIZ DE CAPACIDADES

	1	2	3	4	5	6
1		8	5			
2			6			8
3				4	5	
4	6					
5		10				4
6			8	10		

TABLA V
MATRIZ DE FLUJOS

	1	2	3	4	5	6	SF
1		4	4				8
2			0			4	4
3				4	0		4
4	0						0
5		0				4	4
6			0	1			1
SC	0	4	4	5	0	8	

Se recuerda que, con respecto a la matriz de flujos F (página 16), se satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$SF_x = \sum_{y \in A^+(x)} f_{xy}$$

$$SC_x = \sum_{y \in A^-(x)} f_{yx}$$

Entonces f es una función de flujo factible ya que $0 \leq F \leq C$, y además, el flujo neto sobre cada nodo en la red es igual a su flujo externo, como se muestra enseguida:

1. $SF_1 - SC_1 = 8 - 0 = 8 = a_1$,
2. $SF_2 - SC_2 = 4 - 4 = 0 = a_2$,
3. $SF_3 - SC_3 = 4 - 4 = 0 = a_3$,

4. $SF_4 - SC_4 = 0 - 5 = -5 = a_4$,
5. $SF_5 - SC_5 = 4 - 0 = 4 = a_5$,
6. $SF_6 - SC_6 = 1 - 8 = -7 = a_6$

Ahora se aplica el algoritmo *AMPT*.

Paso 1.

$$N^- = \{1, 4, 6\}$$

$$N^0 = \phi$$

$$N^+ = \{2, 3, 5\}$$

Paso 2.

$$B = \left\{ \begin{array}{l} (2, 1); (3, 1); (3, 2); (6, 2); (4, 3); (5, 3); \\ (1, 4); (2, 5); (6, 5); (3, 6); (4, 6) \end{array} \right\}$$

Paso 3. En la tabla VI se muestran los valores de la matriz de capacidades U . En esta tabla los números en negrita corresponden a las capacidades de los arcos en el conjunto B .

TABLA VI
MATRIZ DE CAPACIDADES DE LA RED AUXILIAR

	1	2	3	4	5	6
1		4	4	6		
2	4		0		10	4
3	1	6		4	0	8
4	0		0			9
5		0	5			4
6		4	0	1	0	

Paso 4. Se ha determinado la red auxiliar $(N, A \cup B; u)$

Paso 5. Aplicando el algoritmo de Etiquetado [Ford, 1962] se encuentra

que el valor del flujo máximo sobre la red auxiliar $(N, A \cup B; u)$, desde el conjunto N^- al conjunto N^+ , es $v = 12$. Los valores de la función de flujo máximo, asociada a este valor, se muestran en la tabla VII.

TABLA VII
VALORES DE LA FUNCION DE FLUJO MAXIMO

	1	2	3	4	5	6	SFm
1		4	4				8
2	0				0	0	0
3	0	0		0		0	0
4	0		0			4	4
5		0	0			0	0
6		4	0	0	0		4
SCm	0	8	4	0	0	4	

Paso 6. La máxima perturbación total es $\Delta^* = 2v = 24$

Paso 7. El flujo externo a'_x , $\forall x \in N$, de la red que resulta cuando la red $(N, A; a, c, d, f)$ se perturba al máximo, tiene los siguientes valores:

$$(a) a'_1 = a_1 - SFm_1 + SCm_1 = 8 - 8 + 0 = 0.$$

$$(b) a'_2 = a_2 - SFm_2 + SCm_2 = 0 - 0 + 8 = 8.$$

$$(c) a'_3 = a_3 - SFm_3 + SCm_3 = 0 - 0 + 4 = 4.$$

$$(d) a'_4 = a_4 - SFm_4 + SCm_4 = -5 - 4 + 0 = -9.$$

$$(e) a'_5 = a_5 - SFm_5 + SCm_5 = 4 - 0 + 0 = 4.$$

$$(f) a'_6 = a_6 - SFm_6 + SCm_6 = -7 - 4 + 4 = -7.$$

Paso 8. La red $(N, A; a', c, d, f')$, que resulta desde $(N, A; a, c, d, f)$ cuando los flujos externos de ésta se perturban al máximo, tiene asociada la

función de flujo factible f' cuyos valores se muestran en la tabla VIII.

