# UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA



# TECNICAS DE CONTROL PARA ROBOTS MANIPULADORES CON FLEXIBILIDAD EN LA ARTICULACION

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTOR EN INGENIERIA ELECTRICA

PRESENTA:
JOSE GUADALUPE ALVAREZ LEAL

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L. FEBRERO DE 1999

# CNICAS DE CONTROL PARA ROBOTS ANIPULADORES CON FLEXIBIL

Z58 IME F 1 99















# UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA



## TECNICAS DE CONTROL PARA ROBOTS MANIPULADORES CON FLEXIBILIDAD EN LA ARTICULACION

#### TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTOR EN INGENIERIA ELECTRICA

PRESENTA:

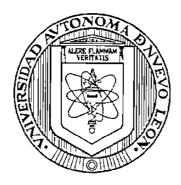
JOSE GUADALUPE ALVAREZ LEAL

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L. FEBRERO DE 1999



#### UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

#### FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA



# TECNICAS DE CONTROL PARA ROBOTS MANIPULADORES CON FLEXIBILIDAD EN LA ARTICULACION

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

DOCTOR EN INGENIERIA ELECTRICA

PRESENTA: JOSE GUADALUPE ALVAREZ LEAL

San Nicolás de los Garza, N. L.

Febrero de 1999

# TECNICAS DE CONTROL PARA ROBOTS MANIPULADORES CON FLEXIBILIDAD EN LA ARTICULACION

Los miembros de	l Comité	aprueban	la	Tesis
-----------------	----------	----------	----	-------

Doctoral de José Guadalupe Alvarez Leal

Dr. Jesús De León Morales Asesor	Jour de Longr
Dr. Krishna Kumar Busawon	K. Brimin
Dr. Mikhail V. Basin	Stage
Dr. José Antonio de la O Serna	In butour dell-
Dr. Rafael Martinez Guerra	CAMPAGE AND

©

Copyright 1999 por José Guadalupe Alvarez Leal

Reservados todos los derechos

ESTE TRABAJO DE TESIS ESTA DEDICADO A LA MEMORIA DE MIS PROGENITORES

ISAURO ALVAREZ RAMIREZ (-)

JUANITA LEAL ALANIS (-)

QUIENES EN SU PERIODO DE EXISTENCIA, SE PREOCUPARON POR DARME LIBERTAD DE PENSAMIENTO, SUSTENTO Y EDUCACION.

AGRADEZCO TAMBIEN, DE MANERA MUY ESPECIAL A MI FAMILIA:

#### **ESPOSA**

María de Jesús Lopez Alvarez

HIJO

José Michael Alvarez Lopez

HIJO

Christopher Gabriel Alvarez Lopez

HIJA

Gema Natalie Alvarez Lopez

QUIENES CON GRANDES SACRIFICIOS, ME PERMITIERON CONCLUIR MIS ESTUDIOS DOCTORALES, LOS CUALES SIN IMPORTAR LA DISTANCIA, PERMANECIMOS JUNTOS Y ME DIERON ALIENTOS PARA SEGUIR ADELANTE.

#### **RECONOCIMIENTOS**

Especial reconocimiento para el **Dr. Jesús De León Morales**, Director de mi tésis, persona que se ha distinguido por sus trabajos de investigación, y quien me apoyo en todo momento con mis dudas académicas.

A los profesores del Programa Doctoral, que influyerón en mi formación como investigador:

- 1.-Dr. Joaquín Collado Moctezuma
- 2.-Dr. Krishna Busawon
- 3.- Dr. Salvador Acha Daza
- 4.- Dr. José Antonio de la O Serna

Reconocimiento especial, al Dr. Rafael Martinez Guerra, miembro externo del Jurado en mi examén de grado, por su constante esfuerzo en la investigación del Control de Robots manipuladores.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología: CONACYT

Finalmente al Instituto Tecnológico de Saltillo, donde presto mis servicios como Profesor Investigador.

### RESUMEN

#### TECNICAS DE CONTROL PARA ROBOTS MANIPULADORES CON FLEXIBILIDAD EN LA ARTICULACION

Publicación No. \_ \_ \_ \_ \_

José Guadalupe Alvarez Leal. Dr. en Ingeniería Eléctrica Universidad Autónoma de Nuevo León

Profesor Asesor: Dr. Jesús De León Morales

En esta tesis se presentan algoritmos de control para el seguimiento de la travectoria de un robot manipulador de un simple eslabón, el cual tiene flexibilidad en la articulación. Estos algoritmos se basan en la utilización de observadores de estado para estimar las variables no medibles de las estructuras mecánicas. Ademas, se hace un estudio de la estabilidad en lazo cerrado del sistema, el cual está constituido por el sistema a controlar y el observador.

Los métodos desarrollados permiten obtener un adecuado desempeño en el seguimiento de la trayectoria del robot flexible en su tarca a realizar. Considerando que por razones físicas o económicas no es posible disponer de la medición completa del vector de estado. se propone observadores de estado que nos permitan estimar la parte del vector de estado no medible, de tal manera que se pueda utilizar esta información para el control del sistema.

También se presenta en este trabajo de tesis un estudio comparativo de las distintos algoritmos de control propuestos, presentando resultados en simulación a un modelo de un robot con articulación flexible. Sin embargo estas técnicas se puden utilizar para otras aplicaciones industriales tales como generadores síncronos o procesos quimicos.

Una comparación en simulación de las técnicas de control desarrolladas, ante la presencia de perturbaciones o ruido, fue implementada para determinar la robustez del sistema.

# Notación

R	Campo de los números reales
$R^n$	Espacio vectorial de dimensión $n$ con elementos reales
$L_{f}h\left( x ight)$	$\left(rac{\partial h}{\partial x} ight)^T f$
$L_{f}^{k}h\left( x ight)$	$\underbrace{L_f L_f \cdots L_f h}_{k \text{ veres}} \text{ con } L_f^0 h(x) = h(x)$
[f,g](x)	$\frac{\partial g}{\partial x}f - \frac{\partial f}{\partial x}g$ Paréntesis de Lie de $f$ y $g$ , campos vectoriales s
$ad_{f}^{k}g\left( x ight)$	[f.[f[f.g]]]
	k veres
$C^{\infty}$	Conjunto de funciones con derivadas parciales de cualquier orde
$\langle x, y \rangle$	$x^T y$ Producto escalar de dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$
$\{x_i\}$	$(x_1,x_2,x_3,\ldots)$
$\Phi_{t}^{f}\left(x_{0}\right)$	flujo solución de $\dot{x}=f\left(x\right)$ con $x\left(0\right)=x_{0},\ i.e.\ x\left(t\right)=\Phi_{t}^{f}\left(x_{0}\right)$
$\Phi_{t}^{f}(x_{0})$ $(f \circ g)(x)$	flujo solución de $\dot{x}=f\left(x\right)$ con $x\left(0\right)=x_{0}.$ i.e. $x\left(t\right)=\Phi_{t}^{f}\left(x_{0}\right)$ $f\left(g\left(x\right)\right)$
• • •	
$(f \circ g)(x)$	$f\left(g\left(x ight) ight)$
$(f \circ g)(x)$ $A^T \circ A'$	$f\left(g\left(x\right)\right)$ Transpuesta de la Matriz $A$
$(f \circ g)(x)$ $A^T \circ A'$ $A^{-1}$	$f\left(g\left(x\right)\right)$ Transpuesta de la Matriz $A$ Inversa de la Matriz $A$ .

I Matriz identidad de orden nxn

 $\sigma(A)$   $\{\lambda_i(A): |\lambda_iI-A|=0\}$  . Valores característicos de la matriz A

 $\lambda_i(A)$  i-ésimo valor característico de la matriz A

 $\lambda_{\max}(A)$   $\max \{R_e(\lambda_i(A))\}, i = 1, 2, \dots, n$ 

 $\lambda_{\min}(A)$   $\min \{R_e(\lambda_i(A))\}, i = 1, 2, \dots, n$ 

||A|| Norma de la matriz A

 $\sigma_{\max}(A)$  Máximo valor singular de la matriz A

 $\sigma_{\min}(A)$  Mínimo valor singular de la matriz A

|A| Determinante de la matriz A

A < 0 Matriz definida negativa, es decir A es Hermítica y  $\lambda_i(A) < 0$ 

 $A \leq 0$  Matriz negativa semidefinida,  $\lambda_i(A) \leq 0 \; \forall \; i=1,2,\cdots,n$ 

 $dh = \left[ \frac{\partial h}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_2} \right]$  El gradiente de h, es un vector fila

V(x) > 0 Forma cuadrática positiva definida

V(x) < 0 Forma cuadrática negativa definida

 $V(x) \leq 0$  Forma cudrática negativa semidefinida

#### INDICE

Resumen	V1
Notación	vii
Indice de Figuras	xi
CAPITULO 1	
INTRODUCCION	
<ul> <li>1.01 Automatización Industrial</li> <li>1.02 Robots flexibles</li> <li>1.03 Robots con flexibilidad en las articulaciones</li> <li>1.04 Aportaciones de la investigación</li> <li>1.05 Organización del trabajo de tesis</li> </ul>	1 2 3 4 4
CAPITULO 2	
MODELO MATEMATICO DEL ROBOT CON FLEXIBILIDAD EN LA ARTICULACION	
<ul> <li>2.06 Manipuladores con Articulaciones Elásticas</li> <li>2.07 Propiedades del Modelo</li> <li>2.08 Modelos simplificados</li> <li>2.09 Modelo del brazo robot con Articulación Flexible</li> <li>2.1 Modelo Matemático</li> </ul>	6 10 12 13 14
CAPITULO 3	
METODO GEOMETRICO DIFERENCIAL	
3.01 Introducción 3.1 Estabilización de una clase de sistemas No Lineales 3.2 Análisis de estabilidad en lazo cerrado 3.3 Aplicación al modelo matemático del robot flexible 3.3.1 Resultados de simulación 3.3.2 Conclusiones  CAPITULO 4	16 17 19 23 26 29
METODO ALGEBRAICO DIFERENCIAL	
<ul> <li>4.1 Introducción</li> <li>4.2 Formas canónicas de controlabilidad y observabilidad generalizada</li> <li>4.3 Un enfoque algebraico diferencial para estabilización</li> </ul>	30 32

asintótica y seguimiento de salida 4.4 Controlador dinámico basado en el observador para		
Manipuladores con articulación flexible 4.4.1 Resultados de simulación		
		4.5 Conclusiones
CAPITULO 5		
METODO MEDIANTE PERTURBACIONES SINGULARES		
5.1 Introducción	48	
5.2 Modelo del Brazo Robot Manipulador		
5.3 Control modo deslizante en escala de dos tiempos		
deslizante	54	
5.3.1 Diseño del control en modo deslizante 5.4 Un observador No-Lineal	62	
5.5 Estabilidad en Lazo Cerrado	67	
5.6 Aplicación para el Modelo del Manipulador	75	
<ul><li>5.61 Diseño de la ley de Control</li><li>5.62 Estimación de las velocidades del motor y del eslabón</li></ul>		
		5.63 Estabilidad en lazo cerrado
5.6.4 Resultados de simulación		
5.7 Conclusiones	86	
CAPITULO 6		
ESTUDIO COMPARATIVO DE LAS DISTINTAS TECNICAS DE C EMPLEADAS	ONTROL	
6.01 Introducción	07	
6.02 Comparación entre las técnicas de control empleadas	87	
Resultados en simulación	88	
6.1 Análisis ante perturbaciones o ruido	92	
t manois ante pertarbaciones o raido	92	
CAPITULO 7		
CONCLUSIONES	96	
BIBLIOGRAFIA	98	
APENDICE	102	

# Indice de Figuras

Figura 1.1 Robot Industrial	2
Figura 2.1 Articulación Flexible	7
Figura 2.2 Modelo del Robot Manipulador	15
Figura 3.2 El estado $x_1$ y la señal de referencia $x_{ref}$	27
Figura 3.3 El estado $x_2$ y la señal de $\overset{\bullet}{x}_{ref}$	28
Figura 3.4 Control u	28
Figura 3.5 Estado $x_1 y$ su estimado $\hat{x}_1$	29
Figura 3.6 Estado $x_2$ y su estimado $\hat{x}_2$	29
Figura 4.1 Gráfica del estado $x_1.y$ la señal de referencia $y_R$	46
Figura 4.2 Gráfica del estado $x_2$ , y de $\overset{\bullet}{y}_R$	46
Figura 4.3 Gráfica del control $u$	47
Figura 5.1 Gráfica del estado $x_1 y$ la señal de referencia $x_{ref}$	83
Figura 5.2 Gráfica del estado $x_2$ y la señal $\hat{x}_{ref}$	84
Figura 5.3 Gráfica del estado $x_1$ , y su estimado	84
Figura 5.4 Gráfica del estado $x_2$ , y su estimado	84
Figura 5.5 Gráfica del control $u$	85
Figura 6.1 Gráfica del estado $x_1$ y la señal de referencia $x_{ref}$	90
Figura 6.2 Gráfica del estado $x_2$ , y la señal de referencia $\hat{x}_{ref}$	90
Figura 6.3 Gráfica del estado $x_2$ , y $x_{ref}$	91
Figura 6.4 Gráfica de los controladores	91
Figura 6.5 Estado $x_1, x_{ref}$ y la señal de ruido	92
Figura 6.6 Estado $x_2$ y la señal con ruido. Geométrico Diferencial	93
Figura 6.7 Estado $x_1$ y la señal de ruido. Algebraico Diferencial	93
Figura 6.8 Estado $x_1$ y la señal de ruido. Perturbaciones Singulares	94
Figura 6.9 Estado $x_2$ y la señal de ruido. Perturbaciones Singulares	94

# Capítulo 1

## Introducción

#### 1.0.1 Automatización Industrial

En la actualidad la industria manufacturera, y en particular la industria relacionada con la metal-mecánica, se encuentra ante la necesidad de adaptar los procesos de producción en función de la demanda, y debe satisfacer los criterios de calidad, que le permitan ser más competitiva y mantenerse en el mercado.

En estos procesos de manufactura se ha destacado un gran interés por el uso de robots. Esto es debido a que son capaces de desempeñar una gran variedad de funciones de manufactura, pueden trabajar en ambientes hostiles para el hombre y presentan una ventaja que no tienen las máquinas especializadas: son multifuncionales y reprogramables. Una consecuencia del uso de los robots, es que se ha obtenido reducción en los costos de producción y de materias primas, además, el tiempo para llevar a cabo las tareas que ejecuta el brazo robot manipulador se ha minimizado de manera importante.

De acuerdo con la asociación mundial de robótica, un robot industrial es un manipulador reprogramable multifuncional diseñado para mover materiales, partes, herramientas, o dispositivos especiales, a través de movimientos programados para el desempeño de una variedad de tareas. Un robot de estas características, se dice que posee " inteligencia " si asociamos a los algoritmos de control computacionales uno o varios sistemas de

medición y/o visión.

Típicamente, un robot industrial consiste de varios eslabones rígidos conectados en serie por articulaciones, las cuales pueden ser revolutas y/o prismáticas. Además, el robot posee un elemento importante conocido como el efector final o herramienta, la cual es determinante, dado que permite definir la tarea que puede desarrollar, por ejemplo, manipular objetos con propositos de ensamble, soldar, pintar, o bien algunas otras tareas que se le asignan al manipulador. Por otro lado, en el otro extremo de la cadena cinemática, se encuentra una base fija sujeta al piso, tal como se muestra en la siguiente figura:

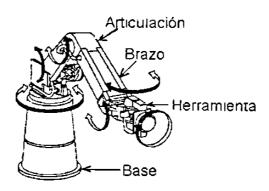


Figura No. 1.1 Robot industrial

#### 1.0.2 Robots flexibles

La presencia de flexibilidad en los brazos robots manipuladores es muy común en muchos de los robots industriales. Esta flexibilidad se presenta cuando se utilizan elementos para la transmisión del movimiento, tales como los impulsores armónicos, bandas de transmisión, o bien en el caso de grandes flechas de transmisión, donde un desplazamiento dinámico es introducido entre la posición de los actuadores y la posición de los eslabones.

Muchas veces, esta pequeña deflexión intrínseca es la causa de muchos problemas, especialmente cuando se desea controlar con mucha precisión el seguimiento de la trayectoria, o bien cuando se quiere tener una alta sensibilidad para fuerzas cartesianas en alguna tarea específica a efectuar por el brazo manipulador. Como es de observarse en el

movimiento de los brazos robots, existe una pequeña vibración la cual no podemos despreciar. Estas vibraciones son de pequeña magnitud y de una frecuencia relativamente alta, las cuales permanecen dentro de cierto ancho de banda de interés para el control.

#### 1.0.3 Robots con flexibilidad en las articulaciones

En el modelado de brazos robots manipuladores, la deformación puede ser caracterizada como si ésta estuviera concentrada en las articulaciones del robot. Ésta es la principal característica que se reconoce, la cual repercute en la derivación del modelo y la síntesis del control.

Sin embargo, existe una diferencia con respecto aquellos brazos robots con eslabones largos y ligeros, en los que la flexibilidad involucra cuerpos de grandes masas sometidos a deformaciones distribuidas sobre largos segmentos, en tal caso la flexibilidad no puede ser considerada como si ésta estuviera concentrada en las articulaciones, sino que más bien la flexibilidad deberá ser considerada en los eslabones.

Por otro lado, suponer que los robots tiene rigidez perfecta es una hipótesis que dificilmente se puede cumplir. Sin embargo, lo más importante es cómo obtener un modelo matemático que incluya toda clase de flexibilidades, con el fín de evaluar cuantitivamente sus efectos relativos.

Cuando se hace una comparación entre los robots flexibles en las articulaciones y los robots con eslabones rígidos, se observa que el modelo dinámico requiere dos veces el número de coordenadas generalizadas para poder caracterizar completamente la configuración de todos los cuerpos rígidos que lo conforman, tales como los motores y los eslabones. Es de observarse también que actualmente las deformaciones de las articulaciones son bastante pequeñas, y las fuerzas elásticas están típicamente limitadas a el dominio de la linealidad.

En el caso de brazos robots con articulaciones elásticas, el número de entradas de control no es igual al número de grados de libertad del robot. Por consecuencia, las tareas de control son mas difíciles de ejecutar que las diseñadas para el caso de los robots

rígidos. Ademas, en los brazos robots con flexibilidad en las articulaciones, se observa que para la implementación de una ley de control, se requiere de dos veces el numero de sensores, así como de la medición de variables que se encuentran antes y despues de la deformación.

El objetivo principal del diseño de controladores para robots flexibles en la articulación es manejar apropiadamente las vibraciones producidas por la elasticidad en las articulaciones, y asi efectuar un posicionamiento rápido y un seguimiento preciso de la herramienta del robot. En este trabajo se supone que se tiene rigidez en el eslabón.

#### 1.0.4 Aportaciones de La Investigación

En el presente trabajo se presentan varias técnicas de control para el seguimiento de la trayectoria de robots manipuladores con flexibilidad en la articulación. Las aportaciones principales se encuentran en los capítulos 3, 4,5 y 6 de la tesis, y en cada uno de estos capítulos se presentan los resultados obtenidos para cada una de las técnicas de control propuestas.

#### 1.0.5 Organización del trabajo de tesis

El trabajo de tesis está organizado como sigue: En el Capítulo 2, se presenta el modelo matemático de un brazo robot con flexibilidad en la articulación, y se enuncian las principales hipótesis que se consideran para la obtención del modelo de los robots con flexibilidad en la articulación, así como también se presenta el modelo del brazo robot de un simple eslabón con articulación rotatoria flexible que será considerado a lo largo de este trabajo, y que permitirá el diseño de los distintos algoritmos de control propuestos en este trabajo.

Basado en técnicas de la geometría diferencial se propone, en el Capítulo 3, un controlador basado en un observador para una clase de sistemas no-lineales que son linealizables por retroalimentación de estado. Ademas, un observador de alta ganancia es diseñado para estimar el estado no medible de esta clase de sistemas. Un análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado es presentado. Resultados en simulación son mostrados cuando este esquema de control se aplica al modelo del robot.

En el Capítulo 4, se diseña un controlador considerando el método algebráico diferencial para resolver los problemas de estabilización y seguimiento de salida de sistemas no-lineales, utilizando para ello, la estrategia de linealización exacta de la dinámica del error de seguimiento, en esta técnica se propone un observador de alta ganancia para estimar el error de seguimiento. Finalmente, se presentan los resultados de simulación de este esquema de control.

Mediante la teoría basada en perturbaciones singulares, en el Capítulo 5, se presenta un controlador basado en un observador para una clase de sistemas no-lineales singularmente perturbados. Bajo este esquema se dan las condiciones suficientes para garantizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado. Resultados son presentados para mostrar el desempeño de esta técnica de control.

En el Capitulo 6, se presenta un estudio comparativo de las técnicas de control propuestas, donde experimentos sobre la robustez de estas técnicas es efectuado, tomando en consideracion la presencia de perturbaciones o ruido en el sistema, y la introducción de variaciones en los parámetros del robot

Finalmente, en el Capítulo 7 se dan las conclusiones generales y recomendaciones para trabajos futuros.

En el presente trabajo de investigación, se presenta además un apéndice, en el cual se dan algunos conceptos y definiciones necesarias para la comprensión de esta tesis, empezando con algunas definiciones sobre la teoría de la observación de sistemas no-lineales en tiempo continuo, algunos resultados sobre observadores y su síntesis, definiciones y resultados útiles sobre estabilidad y estabilización de sistemas de control. Finalmente se anexan algunos resultados presentados en este trabajo de investigación, que fuerón aceptados y presentados en Congresos Internacionales.

# Capítulo 2

# Modelo matemático del robot con flexibilidad en la articulación

#### 2.0.6 Manipuladores con Articulaciones Elásticas

En este capítulo se considera la modelación de robots con elasticidad en las articulaciones. Como se mencionó en la introducción, la presencia de flexibilidad en las articulaciones de los robots, son problemas muy comunes en muchos de lo robots industriales.

Para la modelación de robots flexibles en la articulación, deben tomarse en cuenta algunas hipótesis generales acerca de su estructura mecánica, las cuales se enuncia como sigue:

#### Hipótesis

- 1.- Las deformaciones elásticas deben de ser pequeñas, de tal manera que sus efectos son conocidos, ya que de no ser así tendríamos modelos demasiado complejos, que no son tratables por el diseño del control.
- 2.- Para la modelización del efecto de la flexibilidad en la articulación, se considera este como si fuera un resorte torsional, tal como se muestra en la Figura 2.1
- 3.- Los rotores de los actuadores son modelados como si estos fueran cuerpos uniformes cuyo centro de masas está sobre el eje de rotación.

