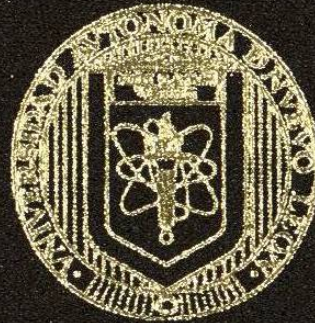


UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON  
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POST-GRADO



APLICACION DEL CONTROL DIGITAL  
EN EL CONTROL DE MOTORES

POR

ING. ALFREDO PUENTE MARTINEZ

TESIS

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA  
INGENIERIA ELECTRICA CON ESPECIALIDAD EN CONTROL

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L.

JUNIO DE 1999



A.P.M.

APPLICAZIONE DEL CONTROLLO DIGITALE ENERGETICO  
DEI MOTORI

TM

Z5853

.M2

FIME

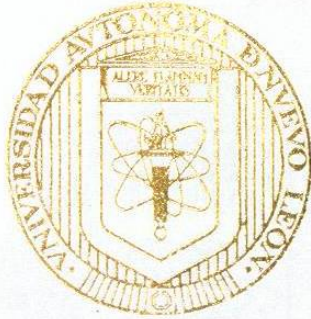
1999

P8



1020126454

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON  
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POST-GRADO



APLICACION DEL CONTROL DIGITAL  
EN EL CONTROL DE MOTORES

POR

ING. ALFREDO PUENTE MARTINEZ

TESIS

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA  
INGENIERIA ELECTRICA CON ESPECIALIDAD EN CONTROL

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L.

JUNIO DE 1999

TM  
25853  
.M  
FINE  
199  
P8

0131-59360



FONDO  
TESIS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERIA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POST-GRADO



APLICACIÓN DEL CONTROL DIGITAL EN EL CONTROL DE MOTORES

POR

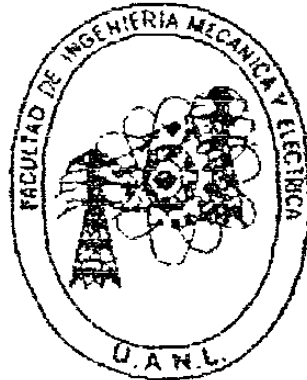
ING. ALFREDO PUENTE MARTÍNEZ

TESIS

EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA  
ELÉCTRICA CON ESPECIALIDAD EN CONTROL

MONTERREY, N.L., JUNIO DE 1999

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERIA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POST-GRADO



APLICACIÓN DEL CONTROL DIGITAL EN EL CONTROL DE MOTORES

POR

ING. ALFREDO PUENTE MARTÍNEZ

TESIS

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA INGENIERIA  
ELÉCTRICA CON ESPECIALIDAD EN CONTROL

MONTERREY, N.L. JUNIO DE 1999

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON  
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POST-GRADO

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis "Aplicación del control digital en el control de motores" realizada por el Ing. Alfredo Puente Martínez, matrícula 1036299 sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestro en Ciencias de la Ingeniería eléctrica con especialidad en Control.

El comité de Tesis



---

Asesor

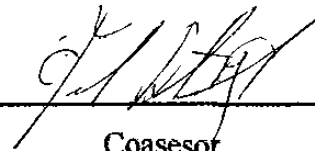
Dr. Cesar Elizondo González



---

Coasesor

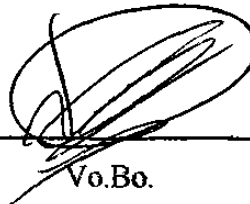
Dr. Gerardo Romero Galvan



---

Coasesor

Dr. Fernando Betancourt Ramirez



---

Vo.Bo.

M.C. Roberto Villareal Garza

División de Estudios de Post-grado

San Nicolás de los Garza, N.L., Junio de 1999



# Agradecimientos

Agradezco a mi padre Alfredo Puente Díaz, quien me apoyo y tuvo la plena confianza en lo que hacia,

A mi madre Ruth I. Martínez De La Garza, que se intereso mucho por mi salud,

A mi hermana Ruth Beatriz Puente Martínez por ser como es; y a toda mi Familia,

A mi amigo, Alfredo González Fuentevilla mi mejor amigo.

Además, Agradezco

- Dr. Cesar Elizondo González, por su confianza y enseñanza.
- Dr. Gerardo Romero Galván, por sus consejos brindados.
- Dr. Fernando Betancourt Ramírez un ejemplo a seguir y firmes convicciones.