TABLA VIII
VALORES DE LA FUNCION DE FLUJO
ASOCIADA A LA RED PERTURBADA

	1	2	3	4	5	6	SF'
1		0	0				0
2			0			8	8
3				4	0		4
4	0						0
5		0				4	4
6			0	5			5
SC'	0	0	0	9	0	12	

Se puede observar que la red $(N, A; a', c, d, f')$ está balanceada, ya que

$$\sum_{x \in N} a'_x = 0 + 8 + 4 - 9 + 4 - 7 = 16 - 16 = 0$$

y que f' es un flujo factible, porque

- (a) $SF'_1 - SC'_1 = 0 - 0 = 0 = a'_1$
- (b) $SF'_2 - SC'_2 = 8 - 0 = 8 = a'_2$
- (c) $SF'_3 - SC'_3 = 4 - 0 = 4 = a'_3$
- (d) $SF'_4 - SC'_4 = 0 - 9 = -9 = a'_4$
- (e) $SF'_5 - SC'_5 = 4 - 0 = 4 = a'_5$
- (f) $SF'_6 - SC'_6 = 5 - 12 = -7 = a'_6$

Conclusión:

El máximo incremento en la demanda que puede ser satisfecho es de

$|a'_4| - |a_4| + |a'_6| - |a_6| = 90,000 - 50,000 + 70,000 - 70,000 = 40,000$
unidades mensuales.

Entonces el administrador puede comprometerse con entregar un máximo de 90,000 unidades mensuales a la compañía automotriz ubicada en Puebla. A la compañía automotriz ubicada en Saltillo le seguirá entregando las mismas 70,000 unidades mensuales.

Si el administrador lograra ese nuevo contrato con la planta de Puebla, entonces se deben efectuar las siguientes acciones:

1. Como $a'_1 = 0$, entonces el nuevo flujo externo para el Distrito Federal es cero. Por lo tanto se debe cerrar la planta ubicada en esa ciudad y, desde luego, reubicar su capacidad productiva.
2. Puesto que $a'_2 = 8$ y $a'_3 = 4$ entonces debe instalarse equipo productivo en las ciudades de Torreón y Toluca con una capacidad de producción equivalente a 80,000 y 40,000 unidades mensuales, respectivamente. Se observa que la capacidad productiva que se tiene en el Distrito Federal puede distribuirse entre Torreón y Toluca (según convenga), y se debe comprar nuevo equipo para producir 40,000 unidades mensuales.
3. Puesto $a'_5 = 4$ y $f'_{5,6} = 4$, entonces en Monterrey se producirán 40,000 unidades mensuales y se enviarán a Saltillo.
4. Puesto que $a'_3 = 4$ y $f'_{3,4} = 4$, entonces las 40,000 unidades mensuales

que serán producidas en Toluca se enviarán a Puebla.

5. Puesto que $a'_2 = 8$, $a'_6 = -7$, $a'_4 = -9$, $f'_{2,6} = 8$ y $f'_{6,4} = 5$ entonces, de las 80,000 unidades mensuales que serán producidas en Torreón, se mandan 80,000 a Saltillo, y de ahí, se transbordan 50,000 a Puebla.

4.4 Resumen

En este capítulo se ha presentado una instancia del problema *PLEM* con el propósito de mostrar la manera en que el algoritmo *AMPT* debe ser aplicado. Otro aspecto importante que debe ser señalado, es la manera en que se obtienen las conclusiones a partir de la solución del problema.

CAPITULO 5

EXTENSIONES DEL PROBLEMA DE INVESTIGACION

5.1 Introducción

En este capítulo se presentan dos extensiones del problema investigado en esta Tesis. En la primera, se consideran cotas en las perturbaciones a lo largo de la dirección de perturbación. De esta manera puede obtenerse en el peor de los casos, por ejemplo, una capacidad de producción mínima deseable cuando ésta se expone a una reducción.

Por otra parte, en el teorema 2 de la sección 3.6, se demostró que la solución óptima del problema *PLEM* es independiente de la función de flujo factible inicial. Sin embargo, los valores individuales de las perturbaciones del flujo externo dependen tanto de la función de flujo factible inicial como del algoritmo de flujo máximo utilizado, entonces resulta interesante

determinar, para un valor fijo de perturbación total menor o igual que Δ^* , los valores de las perturbaciones individuales del flujo externo que minimice una cierta función de costo, la cual contempla el costo de la implementación de esas perturbaciones, además del costo de transporte. Este problema corresponde a la segunda extensión.

5.2 Perturbaciones Acotadas

Se han considerado perturbaciones del flujo externo en una dirección dada. Sin embargo, podría presentarse el caso en que las perturbaciones estén acotadas superiormente, es decir, $0 \leq \delta_x \leq \eta_x, \forall x \in N$, donde $\eta_x \in \mathbb{N}^+$.

En la mayoría de los casos, cuando $a_x > 0$ y $d_x = -1$ ó cuando $a_x < 0$ y $d_x = 1$, se supone que $\eta_x = a_x$. Por otro lado, cuando $a_x > 0$ y $d_x = 1$ o cuando $a_x < 0$ y $d_x = -1$, el valor de η_x estaría determinado por la máxima expansión factible de la capacidad productiva y por la demanda máxima esperada, respectivamente.