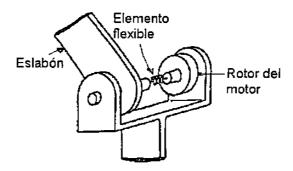


Figura No.2.1 Articulación flexible

Es importante hacer notar que la suposición de la simetría geométrica de los rotores, implica que tanto la matriz de inercia como el término gravitatorio en el modelo dinámico son independientes de la posición interna de los motores.

En base a la formulacion Lagrangiana, un conjunto de coordenadas generalizadas tiene que ser utilizada para caracterizar de manera única la configuración del sistema. Dado que el brazo robot esta compuesto por 2n cuerpos rígidos ( los eslabones y los actuadores de la estructura del brazo robot), entonces serán necesarias 2n coordenadas. Sea  $q_1$  el vector  $(n \times 1)$  de posición de los eslabones y  $q_2$  el vector  $n \times 1$  que representa las posiciones del actuador normalmente reflejado a través de la relación de engranes. De acuerdo con esta selección, la diferencia  $q_{1,i} - q_{2,i}$  representará la deformación de la i-ésima articulacion. Por otro lado, la cinemática directa de todo el eslabon ( y también de cada extremo del eslabón) deberá ser una función únicamente de las variables del eslabón  $q_1$ .

Ahora, definiendo la energía cinética del robot la cual esta dada por:

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T H(q) q (2.1)$$

donde  $q = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^{2n}$  y H(q) representa la matriz de inercia de  $(2n \times 2n)$ , la cual es simétrica y definida positiva para toda q. Ademas, para articulaciones rotatorias todos

los elementos de H(q) son acotados. De acuerdo a las suposiciones anteriores. H(q) tiene la siguiente estructura interna:

$$H(q) = \begin{pmatrix} H_1(q_1) & H_2(q_1) \\ H_2^T(q_1) & H_3 \end{pmatrix}$$
 (2.2)

En la ecuación anterior todos las submatrices son matrices de dimension  $(n \times n)$ , donde  $H_1$  contiene todas las propiedades inerciales.  $H_2$  toma en consideración los acoplamientos inerciales entre los giros de los actuadores y los eslabones previos, mientras que  $H_3$  es una matriz diagonal constante que depende de las inercias de los rotores de los motores y de la relación de engranes.

La energía potencial está dada como la suma de dos términos, los términos gravitatorios de los actuadores y los de los eslabones.

Suponiendo que las masas de los rotores son simétricas, la energía potencial  $U_q$ , esta expresada por

$$U_g = U_q(q_1) + U_e \tag{2.3}$$

El segundo término de la ecuación anterior se refiere a la elasticidad de la articulación. la cual puede ser escrita como:

$$U_{\epsilon} = \frac{1}{2}(q_1 - q_2)^T K(q_1 - q_2)$$
(2.4)

donde  $K = diag\{k_1, \dots, k_n\}, k_i > 0$ ,  $k_i$  representa la constante elástica de la articulación i. Definiendo ahora la matriz

$$K_E = \begin{pmatrix} K & -K \\ -K & K \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

la energía elástica (2.5) puede ser reescrita como

$$U_e = \frac{1}{2} q^T K_E q \tag{2.6}$$

Por otra parte, las ecuaciones dinámicas del movimiento del robot se obtienen a partir de

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q_i}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = u_i \qquad i = 1, \dots, 2n$$
(2.7)

donde  $L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - U(q, \dot{q})$  es la función Lagrangiana y  $u_i$  representa la fuerza generalizada que desempeña un trabajo sobre la coordenadas  $q_i$ . Puesto que únicamente las coordenadas del motor  $q_2$  son actuadas directamente, se pueden representar todas las fuerzas en el lado derecho de la ecuación (2.7) por

$$u = [0 \dots 0 \ u_1 \dots u_n]^T \in \mathbb{R}^{2n}$$
 (2.8)

En forma explícita la ecuación (2.7) da lugar a 2n ecuaciones diferenciales de segundo orden de la forma

$$H(q_1) \ q - C(q, q) \ q + K_E q + g(q_1) = u \tag{2.9}$$

en la cual los términos de Coriolis y centrífugos son

$$C(q, \dot{q}) q = H(q_1) q - \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial q} \left( \dot{q}^T H(q_1) \dot{q} \right) \right]^T$$
(2.10)

y el vector de gravedad es

$$g(q_1) = \frac{\partial U_g(q_1)^T}{\partial q} = \begin{pmatrix} g(q_1) \\ 0 \end{pmatrix}$$
 (2.11)

con

$$g_1 = \left(\frac{\partial U_g(q_1)}{\partial q_1}\right)^T$$

Los términos de fricción viscosa actúan en el eslabón y en el motor. Estos se encuen-

tran a los lados de las articulación elástica y pueden ser fácilmente incluidos en el modelo dinámico.

#### 2.0.7 Propiedades del modelo

Al considerar el modelo general (2.9), las siguientes propiedades pueden ser derivadas, algunas de ellas se encuentran también presentes en el caso del modelo del robot rígido.

1.-Los elementos de  $C(q, \dot{q})$  pueden siempre definirse, de tal forma que la matriz H-2C resulte anti-simétrica. En particular, tal selección es proporcionada por los simbolos de Christoffel

$$C_{ij}(q,\dot{q}) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial H_{ij}}{\partial q} \dot{q} + \sum_{k=1}^{2n} \left( \frac{\partial H_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial H_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k \right]. \tag{2.12}$$

para  $i, j = 1, \dots, 2n$ , donde  $q_i$  denota el i-esimo elemento del vector q.

2.-Si  $C(q,\dot{q})$  esta definida como en (2.12), entonces esta puede ser descompuesta como

$$C(q, q) = C_A(q_1, q_2) + C_B(q_1, q_1)$$
(2.13)

con

$$C_A(q_1, q_2) = \begin{pmatrix} C_{A1}(q_1, q_2) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
 (2.14)

$$C_B(q_1, \dot{q}_1) = \begin{pmatrix} C_{B1}(q_1, \dot{q}_1) & C_{B2}(q_1, \dot{q}_1) \\ C_{B3}(q_1, \dot{q}_1) & 0 \end{pmatrix}$$
(2.15)

donde los elementos de las matrices  $(n \times n) - C_{A1}, C_{B1}, C_{B2}$  y  $C_{B3}$  son

$$C_{A1,ij}(q_1, q_2) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial H_2^i}{\partial q_{1,j}} - \frac{\partial H_2^j}{\partial q_{1,i}} \right) q_2 \tag{2.16}$$

$$C_{B1.ij}(q_1, \dot{q}_1) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial H_{1,ij}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \left( \frac{\partial H_1^i}{\partial q_{1,j}} - \frac{\partial H_1^j}{\partial q_{1,i}} \right) \dot{q}_1 \right]$$
(2.17)

$$C_{B2.ij}(q_1, \dot{q}_1) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial H_{2.ij}}{\partial q_1} \, \dot{q}_1 + \frac{\partial (H_2^T)^j}{\partial q_{1,i}} \, \dot{q}_1 \right]$$
(2.18)

$$C_{B3,ij}(q_1, \dot{q}_1) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial H_{2,ji}}{\partial q_1} \, \dot{q}_1 + \frac{\partial (H_2^T)^i}{\partial q_{1,i}} \, \dot{q}_1 \right]$$
(2.19)

con  $A^i$  denotando la i-ésima fila de una matriz A. Estas expresiones resultan a partir de dependencia de la matriz de inercia (2.2) y de la propiedad número 1.

3.- La matriz  $H_2(q_1)$  tiene la siguiente estructura triangular

$$\begin{pmatrix} 0 & H_{2,12}(q_{1,1}) & H_{2,13}(q_{1,1}, q_{1,2}) & \dots & H_{2,1n}(q_{1,1}, \dots, q_{1,n-1}) \\ 0 & 0 & H_{2,23}(q_{1,2}) & \dots & H_{2,2n}(q_{1,2}, \dots, q_{1,n-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & H_{2,n-1,n}(q_{1,n-1}) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Los elementos de la matriz  $H_2$  pueden ser obtenidos mediante la siguiente expresión

$$H_{2nj} = \frac{\partial^2 T}{\partial q_1, \partial q_2},\tag{2.20}$$

donde la energía cinética T representa la suma de la energía cinética de cada eslabón incluyendo la del estator del motor sucesivo y la de cada rotor de los motores. En virtud de que la energía cinética es una forma cuadrática de q, y tomando en cuenta la selección de variables mencionadas anteriormente, las contribuciones de  $H_2$  se deben solamente a la parte de la energía cinética correspondiente a los rotores, de tal manera que para el i-esimo rotor esta energía viene dada por

$$T_{r,i} = \frac{1}{2} m_{r,i} v_{2,i}^T v_{2,i} + \frac{1}{2} w_{2,i}^T I_{r,i} w_{2,i}$$
 (2.21)

donde  $v_{2,i}$  y  $w_{2,i}$  son la velocidad lineal absoluta y la velocidad angular del rotor, respectivamente, expresadas en un marco de referencia colocado en el correspondiente estator. Por otro lado,  $m_{r,i}$  e  $I_{r,i}$  representan la masa y el tensor de inercia del rotor. Dado que el

centro de masas del rotor permanece en el eje de rotación, solamente el segundo término del lado derecho de la ecuación anterior contribuye a  $H_{2,ij}$ . La velocidad angular  $w_{2,i}$  puede ser calculada para articulaciones rotacionales por la siguiente fórmula recursiva:

$$w_{2,i} = R_{r,i} \left[ w_{1,i-1} + b_{2,i} \, \dot{q}_{2,i} \right]$$

$$w_{1,i} = R_i(q_{1,i}) \left[ w_{1,i-1} + b_{1,i} \, \dot{q}_{1,i} \right]$$
(2.22)

en la cual  $w_{1,i}$  es la velocidad absoluta angular del eslabón i en un marco de referencia sujeto al propio eslabón.  $b_{1,i}$  es el vector unitario asociado a el eje de la i-esima articulación.  $b_{2,i}$  es el vector unitario constante de la velocidad angular del rotor i relativo al eslabón i-1.  $R_i$  es la matriz de transformación de  $(3 \times 3)$  desde el marco del eslabón i-1 al marco de referencia del eslabón i.  $R_{r,i}$  es la matriz de transformación de  $(3 \times 3)$  desde el marco del eslabón i-1 al marco de referencia del rotor i.

4.- Existe una constante positiva  $\alpha$  tal que

$$\left\| \frac{\partial g(q_1)}{\partial q_1} \right\| \le \alpha \left\| q_1 - \bar{q}_1 \right\|, \qquad \forall q_1, \bar{q}_1 \in \mathbb{R}^n$$
 (2.23)

#### 2.0.8 Modelos simplificados

En muchos arreglos cinemáticos comunes, el bloque  $H_2$  en la matriz de inercia del modelo del robot con articulación elástica es *constante*, de tal manera que se pueden efectuar simplificaciones en la modelación, es decir

$$H_2 = constante \Rightarrow C_{A1} = C_{B2} = C_{B3} = 0$$

esto significa que los términos de Coriolis y centrífugo, los cuales son siempre independientes de  $q_2$ , resultan también ser independientes de  $q_2$ . Como consecuencia de lo anterior.

el modelo (2.9) puede ser reescrito de la forma

$$H_1(q_1) \ddot{q}_1 + H_2 \ddot{q}_2 + C(q_1, \dot{q}_1) \dot{q}_1 + K(q_1 - q_2) + g_1(q_1) = 0$$

$$H_2^T \ddot{q}_1 + H_3 \ddot{q}_2 + K(q_2 - q_1) = u$$
(2.24)

donde  $C_1 = C$ .

En algunas estructuras cinemáticas especiales de robots se encuentra que  $H_2=0$ , y simplificaciones adicionales son inducidas. En consecuencia, no hay acoplamientos inerciales entre el eslabón y las dinámicas del motor

$$H_1(q_1) \ddot{q}_1 + C(q_1, q_1) \dot{q}_1 + K(q_1 - q_2) + g_1(q_1) = 0$$

$$H_3 \dot{q}_2 + K(q_2 - q_1) = u$$
(2.25)

Para modelos de robots generales con articulaciones elásticas, un modelo reducido de la forma anterior puede ser obtenido al despreciar algunas contribuciones en la energía del sistema. En particular,  $H_2$  puede ser igual a cero, si la parte angular de la energía cinética de cada rotor se debe únicamente a su propia rotación, esto es  $w_{2,i} = R_{r,i}b_{2,i} q_{2,i}$ , o bien

$$T_{r,i} = \frac{1}{2} m_{r,i} v_{2,i}^T v_{2,i} + \frac{1}{2} I_{m,i} \dot{q}_{2,i}^2$$
 (2.26)

con el escalar positivo  $I_{m,i} = b_{2,i}^T R_{r,i}^T I_{r,i} R_{r,i} b_{2,i}$ . Cuando la relación de la reducción de engranes es muy grande, esta aproximación es bastante razonable dado que el giro rápido de cada rotor domina en la velocidad angular de los eslabones previos de la cadena cinemática.

# 2.0.9 Modelo del robot con articulación flexible de un grado de libertad

En esta tesis, se propondran distintas técnicas de control para tratar con los problemas de estabilización y seguimiento de salida, de un robót de un simple eslabón y con articulación revoluta flexible, tal estructura se encuentra formulada con el siguiente modelo

matemático.

#### 2.1 Modelo Matemático

En base a la formulación Lagrangiana, el sistema dinámico que describe el comportamiento de un robot de un simple eslabón con articulación rotatoria flexible en un movimiento planar será derivada.

El sistema dinámico  $(\Sigma_M)$  que describe el movimiento del robot ( ver Spong [31]) esta dado por el siguiente modelo matemático

$$(\Sigma_M): \begin{cases} J \dot{q}_m + B \dot{q}_m + k(q_m - q) = u \\ I \ddot{q} + B_l q + mgl \sin(q) - k(q_m - q) = 0 \end{cases}$$
 (2.27)

donde q denota la posición angular del eslabón de longitud l/2 y masa m,  $q_m$  denota la posición angular del rotor del motor. I representa la inercia del eslabón. J es la inercia del motor, k es el coeficiente de rigidez de la articulación flexible. B es la fricción viscosa del motor,  $B_l$  representa la fricción viscosa del eslabón, g es la aceleración gravitacional: y finalmente u es el vector de torques de los actuadores.

El modelo representado por la ecuación (2.27), no toma en cuenta el efecto de la inercia del actuador alrededor de los tres ejes independientes. Sin embargo, se ha demostrado en [31] que la ecuación (2.27) representa de manera apropiada, dentro de un dominio de funcionamiento, la dinámica del manipulador.

El esquema del modelo de robot descrito por (2.27) se ilustra en la Figura 2.2.

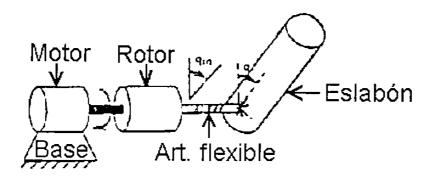


Figura No. 2.2 Modelo del robot manipulador

- $\bullet \ q. \ q_m$ son las coordenadas generalizadas de posición
- $J=3.003~\mathrm{m^2 Kg.}.~B=300.3~\mathrm{Nm Kg.}.~k=100~\mathrm{Nrad/m}$
- $\epsilon = \sqrt{\frac{\alpha}{k}} \approx 10^{-4}$ .  $\alpha = 7.13 \times 10^{-8}$
- $mgl = 0.8 \ Kg \ m^2/seg^2$

.

## Capítulo 3

## Método Geométrico Diferencial

#### 3.0.1 Introducción

En estudios recientes sobre el problema de estabilidad para sistemas no lineales afines en el control, y que estan basados en la geometría diferencial, son temas de intéres por parte de los investigadores en la materia (ver por ejemplo [6],[11],[29]). Esta metodología está basada en los elementos fundamentales de la geometría diferencial, la cual ha permitido el análisis de estabilidad y diseño de controladores mucho mas eficientes que los métodos tradicionales de control clásico. La diferencia fundamental entre las técnicas de control clásico y las que se basan en métodos de geometría diferencial, radica en el hecho que permite obtener resultados más poderosos, además de coadyuvar a comprender mejor los fenómenos que antes eran despreciados o que limitaban su aplicación a solo pequeñas regiones de funcionamiento.

El objetivo del presente capítulo es presentar un algoritmo de control basado en un observador para una clase de sistemas no lineales. los cuales son linealizables por retroalimentación de estado. Además, se propone un observador o sensor computacional, el cual permite estimar las variables de estado, que por razones físicas o económicas, no es posible medir.

En este capítulo se considera un observador para la clase de sistemas no lineales

observable para toda entrada, es decir la propiedad de observabilidad del sistema no se ve afectada por las entradas aplicadas al sistema [ver Teorema 0.13 Apéndice].

Mediante un cambio de coordenadas apropiado es posible, bajo ciertas condiciones estructurales, transformar un sistema no lineal en otro sistema el cual es controlable y que es linealizable por retroalimentación de estado.

# 3.1 Estabilización de una Clase de Sistemas No Lineales

Consideremos la siguiente clase de sistemas no lineales con una entrada y una salida, observables para cualquier entrada y con la siguiente estructura:

$$\Sigma_{NL}: \dot{x} = Ax + B(x) + \Psi(x)u$$
$$y = Cx = x_1$$

donde  $x \in R^n$ ,  $u \in R$ ,  $y \in R$ , y

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \varphi(x) \end{pmatrix}; \Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \psi(x) \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Además, se asume que las funciones  $\varphi$  y  $\psi$  son funciones globalmentes Lipshitz.

Un observador para esta clase de sistemas esta dado por

$$\hat{x} = A \hat{x} + \Phi(\hat{x}) + \Psi(\hat{x})u - S_{\theta}^{-1}C^{T}(C \hat{x} - y)$$

$$(3.1)$$

donde  $S_{\theta}$  es una matriz simétrica definida positiva, solución de la ecuación de Lyapunov

$$\theta S_{\theta} + A^T S_{\theta} + S_{\theta} A = C^T C \tag{3.2}$$

para valores de  $\theta$  suficientemente grandes, donde  $\overset{\wedge}{x}$  es el estimado del estado x.

Los coeficientes de  $(S_{\theta})_{ij}$  son dados por la siguiente expresión

$$(S_{\theta})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} C_{i+j-2}^{j-1}}{\theta^{i+j-1}}$$
(3.3)

donde  $\left(C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}\right)$  que se obtiene a partir de la solución de la ecuación (3.2), es una matriz simétrica definida positiva ( ver [6, 8, 10]).

Como se puede observar el sistema se encuentra en la forma normal que se ha establecido en [5]. También se puede señalar que si u está acotada, entonces la ecuación (3.0) es un observador exponencial para el sistema dado.

Esto es, si se define  $\varepsilon = \hat{x}(t) - x(t)$ , entonces la dinámica del error de estimación esta dada por

$$\varepsilon = \left(A - S_{\theta}^{-1}C^{T}C\right)\varepsilon + \left(\Phi(x) - \Phi(x)\right) + \left(\Psi(x) - \Psi(x)\right)u$$

se puede demostrar que converge exponencialmente a cero cuando el tiempo tiende hacia el infinito (ver [8]). Mas precisamente.  $\forall u \in L^{\infty}(R^{-})$ . existe k > 0 tal que  $\|\varepsilon\| \leq ke^{-\frac{\theta^{*}}{3}}$ . Además  $\psi(x) \neq 0$ :  $\forall x \in R^{n}$ .

Un controlador que linealice y estabilize al sistema  $\Sigma_{NL}$  está dado por

$$u(x) = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_j x_j - \varphi(x)}{\psi(x)}$$
(3.4)

donde los coeficientes  $a_{ij}$  se seleccionan de modo que la matriz (A - BK) sea Hurwitz.

Observación 1: Resultados más generales, tanto para sistemas no lineales en forma triangular, como para sistemas multivariables, existen y pueden ser considerados como una extensión de estos (ver [10] para el caso de una simple salida, y en [17] para el caso de multiples salidas).

#### 3.2 Análisis de Estabilidad en Lazo Cerrado

Se discutirá enseguida el principio de separación, el cual consiste en el estudio de la estabilidad del siguiente sistema en lazo cerrado (ver Figura 3.1).

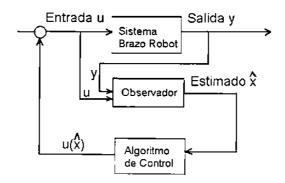


Figura 3.1 Esquema de control en lazo cerrado

En otras palabras, se considera el problema de la estabilidad del sistema aumentado, consistente en el sistema controlado y el observador, cuando la retroalimentación es una función del estado estimado, el cual es proporcionado por el observador.

Para resolver este problema, se considera el siguiente sistema aumentado

$$\sum : \left\{ \begin{array}{l} \hat{x} = A \, \hat{x} + \Phi(\hat{x}) + \Psi(\hat{x})u(\hat{x}) - S_{\theta}^{-1}C^{T}(C | \hat{x} - y) \\ \hat{\varepsilon} = \left(A - S_{\theta}^{-1}C^{T}C\right)\varepsilon + \left(\Phi(\hat{x}) - \Phi(\hat{x} - \varepsilon)\right) + \left(\Psi(\hat{x}) - \Psi(\hat{x} - \varepsilon)\right)u\left(\hat{x}\right) \end{array} \right.$$

aplicando el control u de la ecuación (3.3), y escribiendo en términos de la dinámica del error y del estado estimado, obtenemos

$$\begin{split} & \overset{\wedge}{x} = \overset{\sim}{A} \overset{\wedge}{x} - S_{\theta}^{-1} C^T C \varepsilon. \\ & \varepsilon = \left( A - S_{\theta}^{-1} C^T C \right) \varepsilon + \left( \Phi(\overset{\wedge}{x}) - \Phi(\overset{\wedge}{x} - \varepsilon) \right) + \left( \Psi(\overset{\wedge}{x}) - \Psi(\overset{\wedge}{x} - \varepsilon) \right) u \left( \overset{\wedge}{x} \right) \end{split}$$

donde

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

A continuación se presenta el resultado principal de este capítulo, y el cual se expresa en el siguiente

Teorema 1. Sea u(x) la retroalimentación de estado dada por (3.3). Asumiendo que  $\sup_{x \in R^n} \|u(x)\| < \infty$ . Entonces. el sistema ( $\Sigma$ ) es global y asintóticamente estable.

### Prueba del Teorema 1.

Considere  $V(\hat{x},\varepsilon)=V_1(\varepsilon)+V_2(x)$ .como una función candidata de Lyapunov, donde  $V_1(\varepsilon)=\varepsilon^T S\varepsilon$  y  $V_2(x)=\hat{x}^T P\hat{x}$ , siendo P una matriz simétrica definida positiva tal que  $\tilde{A}^T$  P+P  $\tilde{A}=-I$ , donde I es la matriz identidad y  $\tilde{A}^T$  la transpuesta de la matriz  $\tilde{A}$ .

