

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

**FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA
Y ELECTRICA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POST-GRADO**



**APLICACIONES DEL METODO DE ELEMENTOS FINITOS
A PROBLEMAS DE TERMOFLUIDOS**

**POR
ING. CARLOS LAZARO NARANJO**

**TESIS
EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA INGENIERIA MECANICA
CON ESPECIALIDAD EN TERMICA Y FLUIDOS**

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L.

JUNIO DE 1999

APLICACIONES DEL METODO DE ELEMENTOS FINITOS
SINTESIS DE ESTRUCTURAS A PROBLEMAS DE TERMOFLUIDOS

C. L. N.

TM
Z 5853
. M2
FIME
1999
I3



1020126380

TM
Z5853
.M2
FIME
1999
L3

0131-67460

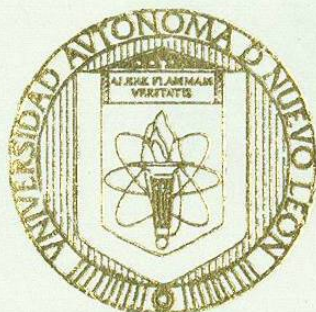


FONDO
TESIS

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA
Y ELECTRICA

DIVISION DE ESTUDIOS DE POST-GRADO



APLICACIONES DEL METODO DE ELEMENTOS FINITOS
A PROBLEMAS DE TERMOFLUIDOS

POR
ING. CARLOS LAZARO NARANJO

TESIS

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA INGENIERIA MECANICA
CON ESPECIALIDAD EN TERMICA Y FLUIDOS

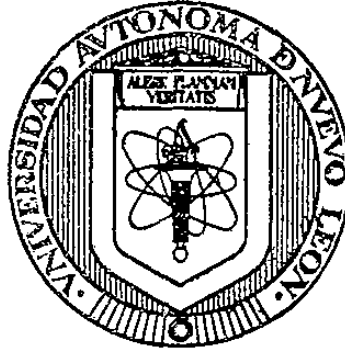
SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L.

JUNIO DE 1999

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA

DIVISION DE ESTUDIOS DE POST-GRADO



APLICACIONES DEL METODO DE ELEMENTOS FINITOS A PROBLEMAS DE
TERMOFLUIDOS

POR

ING. CARLOS LAZARO NARANJO

TESIS

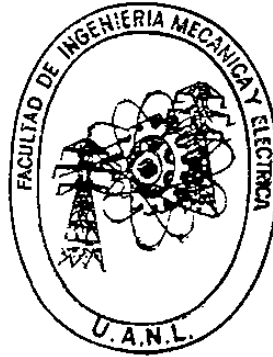
EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA INGENIERIA MECANICA
CON ESPECIALIDAD EN TERMICA Y FLUIDOS

San Nicolás de los Garza, N.L. Junio de 1999

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA

DIVISION DE ESTUDIOS DE POST-GRADO



APLICACIONES DEL METODO DE ELEMENTOS FINITOS A PROBLEMAS DE
TERMOFLUIDOS

POR

ING. CARLOS LAZARO NARANJO

TESIS

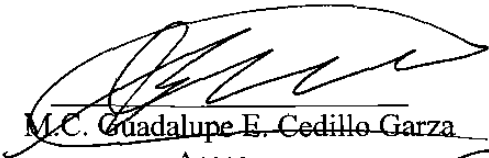
EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA INGENIERIA MECANICA
CON ESPECIALIDAD EN TERMICA Y FLUIDOS

San Nicolás de los Garza, N.L. Junio de 1999


UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POST-GRADO

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis "Aplicaciones del Método de Elementos Finitos a Problemas de Termofluidos", realizada por el alumno Ing. Carlos Lázaro Naranjo, matrícula 1036864 sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestro en ciencias de la Ingeniería Mecánica con especialidad en Térmica y Fluidos.

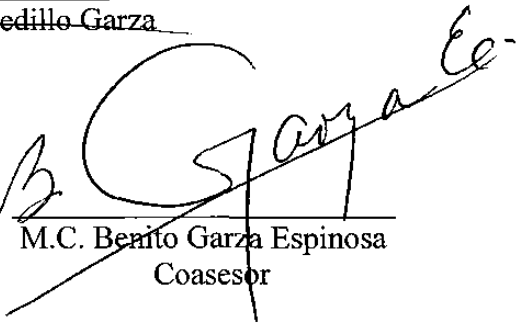
El Comité de Tesis




M.C. Guadalupe E. Cedillo Garza
Asesor



M.C. Roberto Villarreal Garza
Coasesor



M.C. Benito Garza Espinosa
Coasesor



Vo.Bo.
M.C. Roberto Villarreal Garza
División de Estudios de Post-grado

San Nicolás de los Garza, N.L.

Junio de 1999

DEDICATORIAS

A mi esposa : Martina Tejeda López

A mi hija : Claudia Vanessa

A mis familiares

Que con su apoyo y comprensión hicieron posible mis objetivos

A mis maestros

Que con sus conocimientos y profesionalismo contribuyeron en mi preparación

AGRADECIMIENTOS

Al M.C. Guadalupe E. Cedillo Garza por su apoyo incondicional en la asesoría para la Elaboración de la Tesis

Al M.C. Roberto Villarreal Garza por su apoyo en la revisión de este trabajo

Al M.C. Benito Garza Espinosa por su apoyo en la revisión de este trabajo

INDICE

PROLOGO

RESUMEN

CAPITULO

PAGINA

1	INTRODUCCION	1
1.1	Descripción del problemas a resolver	1
1.2	Objetivo de la tesis	1
1.3	Justificación del trabajo de tesis	1
1.4	Metodología	2
1.5	Límite del estudio	2
1.6	Revisión bibliográfica	2
2.-	ANTECEDENTES	4
2.1	Métodos existentes	5
2.2	Utilidad del método de elemento finito	7
2.3	Resumen histórico	9
3.-	METODO DE ELEMENTOS FINITOS	10
3.1	Diferentes métodos	11
3.1.1	Método de diferencias finitas	11
3.1.2	Método variacional	11
3.1.3	Método de residuos pesados	12
3.1.3.1	Método de colocación	12
3.1.3.2	Método de subdominio	12
3.1.3.3	Método de Galerkin	13
3.2	Elemento lineal unidimensional	13
3.2.1	División de la región en elementos	14
3.2.2	El elemento lineal	15
3.2.3	Una ecuación uniforme continua	18
3.3	Ejemplo de elemento finito	19
3.3.1	Funciones de peso	19
3.3.2	Integral residual pesada	21
3.3.3	Evaluación de la integral	23
3.4	Formulación de Galerkin de las matrices elemento	26
3.4.1	Matrices elemento	26
3.4.2	Método de rigidez Directo	30
3.4.3	Propiedades de la matriz rígida global	31

3.5 Elemento bidimensional	34
3.5.1 Mallas bidimensionales	34
3.5.2 Elemento triangular lineal	40
3.5.3 Elemento rectangular bilineal	42
4.- CONDUCCION DE CALOR	45
4.1 Generalidades	45
4.2 Problemas bidimensionales en estado permanente	46
4.3 Problemas bidimensionales en estado transitorio	71
4.3.1 Planteamiento de las ecuaciones y solución analítica	71
4.3.2 Formulación de Elementos Finitos	74
4.3.3 Solución del problema por Elementos Finitos contra solución Analítica	77
5.- FLUJO POTENCIAL INCOMPRESIBLE	81
5.1 Generalidades	81
5.2 Planteamiento de las ecuaciones	81
5.3 Formulación de elementos finitos	84
5.4 Solución y resultado	86
6.- FLUJO POTENCIAL COMPRESIBLE	94
6.1 Generalidades	94
6.2 Planteamiento de las ecuaciones	95
6.3 Formulación de elementos finitos	99
6.4 Solución y resultado	102
7.- CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	113
BIBLIOGRAFIA	114
LISTADO DE FIGURAS	115
APENDICE A : Nomenclatura	116
APENDICE B Programa de computadora FEM1DV3	119
APENDICE C Programa de computadora FEM2DV4	124
GLOSARIO	133
RESUMEN AUTOBIOGRAFICO	139

PROLOGO

El método de elemento finito es una herramienta que puede ser aplicada muy eficazmente en el análisis de muchos de los modelos físicos y matemáticos de interés a los ingenieros, científicos, y matemáticos. Estos modelos físicos y matemáticos generalmente surgen en el proceso de modelación de problemas en las áreas de aplicación tales como mecánica de fluidos, transferencia de calor, etc. El método de elementos finitos ha sido aplicado exitosamente y es regularmente usado como una herramienta de análisis en virtualmente todas las áreas de la ingeniería, tanto en los círculos académicos como industriales. El método de elemento finito también es frecuentemente empleado como un método numérico para resolver ecuaciones diferenciales.

En general, el análisis y modelación de un sistema es un proceso que se desarrolla en varias etapas que son:

- 1.- Definición del sistema físico
- 2.- Definición de condiciones de frontera
- 3.- Definición de agentes de perturbación
- 4.- Definición de variables de respuesta
- 5.- Definición de efectos despreciables
- 6.- Desarrollo del modelo analítico o modelo matemático
- 7.- Aplicación sistemática de procedimientos de cálculo
- 8.- Interpretación de resultados

Antecedentes para este tema implica el conocimiento previo de álgebra matricial, ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, mecánica de fluidos y transferencia de calor.

El capítulo 2 empieza con el conocimiento de los antecedentes del método de elementos finitos.

El capítulo 3 contempla los diferentes métodos de aplicación y en sí el desarrollo del método de elementos finitos

El capítulo 4,5 y6 trata de la aplicación del método de elementos finitos a termofluidos.

RESUMEN

Debido a la gran aceptación que ha tenido últimamente el método de elementos finitos en termofluidos, este trabajo pretende ejemplificar su uso mediante aplicaciones a la transferencia de calor y la mecánica de fluidos .

Se presenta el problema de conducción de calor en una placa, determinándose la distribución de temperaturas, tanto en el estado permanente como en el transitorio. Así mismo, se comparan estas soluciones numéricas con soluciones analíticas, para observar la variación del error con respecto a la variación y número de elementos.

Por otra parte se analiza el flujo potencial bidimensional alrededor de un cilindro entre placas planas, para obtener líneas de corriente y líneas equipotenciales. Para el caso de flujo incompresible, la ecuación que gobierna el proceso es lineal con solución numérica directa, mientras que para el flujo compresible, la no linealidad en las ecuaciones requiere de un método iterativo; en este último caso también se obtienen los números de Mach locales.

Al final se trata el procedimiento de un programa de computadora que consiste de un programa principal en el que se leen datos generales como número de elementos, coordenadas, etc. Se organiza la equivalencia entre nodos de cada elemento y los nodos de interconexión globales entre los elementos.

El mismo programa calcula las equivalencias y forma la matriz de las coordenadas en cada elemento del dominio, posteriormente forma la matriz global. Por último el programa permite calcular las condiciones de frontera.

CAPITULO 1

INTRODUCCION

1.1 DESCRIPCION DEL PROBLEMA A RESOLVER

En términos generales, el método de elemento finito es un medio para obtener una aproximación a la solución de un problema que requiere la integración de un sistema de ecuaciones diferenciales provisto de ciertas condiciones que definen completamente el problema y, de ahí, su solución. En el más sencillo de los casos, la ecuación diferencial es ordinaria y lineal; pero puede contener derivadas de orden arbitrario y condiciones de frontera dadas, que involucren combinaciones arbitrarias de la función buscada y sus derivadas.

1.2 OBJETIVO DEL TEMA

El propósito de este trabajo es presentar una alternativa de los métodos numéricos de cómo usar la técnica del método de elemento finito para resolver problemas de transferencia de calor y mecánica de fluidos.

1.3 JUSTIFICACION DEL TRABAJO DE TESIS

Los problemas físicos y de ingeniería, en su mayoría consisten en resolver una ecuación diferencial de segundo grado y primer orden en derivadas parciales, cuya solución no siempre es fácil, sobre todo cuando se necesita una buena aproximación en los resultados. La aplicación del método de elemento finito permite señalar que:

- 1.- La aplicación es cómoda y muy sencilla cuando se tiene computadora.

2.- El elemento finito permite resolver problemas de condiciones de frontera complicados.

3.- El elemento finito permite sistemáticamente resolver cualquier tipo de problema; Materiales complejos, tales como materiales no homogéneos, no isotrópicos, materiales elásticos no lineales etc.

1.4 METODOLOGIA

1.- Primeramente se desarrollará la técnica del método de elementos finitos.

2.- Se establecerán las ecuaciones gobernantes en la transferencia de calor y mecánica de fluidos.

3.- Con el auxilio de la computadora se comprobará la aplicación del método.

1.5 LIMITES DEL ESTUDIO

Durante este trabajo veremos la aplicación del método de elementos finitos a flujo potencial con soluciones analíticas a problemas prácticos. Estas soluciones son exactas en cuanto a las matemáticas, las únicas aproximaciones están en suponer que el fluido no tiene viscosidad.

1.6 REVISION BIBLIOGRAFICA

Este método, del elemento finito era solo para ingenieros hace pocos años, dando excelentes resultados, fue duramente criticado por los matemáticos quienes lo volvieron a reinventar pero con todos los pasos matemáticos probados rigurosamente y ampliado a casos más generales.

Aóualmente existe una variedad de libros que hablan del tema de elementos finitos aplicados al campo de la ingeniería.

A diferencia de la literatura antes mencionada que aporta toda la información científica, el objetivo de este trabajo es enseñar a los interesados del tema a utilizar esta herramienta que en este caso particular se aplica a un problema ya aproximado al suponer un flujo no viscoso.

CAPITULO 2

ANTECEDENTES

El desarrollo de la tecnología va a pasos agigantados y el estudio de problemas asociados con ésta, requiere frecuentemente de nuevas técnicas de análisis. A veces estas técnicas provienen de principios ya conocidos, que originalmente tenían poca utilidad por falta de equipo modernos, como por ejemplo la computadora digital.

El estudio de los termofluidos es un caso donde los avances han sido notorios. el movimiento de un fluido real, se describe por medio de un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales no lineales. Aún para el problema más sencillo, de un flujo uniforme alrededor de una placa plana inclinada o alrededor de un cilindro, soluciones analíticas tienen que basarse en alguna aproximación y por eso son de uso limitado. Estas aproximaciones pueden ser de ángulo de ataque pequeño en el caso de la placa y bajo número de Reynolds en el caso del cilindro.

En situaciones de interés práctico, la presencia de geometrías irregulares sólidas complica aún más la predicción del comportamiento del fluido, es por ello que el análisis teórico debe complementarse, cuando sea posible, con experimentos o métodos

numéricos. Este trabajo se enfoca al área de los métodos numéricos; uno de éstos, con gran aceptación es el “método de elementos finitos” que será el que se utilice aquí.

No se pretende, ni con mucho, hacer un análisis del método para lo cual existen ya bastantes libros, sino más bien una orientación de su aplicación a las áreas de mecánica de fluidos y transferencia de calor. Para lograr esto, se resuelven algunos problemas específicos cuya solución analítica es conocida y algunos otros demás alto grado de dificultad.

2.1 METODOS EXISTENTES

En la actualidad existen modelos matemáticos que describen el comportamiento de los fluidos, tienen una estrecha relación con problemas prácticos que existen actualmente. Sin embargo, hay una gran cantidad de problemas específicos en la dinámica de fluidos que no han sido resueltos, debido a las dificultades encontradas en la mayoría de los métodos analíticos y numéricos convencionales. Estas dificultades son ocasionadas principalmente por la no linealidad de las ecuaciones, producida al escoger una descripción Euleriana de los procesos y también, por lo difícil que es introducir las condiciones de frontera, cuando los cuerpos tienen una geometría un tanto irregular.

El método que ha sido usado para resolver estas dificultades y que además es bien conocido, es el “método de diferencias finitas” (Richtmyer y Morton, 1967, Roache, 1972), en el cual las derivadas parciales de las ecuaciones que gobiernan el fenómeno, son reemplazadas por cocientes de diferencias finitas. Una de las desventajas de éste método es que se aplica fácilmente sólo a problemas en que el dominio sea de una forma más o menos regular; sin embargo, se han resuelto una variedad de problemas teóricos y prácticos por medio de él.

Otro método numérico es el de “partículas en celda” (Evans y Harlow, 1957), en el cual se construye un sistema de celdas de tal manera, que se puede definir la posición de las partículas del fluido en términos de estas celdas, cada una de ellas está definida por un conjunto de variables, que describen las componentes de velocidad, energía interna, densidad y presión en la celda. Este método tiene un uso limitado dadas sus características.

Entre los últimos métodos que se han desarrollado para la solución de problemas en dinámica de fluidos, está el “método de panel” (Hess, 1975), el cual consiste en cubrir la superficie de la frontera sólida por un número infinito de pequeñas áreas, llamadas paneles, cada una de las cuales está formada por singularidades de una cierta clase, que tienen una densidad indeterminada. Las singularidades se distribuyen de tal manera, que orientan el flujo alrededor de un determinado cuerpo. Generalmente se usan paneles formados por fuentes o dobletes para cuerpos de superficies sin sustentación y formados por vórtices para superficies con sustentación. La condición que deben cumplir las ecuaciones es que el flujo debe ser tangente a cada uno de los paneles, con lo que se puede calcular la densidad de las singularidades. El flujo total es la superposición de un flujo uniforme y un flujo inducido por las singularidades, con lo cual se puede determinar la velocidad y presión en cualquier punto del flujo. Este método ha sido aplicado felizmente, tanto en problemas aerodinámicos en dos y tres dimensiones con cuerpos de geometría compleja, como a problemas de flujos internos, no uniforme y en estado transitorio.

En años recientes ha tenido una gran popularidad el “método de elementos finitos” en las áreas de mecánica de fluidos y transferencia de calor, debido a su gran flexibilidad. Está íntimamente relacionado con los “métodos variacionales” y los “métodos de residuos pesados” (Finlayson, 1972). Los principios variacionales son usados en combinación con el método de Rayleigh-Ritz, pero desgraciadamente, éstos no pueden ser encontrados en algunos problemas de ingeniería, particularmente cuando las ecuaciones diferenciales no son auto-adjuntas. Los residuos pesados pueden tener la

forma de los métodos de Galerkin, mínimos cuadrados y colocación. El método de residuos pesados utiliza el concepto de la proyección ortogonal de un residuo de una ecuación diferencial, sobre un subespacio formado por ciertas funciones de peso. En el método de elementos finitos, podemos usar tanto los principios variacionales, cuando existen, como los residuos pesados a través de aproximaciones.

En las aplicaciones de elementos finitos a la dinámica de fluidos, generalmente el método de Galerkin es considerado la herramienta más conveniente en la formulación de los modelos de elementos finitos, ya que no requiere principios variacionales. Normalmente el método de mínimos cuadrados requiere funciones de interpolación de alto orden, aunque el comportamiento físico pueda ser descrito por ecuaciones lineales de bajo orden.

En este trabajo se utilizará el método de elementos finitos combinado con el método de Galerkin ya que es el más conveniente.

2.2 UTILIDAD DEL METODO DE ELEMENTOS FINITOS

Al tratar de resolver una ecuación diferencial lineal que describe el comportamiento de cierto fenómeno, uno de los principales problemas que se presentan es cómo introducir las condiciones de frontera, sobre todo si el cuerpo con el que se está trabajando tiene una configuración irregular. La mayoría de las ecuaciones diferenciales lineales, tienen solución para algunos problemas específicos, en los que las fronteras presentan alguna simetría, pero en la realidad, los cuerpos pueden tener configuraciones bastante irregulares, como es el caso de una ala de avión, en la que no existe simetría por ningún lado.

Con métodos analíticos es prácticamente imposible resolver estos problemas en general y los demás métodos numéricos exigen una configuración más o menos regular.

Aquí está una de las principales ventajas del método de elementos finitos, ya que la superficie del cuerpo se puede conformar a través de pequeñas regiones y se pueden colocar tantas como sea necesario para lograr un perfil aproximado del cuerpo. Además, el valor de la condición de frontera puede ser diferente entre una y otra región adyacente, con lo que se puede atacar una variedad de problemas reales.

Otra ventaja del método, es que al aplicar la formulación de elementos finitos a la ecuación diferencial, quedan separadas automáticamente las condiciones de frontera (de Dirichlet y de Neumann), algo que es muy útil.

En el caso de problemas modelados por medio de ecuaciones diferenciales no lineales, el método de elementos finitos es útil para resolverlos, ya que se puede combinar este método con algún método iterativo, a fin de encontrar la solución. Esto se verá más claro en el capítulo dedicado a flujo compresible (Cap. VI).

Una desventaja de este método, estriba en que hay que darle gran cantidad de datos entre coordenadas, condiciones iniciales, de frontera, etc., lo que ocasiona por un lado un sobre esfuerzo personal y por tanto la posibilidad de errores al teclear los datos para una programa de computación. Afortunadamente, se ha estado trabajando en ello y se han ideado formas para que el mismo programa calcule la mayoría de los datos que necesita, a través de un preprocesamiento.

Otro problema es que los programas son muy extensos y utilizan un gran tiempo de procesamiento; es por ello que siempre se tratan de utilizar métodos de integración numérica, de solución de sistemas de ecuaciones, etc., que sean muy eficientes para reducir los tiempos.

Por lo anteriormente expuesto, el método de elementos finitos tiene una utilidad en la solución de problemas de la dinámica de fluidos y de muchas otras ramas en las que intervengan ecuaciones diferenciales. Sin embargo, cuando un problema es difícil, lo

sigue siendo, no importa el método que se utilice; lo único, es que el método de elementos finitos nos da la posibilidad de resolverlo.

2.3 RESUMEN HISTORICO

El método de elementos finitos fué originalmente desarrollado por ingenieros estructurales de aviación en los años 50's para analizar los grandes sistemas estructurales que existen en los aviones, Turner, Clough, Martin y Topp (1956), presentaron el primer artículo relacionado con ésto; continuaron con los estudios Clough (1960) y Argyris (1963), además de otros. La aplicación del método de elementos finitos a problemas no estructurales, tales como flujo de fluidos y electromagnetismo, fué iniciado por Zienkiewicz y Cheung (1965) y por último, Oden (1972) ha contribuido en las aplicaciones a diferentes clases de problemas en la mecánica no lineal.

Han dado un impulso significativo a la teoría de elementos finitos, el concepto clásico del método variacional de Rayleigh-Ritz (Rayleigh, 1877, Ritz 1909) y los métodos de residuos pesados, modelados después del método de Galerkin (1965), ya que existe una relación importante entre ellos. En años recientes varios autores han contribuido al desarrollo de la teoría matemática de elementos finitos; algunos de ellos son Babuska y Aziz (1972), Ciarlet y Raviart (1972), Aubin (1972), Strong y Fix (1973) y Oden y Reddy (1976), todos ellos influenciados grandemente por los trabajos de Lions y Magenes (1968)

CAPITULO 3

METODO DE ELEMENTOS FINITOS

El método de elementos finitos es un procedimiento de aproximación para la solución de ecuaciones diferenciales, con condiciones en la frontera y condiciones iniciales, del tipo que se presentan en problemas de ingeniería, física y matemática. El procedimiento básicamente envuelve la división del dominio en muchas pequeñas regiones, llamadas “elementos”, convenientemente distribuidas, las cuales pueden ser de forma triangular, cuadrilátera, etc., y usando una interpolación para describir el comportamiento de estos subdominios. Un número satisfactorio de puntos, llamados “nodos”, son especificados para cada elemento y a cada uno de ellos le corresponde un valor de la variable o las variables de la ecuación diferencial, que se obtiene interpolando dentro de cada elemento. Usando el principio variacional o el método de residuos pesados las ecuaciones diferenciales que gobiernan el dominio, se transforman en ecuaciones de elementos finitos, que gobiernan aisladamente a cada uno de los elementos y en general son ecuaciones algebraicas. Estas ecuaciones son convenientemente ensambladas para formar un sistema global, en el cual se pueden introducir las condiciones de frontera y las condiciones iniciales, según se requiera. Por último, los valores de la variable en los nodos, son determinados de la solución del sistema de ecuaciones algebraicas.

3.1 DIFERENTES METODOS

3.1.1 METODO DE DIFERENCIAS FINITAS

El método de diferencias finitas aproxima las derivadas en la ecuación diferencial gobernante usando ecuaciones de diferencias. Este método es útil para resolver problemas de transferencia de calor y mecánica de fluidos y trabajos para regiones bidimensionales con fronteras paralelas a los ejes coordenados. El método, sin embargo, es bastante molesto, cuando las regiones tienen regiones curvas o irregulares, y es difícil escribir programas de computadora generales para el método.

3.1.2 METODO VARIACIONAL

La aproximación variacional implica la integral de una función que produce un número. La función que produce los números mínimos tiene la propiedad adicional de satisfacer una ecuación diferencial específica. Para ayudar a aclarar este concepto, se considera la integral

$$\Pi = \int_0^h [D/2 \{dy/dx\}^2 - Qy] \quad 3.1$$

El valor numérico de Π puede ser calculado dada una ecuación específica $y = f(x)$. El cálculo de variaciones muestra, sin embargo, que la ecuación particular $y = g(x)$, la cual da el mínimo valor numérico para Π , es la solución a la ecuación diferencial

$$Dd^2y/dx^2 + Q = 0 \quad 3.2$$

Con las condiciones de frontera $y(0) = y_0$ y $y(h) = y_h$.

El proceso puede ser invertido. Dada una ecuación diferencial, una solución aproximada puede ser obtenida con la sustitución de funciones prueba diferente en la

funcional aproximada. La función prueba que da el valor mínimo de Π es la solución aproximada.

El método variacional es la base para muchas formulaciones de elemento finito, pero tiene una mayor desventaja: no es aplicable a cualquier ecuación diferencial que contenga un término de primera derivada.

3.1.3 METODO DE RESIDUOS PESADOS

El método de residuos pesados también implica una integral. En este método, una solución aproximada es sustituida en la ecuación diferencial. Entonces la solución aproximada no satisface la ecuación, entonces resulta un residuo o un término de error. Se supone que $y = h(x)$ es una solución aproximada para (2.2). Sustituyendolo da

$$Dd^2h(x)/dx^2 + Q = R(x) \neq 0 \quad (3.3)$$

entonces $y = h(x)$ no satisface la ecuación. El método de residuo pesado requiere que

$$\int_0^h W_i(x) R(x) dx = 0 \quad (3.4)$$

El residuo $R(x)$ es multiplicado por una función de peso $W_i(x)$, y la integral del producto se requiere que sea cero. El número de las funciones de peso es igual al número de coeficientes desconocido en la solución aproximada. Hay varias funciones de peso para seleccionar, y algunas de las más populares a seleccionar son:

3.1.3.1 METODO DE COLOCACION

Las funciones impulso $W_i(x) = \delta(x - X_i)$ son selectas como las funciones de peso. Esta selección es equivalente a requerir el residuo para desaparecer en puntos específicos. El número de puntos selectos es igual al número de coeficientes indeterminados en la solución aproximada.

3.1.3.2 METODO DEL SUBDOMINIO

Cada función de peso es selecta como unitario, $W_i(x) = 1$, sobre una región específica. Esto es equivalente al requerimiento de la integral del residuo para desaparecer sobre un intervalo de la región. El número de intervalos de integración es igual al número de coeficientes indeterminados en la solución aproximada.

3.1.3.3 METODO DE GALERKIN

El método de Galerkin usa las mismas funciones para $W_i(x)$ que fue usado en la ecuación de aproximación. Esta aproximación es la base del método de elemento finito para problemas que implican términos de primera derivada. Este método da el mismo resultado que el método variacional cuando se aplica a ecuaciones diferenciales que son auto-adjunta. El método de Galerkin es usado para desarrollar el elemento finito a las ecuaciones para los problemas de campo.

3.1.3.4 METODO DE MINIMOS CUADRADO

El método de mínimos cuadrado utiliza el residuo como la función de peso y obtiene un nuevo término de error definido por

$$E_r = \int_0^h [R(x)]^2 dx \quad (3.5)$$

El error es minimizado con respecto a los coeficientes desconocidos en la solución aproximada. El método de mínimos cuadrados ha sido utilizado para formular soluciones de elemento finito, pero no es tan popular como el método de Galerkin y la aproximación variacional.

3.2 ELEMENTO LINEAL UNIDIMENSIONAL

El objetivo inmediato es discutir la división de una región unidimensional en elementos lineales y desarrollar una ecuación elemento. El elemento lineal es utilizado para obtener una solución aproximada a

$$Dd^2\phi/dx^2+Q=0 \quad (3.6)$$

3.2.1 DIVISION DE LA REGION EN ELEMENTOS

La región unidimensional es un segmento de línea y la división en subregiones o elementos es bastante directo. El segmento de línea es dividido en segmentos cortos con el uso de nodos (Figura 3.1). Los nodos son generalmente numerados consecutivamente de izquierda a derecha como están los elementos. Los números de los elementos están encerrados entre paréntesis para distinguirlos de los números de nodos.

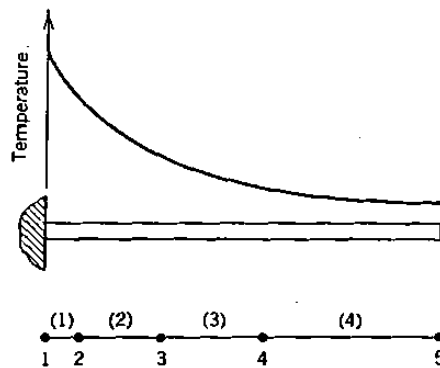


Fig. 3.1

3.2.2 EL ELEMENTO LINEAL

El elemento lineal unidimensional es un segmento de línea con una longitud L y dos nodos, uno en cada extremo (Figura 3.2). Los nodos son señalados por "i" y "j" y los valores nodales por ϕ_i y ϕ_j . El origen del sistema de coordenadas está a la izquierda del nodo i. El parámetro ϕ varía linealmente entre los nodos, y la ecuación para ϕ es

$$\phi = a_1 + a_2x \quad (3.7)$$

Los coeficientes a_1 y a_2 pueden ser determinados usando las condiciones nodales

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_i & \text{en} & \quad x = X_i \\ \phi &= \phi_j & \text{en} & \quad x = X_j \end{aligned} \quad (3.8)$$

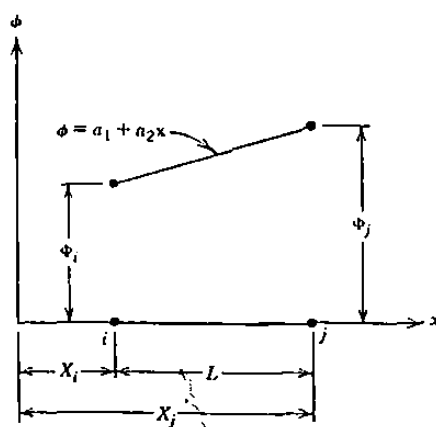


Fig. 3.2

Para desarrollar el par de ecuaciones

$$\begin{aligned}\phi_i &= a_1 + a_2 X_i \\ \phi_j &= a_1 + a_2 X_j\end{aligned}\quad (3.9)$$

en la cual se da a_1 y a_2 como

$$\begin{aligned}a_1 &= (\phi_i X_j - \phi_j X_i) / (X_j - X_i) \\ a_2 &= (\phi_j - \phi_i) / (X_j - X_i)\end{aligned}\quad (3.10)$$

sustituyendo (3.10) en (3.7) y reordenando da

$$\phi = (X_j - x) / L * \phi_i + (x - X_i) / L * \phi_j \quad (3.11)$$

donde $(X_j - X_i)$ ha sido reemplazado por la longitud del elemento L .

La ecuación (3.11) es una forma estándar de elemento finito. Los valores nodales son multiplicados por las funciones lineales de x , las cuales son llamadas funciones de forma o funciones de interpolación. Estas funciones son denotadas por N con un subíndice para indicar el nodo con el cual una función de forma específica es asociado. Las funciones de forma en (3.11) son denotadas por N_i y N_j con

$$N_i = (X_j - x) / L \quad \text{y} \quad N_j = (x - X_i) / L \quad (3.12)$$

Las ecuaciones (3.11) pueden ser escritas como

$$\phi = N_i \phi_i + N_j \phi_j \quad (3.13)$$

y también como

$$\phi = [N] \{\phi\} \quad (3.14)$$

donde $[N] = [N_i \ N_j]$ es un vector renglón de las funciones de forma y

$$\{\phi\} = \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{Bmatrix}$$

es un vector columna conteniendo los valores nodales del elemento.

Cada función de forma tiene un valor de uno en su propio nodo y cero en el otro nodo y las dos funciones de forma suman uno. Una tercera característica es que las funciones de forma son generalmente polinomiales del mismo tipo que la ecuación de interpolación original. La ecuación (3.7) es una ecuación lineal y las funciones de forma son ecuaciones lineales. Si las ecuaciones de interpolación ha sido un modelo cuadrático definido por tres nodos, las funciones de forma resultante habrán sido también ecuaciones cuadráticas. Otra característica es que las derivadas de las funciones de forma con respecto a "x" suman cero. Las funciones de forma se muestran en la figura 3.3.

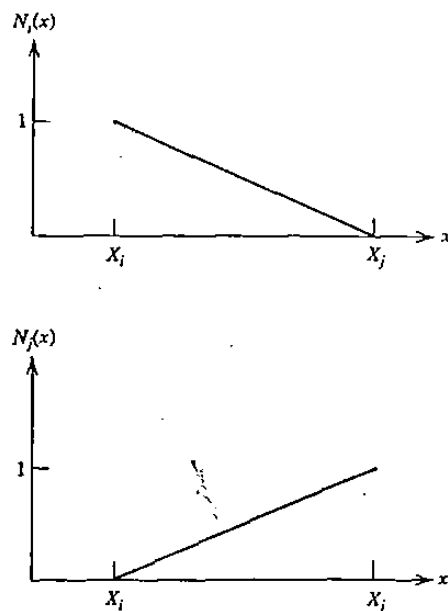


Fig. 3.3

3.2.3 UNA ECUACION UNIFORMEMENTE CONTINUA

Un ecuación uniformemente continua para una región unidimensional puede ser construida por la conexión de varias ecuaciones lineales con las propiedades desarrolladas en la sección anterior. Cada una de estas ecuaciones puede ser escrita como

$$\phi^{(e)} = N_i^{(e)} \phi_i + N_j^{(e)} \phi_j \quad (3.15)$$

dónde $N_i^{(e)} = (X_j - x)/(X_j - X_i)$ y $N_j^{(e)} = (x - X_i)/(X_j - X_i)$ (3.16)

El superíndice (e) indica la cantidad de elementos. Los valores de i y j para una correspondiente (e) son obtenidos de la red. El nodo i es el nodo del lado izquierdo de un elemento. La información del elemento para la red en la Figura 3.1 es:

e	i	j
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5

La ecuación para cada elemento en Figura 3.1 es

$$\begin{aligned} \phi^{(1)} &= N_1^{(1)} \phi_1 + N_2^{(1)} \phi_2 \\ \phi^{(2)} &= N_2^{(2)} \phi_2 + N_3^{(2)} \phi_3 \\ \phi^{(3)} &= N_3^{(3)} \phi_3 + N_4^{(3)} \phi_4 \\ \phi^{(4)} &= N_4^{(4)} \phi_4 + N_5^{(4)} \phi_5 \end{aligned} \quad (3.17)$$

3.3 EJEMPLO DE ELEMENTO FINITO

El objetivo de este capítulo es ilustrar el método de elemento finito con el desarrollo de una solución aproximada para la ecuación diferencial unidimensional

$$D \cdot d^2\phi/dx^2 + Q = 0 \quad (3.18)$$

con las condiciones de frontera

$$\phi(0) = \phi_0 \quad \text{y} \quad \phi(H) = \phi_H \quad (3.19)$$

Dos problemas son contemplado en (3.4): la deflexión de la viga simplemente apoyada cuando el diagrama del momento flexionante es conocido y el flujo de calor a través de una pared compuesta cuando las temperaturas de la superficie son conocidas.