El Problema *PLEM* con restricciones $\delta_x \leq \eta_x, \forall x \in N$, puede resolverse determinando el flujo máximo desde el nodo s al nodo t sobre la red capacitada $(N^e, (A \cup B)^e; u^e)$, la cual es una extensión de la red auxiliar $(N, A \cup B; u)$, donde

$$N^e = N \cup \{s, t\};$$

$$(A \cup B)^e = A \cup B \cup (s, N^-) \cup (N^+, t);$$

$$(s, N^-) = \{(s, x) : x \in N^-\};$$

$$(N^+, t) = \{(x, t) : x \in N^+\};$$

$$u_{xy}^e = \begin{cases} u_{xy} & \text{si } (x, y) \in A \cup B \\ \eta_y & \text{si } x = s \text{ y } y \in N^- \\ \eta_x & \text{si } x \in N^+ \text{ y } y = t \end{cases}$$

Entonces el valor óptimo de Δ es

$$\Delta^* = 2 \sum_{x \in N^-} f m_{sx}$$

y se obtiene haciendo

$$\delta_x^* = f m_{sx}, \quad \forall x \in N^-$$

$$\delta_x^* = f m_{xt}, \quad \forall x \in N^+$$

$$f'_{xy} = f_{xy} - f m_{xy} + f m_{yx}, \quad \forall (x, y) \in A$$

5.3 Costos en las Perturbaciones y Costos de Transporte

Sea $(N, A; a, c, d, f, \Lambda, g, b)$ una red balanceada y factible, en la cual la función de flujo externo a es perturbada un total de Λ unidades en la dirección d ; donde $\Delta^* \geq 2\Lambda \in \mathbb{Z}^+$; $g : N \rightarrow \mathbb{Z}^+$; $b : A \rightarrow \mathbb{Z}^+$.

En este contexto, Λ representa una perturbación total factible del flujo externo; $g(x) = \begin{cases} g_x, & \text{si } a_x > 0, d_x = 1 \\ g_x, & \text{si } a_x < 0, d_x = -1 \\ 0, & \text{en otros casos} \end{cases}$, representa el costo unitario de incrementar la oferta o la demanda; y $b(x, y) = b_{xy}$ representa el costo unitario por transportar flujo desde el nodo x hacia el nodo y utilizando el arco (x, y) .

El problema consiste en determinar los valores de δ_x y f'_{xy} , $\forall x \in N$ y $\forall (x, y) \in A$, respectivamente, que minimicen la siguiente función

$$\sum_{x \in N} g_x \delta_x + \sum_{(x,y) \in A} b_{xy} f'_{xy}$$

Se nota que la función anterior representa el costo total de las perturbaciones y del transporte.

El problema anterior se resuelve al determinar la función de flujo de mínimo costo [Ford, 1962] sobre la red $(N^e, A^e; a^e, c^e, b^e)$, donde N^e es el conjunto de nodos, A^e es el conjunto de arcos, $a^e : N^e \rightarrow \mathbb{Z}^+$ es la función de flujo externo, $c^e : A^e \rightarrow \mathbb{Z}^+$ es la función de capacidad, y $b^e : A^e \rightarrow \mathbb{Z}^+$ es la función de costo de transporte. Aquí,

$$N^e \triangleq N \cup \{x_1, x_2, x_3, x_4\};$$

$$A^e \triangleq A \cup A^1 \cup A^2 \cup A^3 \cup A^4 \cup \{(x_1, x_3), (x_4, x_2)\};$$

$$A^1 = \{(x_1, y) : y \in N^-\}; \quad A^2 = \{(x, x_2) : x \in N^+\};$$

$$A^3 = \{(x_3, y) : y \in N^-, a_y > 0\};$$

$$A^4 = \{(x, x_4) : x \in N^+, a_x < 0\};$$

$$a_x^e = \begin{cases} \Lambda & \text{si } x = x_1 \\ 0 & \text{si } x \in N \cup \{x_3, x_4\} \\ -\Lambda & \text{si } x = x_2 \end{cases};$$

$$c_{xy}^e = \begin{cases} c_{xy} & \text{si } (x, y) \in A \\ M & \text{si } (x, y) \in A^1 \cup (x_1, x_3) \\ M & \text{si } (x, y) \in A^2 \cup (x_4, x_2) \\ a_y & \text{si } (x, y) \in A^3 \\ a_x & \text{si } (x, y) \in A^4 \end{cases}$$

y

$$b_{xy}^e = \begin{cases} b_{xy} & \text{si } (x, y) \in A \\ g_y & \text{si } (x, y) \in A^1 \\ g_x & \text{si } (x, y) \in A^2 \\ 0 & \text{si } (x, y) \in A^3 \cup (x_1, x_3) \\ 0 & \text{si } (x, y) \in A^4 \cup (x_4, x_2) \end{cases}$$

donde x_1, x_2, x_3, x_4 son nodos artificiales agregados a la red original.