Ahora se demostrará que el sistema ( $\sum$ ) es globalmente estable.

i) Primero, derivando  $V_1(\varepsilon)$  con respecto al tiempo la función a lo largo de las trayectorias de  $\varepsilon$  , se tiene

$$\frac{d}{dt} (V_1(\varepsilon)) = \frac{d}{dt} \left( \varepsilon^T S_{\theta} \varepsilon \right) = 2\varepsilon^T S_{\theta} \dot{\varepsilon} 
= 2\varepsilon^T S_{\theta} A \varepsilon - 2(C\varepsilon)^2 + 2\varepsilon^T S_{\theta} \left( \Phi(\hat{x}) - \Phi(\hat{x} - \varepsilon) \right) + 2\varepsilon^T S_{\theta} \left( \Psi(\hat{x}) - \Psi(\hat{x} - \varepsilon) \right) u \left( \dot{x} \right) 
= -\theta \varepsilon^T S_{\theta} \varepsilon - (C\varepsilon)^2 + 2\varepsilon^T S_{\theta} \left( \Phi(\hat{x}) - \Phi(\hat{x} - \varepsilon) \right) + 2\varepsilon^T S_{\theta} \left( \Psi(\hat{x}) - \Psi(\hat{x} - \varepsilon) \right) u \left( \dot{x} \right)$$

Denotando por  $\|\varepsilon\|_{S_{\theta}}$  la norma  $(x^T S_{\theta} x)^{\frac{1}{2}}$  y utilizando la desigualdad de Schwarz, se obtiene:

$$\frac{d}{dt}\left(\left(\left\|\varepsilon\right\|_{S_{\theta}}\right)^{2}\right) \leq -\theta\left(\left\|\varepsilon\right\|_{S_{\theta}}\right)^{2} + 2\left\|\varepsilon\right\|_{S_{\theta}}\left\|\Phi(\hat{x}) - \Phi(\hat{x} - \varepsilon)\right\|_{S_{\theta}} + 2\left\|\varepsilon\right\|_{S_{\theta}}\left\|\Psi(\hat{x}) - \Psi(\hat{x} - \varepsilon)\right\|_{S_{\theta}} r_{0}$$

donde

$$(r_0 = \sup_{x \in R^n} ||u(x)||).$$

Ahora, aprovechando la forma particular de  $S_{\theta}$ .  $\Phi$ .  $\Psi$  y el hecho de que  $\Phi$  y  $\Psi$  son globalmente Lipschitz, se obtiene:

$$\left\| \Phi(\hat{x}) - \Phi(\hat{x} - \varepsilon) \right\|_{S_{\theta}} \le \lambda_1 \left\| \varepsilon \right\|_{S_{\theta}}$$

$$\left\|\Psi(\overset{\wedge}{x}) - \Psi(\overset{\wedge}{x} - \varepsilon)\right\| \leq \lambda_2 \left\|\varepsilon\right\|_{S_{\theta}}.$$

para algunas constantes  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  las cúales no dependen de  $\theta.$   $\theta \geq 1.$  Entonces.

$$\frac{d}{dt}\left\|\varepsilon\right\|_{S_{\theta}} \leq -\frac{\theta}{2}\left\|\varepsilon\right\|_{S_{\theta}} - \lambda_1 \left\|\varepsilon\right\|_{S_{\theta}} + \lambda_2 \left\|\varepsilon\right\|_{S_{\theta}} r_0.$$

Seleccionando  $\theta$ tal que  $\frac{\theta}{2}-\lambda_1-\lambda_2r_0=\gamma_\theta>0.$ Resulta que

$$\frac{d}{dt} \|\varepsilon\|_{S_{\theta}} \le -\gamma_{\theta} \|\varepsilon\|_{S_{\theta}}.$$

y en consecuencia

$$\|\varepsilon\|_{S_{\theta}} \le e^{-\gamma_{\theta}t} \|\varepsilon(0)\|_{S_{\theta}}$$

(ii) Ahora, derivando la función  $V_2(\hat{x})$  a lo largo de las trayectorias del sistema, resulta que

$$\begin{split} &\frac{d}{dt}\left(V_{2}(\overset{\cdot}{x})\right) = \frac{d}{dt}\left(\overset{\cdot}{x}^{T} P \overset{\wedge}{x}\right) = 2 \overset{\wedge}{x}^{T} P \overset{\wedge}{x} \\ &= \overset{\wedge}{x}^{T} P \overset{\wedge}{A}\overset{\wedge}{x} + \overset{\wedge}{x}\overset{\wedge}{A} P \overset{\wedge}{x} - 2 \overset{\wedge}{x}^{T} P S_{\theta}^{-1} C^{T} C \varepsilon = -\overset{\wedge}{x}\overset{\wedge}{x} - 2 \overset{\wedge}{x}^{T} P S_{\theta}^{-1} C^{T} C \varepsilon \\ &\leq -\alpha \overset{\wedge}{x}^{T} P \overset{\wedge}{x} - 2 \overset{\wedge}{x}^{T} P S_{\theta}^{-1} C^{T} C \varepsilon = -\alpha V_{2} - 2 \overset{\wedge}{x}^{T} P S_{\theta}^{-1} C^{T} C \varepsilon \end{split}$$

para algunas constantes  $\alpha > 0$ .

Utilizando la desigualdad de Schwarz se obtiene

$$\frac{d}{dt}(V_2) \le -\alpha V_2 + 2\rho_{\theta} \|\varepsilon\|_{S_{\theta}} V_2^{\frac{1}{2}}.$$

$$2\frac{d}{dt}\left(V_2^{\frac{1}{2}}\right) \le -\alpha V_2^{\frac{1}{2}} + 2\rho_{\theta} \|\varepsilon\|_{S_{\theta}}$$

Seleccionando  $\theta$  tal que  $\gamma_{\theta} > \frac{\alpha}{2}$  se completa y finaliza la prueba.

Se ha demostrado la estabilidad del sistema en lazo cerrado para la clase de sistemas considerada, en el caso donde la entrada u está acotada y donde las funciones  $\varphi$  y  $\psi$  son funciones globalmente Lipschitz.

Cuando la entrada u no este acotada, entonces se tiene

Corolario 1. Asumiendo que  $\psi$  es una constante diferente de cero  $y \varphi$  globalmente Lipschitz. Entonces.  $(\sum)$  es global y asintóticamente estable.

Note que para la prueba del Teorema 1, el acotamiento de u(x) tiene que ser usado en el término  $\left(\Psi(\hat{x}) - \Psi(\hat{x} - \varepsilon)\right)u\left(\hat{x}\right)$ , el cual desaparece, y por lo tanto, el sistema  $(\sum)$  toma la forma siguiente

$$\overset{'}{x} = \overset{\sim}{A}\overset{'}{x} - S_{\theta}^{-1}C^{T}C\varepsilon,$$

$$\varepsilon = \left(A - S_{\theta}^{-1}C^{T}C\right)\varepsilon + \Phi(\overset{\cdot}{x}) - \Phi(\overset{\cdot}{x} - \varepsilon).$$

Observación 2: El control u, dado en la ecuación (3.3), estabiliza el sistema en  $\hat{x}=0$ . Dado que el sistema considerado es completamente linealizable por retroalimentación de estado, entonces se puede diseñar una ley de control que siga una señal de referencia  $y_{ref}$  de salida dada ( ver [8]). Esta ley de control está dada por:

$$u(x) = \frac{1}{\Psi(x)} \left( -\Psi(x) + y_R^{(n)} - \sum_{i=1}^{i-1} a_{i-1} \left( x_i - y_R^{(i-1)} \right) \right)$$

Bajo hipótesis similares de acotamiento, como antes, el principio de separación se preserva también para el control de seguimiento de  $y_R$ .

## 3.3 Aplicación al modelo matemático del robot con articulación flexible

La técnica mediante este enfoque geométrico diferencial se aplica al caso de un robot de un simple eslabón el cual tiene flexibilidad en la articulación. y para tal propósito se considera el siguiente modelo matemático descrito por las siguientes ecuaciones dinámicas

$$(\Sigma_{M}): \begin{cases} J \dot{q}_{m} + B \dot{q}_{m} + k(q_{m} - q) = u \\ I \ddot{q} + B_{l} \dot{q} + mgl \sin(q) - k(q_{m} - q) = 0 \end{cases}$$

donde q representa la posición angular del eslabón de longitud l/2. y masa m,  $q_m$  la posición angular del rotor del motor, I representa la inercia del eslabón, J es la inercia del motor, k es el coeficiente de rigidez de la articulación flexible, B es la fricción viscosa del motor,  $B_l$  representa el fricción viscosa del eslabón, g es la aceleración gravitacional; y finalmente, u es el vector de torques del actuador.

Partiendo de las expresiones que describen al sistema  $(\Sigma_M)$ , se define el siguiente cambio de coordenadas :

 $x_1 = q_m$  la posición angular del rotor del motor

 $x_2 = q_m$  la velocidad angular del motor

 $x_3 = k(q - q_m)$  representa la fuerza elástica

 $x_4 = \frac{(q-q_m)}{\overline{\beta}}$  es la variación de la velocidad elástica.

Entonces, se obtiene el siguiente modelo dinámico del robot

$$(\Sigma_{M}): \begin{cases} \dot{x}_{1} = x_{2} \\ x_{2} = \{-B_{l}x_{2} - mgl\sin(x_{1}) + k(x_{3} - x_{1})\}/I \\ \dot{x}_{3} = x_{4} \\ \dot{x}_{4} = \{-Bx_{4} - k(x_{3} - x_{1}) + u\}/J \\ y = x_{1} \end{cases}$$

siendo por nosotros definida la constante  $\overline{\beta}^2 = \frac{1}{k}$ , la cual no deberá confundirse con la constante empleada en la técnica de perturbaciones singulares ( ver Capítulo 5).

Ahora , efectuando un cambio de variable de la forma  $\varsigma = \Phi \left( x \right)$  , se obiene

$$\varsigma_{1} = x_{1} 
\varsigma_{2} = x_{2} = L_{f}x_{1} 
\varsigma_{3} = -\{B_{l}x_{2} + mgl\sin(x_{1}) - k(x_{3} - x_{1})\}/I = L_{f}^{2}x_{1} 
\varsigma_{4} = -\{B_{l}\overset{\bullet}{x_{2}} + mgl(\overset{\bullet}{x_{1}})\cos(x_{1}) - k(\overset{\bullet}{x_{3}} - \overset{\bullet}{x_{1}})\}/I = L_{f}^{3}x_{1}$$

Puede ser fácilmente verificado que la matriz Jacobiana de  $\Phi(x)$  con respecto a  $\varsigma$ , es invertible para toda  $\varsigma$   $\epsilon$   $R^4$ .

Entonces, el sistema ( $\Sigma_M$ ) se transforma en el siguiente sistema no lineal linealizable por retroalimentación, el cual está dado por

$$\dot{\varsigma}_1 = \varsigma_2 
\dot{\varsigma}_2 = \varsigma_3 
\dot{\varsigma}_3 = \varsigma_4 
\dot{\varsigma}_4 = \alpha(\varsigma) + \beta(\varsigma)u$$

donde

$$\alpha(\varsigma) = -I^{-2}B\left\{-I^{-1}B\left(R_{1}\right) - mglx_{2}\cos(x_{1}) + k(x_{4} - x_{2})\right\} +$$

$$+I^{-1}mglx_{2}^{2}\sin(x_{1}) - I^{-2}mglR_{1}\cos(x_{1}) - I^{-1}k\left\{I^{-1}R_{1} + J_{m}^{-1}B_{m}x_{4} + k\left(x_{3} - x_{1}\right)\right\}$$

$$y$$

$$\beta\left(\varsigma\right) = I^{-1}kJ_{m}^{-1}$$

$$\cos$$

$$R_{1} = -B_{l}x_{2} - mgl\sin(x_{1}) + k(x_{3} - x_{1})$$

Construyendo un observador de alta ganancia para el sistema anterior, se tiene el siguiente sistema ( ver [18] )

Con el observador de estado anterior se puede obtener la estimación de las variables no medibles. Entonces, la expresión del control aplicado es de la forma:

$$u = \frac{1}{\beta(\varsigma)} \begin{pmatrix} -\alpha(\varsigma) - a_1 (x_1 - y_{ref}) - a_2 (x_2 - \mathring{y}_{ref}) \\ -a_3 (x_2 - \mathring{y}_{ref}) - a_4 (x_2 - \mathring{y}_{ref}) \end{pmatrix}$$

seleccionando los polos , se obtienen los siguientes valores para las  $a_i$ :  $a_1=256, a_2=256, a_3=96$   $a_3=96, y$   $a_4=16$ 

### 3.3.1 Resultados de Simulación

En esta sección, se presenta los resultados en simulación de un algoritmo de control basado en un observador.

Para llevar a cabo esta aplicación, se consideraron los siguientes valores de las condiciones iniciales.

Las condiciones iniciales para el sistema fueron seleccionadas como:  $x_1(0) = 0.5$ ,  $x_2(0) = 0.5$ ,  $x_3(0) = 0$ ,  $x_4(0) = 0.5$ . Para el observador, las condiciones arbitrarias  $\hat{\zeta}_1(0) = 0.02$ .  $\hat{\zeta}_2(0) = 0.01$ ,  $\hat{\zeta}_3(0) = 0.002$ ,  $\hat{\zeta}_4(0) = 0.003$ . El parámetro de sintonización del observador fue seleccionado como  $\theta = 3$ .

La señal de referencia para la trayectoria deseada  $y_R(t)$  en la posición del motor, se

estableció como:  $y_R(t) = \sin(t)$ .

Se puede apreciar en la Figura (3.2) que para el controlador propuesto basado en el observador, el estado  $x_1$  sigue a la trayectoria de referencia  $y_R(t)$  con un excelente desempeño, a partir de 6 segundos, mientras que en la Figura (3.3) se muestra la convergencia del estado  $x_2$  hacia  $d(y_R(t))/dt$ . En la Figura (3.4), se ilustra el comportamiento del controlador propuesto u, mientras que en las Figuras (3.5) y (3.6), se muestra las variables de estado  $x_1$  y  $x_2$  con su respectivo estimado proporcionado por el observador.

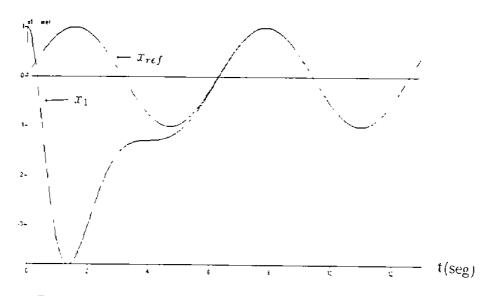


Figura 3.2 El estado  $x_1$  y la señal de referencia  $x_{ref}$ 

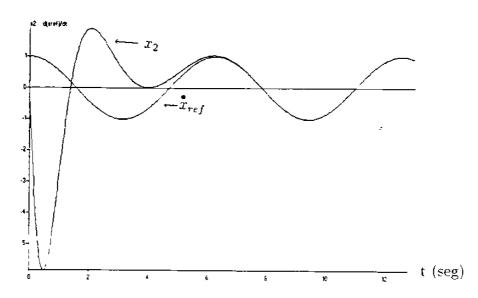


Figura 3.3 El estado  $x_2$ y la señal  $\overset{\bullet}{x}_{ref}$ 

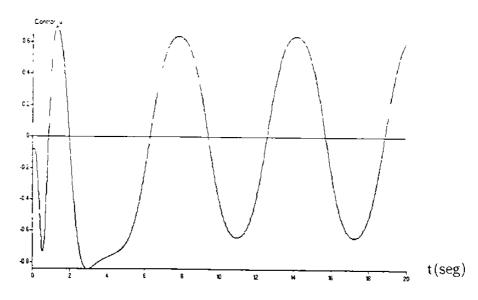


Figura 3.4 Control u

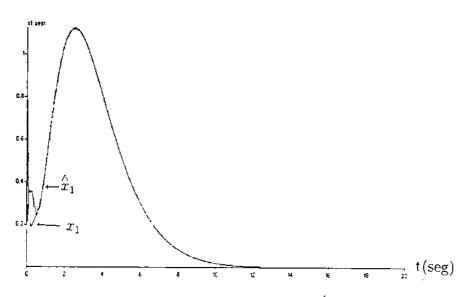


Figura 3.5 Estado  $x_1$  y su estimado  $x_1^{\prime}$ 

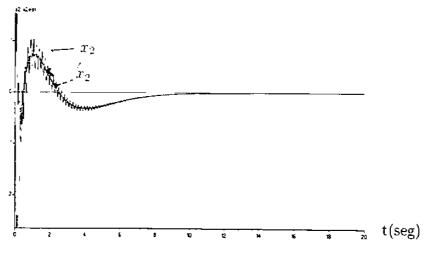


Figura 3.6 Estado  $x_2$ y su estimado  $\hat{x}_2$ 

### 3.3.2 Conclusiones

En este capítulo, se propuso un controlador basado en un observador de alta ganancia para una clase de sistemas no lineales. el cual es linealizable por retroalimentación de salida. Los resultados se aplicaron al modelo del robot flexible.

## Capítulo 4

## Método Algebraico Diferencial

### 4.1 Introducción

Varias técnicas en el diseño de controladores han sido propuestas, desde diferentes perspectivas, para la estabilización de sistemas no-lineales. Recientemente, un número considerable de trabajos han estudiado el problema del control de robots manipuladores con flexibilidad en la articulación. Este problema tiene un interés tanto práctico como téorico. Porque, desde el punto de vista práctico, se debe considerar el efecto de la elasticidad en el robot para diseñar las leyes de control: y desde el punto de vista téorico, el número de grados de libertad es dos veces el número de acciones de control, y las propiedades de igualamiento entre las no-linealidades y las entradas se pierde (ver [6], [29]).

En la literatura, se puede encontrar diferentes esquemas de control para sistemas nolineales. Muchos de estos esquemas utilizan controladores por retroalimentación estática. Su diseño está basado en técnicas de control adaptivo, perturbaciones singulares, teoría de control no-lineal, y esquemas de control de Lyapunov basados en la energía, o mas recientemente en esquemas basados en desacoplamiento, backstepping, o pasividad ( ver [6], [29]).

Por otro lado, un número considerable de investigadores han estudiado los problemas de estabilidad y seguimiento de salida de sistemas dinámicos usando hasta hoy la más

común de las herramientas matemáticas en la teoría de control de sistemas no-lineales: Geometría Diferencial. Sin embargo, si las no linealidades involucradas en el sistema son todas polinomiales, entonces existen métodos del algebra diferencial que pueden ser utilizados en su lugar. Ha sido mostrado por M. Fliess, que el algebra diferencial es una herramienta natural para tratar con sistemas polinomiales.

En esta técnica de control tratamos los problemas de estabilidad y seguimiento de salida para sistemas no-lineales, desde la estrategia de linealización del error por retroal-innentación dinámica. Este enfoque está basado en la forma canónica de observabilidad generalizada (FCOG) y la forma canónica de controlabilidad generalizada (FCCG) de Fliess, las cuales son fáciles consecuencias del teorema del elemento primitivo diferencial (ver ref. [15, 16, 28]). Recordando que, desde el comportamiento externo del sistema, la forma (FCOG) de Fliess es una descripción generalizada de los estados del sistema donde en general, las ecuaciones de estado dinámicas son dependientes del control, incluyendo un número finito de derivadas del control con respecto al tiempo.

El controlador que se propone en esta tesis es obtenido por medio de linealización exacta de la dinámica del error de seguimiento. Este controlador es una función del vector del error de seguimiento el cual es, en general, parcialmente medible, por lo que es necesario estimarlo. Un observador de alta ganancia es utilizado para estimar el error de seguimiento para implementar nuestro controlador. Finalmente, para garantizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado, se presenta un análisis de estabilidad.

Este capítulo está organizado como sigue: La sección 4.2, introduce algunas definiciones y notaciones. Los problemas de estabilización y seguimiento de salida por medio de un observador exponencial, utilizando el enfoque algebraico diferencial, son tratados en la sección 4.3. En la sección 4.4, se introduce un modelo matemático, para describir el comportamiento de un brazo manipulador con flexibilidad en la articulación. En la sección 4.5 los resultados de las simulaciones usando nuestro esquema de control son presentados.

## 4.2 Formas canónicas de observabilidad y controlabilidad generalizadas.

Comenzamos esta técnica de control, introduciendo algunas definiciones y notaciones útiles en este capítulo ( ver bibliografía [13, 15, 16] ).

**Definición 1:** Una extensión del campo diferencial L/K es dado por dos campos vectoriales K y L, tales que : i) K es un subcampo de L: ii) la derivación de K es la restricción para K de la derivación de L.

**Definición 2:** Sea u un escalar diferencial indeterminado y sea K un campo diferencial, con derivación denotada por " $\frac{d}{dt}$ ".

Una dinámica  $G_{+}K\langle u\rangle$  es definida como una extensión finita algebráica generada diferencialmente del campo diferencial  $K\langle u\rangle$ , donde  $K\langle u\rangle$  denota el campo diferencial generado por K v los elementos de un conjunto finito  $u=(u_1,u_2,...,u_m)$  de cantidades diferenciales.

**Definición 3:** Considere un subconjunto  $\{u,y\}$  de G en una dinámica G/K u Un elemento  $x_0$  en G es llamado algebraicamente observable con respecto a  $\{u,y\}$  si este es algebraico sobre K(u,y). Esto significa que  $x_0$  puede ser expresado como una fure ón algebraica de las componentes de  $\{u,y\}$  y un número finito de sus derivadas con respecto al tiempo. Por esto, un estado  $x^*$  es llamado algebraicamente observable si y solo si este es algebraicamente observable con respecto a  $\{u,y\}$ .

**Definición 4:** Una dinámica  $G/K\langle u \rangle$  con variable de salida y en G es llamada algebraicamente observable si y solo si cualquier estado (generalizado) también lo es.

De acuerdo a el teorema del elemento primitivo diferencial existe un elemento  $\bar{\xi} \in G$  tal que  $G = K\langle u, \bar{\xi} \rangle$ . El grado de trascendencia n de  $G/K\langle u \rangle$  (ver [10.13.15]), el cual es igual a la dimensión del sistema, y es el entero mas pequeño  $\bar{\xi}$  tal que  $\frac{d^n \bar{\xi}}{dt^n}$  es  $K\langle u \rangle$ -algebraicamente dependiente en  $\left\{\bar{\xi}, \frac{d\bar{\xi}}{dt}, \cdots, \frac{d^{n-1}\bar{\xi}}{dt^{n-1}}\right\}$  la cual es una base trascendente de  $G/K\langle u \rangle$  (ver [13, 16, 17]).