Las ecuaciones de elemento finito son obtenidas usando la formulación de Galerkin. La evaluación de la integral residual conduce a una ecuación nodal que es aplicada de una manera para generar un sistema de ecuaciones lineales. La ecuación lineal es usada para resolver un problema de deflexión de viga.

3.3.1 FUNCIONES DE PESO

Un sistema de ecuaciones lineales es generado para la evaluación de la integral residual de peso

$$-\int_0^H W(x) (D \cdot d^2\phi/dx^2 + Q) dx \quad (3.20)$$

usando una nueva función de peso para cada nodo donde ϕ es conocido. La formulación de Galerkin del método residual pesado requiere que las funciones

pesadas sean construidas usando las funciones forma N_i y N_j . Las funciones pesadas en la formulación de elemento finito de Galerkin son definidas como sigue: Las funciones pesadas W_s , para los s th nodos, consiste de las funciones forma asociadas con los s th nodos.

Las funciones pesadas para tres nodos de una red lineal (Figura 3.4) consiste de las funciones forma para tres nodos.

$$W_3(x) = \begin{cases} N_3^{(2)} & X_2 \leq x \leq X_3 \\ N_3^{(3)} & X_3 \leq x \leq X_4 \end{cases} \quad (3.21)$$

En general,

$$W_s(x) = \begin{cases} N_s^{(s)} & X_r \leq x \leq X_s \\ N_s^{(s+1)} & X_s \leq x \leq X_{r+1} \end{cases} \quad (3.22)$$

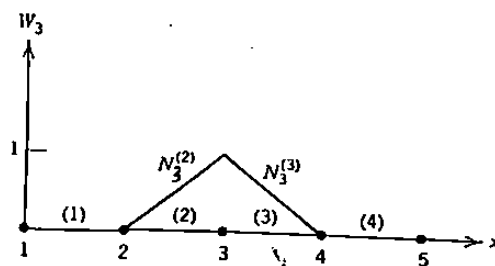


Fig. 3.4

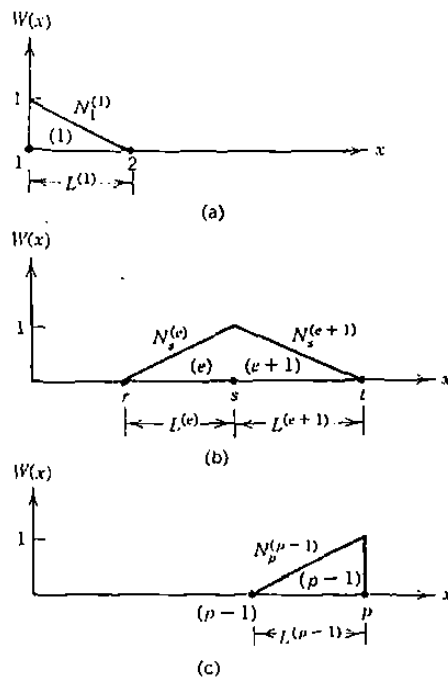


Fig. 3.5

Esta función es ocasionalmente llamada una función sombrero por razones aparentes a la Figura 3.5b. Las funciones pesadas para el primer y el último nodo son mostrados en la Figura 3.5a y 3.5c. Las ecuaciones respectivas son

$$W_1(x) = N_1^{(1)} \quad \text{y} \quad W_p(x) = N_p^{(p-1)} \quad (3.23)$$

3.3.2 INTEGRAL RESIDUAL PESADA

Después de definir las funciones pesadas, la siguiente etapa es para evaluar la integral pesada (3.20). Usando la secuencia de nodos $r, s,$ y t en la Figura 3.4b. encontramos que (3.20) llega a ser

$$R_s = R_s^{(e)} + R_s^{(e+1)} = - \int_{x_r}^{x_s} [N_s (D^* d^2 \phi / dx^2 + Q)]^{(e)} dx$$

$$-\int_{x_s}^{x_t} [N_s(D^*d^2\phi/dx^2 + Q)]^{(e+1)} dx = 0 \quad (3.24)$$

debido a que $W_s = 0$ para $x < X_r$ y $x > X_t$. La integral dividida en dos partes debido a que $W_s(x)$ está definido por dos ecuaciones separadas en el intervalo $X_r \leq x \leq X_t$. Los términos $R_s^{(e)}$ y $R_s^{(e+1)}$ representan las contribuciones de elementos (e) y (e+1) para la ecuación residual para el nodo s.

Hay un problema asociado con cada integral en (3.24). La solución aproximada no tiene continuidad en la primera derivada $d\phi/dx$; por lo tanto, la integral de $d^2\phi/dx^2$ no está definida. Esta dificultad puede ser evitada, sin embargo, cambiando $d^2\phi/dx^2$ en un nuevo término. Considerar la primera integral en (3.24) y note que

$$d/dx(N_s^*d\phi/dx) = N_s^*d^2\phi/dx^2 + dN_s/dx*d\phi/dx \quad (3.25)$$

entonces

$$N_s^*d^2\phi/dx^2 = d/dx(N_s^*d\phi/dx) - dN_s/dx*d\phi/dx \quad (3.26)$$

Sustituyendo en la integral da

$$\begin{aligned} -\int_{x_r}^{x_s} (N_s^*D^*d^2\phi/dx^2)^{(e)} dx &= - (D^*N_s^*d\phi/dx)^{(e)} \Big|_{x_r}^{x_s} \\ &+ \int_{x_r}^{x_s} (D^*dN_s/dx*d\phi/dx)^{(e)} dx \end{aligned} \quad (3.27)$$

Un conjunto similar de operaciones aplicado al primer término de la segunda integral

Un conjunto similar de operaciones aplicado al primer término de la segunda integral

Un conjunto de operaciones aplicadas al primer término de la segunda integral en (3.24) produce

$$\begin{aligned}
 & -\int_{x_s}^{x_t} (N_s^* D^* d^2\phi/dx^2)^{(e+1)} dx = - (D^* N_s^* d\phi/dx)^{(e+1)} \Big|_{x_s}^{x_t} \\
 & + \int_{x_s}^{x_t} (D^* dN_s/dx^* d\phi/dx)^{(e+1)} dx
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Los primeros términos en cada una de las ecuaciones 3.27 y 2.28 se simplifica debido a que las funciones forma son cero o uno en los nodos respectivos. La ecuación residual completa es

$$\begin{aligned}
 R_s &= R_s^{(e)} + R_s^{(e+1)} = - \int_0^H W_s (D^* d^2\phi/dx^2 + Q) dx \\
 &= - (D^* d\phi/dx)^{(e)} \Big|_{x=x_s} + \int_{x_r}^{x_s} (D^* dN_s/dx^* d\phi/dx - N_s^* Q)^{(e)} dx \\
 &+ (D^* d\phi/dx)^{(e+1)} \Big|_{x=x_s} \\
 &+ \int_{x_s}^{x_t} (D^* dN_s/dx^* d\phi/dx - N_s^* Q)^{(e+1)} dx = 0
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

El par de términos evaluados en $x = X_s$ establece un requerimiento de interelemento.

3.3.3 EVALUACION DE LA INTEGRAL

La evaluación de las integrales en (3.29) da la ecuación residual para un nodo interior. Las ecuaciones para el primer y el último nodo puede ser obtenido de estas operaciones.

Empezando con el elemento (e)

$$\phi^{(e)} = N_r \phi_r + N_s \phi_s$$

$$\phi^{(e)} = ((X_s - x)/L) * \phi_r + ((x - X_r)/L) * \phi_s \quad (3.30)$$

donde

$$N_s^{(e)} = (x - X_r)/L, \quad dN_s^{(e)}/dx = 1/L \quad (3.31)$$

y

$$d\phi^{(e)}/dx = (1/L) * (-\phi_r + \phi_s) \quad (3.32)$$

Sustitución de los términos apropiados y evaluación de las integrales dadas

$$\int_{x_r}^{x_s} (D * dN_s/dx * d\phi/dx) dx = (D/L) * (-\phi_r + \phi_s) \quad (3.33)$$

y

$$\int_{x_r}^{x_s} Q * N_s dx = Q * L/2 \quad (3.34)$$

Las ecuaciones (3.33) y (3.34) están combinadas con la contribución del interelemento por el elemento (e) para dar

$$R_s^{(e)} = -(D * d\phi/dx)^{(e)} \Big|_{x=x_s} + (D/L) * (-\phi_r + \phi_s) - Q * L/2 \quad (3.35)$$

Procediendo con la segunda integral de (3.29)

$$\phi^{(e+1)} = N_s \phi_s + N_t \phi_t$$

$$\phi^{(e+1)} = ((X_t - x)/L) * \phi_s + ((x - X_s)/L) * \phi_t \quad (3.36)$$

donde

$$N_s^{(e+1)} = (X_t - x)/L, \quad dN_s^{(e+1)}/dx = -1/L \quad (3.37)$$

y

$$d\phi^{(e+1)}/dx = (1/L)(-\phi_s + \phi_t) \quad (3.38)$$

La evaluación de las integrales da

$$\int_{X_s}^{X_t} (D * dN_s/dx * d\phi/dx) dx = (D/L)(\phi_s - \phi_t) \quad (3.39)$$

$$\int_{X_s}^{X_t} Q * N_s dx = QL/2 \quad (3.40)$$

y

$$R_s^{(e+1)} = D * d\phi/dx \Big|_{x=X_s} + (D/L)(\phi_s - \phi_t) - QL/2 \quad (3.41)$$

Combinando las ecuaciones (3.35) y (3.41) dan la ecuación residual para el nodo s

$$\begin{aligned} R_s &= (D * d\phi/dx)^{(e+1)} \Big|_{x=X_s} - (D * d\phi/dx)^{(e)} \Big|_{x=X_s} \\ &\quad - (D/L)^{(e)} \phi_t + [(D/L)^{(e)} + (D/L)^{(e+1)}] \phi_s - (D/L)^{(e+1)} \phi_t \\ &\quad - (QL/2)^{(e)} - (QL/2)^{(e+1)} = 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

3.4 FORMULACION DE GALERKIN DE LAS MATRICES ELEMENTO

El objetivo de este capítulo es para determinar las contribuciones elemento para el sistema de ecuaciones finales y mostrar donde estas contribuciones están localizadas. La notación matricial es usada, y una matriz rígida elemento y un vector fuerza elemento son definidos por la ecuación analizada .

Hay tres puntos para concervar en mente como las matrices elemento son desarrolladas. Primero, las ecuaciones residuales son generalmente arregladas ensecuencia numérica, esto es, $R_1, R_2, \dots, R_{p-1}, R_p$ donde hay p valores nodales. Segundo, los valores nodales $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ son arreglados secuencialmente dentro de una ecuación. Tercero, una ecuación es desarrollada para cada nodo. Las condiciones de frontera son incorporadas después de que todas las ecuaciones han sido desarrolladas.

3.4.1 MATRICES ELEMENTO

La discusión comienza con la definición de un vector $\{R\}$. Cada componente de $\{R\}$ representa una ecuación residual . El vector es

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_{p-1} \\ R_p \end{Bmatrix}$$

donde R_β es la ecuación residual para el nodo β . La ecuación residual es además subdividida en contribuciones elemento. Por ejemplo $R_\beta^{(e)}$ es la contribución del elemento (e) a la ecuación residual para el nodo β .

Las funciones pesadas para una red de cuatro elementos se muestra en la Fig.3.6 .

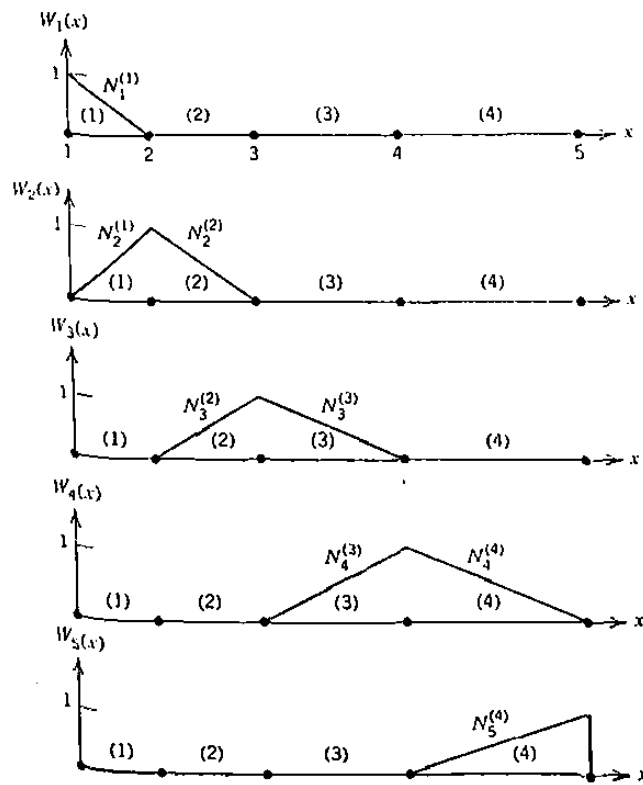


Fig. 3.6

Analizando estas funciones desde un punto de vista elemento más bien que desde un punto de vista de ecuación muestra que el elemento tres contribuye con valores no cero a las ecuaciones tres y cuatro. Sus contribuciones a la ecuación tres es

$$R_3^{(3)} = - \int_{x_3}^{x_4} N_3^{(3)} (D^* d^2 \phi / dx^2 + Q) dx \quad (3.43)$$

Mientras que su contribución a la ecuación cuatro es

$$R_4^{(3)} = - \int_{x_3}^{x_4} N_4^{(3)} (D d^2 \phi / dx^2 + Q) dx \quad (3.44)$$

El elemento tres no contribuye a las otras ecuaciones debido a que cada función pesada excepto W_3 y W_4 son cero en el elemento tres.

Los resultados para el elemento tres pueden ser generalizados. Dado un elemento arbitrario con nodos i y j (Figura 3.7), encontramos que contribuye

$$R_i^{(e)} = - \int_{x_i}^{x_j} N_i(x) (D^* d^2 \phi / dx^2 + Q) dx \quad (3.45)$$

A la ecuación i y

$$R_j^{(e)} = - \int_{x_i}^{x_j} N_j(x) (D^* d^2 \phi / dx^2 + Q) dx \quad (3.46)$$

A la ecuación j .

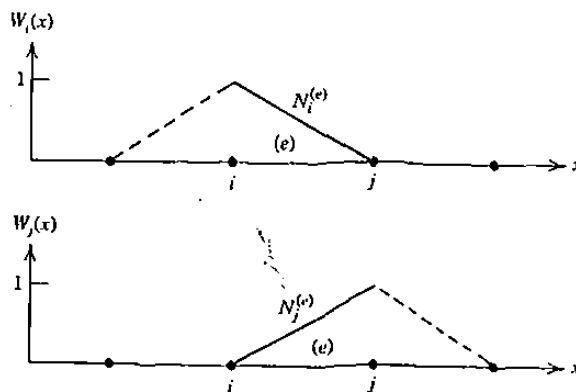


Fig. 3.7

Las integrales en (3.45) y (3.46) ya fueron evaluadas anteriormente. La primera integral, $R_i^{(e)}$, es equivalente a $R_s^{(e+1)}$, (3.41), con $s = i$ y $t = j$ mientras que $R_j^{(e)}$ es el mismo que $R_s^{(e)}$, (3.35), con $r = i$ y $s = j$. Usando (3.35) y (3.41) da

$$R_i^{(e)} = D^*(d\phi/dx)_{x=x_i} + (D/L)(\phi_i - \phi_j) - QL/2 \quad (3.47)$$

$$R_j^{(e)} = -D^*(d\phi/dx)_{x=x_j} + (D/L)(-\phi_i + \phi_j) - QL/2 \quad (3.48)$$

Las ecuaciones (3.47) y (3.48) se pueden escribir como

$$\begin{Bmatrix} R_i^{(e)} \\ R_j^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_i^{(e)} \\ I_j^{(e)} \end{Bmatrix} + (D/L) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{Bmatrix} - (QL/2) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.49)$$

o

$$\{R^{(e)}\} = \{I^{(e)}\} + [k^{(e)}]\{\phi^{(e)}\} - \{f^{(e)}\} \quad (3.50)$$

donde $R^{(e)}$ es la contribución del elemento (e) para el sistemas de ecuaciones finales. Esta contribución consiste de una matriz rígida elemento $[k^{(e)}]$ y un vector fuerza elemento $\{f^{(e)}\}$. Los otros vectores son

$$\{\phi^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{Bmatrix}$$

el cual es el vector columna de los valores nodales y

$$\{I^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} I_i^{(e)} \\ I_j^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D^*d\phi/dx|_{x=x_i} \\ -D^*d\phi/dx|_{x=x_j} \end{Bmatrix} \quad (3.51)$$

el cual es la contribución elemento para el requerimiento interelemento.

Las matrices elemento son los resultados importantes y ellos son

$$[k^{(e)}] = (D/L) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

y

$$\{f^{(e)}\} = (QL/2) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.53)$$

La matriz rígida elemento es la matriz que multiplica al vector columna de los valores nodales, $\{\phi^{(e)}\}$. Las ecuaciones (3.52) y (3.53) son útiles debido a que son fáciles de programar por computadora; también, pueden ser rápidamente determinadas donde cada coeficiente es ubicado en el sistema de ecuaciones finales.

El vector $\{R\}$ representa un sistema de ecuaciones que simbólicamente es

$$\{R\} = [K]\{\phi\} - \{F\} = 0 \quad (3.54)$$

La ecuación (3.49) establece que los coeficientes en el primer renglón de $[k^{(e)}]$ y $\{f^{(e)}\}$ son ubicados en el renglón i de $[K]$ y $\{F\}$ debido a que el renglón i es el renglón asociado con $R_i^{(e)}$. Similarmente, los coeficientes del segundo renglón de $[k^{(e)}]$ y $\{f^{(e)}\}$ son ubicados en el renglón j de $[K]$ y $\{F\}$ debido a que está asociado con $R_j^{(e)}$. Los coeficientes de $[k^{(e)}]$ están ubicados en las columnas i y j de $[K]$ debido a que los coeficientes de la primera columna multiplica a ϕ_i y los de la segunda columna multiplican a ϕ_j .

3.4.2 METODO DE RIGIDEZ DIRECTO

El método de rigidez directo es el nombre dado al procedimiento para la incorporación de las matrices elemento en el sistema de ecuaciones finales. Los valores numéricos de i y j para un elemento específico son escrito sobre las columnas de $[k^{(e)}]$ y a lo largo del lado de $[k^{(e)}]$ y $\{f^{(e)}\}$, esto es,

$$[k^{(e)}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \quad \{f^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \quad (3.55)$$

El procedimiento de la rigidez directa es ilustrado con el uso del conjunto hipotético de las siguientes matrices

$$[k^{(e)}] = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad \{f^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} 8 \\ 9 \end{Bmatrix}$$

para un elemento lineal entre los nodos 2 y 3 ($i=2, j=3$). Usando estos valores de i y j da

$$[k^{(e)}] = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{matrix}, \quad \{f^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} 8 \\ 9 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}$$

y la localización de los coeficientes en $[k]$ y $\{F\}$ es

4 contribuye a K_{22}

6 contribuye a K_{23}

5 contribuye a K_{32}

7 contribuye a K_{33}

8 contribuye a F_2

9 contribuye a F_3

3.4.3 PROPIEDADES DE LA MATRIZ RIGIDA GLOBAL

La matriz rígida, $[K]$, es generalmente simétrica y positiva definida para problemas estructurales y para gobernar ecuaciones diferenciales que son adjuntas. Los coeficientes de la diagonal, K_{ij} , son generalmente positivos y relativamente grande cuando se compara a los valores de la diagonal exterior del mismo renglón.

Las ecuaciones de elemento finito son generalmente resueltas usando la eliminación gaussiana, debido a que el sistema de ecuaciones no siempre es diagonalmente dominante; esto es, que K_{ij} puede ser menor que la suma de los coeficientes de la diagonal exterior del renglón i . Esto ocurre en algunos problemas estructurales. La diagonal de coeficiente relativamente grande permite la eliminación gaussiana para ser ejecutada sin intercambio de renglones (pivoteando). Esto es un hecho importante debido a que solamente los coeficientes no cero necesitan ser almacenados en la computadora. La propiedad de simetría es también importante debido a que elimina la necesidad de almacenar los coeficientes debajo de la diagonal principal.

Otra propiedad importante poseída por $[K]$ es relatada por la malla elemento y los números de nodo. La matriz global $[K]$ es bandeada. Una matriz bandeada tiene la característica de que todos los coeficientes no cero están localizados relativamente cerrados en la diagonal principal y que todos los coeficientes más allá del ancho de banda son cero. Esto se ilustra esquemáticamente en la figura 3.8 donde el ancho de banda es mostrado por las líneas diagonales. Las C's denotan términos no cero. Es permisible tener coeficientes ceros en el ancho de banda.

El ancho de banda de $[K]$ está relacionado a la numeración de los nodos. El ancho de banda de una malla unidimensional de los elementos lineales cuyos nodos son numerados en sucesión de izquierda a derecha es dos. La matriz consiste de la diagonal principal y una diagonal en cada lado de ella. Todos los otros coeficientes son ceros.

$$\begin{array}{c}
 \longleftarrow \quad \quad \quad \longrightarrow \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 C & C & C & 0 & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 C & C & C & C & C & C & 0 & 0 & 0 \\
 C & C & C & C & 0 & C & C & 0 & 0 \\
 0 & C & C & C & C & C & C & C & 0 \\
 C & C & 0 & C & C & C & C & 0 & C \\
 0 & C & C & C & C & C & C & C & C \\
 0 & 0 & C & C & C & C & C & C & 0 \\
 0 & 0 & 0 & C & 0 & C & C & C & C \\
 0 & 0 & 0 & 0 & C & C & 0 & C & C
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

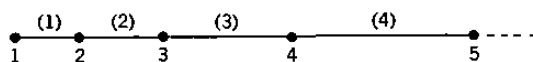
Fig. 3.8

La razón para la propiedad bandeada es obtenida para el estudio de cómo es construido el sistema de ecuaciones. Cada ecuación individual es asociada con un nodo; esto es, la tercera ecuación de un sistema es la ecuación residual para el tercer nodo. Los coeficientes no cero en la tercera ecuación ocurre en las columnas correspondiendo a los números de nodos de los elementos que toca nodo tres. Considerar la malla unidimensional en la figura 3.9a. Los elementos dos y tres tocan al nodo tres así que las columnas dos, tres, y cuatro contendrán coeficientes no cero. Las columnas uno y cinco contienen valores cero debido a que los elementos uno y cinco no tocan al nodo tres. Una situación más general ocurre en mallas bidimensionales. Considerar los cuatro triángulos tocando el nodo 12, figura 3.9b. Los coeficientes no cero ocurre en las columnas 6,10,12,14, y 21.

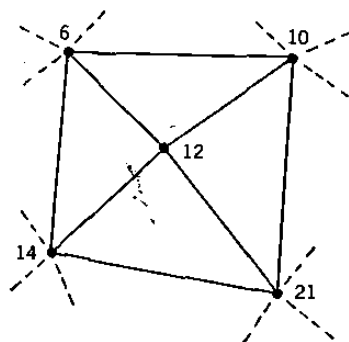
El ancho de banda es una más de las grandes distancias entre el coeficiente diagonal y el último coeficiente no cero en el renglón. Todos los renglones deben ser considerados en este cálculo. La ecuación general para el calculo del ancho de banda de $[K]$ para una malla de elemento finito es

$$NBW = \max[BW^{(e)}] + 1$$

Donde NBW es el ancho de banda, y $BW^{(e)}$ es la diferencia entre el mayor y menor números de nodos para un elemento. El valor mayor de $BW^{(e)}$ es usado en el cálculo.



(a)



(b)

Fig. 3.9

3.5 ELEMENTOS BIDIMENSIONALES

Una ventaja primaria del método de elemento finito es la facilidad con la cual puede ser generalizado para resolver problemas bidimensionales compuestos de materiales diferentes y teniendo fronteras irregulares. Muchos programas de elemento finito de propósito general están disponibles para resolver problemas bidimensionales. Todos estos programas usan elementos triangular o rectangular o generalizaciones de estos elementos.

La discusión de los problemas bidimensionales empieza con la consideración de los elementos triangular lineal y rectangular bilineal. Estos elementos son entonces usados para resolver problemas de transferencia de calor, flujo de fluido irrotacional, y mecánica de sólidos.

3.5.1 MALLAS BIDIMENSIONALES

El elemento triangular lineal (Fig .10 a) tiene lados rectos y un nodo en cada esquina. La ecuación de interpolación para una cantidad escalares

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (3.56)$$

la cual es una polinomial lineal completa debido a que contiene un término constante y todos los términos lineales posible, "x" y "y" . Como un resultado, el elemento triangular puede tomar cualquier orientación y satisfacer los requerimientos de continuidad implicado en los elementos adyacentes.

El elemento rectangular bilineal (Fig .10 b) tiene lados rectos y un nodo en cada esquina. La ecuación de interpolación para una cantidad escalar es

$$\phi = C_1 + C_2 x + C_3 y + C_4 xy \quad (3.57)$$

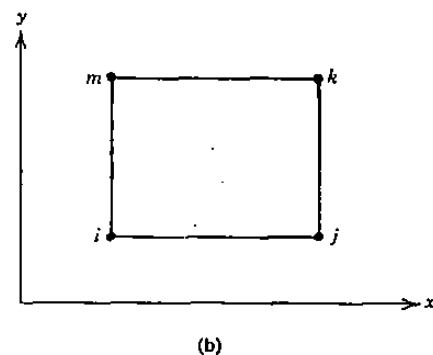
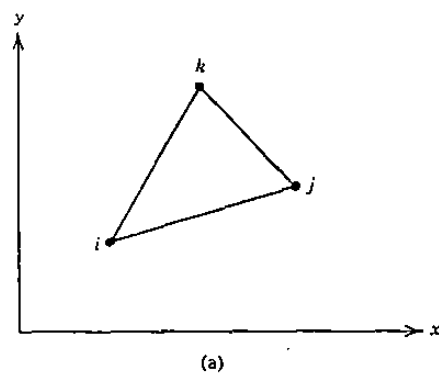


Fig. 3. 10

Esta ecuación contiene solamente uno de los tres términos posibles de segundo orden, xy . El rectángulo no puede ser arbitrariamente orientado debido a que los términos x^2 y y^2 no están presentes. Los lados del rectángulo deben permanecer paralelos al sistema coordenado x,y .

Una malla de elementos rectangulares es fácilmente de construir. Todos los elementos en una renglón paralelo al eje x debe ser de la misma altura. Todos los elementos en una columna paralela al eje y deben ser del mismo ancho. Debe quedar claro que el elemento rectangular es el mejor adecuado

para regiones cuadradas o rectangulares. Ambos elementos triangular y rectangular deben ser usados en regiones irregulares. Los elementos triangulares son usados para modelos de frontera irregular.

La división de una región en elementos triangulares es más fácilmente realizarla como primera división en grandes subregiones de cuadriláteros y triángulos. Cada una de estas subregiones es entonces dividida en triángulos. Una subregión triangular es más fácilmente dividirla en elementos especificando el mismo número de nodos a lo largo de cada lado y entonces conectando los nodos apropiados por línea rectas y colocando los nodos en los punto de intersección. La región triangular mostrada en la Fig. 11 a ha sido dividida en nueve elementos después de colocar cuatro nodos en el lado. No hay razón para que los nodos tengan que ser espaciados igualmente a lo largo del lado. Una variación en el espaciamiento permite que el tamaño de los elementos sean cambiado. Hay $(n-1)^2$ elementos triangulares en una región triangular, donde n es el número de nodos en un lado.

Cuando la región triangular tiene lados curvados, los elemento frontera modelan la curvatura usando segmentos de línea recta. La división de una región triangular curvada en elementos triangulares lineales es mostrada en la Fig. 11 b. La línea discontinua es la forma original y la sólida denota los elementos.

La subregión cuadrilátera es fácilmente dividida en elementos triangulares conectando los nodos de lados opuestos usando segmentos de línea (Fig. 12 a). Los nodos interiores son ubicados en los puntos de intersección. Los cuadriláteros interiores están divididos en elementos triangulares con la intersección de diagonales muy cortas (Fig. 12 b). La división usando la diagonal muy corta es preferible porque los elementos cerrados a una forma equilátera produce resultados más exactos que los triángulos grandes angostos.

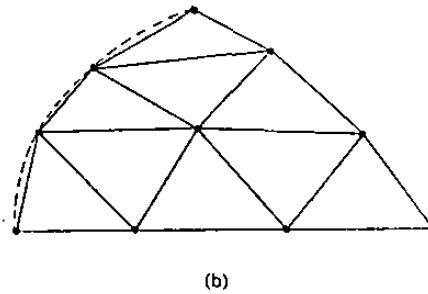
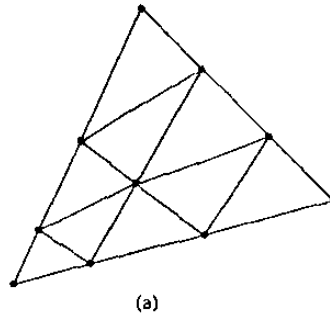
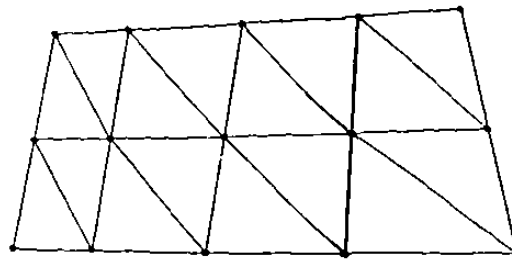


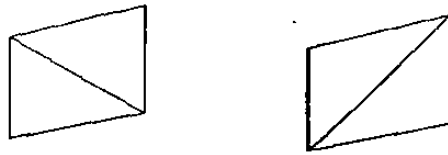
Fig.3.11

El número de nodos a lo largo de lados adyacentes de una subregión cuadrilátera no tiene que ser el mismo, sino el número de nodos en lados opuestos tiene que ser igual a menos que la malla sea refinada (o engrandecida). El espaciamiento entre los nodos de frontera pueden ser variados para producir elementos de diferente tamaño. Hay $2(n-1)(m-1)$ elementos triangulares en un cuadrilátero, donde n y m son los números de nodos en un par de lados adyacentes.

Los nodos en la frontera entre subregiones deben ser idénticos en número y deben tener la misma posición relativa. Esta propiedad es necesaria para asegurar la continuidad de ϕ a través de un elemento de frontera.



(a)



(b)

Fig. 3.12

La aplicaci3n de los conceptos relativo a la discretizaci3n de una regi3n son ilustrados en la Figura 3.13

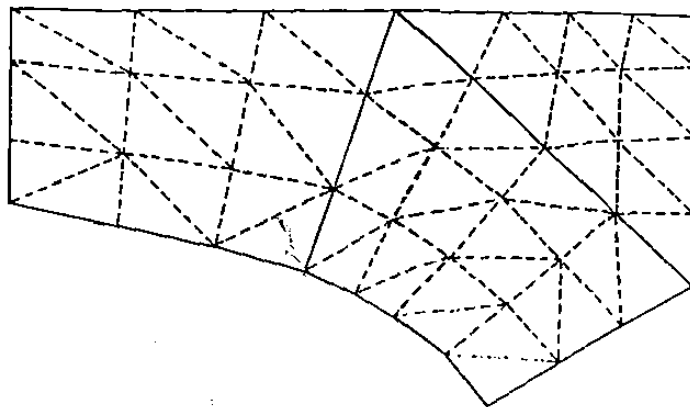


Fig. 3.13

El espaciamiento de nodo ha sido variado a lo largo de los bordes del cuadrilátero por supuesto tiene elementos pequeños en la vecindad de la frontera curvada.

Una red regular con todos los elementos del mismo tamaño no es necesario debido a que usualmente son regiones en la cual la variable nodal es relativamente constante. Grandes elementos pueden ser usados en estas regiones. La habilidad para variar el tamaño es una ventaja importante del elemento triangular. La manera más fácil de hacer una transición en el tamaño del elemento es emplear una región cuadrilátera que tenga un número desigual de nodos en dos lados opuestos. Una buena combinación es colocar

dos nodos en un lado para cada tres nodos en el lado opuesto. Tal región es mostrada en la Figura 3.14

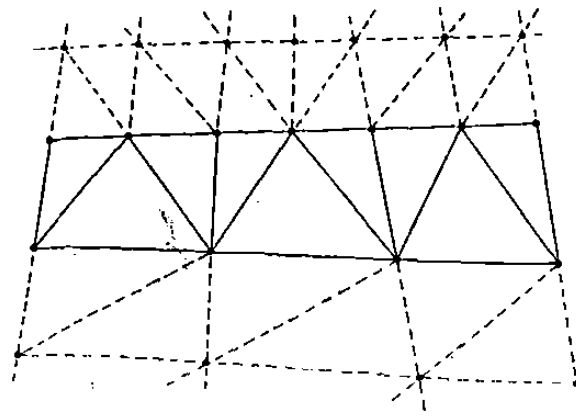


Fig. 3.14

3.5.2 ELEMENTO TRIANGULAR LINEAL

El elemento triangular lineal mostrado en la fig. 3.15 tiene lados rectos y tres nodos, uno en cada esquina. Una rotulación consistente de los nodos es una necesidad y se procede en sentido contrario a las manecillas del reloj desde el nodo "i", el cual es especificado arbitrariamente. Los valores nodales de ϕ son ϕ_i, ϕ_j , y ϕ_k mientras que las coordenadas nodales son $(X_i, Y_i), (X_j, Y_j), (X_k, Y_k)$.