5.4 Resumen

En este capítulo se han presentado dos extensiones del problema resuelto en esta Tesis. La primera puede resolverse al extender la red auxiliar para luego determinar el flujo máximo desde un supernodo fuente a un supernodo sumidero, en la cual se consideran las cotas sobre las perturbaciones como capacidades de los arcos que conectan a ese con los nodos en N^- y a éste con los nodos en N^+ . La segunda extensión corresponde a un problema de flujos a costo mínimo, para el cual ya existen métodos de solución en la literatura [Bazaraa, 1990].

CAPITULO 6

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Existen muchas investigaciones que tratan sobre el análisis postóptimo aplicado a redes. El análisis postóptimo en redes estudia el efecto que tienen las variaciones de los valores iniciales de los parámetros (ofertas, demandas, costos, capacidades) sobre el flujo más económico, el flujo máximo, la ruta más corta o sobre la factibilidad de la red.

En la literatura existen muchos trabajos de investigación que tratan con la expansión de la capacidad de producción, pero en ellos no se toma en cuenta la capacidad del sistema de distribución y sólo se enfocan a determinar cuándo y cuánto expandir de tal forma que la demanda esperada sea satisfecha.

En la literatura se encuentran dos trabajos [Doulliez, 1971a; Minieka, 1973] que estudian el efecto de las variaciones de los valores iniciales sobre la factibilidad de la red. Doulliez analiza el efecto de la disminución en la

capacidad de los arcos. Minieka estudia las variaciones (de valor real) en la demanda con respecto al tiempo t , es decir, utiliza un solo parámetro. De ese modo, las demandas tendrán variaciones constantes con respecto a t mientras que las ofertas no cambian sus valores iniciales, es decir, la red no se mantiene balanceada.

Al igual que Minieka [1973], en la investigación desarrollada en esta Tesis también se estudia el efecto que tienen las variaciones de los valores iniciales de los parámetros sobre la factibilidad de la red. Pero, a diferencia de aquella, en esta se consideran variaciones en cada nodo sobre la red y se desea mantener el balance de la misma.

El resultado presentado en esta Tesis será de gran utilidad práctica en los sistemas de producción-consumo, en donde se consideren cambios en la capacidad de producción y cambios en la demanda, sin que se modifique la capacidad de los medios de transporte. Con este resultado es posible determinar si cierto centro de producción de bienes puede desaparecer, y si fuera así, hacia donde trasladar su capacidad productiva; también se puede determinar cuánto mercado puede satisfacerse y por lo tanto, cuánto equipo de producción comprar.

Para futuras investigaciones se sugiere lo siguiente:

- (a) Estudiar el efecto que tendrían las variaciones de las capacidades de los

arcos sobre la factibilidad de la red.

(b) Considerar redes multiproducto.

También es recomendable resolver problemas de aplicación real donde se aplique el resultado presentado en esta Tesis.

BIBLIOGRAFIA

1. **Adler** I. and R.D.C. Monteiro, *A Geometric View of Parametric Linear Programming*, *Algorithmica*, Vol 8, pp. 161-176, 1992.
2. **Ahuja** R.K., J.B. Orlin and R.E. Tarjan, *Improved Bounds for the Maximum Flow Problem*, Research Report, Sloan School of Management, M.I.T., Cambridge, 1988.
3. **Ahuja** R.K., T.L. Magnanti and J.B. Orlin, *Network Flows: Theory, Algorithms and Applications*, Prentice-Hall, 1993.
4. **Akinc** U., *A Class of Parametric Properties of Transportation Problems*, *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol 29, pp. 271-278, 1982.
5. **Anderson** D., *Models for Determining Least-Cost Investments in Electricity Supply*, *Bell Journal Economic Management Science*, Vol 3, pp. 267-299, 1972.
6. **Arsham** H., *Postoptimality Analyses of the Transportation Problem*, *Journal of the Operational Research Society*, Vol 43, pp. 121-139, 1992.
7. **Arsham** H. and A.K. Kahn, *A Simplex-Type Algorithm for General Transportation Problem: An Alternative to Stepping Stone*, *Journal of the Operational Research Society*, Vol 40, pp. 581-590, 1989.
8. **Bailey** M., *Parametric Integer Programming Analysis - A Simultaneous Solution Approach*, Ph.D. Dissertation, University of Missouri-Rolla, 1978.
9. **Baker** M.D., *Stochastic Network, Reduction and Sensitivity Techniques in a Cost-Effectiveness Study of a Military Communications System*, *Operational Research Quarterly*, Vol 21, pp. 45-67, 1970.