Definiendo el siguiente cambio de variable de la forma  $\xi_i = \frac{d^{n-1}\bar{\xi}}{dt^{n-1}}; 1 \leq i \leq n$ . Es claro que  $\{\xi_i\}_{i=1}^n$  es también una base trascendente de  $G/K\langle u\rangle$ . A partir de aqui, una generalización no-lineal de la forma canónica del controlador es dada por

$$(\Sigma_A) \cdot \begin{cases} \frac{d\xi_i}{dt} = \xi_{i+1}, \ 1 \le i \le n-1 \\ D\left(\frac{d\xi_n}{dt}, \xi, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^n u}{dt^n}\right) = 0 \end{cases}$$

$$(4.1)$$

donde  $D\left(\frac{d\xi_n}{dt}, \xi, u, \frac{du}{dt}, \cdots, \frac{d\gamma_n}{dt^{\gamma}}\right)$  es un polinomio con coeficientes en K. Si uno puede resolver localmente para  $\frac{d\xi_n}{dt}$  en la segunda ecuación de  $(\Sigma_A)$ , uno obtiene un sistema explícito de ecuaciones diferenciales de primer orden, conocido como la Forma Canónica de Controlabilidad Generalizada (FCCG).

$$\left(\sum_{FCCG}\right) \cdot \begin{cases} \frac{d\xi_{i}}{dt} = \xi_{i+1}, \ 1 \le i \le n-1\\ \frac{d\xi_{n}}{dt} = L_{c}\left(\xi, u, \frac{du}{dt}, \cdots, \frac{d^{n}u}{dt^{n}}\right) \end{cases}$$

para  $\gamma$  un entero estrictamente positivo.

Ahora, sea y el escalar de salida y sea n el entero mas pequeño tal que  $\frac{d^ny}{dt^n}$  es algebraicamente dependiente en

$$\left\{y, \frac{dy}{dt}, \cdots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}, u, \frac{du}{dt}, \cdots, \frac{d^{\nu}u}{dt^{\nu}}\right\}$$

es decir significa que:

$$\frac{d^n y}{dt^n} = -L_o\left(y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^n u}{dt^n}\right).$$

Usando el siguiente cambio de variable  $\eta_i = \frac{d^i \eta}{dt^i}$ : para  $1 \le i \le n$ , entonces uno puede escribir una representación local del espacio de estado, la cúal tiene la forma especial de una Forma Canónica de observabilidad Generalizada (FCOG):

$$(\Sigma_{GOCF}): \begin{cases} \frac{d\eta_i}{dt} = \eta_{i+1}, & 1 \le i \le n-1\\ \frac{d\eta_n}{dt} = -L_o\left(\eta, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^\nu u}{dt^\nu}\right)\\ y = \eta_1 \end{cases}$$

para  $\nu$  un entero positivo.

# 4.3 Un enfoque algebraico diferencial para estabilización asintótica y seguimiento de salida.

Considere el siguiente sistema no-lineal

$$(\Sigma_{NL}): \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases}$$

$$(4.2)$$

donde  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ .  $(u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$ .  $y \in \mathbb{R}$ .  $f \mid y \mid h$  son asumidos como polinomios en sus argumentos. El sistema (4.1) se supone universalmente observable (ver [13, 15]) con comportamiento externo descrito por ecuaciones de la forma

$$\frac{d^n y}{dt^n} = -L_o\left(y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^n u}{dt^n}\right)$$

donde  $L_o$  es un polinomio de sus argumentos.

Definiendo localmente  $\eta_i = \frac{d^i - 1y}{dt^{i-1}}$ .  $1 \le i \le n$ , nosotros obtenemos una forma explícita del sistema (4.1) de la manera siguiente:

$$\dot{\eta}_i = \eta_{i+1}, \qquad 1 \le i \le n-1$$
 (4.1)

$$\dot{\eta}_n = -L_o\left(\eta, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^{\gamma}u}{dt^{\gamma}}\right)$$
 (4.2)

Ahora, sea  $y_R(t)$  una función de referencia de salida prescrita la cual es diferenciable al menos n veces. El problema de seguimiento de salida asintótico consiste en buscar un controlador dinámico descrito por una ecuación diferencial ordinaria escalar variante en el tiempo, la cual es posiblemente implícita, y que tiene como salida:

a) La señal de referencia de salida  $y_R(t)$ , junto con un número finito de sus derivadas con respecto al tiempo

$$\frac{d^i y_R}{dt^i}$$
:  $1 \le i \le n$ 

Ĭ,

b) Las coordenadas de estado  $\eta_i$  de el sistema.

El controlador es supuesto para producir una función escalar u, lo cual obliga a la salida y para que tenga convergencia asintótica a la señal de referencia  $y_R(t)$ .

Definimos ahora una función de error de seguimiento de salida e(t) como la diferencia entre y(t) y la señal  $y_R(t)$ :

$$e(t) = y(t) - y_R(t) \tag{4.3}$$

Por definición,  $\eta_i$  es igual a la (i-1)-esima derivada de tiempo de y(t), esto es  $\eta_i = \frac{d^i y}{dt^i}$ ; para  $1 \le i \le n$ . Entonces, nosotros tenemos lo siguiente

$$\frac{d^{i}e(t)}{dt^{i}} = \eta_{i+1} - \frac{d^{i}y_{R}(t)}{dt^{i}}; \ 1 \le i \le n-1$$
 (4.4)

$$\frac{d^n e(t)}{dt^n} = \frac{d\eta_n}{dt} - \frac{d^n y_R(t)}{dt^n} = -L_o\left(\eta, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^\nu u}{dt^\nu}\right) - \frac{d^n y_R(t)}{dt^n}$$
(4.5)

Sea  $p(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i$  un polinomio Hurwitz. Por disponer de una dinámica autónoma lineal invariante en el tiempo para la función del error de seguimiento:

$$\frac{d^n e(t)}{dt^n} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{d^i e(t)}{dt^i} = 0$$
 (4.6)

se sigue que las ecuaciones (4.5). (4.6) y (4.7) pueden ser reescritas como

$$\frac{d\eta_n}{dt} - \frac{d^n y_R(t)}{dt^n} + \sum_{i=1}^n a_{i-1} \left( \eta_i - \frac{d^{i-1} y_R(t)}{dt^{i-1}} \right) = 0$$
 (4.7)

esto es

$$-L_o\left(\eta, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^{\nu}u}{dt^{\nu}}\right) = \frac{d^n y_R(t)}{dt^n} - \sum_{i=1}^n a_{i-1} \left(\eta_i - \frac{d^i y_R(t)}{dt^i}\right)$$
(4.8)

Observación 1. La ecuación diferencial escalar variante en el tiempo (4.9) implicitamente define u, la cual da estabilización asintótica hacia cero para el error de seguimiento, de una manera enteramente prescrita por el diseño del conjunto de coeficientes constantes  $\{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\}$ .

Ahora definiendo  $e_i=\frac{d^{r-1}e(t)}{dt^{r-1}}$ , para  $1\leq i\leq n$ , como las componentes de un vector de error  $\overline{\epsilon}=Col\left(e_1,e_2,\cdots,e_n\right)$ , nosotros obtenemos

$$\frac{dc_i}{dt} = \epsilon_{i-1}. \quad 1 \le i \le n-1 \tag{4.9}$$

$$\frac{de_n}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} a_{i-1}e_i \tag{4.10}$$

ó bién en forma compacta

$$\frac{d\overline{e}}{dt} = Fe \tag{4.11}$$

donde

$$-L_o\left(\psi_R(t) + \overline{e}, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^{\nu}u}{dt^{\nu}}\right) - \frac{d^n y_R(t)}{dt^n} = -\sum_{i=1}^n a_{i-1}e_i$$
 (4.12)

con el vector de señales de referencia dado por

$$\psi_R(t) = Col\left(y_R, \frac{dy_R}{dt}, \cdots, \frac{d^{n-1}y_R}{dt^{n-1}}\right);$$

y

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

El origen, e = 0, es un punto de equilibrio para la dinámica del error de seguimiento (4.10).(4.11). Nosotros asumimos que u de (4.13) está definida para todo tiempo, y está acotada para todas las funciones acotadas  $y_R(t)$  las cuales también exhiben derivadas acotadas. Note que el controlador por retroalimentación dinámica depende sobre el vector de estado de la dinámica del error de seguimiento, la cual deberá ser estimada por medio de un observador.

Ahora, escribiendo el sistema (4.10) como sigue:

$$\frac{de}{dt} = Ee + \varphi\left(\epsilon, y_R, \frac{dy_R}{dt}, \dots, \frac{d^n y_R}{dt^n}, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^\nu u}{dt^\nu}\right)$$

donde los elementos de la matriz E son dados por

$$E_{ij} = \delta_{i,j-1} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j-1 \\ 0 & \text{si } i \neq j-1 \end{cases}$$

$$\varphi\left(e, y_R, \dots, \frac{d^n y_R}{dt^n}, u, \dots, \frac{d^\nu u}{dt^\nu}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -L_o\left(\psi_R(t) + e, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^\nu u}{dt^\nu}\right) - \frac{d^n y_R(t)}{dt^n} \end{pmatrix}$$

Entonces, la estimación del error de seguimiento  $e(t) = y(t) - y_R(t)$  es dado por un observador exponencial ( $\acute{\mathbf{O}}$ ) de la forma

$$(\acute{O}): \begin{cases} \frac{d\mathring{c}}{dt} = E\hat{e} + \varphi\left(\hat{e}(t), y_R, \frac{dy_R}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y_R}{dt^{n-1}}, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^{\nu}u}{dt^{\nu}}\right) \\ -\Delta_{\theta}^{-1}[C\hat{e}(t) - e(t)] \end{cases}$$

donde  $\Delta_{\theta} = diag\left(\theta, \theta^{2}, \theta^{3}, \dots, \theta^{n}\right)$ , para algún  $\theta > 0$  y  $K = (K_{1}, K_{2}, \dots, K_{n})^{T}$ . K es seleccionado de tal forma que  $\sigma\left(A - KC\right) \subset R^{-}$  (detalles adicionales pueden encontrarse en la bibliografía [17, 29]).

Sea

$$\sigma(u_{\epsilon}, y_{R}(t), \hat{e}) = -L_{o}\left(\psi_{R}(t) + \hat{e}, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^{\nu}u}{dt^{\nu}}\right) - \frac{d^{n}y_{R}(t)}{dt^{n}} + \sum_{i=1}^{n} a_{i-1}\hat{e}_{i} = 0$$

y  $u_{\epsilon}$  el control resultante basado en el observador desde  $\sigma(|u_{\epsilon},y_{R}(t),\hat{e}(t))=0$ .

La dinámica de  $\hat{e}(t)$  y  $\epsilon_0(t) = \hat{c}(t) - e(t)$ , (el error de seguimiento estimado y el error de observación, respectivamente), son dados por:

$$\begin{cases} \frac{d\hat{e}}{dt} = E\hat{e}(t) + \varphi\left(\hat{e}(t), y_R, \frac{dy_R}{dt}, \dots, \frac{d^n y_R}{dt^n}, u_{\hat{e}}, \frac{du_{\hat{e}}}{dt}, \dots, \frac{d^\nu u_{\hat{e}}}{dt^\nu}\right) \\ -\Delta_\theta K[C\hat{e}(t) - e_1(t)] \\ \frac{d\epsilon_0(t)}{dt} = (E - \Delta_\theta KC) \,\epsilon_0(t) + \delta\Phi(\epsilon_0(t), \hat{e}(t)) \end{cases}$$

El sistema anterior puede reescribirse mediante un cambio de variable en el siguiente

sistema.

$$(\Sigma_T): \begin{cases} \frac{d\hat{e}(t)}{dt} = F\hat{e} - \theta^{-1}\Delta_{\theta}K \widetilde{\epsilon}_0 \\ \frac{d\widetilde{\epsilon}_0(t)}{dt} = \theta \left(E - KC\right) \widetilde{\epsilon}_0 \left(t\right) + \Delta_{\theta}^{-1}\delta\Phi(\Delta_{\theta}^{-1} \widetilde{\epsilon}_0 \left(t\right), \hat{e}(t)) \end{cases}$$

donde

$$\widetilde{\epsilon}_0 = \Delta_{\theta}^{-1} \epsilon_0$$
.  $\Delta_{\theta}^{-1} E \Delta_{\theta} = \theta E$ .  $C \Delta_{\theta} = \theta C$ .  $\Delta_{\theta}^{-1} = diag(\theta^{-1}, \theta^{-2}, \dots, \theta^{-n})$ 

У

$$\delta\Phi(\epsilon_0, \hat{e}) = \begin{array}{c} \varphi\left(\hat{e}, y_R, \frac{dy_R}{dt}, \cdots, \frac{d^n y_R}{dt^n}, u_{\hat{e}}, \frac{du_{\hat{e}}}{dt}, \cdots, \frac{d^n u_{\hat{e}}}{dt^n}\right) \\ -\varphi\left(e, y_R, \frac{dy_R}{dt}, \cdots, \frac{d^n y_R}{dt^n}, u_{\hat{e}}, \frac{du_{\hat{e}}}{dt}, \cdots, \frac{d^n u_{\hat{e}}}{dt^n}\right) \end{array}$$

Introduciremos las siguientes

#### Suposiciones:

- **A1)**  $\delta\Phi(\Delta_{\theta} \widetilde{\epsilon}_{0}(t), \hat{\epsilon}(t))$  is globalmente Lipschitz en  $R^{n}$  con respecto a  $\Delta_{\theta} \widetilde{\epsilon}_{0}(t)$  y uniformemente con respecto a  $\hat{\epsilon}(t)$ .
- **A2)** Las señales  $u_{\ell}$ ,  $y_R(t)$  y sus derivadas de orden superior hasta n al menos estan acotadas.

Entonces, nuestro principal resultado puede establecerse de la siguiente manera:

Teorema 1: Considere  $u_{\ell}$  la retroalimentación dinàmica de estado linealizante la cual es solución de  $\sigma(u_{\ell}, y_R(t), \dot{c}(t)) = 0$ . Supongamos ademas que A1 y A2 son satisfechas. Entonces el sistema en lazo cerrado  $(\Sigma_T)$  con control  $u_{\ell}$  es globalmente asintóticamente estable (ver [11]).

## 4.4 Controlador dinámico basado en el observador para manipuladores con articulación flexible

En esta sección del Capítulo, nosotros aplicamos los resultados obtenidos en las secciones anteriores para tratar con los problemas de estabilización y seguimiento de salida, de un brazo robót de un simple eslabón y con articulación flexible.

#### Modelo Matemático

Basandonos en la formulación Lagrangiana, el sistema dinámico que describe el comportamiento de un brazo robót de un simple eslabón y con articulación flexible es obtenida, desde el Capítulo 3.

Entonces, el modelo dinámico  $(\Sigma_M)$  del brazo robot manipulador, representado en estas coordenadas resulta ser de la siguiente forma:

$$(\Sigma_{M}): \begin{cases} x_{1} = x_{2} \\ \dot{x}_{2} = -k_{5}x_{2} + k_{1}x_{3} + k_{1}u \\ \dot{x}_{3} = \frac{x_{4}}{\overline{3}} \\ \dot{x}_{4} = \{-k_{2}k_{3}\sin(\overline{\beta}^{2}k_{3} + x_{1}) - k_{4}x_{3} - k_{7}x_{2} - k_{6}\overline{\beta}x_{4} - k_{1}u\}/\overline{\beta} \end{cases}$$

$$(4.13)$$

donde  $\beta = \frac{1}{k}$ , es una constante, la cual no deberá confundirse con la constante utilizada en la técnica de perturbaciones singulares.

En el modelo del sistema  $(\Sigma_M)$ , las constantes  $k_i$ , son las siguientes:  $k_1=\frac{1}{J}$ :  $k_2=\frac{1}{I}$ :  $k_3=mgl$ :  $k_4=k_1+k_2$ :  $k_5=\frac{B}{J}$ :  $k_6=\frac{B}{I}$ :  $k_7=k_6-k_5$ :  $u=\tau$ .

Observación 2: El sistema  $(\Sigma_M)$  tiene diferente grado relativo, cuando la salida del sistema y es considerada como la posición del motor  $x_1$ , en lugar de la posición del eslabón  $z = x_1 + \overline{\beta}x_3$ .

Esto es debido a las siguientes consideraciones:

1) Si nosotros consideramos z como una salida, el sistema resulta dentro de un sistema con grado relativo igual a 4. Entonces, el sistema resultante puede ser exactamente

linealizado por medio de una retroalimentación estática. Esta retroalimentación de estado es una función de la posición, velocidad, aceleración, y "sacudida"  $\begin{pmatrix} y \end{pmatrix}$ , las cuales son muy difíciles de medir en la práctica.

2) Utilizando la posición del motor  $x_1$  como la salida del sistema, esta resulta ser de grado relativo 2. Por esta razón, la aplicación de nuestra técnica nos permite obtener un controlador dinámico de segundo orden (detalles adicionales pueden ser encontrados en la bibliografía [29]).

Cuando nosotros consideramos el sistema linealizado en el punto de operación. la dinámica cero sigue siendo de fase mínima. Sin embargo, esta propiedad de la dinámica cero es una función del parámetro B. El hecho de que  $B \neq 0$  es crucial para que el robot flexible esté en fase mínima. Si B=0, nuestra técnica no puede ser aplicada, y la dinámica cero resulta ser oscilatoria. En la práctica, esta condición es verificada para muchos manipuladores mecánicos.

La siguiente transformación de coordenadas dependientes de la entrada nos permite obtener una forma canónica de observabilidad generalizada (FCOG).

Definiendo el elemento primitivo diferencial  $\eta_1=x_1$  las siguientes relaciones se cumplen

$$y = \eta_1 = x_1$$

$$y = \eta_2 = x_2$$

$$y = \eta_3 = -k_5 x_2 + k_1 x_3 + k_1 u$$

$$\dot{y} = \eta_4 = (k_5)^2 x_2 - k_1 k_5 x_3 + k_1 \overline{\beta}^{-1} x_4 + k_1 k_5 u + k_1 u$$
(4.14)

 $\{y,y,y,\overline{y}\}$  es una base de trascendencia de  $R\langle u,y\rangle/R\langle u\rangle$  la cual representa la dinámica de la ecuación (4.2). El grado de trascendencia de  $R\langle u,y\rangle/R\langle u\rangle$  es dado

por  $d^0tr\left(R\langle u,y\rangle/R\langle u\rangle\right)=4$  y su transformación inversa correspondiente es

$$x_{1} = \eta_{1}$$

$$x_{2} = \eta_{2}$$

$$x_{3} = (\eta_{3} + k_{5}\eta_{2} - k_{1}u)/k_{1}$$

$$x_{4} = \overline{\beta}(\eta_{4} - (k_{5})^{2}x_{2} + k_{1}k_{5}x_{3} - k_{1}k_{5}u - k_{1}u) \overline{\beta}/k_{1}. \overline{\beta} \neq 0$$

$$(4.15)$$

La matriz Jacobiano de la transformación de coordenadas de estado (4.3) es dada por.

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -k_5 & k_1 & 0 \\ 0 & (k_5)^2 & -k_1 k_5 & k_1 \overline{\beta}^{-1} \end{pmatrix}$$

la cual es claramente no singular si $\overline{\mathcal{J}}$ es diferente de cero. La forma canónica de controlabilidad generalizada (FCCG) para el sistema (4.2) es entonces.

$$\begin{cases} 
\dot{\eta}_{1} = \eta_{2} \\
\dot{\eta}_{2} = \eta_{3} \\
\dot{\eta}_{3} = \eta_{4} \\
\eta_{4} = -k_{1}k_{2}k_{3}\overline{\beta}^{-2}\sin(\overline{\beta}^{2}[k_{5}\eta_{2} - k_{1}u + \eta_{3}]/k_{1} + \eta_{1}) - \overline{\beta}^{-2}\{k_{1}k_{7} + k_{4}k_{5}\}\eta_{2} \\
-\{\frac{k_{4}}{\overline{\beta}^{2}} + k_{5}k_{6}\}\eta_{3} - \{k_{5} + k_{6}\}\eta_{4} - \frac{k_{1}}{\overline{\beta}^{2}}\{k_{4} - k_{1}\}u + k_{1}k_{6}\frac{du}{dt} + k_{1}\frac{d^{2}u}{dt^{2}} \\
y = \eta_{1}
\end{cases}$$
Finalmenta, al comportamiento externo del sistema es dado por

Finalmente, el comportamiento externo del sistema es dado por

$$\frac{d^4y}{dt^4} + \{k_5 + k_6\} \frac{d^3y}{dt^3} + \{\frac{k_4}{3^2} + k_5k_6\} \frac{d^2y}{dt^2} + \overline{\beta}^{-2} \{k_1k_7 + k_4k_5\} \frac{dy}{dt} 
+ k_1k_2k_3\overline{\beta}^{-2} \sin(\overline{\beta}^2 [k_5\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} - k_1u]/k_1 + y) + \frac{k_1}{\overline{\beta}^2} \{k_4 - k_1\}u - k_1k_6\frac{du}{dt} - k_1\frac{d^2u}{dt^2} = 0$$
(4.17)

Ahora, sea  $y_R(t)$  una trayectoria de referencia de salida deseada de la posición angular. Derivando la referencia de salida deseada  $y_R(t)$  hasta la cuarta derivada, nosotros podemos aplicar el controlador dinámico

$$-L_o\left(\eta, u, \frac{du}{dt}, \cdots, \frac{d^{\gamma}u}{dt^{\gamma}}\right) = \frac{d^n y_R(t)}{dt^n} - \sum_{i=1}^n a_{i-1}\left(\eta_i - \frac{d^{i-1}y_R(t)}{dt^{i-1}}\right)$$

 $con n = 4 y \gamma = 2.$ 

Definiendo el error de seguimiento como  $e(t) = x_1 - y_R(t)$ , uno obtiene basandose en los resultados de la sección 3, el sistema de ecuaciones diferenciales que describen la dinámica del error de seguimiento como:

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = E\mathbf{e} + \varphi \left( e_1, e_2, e_3, \epsilon_4, y_R, \frac{dy_R}{dt}, \frac{d^2y_R}{dt^2}, \frac{d^3y_R}{dt^3}, \frac{d^4y_R}{dt^4}, u, \frac{du}{dt}, \frac{d^2u}{dt^2} \right), \ y_{TE} = e_1 \quad (4.18)$$

donde

$$E = \delta_{i,j-1} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j-1 \\ 0 \text{ si } i \neq j-1 \end{cases}$$

V

$$\varphi\left(\mathbf{e}, y_R, \dots, \frac{d^4 y_R}{dt^4}, u, \frac{du}{dt}, \frac{d^2 u}{dt^2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_o\left(\psi_R(t) + \mathbf{e}, u, \frac{du}{dt}, \frac{d^2 u}{dt^2}\right) - \frac{d^4 y_R(t)}{dt^4} \end{pmatrix}$$