El polinomio de interpolacion es

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (3.58)$$

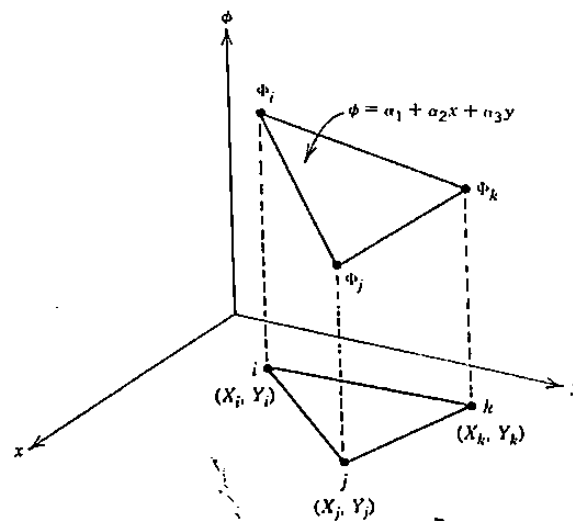


Fig.3.15

Con las condiciones nodales

$$\phi = \phi_i \quad \text{en } x = X_i, \quad y = Y_i$$

$$\phi = \phi_j \quad \text{en } x = X_j, \quad y = Y_j$$

$$\phi = \phi_k \quad \text{en } x = X_k, \quad y = Y_k$$

la sustitución de estas condiciones en (3.58) produce el sistema de ecuaciones

$$\phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_i + \alpha_3 Y_i$$

$$\phi_j = \alpha_1 + \alpha_2 X_j + \alpha_3 Y_j \quad (3.59)$$

$$\phi_k = \alpha_1 + \alpha_2 X_k + \alpha_3 Y_k$$

las cuales dan

$$\alpha_1 = (1/2A)[X_j Y_k - X_k Y_j] \phi_i + (X_k Y_i - X_i Y_k) \phi_j + (X_i Y_j - X_j Y_i) \phi_k]$$

$$\alpha_2 = (1/2A)[(Y_j - Y_k) \phi_i + (Y_k - Y_i) \phi_j + (Y_i - Y_j) \phi_k]$$

$$\alpha_3 = (1/2A)[(X_k - X_j) \phi_i + (X_i - X_k) \phi_j + (X_j - X_i) \phi_k]$$

donde el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix} = 2A \quad (3.60)$$

y A es el área del triángulo.

Sustituyendo por α_1, α_2 , y α_3 en (3.58) y reordenando produce una ecuación para ϕ en términos de las tres funciones de forma y ϕ_i, ϕ_j , y ϕ_k esto es

$$\phi = N_i \phi_i + N_j \phi_j + N_k \phi_k \quad (3.61)$$

donde

$$N_i = (1/2A)[a_i + b_i x + c_i y] \quad (3.62)$$

$$N_j = (1/2A)[a_j + b_j x + c_j y] \quad (3.63)$$

$$N_k = (1/2A)[a_k + b_k x + c_k y] \quad (3.64)$$

y

$$a_i = X_j Y_k - X_k Y_j, \quad b_i = Y_j - Y_k \quad \text{y} \quad c_i = X_k - X_j$$

$$a_j = X_k Y_i - X_i Y_k, \quad b_j = Y_k - Y_i \quad \text{y} \quad c_j = X_i - X_k$$

$$a_k = X_i Y_j - X_j Y_i, \quad b_k = Y_i - Y_j \quad \text{y} \quad c_k = X_j - X_i$$

3.5.3 ELEMENTO RECTANGULAR BILINEAL

El elemento rectangular bilineal tiene una longitud de $2b$ y una altura de $2a$. Los nodos son rotulados como i, j, k , y m con el nodo i siempre en la esquina más cerca de la izquierda. El elemento y los sistemas de coordenadas importante son mostrados en la figura 3.16

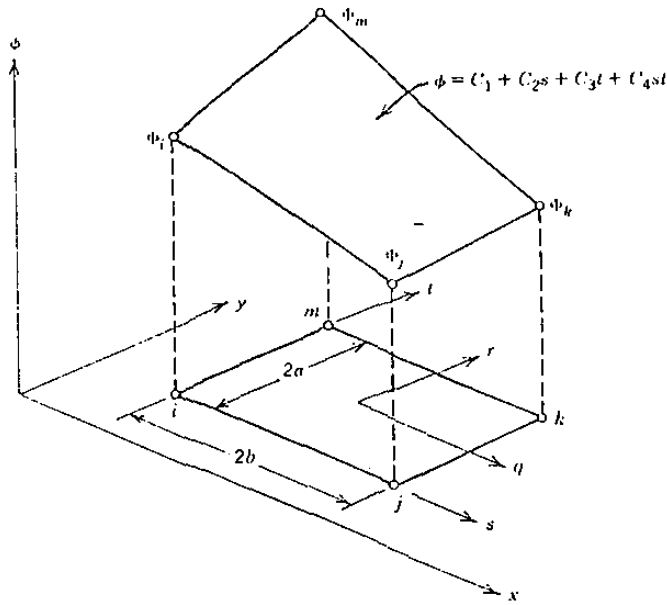


Fig. 3.16

Los coeficientes C_1 , C_2 , C_3 y C_4 en (3.65) son obtenidos usando los valores nodales de ϕ y las coordenadas nodales para generar cuatro ecuaciones. Estas ecuaciones son

$$\begin{aligned}
 \phi_i &= C_1 \\
 \phi_j &= C_1 + (2b)C_2 \\
 \phi_k &= C_1 + (2b)C_2 + (2a)C_3 + (4ab)C_4 \\
 \phi_m &= C_1 + (2a)C_3
 \end{aligned} \tag{3.66}$$

resolviendolas da

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \phi_i \\
 C_2 &= (1/2b)(\phi_j - \phi_i) \\
 C_3 &= (1/2a)(\phi_m - \phi_i) \\
 C_4 &= (1/4ab)(\phi_i - \phi_j + \phi_k - \phi_m)
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

sustituyendo (3.67) en (3.65) y reordenando da

$$\phi = N_i\phi_i + N_j\phi_j + N_k\phi_k + N_m\phi_m \tag{3.68}$$

donde

$$\begin{aligned}
 N_i &= (1 - s/2b)(1 - t/2a) \\
 N_j &= (s/2b)(1 - t/2a) \\
 N_k &= st/4ab \\
 N_m &= (t/2a)(1 - s/2b)
 \end{aligned}
 \tag{3.69}$$

Las funciones de forma para el elemento rectangular bilineal tiene propiedades similares a aquellas poseidas por el elemento triangular. Cada función de forma varia linealmente a lo largo de los bordes entre su nodo y los dos nodos adyacentes. Por ejemplo, N_i varia linealmente a lo largo de los lados ij y im . Cada función de forma es también cero a lo largo de los lados que no toca su nodo, esto es, N_i es cero a lo largo de los lados jk y km . La variación lineal de ϕ a lo largo de uno de los bordes del elemento rectangular y de uno de los bordes del elemento triangular significa que estos dos elementos son compatibles y pueden ser usados adyacente uno al otro.

La transformacion de las ecuaciones entre los sistemas de coordenadas qr y st son

$$s = b + q \quad \text{y} \quad t = a + r \tag{3.70}$$

Sustituyendo (3.70) en (3.69) da las funciones de forma en terminos de q y r

$$\begin{aligned}
 N_i &= (1/4)(1 - q/b)(1 - r/a) \\
 N_j &= (1/4)(1 + q/b)(1 - r/a) \\
 N_k &= (1/4)(1 + q/b)(1 + r/a) \\
 N_m &= (1/4)(1 - q/b)(1 + r/a)
 \end{aligned}
 \tag{3.71}$$

Las funciones de forma definidas por (3.71) son usales debido a que conducen a un sistema de coordenadas natural que permite que el rectangulo sea formado en cuadrilatero general.

CAPITULO 4

CONDUCCION DE CALOR

4.1 GENERALIDADES

Una de las grandes preocupaciones que existen al utilizar un método numérico, es la precisión que se obtendrá al usarlo, ya que hay una diversidad de factores que pueden alterar el resultado.

En el caso del método de elementos finitos, en principio existe un error, al hacer la aproximación de la función, por un sumatoria de funciones evaluados en determinados puntos, esto es, al hacer la aproximación de la función en un espacio de dimensión infinita a otro de dimensión finita. Varios autores han calculado el error que se obtiene en diferentes problemas, al aplicar el método de elementos finitos, entre ellos están Oden y Reddy (1976), sin embargo utilizan un análisis matemático muy complicado, para obtener únicamente una estimación.

Al error anterior hay que agregarle el que se tiene al utilizar otros métodos numéricos, como son: integración numérica, derivación numérica, solución de sistemas de ecuaciones, métodos iterativos para ecuaciones no lineales, etc., si a esto le agregamos la precisión de la computadora al efectuar las operaciones, resultaría muy difícil efectuar un análisis exacto, del error total obtenido. Por otra parte, al dividir la región en estudio en diferentes elementos, una buena distribución de ellos puede aumentar la precisión del resultado, en cambio, una mala distribución de éstos, puede incluso conducir a resultados localmente muy erróneos además, teóricamente, entre más elementos se utilicen, mayor es la exactitud, pero más costosa es la

solución, por lo que es muy difícil precisar cual es el término medio para obtener una solución suficientemente precisa y a la vez la más económica. Se ha llegado incluso a considerar que es un arte el efectuar la división del dominio en diferentes elementos.

Debido a todo lo anterior, surgió la necesidad de efectuar una comparación, para observar como se comporta el método; es por ello que en éste capítulo se resuelven dos problemas de solución analítica conocida por el método de elementos finitos de Galerkin, con lo cual podemos comparar los resultados, además que se aprovechan para dar ciertas normas muy sencillas, pero muy objetivas, en el uso del método.

4.2 PROBLEMAS BIDIMENSIONAL EN ESTADO PERMANENTE

El primer problema que se resolverá será el de una placa en dos dimensiones, con transferencia de calor por conducción, en estado permanente, con lo cual se obtendrá la distribución de las temperaturas en toda la superficie. Para ciertas condiciones de frontera, es posible encontrar una solución analítica de este problema y es por ello por lo que se escogió .

4.2.1 Planteamiento de las ecuaciones y solución exacta

La ecuación que define la conducción de calor en dos dimensiones y en estado permanente es (Holman, 1972).

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 \quad (4.1)$$

que es la ecuación de Laplace bidimensional donde θ es la temperatura y "x" y "y" son las coordenadas cartesianas.

Si consideramos como ejemplo la placa rectangular mostrada en la figura 4.1, tres lados de la placa se mantienen a una temperatura constante θ_1 y el lado superior tiene impuesta una distribución de temperatura senoidal.

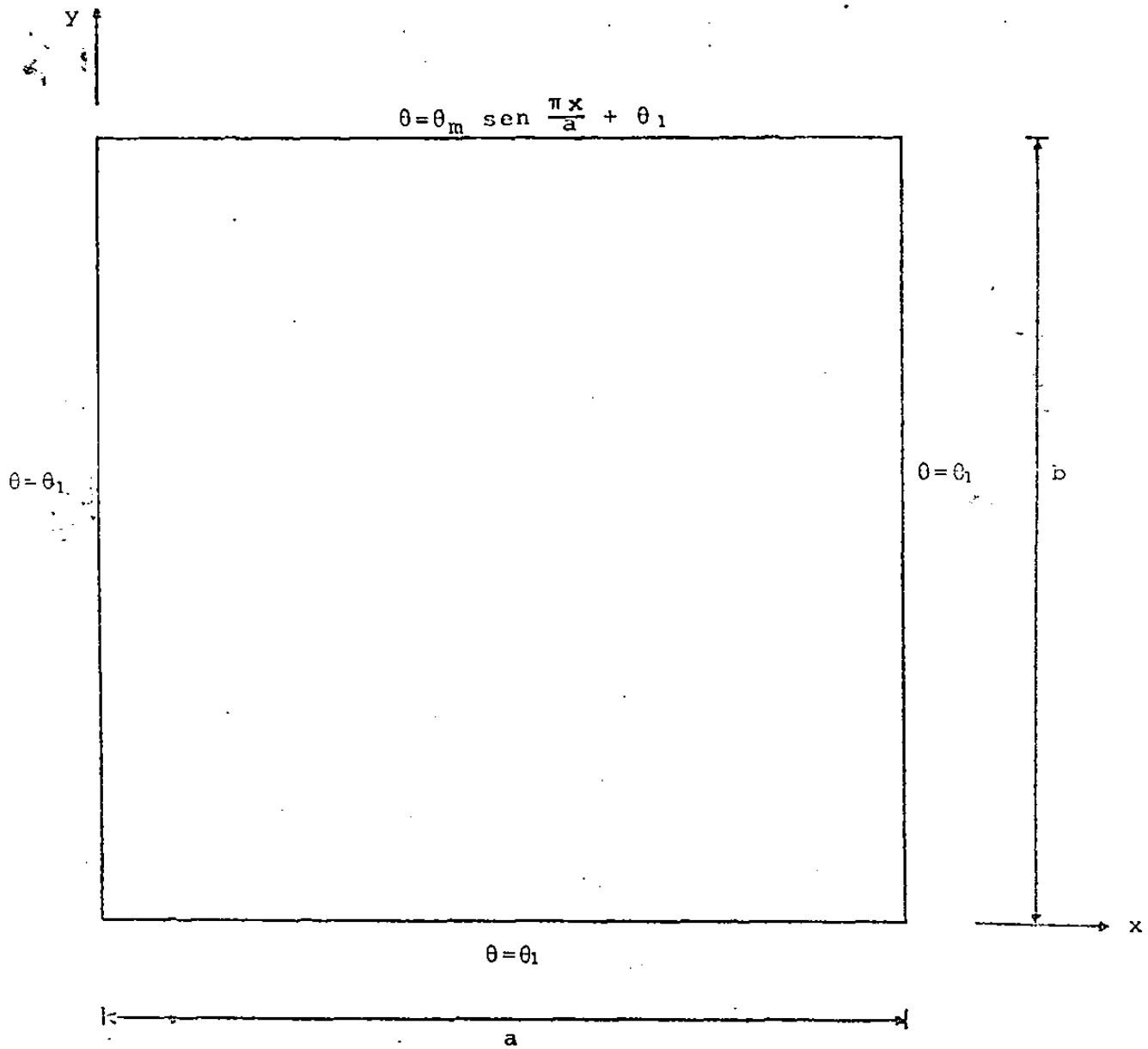


Fig.4.1 Placa rectangular con transferencia de calor por conducción y sus condiciones de frontera

Este problema se puede resolver analíticamente por el método de separación de variables. Utilizando las siguientes condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \theta_1 & \text{ en } x = 0 \\ \theta_1 & \text{ en } y = 0 \\ \theta_1 & \text{ en } x = a \\ \theta & = \theta_m \text{sen}(\pi y/a) + \theta_1 \text{ en } y = b \end{aligned} \quad (4.2)$$

y resolviendo la ecuación 4.1 usando 4.2 se llega a

$$\theta = \theta_m \left(\frac{\text{senh}(\pi y/a)}{\text{senh}(\pi b/a)} \right) \text{sen}(\pi x/a) + \theta_1 \quad (4.3)$$

La ecuación 4.3 es la solución analítica del ejemplo propuesto .

4.2.2 Formulación de Elementos Finitos

La temperatura θ la podemos aproximar en la forma de elementos finitos como :

$$\theta = \sum_{i=1}^n N_i \theta_i \quad (4.4)$$

donde n es el número de nodos en un elemento, N_i son las funciones de interpolación o función base de un elemento y θ_i son los valores de la temperatura en cada nodo del elemento.

Ya que la función θ es una aproximación de la ecuación (4.1) se obtendrá un residuo o error. Entonces tenemos

$$\partial^2 \theta / \partial x^2 + \partial^2 \theta / \partial y^2 = \epsilon \quad (4.5)$$

donde ϵ es el residuo. Considerando la proyección ortogonal del residuo sobre las funciones de base e igualando a cero, que es lo que indica el método de Galerkin se obtiene

$$(\epsilon, N_i) = \int_{\Omega} (\partial^2 \theta / \partial x^2 + \partial^2 \theta / \partial y^2) N_i dx dy = 0 \quad (4.6)$$

Si a la ecuación 4.6 le aplicamos el teorema de Green llegamos a

$$-\int_{\Omega} (\partial \theta / \partial x * \partial N_i / \partial x + \partial \theta / \partial y * \partial N_i / \partial y) dx dy + \int_{\Gamma} (\partial \theta / \partial x * N_i dy - \partial \theta / \partial y * N_i dx) \quad (4.7)$$

Sustituyendo 4.4 en 4.7 y reordenando

$$\theta_j = \int_{\Omega} (\partial N_i / \partial x * \partial N_j / \partial x + \partial N_i / \partial y * \partial N_j / \partial y) dx dy = \int_{\Gamma} (\partial \theta / \partial x * N_i dy - \partial \theta / \partial y * N_i dx) \quad (4.8)$$

Podemos usar una notación simplificada con lo que escribimos

$$\sum_{j=1}^n K_{ij} \theta_j = q_i \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (4.9)$$

K es llamada matriz de coeficientes de temperatura y q es el vector de fuentes de calor y son

$$K_{ij} = \int_{\Omega} (\partial N_i / \partial x * \partial N_j / \partial x + \partial N_i / \partial y * \partial N_j / \partial y) dx dy \quad (4.10)$$

$$q_i = \int_{\Gamma} (\partial \theta / \partial x * N_i dy - \partial \theta / \partial y * N_i dx) \quad (4.11)$$

Hay que hacer notar que debido a la forma de la integral (4.10) la matriz K es simétrica .

Como la formulación que se hizo fue únicamente para un elemento, se deben juntar las contribuciones de todos los elementos, para obtener el campo de temperaturas en toda la placa. Para lograr esto, se efectúa un ensamble de todas las ecuaciones, de tal manera, que al final se obtenga un sistema de ecuaciones que contenga todos los nodos de la placa. El sistema global de ecuaciones a resolver será.

$$\sum_{j=1}^n K^*_{ij} \theta^*_j q^*_i \quad (4.12)$$

donde K^* es la matriz global de coeficientes, θ^* el vector global de temperaturas, q^* el vector global de flujo de calor y n el número total de nodos.

La ecuación (4.12) es un sistema algebraico de ecuaciones lineales simétrico y bandedo, que se puede resolver por cualquiera de los métodos conocidos, como pueden ser, Gauss-Jordan, Gauss-Seidel, etc. O algún otro que aproveche las características de la matriz K^* como es el Gauss'Crout modificado para matrices bandedas.

Es importante observar que la matriz K^* es singular; sin embargo, al introducir las condiciones de frontera tanto de Neumann como Dirichlet en la ecuación (4.2), se quita la singularidad, pudiéndose resolver el sistema de ecuaciones resultante.

4.2.3 Ejemplo numérico

Con el fin de hacer más objetivo cual es el procedimiento que se sigue en elementos finitos, en este inciso se resuelve un problema numérico paso por paso. Este consiste en calcular la temperatura en una placa bidimensional con transferencia de calor por conducción, en estado permanente. Los parámetros que se usan en la solución numérica, son los siguientes:

$\theta_1 = 100$ unidades de temperatura

$\theta_m = 100$ unidades de temperatura

$a = 12$ unidades de longitud

$b = 12$ unidades de longitud

Unicamente van a existir condiciones de frontera del tipo Dirichlet y son las que se indican en la figura 4.1. Por lo tanto, la ecuación de elementos finitos para un elemento es

$$\sum_{j=1}^n \theta_j \int_{\Omega} (\partial N_i / \partial x * \partial N_j / \partial y + \partial N_i / \partial y * \partial N_j / \partial x) dx dy = 0 \quad (4.13)$$

en notación compacta

$$\sum_{j=1}^n K_{ij} \theta_j = 0 \quad (i=1,2,\dots,m) \quad (4.14)$$

Para la solución de elementos finitos, se utilizarán elementos triangulares, como muestra la figura 4.2, con funciones de interpolación lineal, y son

$$N_i = a_i + b_i x + c_i y \quad (4.15)$$

Donde $i=1,2,3$ debido a que son tres nodos, una función por cada uno y las constantes están dadas por

$$\begin{aligned} a_1 &= (x_2 y_3 - x_3 y_2) / 2A ; & b_1 &= (y_2 - y_3) / 2A ; & c_1 &= (x_3 - x_2) / 2A \\ a_2 &= (x_3 y_1 - x_1 y_3) / 2A ; & b_2 &= (y_3 - y_1) / 2A ; & c_2 &= (x_1 - x_3) / 2A \\ a_3 &= (x_1 y_2 - x_2 y_1) / 2A ; & b_3 &= (y_1 - y_2) / 2A ; & c_3 &= (x_2 - x_1) / 2A \end{aligned} \quad (4.16)$$

aquí A es el área del triángulo y se puede obtener por

$$A = (1/2)(x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 y_1 - x_1 y_3 + x_2 y_3 - x_3 y_2) \quad (4.17)$$

Se observa que la numeración local en el triángulo, está hecha en contra de las manecillas del reloj, para que "A" resulte positiva.

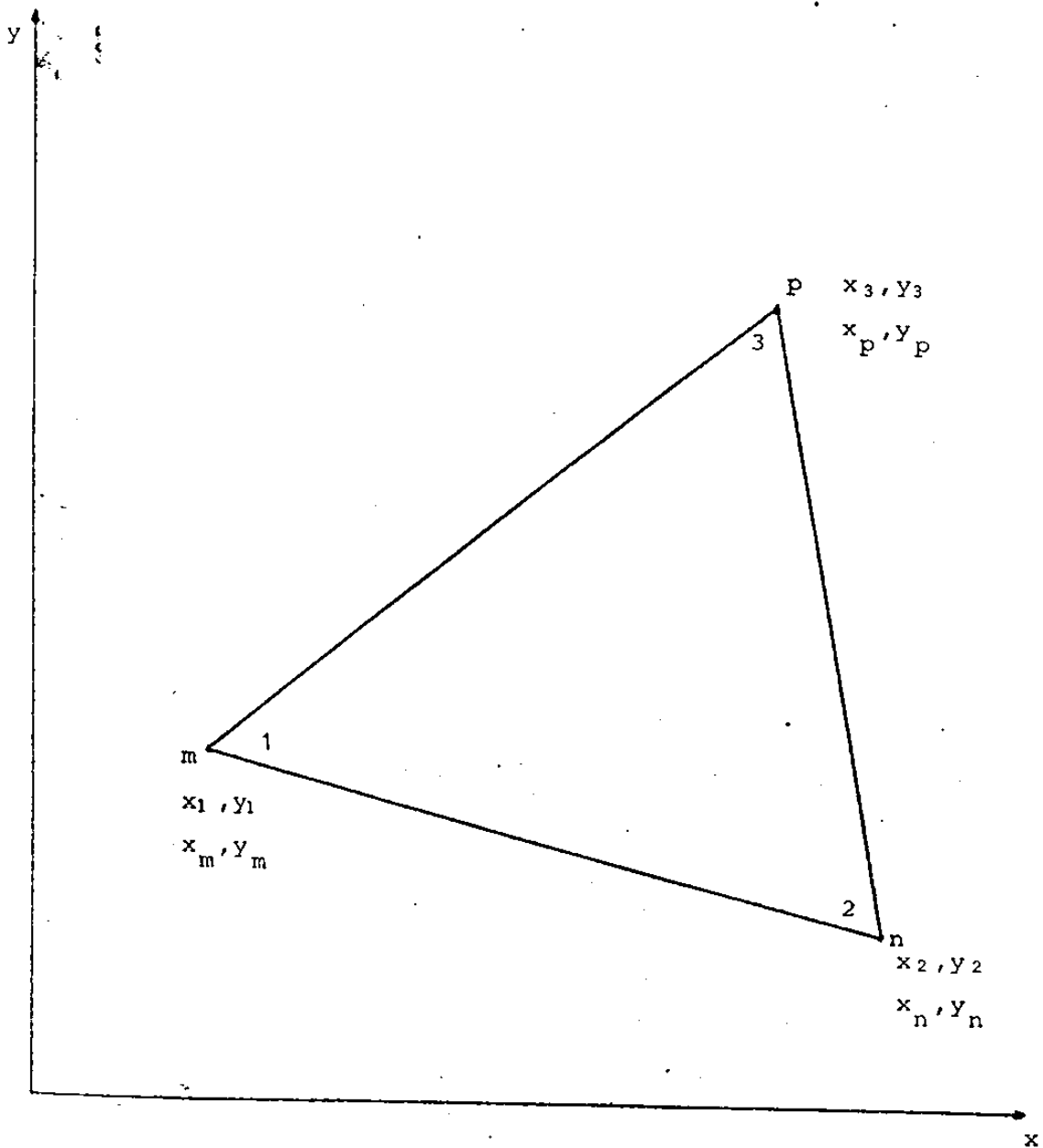


Fig.4.2 Elemento triangular con la numeración local (1,2,3) y la numeración global (n,m,p) y sus respectivas coordenadas cartesianas.

Para obtener la matriz "A" se sustituyen las funciones de interpolación (4.15), en la integral de la ecuación (4.8). Por ejemplo para el término A_{11}

$$\begin{aligned} A_{11} &= \int_{\Omega} [\partial/\partial x(a_1 + b_1x + c_1y)]^2 [\partial/\partial y(a_1 + b_1x + c_1y)]^2 \\ &= A (b_1^2 + c_1^2) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Procediendo de la misma manera para los demás coeficientes llegamos a

$$K=A \begin{bmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_1b_2 + c_1c_2 & b_1b_3 + c_1c_3 \\ b_1b_2 + c_1c_2 & b_2^2 + c_2^2 & b_2b_3 + c_2c_3 \\ b_1b_3 + c_1c_3 & b_2b_3 + c_2c_3 & b_3^2 + c_3^2 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

donde las constantes son las mismas de la ecuación (4.16).

El siguiente paso es evaluar las matrices para cada elemento, para lo cual es necesario numerar, de acuerdo a la malla que se utilice, todos los nodos y los elementos, procurando siempre que la diferencia entre los números asignados globalmente, de los nodos de cada elemento, sea mínima, para que el ancho de banda de la matriz global A^* también sea el mínimo posible. Esto es muy importante, porque en el momento de almacenar la matriz en la memoria en la computadora, se puede hacer en forma bandeda y mientras esta banda sea menor, la memoria que se utilice también es menor, ya que el resto de los coeficientes son ceros y no necesitan almacenaje.

Tomando como ejemplo una discretización de pocos elementos, como muestra la figura 4.3, que es una malla de 7 nodos globales con 7 elementos, se puede observar que con la numeración global de los nodos que se indica, la máxima diferencia entre los nodos de cualquiera de cada uno de los elementos es 3, a este factor se le llama esparcidad y para la malla mostrada es el mínimo que se puede obtener. El ancho de

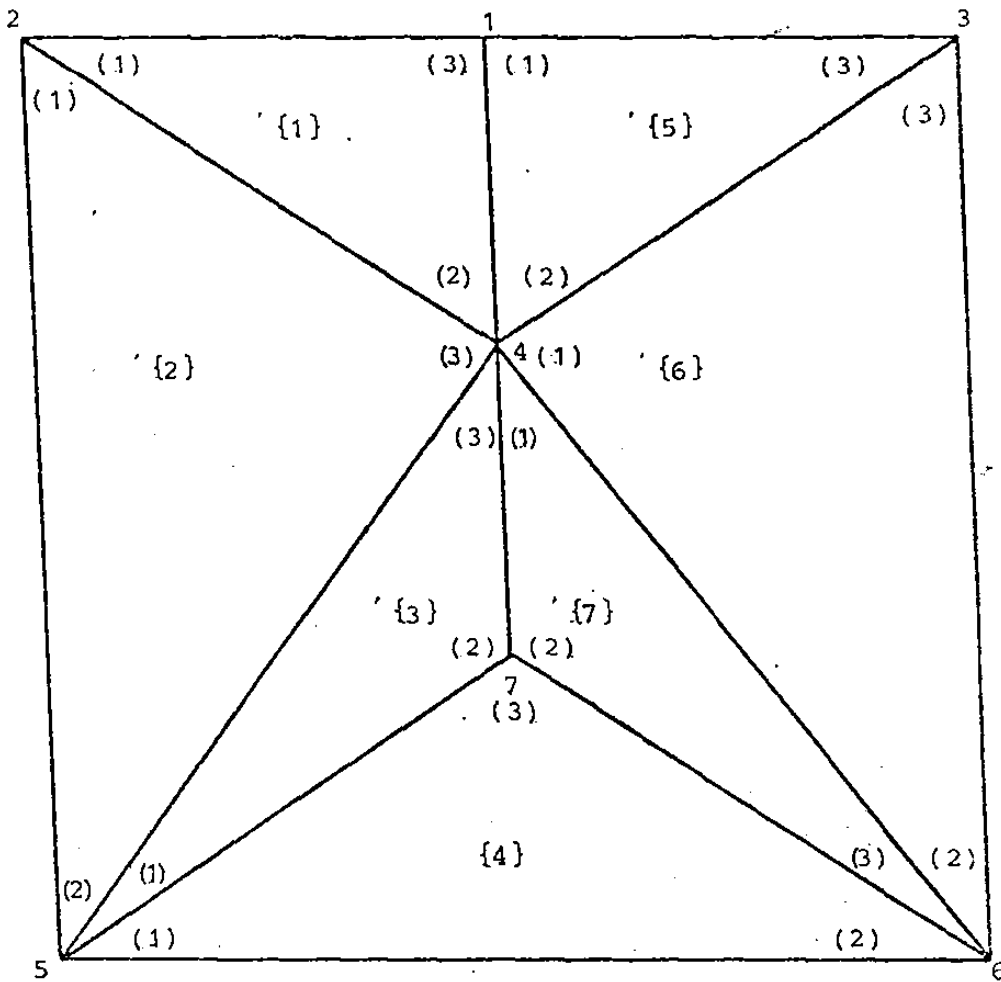


Fig.4.3 Discretización cruda de la placa, mostrando la numeración global, la numeración local y la numeración de los elementos.

la banda de la matriz global, se puede obtener sumándole uno a la esparcidad; para nuestro caso el ancho de la banda es 4, ésto es, la matriz tendrá 4 diagonales con valores numéricos no nulos, incluyendo la diagonal principal, ya sea hacia arriba o hacia debajo de ésta última.

Para evaluar las matrices de cada elemento, primero se procede a formar una tabla que relacione las coordenadas, con los nodos globales a las que corresponden, como sigue:

Nodo	1	2	3	4	5	6	7
x	6	0	12	6	0	12	6
y	12	12	12	8	0	0	4

En seguida se forma una tabla que relaciona los nodos globales, con los nodos locales de cada elemento.

Elemento		Nodos globales						
Nodos	No.	1	2	3	4	5	6	7
Locales								
1		2	2	5	5	1	4	4
2		4	5	7	6	4	6	7
3		1	4	4	7	3	3	6

Con las dos tablas anteriores, podemos localizar fácilmente las coordenadas para cada nodo local, las cuales se utilizan para obtener las b 's y las c 's de la matriz K en la ecuación (4.19) y al mismo tiempo el área, así por ejemplo para el elemento 1

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 0 & ; & & x_2 &= 6 & ; & & x_3 &= 6 \\
 y_1 &= 12 & ; & & y_2 &= 8 & ; & & y_3 &= 12
 \end{aligned}$$

aquí los subíndices indican los nodos locales. Con estas coordenadas, podemos evaluar la matriz para el elemento 1 como sigue

$$K^{(1)} = (1/72) \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (2) & (4) & (1) \\ \left[\begin{array}{ccc} 24 & 0 & -24 \\ 0 & 54 & -54 \\ -24 & -54 & 78 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{l} (2) \\ (4) \\ (1) \end{array} \end{array}$$

se observa que como la matriz es simétrica, únicamente se tiene que calcular 6 términos. Los números entre paréntesis a los lados de la matriz, indican los nodos globales a los que pertenecen los renglones y las columnas. Similarmente para los otros elementos, tenemos

$$K^{(2)} = (1/72) \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (2) & (5) & (4) \\ \left[\begin{array}{ccc} 45 & -2 & -48 \\ -2 & 26 & -24 \\ -48 & -24 & 72 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{l} (2) \\ (5) \\ (4) \end{array} \end{array} \quad K^{(3)} = (1/72) \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (5) & (7) & (4) \\ \left[\begin{array}{ccc} 24 & -48 & 24 \\ -48 & 150 & -102 \\ 24 & -102 & 78 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{l} (5) \\ (7) \\ (4) \end{array} \end{array}$$

$$K^{(4)} = (1/72) \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (5) & (6) & (7) \\ \left[\begin{array}{ccc} 39 & 15 & -54 \\ 15 & 39 & -54 \\ -54 & -54 & 108 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{l} (5) \\ (6) \\ (7) \end{array} \end{array} \quad K^{(5)} = (1/72) \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (1) & (4) & (3) \\ \left[\begin{array}{ccc} 78 & -54 & -24 \\ -54 & 54 & 0 \\ -24 & 0 & 24 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{l} (1) \\ (4) \\ (3) \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 (4) & (6) & (7) \\
 \left[\begin{array}{ccc|c}
 72 & -24 & -48 & (4) \\
 -24 & -2 & -2 & (6) \\
 -48 & -2 & 45 & (7)
 \end{array} \right] & & \\
 K^{(6)}=(1/72) & &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 (4) & (7) & (6) \\
 \left[\begin{array}{ccc|c}
 78 & -102 & 24 & (4) \\
 -102 & 150 & -48 & (7) \\
 24 & -48 & 24 & (6)
 \end{array} \right] & & \\
 K^{(7)}=(1/72) & &
 \end{array}$$

En seguida se ensamblan estas matrices en la matriz global, para la cual se suman los coeficientes de cada matriz del elemento, que correspondan al mismo lugar en matriz global, utilizando los números que están entre paréntesis; así por ejemplo, para el coeficiente K^*_{11} de la matriz global. Hay contribuciones tanto en la matriz del elemento 1 como en la matriz del elemento 5 y nos queda

$$K^*_{11} = (1/72)(78+78) = (1/72)(156)$$

siguiendo un procedimiento similar para los demás coeficientes, tenemos

$$(1/72) \left[\begin{array}{ccccccc|ccc}
 156 & -24 & -24 & -108 & 0 & 0 & 0 & \theta_1 & 0 \\
 -24 & 69 & 0 & -48 & -2 & 0 & 0 & \theta_2 & 0 \\
 -24 & 0 & 69 & -48 & 0 & -2 & 0 & \theta_3 & 0 \\
 -108 & -48 & -48 & 408 & 0 & 0 & -204 & \theta_4 & 0 \\
 0 & -2 & 0 & 0 & 89 & 15 & -102 & \theta_5 & 0 \\
 0 & 0 & -2 & 0 & 15 & 89 & -102 & \theta_6 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -204 & -102 & -102 & 408 & \theta_7 & 0
 \end{array} \right] = \quad (4.20)$$

A continuación se introducen las condiciones de frontera. Como se observa en la figura 4.3, hay 5 nodos en la frontera y 2 en el interior, que son nuestras incógnitas. Los valores de los nodos en la frontera son

$$\begin{aligned}\theta_1 &= 200 & ; & & \theta_5 &= 100 \\ \theta_2 &= 100 & ; & & \theta_6 &= 100 \\ \theta_3 &= 100\end{aligned}$$

Estos valores se sustituyen en la ecuación (4.20), multiplicando las columnas correspondientes y pasándolas del otro del otro lado con signo negativo, ya que los renglones de los nodos conocidos no nos interesan, podemos sustituirlos por un 1 en el coeficiente correspondiente de la diagonal principal y los demás términos del renglón ceros y en el lado derecho el valor del nodo. Haciendo estas operaciones tenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5.66 & 0 & 0 & -2.83 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.83 & 0 & 0 & 5.66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 100 \\ 100 \\ 433.33 \\ 100 \\ 100 \\ 283.33 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

En la ecuación (4.21) podemos descartar los renglones y columnas 1,2,3,4,5,6 quedándonos

$$\begin{bmatrix} 5.66 & -2.83 \\ -2.83 & 5.66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_4 \\ \theta_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 433.33 \\ 283.33 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior, llegamos a

$$\begin{aligned}\theta_4 &= 135.2491 \\ \theta_7 &= 117.6471\end{aligned}$$

La solución exacta usando la ecuación (4.3) es

$$\theta_4 = 134.6244$$

$$\theta_7 = 110.8182$$

El error en el nodo 4 es de 0.5 % y en el nodo 2 es de 6.2 % .El hecho de que exista tanta diferencia entre el error de uno y otro nodo, se puede explicar refiriendose a la figura 4.3, el nodo 4 pertenece a 6 nodos de los 7 elementos que forman la malla, en cambio el nodo 7 pertenece únicamente a 3 elementos, por lo que tiene menos elementos que contribuyen a su solución. De aquí se concluye inmediatamente, que aumentando el número de elementos, se aumenta la precisión.