10. **Bassok Y.**, A. Bixby, R. Srinivasan, H.Z. Wiesel, *Design of Component-Supply Contract with Commitment-Revision Flexibility*, IBM Journal Research Develop, Vol. 41, pp. 693-702, 1997.
11. **Bazaraa M.S.**, J.J. Jarvis and H.D. Sherali, *Linear Programming and Network Flows*, John Wiley and Sons, 1990.
12. **Bergendahl G.**, *A Combined Linear and Dynamic Programming Model for Interdependent Road Investment Planning*, Transportation Research, Vol 3, pp. 211-228, 1969.
13. **Butcher W.S.**, Y.Y. Haimes and W.A. Hall, *Dynamic Programming for the Optimal Sequencing of Water Supply Projects*, Water Resources Research, Vol 5, pp. 1196-1204, 1969.
14. **Camm J.D.** and T.H. Burwell, *Sensitivity Analysis in Linear Programming Models With Common Inputs*, Decisions Science, Vol 22, pp. 512-518, 1991.
15. **Chen YL.**, *A Parametric Maximum Flow Algorithm for Bipartite Graphs with Applications*, European Journal Operational Research, Vol 80, pp. 226-235, 1995.
16. **Cook W.**, A.M.H. Gerards, A. Schrijver and E. Tardos, *Sensitivity Theorems in Integer Linear Programming*, Mathematical Programming, Vol 34, pp. 251-264, 1986.
17. **Dale K.M.**, *Dinamic Programming Approach to the Selection and Timing of Generation-Plant Additions*, Proceedings IEE, Vol 113, pp. 803-811, 1966.
18. **Dantzing G.B.**, *Programming in a Linear Structure, Controller*, United States Air Force, Washington, D.C., February 1948.
19. **Dantzing G.B.**, *Linear Programming Under Uncertainty*, Management Sciences, Vol 1, pp. 197-206, 1955.
20. **Dantzing G.B.**, *Linear Programming - 1: Introducción*, Springer Series in Operations Research, 1997.
21. **Dinkelbach D.**, *Sensitivitätsanalysen und Parametrische Programmierung*, Springer, Berlin, 1969.

22. **Doulliez P.J.** and M.R. Rao, *Maximal Flow in a Multi-Terminal Network with Any Arc Subject to Failure*, Management Science, Vol 18, pp. 48-58, 1971a.
23. **Doulliez P.J.** and M.R. Rao, *Capacity of a Network with Increasing Demands and Arcs Subject to Failure*, Operations Research, Vol 19, pp. 905-915, 1971b.
24. **Doulliez P.J.** and M.R. Rao, *Optimal Network Capacity Planning: A Shortest Path Scheme*, Operations Research, Vol 23, pp. 810-818, 1975.
25. **Elmaghraby S.E.**, *Sensitivity Analysis of Multiterminal Flow Networks*, Operations Research, Vol 12, pp. 680-688, 1964.
26. **Erlenkotter D.**, S. Sethi and N. Okada, *Planning for Surprise: Water Resources Development Under Demand and Supply Uncertainty I. The General Model*, Management Science, Vol. 35, pp. 149-163, 1989.
27. **Evans J.R.** and N.R. Baker, *Degeneracy and the (Mis)Interpretation of Sensitivity Analysis in Linear Programming*, Decision Sciences, Vol 13, pp. 442-443, 1982.
28. **Flavell R.** and G.R. Salkin, *An Approach to Sensitivity Analysis*, Operations Research Quarterly, Vol 26, pp.857-866, 1975.
29. **Ford L.R.** and D.R.Fulkerson, *Flows in Networks*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1962.
30. **Freidenfelds J.**, *Capacity Expansion when Demand is a Birth-Death Random Process*, Operations Research, Vol 28, pp. 712-721, 1980.
31. **Freund R.M.**, *Postoptimal analysis of a Linear Program Under Simultaneous Changes in Matrix Coefficients*, Math. Progr. Study, Vol 24, pp. 1-13, 1985.
32. **Friez T.L.**, R.L. Tobin, H-J Cho and N.J. Mehta, *Sensitivity Analysis Based Heuristic Algorithms for Mathematical Programs with Variational Inequality Constraints*, Mathematical Programming, Vol 48, pp. 265-284, 1990.
33. **Gaede K.W.**, *Sensitivitätsanalysen Für-Einen Markov-Process*. ZOR, Vol 18, pp.197-204, 1974.