Dado que el sistema (4.7) es observable nosotros proponemos el siguiente observador no-lineal exponencial ( ver bibl.[23]) para la estimación del error de seguimiento

$$\frac{d\widehat{e}}{dt} = E\widehat{e} + \varphi\left(\widehat{e}(t), y_R, \cdots, \frac{d^4y_R}{dt^4}, u_{\widehat{e}}, \frac{du_{\widehat{e}}}{dt}, \frac{d^2u_{\widehat{e}}}{dt^2}\right) - \Delta_{\theta}K\left[\widehat{Ce}(t) - e_1(t)\right]$$
(4.19)

La linealización exacta de la dinámica del error de seguimiento puede ser ahora completada, igualando la última ecuación diferencial del sistema (4.7) a una expresión lineal invariante en el tiempo en las coordenadas del error (ver [2])

$$-L_o\left(\upsilon_R(t) + e. u. \frac{du}{dt}, \frac{d^2u}{dt^2}\right) = \frac{d^4y_R(t)}{dt^4} - \sum_{i=1}^4 a_{i-1}e_i$$

donde

$$-L_{o}\left(\psi_{R}(t) + \mathbf{e}. \, u. \, \frac{du}{dt}, \frac{d^{2}u}{dt^{2}}\right) = -k_{1}k_{2}k_{3}\overline{\beta}^{-2}\sin(\overline{\beta}^{2}/k_{1}[k_{5}\left(e_{2} + \frac{dy_{R}}{dt}\right) - k_{1}u + e_{3} + \frac{d^{2}y_{R}}{dt^{2}}] + e_{1} + y_{R}$$

$$-\overline{\beta}^{-2}(k_{1}k_{7} + k_{4}k_{5})\left\{e_{2} + \frac{dy_{R}}{dt}\right\} - \left\{k_{4}/\overline{\beta}^{2} + k_{5}k_{6}\right\}\left\{e_{3} + \frac{d^{2}y_{R}}{dt^{2}}\right\}$$

$$-\left(k_{5} + k_{6}\right)\left\{e_{4} + \frac{d^{3}y_{R}}{dt^{3}}\right\} + k_{1}/\overline{\beta}^{2}\left\{k_{4} - k_{1}\right\}u + k_{1}k_{6}\frac{du}{dt} + k_{1}\frac{d^{2}u}{dt^{2}}\right\}$$

$$(4.20)$$

Entonces, escribiendo en las coordenadas originales la ecuación del controlador dinámico, se sigue que:

$$\frac{d^{2}u}{dt^{2}} + (a_{3} - k_{5})\frac{du}{dt} + \left(k_{5}^{2} + a_{2} - k_{5}a_{3} - k_{1}\overline{\beta}^{-2}\right)u = k_{2}k_{3}\overline{\beta}^{-2}\sin\left(\overline{\beta}^{-2}x_{3} + x_{1}\right) 
+ \frac{1}{k_{1}}\left(k_{7}\overline{\beta}^{-2} + k_{5}^{3} - a_{1} + k_{5}a_{2} + k_{5}^{2}a_{3}\right)x_{2} + \left(\frac{k_{4}}{\overline{\beta}^{2}} - k_{5}^{2} - a_{2} + a_{3}k_{5}\right)x_{3} - \frac{a_{0}}{k_{1}}x_{1} 
+ \frac{1}{\beta}\left\{k_{5} + k_{6} - a_{3}\right\}x_{4} + \left(\frac{d^{4}y_{R}}{dt^{4}} + a_{3}\frac{d^{3}y_{R}}{dt^{3}} + a_{2}\frac{d^{2}y_{R}}{dt^{2}} + a_{1}\frac{dy_{R}}{dt} + a_{0}y_{R}\right)(k_{1})^{-1}$$
(4.21)

y el desempeño dinámico deseado puede ser obtenido seleccionando nosotros adecuadamente  $a_1, a_2, a_3, a_4$ .

Sin embargo, este controlador depende de todos los estados los cuales no son todos medibles. Para vencer esta dificultad nosotros reemplazamos el estado que es estimado por el observador. Para desarollar este procedimiento, tomamos en consideración que la transformación inversa es dada por (4.4), de tal forma que escribiendo las ecuaciones anteriores, en términos del error de seguimiento, obtenemos:

$$x_{1} = e_{1} + y_{R}$$

$$x_{2} = e_{2} + \frac{dy_{R}}{dt}$$

$$x_{3} = \left\{e_{3} + \frac{d^{2}y_{R}}{dt^{2}} + k_{5}\left(e_{2} + \frac{dy_{R}}{dt}\right) - k_{1}u\right\}/k_{1}$$

$$x_{4} = \left\{e_{4} + \frac{d^{3}y_{R}}{dt^{3}} + k_{5}\left(e_{3} + \frac{d^{2}y_{R}}{dt^{2}}\right) - k_{1}\frac{du}{dt}\right\}k_{1}/\widehat{\beta}$$

Ahora reemplazando los estados estimados por (4.8) obtenemos

$$\hat{x}_{1} = \hat{e}_{1} + y_{R}$$

$$\hat{x}_{2} = \hat{e}_{2} + \frac{dy_{R}}{dt}$$

$$\hat{x}_{3} = \{\hat{e}_{3} + \frac{d^{2}y_{R}}{dt^{2}} + k_{5}(\hat{e}_{2} + \frac{dy_{R}}{dt}) - k_{1}u\}/k_{1}$$

$$\hat{x}_{4} = \{\hat{e}_{4} + \frac{d^{3}y_{R}}{dt^{3}} + k_{5}(\hat{e}_{3} + \frac{d^{2}y_{R}}{dt^{2}}) - k_{1}\frac{du}{dt}\}k_{1}/3$$

Entonces, el controlador dinámico como una función de los estados estimados es dado por

$$\begin{split} \frac{d^2 u_e}{dt^2} + k_6 \frac{du_e}{dt} - \frac{1}{3^2} \{k_4 - k_1\} u_e &= -k_2 k_3^{-2} \overline{\beta} \sin(\overline{\beta}^2 \stackrel{\wedge}{x_3} + \stackrel{\wedge}{x_1}) \\ - \overline{\beta}^{-2} \frac{1}{k_1} \{k_1 k_7 + k_4 k_5\} \stackrel{\wedge}{x_2} - \frac{1}{k_1} \{\frac{k_4}{\overline{\beta}^2} + k_5 k_6\} \stackrel{\wedge}{x_3} \\ - \{k_5 + k_6\} \stackrel{'}{x_4} - \sum_{i=1}^4 \frac{a_{i-1}}{k_1} \{\stackrel{'}{x_i} + \frac{d^{i-1} y_R}{dt^{i-1}}\} + \frac{1}{k_1} \frac{d^4 y_R}{dt^4} \end{split}$$

Se calcula el control  $u_e$  de la ecuación anterior en términos de las variables de estado, y el valor resultante se introduce en el sistema dinámico.

#### 4.4.1 Resultados de simulación

Ahora, mostraremos como el controlador dinámico basado en el observador es implementado para el modelo del brazo robot con flexibilidad en la articulación. Las simulaciones mímericas (utilizando SIMNON) fuerón realizadas con los siguientes parámetros

$$k_1 = 3.33 \ (m^2 Kg)^{-1}; \ k_2 = 1.0 \ (m^2 Kg)^{-1}; \ k_3 = 5.0 \ Nm; \ k_4 = 4.33 \ (m^2 Kg)^{-1}$$
  
 $k_5 = 0.333 \ s^{-1}; \ k_6 = 0.1 \ s^{-1}; \ k_7 = -0.233 \ s^{-1}; \ K_s = 100 \ N/(m \ rad^{-1}).$ 

Todas las condiciones iniciales, tanto para el sistema, asi como para el controlador dinámico fuerón escogidas como cero. La trayectoria de referencia deseada  $y_R(t)$  para la posición del motor fue puesta igual a:

$$y_R(t) = 0.5 \sin t$$

La primera tarea para nuestro controlador propuesto basado en el observador fue el de seguir la trayectoria deseada  $y_R(t)$ . La figura 4.1. muestra el estado  $x_1$  y la trayectoria

deseada. Se puede observar que la trayectoria  $x_1$  converge hacia la trayectoria deseada  $y_R(t)$ . La figura 4.2 nos muestra el estado  $x_2$  y  $dy_R/dt$  en la que también se puede apreciar una convergencia en un tiempo de 1.5 segundos, para el seguimiento de la trayectoria del brazo robot manipulador. Finalmente la figura 4.3 describe el controlador obtenido. propuesto en ésta técnica de control y el cual es aplicado al sistema.

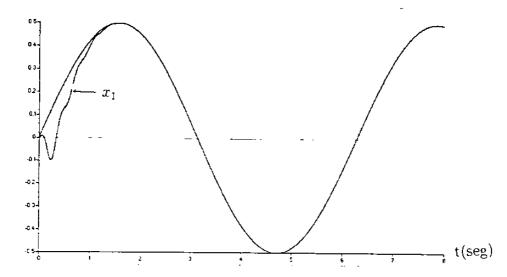


Figura No. 4.1 Grafica del estado x1 y la señal de referencia yr

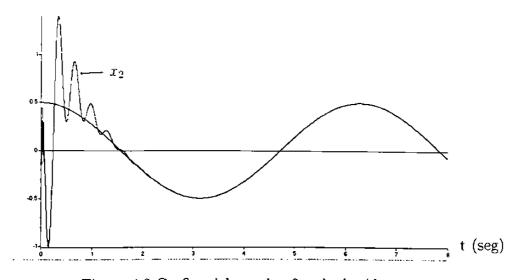


Figura 4.2 Grafica del estado x2 y de dyr/dt

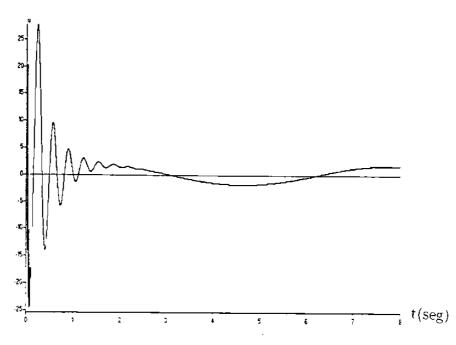


Figura No. 4.3 Grafica del control u

### 4.5 Conclusiones

En este Capítulo, hemos propuesto un controlador basado en un observador para una clase de sistemas no-lineales. En lo particular, hemos dado condiciones suficientes, para garantizar la estabilidad del sistema en lazo-cerrado incluyendo el observador de estado. Una conexión entre las ganancias del observador, y las ganancias del controlador, nos permitierón obtener el origen globalmente asintóticamente estable. La aplicación de esta técnica en el caso del modelo del brazo robot manipulador, nos permitió obtener, un buen desempeño en el seguimiento de la trayectoria a seguir por el brazo robot manipulador.

## Capítulo 5

## Método Basado en Perturbaciones Singulares

En este Capítulo se propone un controlador basado en un observador para una clase de sistemas no-lineales singularmente perturbados. Por otra parte se dan las condiciones suficientes para garantizar la estabilidad del esquema de control basado en observadores del sistema en lazo cerrado. Los resultados en simulación presentados al final del capitulo nos sirven para ilustrar la aplicación de esta técnica de control para un modelo de un brazo robot manipulador con flexibilidad en la articulación.

## 5.1 Introducción

Durante estos últimos años, se han realizado importantes trabajos de investigación hacia el problema del control de brazos robot con articulaciones flexibles, entre estos se pueden señalar: Técnicas de linealización por retroalimentación, técnicas de perturbaciónes singulares, técnicas de modos deslizantes y tecnicas adaptivas. Todas estas técnicas han sido propuestas para resolver el problema (ver. e. g. Brogliato et al 1995 y las referencias incluidas en estos, Kokotovic et al 1993, Battilotti y Lanari, 1995, Slotine y Hong 1986).

Aún cuando el modelo considerado en esta tesis es completamente linealizable via

retroalimentación de estado, las técnicas para la estabilización por retroalimentación de salida algunas no se aplican. ó bién solamente logran estabilización en conjuntos compactos a través de un observador de alta ganancia (ver e.g. Battilotti y Lanari. 1995).

Recientemente, la técnica de control de robots flexibles tiene bastante atractivo para la investigación. Los algoritmos de control de estructura variable pueden clasificarse dentro de los siguientes: i) métodos de Jerarquización: ii) métodos basados en la estabilidad de Lyapunov y iii) métodos de linealización. Sin embargo, todos estos métodos tienen características en común, tales como 1) variedades deslizantes son seleccionadas como hiperplanos: 2) las leyes de control dependen altamente en la superficie deslizante especificada, esto es, diferentes variedades deslizantes requieren un rediseño del controlador correspondiente: 3) el cálculo de las ganancias de switcheo está basado en el conocimiento de los linderos ó limites en cualquier elemento de las matrices del sistema.

En Stepanenko y Su (1993) un controlador deslizante que depende esencialmente de la selección de una variedad deslizante, es propuesto usando variedades no-lineales, suponiendo el conocimiento de los limites en la planta, la cual vence las últimas dificultades y proporciona una rápida convergencia. Las variedades diferenciales no-lineales ogrecen una rica variedad de diseños alternativos en comparación con las variedades lineales.

Por otra parte, el diseño de observadores para brazos robot con articulación flexible es un problema interesante en la teoría de control, asi como también de gran importancia práctica. En efecto muchas técnicas de control para estos robots requieren del conocimiento de cuatro variables para cada articulación, las cuales pueden ser cualquiera de las posiciones y velocidades de los motores y de los eslabones ó bién posiciones, velocidades, aceleraciones y jerks de los eslabones. Algunos resultados interesantes fuerón publicados por Tomei (1990).

Más recientemente, una ley de control por retrolimentación de estado (ver [13]), basada en un observador no-lineal, usando métodos de perturbación singular, es diseñada

para una cierta clase de sistemas no-lineales, la cual admite una perturbación singular, para las trayectorias variantes en el tiempo del seguimiento deseado, que requerimos de los brazos robots manipuladores.

El modelo del robot con articulación flexible puede ser dividido en dos subsistemas: los subsistemas lento y rápido, donde las variables lentas son la posición y las velocidades del eslabón y las variables rápidas son las fuerzas élasticas y sus derivadas con respecto al tiempo. En Battilotti y Lanari (1995) las posiciones del eslabón y la fuerza élastica son medibles y las otras variables no, debido a razones económicas o restricciones de carácter técnico. Por esta razón, se propone un observador deslizante para estimar estas variables. Adicionalmente proporcionamos un análisis de estabilidad del sistema aumentado.

En esta técnica un modelo simplificado es considerado, y asumimos que la posición del eslabón está disponible para su medición. En suma, una ley de control basado en las técnicas de modo deslizante para una clase de sistemas no-lineales de sistemas singularmente perturbados, recientemente reportados en Alvarez y Silva, es aplicado al modelo de un robot manipulador de un simple eslabón. Adicionalmente, un observador no-lineal de alta ganancia propuesto por Busawon y otros en 1998, es diseñado para esta clase de sistemas, y también es aplicado a nuestro modelo de robot manipulador con flexibilidad en la articulación.

Este capítulo está organizado de la siguiente forma. En la Sección 2. brevemente hacemos la referencia del modelo del manipulador considerado en esta tésis. En la sección 3. se tiene el diseño de un controlador basado en la técnica de perturbaciones singulares. Para vencer la dificultad de estimar las variables no medibles, un observador no lineal es dado en la sección 4. Un análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado es presentado en la sección 5. En la sección 6. el esquema del controlador basado en el observador obtenido en las secciones previas, es aplicado al modelo del robot. Finalmente, los resultados de simulación y algunas conclusiones terminan el presente capítulo.

## 5.2 Modelo del Brazo Robot Manipulator

Un robot manipulador consiste esencialmente de p eslabones, interconectados en p articulaciones dentro de una cadena cinemática. Cada eslabón es manipulado por un actuador, el cual puede ser eléctrico, hidráulico ó pneumático. El actuador puede estar localizado directamente en la articulación que actúa ó bién puede ser manipulado a tráves de una transmisión remota situada en la base del robot. En el modelo de un robot rígido se supone que los acoplamientos entre los actuadores y los eslabones son perfectamente rígidos. Por contraste, en un modelo de robot con articulación flexible se asume que los eslabones son rígidos, pero que los actuadores están acoplados elásticamente a los eslabones.

En esta tesis, se considera un robot flexible de un simple eslabón, el cual es manipulado por el eje de un motor de corriente directa, cuyo rotor está acoplado directamente a el eslabón. El modelo matemático para este manipulador fué dado en el Capítulo 2 y sus ecuaciones son las siguientes:

$$I \stackrel{\bullet \bullet}{q} + B_l \stackrel{\bullet}{q} - mgl \sin(q_1) - k(q_m - q) = 0$$

$$J \stackrel{\bullet \bullet}{q}_m + B \stackrel{\bullet}{q}_m + k(q_m - q) = u$$
(5.1)

donde q y  $q_m$  son respectivamente las posiciones angulares del eslabón y del eje del motor, mientras que u es la fuerza de entrada desde el actuador ( torque del motor). I es la inercia del brazo. J representa la inercia del motor. B es la frición viscosa del motor.  $B_l$  es la frición viscosa del eslabón . mgl es la carga nominal en el brazo y k es el coeficiente de rigídez de la articulación flexible. Flexible. El modelo no toma en cuenta la inercia del actuador alrededor de sus tres ejes independientes. Sin embargo, ha sido demostrado por Spong (1990) que esto representa adecuadamente la dinámica del manipulador y esta disponible para el diseño del control.

## 5.3 Control modo deslizantes en escala de Dos tiempos

Consideremos la clase de sistemas no-lineales singularmente perturbados, descritos por las asi llamadas forma estandard singularmente perturbada.

$$\overset{\bullet}{x} = f_1(x) + F_1(x)z + g_1(x)u. \qquad x(t_0) = x_0. \tag{5.2}$$

$$\varepsilon \stackrel{\bullet}{z} = f_2(x) + F_2(x)z + g_2(x)u.$$
  $z(t_0) = z_0.$  (5.3)

donde  $x \in B_x \subset R^n$  es el estado lento,  $z \in B_z \subset R^m$  es el estado rápido ,  $u \in R^r$  es la entrada de control  $y \in [0,1)$  es el pequeño parámetro de pertubación,  $f_1y$   $f_2$ , son las columnas de las matrices  $F_1y$   $F_2$  respectivamente,  $g_1$  y  $g_2$  son asumidas acotadas en sus componentes siendo éstas funciones suaves de x.  $B_x$  y  $B_z$  representa subconjuntos cerrados y acotados centrados en el origen,  $F_2(x)$  es supuesta no-singular para toda  $x \in B_x$ . También se supone que  $f_1(0) = f_2(0) = 0$  y, para u = 0, el origen (x, z) = (0, 0) es un estado de equilibrio aislado.

El sistema reducido lento puede ser encontrado, haciendo  $\varepsilon=0$  en (5.3), obteniendo asi el siguiente sistema lento de orden n

$$\dot{x}_s = f(x_s) + g(x_s)u_s, \qquad x_s(t_0) = x_0 \tag{5.4}$$

$$z_s = h(x_s) := -F_2^{-1}(x_s) \left[ f_2(x_s) + g_2(x_s) u_s \right]$$
(5.5)

donde  $x_s$ .  $z_s$  y  $u_s$  representan respectivamente las componentes lenta de las variables originales x. z y u. y

$$f(x_s) = f_1(x_s) - F_1(x_s)F_2^{-1}(x_s)f_2(x_s)$$
(5.6)

$$g(x_s) = g_1(x_s) - F_1(x_s)F_2^{-1}(x_s)g_2(x_s).$$
(5.7)

En (5.4) y (5.5),  $u_s(x_s)$  denota la retroalimentación del estado lento el cual únicamente depende de  $x_s$ . De acuerdo con De Carlo et al (1988) y Utkin (1992), la variedad invariante n-dimensional del sistema (5.2).(5.3) está parametrizada por  $\epsilon$  y sabiendo que la variedad invariante lenta, es definida por.

$$M_{\varepsilon} := \{ z \in B_z \subset R^m : z = h_{\varepsilon}(x_s, \epsilon) := \phi(x_s, \epsilon) + \psi(x_s, \epsilon) u_{\varepsilon s}(x_s, \epsilon) \}$$
 (5.8)

donde las funciones  $\phi(x_s, \epsilon)$ ,  $\psi(x_s, \epsilon)$  y  $u_{\epsilon s}(x_s, \epsilon)$  satisfacen la asi llamada condición de variedad

$$f_{2} - F_{2}\phi + F_{2}\psi u_{es} + g_{2}u_{es} = \epsilon \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_{s}} + \frac{\partial \psi}{\partial x_{s}}u_{es} + \psi \frac{\partial u_{es}}{\partial x_{s}}\right) [f_{1} + F_{1}\phi + F_{1}\psi u_{es}(5.9) + g_{1}u_{es}]$$

$$(5.1)$$

para toda  $x_s \in B_x$  y para  $\epsilon$  suficientemente pequeña, donde el subindice "e" se presenta para la solución exacta. En general, es difícil obtener el subsistema exacto desplegado en  $M_{\epsilon}$ , asi una aproximación standard, usualmente hecha, es la expansión en serie de potencias de  $\phi$ ,  $\psi$  y  $u_{\epsilon s}$  alrededor de  $\epsilon = 0$ , i.e. una aproximación  $O(\epsilon)$ . Una aproximación  $O(\epsilon)$  para el subsistema lento exacto es precisamente dado por (5.4) junto con  $\phi(x_s, \epsilon) = -F_2^{-1}(x_s)f_2(x_s) + O(\epsilon)$ ,  $\psi(x_s, \epsilon) = -F_2^{-1}(x_s)g_2(x_s) + O(\epsilon)$ ,  $u_{\epsilon s}(x_s, \epsilon) = u_s(x_s) + O(\epsilon)$ ,  $h_{\epsilon}(x_s, \epsilon) = h(x_s) + O(\epsilon)$ .