El procedimiento anterior se puede implementar en un programa de computadora, ya que para una malla más fina, será prácticamente imposible efectuarlo a mano y además, se pueden aprovechar las características de simetría y bandeado de la matriz global.

Existen otras formas de efectuar el ensamble, que para ciertos problemas son más eficientes, sin embargo, la presentada es la más sencilla y bastante práctica.

4.2.4 Solución de Elementos Finitos contra solución Exacta

Para obtener los resultados que se muestran en este inciso, se siguen los mismos pasos del ejemplo 4.2.3 y además se calcula el error.

El error que se utiliza, es el error raíz medio cuadrático, definido por

$$e = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\theta_i - \bar{\theta}_i)^2 \right)^{1/2} \quad (4.23)$$

donde θ_i es la solución de elementos finitos y $\bar{\theta}_i$ es la solución exacta y además se toma únicamente por los nodos incógnitos, por lo que n es el número de nodos que no son de frontera.

En la primera prueba que se realiza, se usa una malla como la que se muestra en figura 4.4, con 9 nodos, 8 elementos y un solo nodo incógnito y la variación de temperatura senoidal en la parte de arriba. Los parámetros que se utilizan son los mismos del ejemplo numérico.

Si se desplazan los nodos a, b y c la misma distancia, a lo largo del eje "y", manteniéndose constante su distancia x , se van a obtener diferentes temperaturas del nodo c , una para cada posición.

Con esto se intenta ver cual es el comportamiento del método, cuando para una malla con el mismo número de elementos, éstos se hacen más grandes o más pequeños en determinada región, en este caso únicamente se verían en sentido vertical, porque arriba es donde está la mayor variación de temperaturas.

La figura 4.5 nos muestra una gráfica posición de la línea abc contra temperatura, en la que se representan las curvas de los resultados obtenidos por elementos finitos y la solución exacta. Se observa que a medida que se van haciendo más pequeños los elementos en la parte superior, se va acercando la solución de elementos finitos a la solución exacta, hay un momento en que son iguales y después se aleja otra vez la curva, a pesar de que son todavía más pequeños los elementos.

En la figura 4.6 se puede ver más claro este proceso; aquí se grafica posición de la línea abc contra el error raíz medio cuadrático, a medida que se van haciendo más

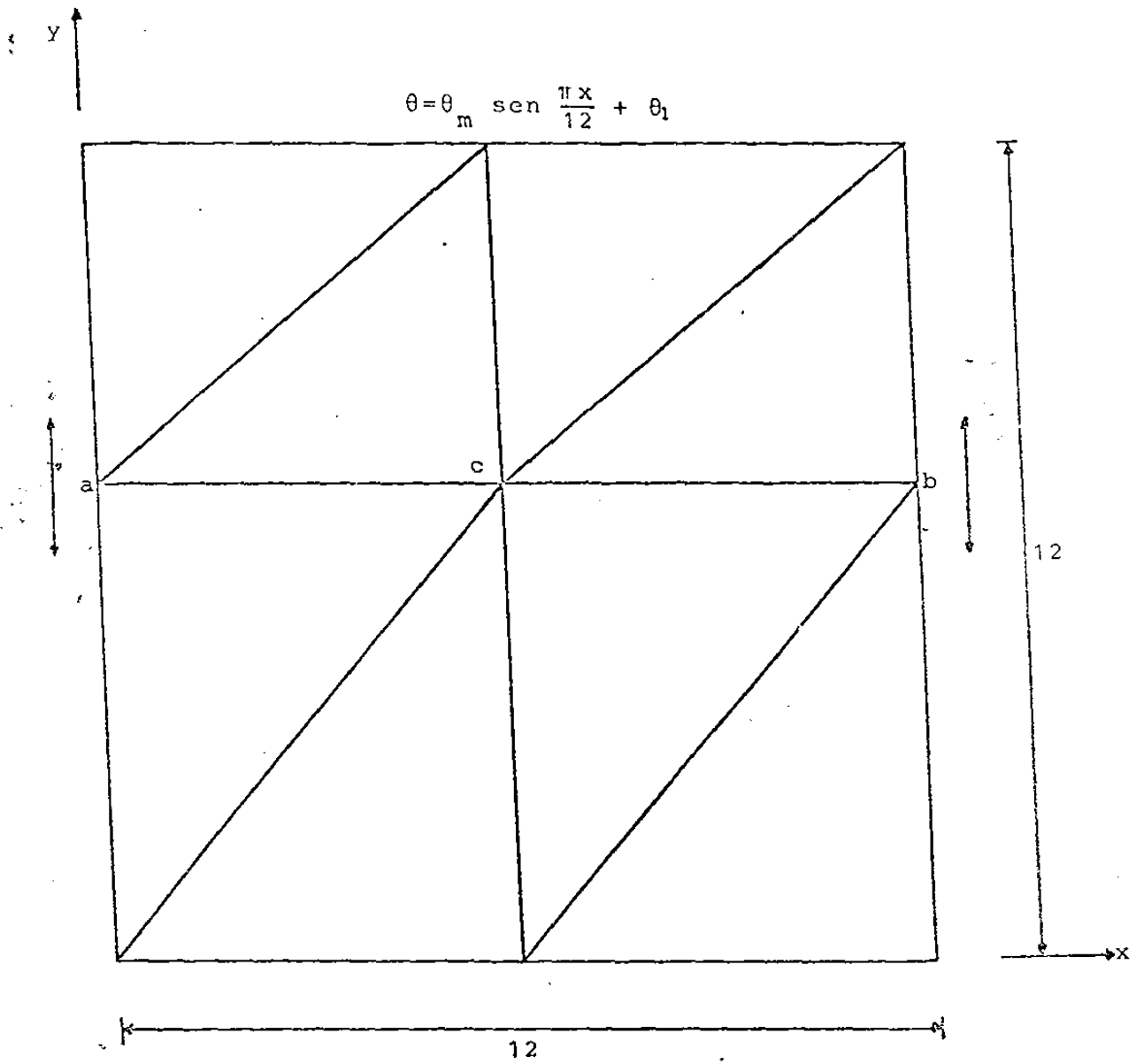


Fig.4.4 Malla con la barra \overline{acb} móvil.

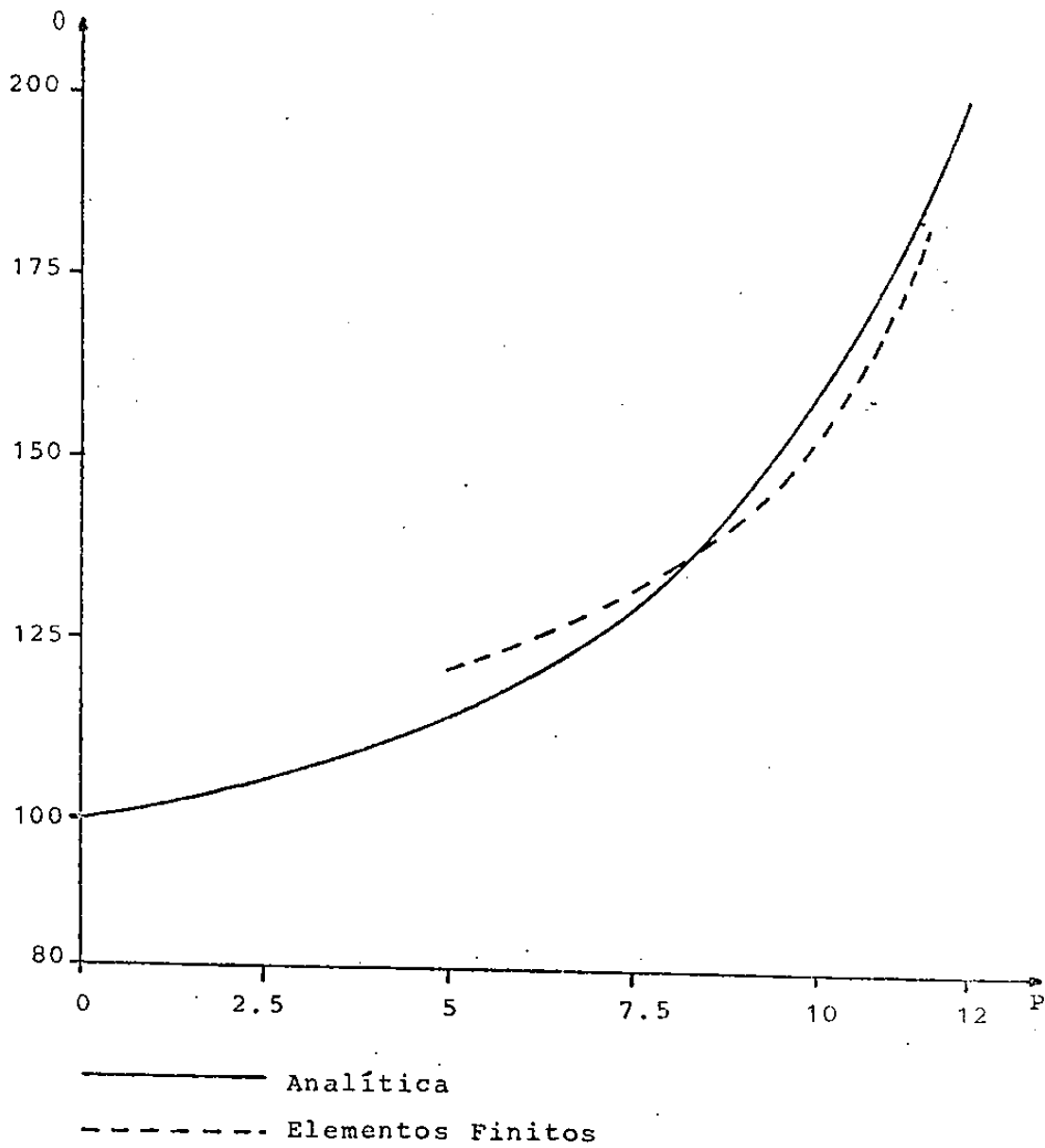


Fig.4.5 Gráfica posición contra temperatura para la solución exacta y de elementos finitos.

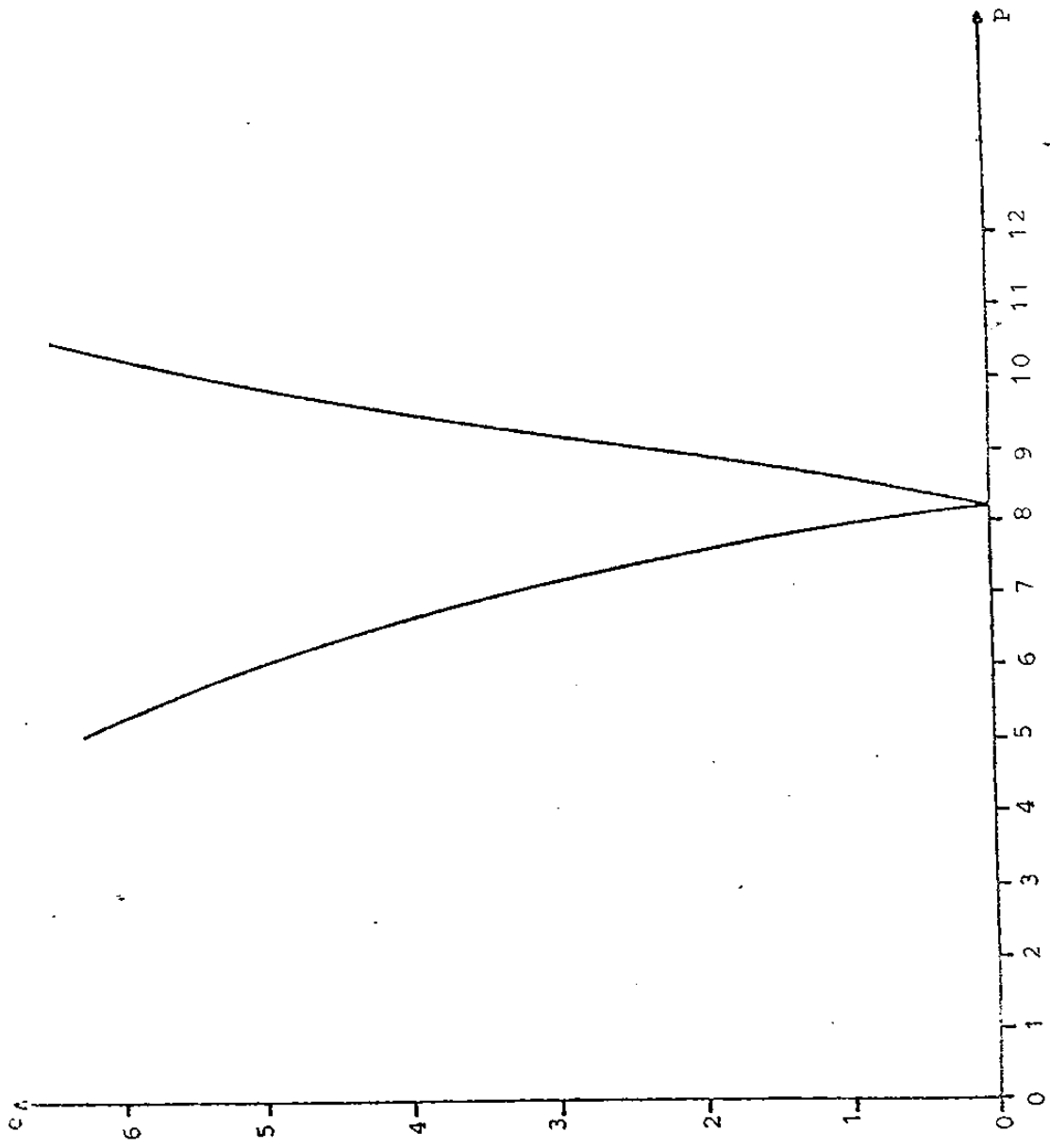


Fig.4.6

pequeños los elementos de la parte superior, el error disminuye, hasta que incluso es cero y después vuelve a aumentar .

De estas dos gráficas podemos concluir, que se deben colocar elementos más pequeños en la zona de mayor variación y más grandes donde no exista tanta variación. El hecho que exista un punto en el que el error vuelva a aumentar, es debido a que para las posiciones de la línea muy alta, los triángulos de la parte superior son muy deformes, esto es debido a que la base y la altura del triángulo están muy desproporcionados. De aquí se desprende que siempre hay que procurar que los triángulos tiendan a ser equiláteros. Otra razón por la que el error vuelve a aumentar para posiciones muy altas, es que los triángulos de arriba son muy pequeños en comparación de los de abajo, entonces siempre hay que tratar que los triángulos que estén contiguos, tengan una cierta relación de áreas, aunque esto último no es tan importante.

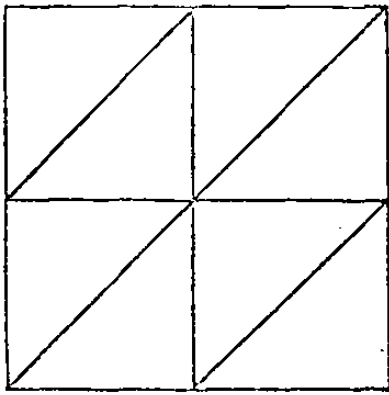
La siguiente prueba consiste en analizar el comportamiento del método, en función del número de elementos y de la posición de éstos, para lo cual primero definiremos tres tipos de mallas.

Mallas tipo S_n , las cuales tienen el mismo número de elementos, en cualquiera de los lados de la placa, como muestra la figura 4.7.

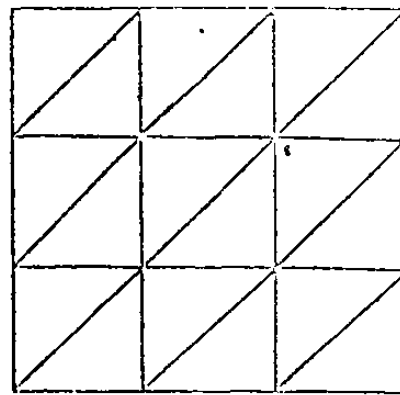
Mallas tipo AS_1 , las cuales tienen más elementos arriba y abajo, que en los lados de la placa, como muestra la figura 4.8.

Mallas tipo AS_2 , las cuales tienen más elementos a los lados que arriba y debajo de la placa, como muestra la figura 4.9.

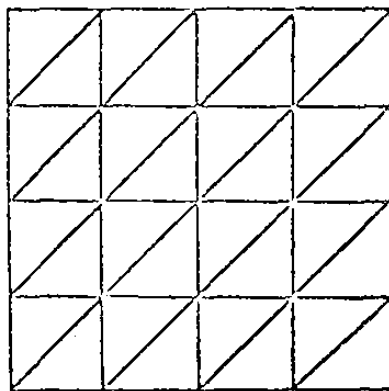
Calculando las temperaturas y el error para todas las mallas anteriores, se obtiene una gráfica como la que muestra la figura 4.10, en la que se dibujan las curvas de número de elementos contra error raíz medio cuadrático, para cada tipo de malla. Se observa que para pocos elementos, se obtiene menor error en las mallas



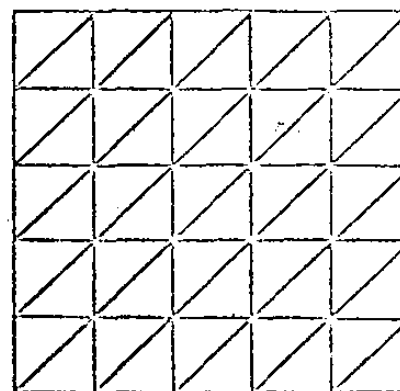
9 Nodos
8 Elementos



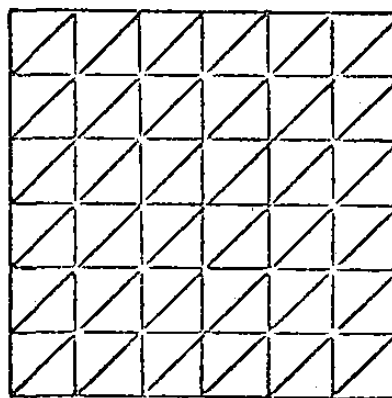
16 Nodos
18 Elementos



25 Nodos
32 Elementos

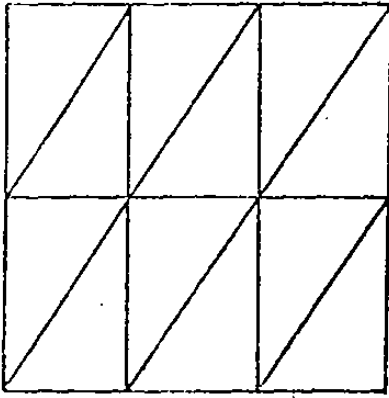


36 Nodos
50 Elementos



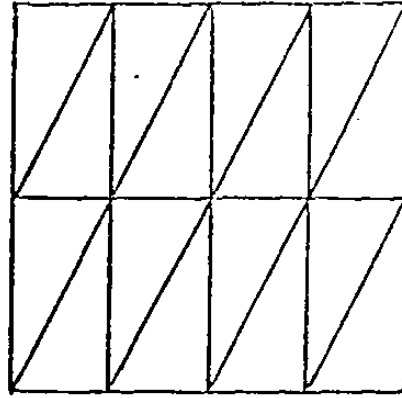
49 Nodos
72 Elementos

Fig.4.7 Mallas tipo S_a .



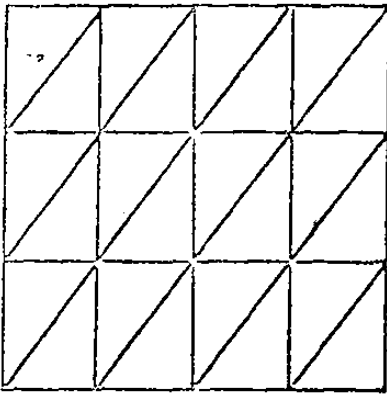
12 Nodos

12 Elementos



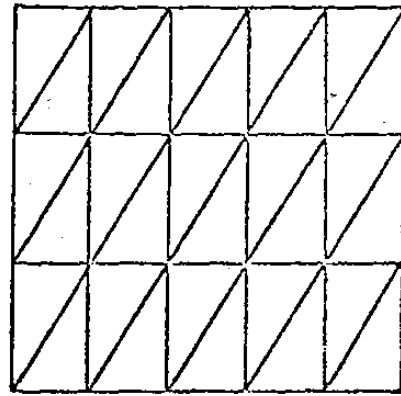
15 Nodos

16 Elementos



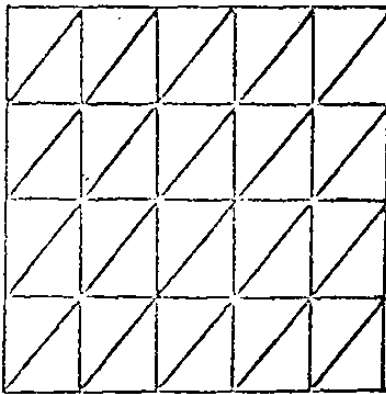
20 Nodos

24 Elementos



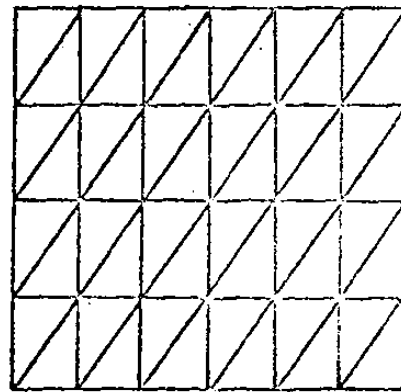
24 Nodos

30 Elementos



30 Nodos

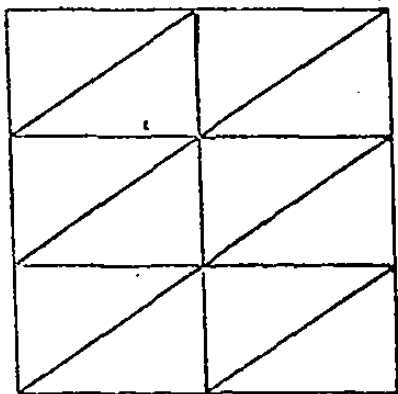
40 Elementos



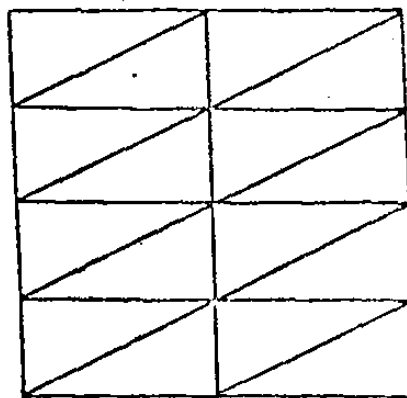
35 Nodos

48 Elementos

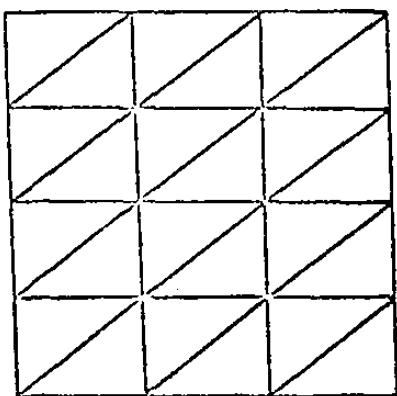
Fig.4.8 Mallas tipo AS₁.



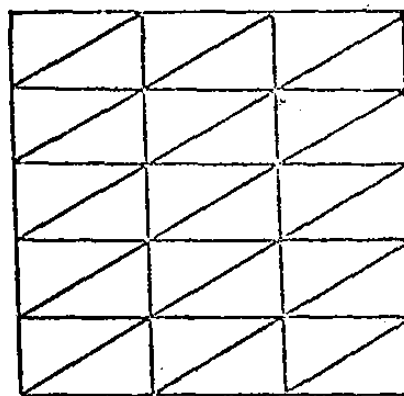
12 Nodos
12 Elementos



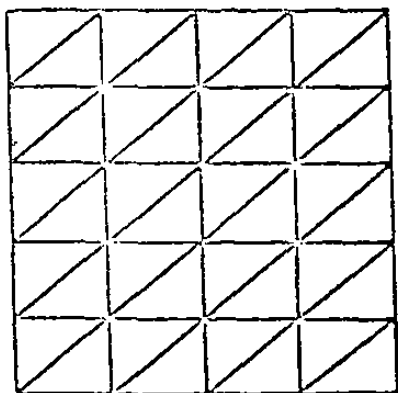
15 Nodos
16 Elementos



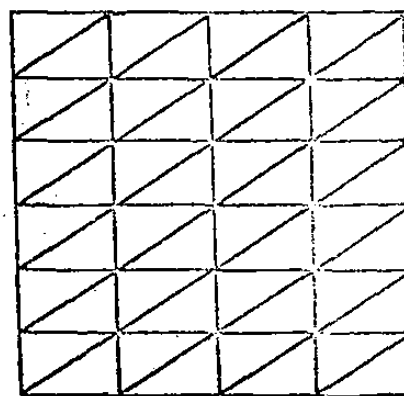
20 Nodos
24 Elementos



24 Nodos
30 Elementos



30 Nodos
40 Elementos



35 Nodos
48 Elementos

Fig.4.9 Mallas tipo AS₂.

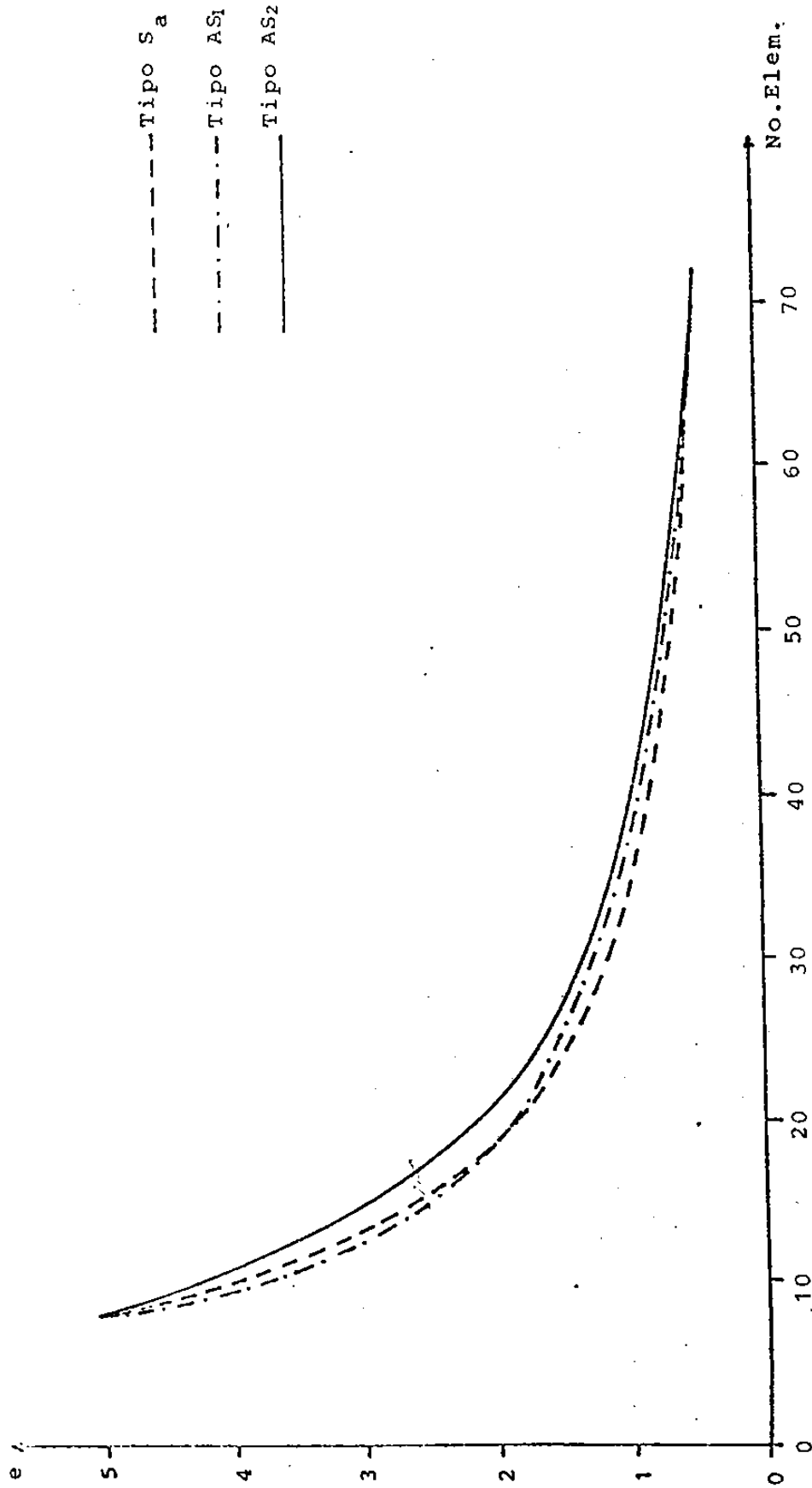


Fig. 410

Gráfica Número de elementos contra error raíz medio cuadrático para mallas tipo S_a, AS₁ y AS₂

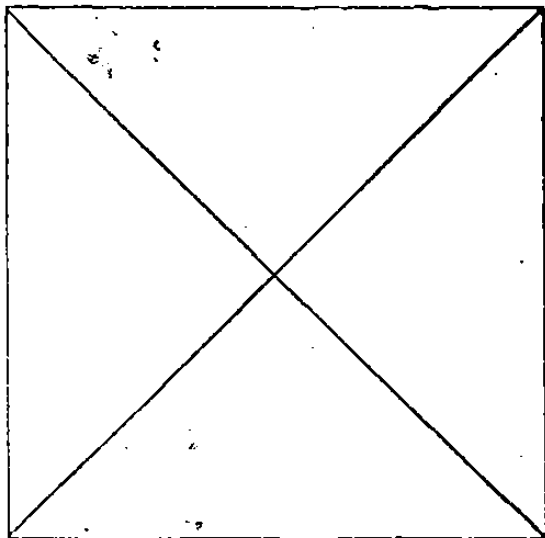
del tipo AS_1 , esto es mallas con más elementos en la zona de variación y mayor error para mallas del tipo AS_2 , que son lo contrario de las anteriores. Para más elementos se obtiene un menor error utilizando mallas del tipo S_a . Esto es debido a que los triángulos de estas mallas tienden más a ser equiláteros, que los de las mallas tipo SA_1 y a la vez hay suficientes elementos en la zona de variación, para poder detectar los cambios.

Otra vez podemos concluir, que siempre hay que tratar de poner más elementos en la zona de mayor variación y a la vez procurar que éstos datos tiendan a ser equiláteros. Las mallas del tipo AS_2 no son recomendables.

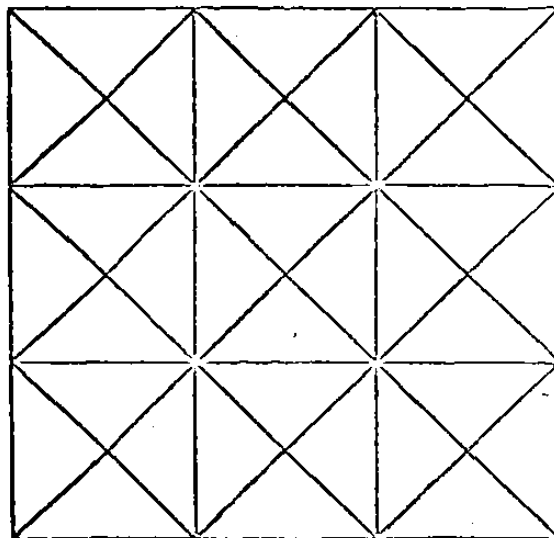
Se puede definir otro tipo de mallas, como es la S_b que muestra la figura 4.11, en la que el número de elementos en todos los lados de la placa es el mismo. La curva que se obtiene al graficar número de elementos contra error raíz medio cuadrático, es idéntica a la que se obtiene con la malla tipo S_a , sin embargo, con la malla S_b es más fácil aproximar contornos redondeados.

Si nos damos una muy buena idea de cual es la convergencia del método, sobre todo para problemas similares; esto es, al principio, a medida que se aumentan los elementos, el método converge rápidamente y al final, aunque se aumente el número de elementos, no se mejora mucho la solución, por lo que hay que tratar de encontrar un justo medio, sobre todo teniendo en cuenta que a más elementos la solución es más costosa. Para lograr esto último se pueden hacer dos o tres mallas con distintos números de elementos, para darse una idea de cual es la diferencia de los resultados entre una y otra, además se puede aprovechar, si es que no se conoce, para detectar cuales son las zonas de mayor variación y colocar en ellas más elementos y más pequeños.