34. **Gal T.**, *Betriebliche Entscheidungsprobleme, Sensitivitätsanalyse und Parametrische Programmierung*, De Gruyter, Berlin, 1973.
35. **Gal T.**, *Postoptimal Analyses, Parametric Programming, and Related Topics*, McGraw-Hill, New York, 1979.
36. **Gal T.**, *A Historiogramme of Parametric Programming*, Journal of the Operational Research Society, Vol. 31, pp. 449-451, 1980.
37. **Gal T.**, *Shadow Prices and Sensitivity Analysis in Linear Programming under Degeneracy: A State of the art survey*, Operations Research Spektrum, Vol 8, pp. 57-71, 1986.
38. **Gal T.** and H. Greenberg, *Advances in Sensitivity Analysis and Parametric Programminig*, Kluwer Academic Publishers, 1997.
39. **Gass S.I.** and T.L. Saaty, *The Parametric Objective Function 2*. JORSA, Vol 3, pp. 395-401, 1955a.
40. **Gass S.I.** and T.L. Saaty, *The Computational Algorithm for the Parametric Objective Function*. Naval Research Logistic Quarterly, Vol 2, pp 39-45, 1955b.
41. **Gen M.** and B. Liu, *Evolution Algorithm for Optimal Capacity Expansion*, Journal of the Operational Research Society of Japan, Vol 40, pp. 1-9, 1997.
42. **Geoffrion A.M.** and R. Nauss, *Parametric and Postoptimal Analysis in Integer Linear Programming*, Management Science, Vol 23, pp. 453-466, 1977.
43. **Gomory R.E.** and T.C. Hu, *Multi-Terminal Network Flows*, Journal Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol 9, 1961.
44. **Greenberg H.J.**, *The Use of the Optimal Partition in a Linear Programming Solution for Postoptimal Analysis*, Operations Research Letters, Vol 15, pp. 179-185, 1994.
45. **Grötschel M.**, L. Lovász and A. Schrijver, *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, Second Corrected Edition, Springer-Verlang, 1988.

46. **Günther R.**, *Algorithmic Aspects of Flows in Networks*, Kluwer Academic Publishers, Mathematics and its Applications Vol. 69, 1991.
47. **Hannan E.L.**, *Using Duality Theory for Identification of Primal Efficient Points and for Sensitivity Analysis in Multiple Objective Linear Programming*, Journal of the Operational Research Society, Vol 29, pp.643-649, 1978.
48. **Hansen P., M. Labbe and R.E. Wendell**, *Sensitivity Analysis in Multiple Objective Linear Programming: The Tolerance Approach*, European Journal of Operational Research, Vol 38, pp. 63-69, 1989.
49. **Hemaida R.S. and N.K. Kwak**, *A Linear Goal Programming Model for Trans-shipment Problems with Flexible Supply and Demand Constraints*, Journal of the Operational Research Society, Vol 45, pp. 215-224, 1994.
50. **Hitchcock F.L.**, *The Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities*, Journal Math. Phys., Vol 20, pp. 224-230, 1941.
51. **Holm S. and D. Klein**, *Three Methods for Postoptimal Analysis in Integer Linear Programming*, Mathematical Programming Study, Vol 21, pp. 97-109, 1984.
52. **Hu T.C.**, *Integer Programming and Network Flows*, Addison-Wesley Publishing Company, 1970.
53. **Jarvis J. and O. Mejía**, *A Sensitivity Analysis of Multicommodity Network flows*, Transportation Science, Vol 11, pp. 299-306, 1977.
54. **Jensen P.A. and J.W. Barnes**, *Network Flow Programming*, John Wiley and Sons, 1980.
55. **Jensen P.A. and F.O. Olorunniwo**, *A Methodology for Optimal Design and Capacity Expansion of Natural Gas Transmission Networks*, In CORS/ORSA/TIMS Bulletin, Toronto Meeting, 1981.
56. **Kausmann U., Lommatzsch and Nožička**, *Lineare Parametrische Optimierung*, Verlag, Berlin, 1976.
57. **Klee V. and G.J. Minty**, *How Good is the Simplex Algorithm?*, Inequalities III, ed. O. Shisha, New York: Academic Press, pp. 159-175, 1972.

58. **Kornbluth** J.S.H., *Duality, Indifference and Sensitivity Analysis in Multiple Objective Linear Programming*, Operations Research Quarterly, Vol 25, pp. 599-614, 1974.
59. **Labbe** M., J-F Thisse and R.E. Wendell, *Sensitivity analysis in Minisum Facility Location Problems*, Operations Research, Vol 39, pp. 961-969, 1991.
60. **Lawler** E.L., *Combinatorial Optimization: Networks and Matroids*, Holt, Rinehart and Winston, 1976.
61. **Lin** K-C and M-S Chern, *The Single Most Vital Arc in the Most Economical Path Problem - A Parametric Analysis*, Computers Operations Research, Vol 21, pp. 353-358, 1994.
62. **Lorenzen** G., *Parametrische Optimierung und einige Anwendungen*, Oldenburg Verlag, München, 1974.
63. **Luss** H., *Operations Research and Capacity Expansion Problems: A Survey*, Operations Research, Vol. 30, pp. 907-947, 1982.
64. **Magnanti** T.L. and J.B. Orlin, *Parametric Linear Programming and Anti-Cycling Pivoting Rules*, Mathematical Programming, Vol 41, pp. 317-325, 1988.
65. **Malcolm** S.A. and S.A. Zenios, *Robust Optimization for Power Systems Capacity Expansion Under Uncertainty*, Journal of the Operational Research Society, Vol. 45, pp. 1040-1049, 1994.
66. **Manne** G.B., *Notes on Parametric Linear Programming*, Rand Corporation, Report No. B-468, 1953.
67. **Manne** A.S., *Capacity Expansion and Probabilistic Growth*, Econometrica, Vol. 29, pp. 632-649, 1961.
68. **Manne** A.S., *Investments for Capacity Expansion: Size, Location and Time-Phasing*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1967.
69. **Mason** G.B. and B.E Gillett , *Parametric Integer Programming Analysis: A Contraction Approach*, Journal of the Operational Research Society, Vol 31, pp.257-262, 1980.