La dinámica rápida (también conocida como boundary layer system) es obtenida transformando la escala de tiempo (lenta) t a la escala de tiempo (rápida)  $\tau := (t - t_0)/\epsilon$  e introducciendo la desviación z desde  $M_{\varepsilon}$ . i.e.  $\eta := z - h_{\varepsilon}(x, \epsilon)$ . Entonces el sistema original (5.2).(5.3) resulta como:

$$\frac{d\widetilde{x}}{d\tau} = \varepsilon \left\{ f_1(\widetilde{x}) + F_1(\widetilde{x}) [\eta + h_e(\widetilde{x}, \epsilon)] + g_1(\widetilde{x}) u \right\}$$
 (5.10)

$$\frac{d\eta}{d\tau} = f_2(\widetilde{x}) + F_2(\widetilde{x})[\eta + h_e(\widetilde{x}, \epsilon)] + g_2(\widetilde{x})u - \frac{\partial h_e(\widetilde{x}, \epsilon)}{\partial \widetilde{x}} \frac{d\widetilde{x}}{d\tau}$$
 (5.11)

donde  $\eta(t_0) = z_0 - h(x_0)$ ,  $\widetilde{z}(\tau) := z(\varepsilon \tau + t_0)$ , con  $\widetilde{z}(t_0) = z_0$ , y  $\widetilde{x}(\tau) := x(\varepsilon \tau + t_0)$ . con  $\widetilde{x}(t_0) = x_0$ . El asi llamado *control compuesto* para el sistema original (5.2).(5.3) es definido por.

$$u(x, \eta, \epsilon) = u_{es}(x, \epsilon) + u_{ef}(x, \eta, \epsilon). \tag{5.12}$$

donde  $u_{es}$  y  $u_{ef}$  denotan respectivamente las componentes lenta y rápida de el control.

La componente  $u_{ef}$  es usada para hacer a  $M_{\varepsilon}$  atractiva y desaparecer en ella. es decir  $u_{ef}(x,0,\epsilon)=0$ . Si  $u_{es}(\widetilde{x},\epsilon)$  y  $\partial h_{e}(\widetilde{x},\epsilon)/\partial \widetilde{x}$  están acotadas y  $\widetilde{x}$  permanece relativamente constante con respecto  $\tau$ , entonces el término  $\epsilon(\partial h_{e}(\widetilde{x},\epsilon)/\partial \widetilde{x})$  puede ser despreciado para  $\epsilon$  suficientemente pequeño. Dado que la ecuación (5.11) define el subsistema reducido rápido, una aproximación  $O(\epsilon)$  puede ser obtenida para este subsistema usando la ecuación (5.5) y haciendo  $\varepsilon=0$  en (5.10).(5.11), esto es.

$$\frac{d\eta_{apx}}{d\tau} = F_2(\tilde{x})\eta_{apx} + g_2(\tilde{x})u_f$$
 (5.13)

donde  $\eta_{apx}$ ,  $h(\tilde{x}) = h_e(\tilde{x}, 0)$  y  $u_f$  son aproximaciones  $O(\epsilon)$  para  $\eta$ ,  $h_{\epsilon}(\tilde{x}, \varepsilon)$  y  $u_{\epsilon f}$  durante la capa frontera inicial y  $\eta_{apx}(0) = z_0 - h(x_0, 0)$ .

### 5.3.1 Diseño del control en Modo deslizante

El control en modo deslizante para el sistema (5.2).(5.3) es diseñado en dos etapas. Esto es, un control en modo deslizante es diseñado para cada subsistema reducido, *i.e.* para las aproximaciones  $O(\epsilon)$  de los subsistemas lento y rápido. Entonces ambos controles son combinados para obtener un control compuesto que es aplicado para el sistema (5.2),(5.3). Primero, es diseñado el *control lento* para el subsistema lento (5.4). Para hacer esto.

consideremos una superficie de switcheo no-lineal (n-r)dimensional definida por.

$$\sigma_s(x_s, x_{sd}) = \begin{pmatrix} \sigma_{s_1}(x_s, x_{sd}) \\ \vdots \\ \sigma_{s_r}(x_s, x_{sd}) \end{pmatrix} = 0$$
 (5.14)

donde  $x_{sd} = col(x_{sd_1}, ..., x_{sd_n})$  es un vector de referencia y cada función  $\sigma_{s_i}: B_x \times B_x \to R$ , i=1,...,r, es una función  $C^1$  tal que  $\sigma_{s_i}(0,0)=0$ . El método del control equivalente (ver De Carlo et al 1988, Nathan y Singh 1987, Utkin 1992) es usado para determinar el sistema reducido lento, restringido para la superficie de switcheo lenta  $\sigma_s(x_s, x_{sd})=0$ , obteniendo asi el control equivalente lento

$$u_{s\epsilon} = -\left[\frac{\partial \sigma_s}{\partial x_s} g(x_s)\right]^{-1} \left[\frac{\partial \sigma_s}{\partial x_s} f(x_s) - \frac{\partial \sigma_s}{\partial x_{sd}} \dot{x}_{sd}\right]$$
(5.15)

donde la matriz  $[\partial \sigma_s/\partial x_s]g(x_s)$  es asumida no singular para toda  $x_s, x_{sd} \in B_x$ . La substitución del control equivalente lento (5.15) en (5.4) da como resultado la ecuación en modo-deslizante lento.

$$\dot{x}_s = f_e(x_s, x_{sd}) + g_e(x_s, x_{sd}) \dot{x}_{sd}$$
(5.16)

donde

$$f_{\epsilon}(x_s, x_{sd}) = \left\{ I_n - g(x_s) \left[ \frac{\partial \sigma_s}{\partial x_s} g(x_s) \right]^{-1} \frac{\partial \sigma_s}{\partial x_s} \right\} f(x_s)$$
 (5.17)

$$g_{\epsilon}(x_s, x_{sd}) = -g(x_s) \left[ \frac{\partial \sigma_s}{\partial x_s} g(x_s) \right]^{-1} \frac{\partial \sigma_s}{\partial x_{sd}}$$
 (5.18)

con  $I_n$  denotando la matriz identidad de  $n \times n$ .

Para completar el diseño del control lento se establece (De Carlo *et al* 1988, Utkin 1992) que.

$$u_s = u_{se} + u_{sN} \tag{5.19}$$

donde  $u_{se}$  es el control equivalente lento (5.15), el cual actúa cuando el sistema reducido lento es restringido a  $\sigma_s(x_s, x_{sd}) = 0$ . mientras que  $u_{sN}$  actúa cuando  $\sigma_s(x_s, x_{sd}) \neq 0$ . En esta tesis el control  $u_{sN}$  es seleccionado como.

$$u_{sN} = -\left[\frac{\partial \sigma_s}{\partial x_s} g(x_s)\right]^{-1} L_s(x_s) \sigma_s(x_s, x_{sd})$$
(5.20)

donde  $L_s(x_s)$  es una matriz definida positiva de  $r \times r$  cuyas componentes son funciones reales no-lineales  $C^0$  acotadas de  $x_s$ , tal que:

$$||L_s(x_s)|| \le \rho_s \tag{5.21}$$

para toda  $x_s \in B_x$  con una constante  $\rho_s > 0$ . La ecuación que describe la proyección del movimiento del subsistema lento fuera de  $\sigma_s(x_s, x_{sd}) = 0$  es dada por

$$\overset{\bullet}{\sigma}_{s}(x_{s}, x_{sd}) = -L_{s}(x_{s})\sigma_{s}(x_{s}, x_{sd}). \tag{5.22}$$

Las propiedades de estabilidad de  $\sigma_s(x_s, x_{sd}) = 0$  en (5.22) pueden ser estudiadas por medio de la función candidata de Lyapunov  $V(x_s, x_{sd}) = (1/2)\sigma_s^T(x_s, x_{sd})\sigma_s(x_s, x_{sd})$  cuya derivada de tiempo a lo largo de (5.22) satisface  $V(x_s, x_{sd}) = \sigma_s^T(x_s, x_{sd}) \stackrel{\bullet}{\sigma}_s(x_s, x_{sd})$  derivada de tiempo a lo largo de (5.22) satisface  $V(x_s, x_{sd}) = \sigma_s^T(x_s, x_{sd}) \stackrel{\bullet}{\sigma}_s(x_s, x_{sd})$  derivada de tiempo a lo largo de (5.22) satisface  $V(x_s, x_{sd}) = \sigma_s^T(x_s, x_{sd}) \stackrel{\bullet}{\sigma}_s(x_s, x_{sd})$  derivada  $x_s, x_{sd} \in B_s$ . Excepto, desde las propiedades de  $C^1$  de  $\sigma_s(x_s, x_{sd})$  uno tiene que  $||\sigma_s(x_s, x_{sd}) - \sigma_s(0, x_{sd})| \le l_{\sigma_s} ||x_s|| y ||\sigma_s(0, x_{sd})| \le l_{\sigma_s} ||x_s||$  para toda  $x_{sd} \in B_s$  donde  $l_{\sigma_s}$  es la constante de Lipschitz de  $\sigma_s(x_s, x_{sd})$  con respecto a  $x_s$  y  $l_{\sigma_{sd}}$  es una constante positiva. Usando la propiedad de  $ab \le (k/2)a^2 + (1/2k)b^2$ , con  $k \in (0, 1)$ , uno tiene que

 $\overset{\bullet}{V}(x_s,x_{sd}) \leq -\rho_s a_1 \|x_s\|^2 - \rho_s a_2 \|x_{sd}\|^2 \leq -\rho_s a_1 \|x_s\|^2 \text{ donde } a_1 = l_{\sigma_s}^2 + l_{\sigma_s} l_{\sigma_s d}/k_1.$   $a_2 = l_{\sigma_{sd}}^2 + l_{\sigma_s} l_{\sigma_{sd}} k_1.$  y  $k_1 \in (0,1)$ . Asi, la existencia de un modo deslizante lento puede ser concluida.

La retroalimentación del sistema (5.4) con el control lento (5.19) da como resultado el sistema lento reducido en lazo cerrado.  $\dot{x}_s = f_e(x_s, 0) + p_s(x_s, x_{sd}, \dot{x}_{sd})$ 

donde

$$p_s(x_s, x_{sd}, \dot{x}_{sd}) = f_e(x_s, x_{sd}) - f_e(x_s, 0) + g(x_s)u_{sN} + g_e(x_s, x_{sd}) \dot{x}_{sd}.$$
 (5.23)

También, desde el acotamiento de  $f(x_s)$  y las columnas de  $g(x_s)$ , la no-singularidad de la matriz  $[\partial \sigma_s/\partial x_s]g(x_s)$  y la diferenciabilidad continua de  $\sigma_s(x_s, x_{sd})$ , se sigue que.

$$\left\| p_s(x_s, x_{sd}, \dot{x}_{sd}) \right\| \le l_1 \|x_s\| + l_2 \|x_{sd}\| + l_3 \|\dot{x}_{sd}\|$$
 (5.24)

para toda  $x_s, x_{sd}, x_s, x_{sd} \in B_x$ .donde  $l_1, l_2 \neq l_3$  son constantes positivas. Ahora introducimos las siguientes suposiciones.

**A1.** El equilibrio  $x_s = 0$  de  $x_s = f_e(x_s, 0)$  is localmente exponencialmente estable.

**A2.** El vector de referencias  $x_{sd}(t)$  y sus derivadas de tiempo  $\overset{\bullet}{x}_{sd}y$   $\overset{\bullet}{x}_{sd}son$  uniformemente acotadas y satisfacen.

$$||x_{sd}| \le b_1.$$
  $\left|\begin{vmatrix} \bullet \\ x_{sd} \end{vmatrix}\right| \le b_2.$   $\left|\begin{vmatrix} \bullet \\ x_{sd} \end{vmatrix}\right| \le b_3$  (5.25)

para algunas constantes positivas  $b_1, b_2 y b_3$ .

Por el teorema inverso de Lyapunov (ver Khalil 1990), la suposición A1 asegura la existencia de una función de Lyapunov  $V_s(x_s)$ , la cual satisface.

$$c_{1} \|x_{s}\|^{2} \leq V_{s}(x_{s}) \leq c_{2} \|x_{s}\|^{2}$$

$$\frac{\partial V_{s}(x_{s})}{\partial x} f_{e}(x_{s}, 0) \leq -c_{3} \|x_{s}\|^{2}$$
(5.26)

$$\left\| \frac{\partial V_s(x_s)}{\partial x} \right\| \le c_4 \left\| x_s \right\|$$

para algunas constantes positivas  $c_1,c_2,c_3$  y  $c_4$ . Se puede utilizar  $V_s(x_s)$  como una función

candidata de Lyapunov para investigar la estabilidad del origen  $x_s = 0$  como un punto de equilibrio para el sistema (5.24). Utilizando las suposiciones A1, A2, (5.28) y usando otra vez la propiedad de  $ab \leq (k/2)a^2 + (1/2k)b^2$ , con  $k \in (0,1)$ , la derivada de tiempo de  $V_s$  satisface.

$$\hat{V}_{s}(x_{s}) \le -v_{1} \|x_{s}\|^{2} + v_{2} \tag{5.27}$$

donde

$$v_1 = c_3 - c_4 l_{p_s}, \quad v_2 = \frac{c_4}{2\kappa_1} (l_2 b_1 + l_3 b_2)$$
 (5.28)

con  $\kappa_1\in(0,1)$  y  $l_{p_s}=\left[l_1+\frac{1}{2}(l_2b_1+l_3b_2)\kappa_1\right]$ . Entonces, si  $l_{p_s}$  es suficientemente pequeña para satisfacer

$$l_{p_s} \le \bar{l}_{p_s} < \frac{c_3}{c_4} \tag{5.29}$$

el subsistema reducido lento es localmente finalmente acotado (ver apéndice).

El diseño para el subsistema del control rápido (5.13) puede ser obtenido de una manera similar al que se obtubo para el control lento. Esto es, uno considera una superficie de switcheo (m-r) dimensional rápida definida por.

$$\sigma_f(\eta_{opx}, x_{fd}) = \begin{pmatrix} \sigma_{f_1}(\eta_{apx}, x_{fd}) \\ \vdots \\ \sigma_{f_t}(\eta_{apx}, x_{fd}) \end{pmatrix} = 0$$
 (5.30)

donde  $x_{fd} = col(x_{fd_1}, ..., x_{fd_m})$  es otro vector de referencia, y cada función  $\sigma_{f_i}: B_z \times B_z \to R$ , i = 1, ..., r, es también una función  $C^1$  tal que  $\sigma_{f_i}(0, 0) = 0$ . El control rápido completo toma la forma.

$$u_f = u_{fe} + u_{fN} \tag{5.31}$$

donde  $u_{fe}$  es el control equivalente rápido control dado por.

$$u_{fc}(\tilde{x}, \eta_{apx}, x_{fd}) = -\left[\frac{\partial \sigma_f}{\partial \eta_{apx}} g_2(\tilde{x})\right]^{-1} \left[\frac{\partial \sigma_f}{\partial \eta_{apx}} F_2(\tilde{x}) \eta_{apx} + \frac{\partial \sigma_f}{\partial x_{fd}} \frac{dx_{fd}}{d\tau}\right]. \tag{5.32}$$

$$u_{fN}(\tilde{x}, \eta_{apx}, x_{fd}) = -\left[\frac{\partial \sigma_f}{\partial \eta_{apx}} g_2(\tilde{x})\right]^{-1} L_f(\eta_{apx}) \sigma_f(\eta_{apx}, x_{fd}). \tag{5.33}$$

En (5.32) y (5.33), la matriz  $[\partial \sigma_f/\partial \eta_{apx}]g_2(\tilde{x})$  es asumida no singular  $(\tilde{x}, \eta_{apx}, x_{fd}) \in B_x \times B_z \times B_z$ , y  $L_f(\eta_{apx})$  es una matriz definida positiva de dimensión  $r \times r$ , cuyas componentes son funciones reales no-lineales acotadas  $C^0$  de  $\eta_{apx}$ , tal que

$$||L_f(\eta_{apx})|| \le \rho_f \tag{5.34}$$

para toda  $(\tilde{x}, \eta_{apx}, x_{fd}) \in B_x \times B_z \times B_z$ , con una constante  $\rho_f$ . La proyección del movimiento del subsistema rápido fuera de  $\sigma_f(\eta_{apx}, x_{fd}) = 0$  es descrito por  $d\sigma_f/d\tau = -L_f(\eta_{apx})\sigma_f(\eta_{apx}, x_{fd})$ , y argumentos similares como los del movimiento del subsistema lento pueden ser aplicados y concluir la existencia de un modo deslizante rápido.

Cuando el control completo rápido (5.31) es substituido dentro de (5.13), el sistema en lazo cerrado del subsistema reducido rápido toma la forma.

$$\frac{d\eta_{apx}}{d\tau} = g_c(\widetilde{x}, \eta_{apx}, 0) + p_f(\widetilde{x}, \eta_{apx}, x_{fd}, \frac{dx_{fd}}{d\tau})$$
 (5.35)

donde

$$p_f(\tilde{x}, \eta_{apx}, x_{fd}, \frac{dx_{fd}}{d\tau}) = g_c(\tilde{x}, \eta_{apx}, x_{fd}) + g_{c_1}(\tilde{x}, x_{fd}) \frac{dx_{fd}}{d\tau} - g_c(\tilde{x}, \eta_{apx}, 0)$$
 (5.36)

con

$$g_{c}(\widetilde{x}, \eta_{apx}, x_{fd}) = F_{2}(\widetilde{x})\eta_{apx}$$

$$-g_{2}(\widetilde{x}) \left[ \frac{\partial \sigma_{f}}{\partial \eta_{apx}} g_{2}(\widetilde{x}) \right]^{-1} \left[ \frac{\partial \sigma_{f}}{\partial \eta_{apx}} F_{2}(\widetilde{x})\eta_{apx} + L_{f}(\eta_{apx})\sigma_{f}(\eta_{apx}) \right].$$

$$(5.39)$$

$$g_{c_1}(\tilde{x}, x_{fd}) = g_2(\tilde{x}) \left[ \frac{\partial \sigma_f}{\partial \eta_{apx}} g_2(\tilde{x}) \right]^{-1} \left[ \frac{\partial \sigma_f}{\partial x_{fd}} \right]$$
 (5.37)

A partir del acotamiento de  $f(x_s)$  y las columnas de  $g(x_s)$ , la no singularidad de la matriz  $[\partial \sigma_f/\partial \eta_{apx}]g_2(\tilde{x})$  y la diferenciabilidad continua de  $\sigma_f(\eta_{apx}, x_{fd})$ , se sigue que.

$$\left\| p_f(\tilde{x}, \eta_{apx}, x_{fd}, dx_{fd}/d\tau) \right\| \le \bar{l}_1 \|\eta_{apx}\| + \bar{l}_2 \|x_{fd}\| + \bar{l}_3 \left\| \frac{dx_{fd}}{d\tau} \right\|$$
 (5.38)

para toda  $\eta_{apx}$ ,  $x_{fd}$ ,  $dx_{fd}/d\tau \in B_z$ , donde  $\overline{l}_1$ ,  $\overline{l}_2$  y  $\overline{l}_3$  son constantes positivas. Similarmente a el sistema reducido lento, las siguientes suposiciones son introducidas.

**A3.** El equilibrio  $\eta_{apx} = 0$  de  $d\eta_{apx}/d\tau = g_c(\tilde{x}, \eta_{apx}, 0)$  es localmente exponencialmente estable.

**A4.** El vector de referencias  $x_{fd}(t)$  y sus derivadas de tiempo  $dx_{fd}/d\tau$  son uniformemente acotadas y satisfacen.

$$|x_{fd}|^{\dagger} \le \bar{b}_1.$$
  $||dx_{fd}/d\tau|| \le \bar{b}_2$  (5.39)

para algunas constantes positivas  $\bar{b}_1 y \ \bar{b}_2$ .

A partir de la suposición A3, por un teorema inverso de Lyapunov (Khalil 1990), existe una función de Lyapunov  $W_f(\eta_{upx})$  la cual satisface

$$\begin{aligned}
\bar{c}_1 & \|\eta_{apx}\|^2 \le W_f(\eta_{apx}) \le \bar{c}_2 & \|\eta_{apx}\|^2 \\
\frac{\partial W_f(\eta_{apx})}{\partial \eta_{apx}} g_c(\tilde{x}, \eta_{apx}, 0) \le -\bar{c}_3 & \|\eta_{apx}\|^2
\end{aligned} (5.40)$$

$$\left\|\frac{\partial W_f(\eta_{apx})}{\partial \eta_{apx}}\right\| \leq \hat{c}_4 \left\|\eta_{apx}\right\|$$

para algunas constantes positivas  $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3 y$   $\bar{c}_4$ . Se puede usar también  $W_f(\eta_{apx})$  como una función candidata de Lyapunov para investigar la estabilidad del origen  $\eta_{apx}=0$  como un punto de equilibrio para el sistema (5.37). Usando las suposiciones A3. A4. (5.40) y otra vez la propiedad de  $ab \leq (k/2)a^2 + (1/2k)b^2$ .con  $k \in (0,1)$ . la derivada de tiempo de  $W_f$  a lo largo de las trayectorias de (5.35) entonces satisface.

$$\frac{dW_f(\eta_{apx})}{d\tau} \le -\bar{v}_1 \|\eta_{apx}\|^2 + \bar{v}_2 \tag{5.41}$$

donde

$$\bar{v}_1 = \bar{c}_3 - \bar{c}_4 l_{p_f}, \quad \bar{v}_2 = \frac{\bar{c}_4}{2\kappa_2} (\bar{l}_2 \bar{b}_1 + \bar{l}_3 \bar{b}_2)$$
 (5.42)

con  $\kappa_2 \in (0,1)$  y  $l_{p_f}=[\bar{l}_1 -\frac{1}{2}(\bar{l}_2\bar{b}_1 + \bar{l}_3\bar{b}_2)\kappa_2]$ . Si  $l_{p_f}$  es suficientemente pequeña para satisfacer la cota.

$$l_{p_f} \le \overline{l}_{p_f} < \frac{\overline{c}_3}{\overline{c}_4} \tag{5.43}$$

el sistema reducido rápido (5.35) es localmente finalmente acotado.