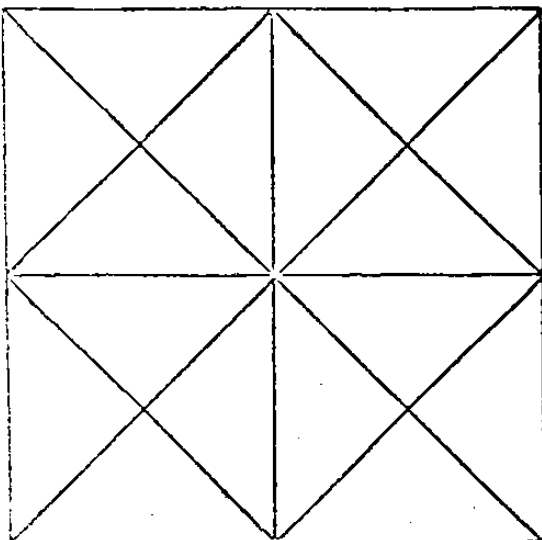
Los resultados anteriores, se resumen en las siguientes normas para el usos del método de elementos finitos:



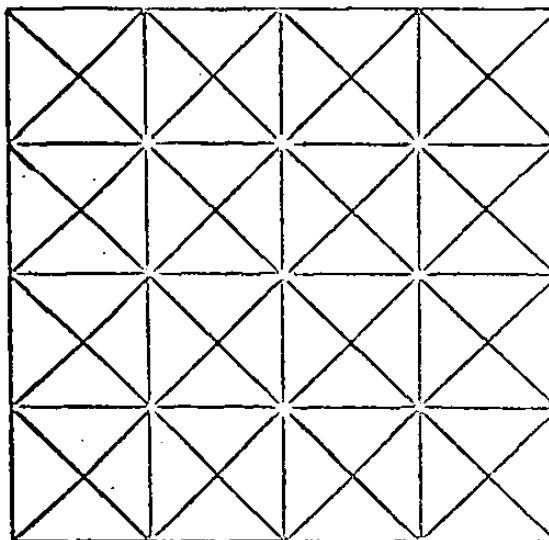
5 Nodos
4 Elementos



25 Nodos
36 Elementos



13 Nodos
16 Elementos



41 Nodos
64 Elementos

Fig.4.11 Mallas tipo S_b

- 1.- Dividir la región con una malla gruesa, para observar cuales son las zonas de mayor variación.
- 2.- Colocar más elementos y más pequeños en las zonas de gran variación.
- 3.- Dividir la región con una malla más fina y comparar los resultados con los obtenidos con la malla de aproximación, en caso de existir mucha diferencia, utilizar una malla todavía más fina y repetir el procedimiento.
- 4.- Procurar que los triángulos tiendan a ser equiláteros y evitar aquellos que sean muy deformes. Siempre es posible substituir un triángulo muy deformado por dos triángulos más parecidos a triángulos equiláteros.
- 5.- Colocar suficientes nodos en las fronteras donde exista variación.

4.3 PROBLEMA BIDIMENSIONAL EN ESTADO TRANSITORIO.

El siguiente problema es el de una placa en dos dimensiones con transferencia de calor por conducción en estado transitorio, para obtener la distribución de temperaturas en toda la superficie, en el transcurso del tiempo. Para el ejemplo del inciso anterior, se puede encontrar una solución analítica a través de series de Fourier, con la que se pueden comparar los resultados obtenidos por elementos finitos.

4.3.1 Planteamiento de las ecuaciones y solución analítica.

La ecuación que define la conducción de calor en dos dimensiones y en estado transitorio es, Holman (1972)

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = (\rho C/k) \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (4.24)$$

donde θ es la temperatura, "x" y "y" son coordenadas cartesianas, ρ es la densidad, C es el calor específico, k es la conductividad térmica del material y t es el tiempo. Se tomará como constantes las propiedades del material.

Considerando un ejemplo similar al de la sección anterior, pero ahora en estado transitorio. Tenemos una placa rectangular, como la mostrada en la figura 4.1, donde para tiempo $t=0$ toda la placa se encuentra a una temperatura $\theta=0$ y para tiempo t mayor que cero, se cambia la temperatura del lado superior por una distribución de temperatura senoidal. Para este problema también se puede encontrar una solución analítica como sigue:

$$\theta = G(x,y) + H(x,y,t) \quad (4.26)$$

donde el primer término del lado derecho es la solución en estado permanente y el segundo término es la componente debida al estado transitorio.

La solución en estado permanente se obtiene por medio del método de separación de variables, utilizando las siguientes condiciones de frontera

$$\begin{aligned} G &= 0 && \text{en } x = 0 \\ G &= 0 && \text{en } x = a \\ G &= 0 && \text{en } y = 0 \\ G &= \theta_m \text{sen}(\pi x/a) && \text{en } y = b \end{aligned} \quad (4.27)$$

La solución del problema permanente está dada en la ecuación (4.3), así que

$$G(x,y) = \theta_m (\text{senh}(\pi y/a) / \text{senh}(\pi b/a)) * \text{sen}(\pi x/a) \quad (4.28)$$

Por otra parte, la contribución en estado transitorio también se puede obtener por el método de separación de variables, pero ahora se usan las siguientes condiciones de frontera, para tiempo mayor que cero.

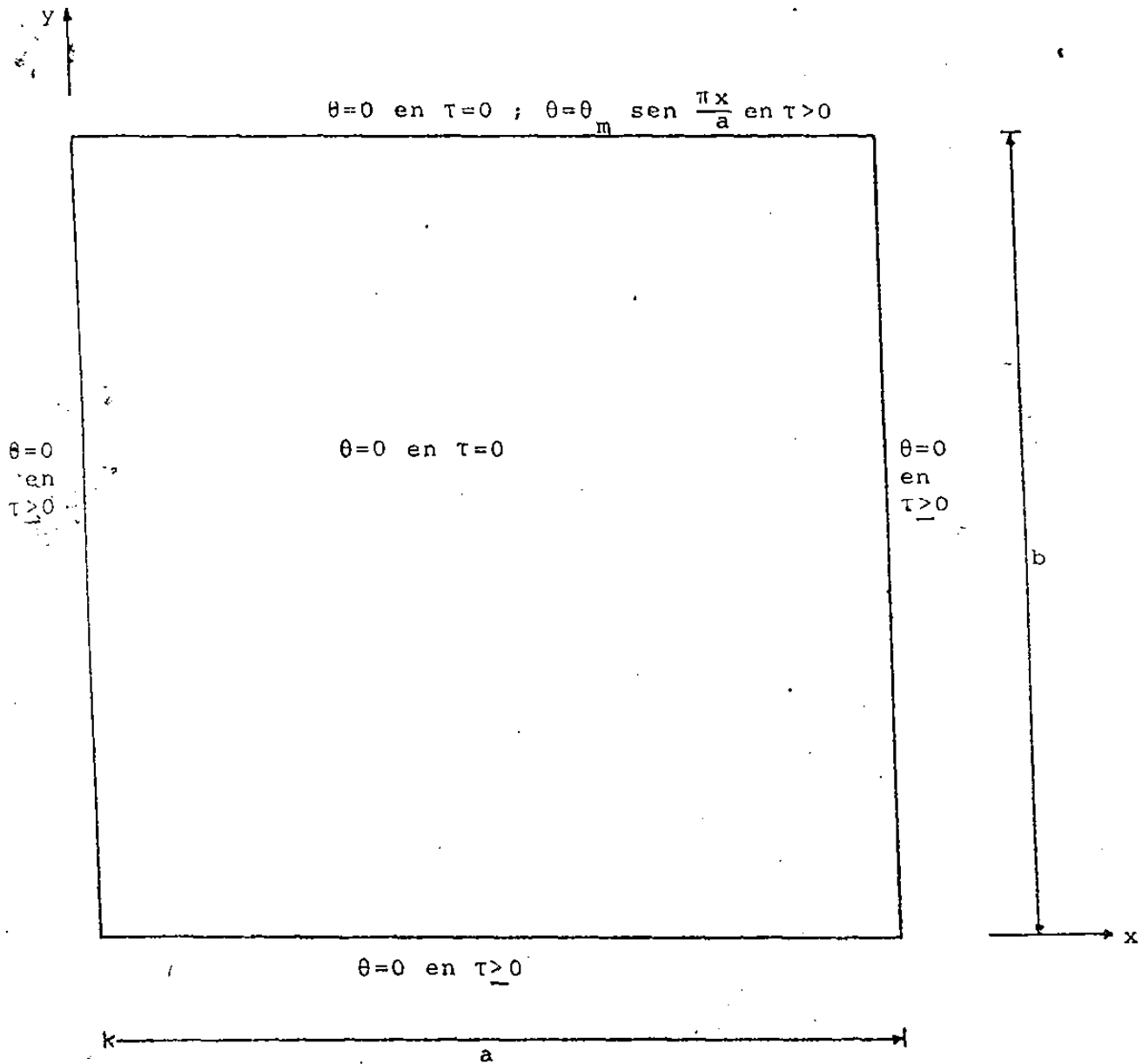


Fig.4.12 Placa con transferencia de calor por conducción con sus condiciones iniciales y de frontera.

$$\begin{aligned}
 & \text{para } t > 0 \\
 & H = 0 \text{ en } x = 0 \\
 & H = 0 \text{ en } x = a \\
 & H = 0 \text{ en } y = 0 \\
 & H = 0 \text{ en } y = b
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

y para tiempo igual a cero las condiciones iniciales son

$$H(x,y,0) = -G(x,y) \text{ en } 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b \tag{4.30}$$

Sustituyendo $H(x,y,t)$ por θ en la ecuación (4.24) y resolviéndola usando (4.29) y (4.30) llegamos a una solución de la forma

$$H(x,y,t) = (2\theta_m/\pi) \text{sen}(\pi x/a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^{n+1}}{(b^2/a^2) + n^2} \text{sen}(n\pi y/b) \exp(-1/a^2 + n^2/b^2) \pi^2 t \tag{4.31}$$

La cual es una serie de Fourier senoidal, cuya exactitud depende del número de términos que se tomen en la sumatoria.

Por último, sustituyendo (4.28) y (4.31) en (4.26), tenemos

$$\theta = \theta_m \text{sen}(\pi x/a) \left[\frac{\text{senh}(\pi y/a)}{\text{senh}(\pi b/a)} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^{n+1}}{b^2/a^2 + n^2} \text{sen}(n\pi y/b) \exp(-1/a^2 + n^2/b^2) \pi^2 t \right] \tag{4.32}$$

que es la solución analítica de la ecuación (4.24) para el problema propuesto.

4.3.2 Formulación de Elementos Finitos

Debido a que el problema que estamos considerando se encuentra en estado transitorio, esto es, depende del tiempo, en la formulación se hace una combinación de dos métodos, el método de elementos finitos en espacio y el método de diferencias

finitas en tiempo. Para lograrlo, se calcula la distribución de temperaturas en la placa para un tiempo inicial, utilizando elementos finitos, después se incrementa el tiempo por un Δt y se vuelve a calcular la distribución de temperaturas por elementos finitos, utilizando los resultados del tiempo anterior, como indica el método de diferencias finitas, así sucesivamente hasta que se vuelve al estado permanente.

Para la formulación de elementos finitos se procede de la siguiente manera: la temperatura θ la podemos aproximar de la forma

$$\theta(x,y,t) = \sum_{i=1}^n \theta_i(t) N_i(x,y) \quad (4.33)$$

donde θ es la función aproximada, $\theta_i(t)$ son los valores de la temperatura en cada nodo del elemento, N_i son las funciones de interpolación del elemento y n es el número total de nodos del elemento.

Debido a que se hizo una aproximación se obtendrá un residuo como sigue

$$\partial^2\theta/\partial x^2 + \partial^2\theta/\partial y^2 - \partial\theta/\partial t = \varepsilon \quad (4.34)$$

donde ε es el residuo. Tomando el residuo ortogonal a las funciones de interpolación

$$(\varepsilon, N_i) = \int_{\Omega} (\partial^2\theta/\partial x^2 + \partial^2\theta/\partial y^2 - \partial\theta/\partial t) N_i dx dy = 0 \quad (4.35)$$

donde Ω es el dominio de un elemento. Aplicando el teorema de Green a la ecuación (4.35) llegamos a

$$-\int_{\Omega} (\partial\theta/\partial x \partial N_i/\partial x + \partial\theta/\partial y \partial N_i/\partial y) dx dy + \int_{\Gamma} (\partial\theta/\partial x N_i dy - \partial\theta/\partial y N_i dx) - \int_{\Omega} \partial\theta/\partial t N_i dx dy = 0 \quad (4.36)$$

donde Γ es el contorno del elemento. Sustituyendo (4.33) en (4.36) y reordenando

$$\theta_j \int_{\Omega} (\partial N_i / \partial x \partial N_j / \partial x + \partial N_i / \partial y \partial N_j / \partial y) dx dy + \theta_j \int_{\Omega} N_i N_j dx dy = \int_{\Gamma} (\partial \theta / \partial x N_i dy - \partial \theta / \partial y N_i dx) = 0 \quad (4.37)$$

done $\theta_j = d\theta_j/dt$. Usando notación compacta escribimos

$$\sum_{j=1}^n (K_{ij} \theta_j + B_{ij} \theta_j) = q_i \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (4.38)$$

K es la matriz de coeficientes de temperaturas estables, B es la matriz de coeficientes de temperaturas transitorias y q es el vector de fuentes de calor y son

$$K_{ij} = \int_{\Omega} (\partial N_i / \partial x \partial N_j / \partial x + \partial N_i / \partial y \partial N_j / \partial y) dx dy \quad (4.39)$$

$$B_{ij} = \int_{\Omega} N_i N_j dx dy \quad (4.40)$$

$$q = \int_{\Gamma} (\partial \theta / \partial x N_i dy - \partial \theta / \partial y N_i dx) \quad (4.41)$$

ahora utilizando el método de diferencias finitas en tiempo, hacemos las siguientes aproximaciones

$$\theta_j = (\theta_j^{k+1} + \theta_j^k) / 2 \quad (4.42)$$

$$\theta_j = (\theta_j^{k+1} - \theta_j^k) / \Delta t \quad (4.43)$$

donde k contabiliza los incrementos de tiempo Δt . Sustituyendo (4.42) y (4.43) en (4.38) y agrupando términos tenemos

$$(\Delta t K_{ij} + 2B_{ij}) \theta_j^{k+1} = (-\Delta t K_{ij} + 2B_{ij}) \theta_j^k + 2\Delta t q_i \quad (4.44)$$

lo que se puede escribir como

$$\sum_{j=1}^n G_{ij} \theta_j^{k+1} = h_i \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (4.45)$$

donde

$$G_{ij} = \Delta t K_{ij} + 2B_{ij} \quad (4.46)$$

$$H_i = 2\Delta t q_i + (-\Delta t K_{ij} + 2B_{ij})\theta_i^k \quad (4.47)$$

Con la ecuación (4.45) se pueden encontrar las temperaturas para el siguiente tiempo en función de las temperaturas del tiempo anterior y en nuestro caso, para el tiempo inicial las temperaturas en toda la placa son cero, excepto en la parte superior donde se encuentra la distribución de temperaturas senoidal. Se puede observar que las matrices K y B únicamente se tienen que calcular una vez, ya que estas dependen solo de la topología del cuerpo y no del tiempo, lo cual facilita mucho los cálculos.

4.3.3 Solución del problema por Elementos Finitos contra solución Analítica

En el posprocesamiento se calcula el error entre la solución analítica y la de elementos finitos para cada instante de tiempo y se interpola dentro de cada elemento para obtener las coordenadas de las líneas de temperatura constante.

Al igual que la solución en estado permanente, la norma del error, que se utiliza para comparar la solución analítica y la solución de elementos finitos, es el error raíz medio cuadrático definido en la ecuación (4.23).

La malla que se utiliza para efectuar los cálculos es del tipo Sa de 25 nodos y 32 elementos, como la que se muestra en la figura 4.7, debido a que con esta malla, para

el estado permanente, se obtiene un error bastante pequeño al efectuar los cálculos y además no consume mucho tiempo de procesamiento en la computadora.

En la figura 4.13 se grafica la variación en el tiempo de la temperatura del nodo central de la malla, obtenida analíticamente y por elementos finitos. Se observa que para tiempo muy pequeños la temperatura obtenida por elementos finitos desciende de la condición inicial y luego vuelve a subir, lo que físicamente no es posible. Después se observa que las dos temperaturas se elevan al mismo tiempo de la condición inicial y se separan hasta que llega un momento en que la diferencia entre una y otra es mas o menos constante, esta diferencia es la misma que existe entre la solución de elementos finitos y analítica para estado permanente, lo cual es aceptable, ya que no se puede pedir menor diferencia si se utiliza la misma malla. La oscilación no se disminuye al hacer mas pequeños los incrementos de tiempo y si se puede aumentar si estos son mas grandes, por lo que es un defecto del método. Si se utilizan mallas mas finas con mas elementos en la zona de mayor variación, la oscilación disminuye y la precisión aumenta.

La figura 4.14 nos muestra una gráfica de la variación del error raíz medio cuadrático a lo largo del tiempo. En ella se observa que para tiempos muy pequeños el error es grande, debido a las oscilaciones de la temperatura en los nodos, y a medida que transcurre el tiempo, el error se reduce hasta que es igual al que se obtiene en estado permanente. El máximo error es de 5.45% , el cual es bastante pequeño considerando la malla que se utilizó.

En base a los resultados obtenidos, podemos decir que la combinación del método de elementos finitos y el método de diferencias finitas para resolver problemas parabólicos es efectiva, únicamente teniendo en cuenta que la discretización del dominio debe ser mas fina que para un problema elíptico, para disminuir la oscilación que se presenta en los primeros instantes del tiempo.

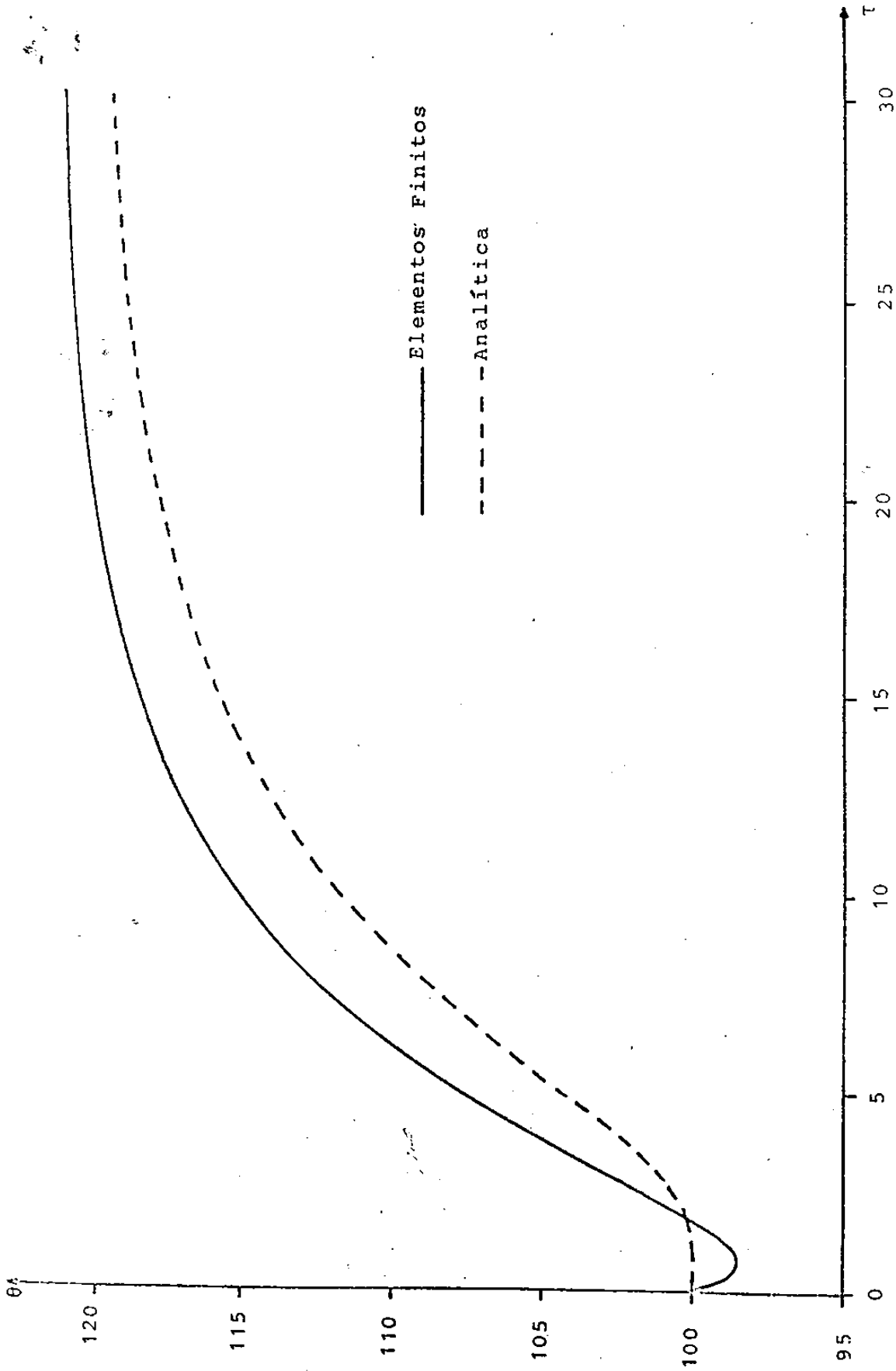


Fig.4.13

Gráfica tiempo contra temperatura para el nodo central de la malla.

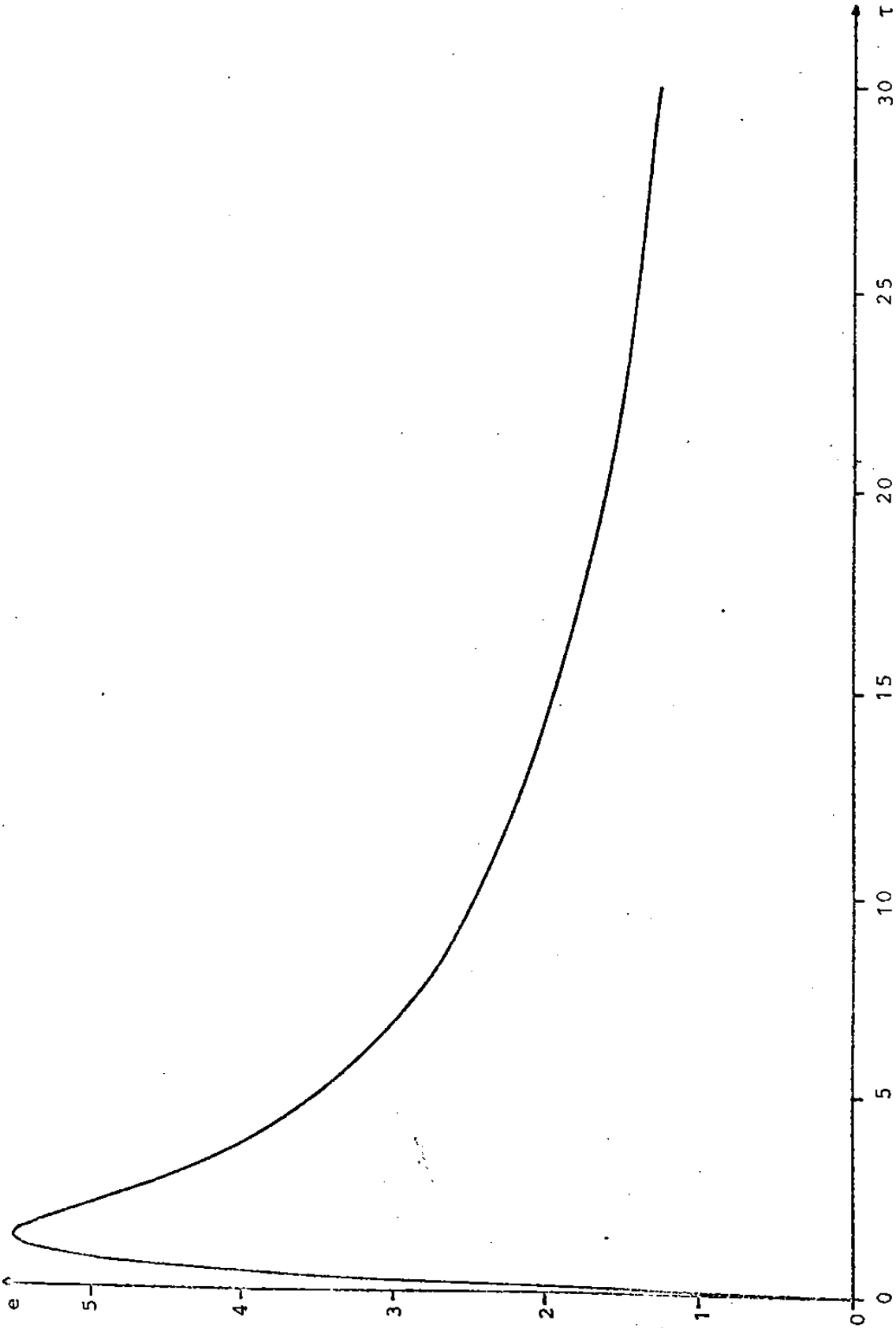


Fig. 4.14

Gráfica tiempo contra error raíz medio cuadrático

CAPITULO 5

FLUJO POTENCIAL INCOMPRESIBLE

5.1 GENERALIDADES

En este capítulo se va a tratar el caso de la solución de un flujo potencial incompresible y no viscoso, o sea un flujo ideal, por medio del método de elementos finitos, en conjunto con el método de Galerkin.

Para ejemplificar, se presentará el problema de un flujo bidimensional alrededor de un cilindro, el cual se encuentra entre dos placas planas.

Este tipo de flujo puede ser utilizado para obtener una aproximación del comportamiento de un flujo real, con una viscosidad muy pequeña, y con una capa límite muy delgada en la superficie, además de que sea incompresible. Un ejemplo de los flujos que cumplen estas condiciones, son los flujos convergentes o acelerados.

5.2 PLANTEAMIENTO DE LAS ECUACIONES

Ya que lo que nos interesa es un flujo bidimensional, todos los planteamientos que se hagan a continuación serán descritos en dos dimensiones para mayor facilidad.

Un fluido real satisfacer las siguientes condiciones:

a) La ecuación de continuidad, que en coordenadas cartesianas es:

$$\partial u / \partial x + \partial v / \partial y = 0 \quad (5.1)$$

donde “u” y “v” son los componentes de velocidad en las direcciones “x” y “y” respectivamente.

b) La segunda ley de **Newton** en todos los puntos y en cualquier instante:

c) El fluido no debe penetrar dentro de cualquier contorno sólido, ni tampoco se deben formar oquedades entre el fluido y el contorno.

d) A las condiciones anteriores le añadimos otra más. El fluido debe ser irrotacional, esto es

$$\partial v / \partial x - \partial u / \partial y = 0 \quad (5.2)$$

El aplicar la segunda ley de Newton a una partícula del fluido, nos conduce a las ecuaciones de Euler y son:

$$\partial u / \partial t + u \partial u / \partial x + v \partial u / \partial y = -1/\rho (\partial p / \partial x) \quad (5.3)$$

$$\partial v / \partial t + u \partial v / \partial x + v \partial v / \partial y = -1/\rho (\partial p / \partial y)$$

donde t es el tiempo, ρ es la densidad y p es la presión

Vamos a considerar un flujo en estado permanente, por lo tanto para este caso el primer término de la ecuación (5.3) desaparece.

Ya que el flujo que estamos considerando es irrotacional, podemos definir un potencial de velocidad a partir de la ecuación (5.2) de la siguiente forma

$$u = \partial \phi / \partial x \quad ; \quad v = \partial \phi / \partial y \quad (5.4)$$

donde ϕ es el potencial de velocidad. De esta manera obtenemos una función ϕ tal, que su derivada con respecto a una dirección cualquiera es la componente de velocidad en esta dirección. Esto es posible ya que no existe rozamiento, una partícula que esté inicialmente en reposo no puede ponerse a girar, de igual manera una partícula que está girando, no puede alterar su rotación.

Si sustituimos la ecuación (5.4) en la ecuación de continuidad (5.1) obtenemos

$$\partial^2\phi/\partial x^2 + \partial^2\phi/\partial y^2 = 0 \quad (5.5)$$

que es la llamada ecuación de Laplace en dos dimensiones. Toda función ϕ que satisfaga esta ecuación es un caso posible de flujo irrotacional.

La ecuación (5.5) tiene solución analítica para casos muy sencillos, en los que las fronteras no presenten ninguna complicación, sin embargo, para casos en los que las fronteras no son muy regulares, hay que utilizar un método numérico para resolverla.

Para el caso de un flujo bidimensional, también se puede definir una función ψ , llamada función de corriente, que nos relacione las velocidades en las dos direcciones. A partir de la ecuación (5.1) tenemos

$$u = \partial\psi/\partial y \quad ; \quad v = -\partial\psi/\partial x \quad (5.6)$$

sustituyendo (5.6) en (5.2) se tiene

$$\partial^2\psi/\partial x^2 + \partial^2\psi/\partial y^2 = 0 \quad (5.7)$$

que es la ecuación de Laplace para la función de corriente y su solución tiene dificultades similares a la del potencial de velocidad.

Se puede demostrar fácilmente, que la línea descrita por la función $\psi = \text{constante}$ es la trayectoria de una partícula del fluido y a esta curva se le llama línea de corriente.

El potencial de velocidad y la función de corriente se relaciona de (5.6) y (5.4)

$$\partial\phi/\partial x = \partial\psi/\partial y \quad ; \quad \partial\phi/\partial y = -\partial\psi/\partial x \quad (5.8)$$

como consecuencia las líneas de corriente y las líneas equipotenciales son perpendiculares entre sí para un flujo ideal.

5.3 FORMULACION DE ELEMENTOS FINITOS

Ya que el mismo tipo de ecuación, esto es, la ecuación de Laplace, se utiliza para obtener el potencial de velocidad y la función de corriente, la formulación de elementos finitos es idéntica para cualquiera de las dos y la única diferencia estriba en las condiciones de frontera que se utilizan. No existe ventaja de una sobre otra formulación si las geometrías son más o menos simples. Por lo tanto únicamente se describirá la formulación de la función de corriente.

Haciendo la siguiente aproximación para un elemento

$$\psi = \sum_{i=1}^n N_i \psi_i \quad (5.9)$$

donde ψ es la función aproximada y N_i son las funciones de interpolación o funciones de base de un elemento, n es el número de nodos del elemento y ψ_i es el valor de la función en cada nodo. Sustituyendo (5.9) en (5.7) e igualando a un residuo ε se obtiene

$$\partial^2\psi/\partial x^2 + \partial^2\psi/\partial y^2 = \varepsilon \quad (5.10)$$

considerando una proyección ortogonal del residuo sobre las funciones de peso, que en este caso son iguales a las funciones de base

$$(\epsilon, N_i) = \int_{\Omega} (\partial^2 \psi / \partial x^2 + \partial^2 \psi / \partial y^2) N_i \, dx dy = 0 \quad (5.11)$$

donde Ω es el dominio del elemento. Aplicando el teorema de Green en (5.11) llegamos

$$-\int_{\Omega} (\partial \psi / \partial x * \partial N_i / \partial x + \partial \psi / \partial y * \partial N_i / \partial y) \, dx dy + \int_{\Gamma} (\partial \psi / \partial x * N_i \, dy - \partial \psi / \partial y * N_i \, dx) = 0 \quad (5.12)$$

sustituyendo (5.9) en (5.12) y reordenando

$$\psi_j \int_{\Omega} (\partial N_i / \partial x * \partial N_j / \partial x + \partial N_i / \partial y * \partial N_j / \partial y) \, dx dy = \int_{\Gamma} (\partial \psi / \partial x * N_i \, dy - \partial \psi / \partial y * N_i \, dx) \quad (5.13)$$

usando una notación simplificada escribimos

$$\sum_{j=1}^n K_{ij} \psi_j = f_i \quad (5.14)$$

Aquí K y f son llamados matriz de coeficientes y vector de flujo respectivamente y son

$$K_{ij} = \int_{\Omega} (\partial N_i / \partial x * \partial N_j / \partial x + \partial N_i / \partial y * \partial N_j / \partial y) \, dx dy \quad (5.15)$$

$$f_i = \int_{\Gamma} (\partial \psi / \partial x * N_i \, dy - \partial \psi / \partial y * N_i \, dx) \quad (5.16)$$

Para obtener el sistema de ecuaciones global, se ensamblan las ecuaciones (5.14) de todos los elementos, obteniéndose

$$\sum_{j=1}^n K_{ij}^* \psi_j^* = f_i^* \quad (i=1,2,\dots,m) \quad (5.17)$$

donde m es el número total de nodos.

5.4 SOLUCION Y RESULTADO

El problema específico escogido como ejemplo, es el del flujo alrededor de un cilindro de radio $D=1$ entre placas separadas una distancia $4D$ y suponiendo que el flujo uniforme se encuentra a una distancia $3.5D$, medida desde el centro del cilindro, figura 5.1.

Por simetría se utiliza una cuarta parte del dominio, sección a-b-c-d-e. Por inspección notamos que las fronteras a-b y e-d-c son líneas de corriente y como referencia tomaremos $\psi = 0$ en e-d-c. Ya que la velocidad es constante en a-e podemos poner

$$\partial\psi/\partial y = u = 1 \quad (5.18)$$

integrando

$$\psi = y + \text{constante} \quad (5.19)$$

lo que significa que la función de corriente varía linealmente con respecto a "y", en la frontera a-e. Sustituyendo los valores de "y", en la (5.19), para la frontera a-b llegamos a $\psi = 2$.

Todas las condiciones de frontera que hemos definido hasta el momento son del tipo Dirichlet. Lo único que resta es definir la condición de frontera para el lado b-c, sabemos que la línea de corriente es perpendicular a ese lado, por lo

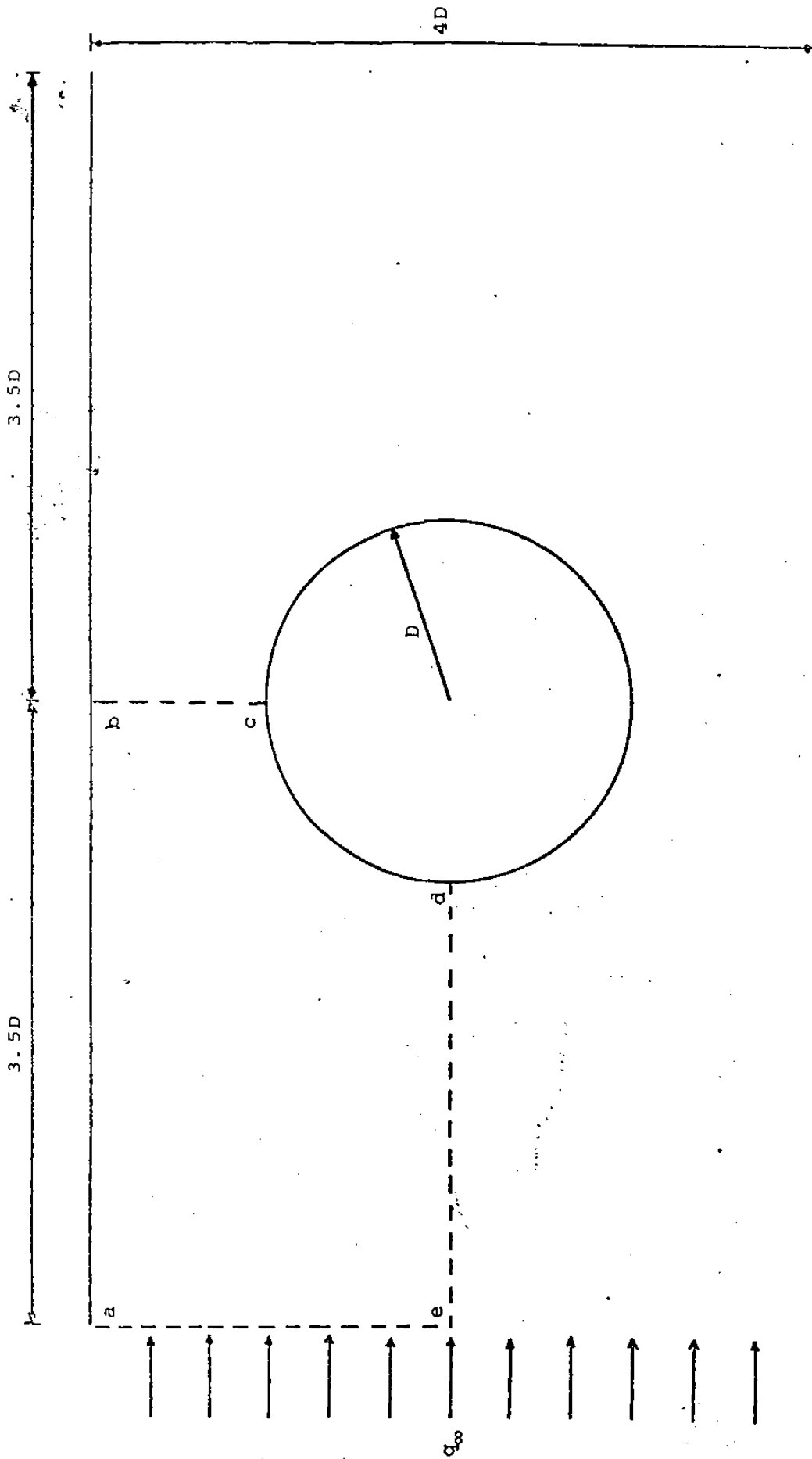


Fig. 5.1

Flujo uniforme alrededor de un cilindro entre placas planas.

que definimos $\partial\psi/\partial n = 0$, siendo esta del tipo Neumann. Las condiciones de frontera se presentan en la figura 5.2.