70. **Minieka E.**, *Parametric Network Flows*, Operations Research, Vol 20, pp. 1162-1170, 1973.
71. **Minieka E.**, *Optimization Algorithms for Networks and Graphs*, Marcel Decker, New York, 1978.
72. **Minoux M.**, *Network Synthesis and Optimum Network Design Problems: Models, Solution Methods and Applications*, Networks, Vol 19, pp. 313-360, 1989.
73. **Morin T.L.** and A.M. Esogbue, *Some Efficient Dynamic Programming Algorithms for the Optimal Sequencing and Scheduling of Water-Supply Projects*, Water Resources Research, Vol 7, pp. 479-484, 1971.
74. **Murty K.G.**, *Computational Complexity of Parametric Linear Programming*, Mathematical Programming, Vol 19, pp. 213-219, 1980.
75. **Nauss R.M.**, *Parametric Integer Programming*, Ph.D. Dissertation, University of California, Los Angeles, 1975.
76. **Noltemeier H.**, *Sensitivitätsanalyse bei Diskreten Linearen Optimierungsproblemen*. Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Systems, Springer, Berlin, 1970.
77. **Noonan F.** and R.J. Giglio, *Planning Electrical Power Generation: A Nonlinear Mixed Integer Model Employing Benders Decomposition*, Management Science, Vol 23, pp. 946-956, 1977.
78. **O'Laoghaire D.T.** and D.M. Himmelblau, *Modeling and Sensitivity Analysis for Planning Decisions in Water Resources System*, Water Resources Bulletin, Vol 7, pp. 653-668, 1972.
79. **O'Laoghaire D.T.** and D.M. Himmelblau, *Optimal Expansions of a Water Resources System*, Academic Press, New York, 1974.
80. **Radke M.A.**, *Sensitivity Analysis in Discrete Optimization*, Ph.D. Dissertation, University of California, Los Angeles, 1975.
81. **Rajagopalan S.**, M.R. Singh and T. E. Morton, *Capacity Expansion and Replacement in Growing Markets with Uncertain Technological Breakthroughs*, Management Science, Vol 44, pp. 12-30, 1998.

82. **Ravi N.** and R.E. Wendell, *The Tolerance Approach to Sensitivity Analysis of Matrix Coefficients in Linear Programming: General Perturbations*, Journal of the Operational Research Society, Vol 36, pp. 943-950, 1985.
83. **Ravi N.** and R.E. Wendell, *The Tolerance Approach to Sensitivity Analysis in Network Linear Programming*, Networks, Vol 18, pp. 159-171, 1988.
84. **Ravi N.** and R.E. Wendell, *The Tolerance Approach to Sensitivity Analysis of Matrix Coefficients in Linear Programming*, Management Science, Vol 35, pp. 1106-1119, 1989.
85. **Rogers J.S.**, *Optimal Generation Expansion: A Dynamic Model*, IEEE PES Winter Meeting, New York, 1974.
86. **Rohrer R.A.** and M. Sobral, *Sensitivity Considerations in Optimal Design*. IEEE Transactions Account., Vol 10, pp. 43-48, 1965.
87. **Saaty T.L.** and S.I. Gass , *The Parametric Objective Function 1*. JORSA 2, pp. 316-319, 1954.
88. **Sawey R.M.** and C.D. Zinn, *A Mathematical Model for Long Range Expansion Planning of Generation and Transmission in Electric Utility Systems*, IEEE Transactions- PAS 96, pp. 657-666, 1977.
89. **Schenkerman S.**, *Sensitivity of Linear Programs to Related Changes in Multiple Inputs*, Decisions Science, Vol 24, pp. 879-891, 1993.
90. **Schultz G.P.**, *Facility Planning for a Public Service System: Domestic Solid Waste Collection*, Journal Regional Science, Vol 9, pp. 291-307, 1969.
91. **Shetty C.M.**, *Sensitivity Analysis in Linear Programming*, Journal of Industrial Engineering, Vol 10, pp. 379-386, 1959.
92. **Srinivasan V.** and G.L. Thompson, *An Operator of Parametric Programming for the Transportation Problem I*, Naval Research Logistics Quarterly, Vol 19, pp. 205-225, 1972a.