Basado en el control de modo-deslizante de orden reducido descrito arriba. las variables de estado lenta y rápido originales, son usadas para construir el control compuesto, es decir obtenemos la expresión siguiente que representa el control compuesto.

$$u(x, x_{sd}, \dot{x}_{sd}, \eta, x_{fd}, dx_{fd}/d\tau) = u_s(x, x_{sd}, \dot{x}_{sd}) + u_f(x, \eta, x_{fd}, dx_{fd}/d\tau)$$
 (5.44)

donde

$$u_s = -\left[\frac{\partial \sigma_s}{\partial x}g(x)\right]^{-1} \left[\frac{\partial \sigma_s}{\partial x}f(x) + \frac{\partial \sigma_s}{\partial x_{sd}} \dot{x}_{sd} + L_s(x)\sigma_s(x)\right]. \tag{5.45}$$

$$u_f = -\left[\frac{\partial \sigma_f}{\partial \eta}g_2(x)\right]^{-1} \left[\frac{\partial \sigma_f}{\partial \eta}F_2(x)\eta + \frac{\partial \sigma_f}{\partial x_{fd}}\frac{dx_{fd}}{d\tau} + L_f(\eta)\sigma_f(\eta)\right]. \tag{5.46}$$

Cuando el control compuesto (5.45).(5.46) y (5.47) es substituido en (5.2) y (5.3), se

obtiene el sistema singularmente perturbado no-lineal en lazo cerrado.

$$\dot{x} = f_c(x, \eta, x_{sd}) + g_e(x, x_{sd}) \, \dot{x}_{sd}$$
 (5.47)

$$\varepsilon \stackrel{\bullet}{\eta} = g_c(x, \eta, x_{fd}) + g_{c_1}(x, x_{fd}) \varepsilon \stackrel{\bullet}{x_{fd}} - \varepsilon \frac{\partial h}{\partial x} \left[ f_c(x, \eta, x_{sd}) + g_{\varepsilon}(x, x_{sd}) \stackrel{\bullet}{x_{sd}} \right]$$
(5.48)

donde  $\eta = z - h(x)$ ,  $x(t_o) = x_o$ ,  $z(t_o) = z_o v$ 

$$f_c(x, \eta, x_{sd}) = f(x) + F_1(x)\eta - g(x) \left[ \frac{\partial \sigma_s}{\partial x} g(x) \right]^{-1} \left[ \frac{\partial \sigma_s}{\partial x} f(x) + L_s(x)\sigma_s(x) \right]$$
(5.49)

En esta técnica de control, las funciones candidatas de Lyapunov  $V_s$  y  $W_f$  son instrumental obtenido cuando el control compuesto para investigar las propiedades de estabilidad del sistema en lazo cerrado  $u=u_s+u_f$  es usado y un observador es introducido para estimar el estado del sistema original. Esto es mostrado en la sección 5.4

## 5.4 Un Observador No-Lineal

Las leves de control desarrolladas en la sección anterior requieren del conocimiento de todo el vector de estado para poder ser implementadas. Como solo es posible tener información de algunas componentes del vector de estado por medición directa, entonces para vencer esta dificultad, y basado en ciertas condiciones de la observabilidad del sistema, es posible substituir esta información desconocida por medio de un *observador* de estado. Este sistema auxiliar nos permite obtener un estimado del vector de estado, a partir de las mediciones de las entradas y salidas del sistema a ser observado.

Como es bién conocido, el observador de Luenberger y el filtro de Kalman son muy utilizados para estimar el estado en el caso de sistemas lineales. Recientemente, algunos estimadores de estado para sistemas no-lineales han sido propuestos (ver. e.g. Busawon et al 1998. Gauthier et al 1992. De Leon et al 1996. Hernandez y Barbot 1996. Hammouri y

De Leon 1990 ). La diferencia fundamental entre los sistemas lineales y los no-lineales es que. para sistemas lineales, la entrada no afecta a la observabilidad de los sistemas. Sin embargo, para sistemas no-lineales, existen entradas que vuelven al sistema inobservable. Esta clase de entradas son conocidas como entradas singulares (ver apéndice). Como una consecuencia de esto, nosotros clasificamos los sistemas para los cuales es posible diseñar un observador. Cuando las entradas aplicadas al sistema no afectan su observabilidad, estas son llamadas entradas universales, y a los observadores diseñados se les refiere observadores uniformes. Por otro lado, un observador que puede ser diseñado para un sistema no-lineal con entradas singulares es conocido como un observador persistente ó observador regularmente persistente. En este capítulo, un observador uniforme el cual permite estimar los estados de un sistema no-lineal y recientemente reportado en Busawon et al (1998) es utilizado.

Consideremos el sistema singularmente perturbado (5.2) y (5.3) junto con una variable de salida.

$$y = \pi(x) \tag{5.50}$$

donde  $y \in R$  y  $\pi$  es una función suave. Supongamos que este sistema puede ser escrito, despues de una posible transformación de coordenadas  $\varsigma = \Phi(x, z)$ , en la forma.

$$\dot{\varsigma}(t) = F(y)\varsigma(t) + G(u(t),\varsigma(t))$$

$$y = C\varsigma(t) \tag{5.51}$$

donde  $\varsigma \in B_x \times B_z$ ,  $u \in R^r$ ,  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} y$ 

$$F(y) = \begin{pmatrix} 0 & f_1(y) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & f_2(y) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & f_{n+m-1}(y) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
 (5.52)

$$G(u,\varsigma) = \begin{pmatrix} g_1(u,\varsigma_1) \\ g_2(u,\varsigma_1,\varsigma_2) \\ \vdots \\ g_{n+m-1}(u,\varsigma_1,\ldots,\varsigma_{n+m-1}) \\ g_{n+m}(u,\varsigma_1,\ldots,\varsigma_{n+m-1},\varsigma_{n+m}) \end{pmatrix}.$$

En (5.3), condiciones necesarias y suficientes son dadas para asegurar la existencia de la descripción (5.51) junto con un procedimiento para obtener mapeos  $\Phi(x,z)$ . También se asume que las funciones  $f_i$ ,  $i=1,\ldots,n+m-1$ , son de clase  $C^r$ ,  $r\geq 1$ , con respecto a y y que las funciones  $g_i$ ,  $i=1,\ldots,n+m$ , son globalmente Lipschitz con respecto a g y uniformemente con respecto a g. En suma, se asume que existe una clase de controles  $U \subset R^r$  y constantes g, g, tales que para cada g, g, cada salida g asociada a g, g, and condición inicial g(0) g0 g1.

$$0 \le \alpha \le f_i(y) \le \beta, i = 1, \dots, n + m - 1,$$
 (5.53)

Definimos ahora el sistema.

$$\widehat{\varsigma}(t) = F(y)\widehat{\varsigma}(t) + G(u(t), \varsigma(t)) - S_{\theta}^{-1}(y)C^{T}[C\widehat{\varsigma} - y]$$
(5.54)

donde  $\bar{S}_{\theta} = \Omega(y) S_{\theta} \Omega(y)$  con

$$\Omega(y) = \begin{pmatrix}
1 & . & . & . & . & . \\
. & f_1 & . & . & . & . \\
. & . & f_1 f_2 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . \\
0 & . & . & . & \prod_{i=1}^{n-1} f_i
\end{pmatrix}$$
(5.55)

y asumimos que la derivada de tiempo  $\Omega(y)$  está acotada.  $S_{\theta}$  es una matriz simétrica

definida positiva la cual es la única solución de la ecuación algebráica de Lyapunov .

$$\theta S_{\theta} + A^T S_{\theta} + S_{\theta} A - C^T C = 0 \tag{5.56}$$

 $con \theta > 0 y$ 

$$A = \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right).$$

Sea  $e(t) = \hat{\varsigma}(t) - \varsigma(t)$  el error de estimación, cuya dinámica es dada por.

$$\dot{\hat{c}}(t) = \{ F(y) - \bar{S}_{\theta}^{-1}(y)C^{T}C \} e(t) + G(u(t), \hat{\varsigma}(t)) - G(u(t), \varsigma(t))$$
 (5.57)

donde  $\bar{S}_{\theta}$  es una solución de

$$\theta \,\bar{S}_{\theta} + F(y)^T \,\bar{S}_{\theta} + \bar{S}_{\theta} \,F(y) - C^T C = 0.$$

Despues de algunos calculos de computación, uno puede ver que  $F(y) = \Omega^{-1}(y)A\Omega(y)$ ,  $C\Omega(y) = C$  y  $S_{\theta} = (1 \ \theta)\Delta_{\theta}S_{1}\Delta_{\theta}$ , donde  $S_{1}$  es la solución única de(5.56) con  $\theta = 1$  y  $\Delta_{\theta} = diag\{1, 1, \theta, \dots, 1/\theta^{n-m-1}\}$ . Ademas, dada la estructura triangular de G y al hecho de cada una de sus componentes es globalmente Lipschitz con respecto a g y uniformemente con respecto a g, se tiene que.

$$||G(u(t),\widehat{\varsigma}(t)) - G(u(t),\varsigma(t))|| \leq \widetilde{k}_2 ||e(t)||$$

para alguna constante positiva  $\widetilde{k}_2$ . También,  $\sigma(A - S_{\theta}^{-1}C^TC) = \sigma(\widetilde{A}) \subset \mathbb{C}^-$ , donde  $\sigma(\widetilde{A})$  denota el espectro de la matriz  $(\widetilde{A})$ , asi

$$\alpha_{\mathcal{M}}(\widetilde{A}) = \widetilde{k}_1$$

donde  $\alpha_M(\cdot)$  denota el máximo valor singular de $(\tilde{A})$ . Pongamos

$$\widetilde{\delta}_{0} = \underset{t \geq 0, \varsigma \in B_{x} \times B_{z}}{Sup} \left\{ \left\| \Omega^{-1}(C\varsigma) \right\| \right\}. \widetilde{\delta}_{1} = \underset{t \geq 0, \varsigma \in B_{z} \times B_{z}}{Sup} \left\{ \left\| \Omega(C\varsigma) \right\| \right\}. \widetilde{\delta}_{2} = \underset{t \geq 0, \varsigma \in B_{z} \times B_{z}}{Sup} \left\{ \left\| \overset{\bullet}{\Omega}(C\varsigma) \Omega^{-1}(C\varsigma) \right\| \right\}.$$

donde  $\widetilde{\delta}_0,\widetilde{\delta}_1$  y  $\widetilde{\delta}_2$ son constantes positivas, y reescribiendo (5.60) como

$$\stackrel{\bullet}{e}(t) = \Omega^{-1}(y)\{A - S_{\theta}^{-1}C^{T}C\}\Omega(y)e(t) + G(u(t),\widehat{\varsigma}(t)) - G(u(t),\varsigma(t))$$
(5.58)

para lo cual uno tiene

$$\| \stackrel{\bullet}{e}(t) \| \leq \| \Omega^{-1}(y) \| \| \{ A - S_{\theta}^{-1} C^{T} C \} \| \| \Omega(y) \| \| \| e(t) \|$$

$$+ \| G(u(t), \widehat{\varsigma}(t)) - G(u(t), \varsigma(t)) \|$$

$$\leq \| \widetilde{\delta}_{0} \widetilde{\delta}_{1} \widetilde{k}_{1} + \widetilde{k}_{2} \| \| e(t) \|$$
(5.59)

Para estudiar la estabilidad de la dinámica del error de seguimiento (5.58), nosotros consideramos el metodo directo de Lyapunov. Hagamos ahora el siguiente cambio de variable  $\tilde{e}$   $(t) = \Omega(y)\Delta_{\theta}e(t)$ , asi

$$\overset{\bullet}{\overline{c}}(t) = \theta \{ A - S_1^{-1}C^TC \} \ \overline{e}(t) + \Omega(y)\Delta_{\theta} \{ G(u(t), \widehat{\varsigma}(t)) - G(u(t), \varsigma(t)) \} + \overset{\bullet}{\Omega}(y)\Omega^{-1}(y) \ \overline{e}(t).$$

Ahora, considerando la siguiente función candidata de Lyapunov  $V_o(\bar{e}(t)) = \bar{e}^T(t)S_1 \bar{e}(t)$  y tomando la derivada de tiempo de esta función a lo largo de las trayectorias de la dinámica del error de estimación (5.58), se sigue que.

$$\overset{\bullet}{V_o}\left(\tilde{e}\left(t\right)\right) \leq -\left(\theta - \varrho[\widetilde{\delta}_0\widetilde{\delta}_1\widetilde{k}_1 + \widetilde{\delta}_2]\right)V_o(\bar{e}\left(t\right)) \leq -\mu V_o(\bar{e}\left(t\right))$$

donde  $\varrho = 2L_{\max}(S_1)$ , o equivalentemente

$$\stackrel{\bullet}{V_o}(e(t)) \le -\mu N V_o(e(t)) \tag{5.60}$$

donde  $\mu=\theta-\varrho[\widetilde{\delta}_0\widetilde{\delta}_1\widetilde{k}_1+\widetilde{\delta}_2]$  es una constante positiva. Entonces

$$\|\bar{e}(t)\| \leq \bar{K} e^{-\mu t}$$

donde  $\bar{K}$  es una constante que depende de las condiciones iniciales  $\|\widehat{\varsigma}(0)\|$ , y la constante N es una función de  $(1/\theta^{n+m-1})$  que es obtenida desde sus linderos ó limites

$$\sqrt{N} \|e\| = (\widetilde{k}_3 / \theta^{n-m-1}) \|e\| \le \|\Omega(y)\| \|\Delta_{\theta}\|_{\min} \|e\| \le \|\widetilde{e}\| \le \|\Omega(y)\| \|\Delta_{\theta}\|_{\max} \|e\| \le \widetilde{k}_2 \|e\|$$

donde  $\tilde{k}_3 = \inf_{t \geq 0, \varsigma \in B_x \times B_z} \{ \|\Omega(C\varsigma)\| \}$ . Asi, una velocidad de decaecimiento exponencial arbitrario para  $\|\tilde{e}(t)\|$  y, consecuentemente, para  $\|e(t)\|$  es obtenido. Esto puede ser obtenido en el siguiente resultado.

Teorema 1: Asuma que el sistema (5.51). Satisface las suposiciones dadas. Entonces existe una constante positiva  $\theta_0$  tal que, para toda  $u \in U$ , para todas las condiciones miciales  $\varsigma(0)$ ,  $\varsigma(0) \in B_x \times B_z$ , para toda  $\theta_0 > 0$ ,  $g(0) \in \theta_0$ , entonces el sistema (5.54) es un observador exponencial para el sistema exponential (5.51) con una velocidad de decaecimiento arbitrario exponencial.

(Ver Busawon 1998, para más detalles)

### 5.5 Estabilidad en Lazo Cerrado

Suponga que el control compuesto (5.44).(5.45).(5.46) ha sido diseñado de tal manera que el sistema no-lineal singularmente perturbado (5.47).(5.48) finalmente acotado (ver apéndice). y que un observador (5.54), con velocidad de convergencia exponencial, es también diseñado. La pregunta fundamental de saber, si la estabilidad de el sistema en lazo-cerrado es preservada, cuando el estado es reemplazado por su estimado en la ley de

control, es ahora proclamada ó discutida. Hecho que el control compuesto ahora depende de los estimados  $(\hat{x}, \hat{z})$ , la función h depende de  $x, \hat{x}, x_{sd}$  y  $\hat{x}_{sd}$ . Consideremos nosotros el sistema aumentado descrito por ecuaciones de la forma.

$$\dot{x} = f(x) + F_1(x)\eta + g(x)u_s(\mathring{x}, x_{sd}, \mathring{x}_{sd}) + g_1(x)u_f(\mathring{x}, \widehat{\eta}, x_{fd}, \frac{dx_{fd}}{d\tau}), \qquad x(t_0) = x_0$$

$$\varepsilon \stackrel{\bullet}{\eta} = F_2(x)\eta + g_2(x)u_f(\mathring{x}, \mathring{\eta}, x_{fd}, \frac{dx_{fd}}{d\tau}) - \varepsilon \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial h}{\partial \zeta_x} \right) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right] \stackrel{\bullet}{x}$$

$$-\varepsilon \left\{ \left( \frac{\partial h}{\partial \zeta_x} \right) M_x \stackrel{\bullet}{e} + \left( \frac{\partial h}{\partial x_{sd}} \right) \mathring{x}_{sd} + \left( \frac{\partial h}{\partial \mathring{x}_{sd}} \right) \mathring{x}_{sd} \right\}, \quad \eta(t_0) = z_0 - h(x_0, x_{sd_0}, \mathring{x}_{sd_0})$$

$$\stackrel{\bullet}{e} (t) = \Omega^{-1}(y) \{ A - S_{\theta}^{-1} C^T C \} \Omega(y) e(t) + G(u(t), \widehat{\varsigma}(t)) - G(u(t), \varsigma(t)), \quad e(t_0) = e_0$$

$$y = C \varsigma$$
(5.64)

donde  $\varsigma = col(\varsigma_x, \varsigma_z) = \Phi(x, z)$ , con  $\varsigma_x \in B_x$  y  $\varsigma_z \in B_z$ ,  $e = col(e_x, e_z) = col(\widehat{\varsigma}_x - \varsigma_x, \widehat{\varsigma}_z - \varsigma_z)$  y  $e_x = M_x \epsilon$  donde

$$M_x = \left(\begin{array}{cc} I & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right).$$

Observando que el control compuesto ahora depende del estimado  $(\hat{x}, \hat{\eta})$  y que  $d\hat{\zeta}_x/dt = \hat{\epsilon}_x + d\xi_x/dt = M_x \stackrel{\bullet}{e} + (\partial \Phi/\partial x) \stackrel{\bullet}{x}$ , el sistema (5.64) puede ser reescrito como:

donde  $f_c, g_c, g_c$  y  $g_{c_1}$  son definidas al igual que las seccion 3. y

$$\Delta u_s(x, \hat{x}, x_{sd}, \hat{x}_{sd}) = u_s(\hat{x}, x_{sd}, \hat{x}_{sd}) - u_s(x, x_{sd}, \hat{x}_{sd})$$

$$\Delta u_f(x, \hat{x}, \eta, \hat{\eta}, x_{fd}, dx_{fd}/d\tau) = u_f(\hat{x}, \hat{\eta}, x_{fd}, dx_{fd}/d\tau) - u_f(x, \eta, x_{fd}, dx_{fd}/d\tau).$$
(5.66)

Desde las propiedades de las funciones involucradas en  $u_s$  y  $u_f$ , uno tiene que  $\Delta u_s$  y  $\Delta u_f$  satisfacen las condicion local Lipschitz.

$$\left\| \Delta u_s(x, \hat{x}, x_{sd}, \hat{x}_{sd}) \right\| \le m_s \|e\| . \quad \left\| \Delta u_f(x, \hat{x}, \eta, \widehat{\eta}, x_{fd}, dx_{fd}/d\tau) \right\| \le m_f \|e\| . \quad (5.67)$$

para toda  $(x, \hat{x}, \eta, \hat{\eta}) \in B_x \times B_x \times B_z \times B_z$ , con  $m_s$  y  $m_f$  como las constantes Lipschitz de  $u_s(x, x_{sd}, \hat{x}_{sd})$  y  $u_f(x, \eta, x_{fd}, dx_{fd}/d\tau)$  con respecto a x y  $(x, \eta)$ , respectivamente. A partir del hecho que las columnas de g(x),  $g_1(x)$  y  $g_2(x)$  estan acotadas, se tiene que:

$$\begin{aligned} & \left\| g(x) \Delta u_{s}(x, x, x_{sd}, x_{sd}) \right\| \leq m_{0} m_{s} \|e\| \, , \\ & \left\| g_{1}(x) u_{f}(\hat{x}, \hat{\eta}, x_{fd}, dx_{fd}/d\tau) \right\| \leq m_{1} \left( \delta_{1} \|x\| + \delta_{2} \|\eta\| + \delta_{3} \|e\| \right) \, . \end{aligned}$$

$$\left\| g_{2}(x) \Delta u_{f}(x, x, \eta, \hat{\eta}, x_{fd}, dx_{fd}/d\tau) \right\| \leq m_{2} m_{f} \|e\| \, .$$

$$(5.68)$$

para toda  $x, x \in B_x$ ,  $\eta, \hat{\eta} \in B_z$ ,  $y \in B_z$ ,  $y \in B_z$ ,  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, m_0, m_1 y m_2$  son algunas constantes positivas.

En virtud de las propiedades de todas las funciones involucradas en  $f_c(x, \eta, x_{sd})$ ,  $g_c(x, x_{sd})$ , estas satisfacen las condiciones locales de Lipschitz.

$$||f_c(x, \eta, x_{sd}) - f_c(x, 0, x_{sd})|| = ||F_1(x)\eta|| \le l_{f\eta} ||\eta||, \quad \forall (x, \eta) \in B_x \times B_z$$
 (5.69)

$$||g_e(x, x_{sd}) - g_e(0, x_{sd})|| \le l_{fx_2} ||x|| , \quad \forall \ x, z \in B_x$$
 (5.70)

donde  $l_{f\eta}$ ,  $l_{fx_2}$  son las constantes Lipschitz de  $f_c(x, \eta, x_{sd})$ ), con respecto a la variable rápida  $\eta$ , y  $g_e(x, x_{sd})$ , con respecto a la variable lenta x, ademas,  $f_c(0, 0, 0) = 0$  y  $g_c(0, 0) = 0$ , asi que:

$$||f_c(x, 0, x_{sd})|| \le l_{fx_1} ||x|| + l_{fd_1} ||x_{sd}||, \quad \forall \ x \in B_x$$
 (5.71)

$$||g_e(0, x_{sd})|| \le l_{fd_2} ||x_{sd}||, \quad \forall \ x \in B_x$$
 (5.72)

donde  $l_{fx_1}$  y  $l_{fd_1}$ so constantes positivas y  $l_{fd_2}$  denota la constante de Lipschitz de  $g_e(0, x_{sd})$  con respecto a  $x_{sd}$ . También, de la diferenciabilidad continua de h con respecto a sus argumentos y de los mapeos de  $\Phi$  esto es lo que sucede.

$$\left\| \frac{\partial h}{\partial x} \right\| \le l_{h_{x_1}} \cdot \left\| \frac{\partial h}{\partial \zeta_x} \right\| \le l_{h_{x_2}} \cdot \left\| \frac{\partial h}{\partial x_{sd}} \right\| \le l_{h_{x_3}} \cdot \left\| \frac{\partial h}{\partial x_{sd}} \right\| \le l_{h_{x_4}} \cdot \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right\| \le l_{\Phi}. \tag{5.73}$$

para toda  $x, \zeta_x \in B_x$ con  $l_{h_{x_1}}, l_{h_{x_2}}, l_{h_{x_3}}, l_{h_{x_4}}$  y  $l_{\Phi}$  siendo constantes positivas. Ahora, pongamos.

$$\begin{split} &\alpha_{1} = \left(v_{1} - c_{4}m_{1}\delta_{1}\right), \\ &\alpha_{2} = \frac{\bar{v}_{1}}{\epsilon} - \bar{c}_{4} \left(l_{h_{x_{1}}} + l_{h_{x_{2}}}l_{\Phi}\right) \left(l_{f\eta} + \delta_{2}\right) \\ &\alpha_{3} = \mu N, \\ &\beta_{1} = c_{4}(l_{f\eta} + m_{1}\delta_{2}) + \bar{c}_{4} \left(l_{h_{x_{1}}} + l_{h_{x_{2}}}l_{\Phi}\right) \left(l_{fx_{1}} + b_{2}l_{fx_{2}} + m_{1}\delta_{1}\right) \\ &\beta_{2} = c_{4}(m_{0}m_{s} + m_{1}\delta_{1}), \\ &\beta_{3} = \bar{c}_{4} \left\{ \left(l_{h_{x_{1}}} + l_{h_{x_{2}}}l_{\Phi}\right) + l_{h_{x_{2}}}\right\} \left[m_{0}m_{s} + m_{1}\delta_{3} + \left(l_{fx_{1}} + b_{2}l_{fx_{2}}\right)b_{1}\right] \\ &+ \frac{1}{\epsilon} \bar{c}_{4} m_{2}m_{f} + \bar{c}_{4} l_{h_{x_{2}}} \left(\tilde{\delta}_{0}\tilde{\delta}_{1}\tilde{k}_{1} + \tilde{k}_{2}\right) \\ &\beta_{4} = \bar{c}_{4} \left\{ \left(l_{h_{x_{1}}} + l_{h_{x_{2}}}l_{\Phi}\right) + l_{h_{x_{2}}}\right\} \left(l_{fx_{1}} + b_{2}l_{fx_{2}}\right)b_{1} + \bar{c}_{4} \left(l_{h_{x_{3}}}b_{2} + l_{h_{x_{4}}}b_{3}\right) \\ &\gamma = v_{2} + \frac{\bar{v}_{2}}{\epsilon} \end{split}$$

El siguiente resultado nos da condiciones suficientes para asegurar el acotamiento uniforme del sistema aumentado en lazo cerrado del sistema no-lineal singularmente perturbado (5.65).