Para resolver este problema, se escogieron elementos triangulares, con funciones de interpolación lineal, por lo que solamente tienen 3 nodos cada elemento.

Se utilizan dos discretizaciones del dominio como muestran las figuras 5.3 y 5.4. La primera es una malla gruesa de 10 nodos, usada tanto para probar el programa como para observar las zonas de mayor variación. La segunda es una malla fina de 73 nodos con 111 elementos, que se realizó tomando en cuenta los resultados obtenidos con la malla anterior.

En la figura 5.5 se muestran las líneas de corriente y la variación de la velocidad en la cresta del cilindro, se comparan con la solución analítica aproximada, obtenida por el método de imágenes de la siguiente forma (Chung, 1978)

$$\psi = q_{\infty} \left\{ y - \frac{H}{2\pi} \operatorname{senh}^2\left(\frac{\pi b}{H}\right) \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi y}{H}\right) / \left[\cosh^2\left(\frac{\pi x}{H}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi y}{H}\right) \right] \right\} \quad (5.20)$$

donde x, y son coordenadas con origen en el centro del cilindro, b es el radio y H es la distancia vertical entre las dos placas.

Se observa que existe bastante diferencia entre los resultados obtenidos con la malla gruesa y la solución analítica, el error raíz medio cuadrático relativo es de 8.5 %. Sin embargo, al comparar los resultados de la malla fina con la solución analítica, el error raíz medio cuadrático relativo, en la desviación de las curvas de líneas de corriente, es de 0.9 % el cual es bastante pequeño; en la figura se ve claramente que casi coinciden las curvas.

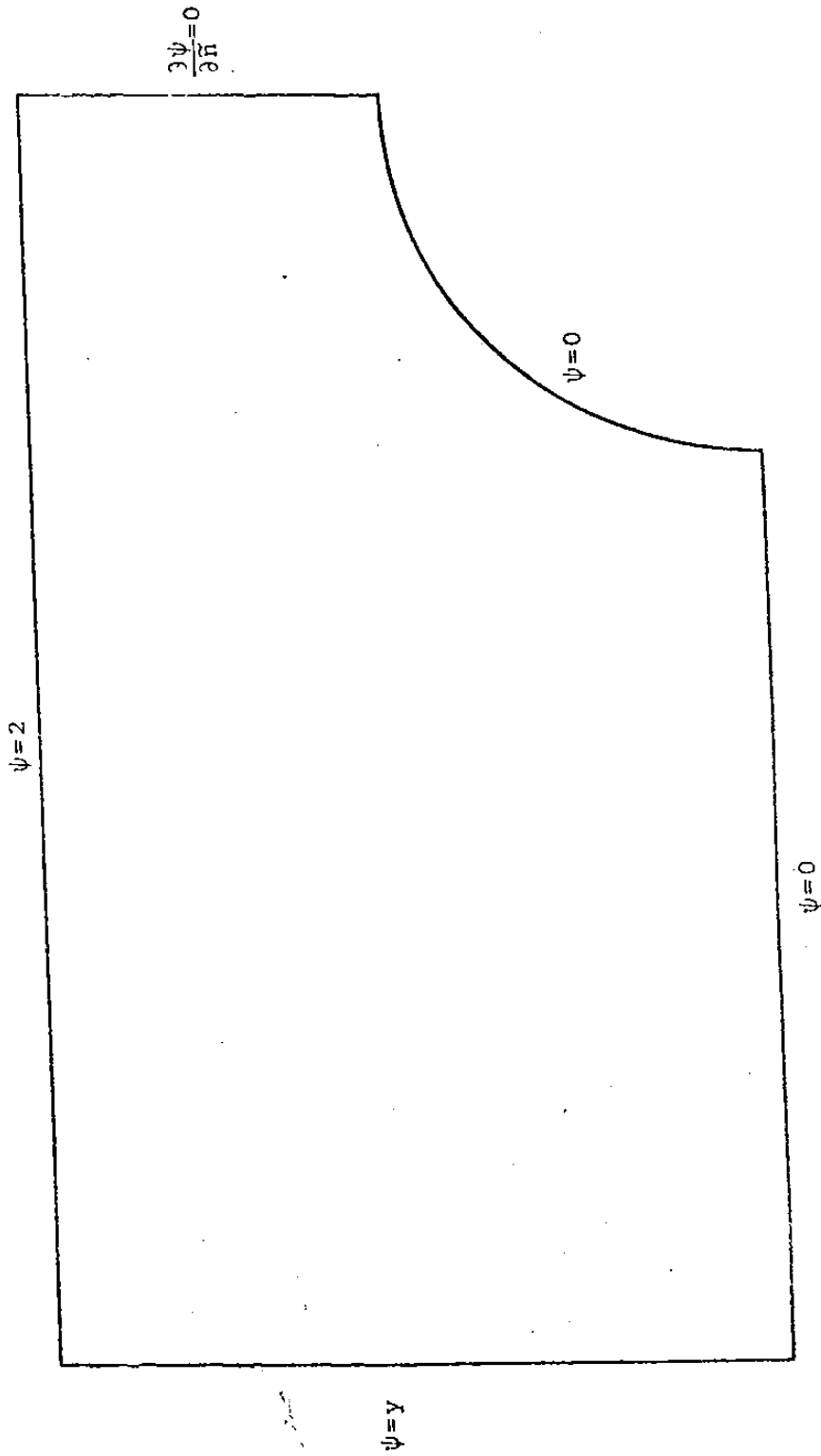


Fig. 5.2

Condiciones de frontera.

Malla gruesa.

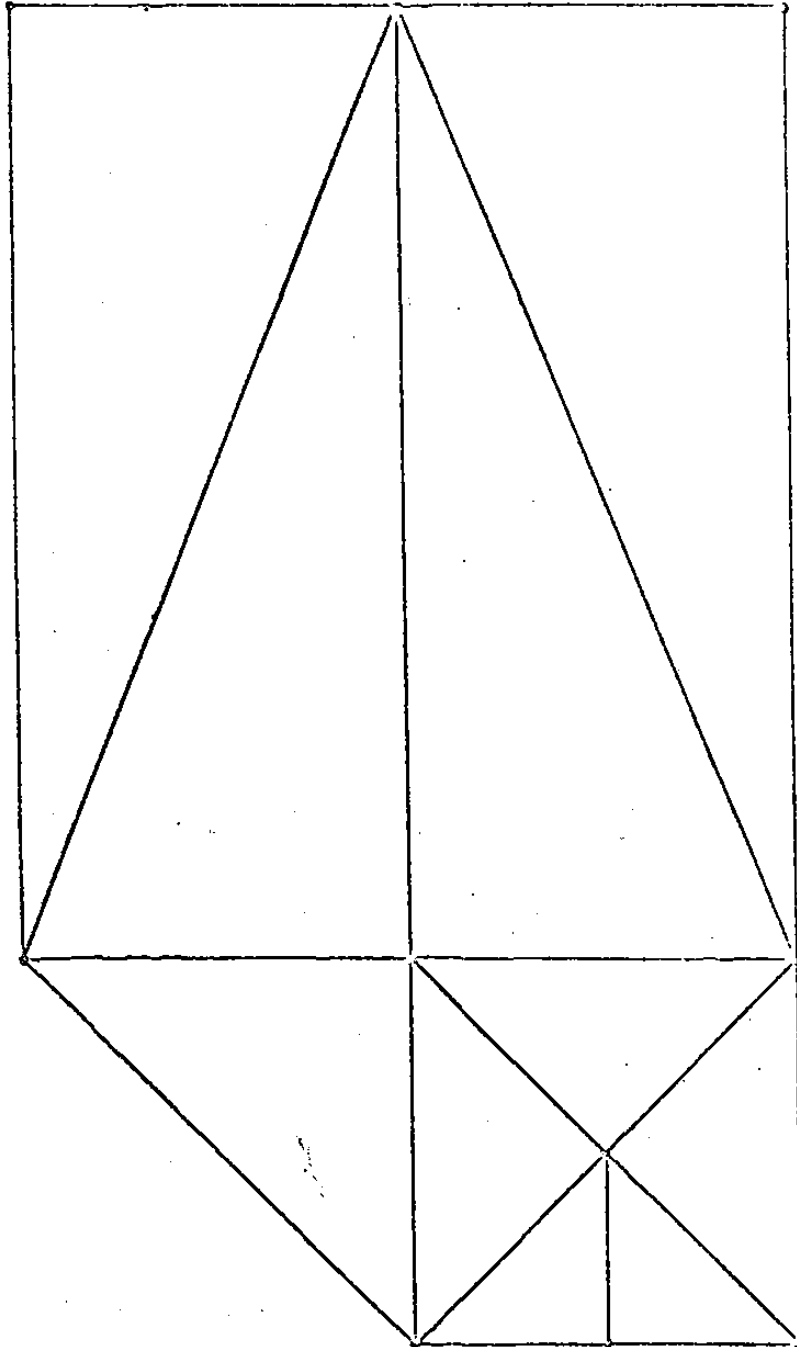
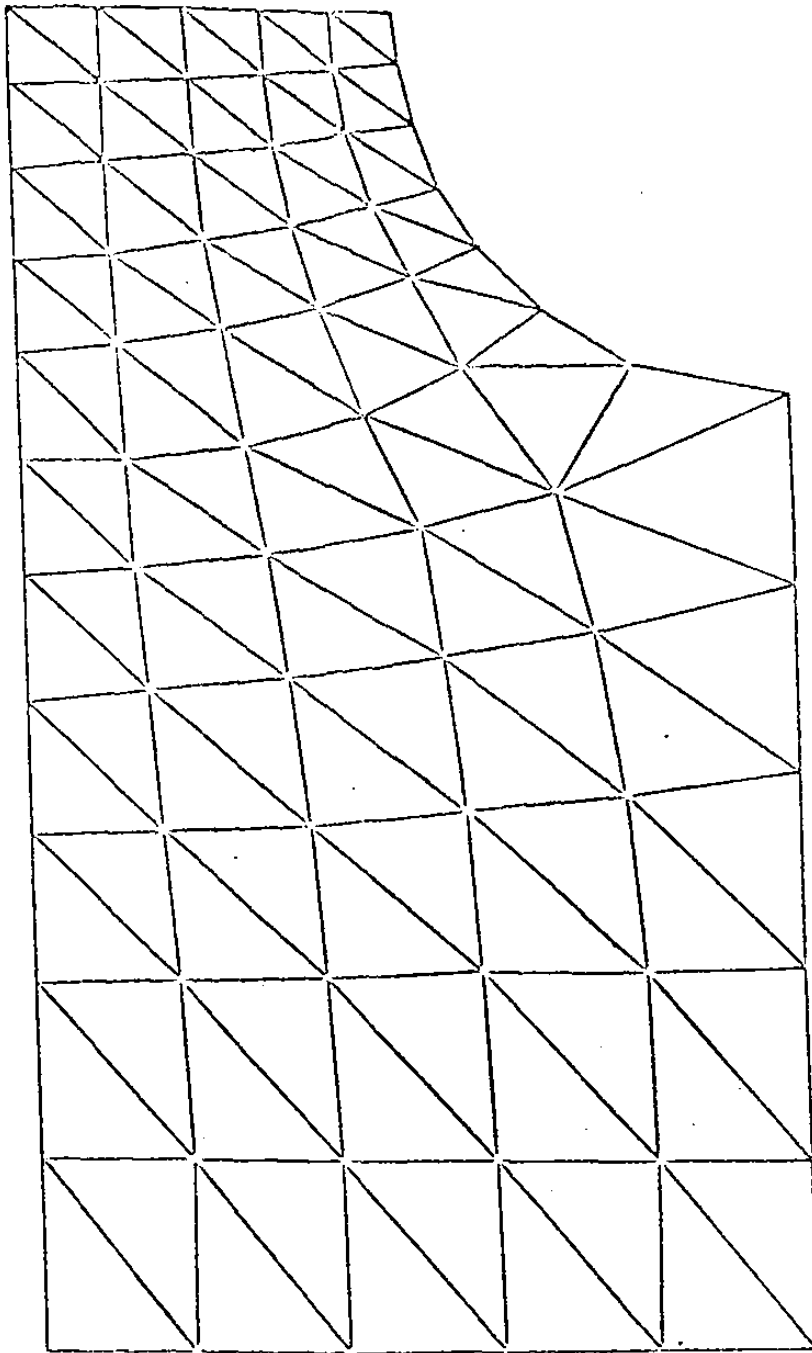
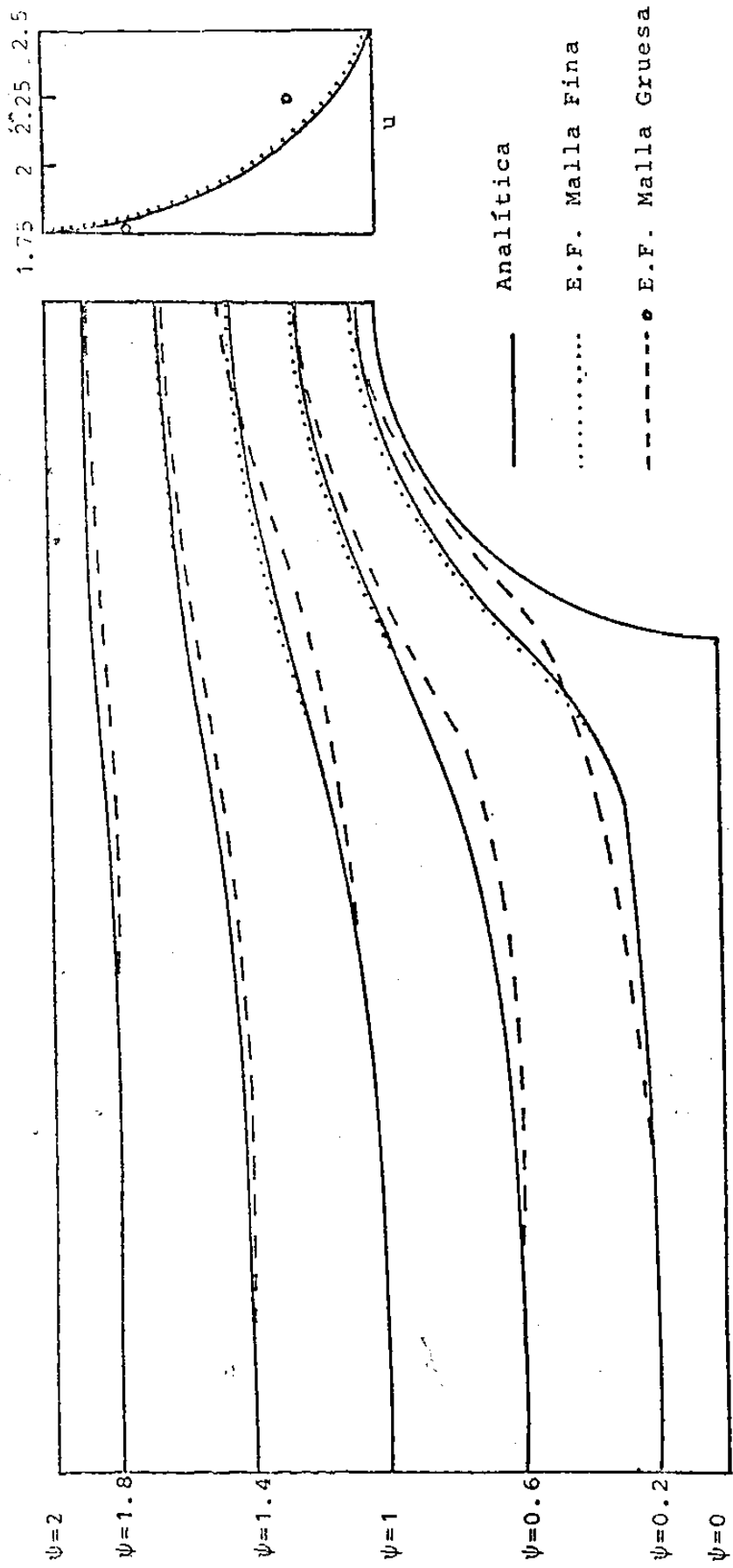


Fig.5.3



Malla Fina.

Fig. 5.4



Líneas de corriente y variación de la velocidad arriba de la cresta del cilindro.

Fig.5.5

También se observa como la velocidad aumenta en la cresta del cilindro al acercarse a éste y la poca diferencia que existe entre la curva de malla fina y la solución analítica.

Concluyendo, los resultados demuestran la utilidad del método de elementos finitos de Galerkin en la solución de problemas de flujo potencial incompresible y cómo , con una buena discretización se pueden obtener resultados bastantes precisos.

CAPITULO 6

FLUJO POTENCIAL COMPRESIBLE

6.1 GENERALIDADES

Cuando se estudian flujos alrededor de cuerpos sumergidos, normalmente no se pueden resolver las ecuaciones de movimiento en forma analítica, debido a la no linealidad de las mismas, es por ello que en el presente capítulo se estudiará la solución de un flujo potencial compresible subsónico y no viscoso, por medio del método de elementos finitos, usando el método de residuos pesados de tipo Galerkin.

El caso de flujos subsónicos ha sido estudiado principalmente utilizando los principios variacionales (Shen, 1977). Entre los trabajos más importantes se encuentra el de Carey (1975), el cual utiliza un principio variacional, en combinación con una expansión de perturbaciones. Sin embargo, como se muestra en Martín Del Campo y Sen (1980), se puede resolver el problema de flujos potenciales más sencillamente, con un método iterativo combinado con el método de elementos finitos. En esta forma se pueden calcular las líneas de corriente y equipotenciales, así como el número de Mach local en cada punto del espacio.

Para justificar, se presentará el problema de un flujo bidimensional alrededor de un cilindro sin circulación, el cual se encuentra entre dos placas. Este problema puede ser extendido fácilmente a el tratamiento de flujos compresibles alrededor de perfiles aerodinámicos, para lo cual únicamente habría que añadir la circulación.

6.2 PLANTEAMIENTO DE LAS ECUACIONES

Al igual que en el capítulo anterior, ya que lo que se va a tratar es un flujo bidimensional, todos los desarrollos que se hagan a continuación, serán descritos en dos dimensiones.

En primer lugar se plantearán las ecuaciones para un flujo potencial compresible permanente. La ecuación de balance de cantidad de movimiento, para un fluido en estado permanente y no viscoso, está dado por

$$u\partial u/\partial x + v\partial u/\partial y = -1/\rho(\partial p/\partial x) \quad (6.1)$$

$$u\partial v/\partial x + v\partial v/\partial y = -1/\rho(\partial p/\partial y)$$

donde “u” y “v” son las componentes cartesianas de la velocidad en las direcciones “x”, “y” respectivamente, ρ es la densidad y p la presión. Para un proceso isoentrópico se cumple la siguiente relación

$$p/\rho^\gamma = \text{constante} \quad (6.2)$$

donde γ es la relación de calores específicos, la velocidad del sonido para un gas perfecto está dada por

$$c = \partial p/\partial \rho = \gamma R\theta = \gamma p/\rho \quad (6.3)$$

donde R es la constante del gas y θ la temperatura absoluta. Utilizando (6.2) y (6.3) se puede llegar a la siguiente relación

$$\partial p / \partial x = c^2 \partial \rho / \partial x \quad (6.4)$$

$$\partial p / \partial y = c^2 \partial \rho / \partial y$$

sustituyendo (6.4) en (6.1) tenemos

$$u \partial u / \partial x + v \partial u / \partial y + c^2 / \rho^* \partial \rho / \partial x = 0 \quad (6.5)$$

$$u \partial v / \partial x + v \partial v / \partial y + c^2 / \rho^* \partial \rho / \partial y = 0$$

que es la ecuación de balance de cantidad de movimiento en función de la densidad y la velocidad del sonido. La ecuación de conservación de masa para un fluido compresible es

$$u \partial \rho / \partial x + v \partial \rho / \partial y + \rho (\partial u / \partial x + \partial v / \partial y) = 0 \quad (6.6)$$

Un flujo bidimensional e irrotacional debe cumplir la siguiente condición

$$\partial v / \partial x - \partial u / \partial y = 0 \quad (6.7)$$

Finalmente la ecuación de la energía es

$$h^2 + (1/2)q^2 = h_\infty + (1/2)q_\infty^2 \quad (6.8)$$

donde h es la entalpía específica, el subíndice ∞ indica condiciones alejadas del cuerpo sumergido. De las ecuaciones (6.3) y (6.8) se obtiene, para un gas perfecto

$$c^2 = c_\infty^2 + ((\gamma - 1)/2)(q_\infty^2 - q^2) \quad (6.9)$$

que es la ecuación que define la velocidad del sonido, en función de las velocidades y de la relación de calores específicos y q es

$$q = u^2 + v^2$$

multiplicando por “ u ” la primera ecuación y por “ v ” la segunda de las ecuaciones (6.5), sumándolas y sustituyendo la ecuación (6.6) tenemos

$$[1 - (u/c)^2] \partial u / \partial x + [1 - (v/c)^2] \partial v / \partial y - uv/c^2 (\partial u / \partial y + \partial v / \partial x) = 0 \quad (6.10)$$

Si a la ecuación (6.10) le sumamos y restamos $(uv/c^2) \partial u / \partial y$ y sustituimos la ecuación (6.7) llegamos a

$$[1 - (u/c)^2] \partial u / \partial x + [1 - (v/c)^2] \partial u / \partial y - (2uv/c^2) \partial u / \partial y = 0 \quad (6.11)$$

de la ecuación de irrotacionalidad (6.7) se puede definir un potencial de velocidad $\phi(x,y)$ que satisface

$$u = \partial \phi / \partial x ; \quad v = \partial \phi / \partial y \quad (6.12)$$

sustituyendo (6.12) en (6.11) se obtiene

$$[1 - 1/c^2 (\partial \phi / \partial x)^2] \partial^2 \phi / \partial x^2 + [1 - 1/c^2 (\partial \phi / \partial y)^2] \partial^2 \phi / \partial x^2 - 2/c^2 \partial \phi / \partial x \partial \phi / \partial y \partial^2 \phi / \partial x \partial y = 0 \quad (6.13)$$

Las ecuaciones (6.9) y (6.13) forman un sistema acoplado en la incógnita $\phi(x,y)$.

Las ecuaciones (6.9) y (6.13) transforman

$$\partial^2 \phi / \partial x^2 + \partial^2 \phi / \partial y^2 = M_\infty^2 / c^2 [(\partial \phi / \partial x)^2 \partial^2 \phi / \partial x^2 + 2 \partial \phi / \partial x * \partial \phi / \partial y * \partial^2 \phi / \partial x \partial y + (\partial \phi / \partial y)^2 * \partial^2 \phi / \partial y^2] \quad (6.14)$$

$$c^2 = 1 + ((\gamma - 1) / 2) M_\infty^2 [1 - (\partial \phi / \partial x)^2 - (\partial \phi / \partial y)^2] \quad (6.15)$$

donde $M_\infty = q_\infty / c_\infty$. M_∞ es el número de mach alejado del cilindro.

En seguida se procede a obtener la ecuación para la función de corriente. De la ecuación de conservación de masa (6.6) podemos definir una función de corriente $\psi(x, y)$ que satisface

$$u = \rho_\infty / \rho * \partial \psi / \partial y ; \quad v = -\rho_\infty / \rho * \partial \psi / \partial x \quad (6.16)$$

sustituyendo (6.16) en la condición de irrotacionalidad (6.7) llegamos a

$$\partial^2 \psi / \partial x^2 + \partial^2 \psi / \partial y^2 = 1 / \rho (\partial \rho / \partial x * \partial \psi / \partial x + \partial \rho / \partial y * \partial \psi / \partial y) \quad (6.17)$$

Esta ecuación, aparte de no ser lineal, tiene dos incógnitas ψ y ρ . De las ecuaciones (6.6) podemos despejar los términos $1 / \rho * \partial \rho / \partial y$, $1 / \rho * \partial \rho / \partial x$ y sustituirlos en (6.18) con lo que se obtiene

$$\partial^2 \psi / \partial x^2 + \partial^2 \psi / \partial y^2 = -1 / c^2 (u \partial u / \partial x \partial \psi / \partial x + v \partial u / \partial y \partial \psi / \partial x + u \partial v / \partial x \partial \psi / \partial y + v \partial v / \partial y \partial \psi / \partial y) \quad (6.18)$$

Otra vez, sería muy difícil resolver esta ecuación, ya que ahora está en función de las velocidades que no conocemos. Sin embargo si sustituimos el potencial de velocidad en lugar de las velocidades, (6.12) en (6.18)

$$\partial^2 \psi / \partial x^2 + \partial^2 \psi / \partial y^2 = 1 / c^2 * (\partial \phi / \partial x * \partial^2 \phi / \partial x^2 * \partial \psi / \partial y + \partial \phi / \partial y * \partial^2 \phi / \partial x \partial y * \partial \psi / \partial x + \partial \phi / \partial x * \partial^2 \phi / \partial x \partial y * \partial \psi / \partial y + \partial \phi / \partial y * \partial^2 \phi / \partial y^2 * \partial \psi / \partial y) \quad (6.19)$$

nos queda una ecuación de la función de corriente en términos del potencial de velocidad, el cual podemos calcular de la ecuación (6.14), al igual que la velocidad del sonido de la ecuación (6.15).

6.3 FORMULACION DE ELEMENTOS FINITOS

Para el potencial de velocidad $\phi(x,y)$, escribimos la ecuación (6.14) como ecuación de Poisson de la siguiente forma

$$\partial^2\phi/\partial x^2 + \partial^2\phi/\partial y^2 - g(\phi) = 0 \quad (6.20)$$

donde

$$g(\phi) = M^2_\infty/c^2 [(\partial\phi/\partial x)^2 * \partial^2\phi/\partial x^2 + 2\partial\phi/\partial x * \partial\phi/\partial y * \partial^2\phi/\partial x\partial y + (\partial\phi/\partial y)^2 * \partial^2\phi/\partial y^2] \quad (6.21)$$

haciendo la aproximación para un elemento

$$\phi(x,y) = \sum_{i=1}^n N_i \phi_i \quad (6.22)$$

donde ϕ es la función aproximada y N_i son las funciones de interpolación de un elemento, n el número de nodos del elemento y ϕ_i es el valor de la función en cada nodo. Sustituyendo (6.22) en (6.20) se obtiene un residuo

$$\partial^2\phi/\partial x^2 + \partial^2\phi/\partial y^2 - g = \varepsilon$$

Se hace el residuo ortogonal a las funciones de interpolación tal que

$$(\varepsilon, N_i) = \int_{\Omega} (\partial^2\phi/\partial x^2 + \partial^2\phi/\partial y^2 - g) N_i \, dx dy = 0 \quad (6.23)$$

donde Ω es el dominio del elemento. Tomando la siguiente aproximación

$$g = \sum_{j=1}^n N_j g_j \quad (6.25)$$

y aplicando el teorema de Green a (6.23) resulta

$$\phi_j \int_{\Omega} (\partial N_i / \partial x * \partial N_j / \partial x + \partial N_i / \partial y * \partial N_j / \partial y) dx dy = \int_{\Gamma} (\partial \phi / \partial x * N_i dy - \partial \phi / \partial y * N_i dx) - g_j \int_{\Omega} N_i N_j dx dy \quad (6.26)$$

usando notación simplificada escribimos

$$\sum_{j=1}^n K_{ij} \phi_j = f_i + t_i \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (6.27)$$

K es la matriz de coeficientes, f es el vector de flujo. t es el vector que representa los términos no lineales y son

$$K_{ij} = \int_{\Omega} (\partial N_i / \partial x * \partial N_j / \partial x + \partial N_i / \partial y * \partial N_j / \partial y) dx dy \quad (6.28)$$

$$f_i = \int (\partial \phi / \partial x * N_i dy - \partial \phi / \partial y * N_i dx) \quad (6.29)$$

$$t_i = -g_j \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega \quad (6.30)$$

El vector g se obtiene sustituyendo (6.22) en (6.21) como

$$g_j = M_{\infty}^2 / c^2 [(\phi_i * \partial N_i / \partial x)^2 \phi_j * \partial^2 N_i / \partial x^2 + 2(\phi_i * \partial N_i / \partial x)(\phi_j * \partial N_j / \partial y)(\phi_k * \partial^2 N_k / \partial x \partial y) + (\phi_i * \partial N_i / \partial y)^2 \phi_j * \partial^2 N_j / \partial y^2] \quad (6.31)$$

Y la velocidad del sonido

$$c^2 = 1 + ((\gamma-1)/2) M_\infty^2 [1 - (\phi_i^* \partial N_i / \partial x)^2 - (\phi_i^* \partial N_i / \partial y)^2] \quad (6.32)$$

A continuación se ensamblan las ecuaciones de todos los elementos obtenidos

$$\sum_{j=1}^m K_{ij} \phi_j^* = f_i^* + t_i^* \quad (i=1,2,\dots,m) \quad (6.33)$$

Ya que el vector t^* de la ecuación (6.33) está en función de los valores del potencial de velocidad en los nodos, esta ecuación se resuelve por medio de iteraciones, para lo cual en la primera iteración se resuelve

$$K^* \phi = f^* \quad (6.34)$$

Para $M_\infty = 0$. Los valores obtenidos de $\phi(x,y)$ se sustituyen en el vector t^* de (6.33) y se resuelve la ecuación obteniéndose con ella nuevos valores de $\phi(x,y)$, los que se utilizan en la siguiente iteración. Así sucesivamente, hasta que la diferencia del valor anterior y el nuevo sea menor que una cierta magnitud.

Para la formulación de la función de corriente, se sigue un procedimiento similar al utilizado en el potencial de velocidad, llegando a

$$\sum_{j=1}^n K_{ij} \psi_j = f_i + s_i \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (6.35)$$

y el vector s se obtiene a partir de

$$s_i = l_j \int_{\Omega} N_i N_j \, dx dy \quad (6.36)$$

donde l esta dado por

$$l_j = -M_\infty^2 / c^2 [(\phi_i^* \partial N_i / \partial x)(\phi_j^* \partial^2 N_j / \partial x^2)(\psi_k^* \partial N_k / \partial x)(\phi_i^* \partial N_i / \partial y)(\phi_j^* \partial^2 N_j / \partial x \partial y)(\phi_k^* \partial N_k / \partial x) + (\phi_i^* \partial N_i / \partial x)(\phi_j^* \partial^2 N_j / \partial x \partial y)(\psi_k^* \partial N_k / \partial y)(\phi_i^* \partial N_i / \partial y)(\phi_j^* \partial^2 N_j / \partial y^2)(\psi_k^* \partial N_k / \partial y)] \quad (6.37)$$

donde c^2 se obtiene de la misma forma que en la ecuación (6.32). Al igual que para el potencial de velocidad, se efectúa un ensamble de todas las matrices de los elementos (6.35), para obtener la matriz global de coeficientes, lo que se representa

$$K^* \psi = f^* + s^* \quad (6.38)$$

En este caso el vector s^* de la ecuación (6.40) está en función de los valores del potencial de velocidad y de la función de corriente en los nodos, sin embargo los primeros ya se conocen de la solución de la ecuación (6.33), por lo que se pueden sustituir aquí, quedando la ecuación únicamente en función de $\psi(x,y)$. Nuevamente se utiliza un método de iteraciones, igual al usado en el potencial de velocidad para encontrar $\psi(x,y)$.

6.4 SOLUCIÓN Y RESULTADOS

El problema específico escogido como ejemplo, es el del flujo uniforme alrededor de un cilindro de radio D , entre placas planas separadas por una distancia $2H$ y se supone que el flujo uniforme se encuentra a una distancia $3.5D$ del centro del cilindro figura 6.1. Por la simetría del flujo, se puede tomar para el cálculo solamente un cuadrante del dominio total.

Las condiciones de frontera, tanto para el potencial de velocidad como para la función de corriente, se muestran en la figura (6.2).