93. **Srinivasan V.** and G.L. Thompson, *An Operator of Parametric Programming for the Transportation Problem II*, Naval Research Logistics Quarterly, Vol 19, pp. 227-252, 1972b.
94. **Srinivasan V.** and G.L. Thompson, *Determining Optimal Growth Paths in Logistics Operations*, Naval Research Logistics Quarterly, Vol 19, pp. 575-599, 1972c.
95. **Sung C.S.** and B.K. Yoo, *Parametric Max Flow Problems in a Class of Networks with Series-Parallel Structure*, Computers Operations Research, Vol 21, pp. 769-776, 1994.
96. **Szwarc W.**, *The Transportation Paradox*, Naval Research Logistics Quarterly, Vol 18, pp. 185-202, 1971.
97. **Tlegenov K.**, Kaltschaief and Zapletin, *Methody Matematicheskogo Programirovaniya*, Nauka, Alma-Ata, U.S.S.R., 1975.
98. **Trifon R.** and A. Livnat, *The Spatial Allocation of Schools over Time in Cities*, Journal Regional Urban Economic, Vol 2, pp. 387-400, 1973.
99. **Wagner H.M.**, *Global Sensitivity Analysis*, Operations Research, Vol 43, pp.948-969, 1995.
100. **Ward J.E.** and R.E. Wendell, *Approaches to Sensitivity Analysis in Linear Programming*, Annals of Operations Research, Vol 27, pp. 3-38, 1990.
101. **Wang H-F** and C-S Huang, *Multi-Parametric Analysis of the Maximum Tolerance in a Linear Programming Problem*, European Journal of Operational Research, Vol 67, pp. 75-87, 1993.
102. **Wendell R.E.**, *A Preview of a Tolerance Approach to Sensitivity Analysis in Linear Programming*, Discrete Mathematics, Vol 38, pp. 121-124, 1982.
103. **Wendell R.E.**, *Using Bounds on the Data in Linear Programming: The Tolerance Approach to Sensitivity Analysis*, Mathematical Programming, Vol 29, pp. 304-322, 1984.
104. **Wendell R.E.**, *The Tolerance Approach to Sensitivity Analysis in Linear Programming*, Management Science, Vol 31, pp. 564-578, 1985.

105. **Wendell R.E.**, *Sensitivity analysis Revisted and Extended*, Decision Science Journal, Vol 23, pp. 1127-1142, 1992.
106. **Wollmer R.**, *Removing arcs from a network*, Operations Research, Vol 12, pp. 934-940, 1964.
107. **Wolsey L.A.**, *Integer Programming Duality: Price Functions and Sensitivity Analysis*, Mathematical Programming, Vol 20, pp. 173-195, 1981.
108. **Wondolowski F.R. Jr.**, *A Generalization of Wendell's Approach to Sensitivity Analysis in Linear Programming*, Decision Sciences, Vol 22, pp. 792-810, 1991.
109. **Yaged B.**, *Minimum Cost Routing for Dynamic Network Models*. Networks, Vol 10, pp 193-224, 1973.
110. **Zadeh N.**, *On Building Minimum Cost Communication Networks over Time*, Networks, Vol 4, pp. 19-34, 1974.

RESUMEN AUTOBIOGRAFICO

Apolinar Zapata Reboloso

Candidato para el Grado de *Doctor en Ingeniería* con
Especialidad en *Ingeniería de Sistemas*.

Tesis: DETERMINACION DE LA MAXIMA PERTURBACION TOTAL
DEL FLUJO EXTERNO EN REDES BALANCEADAS Y
FACTIBLES

Campo de Estudio: Ingeniería

Biografía: Nacido en Soledad Diez Gutiérrez, S.L.P., el 23 de Julio de 1960, hijo de Vicente Zapata Sandoval y Amalia Reboloso Mendoza.

Educación: Egresado de la Universidad Autónoma de Nuevo León. Grados Obtenidos: Licenciado en Matemáticas, en 1984, y Maestro en Ciencias de la Administración con Especialidad en Investigación de Operaciones, en 1995.

Experiencia Profesional: Profesor de Tiempo Completo del Instituto Tecnológico de Matamoros desde 1984 a la Fecha. Entrenador de Productos Electromecánicos BAC, S.A., Matamoros, Tamaulipas, en 1989. Supervisor de Producción de AT&T Microelectrónica de México, S.A., Matamoros, Tamaulipas, en 1990.