Teorema 2: Considere el sistema no-lineal singularmente perturbado (5.2).(5.3) para la cual un control compuesto (5.44).(5.45).(5.46) es diseñado tal que (5.29) y (5.43) son satisfechas. Suponga que un observador (5.54) con velocidad de convergencia exponencial

es diseñado. Entonces, existen algunos números  $0 < \theta_i < 1, i = 1, 2, 3, 4$ . tales que

$$\mu_{co} = \min\left\{\frac{a'}{c_2}, \frac{b'}{\bar{c}_2}, \frac{c'}{\mu N}\right\} > 0 \tag{5.75}$$

donde

$$a' = \alpha_1 - \frac{\beta_1 \theta_1}{2} - \frac{\beta_2 \theta_2}{2}, b' = \alpha_2 - \frac{\beta_1}{2\theta_1} - \frac{\beta_3 \theta_3}{2} - \frac{\beta_4 \theta_4}{2}, c' = \alpha_3 - \frac{\beta_2}{2\theta_2} - \frac{\beta_3}{2\theta_3}$$
 (5.76)

para  $\epsilon$ , suficientemente pequeño, entonces el sistema aumentado en lazo cerrado del sistema singularmente perturbado (5.65) es localmente finalmente acotado (ver apéndice)

#### Prueba:

Consideremos la siguiente función candidata de Lyapunov .

$$L(x, \eta, e) = V_s(x) + W_f(\eta) + V_o(e).$$

Diferenciando  $V_s(x)$  a lo largo de la primera dinámica de (5.65), obtenemos:

$$\overset{\bullet}{V_{s}} \leq -v_{1} \|x\|^{2} + v_{2} + \left\| \left( \frac{\partial V_{s}}{\partial x} \right) F_{1}(x) \eta \right\| \\
+ \left\| \left( \frac{\partial V_{s}}{\partial x} \right) \left[ g(x) \Delta u_{s}(x, \overset{\wedge}{x}, x_{sd}, \overset{\bullet}{x}_{sd}) \right] \right\| + \left\| \left( \frac{\partial V_{s}}{\partial x} \right) \left[ g_{1}(x) u_{f}(\overset{\wedge}{x}, \widetilde{\eta}, x_{fd}, \frac{dx_{fd}}{d\tau}) \right] \right\|.$$
(5.77)

Similarmente, diferenciando  $W_f(\eta)$  a lo largo de la segunda dinámica en (5.65), obtenemos:

$$\hat{W}_{f} = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial W_{f}}{\partial \eta} \right) \left[ g_{c}(x, \eta, x_{fd}) + g_{c_{1}}(x, x_{fd}) \varepsilon \overset{\bullet}{x}_{fd} \right] 
- \left( \frac{\partial W_{f}}{\partial \eta} \right) \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial h}{\partial \dot{\zeta}_{x}} \right) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right] \left[ f_{c}(x, \eta, x_{sd}) + g_{e}(x, x_{sd}) \overset{\bullet}{x}_{sd} \right] 
- \left( \frac{\partial W_{f}}{\partial \eta} \right) \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial h}{\partial \dot{\zeta}_{x}} \right) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right] g(x) \Delta u_{s}(x, \dot{x}, x_{sd}, \dot{x}_{sd}) 
- \left( \frac{\partial W_{f}}{\partial \eta} \right) \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial h}{\partial \dot{\zeta}_{x}} \right) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right] g_{1}(x) u_{f}(\dot{x}, \hat{\eta}, x_{fd}, \frac{dx_{fd}}{d\tau}) 
- \left( \frac{\partial W_{f}}{\partial \eta} \right) \left\{ \left( \frac{\partial h}{\partial \dot{\zeta}_{x}} \right) M_{x} \overset{\bullet}{e} + \left( \frac{\partial h}{\partial x_{sd}} \right) \overset{\bullet}{x}_{sd} + \left( \frac{\partial h}{\partial \dot{x}_{sd}} \right) \overset{\bullet}{x}_{sd} \right\} 
+ \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial W_{f}}{\partial \eta} \right) g_{2}(x) \Delta u_{f}(x, \dot{x}, \eta, \hat{\eta}, x_{fd}, \frac{dx_{fd}}{d\tau}).$$

En la sección 5.3 de este capítulo, mostramos que usando la función  $W_f$ , el sistema (5.37) es localmente uniformemente acotada. Por otra parte, en Kalil (1992) (Capítulo 5, sección 5.7, pags. 234-250), se muestra que cuando x es reemplazado por el estado lento este se conserva, esto es la variable x, la propiedad de estabilidad local del estado  $\eta_{apx} = z - h(x)$  es conservada, esto es.

$$\left(\frac{\partial W_f}{\partial \eta}\right) \left[ g_c(x, \eta, x_{fd}) + g_{c_1}(x, x_{fd}) \varepsilon \, \overset{\bullet}{x}_{fd} \right] \le - \, \bar{v}_1 \, \|\eta\|^2 + \, \bar{v}_2$$

se preserva. Asi que.

$$\begin{aligned}
\dot{W}_{f} &\leq -\frac{1}{\epsilon} \, \bar{v}_{1} \, \|\eta\|^{2} + \frac{1}{\epsilon} \, \bar{v}_{2} \\
&+ \left\| \left( \frac{\partial W_{f}}{\partial \eta} \right) \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial h}{\partial \hat{\zeta}_{x}} \right) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right] \left[ f_{e}(x, \eta, x_{sd}) + g_{e}(x, x_{sd}) \, \dot{x}_{sd} \right] \right\| \\
&+ \left\| \left( \frac{\partial W_{f}}{\partial \eta} \right) \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial h}{\partial \hat{\zeta}_{x}} \right) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right] g(x) \Delta u_{s}(x, \hat{x}, x_{sd}, \dot{x}_{sd}) \right\| \\
&+ \left\| \left( \frac{\partial W_{f}}{\partial \eta} \right) \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial h}{\partial \hat{\zeta}_{x}} \right) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right] g_{1}(x) u_{f}(\hat{x}, \hat{\eta}, x_{fd}, \frac{dx_{fd}}{d\tau}) \right\| \\
&+ \left\| \left( \frac{\partial W_{f}}{\partial \eta} \right) \left\{ \left( \frac{\partial h}{\partial \hat{\zeta}_{x}} \right) M_{x} \Omega^{-1}(y) \left\{ A - S_{\theta}^{-1} C^{T} C \right\} \Omega(y) e(t) \right\} \right\| \\
&+ \left\| \left( \frac{\partial W_{f}}{\partial \eta} \right) \left\{ \left( \frac{\partial h}{\partial \hat{\zeta}_{x}} \right) M_{x} \left\{ G(u(t), \hat{\zeta}(t)) - G(u(t), \hat{\zeta}(t)) \right\} \right\} \right\| \\
&+ \left\| \left( \frac{\partial W_{f}}{\partial \eta} \right) \left\{ \left( \frac{\partial h}{\partial x_{sd}} \right) \dot{x}_{sd} - \left( \frac{\partial h}{\partial \dot{x}_{sd}} \right) \dot{x}_{sd} \right\} \right\| \\
&+ \frac{1}{\epsilon} \left\| \left( \frac{\partial W_{f}}{\partial \eta} \right) g_{2}(x) \Delta u_{f}(x, \dot{x}, \eta, \hat{\eta}) \right\|
\end{aligned}$$

En la misma forma, cuando  $V_o(e)$  es diferenciado a lo largo de las trayectorias de la tercera dinámica de (5.65), y utilizando los resultados de la sección 5.4 (Teorema 1), podemos obtener

$$\vec{V}_o(e) \le -\mu N \|e\|^2. \tag{5.79}$$

A partir de las ecuaciones (28), (43), (68)-(73), obtenemos

$$\left\| \left( \frac{\partial V_s}{\partial x} \right) F_1 \eta \right\| \le c_4 l_{f_{\eta}} \left\| x \right\| \left\| \eta \right\|.$$

$$\left\| \left( \frac{\partial V_s}{\partial x} \right) [g\Delta u_s] \right\| \leq c_4 m_0 m_s \|x\| \|e\|.$$

$$\left\| \left( \frac{\partial V_s}{\partial x} \right) [g_1 u_f] \right\| \leq c_4 m_1 \left( \delta_1 \|x\|^2 + \delta_2 \|x\| \|\eta\| + \delta_3 \|x\| \|e\| \right).$$

$$\left\| \left( \frac{\partial W_f}{\partial \eta} \right) \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial h}{\partial \dot{\varsigma}_x} \right) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right] \left[ f_c + g_e \dot{x}_{sd} \right] \right\| \leq \tilde{c}_4 \left( l_{h_{x_1}} + l_{h_{x_2}} l_{\Phi} \right) \left[ l_{f\eta} \|\eta\|^2 + \left( l_{f_{x_1}} + l_{f_{x_2}} l_{\Phi} \right) \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial h}{\partial \dot{\varsigma}_x} \right) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right] g\Delta u_s \right\| \leq \tilde{c}_4 \left( l_{h_{x_1}} + l_{h_{x_2}} l_{\Phi} \right) m_0 m_s \|\eta\| \|e\|. \quad (5.80)$$

$$\left\| \left( \frac{\partial W_f}{\partial \eta} \right) \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial h}{\partial \dot{\varsigma}_x} \right) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right] g_1 u_f \right\| \leq \tilde{c}_4 \left( l_{h_{x_1}} + l_{h_{x_2}} l_{\Phi} \right) m_1 \left( \delta_1 \|x\|^2 + \delta_2 \|x\| \|\eta\| + \delta_3 \right)$$

$$\left\| \left( \frac{\partial W_f}{\partial \eta} \right) \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial h}{\partial \dot{\varsigma}_x} \right) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right] g_1 u_f \right\| \leq \tilde{c}_4 \left( l_{h_{x_1}} + l_{h_{x_2}} l_{\Phi} \right) m_1 \left( \delta_1 \|x\|^2 + \delta_2 \|x\| \|\eta\| + \delta_3 \right)$$

$$\left\| \left( \frac{\partial W_f}{\partial \eta} \right) \left\{ \left( \frac{\partial h}{\partial \dot{\varsigma}_x} \right) M_x \Omega^{-1} \left\{ A - S_{\theta}^{-1} C^T C \right\} \Omega e \right\} \right\| \leq \tilde{c}_4 \left| l_{h_{x_2}} \tilde{\delta}_0 \tilde{\delta}_1 \tilde{k}_1 \|\eta\| \|e\|$$

$$\left\| \left( \frac{\partial W_f}{\partial \eta} \right) \left\{ \left( \frac{\partial h}{\partial \dot{\varsigma}_{x_d}} \right) M_x \left\{ G(u, \hat{\varsigma}) - G(u(, \varsigma) \right\} \right\} \right\| \leq \tilde{c}_4 \left| l_{h_{x_2}} \tilde{\delta}_2 \right\| \tilde{\delta}_1 \|\eta\| \|e\|$$

$$\left\| \left( \frac{\partial W_f}{\partial \eta} \right) \left\{ \left( \frac{\partial h}{\partial \dot{\varsigma}_{x_d}} \right) \dot{x}_{sd} + \left( \frac{\partial h}{\partial \dot{x}_{x_d}} \right) \dot{x}_{sd}^* \right\} \right\| \leq \tilde{c}_4 \left| l_{h_{x_2}} \tilde{\delta}_2 \right| \eta \| \|e\|$$

Combinando estas desigualdades en (5.77).(5.78) y (5.79), y usando la propiedad  $ab \le (k/2)a^2 + (1/2k)b^2$ , con  $k \in (0,1)$ , resulta

$$\dot{L} \le -a' \|x\|^2 - b' \|\eta\|^2 - c' \|e\|^2 + d' \le -\mu_{co} L + \lambda \tag{5.81}$$

donde  $d' = \gamma + \beta_4/2\theta_4$ . Sea  $\mu_{co}$  definida por (5.75), entonces se sigue que:

$$\overset{\bullet}{L} \leq -\mu_{co}L + d'$$

lo cual implica que

$$L(x(t), \eta(t), e(t)) \le \left[ L(x_0, \eta_0, e_0) - \frac{d'}{\mu_{co}} \right] e^{-\mu_{co}(t - t_0)} + \frac{d'}{\mu_{co}}.$$

Entonces, los estados  $x, \eta$  y e son localmente finalmente acotados y deberán converger a la bola dada por

$$(x, \eta, e) = \left\{ (x, \eta, e) : L(x, \eta, e) \le \frac{d'}{\mu_{co}} \right\}.$$

Observemos que cuando el estado (x, z) está disponible (es decir no existe observador en el sistema ), y ahí no existe un vector de referencia  $(i.e. | x_{sd} = x_{fd} = 0)$  la primera y la cuarta designaldad de la ecuación (5.80) resultan en las asi llamadas condiciones de interconexión, es decir

$$\frac{\partial V_s}{\partial x} [f_c(x, \eta, 0) - f_c(x, 0, 0)] \le c_4 l_{f\eta} ||x|| ||\eta||$$
(5.82)

$$\left\| \left( \frac{\partial W_f}{\partial x} \right) \left[ f_c(x, \eta, 0) \right] \right\| \le \tilde{c}_4 \, l_{h_x} \left[ l_{f\eta} \, \|\eta\|^2 + l_{f_{x1}} \, \|x\| \, \|\eta\| \right].$$

# 5.6 Aplicación para el Modelo del Manipulador

Mediante la asignación de  $x_1=q$ .  $x_2=\overset{\bullet}{q}$ .  $z_1=k(q-q_m)$ .  $z_2=\varepsilon k(\overset{\bullet}{q}-\overset{\bullet}{q}_m)$  donde  $k=\frac{\alpha}{\varepsilon^2}$ . es posible escribir el modelo (5.1) en la forma standard singularmente perturbada (5.2). es decir.

$$\begin{cases}
\overset{\bullet}{x} = f_1(x) + F_1(x)z \\
\varepsilon \overset{\bullet}{z} = f_2(x) + F_2(x)z + g_2(x)u
\end{cases} (5.83)$$

con

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{mgl}{l}\sin(x_1) \end{pmatrix}$$
.  $F_1(x) = F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{l} & 0 \end{pmatrix}$ .  $g_1(x) = 0$ .

$$f_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\alpha mgl}{I}\sin(x_1) + \frac{\alpha B}{J}x_2 \end{pmatrix} \cdot F_2(x) = F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha\left(\frac{1}{I} + \frac{1}{J}\right) & -\frac{\varepsilon B}{J} \end{pmatrix} \cdot g_2(x) = g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha\left(\frac{1}{I} + \frac{1}{J}\right) & -\frac{\varepsilon B}{J} \end{pmatrix}$$

donde  $\alpha=k\varepsilon^2$  es el coeficiente de rigídez de la articulación flexible, el cual es asumido como una aproximación  $O(\frac{1}{\varepsilon^2})$  para el parámetro  $\varepsilon$ .

### 5.6.1 Diseño de la Ley de Control

Cuando  $\varepsilon = 0$ , uno obtiene una raíz única  $z_{s_1} = \frac{-1}{(I+J)} \{ Jmgl \sin(x_{s_1}) + Bx_{s_2} + Iu_s \}$ ,  $z_{s_2} = 0$  y entonces el sistema reducido lento toma la forma (5.4) con

$$f(x_s) = \begin{pmatrix} x_{s_2} \\ -\frac{mql}{(I-J)}\sin(x_{s_1}) - \frac{B}{(I-J)}x_{s_2} \end{pmatrix}. \qquad g(x_s) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{(I-J)} \end{pmatrix}$$
 (5.84)

Dado que se desea que la posición del rotor siga una señal de referencia dada. la siguiente función de switcheo es seleccionada.

$$\sigma_s = s_1(x_1 - x_{sd_1}) + s_2(x_2 - x_{sd_2}) \tag{5.85}$$

donde  $s_1$  y  $s_2$  son coeficientes reales constantes, y  $x_{sd_1}$  es la señal de referencia ( $x_{sd_2} = \overset{\bullet}{x}_{sd_1}$ ). Es supuesto también que  $x_{sd_1}$  y  $x_{sd_2}$  junto con sus derivadas de tiempo están acotadas para toda t>0. La selección de la función de switcheo (5.85) conduce, de acuerdo con la sección 5.2, hacia el control lento  $u_s=u_{se}+u_{sN}$  con

$$u_{se} = mgl\sin(x_{s_1}) + \left[B - \frac{s_1}{s_2}(I+J)\right]x_{s_2} + \frac{s_1}{s_2}(I+J)\overset{\bullet}{x}_{sd_1} + (I+J)\overset{\bullet}{x}_{sd_2}$$
 (5.86)

$$u_{sN} = -(I+J)L_s(x_s)\frac{s_1}{s_2}(x_{s_1} - x_{sd_1}) - (I+J)L_s(x_s)(x_{s_2} - x_{sd_2})$$
 (5.87)

donde  $L_s(x_s)$  ha sido seleccionada, por simplicidad, como una constante estrictamente positiva  $L_s(x_s) = l_s > 0$ . Despues de la substitución del control lento  $u_s$  dentro del subsistema reducido lento, nosotros obtenemos el sistema reducido lento en lazo-cerrado

$$\dot{x}_{s} = f_{e}(x_{s}, 0) + p_{s}(0, x_{sd}, \dot{x}_{sd}) = A_{s}x_{s} + p_{s}(0, x_{sd}, \dot{x}_{sd}) 
= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{s_{1}}{s_{2}}l_{s} & -\left(\frac{s_{1}}{s_{2}} + l_{s}\right) \end{pmatrix} x_{s} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{s_{1}}{s_{2}} \dot{x}_{sd_{1}} + \dot{x}_{sd_{2}} + l_{s}\frac{s_{1}}{s_{2}} x_{sd_{1}} + l_{s}x_{sd_{2}} \end{pmatrix}.$$
(5.88)

donde  $x_s=0$  es un punto de equilibrio exponencialmente estable de  $x_s=f_\epsilon(x_s,0)$  siempre que las constantes  $s_1,s_2$  y  $l_s$  sean escogidas de tal forma que el polinomio

$$s^2 + s\left(\frac{s_1}{s_2} + l_s\right) + \frac{s_1 l_s}{s_2} = 0$$

sea Hurwitz. Observemos que  $\|p_s(0,x_{sd},x_{sd})\| \le l_2 \|x_{sd}\| + l_3 \|x_{sd}\|$ . Mediante la selección de  $s_1>0$  y  $s_2>0$  uno garantiza el acotamiento finalmente acotado del sistema (5.88). En particular, existe una función candidata de Lyapunov  $V_s(x_s)=x_s^T P_s x_s$  donde  $P_s$  es una matriz simétrica definida positiva, la cual es solución de la ecuación de Lyapunov  $P_s A_s + A_s^T P_s = -Q_s$ , con  $Q_s$  una matriz arbitraria simétrica definida positiva, tal que la derivada de tiempo de  $V_s$  a lo largo de las trayectorias de (5.88) satisface (5.29) con  $c_3=\lambda_{\min}(Q_s)$ ,  $c_4=\lambda_{\max}(P_s)$  y  $l_{p_s}=\left[l_1+\frac{1}{2}(l_2b_1+l_3b_2)\kappa_1\right]$ 

En esta aplicación, uno necesita justamente estabilizar las variables rápidas hacia el origen. Así, uno puede seleccionar la función de switcheo rápida

$$\sigma_f = \bar{s}_1 \, \eta_1 + \, \bar{s}_2 \, \eta_2 \tag{5.89}$$

donde  $\bar{s}_1$ y  $\bar{s}_2$ son coeficientes reales constantes. En concordancia con la sección 5.3 de este capítulo, el control rápido resulta

$$u_f = u_{f_e} + u_{f_v} (5.90)$$

con

$$u_{f_e} = -\left(\frac{1}{I} + \frac{1}{J}\right) J \eta_{apx_1} + \left(\frac{\bar{s}_1}{\bar{s}_2} \frac{J}{\alpha} - \frac{\varepsilon B}{\alpha}\right) \eta_{apx_2}$$
 (5.91)

$$u_{f_N} = \frac{J}{\alpha} l_f \frac{\tilde{s}_1}{\tilde{s}_2} \eta_{apx_1} + \frac{J l_f}{\alpha} \eta_{apx_2}$$
 (5.92)

donde, por simplidad,  $L_f(\eta_{apx})$  es seleccionada como una constante estrictamente positiva, es decir  $L_f(\eta_{apx}) = l_f > 0$ . La ecuación en modo deslizante rápido en lazo-cerrado toma la forma siguiente:

$$\frac{d\eta_{apx}}{d\tau} = g_c(\tilde{x}, \eta_{apx}, 0)$$

$$= A_f \eta_{apx} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\tilde{s}_1}{\tilde{s}_2} l_f & -\left(\frac{\tilde{s}_1}{\tilde{s}_2} + l_f\right) \end{pmatrix} \eta_{apx}.$$
(5.93)

Siempre que las constantes  $\tilde{s}_1,\tilde{s}_2y\ l_f$  sean seleccionadas de tal manera que el polinomio

$$s^{2} + s(\frac{\bar{s}_{1}}{\bar{s}_{2}} + l_{f}) + \frac{\bar{s}_{1}}{\bar{s}_{2}}l_{f} = 0$$
 (5.94)

tenga estrictamente todas las raíces en el semiplano complejo izquierdo, el sistema (5.93) es exponencialmente estable. Por esto, ahí existe una función candidata de Lyapunov  $W_f(\eta_{apx}) = \eta_{apx}^T P_f \eta_{apx}$  donde  $P_f$  es una matriz simétrica definida positiva, la cual es solución de la ecuación de Lyapunov  $P_f A_f + A_f^T P_f = -Q_f$ , con  $Q_f$  una matriz simétrica