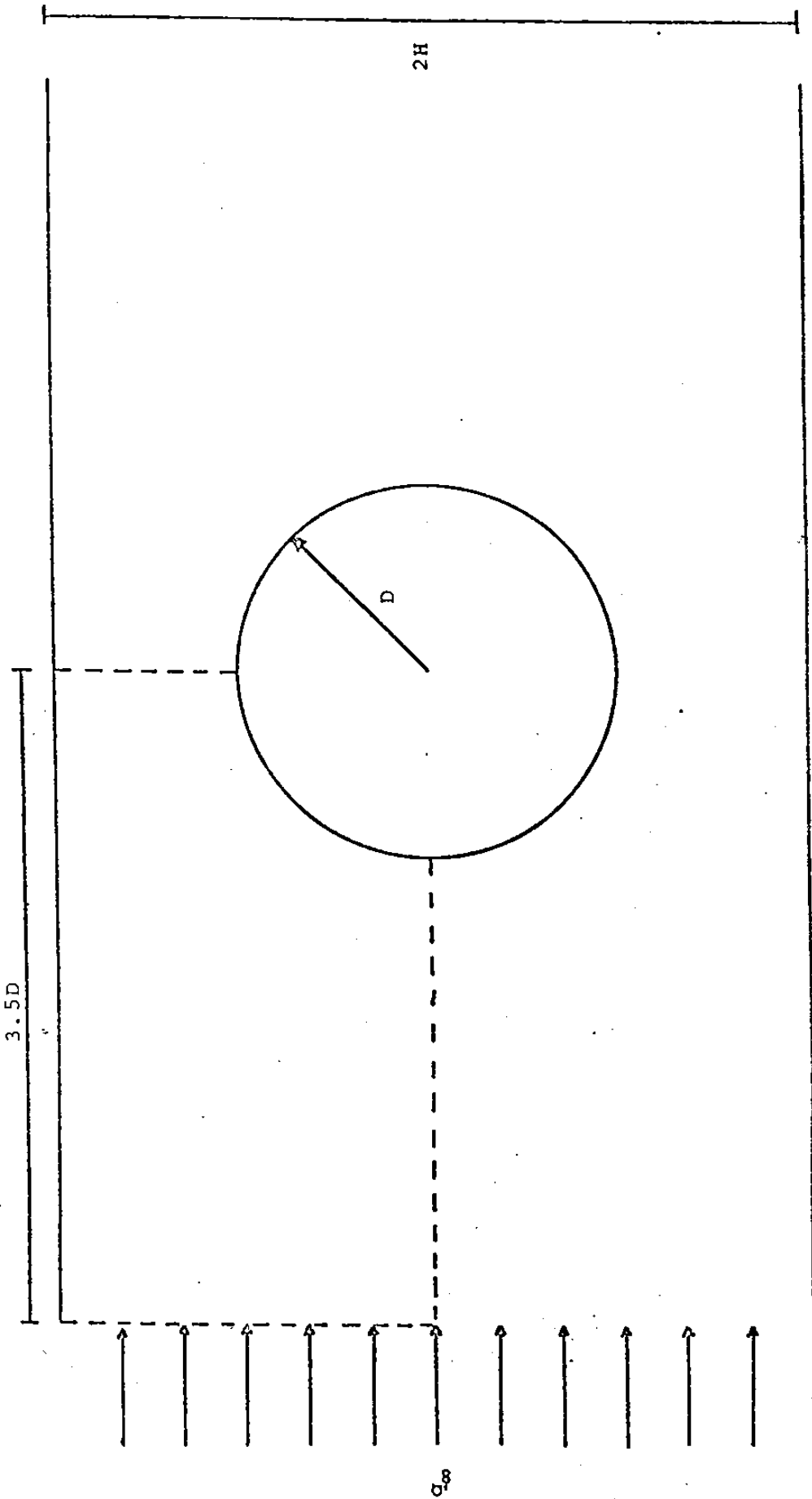


Fig. 6.1

Flujo compresible alrededor de un cilindro entre placas planas.

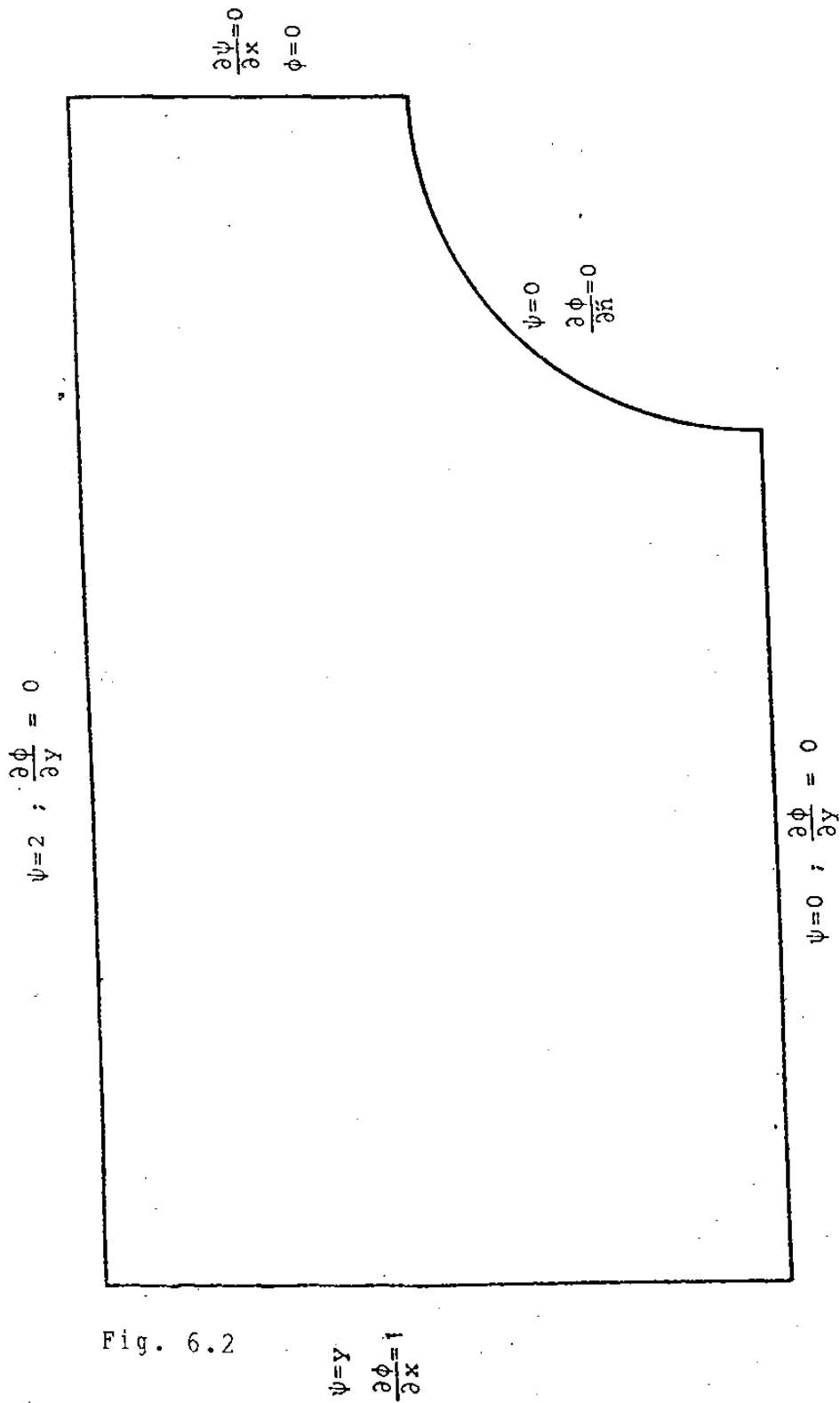
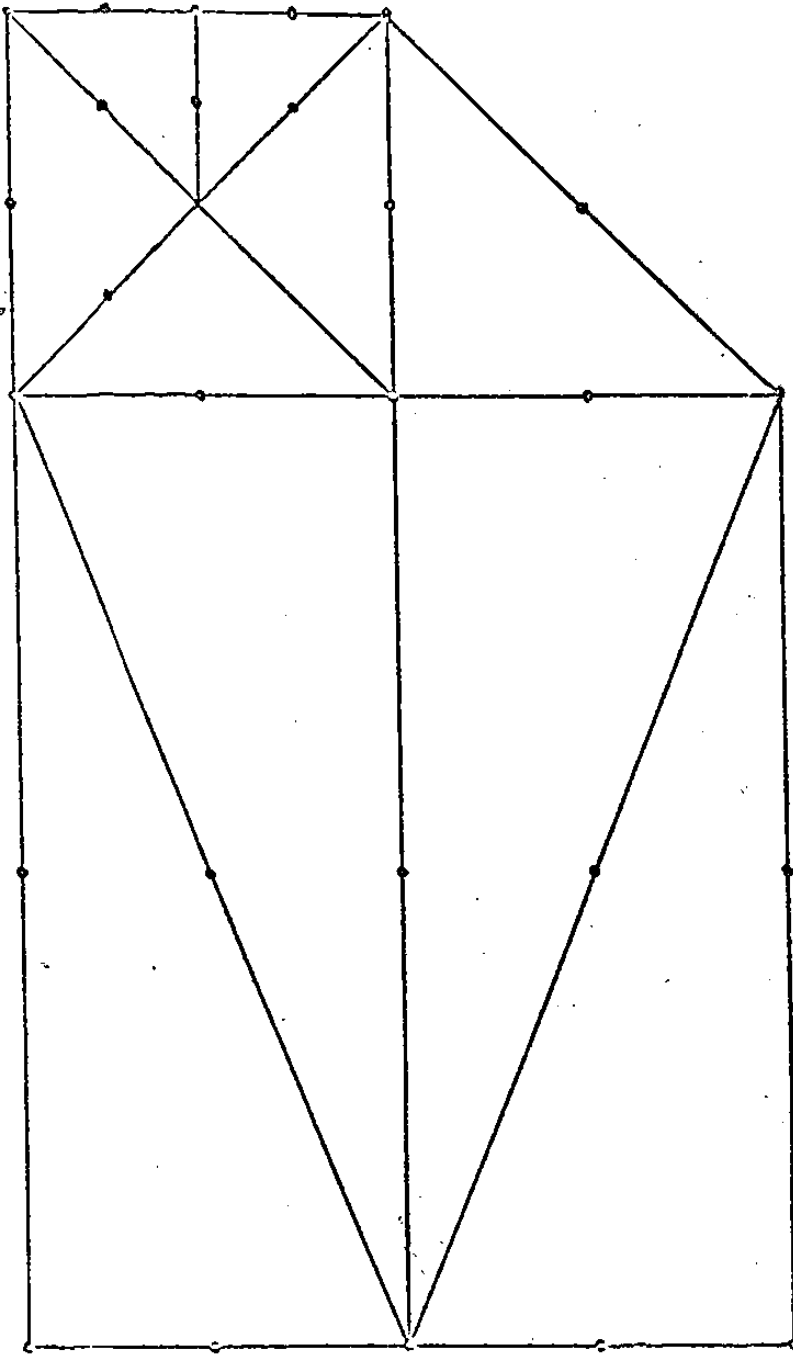


Fig. 6.2

Condiciones de frontera.



Malla gruesa con sus nodos.

Fig. 6.3

Para la discretización del dominio se utilizan elementos triangulares. Las funciones de interpolación para cada elemento son cuadráticas, para poder sustituirlas en las ecuaciones (6.31) y (6.37).

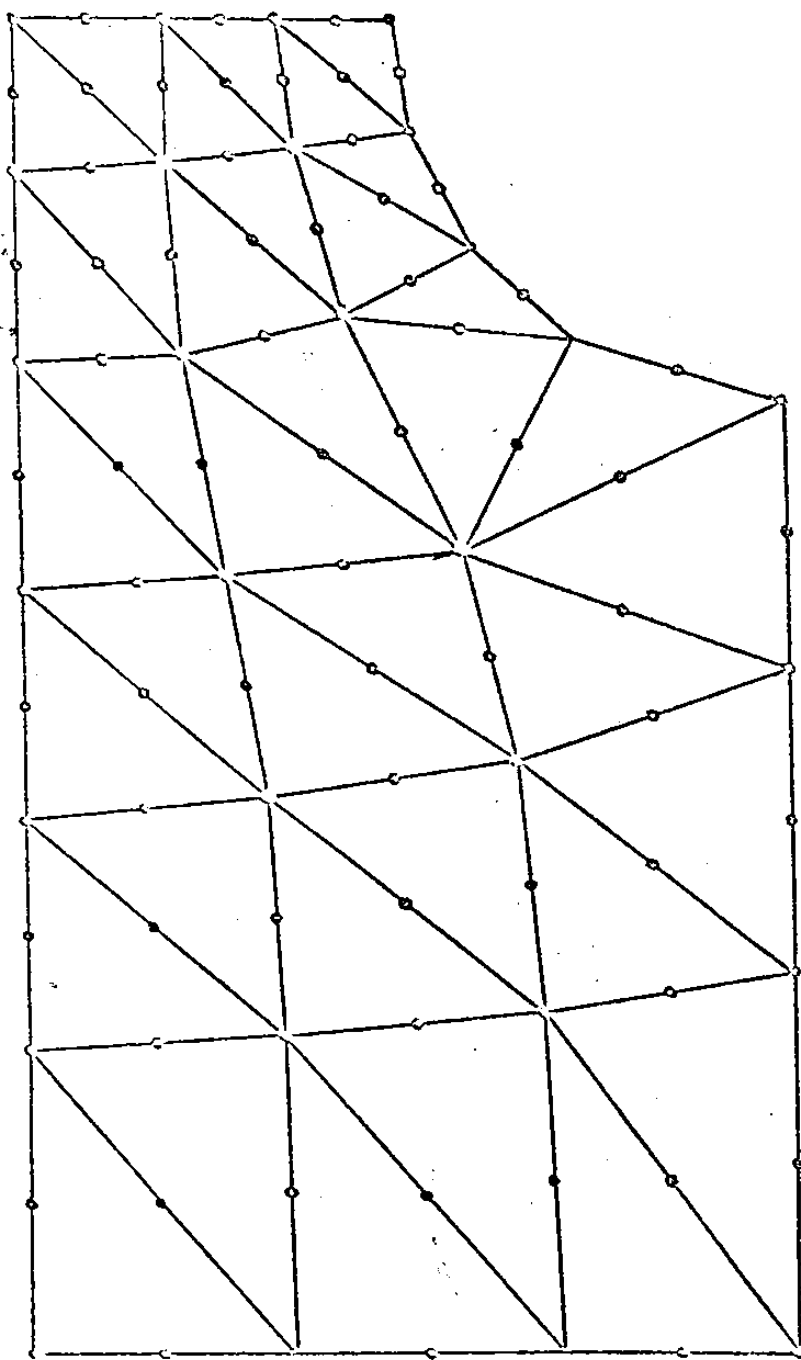
El programa para la función de corriente sigue un procedimiento similar al anterior. La matriz K de la ecuación (6.38) es la misma que la del potencial de velocidades, ya que ésta depende únicamente de la malla y las funciones de interpolación que se utilicen. En el vector s^* se utilizan los valores ϕ obtenidos en el programa anterior.

El dominio primero se discretiza con una malla gruesa, como muestra la figura 6.3, la cual tiene 100 elementos y 28 nodos. Esto tiene dos finalidades: La primera probar y corregir el programa de computación y la segunda observar donde se encuentran las zonas de mayor variación, para hacer una mejor discretización.

La figura 6.4 muestra una malla más fina con 37 elementos y 92 nodos, la que se realizó tomando en cuenta los resultados obtenidos por la malla anterior.

En la figura 6.5 se presentan las líneas de corriente para las dos mallas en el caso del flujo incompresible. En las figuras 6.6, 6.7 y 6.8 se muestran las líneas de corriente y equipotenciales para números de Mach 0.1, 0.2 y 0.3 respectivamente, obtenidos con la malla fina. Estas figuras también indican la variación del número de Mach local, sobre la dresta del cilindro.

Se observa una diferencia entre el caso de flujo incompresible comparado con el flujo compresible y esta diferencia es notable para altos números de Mach. Se nota también que en el caso de flujo compresible, el número de Mach aumenta al acercarse al cilindro. Esto puede presentar problemas para un perfil aerodinámico si el número de Mach local se acercara a la unidad.



Malla fina con sus nodos.

Fig. 6.4

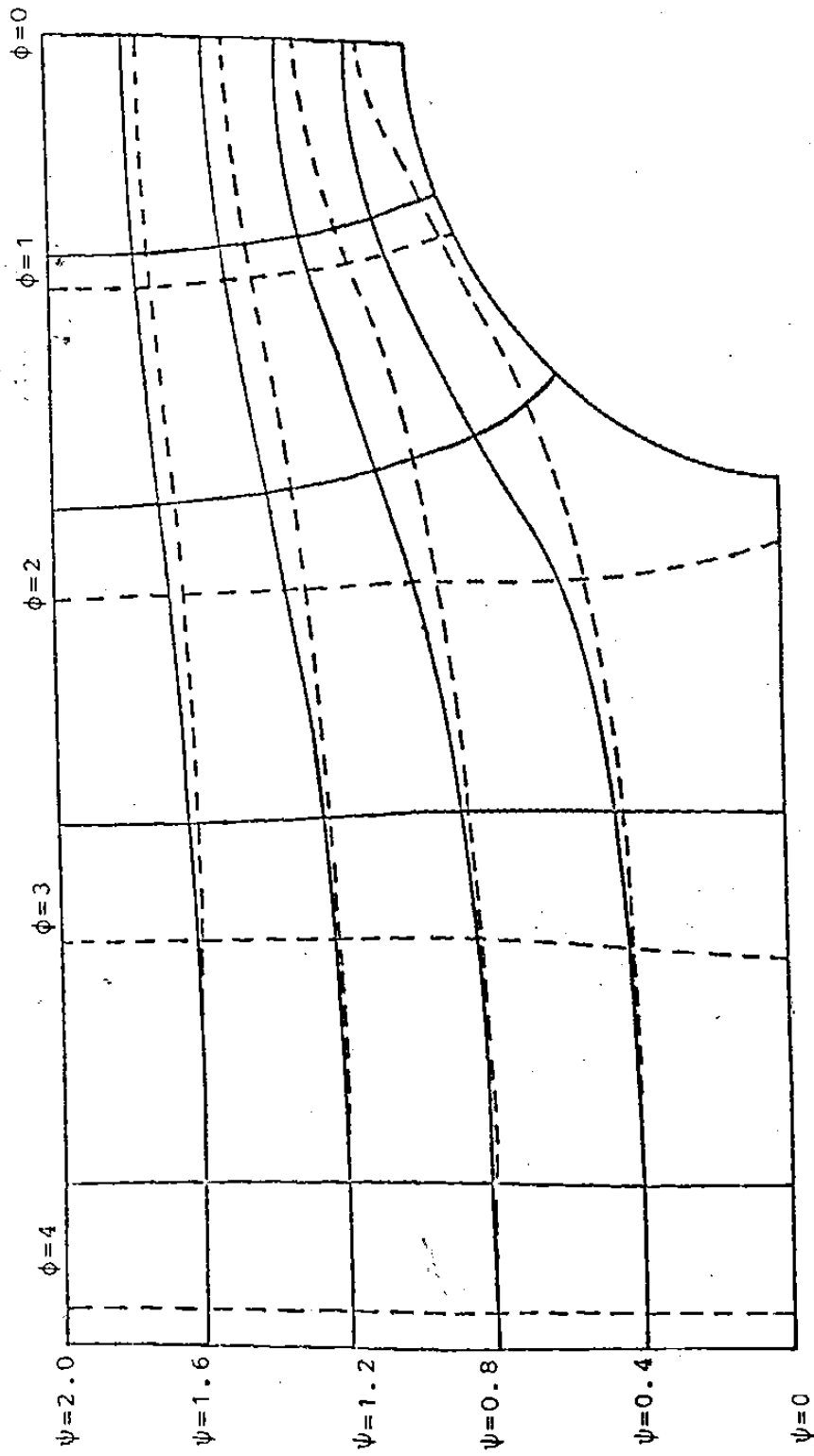


Fig.6.5

Líneas de corriente para las dos mallas,
 $M_\infty=0$, Línea punteada malla gruesa, Línea
 continua: Malla fina.

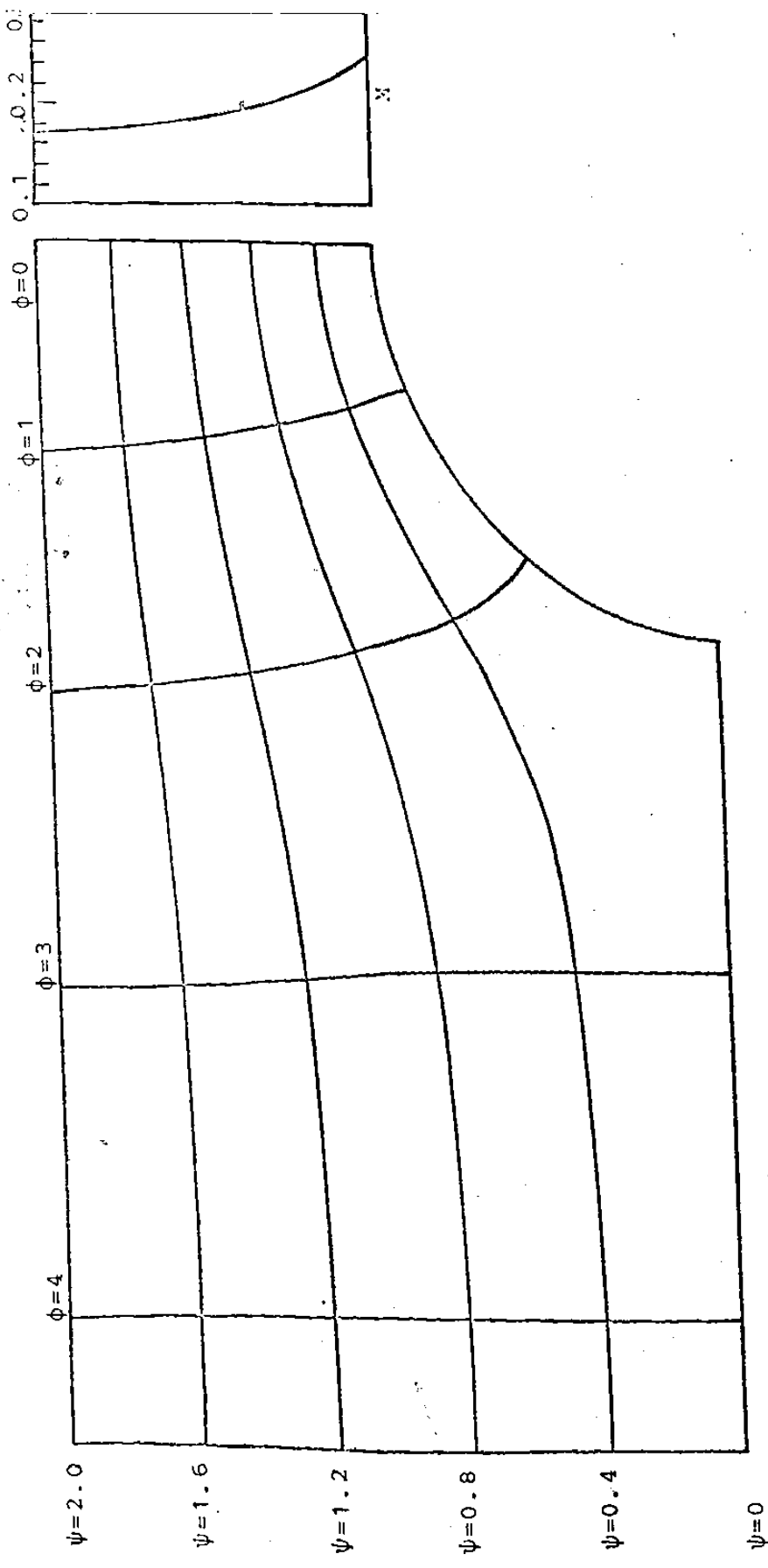


Fig. 6.6

Líneas equipotenciales y líneas de corriente para $M_{\infty}=0.1$
y variación del número de Mach local en la cresta del cilindro.

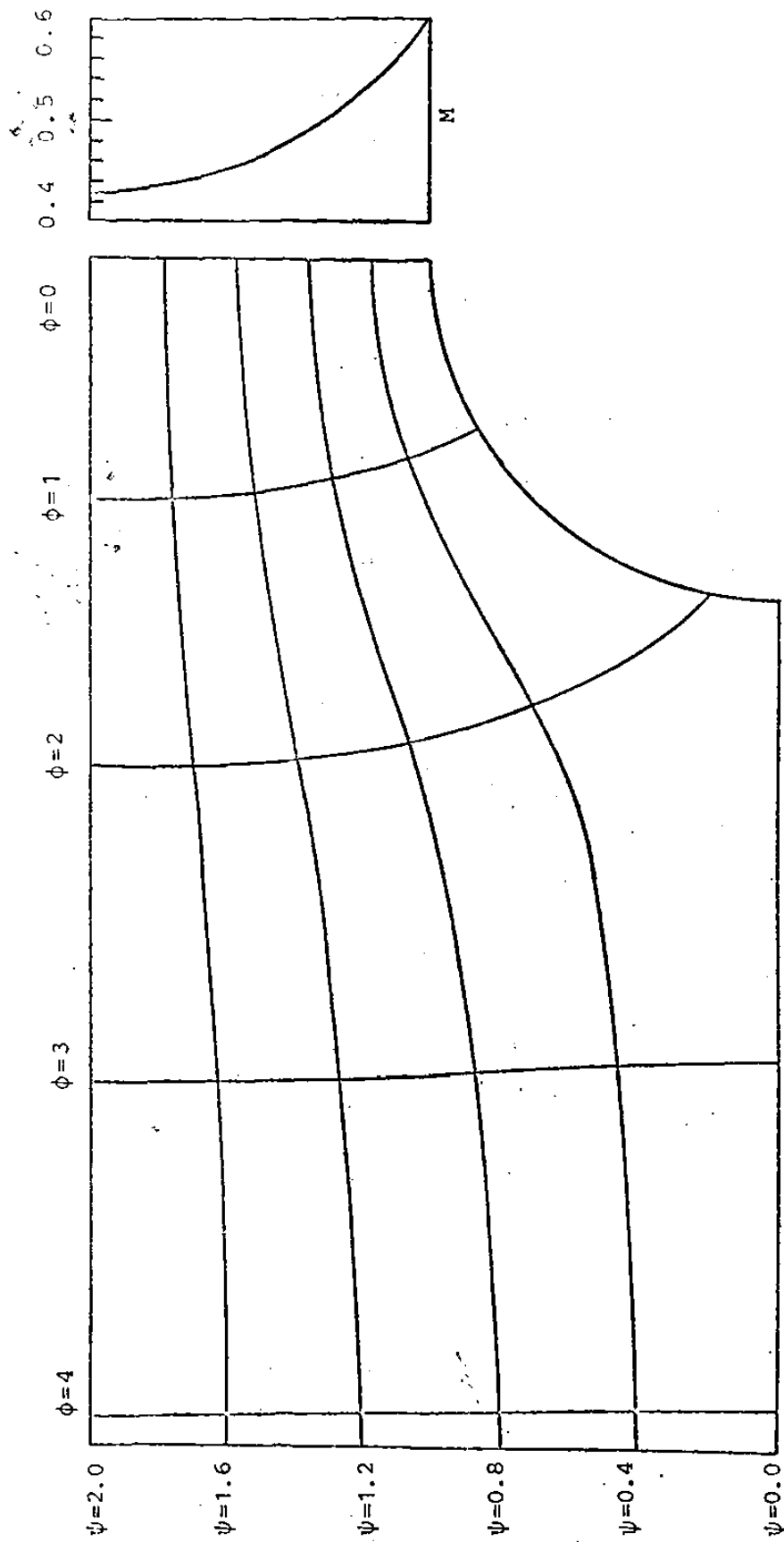


Fig. 6.8

Líneas equipotenciales y líneas de corriente para $M_\infty=0.3$
y variación del número de Mach local en la cresta del
cilindro.

Las soluciones numéricas demuestran la utilidad del método de elementos finitos de Galerkin, en combinación con un método iterativo, en la solución de problemas de flujo potencial subsónico.

CAPITULO 7

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Con este trabajo se pretende ejemplificar las aplicaciones del método de elementos finitos al problema de termofluidos. Aparte de una descripción del método se ha incluido análisis de errores en algunos casos comparando la solución numérica con la analítica. Esto tiene el propósito de demostrar la validez del método desde el punto de vista de un usuario del método. También se presenta un programa que puede usarse en relación con los problemas comunes de la transferencia de calor y mecánica de fluidos.

Se nota que la utilidad del método de elemento finito estriba principalmente en la solución de problemas elípticos, ya que se adapta bien a geometrías irregulares con condiciones de frontera tipo Dirichlet y Neumann. Es por ello que ha tenido una gran aceptación en la solución de problemas de la ingeniería. Se observa también que las ecuaciones parabólicas pueden manejarse a través de una combinación del método de elemento finito en la parte elíptica con el método de diferencias finitas en la parte parabólica.

Este trabajo se ha desarrollado en un sistema unidimensional y bidimensional quedando pendiente para estudios posteriores trabajar en el sistema tridimensional.

Se recomienda como conocimientos previos al método de elementos finitos para este trabajo, tener el dominio de los cursos de álgebra lineal, ecuaciones diferenciales y parciales, mecánica de fluidos y transferencia de calor.

BIBLIOGRAFIA

Baker, A., J., Finite Element Computational Fluid Mechanics., Taylor & F. 1983.

Bathe, K., J., Finite Element Procedures. Prentice Hall. 1996.

Bickford, W.B., Finite Element Method . Irwin . 1994 .

Burnett, D., S., Finite Element Analysis. Addison Wesley. 1988.

Daily, J.W., Dinámica de Fluidos. Trillas 1975.

Holman, J.P., Transferencia de Calor . , McGraw-Hill . 1998.

Reddy, J., N., An Introduction to the Finite Element Method. McGraw-hill. 1995.

LISTADO DE FIGURAS

	Página	
Figura 3.1		división de una región unidimensional 14
Figura 3.2		elemento lineal unidimensional 15
Figura 3.3		funciones forma lineal 17
Figura 3.4		función de peso para tres nodos 20
Figura 3.5		funciones de peso, primero, interior y último nodo 21
Figura 3.6		funciones de peso para malla de cuatro elementos 27
Figura 3.7		funciones de pesos para el elemento (e) 28
Figura 3.8		matriz global 32
Figura 3.9		numeración en nodos, en región en una y dos dimensiones 33
Figura 3.10		elemento triangular lineal, elemento rectangular bilineal 35
Figura 3.11		regiones divididas en segmentos triangulares 37
Figura 3.12		división de una subregión cuadrilátera 38
Figura 3.13		división de una región en subregiones 38
Figura 3.14		cambio de tamaño de elementos 39
Figura 3.15		parámetros para elemento triangular lineal 40
Figura 3.16		parámetros para elemento rectangular bilineal 43
Figura 4.1		placa rectangular con transferencia de calor 47
Figura 4.2		elemento triangular con numeración local 52
Figura 4.3		discretización de la placa 54
Figura 4.4		malla con barra acb móvil 61
Figura 4.5		posición contra temperatura 62
Figura 4.6		posición contra error 63
Figura 4.7		mallas tipo Sa 65
Figura 4.8		mallas tipo AS1 66
Figura 4.9		mallas tipo AS2 67
Figura 4.10		número de elementos contra error 68
Figura 4.11		mallas tipo Sb 70
Figura 4.12		placa con transferencia de calor por conducción 73
Figura 4.13		tiempo contra temperatura 79
Figura 4.14		tiempo contra error 80
Figura 5.1		flujo uniforme alrededor de un cilindro 87
Figura 5.2		condiciones de frontera 89
Figura 5.3		malla gruesa 90
Figura 5.4		malla fina 91
Figura 5.5		línea de corrientes y variación de la velocidad 92
Figura 6.1		flujo compresible 103
Figura 6.2		condiciones de frontera 104
Figura 6.3		malla gruesa con sus nodos 105
Figura 6.4		malla fina con sus nodos 107
Figura 6.5		líneas de corriente para las dos mallas 108
Figura 6.6		líneas equipotenciales para $M=0.1$ 109
Figura 6.7		líneas equipotenciales para $M=0.2$ 110
Figura 6.8		líneas equipotenciales para $M=0.3$ 111

APENDICE A

NOMENCLATURA

- G variable de la temperatura en estado permanente
- h entalpía específica
- H variable en función de la temperatura en estado transitorio
- I principio variacional
- k conductividad térmica
- I_i vector de términos no lineales, aproximados para un elemento, de la función de corriente, de componentes I_i .
- L longitud de referencia
- L_i coordenada de área
- M número de Mach
- M_∞ número de Mach alejado del cuerpo
- n normal a la superficie
- N_i funciones de interpolación
- p presión
- q vector de fuentes de calor para un elemento, de componente q_i
- q^* vector global de fuentes de calor, de componentes q_i^*
- s vector que representa los términos no lineales, aproximados para un elemento, de la función de corriente, de componentes s_i^*
- t vector que representa los términos no lineales, aproximados para un elemento, del potencial de velocidad, de componentes t_i^*
- t^* vector global que representa los términos no lineales aproximados, del potencial de velocidad de componentes t_i^*
- u componente de la velocidad en la dirección "x"

componente de la velocidad en la dirección “y”

- a_i constante de las funciones de interpolación
- A_{s_i} malla con más elementos en la zona de variación
- K matriz de coeficientes para un elemento, de componente K_{ij}
- K^* matriz global de coeficientes, de componentes K_{ij}^*
- b_i constantes de las funciones de interpolación
- B matriz de coeficientes de temperatura transitoria para un elemento, de componentes B_{ij}
- B^* matriz global de coeficientes de temperatura transitoria de componentes B_{ij}^*
- c velocidad del sonido
- c_i constante de las funciones de interpolación
- C calor específico
- e error raíz medio cuadrático
- f vector de flujo para un elemento, de componentes f_i
- f^* vector global de flujo, de componentes f_i^*
- F funcional
- g vector de términos no lineales, aproximados para un elemento, del potencial de velocidad de componentes g_i
- w_i funciones de peso
- x coordenada cartesiana
- y coordenada cartesiana
- γ relación de calores específicos
- Γ frontera del dominio de un elemento
- δ delta de Dirac
- A área
- ε residuo
- θ temperatura aproximada
- θ^* temperatura global aproximada

θ_δ^*	temperatura de referencia
θ_1	temperatura inicial
θ_m	temperatura media
ρ	densidad
ϕ	potencial de velocidad aproximada para un elemento, de componentes ϕ_i
ϕ^*	potencial de velocidad global aproximado, de componentes ϕ_i^*
Ψ	función de corriente aproximada para un elemento, de componentes Ψ_i
Ψ^*	función de corriente global aproximada, de componentes Ψ_i^*
Ω	dominio
ξ	variable cualquiera aproximada, de componentes ξ_i

APENDICE B

APLICACIÓN DEL PROGRAMA DE COMPUTADORA FEM1DV3

El programa de computadora FEM1DV3, incorpora las ideas presentadas en las secciones previas, para una variedad de problemas del campo unidimensionales.

Ejemplo ilustrativo 1

Transferencia de calor permanente en una aleta. El problema es gobernado por

$$-d^2\theta/dx^2 + c\theta = 0 \quad \text{para} \quad 0 < x < L$$

$$\theta(0) = \theta_0 \quad (d\theta/dx)|_{x=L}$$

donde θ es la temperatura, y L , c , θ_0 son

$$L = 0.25\text{m}, \quad c = 256 \text{ m}^{-2}, \quad \theta_0 = 100^\circ\text{c}$$

Este problema satisface la ecuación modelo

$$-d/dx(adu/dx) + cu - q = 0 \quad \text{para} \quad 0 < x < L$$

y las condiciones de frontera

$$u(0) = u_0, \quad (adu/dx)|_{x=L} = Q_0$$

De aquí, MODEL=1, NTYPE=0, ITEM=0(para una solución en estado estable).

Entonces $a = a_0 = 1.0$ y $c = c_0 = 256$ son iguales para todos los elementos.

ICONT=1, AX0=1.0, y CX0=256. Todos los demás coeficientes son cero [$b=0$ y $f(=q) = 0$], para este problema. Para una malla uniforme de cuatro elementos lineales (NEM=4, IELEM=1), los incrementos DX(I) SON [DX(I) es siempre la coordenada del nodo I] :

$$\{DX\} = \{0.0, 0.625, 0.625, 0.625, 0.625\}$$

debido a que $L/4 = 0.625$.

Las condiciones de frontera son $U_1=0$ y $Q_2^4=0$. Entonces las condiciones de frontera natural ($Q_2^4=0$) es homogénea. No hay condiciones de frontera mixta (convección). De aquí , NSPV=1, NSSV=0 y NNBC=0. Las condiciones de frontera especificada en la variable primaria está en el nodo uno y el grado de libertad es 1:

ISPV(1,1)=1 y ISPV(1,2)=1. El valor especificado es VSPV(1)=100.0.

*** ECHO OF THE INPUT DATA STARTS ***

```

Steady heat transfer in a fin
1 0 0
1 4
1 1
0.0 0.0625 0.0625 0.0625 0.0625
1.0 0.0
0.0 0.0
256.0 0.0
0.0 0.0 0.0
1
1 1 100.0
0
0
MODEL,NTYPE, ITEM
IELEM,NEM
ICONT, NPRNT
DX(I)
AX0, AX1
BX0, BX1
CX0, CX1
FX0, FX1, FX2
NSPV
ISPV(1,J) [J=1,2], VSPV(1)
NSSV
NNBC

```

**** ECHO OF THE INPUT DATA ENDS ****

OUTPUT FROM PROGRAM FEM1DV3

Steady heat transfer in a fin

*** ANALYSIS OF MODEL 1, AND TYPE 0 PROBLEM ***
 (see the code below)

MODEL=1,NTYPE=0: A problem described by MODEL EQ. 1
 MODEL=1,NTYPE=1: A circular DISK (PLANE STRESS)
 MODEL=1,NTYPE>1: A circular DISK (PLANE STRAIN)
 MODEL=2,NTYPE=0: A Timoshenko BEAM (RIE) problem
 MODEL=2,NTYPE=1: A Timoshenko PLATE (RIE) problem
 MODEL=2,NTYPE=2: A Timoshenko BEAM (CIE) problem
 MODEL=2,NTYPE>2: A Timoshenko PLATE (CIE) problem
 MODEL=3,NTYPE=0: A Euler-Bernoulli BEAM problem
 MODEL=3,NTYPE>0: A Euler-Bernoulli Circular plate
 MODEL=4,NTYPE=0: A plane TRUSS problem
 MODEL=4,NTYPE=1: A Euler-Bernoulli FRAME problem
 MODEL=4,NTYPE=2: A Timoshenko (CIE) FRAME problem

Element type (0, Hermite,>0, Lagrange)..= 1
 No. of deg. of freedom per node, NDF....= 1
 No. of elements in the mesh, NEM.....= 4
 No. of total DOF in the model, NEQ.....= 5
 No. of specified primary DOF, NSPV.....= 1
 No. of specified secondary DOF, NSSV....= 0
 No. of specified Newton B. C.: NNBC.....= 0

Boundary information on primary variables:

1 1 .10000E+03

Global coordinates of the nodes, {GLX}:

.00000E+00 .62500E-01 .12500E+00 .18750E+00 .25000E+00

Coefficients of the differential equation:

AX0 = .1000E+01 AX1 = .0000E+00
 BX0 = .0000E+00 BX1 = .0000E+00
 CX0 = .2560E+03 CX1 = .0000E+00
 FX0 = .0000E+00 FX1 = .0000E+00 FX2 = .0000E+00

Element coefficient matrix, [ELK]:

.21333E+02 -.13333E+02
 -.13333E+02 .21333E+02

Element source vector, {ELF):

.00000E+00 .00000E+00

SOLUTION (values of PVs) at the NODES:

.10000E+03 .35158E+02 .12504E+02 .48560E+01 .30350E+01

X	P. Variable	S. Variable
.00000E+00	.10000E+03	-.10375E+04
.78125E-02	.91895E+02	-.10375E+04
.15625E-01	.83789E+02	-.10375E+04
.23438E-01	.75684E+02	-.10375E+04
.31250E-01	.67579E+02	-.10375E+04
.39063E-01	.59473E+02	-.10375E+04
.46875E-01	.51368E+02	-.10375E+04
.54688E-01	.43263E+02	-.10375E+04
.62500E-01	.35158E+02	-.10375E+04
.62500E-01	.35158E+02	-.36245E+03
.70313E-01	.32326E+02	-.36245E+03
.78125E-01	.29494E+02	-.36245E+03
.85938E-01	.26663E+02	-.36245E+03
.93750E-01	.23831E+02	-.36245E+03
.10156E+00	.20999E+02	-.36245E+03
.10938E+00	.18168E+02	-.36245E+03
.11719E+00	.15336E+02	-.36245E+03
.12500E+00	.12504E+02	-.36245E+03
.12500E+00	.12504E+02	-.12237E+03
.13281E+00	.11548E+02	-.12237E+03
.14063E+00	.10592E+02	-.12237E+03
.14844E+00	.96362E+01	-.12237E+03
.15625E+00	.86801E+01	-.12237E+03
.16406E+00	.77241E+01	-.12237E+03
.17188E+00	.67681E+01	-.12237E+03
.17969E+00	.58120E+01	-.12237E+03
.18750E+00	.48560E+01	-.12237E+03

.18750E+00	.48560E+01	-.29136E+02
.19531E+00	.46284E+01	-.29136E+02
.20313E+00	.44008E+01	-.29136E+02
.21094E+00	.41731E+01	-.29136E+02
.21875E+00	.39455E+01	-.29136E+02
.22656E+00	.37179E+01	-.29136E+02
.23438E+00	.34903E+01	-.29136E+02
.24219E+00	.32626E+01	-.29136E+02
.25000E+00	.30350E+01	-.29136E+02

APENDICE C

APLICACIÓN DEL PROGRAMA DE COMPUTADORA FEM2DV4

El programa de computadora FEM2DV4 es desarrollado para resolver los siguientes tipos de problemas :

$$c_t(\partial u/\partial t + \partial^2 u/\partial t^2) - \partial/\partial x(a_x \partial u/\partial x) - \partial/\partial y(a_y \partial u/\partial y) + a_0 u = f$$

con

$$c_t = c_0 + c_x x + c_y y, \quad a_x = a_{10} + a_{1x} x + a_{1y} y$$

$$a_y = a_{20} + a_{2x} x + a_{2y} y, \quad f_0 = f_0 + f_x x + f_y y$$

$a_0 = \text{constante}$

- 1.- problemas de una variable, incluyendo condiciones de frontera tipo convectivo para problemas de transferencia de calor.
- 2.- problemas de elasticidad plana
- 3.- problemas de flujo de fluido incompresible viscoso
- 4.- problemas de flujo de fluido no viscoso.

Ejemplo ilustrativo 2

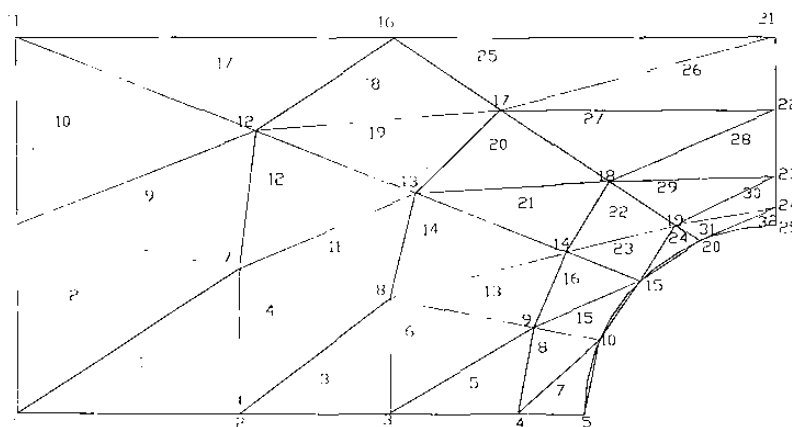
Considerar el flujo de un fluido no viscoso alrededor de un cilindro circular. Usaremos la formulación de la Función de Corriente y el Potencial de Velocidad. Pues como el dominio no es rectangular tenemos que usar MSH2DG. Consideramos la malla de 25 nodos y 32 elementos triangulares. Tenemos ITYPE=0 y IGRAD=1 en la formulación

del potencial de velocidad, y $IGRAD=2$ en la formulación de la función de corriente, $ITEM=0$, $NEIGN=0$ y $IELTYP=0$ para triángulos, $MESH=2$, $NPRNT=0$.

En la formulación de función de corriente, tenemos $NSPV=13$ y $NSSV=0$; y en la formulación del potencial de velocidad, tenemos $NSPV=5$; y $NSSV=3$. Los coeficientes son

$A10=1.0$, $A20=1.0$, $A1X=0.0$, $A1Y=0.0$, $A2X=0.0$, $A2Y=0.0$, $A00=0.0$

$F0=0.0$, $FX=0.0$, $FY=0.0$



*** ECHO OF THE INPUT DATA STARTS ***

```

Flow around a circular cylinder (VEL. POTENTIAL)
 0 1 0 0
 0 3 2 0
ITYPE, IGRAD, ITEM, NEIGN
IEL, NPE, MESH, NPRNT

32 25
NEM, NNM

5
NRECL
1 5 1 0.0 0.0 3.0 0.0 6.0
NOD1, NODL, NODINC, X1, Y1,
6 10 1 0.0 1.0 3.07612 0.38268 6.0
11 15 1 0.0 2.0 3.29289 0.7071 6.0
16 20 1 2.0 2.0 3.61732 0.92388 6.0
21 25 1 4.0 2.0 4.0 1.0 6.0

8
NRECEL
1 7 2 1 3 1 2 7
NEL1, NELL, IELINC, NODINC
2 8 2 1 3 1 7 6
9 15 2 1 3 6 7 12
10 16 2 1 3 6 12 11
17 23 2 1 3 11 12 16
18 24 2 1 3 12 17 16
25 31 2 1 3 16 17 21
26 32 2 1 3 17 22 21

5
NSPV
21 1 22 1 23 1 24 1 25 1
ISPV(I, J)
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
VSPV(I)

3
NSSV
1 1 6 1 11 1
ISSV(I, J)
0.5 1.0 0.5
VSSV(I)

1.0 0.0 0.0
1.0 0.0 0.0
0.0
A10, A1X, A1Y
A20, A2X, A2Y
A00

0
ICONV

0.0 0.0 0.0
F0, FX, FY
**** ECHO OF THE INPUT DATA ENDS ****

```

Flow around a circular cylinder (VEL. POTENTIAL)

OUTPUT FROM PROGRAM *FEM2DV

ANALYSIS OF A POISSON/LAPLACE EQUATION

COEFFICIENTS OF THE DIFFERENTIAL EQUATION:

```

Coefficient, A10 .....= .1000E+01
Coefficient, A1X .....= .0000E+00
Coefficient, A1Y .....= .0000E+00
Coefficient, A20 .....= .1000E+01
Coefficient, A2X .....= .0000E+00
Coefficient, A2Y .....= .0000E+00
Coefficient, A00 .....= .0000E+00

```

CONTINUOUS SOURCE COEFFICIENTS:

Coefficient, FO= .0000E+00
 Coefficient, FX= .0000E+00
 Coefficient, FY= .0000E+00

***** A STEADY-STATE PROBLEM is analyzed *****

*** A mesh of TRIANGLES is chosen by user ***

FINITE ELEMENT MESH INFORMATION:

Element type: 0 = Triangle; >0 = Quad.)..= 0
 Number of nodes per element, NPE= 3
 No. of primary deg. of freedom/node, NDF = 1
 Number of elements in the mesh, NEM= 32
 Number of nodes in the mesh, NNM= 25
 Number of equations to be solved, NEQ ...= 25
 Half bandwidth of the matrix GLK, NHBW ..= 7
 No. of specified PRIMARY variables, NSPV = 5
 No. of speci. SECONDARY variables, NSSV = 3

Node	DOF	Value
1	1	.50000E+00
6	1	.10000E+01
11	1	.50000E+00

Node	x-coord.	y-coord.	Speci. primary & secondary variables (0, unspecified; >0, specified)	
			Primary DOF	Secondary DOF

1	.0000E+00	.0000E+00	0	1
2	.1286E+01	.0000E+00	0	0
3	.2214E+01	.0000E+00	0	0
4	.2786E+01	.0000E+00	0	0
5	.3000E+01	.0000E+00	0	0
6	.0000E+00	.1000E+01	0	1
7	.1318E+01	.7354E+00	0	0
8	.2270E+01	.5444E+00	0	0
9	.2856E+01	.4268E+00	0	0
10	.3076E+01	.3827E+00	0	0
11	.0000E+00	.2000E+01	0	1
12	.1411E+01	.1446E+01	0	0
13	.2430E+01	.1046E+01	0	0
14	.3058E+01	.7995E+00	0	0
15	.3293E+01	.7071E+00	0	0
16	.2000E+01	.2000E+01	0	0
17	.2693E+01	.1539E+01	0	0
18	.3194E+01	.1206E+01	0	0
19	.3502E+01	.1001E+01	0	0
20	.3617E+01	.9239E+00	0	0
21	.4000E+01	.2000E+01	1	0
22	.4000E+01	.1571E+01	1	0
23	.4000E+01	.1262E+01	1	0
24	.4000E+01	.1071E+01	1	0
25	.4000E+01	.1000E+01	1	0

 NUMERICAL INTEGRATION DATA:

Full Integration polynomial degree, IPDF = 3
 Number of full integration points, NIPF = 4
 Reduced Integration polynomial deg., IPDR = 1
 No. of reduced integration points, NIPR = 1
 Integ. poly. deg. for stress comp., ISTR = 1
 No. of integ. pts. for stress comp., NSTR = 1

 SOLUTION :

Node	x-coord.	y-coord.	Primary DOF
1	.00000E+00	.00000E+00	.48631E+01
2	.12857E+01	.00000E+00	.35874E+01
3	.22143E+01	.00000E+00	.27173E+01
4	.27857E+01	.00000E+00	.23146E+01
5	.30000E+01	.00000E+00	.22503E+01
6	.00000E+00	.10000E+01	.48581E+01
7	.13183E+01	.73543E+00	.35429E+01
8	.22705E+01	.54436E+00	.26220E+01
9	.28564E+01	.42677E+00	.21723E+01
10	.30761E+01	.38268E+00	.20763E+01
11	.00000E+00	.20000E+01	.48569E+01
12	.14112E+01	.14459E+01	.34303E+01
13	.24305E+01	.10457E+01	.23557E+01
14	.30577E+01	.79945E+00	.17767E+01
15	.32929E+01	.70710E+00	.15969E+01
16	.20000E+01	.20000E+01	.28152E+01
17	.26931E+01	.15388E+01	.19513E+01
18	.31937E+01	.12057E+01	.13621E+01
19	.35018E+01	.10007E+01	.98705E+00
20	.36173E+01	.92388E+00	.82790E+00
21	.40000E+01	.20000E+01	.00000E+00
22	.40000E+01	.15714E+01	.00000E+00
23	.40000E+01	.12619E+01	.00000E+00
24	.40000E+01	.10714E+01	.00000E+00
25	.40000E+01	.10000E+01	.00000E+00

The orientation of gradient vector is measured from the positive x-axis

x-coord.	y-coord.	-a11(du/dx)	-a22(du/dy)	Flux Mgntd	Orientation
.8680E+00	.2451E+00	.9922E+00	.1657E-01	.9923E+00	.96
.4394E+00	.5785E+00	.9986E+00	.5037E-02	.9986E+00	.29
.1923E+01	.1815E+00	.9371E+00	.7837E-01	.9403E+00	4.78
.1625E+01	.4266E+00	.9707E+00	.1752E-01	.9709E+00	1.03
.2619E+01	.1423E+00	.7047E+00	.2166E+00	.7372E+00	17.09
.2447E+01	.3237E+00	.7862E+00	.9394E-01	.7918E+00	6.81
.2954E+01	.1276E+00	.2999E+00	.3951E+00	.4960E+00	52.81

.2906E+01	.2698E+00	.4878E+00	.2525E+00	.5493E+00	27.37
.9099E+00	.1060E+01	.1003E+01	.2733E-01	.1003E+01	1.56
.4704E+00	.1482E+01	.1011E+01	.1195E-02	.1011E+01	.07
.2006E+01	.7752E+00	.1009E+01	.2090E+00	.1031E+01	11.70
.1720E+01	.1076E+01	.1062E+01	.1963E-01	.1062E+01	1.06
.2728E+01	.5902E+00	.8845E+00	.5839E+00	.1060E+01	33.43
.2586E+01	.7965E+00	.1006E+01	.2101E+00	.1027E+01	11.80
.3075E+01	.5055E+00	.6469E+00	.1045E+01	.1229E+01	58.25
.3069E+01	.6444E+00	.9745E+00	.5353E+00	.1112E+01	28.78
.1137E+01	.1815E+01	.1021E+01	.2536E-01	.1021E+01	1.42
.2035E+01	.1662E+01	.1163E+01	-.1255E+00	.1170E+01	-6.16
.2178E+01	.1343E+01	.1138E+01	.2139E+00	.1158E+01	10.64
.2772E+01	.1263E+01	.1272E+01	.1427E+00	.1280E+01	6.40
.2894E+01	.1017E+01	.1170E+01	.6287E+00	.1328E+01	28.25
.3251E+01	.1002E+01	.1551E+01	.5012E+00	.1630E+01	17.91
.3284E+01	.8358E+00	.1235E+01	.1198E+01	.1721E+01	44.14
.3471E+01	.8772E+00	.1873E+01	.7444E+00	.2015E+01	21.68
.2898E+01	.1846E+01	.1408E+01	.2423E+00	.1428E+01	9.77
.3564E+01	.1703E+01	.1493E+01	.0000E+00	.1493E+01	.00
.3296E+01	.1439E+01	.1482E+01	.4579E+00	.1551E+01	17.17
.3731E+01	.1346E+01	.1689E+01	.0000E+00	.1689E+01	.00
.3565E+01	.1156E+01	.1645E+01	.6421E+00	.1766E+01	21.33
.3834E+01	.1111E+01	.1981E+01	.0000E+00	.1981E+01	.00
.3706E+01	.9987E+00	.1875E+01	.7477E+00	.2019E+01	21.74
.3872E+01	.9984E+00	.2163E+01	.0000E+00	.2163E+01	.00

*** ECHO OF THE INPUT DATA STARTS ***

```

Flow around a circular cylinder (Streamfunction)
0 2 0 0 ITYPE, IGRAD, ITEM, NEIGN
0 3 2 0 IELTYP, NPE, MESH, NPRNT
32 25 NEM, NNM

5 NRECL
1 5 1 0.0 0.0 3.0 0.0 6.0 NOD1, NODL, NODINC, ...
6 10 1 0.0 1.0 3.07612 0.38268 6.0
11 15 1 0.0 2.0 3.29289 0.7071 6.0
16 20 1 2.0 2.0 3.61732 0.92388 6.0
21 25 1 4.0 2.0 4.0 1.0 6.0

8 NRECEL
1 7 2 1 3 1 2 7 NEL1, NELL, IELINC, NODINC,
2 8 2 1 3 1 7 6
9 15 2 1 3 6 7 12
10 16 2 1 3 6 12 11
17 23 2 1 3 11 12 16
18 24 2 1 3 12 17 16
25 31 2 1 3 16 17 21
26 32 2 1 3 17 22 21

13 NSPV
1 1 2 1 3 1 4 1 5 1 10 1 15 1 20 1 25 1
6 1 11 1 16 1 21 1 ISPV(I, J)
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
1.0 2.0 2.0 2.0 VSPV(I)

0 NSSV
1.0 0.0 0.0 A10, A1X, A1Y
1.0 0.0 0.0 A20, A2X, A2Y
0.0 A00

0 ICONV
0.0 0.0 0.0 F0, FX, FY

```

**** ECHO OF THE INPUT DATA ENDS ****

Flow around a circular cylinder (Streamfunction)

OUTPUT FROM PROGRAM *FEM2DV4*

ANALYSIS OF A POISSON/LAPLACE EQUATION

COEFFICIENTS OF THE DIFFERENTIAL EQUATION:

```

Coefficient, A10 .....= .1000E+01
Coefficient, A1X .....= .0000E+00
Coefficient, A1Y .....= .0000E+00
Coefficient, A20 .....= .1000E+01
Coefficient, A2X .....= .0000E+00

```


Coefficient, A2Y= .0000E+00
 Coefficient, A00= .0000E+00

CONTINUOUS SOURCE COEFFICIENTS:

Coefficient, F0= .0000E+00
 Coefficient, FX= .0000E+00
 Coefficient, FY= .0000E+00

***** A STEADY-STATE PROBLEM is analyzed *****

*** A mesh of TRIANGLES is chosen by user ***

FINITE ELEMENT MESH INFORMATION:

Element type: 0 = Triangle; >0 = Quad.)..= 0
 Number of nodes per element, NPE= 3
 No. of primary deg. of freedom/node, NDF = 1
 Number of elements in the mesh, NEM= 32
 Number of nodes in the mesh, NNM= 25
 Number of equations to be solved, NEQ ...= 25
 Half bandwidth of the matrix GLK, NHBW ..= 7
 No. of specified PRIMARY variables, NSPV = 13

Node	x-coord.	y-coord.	Speci. primary & secondary variables (0, unspecified; >0, specified)	
			Primary DOF	Secondary DOF

1	.0000E+00	.0000E+00	1	0
2	.1286E+01	.0000E+00	1	0
3	.2214E+01	.0000E+00	1	0
4	.2786E+01	.0000E+00	1	0
5	.3000E+01	.0000E+00	1	0
6	.0000E+00	.1000E+01	1	0
7	.1318E+01	.7354E+00	0	0
8	.2270E+01	.5444E+00	0	0
9	.2856E+01	.4268E+00	0	0
10	.3076E+01	.3827E+00	1	0
11	.0000E+00	.2000E+01	1	0
12	.1411E+01	.1446E+01	0	0
13	.2430E+01	.1046E+01	0	0
14	.3058E+01	.7995E+00	0	0
15	.3293E+01	.7071E+00	1	0
16	.2000E+01	.2000E+01	1	0
17	.2693E+01	.1539E+01	0	0
18	.3194E+01	.1206E+01	0	0
19	.3502E+01	.1001E+01	0	0
20	.3617E+01	.9239E+00	1	0
21	.4000E+01	.2000E+01	1	0
22	.4000E+01	.1571E+01	0	0
23	.4000E+01	.1262E+01	0	0

24	.4000E+01	.1071E+01	0	0
25	.4000E+01	.1000E+01	1	0

NUMERICAL INTEGRATION DATA:

Full Integration polynomial degree, IPDF = 3
 Number of full integration points, NIPF = 4
 Reduced Integration polynomial deg., IPDR = 1
 No. of reduced integration points, NIPR = 1
 Integ. poly. deg. for stress comp., ISTR = 1
 No. of integ. pts. for stress comp., NSTR = 1

S O L U T I O N :

Node	x-coord.	y-coord.	Primary DOF
1	.00000E+00	.00000E+00	.00000E+00
2	.12857E+01	.00000E+00	.00000E+00
3	.22143E+01	.00000E+00	.00000E+00
4	.27857E+01	.00000E+00	.00000E+00
5	.30000E+01	.00000E+00	.00000E+00
6	.00000E+00	.10000E+01	.10000E+01
7	.13183E+01	.73543E+00	.70920E+00
8	.22705E+01	.54436E+00	.43721E+00
9	.28564E+01	.42677E+00	.16668E+00
10	.30761E+01	.38268E+00	.00000E+00
11	.00000E+00	.20000E+01	.20000E+01
12	.14112E+01	.14459E+01	.14241E+01
13	.24305E+01	.10457E+01	.87299E+00
14	.30577E+01	.79945E+00	.33569E+00
15	.32929E+01	.70710E+00	.00000E+00
16	.20000E+01	.20000E+01	.20000E+01
17	.26931E+01	.15388E+01	.13758E+01
18	.31937E+01	.12057E+01	.77058E+00
19	.35018E+01	.10007E+01	.25200E+00
20	.36173E+01	.92388E+00	.00000E+00
21	.40000E+01	.20000E+01	.20000E+01
22	.40000E+01	.15714E+01	.12395E+01
23	.40000E+01	.12619E+01	.61905E+00
24	.40000E+01	.10714E+01	.18173E+00
25	.40000E+01	.10000E+01	.00000E+00

The orientation of gradient vector is measured from the positive x-axis

x-coord.	y-coord.	a22(du/dy)	-a11(du/dx)	Flux Mgntd	Orientation
----------	----------	------------	-------------	------------	-------------

.8680E+00	.2451E+00	.9643E+00	.0000E+00	.9643E+00	.00
.4394E+00	.5785E+00	.1000E+01	.1990E-01	.1000E+01	1.14
.1923E+01	.1815E+00	.8032E+00	.0000E+00	.8032E+00	.00
.1625E+01	.4266E+00	.9684E+00	.9132E-01	.9727E+00	5.39
.2619E+01	.1423E+00	.3906E+00	.0000E+00	.3906E+00	.00
.2447E+01	.3237E+00	.8336E+00	.2944E+00	.8840E+00	19.45
.2954E+01	.1276E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	90.00
.2906E+01	.2698E+00	.4996E+00	.6583E+00	.8264E+00	52.81
.9099E+00	.1060E+01	.1009E+01	.1818E-01	.1009E+01	1.03
.4704E+00	.1482E+01	.1000E+01	.1546E-01	.1000E+01	.89
.2006E+01	.7752E+00	.9025E+00	.1045E+00	.9086E+00	6.61
.1720E+01	.1076E+01	.1024E+01	.1385E+00	.1034E+01	7.70
.2728E+01	.5902E+00	.6342E+00	.3345E+00	.7170E+00	27.81
.2586E+01	.7965E+00	.1015E+01	.4580E+00	.1114E+01	24.28
.3075E+01	.5055E+00	.4469E+00	.6689E+00	.8045E+00	56.25
.3069E+01	.6444E+00	.1010E+01	.1031E+01	.1443E+01	45.57
.1137E+01	.1815E+01	.1039E+01	.0000E+00	.1039E+01	.00
.2035E+01	.1662E+01	.1169E+01	.1224E+00	.1176E+01	5.97
.2178E+01	.1343E+01	.1082E+01	.1160E+00	.1088E+01	6.12
.2772E+01	.1263E+01	.1228E+01	.3917E+00	.1289E+01	17.68
.2894E+01	.1017E+01	.1200E+01	.3856E+00	.1260E+01	17.82
.3251E+01	.1002E+01	.1336E+01	.7942E+00	.1555E+01	30.72
.3284E+01	.8358E+00	.1464E+01	.8522E+00	.1694E+01	30.20
.3471E+01	.8772E+00	.1636E+01	.1093E+01	.1967E+01	33.75
.2898E+01	.1846E+01	.1353E+01	.0000E+00	.1353E+01	.00
.3564E+01	.1703E+01	.1775E+01	.1486E+00	.1781E+01	4.79
.3296E+01	.1439E+01	.1600E+01	.1443E+00	.1607E+01	5.15
.3731E+01	.1346E+01	.2005E+01	.3276E+00	.2031E+01	9.28
.3565E+01	.1156E+01	.2034E+01	.3297E+00	.2061E+01	9.21
.3834E+01	.1111E+01	.2296E+01	.4668E+00	.2343E+01	11.49
.3706E+01	.9987E+00	.2528E+01	.4997E+00	.2576E+01	11.18
.3872E+01	.9984E+00	.2544E+01	.5061E+00	.2594E+01	11.25

GLOSARIO

Descripción de las variables de entrada para el programa FEM1DV3

MODEL	ecuación modelo
NTYPE	tipo de problema a resolver
	MODEL=1, NTYPE=0 un problema de ecuación modelo
	MODEL=1, NTYPE=1 un disco circular (esfuerzo plano)
	MODEL=1, NTYPE>1 un disco circular (deformación plana)
	MODEL=2, NTYPE=0 un problema de viga Timoshenko etc.
ITEM	indicador para análisis transitorio
	ITEM=0, solución de estado estable
	ITEM=1, análisis transitorio de ecuaciones parabólicas
	ITEM=2, análisis transitorio de ecuaciones hiperbólicas
	ITEM=3, análisis de Eigenvalores
IELEM	tipo de elemento finito
	IELEM=0, elemento finito de Hermite cúbico
	IELEM=1, elemento finito lineal de Lagrange
	IELEM=2, elemento finito cuadrático de Lagrange
NEM	número de elementos en la malla
ICONT	indicador de la continuidad de datos para el problema
	ICONT=1, dato (AX,BX,CX,FX, y malla) es continua
	ICONT=0, dato es elemento dependiente
NPRNT	indicador para imprimir las matrices (elemento/global)
	NPRNT=0, no imprime las matrices elemento o global
	NPRNT=1, imprime la matriz de coeficientes del elemento 1
	NPRNT=2, las matrices del elemento 1 y global

NPRNT>2, no imprime matrices del elemento y global

D(X) arreglo de las longitudes de los elementos
 AX0 término constante del coeficiente AX
 AX1 término lineal del coeficiente AX
 BX0 término constante del coeficiente BX
 BX1 término lineal del coeficiente BX
 CX0 término constante del coeficiente CX
 CX1 término lineal del coeficiente CX
 FX0 término constante del coeficiente FX
 FX1 término lineal del coeficiente FX
 FX2 término cuadrático del coeficiente FX
 NSPV número de grados de libertad primaria especificado
 ISPV(I,1) número de nodo en la cual PV es especificado
 ISPV(I,2) grado de libertad primaria local especificado en el nodo
 VSPV(I) valor de la variable primaria especificada (PV)
 NSSV número de variables secundarias especificadas (no cero)
 ISSV(I,1) número de nodo en la cual la SV es especificada
 ISSV(I,2) grado de libertad secundario local especificado en el nodo
 VSSV(I) valor de la variable secundaria especificado (SV)
 NNBC número de las condiciones de frontera de newton (mixta)
 INBC(I,1) número de nodo en la cual las condiciones de frontera mixta es especificado
 INBC(I,2) grado de libertad local de las PV y SV en el nodo
 VNBC(I) valor de los coeficientes de la PV en las condiciones de frontera
 UREF(I) referencia del valor de la PV
 CT0 parte constante de $CT = CT0 + CT1 * X$
 CT1 parte lineal de $CT = CT0 + CT1 * X$

DESCRIPCION DE LAS VARIABLES DE ENTRADA DEL PROGRAMA FEM2DV4

ITYPE	tipo de problema ITYPE=0, problemas de una sola variable ITYPE=1, problemas de flujo viscoso incompresible ITYPE=2, problemas de elasticidad plana etc.
IGRAD	indicador para calcular el gradiente de la solución
ITEM	indicador para análisis dinámico ITEM=0 análisis estático ITEM>0 es requerido eigenvalores o análisis transitorio ITEM=1 ecuación parabólica es analizada ITEM=2 ecuación hiperbólica es analizada
IELTYP	tipo de elemento usado en el análisis IELTYP=0, elementos triangulares IELTYP>0, elementos cuadriláteros
NPE	nodos por elemento NPE=3, triángulo lineal NPE=4, cuadrilátero lineal NPE=6, triángulo cuadrático NPE=8 o 9, cuadrilátero cuadrático
MESH	indicador para generación de malla por el programa MESH=0, la malla no es generada por el programa MESH=1, la malla es generada por el programa para dominio rectangular MESH>1, la malla es generada por el programa para dominio general
NPRNT	indicador para la impresión de ciertas salidas NPRNT= 0, no imprime arreglo NOD, matrices elemento, o matrices Globales NPRNT= 1, imprime arreglo NOD y las matrices elemento

NPRNT=2,	imprime arreglo NOD y matrices ensambladas
NPRNT>2,	combinación de NPRNT=1 y NPRNT=2
NEM	número de elementos en la malla
NNM	número de nodos en la malla
NOD(I,1)	conectividad para los n elementos
NRECL	número de líneas registradas en la malla
NOD1	número del primer nodo global del segmento de línea
NODL	número del último nodo global del segmento lineal
NODINC	incremento de nodo en la línea
X1	la coordenada global x de NOD1
Y2	la coordenada global y de NOD1
XL	la coordenada global x de NODL
YL	la coordenada global y de NODL
RATIO	la razón de la longitud del primer elemento a la longitud el último Elemento
NRECEL	número de renglones de elementos en la malla
NEL1	número del primer elemento del renglón
NELL	número del último elemento del renglón
IELINC	incremento de número elemento en el renglón
NODINC	incremento de número de nodo global en el renglón
NPE	número de nodos en cada elemento
NODE(I)	conectividad de arreglo del primer elemento en el renglón
NX	número de elementos en la dirección X
NY	número de elementos en la dirección Y
X0	la coordenada x del nodo 1 global
DX(I)	la dimensión X del elemento I
Y0	la coordenada y del nodo global 1
DY(I)	la dimensión Y del elemento I
NSPV	el número de variables primaria especificada

ISPV(I,J)	número de nodo y número del grado de libertad local de la I variable Primaria especificada
VSPV	valor especificado de la I variable primaria
NSSV	número de variables secundarias especificadas (no cero)
ISSV(I,J)	número de nodo y número de grado de libertad de la variable secundaria I Especificada
VSSV(I)	valor especificado de la I variable secundaria
A10, A1X, A1Y	coeficientes de la ecuación diferencial $a_{11} = A10 + A1X * X + A1Y * Y$
A20, A2X, A2Y	coeficientes de la ecuación diferencial $a_{22} = A20 + A2X * X + A2Y * Y$
A00	coeficiente de la ecuación diferencial
ICONV	indicador para condiciones de frontera con convección
IBN(I)	número de elemento I con convección
BETA(I)	coeficiente de película para convección en el I elemento
TINF(I)	temperatura ambiente del I elemento
INOD(I,J)	número de nodo local del lado con convección
F0, FX, FY	coeficientes para definir el término fuente $f = F0 + FX * x + FY * y$
C0, CX, CY	coeficientes definiendo las partes temporales de las ecuaciones Diferenciales $CT = C0 + CX * x + CY * y$
NIEGN	indicador para análisis de eigenvalores NEIGN= 0 análisis estático o transitorio NEIGN>1 análisis de eigenvalores

AUTOBIOGRAFIA

NUMBRE: CARLOS LAZARO NARANJO

Candidato a obtener el grado de Maestro en Ciencias de la Ingeniería Mecánica con Especialidad en Térmica y Fluidos.

Título de Tesis: “ Aplicaciones del Método de Elementos Finitos a Problemas de Termofluidos .

Título Profesional : Ingeniero Mecánico Electricista.

Lugar y Fecha de nacimiento : Coatzacoalcos, Ver. 16 de junio de 1955

Nombre de mis Padres: Sr. José C. Lázaro Hernández y Sra. Felícita Naranjo Tiquet

Egresado de la Institución : Facultad de Ingeniería de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco .

Obtuve el Título de Ingeniero Mecánico Electricista en 1983

Y el Grado de Maestro en Ingeniería Hidráulica en 1985.

Actividades profesionales: Laboré en Pemex en mantenimiento a instalaciones de producción y en el departamento de reparación y terminación de pozos. Me he desempeñado como Coordinador de la carrera de Ingeniería Mecánico Electricista , Jefe del Departamento de Mantenimiento y Catedrático en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco .

Organización profesional : Colegio de Ingenieros Mecánicos Electricistas