# Dedicatoria

A mi esposa Lissette Montaña Ramón a quien amo

Y

A mi hijo Alfredo Yael Puente Montaña

# PROLOGO

Esta tesis trata sobre la Aplicación del Control Digital en el Control de Motores que fue elaborada por el Ing. Alfredo Puente Martínez, como opción para la obtención de Grado en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica con Especialidad en Control, que presenta en forma clara y objetiva los conceptos en el área de sistemas de motores de inducción manipulados por computadora para fundamentar el entendimiento en los proyectos de control de motores.

En general se han tratado temas de forma teórica y práctica que contribuyen de forma armoniosa en el desarrollo de los sistemas de control electrónico de motores, haciendo énfasis en la solución de los problemas con la ayuda de sistemas de programas de computadora resultando ser de gran utilidad para la implementación en sistemas de procesamiento digital. Al final de la tesis se presenta una bibliografía en las que se listan las obras que el lector pueda consultar para ampliar sus conocimientos en determinados temas.

En cada capítulo se desarrolla la teoría necesaria para el diseño que cuenta con las bases y ejemplos necesarios paso a paso y con las respuestas de los mismos.



# SÍNTESIS

El desarrollo de nuevos equipos inversores de potencia a permitido una aplicación de los motores de inducción en más campos del área industrial, consolidando a estos en procesos de dinámica estricta.

Hablando de procesos de operación en régimen permanente la mayoría de los sistemas de motores de inducción controlados con inversores proporcionan un rendimiento satisfactorio pero no una respuesta dinámica buena, por lo cual muchos de los proyectos de control no podían ser llevados a cabo por inversores típicos dando origen al desarrollo de nuevas técnicas que permitan mejores respuestas

El control es una parte fundamental del análisis de todos los procesos dinámicos, formando parte también de nuestra propia existencia, la experimentación y diseño del control en un principio, fue tomando un lugar importante en el área militar, espacial y finalmente en el desarrollo industrial, conformando maravillosamente la tecnología con la ciencia. En la actualidad los sistemas de control nos permite manipular en una forma adecuada las variables de procesos, afín de obtener una calidad satisfactoria y mayor rapidez en los resultados finales.

La ingeniería de control clásica (Teoría de control) tiene lugar en el desarrollo en la mayoría de los proyectos de Control en la industria, debido a que es la mas difundida a nivel profesional y presenta menos complicación en el planteamiento de problemas, sin embargo el creciente desarrollo de la tecnología hace posible la implementación de técnicas de control mas avanzadas (Control Moderno), permitiéndonos manejar proyectos donde existan múltiples entradas y múltiples salidas y el enfoque de la modificación de dinámicas en un sistema fijo, haciendo favorable el control optimo.

Aunque la técnica de control moderna nace a principios de los años 60's, hasta la fecha muchos de los controladores (parte fundamental en los proyectos de control) están basados en computadoras analógicas donde la implementación del control moderno no es factible, debida a la poca precisión de los mismos.

Por otra parte el control discreto a permitido llevar a cabo procesos en el área de regulación óptima exitosamente, con controles basados por computadoras digitales, obteniendo mejores resultados, aunque el desarrollo de este tipo de sistema de control hasta hace poco solo podía ser llevado a cabo en dinámicas más lentas, tales como control de temperatura de hornos, reactores químicos, regulación de presión de tanques grandes y de nivel de líquido, sin embargo en el control de velocidad de motores, servoposicionadores y control de flujo, resultaban ineficientes, por consecuencia de su tipo de dinámica, que tiene mucho mayor rapidez que los anteriores, esto era debido principalmente a la necesidad de muestras requeridas, que tales cantidades superaban por mucho a los procesos mencionados previamente. Actualmente se han desarrollado convertidores digitales de mayor rapidez y de mayor resolución, al igual que los microprocesadores y microcontroladores, siendo el caso de los convertidores, ahora teniendo una mayor calidad y rapidez, en el análisis de muestreo y en el caso de los microprocesadores una mayor cantidad de cálculos en menos tiempo.

En el caso de control de velocidad de motores, donde requieren en mayor parte controladores compensadores del tipo de atraso en adelanto, siendo en versiones más populares los controles de tipo PID (Control proporcional, integral y derivativo), que aún se presentan en forma analógica, que es desfavorable para las nuevas tendencias en las técnicas mas avanzadas, tales como el control de modelo de referencia y el control adaptable.

Los diversos problemas que entraña esta ciencia, son la multiplicidad de los factores de la naturaleza misma, tales como la temperatura ambiente, el deterioro, la inexactitud de los parámetros, entre otros, que forman parte del sistema, siendo así inevitables. Esto

inspira a desarrollos de técnicas de control nuevas, tales como el control adaptable y el control robusto, donde el primero basa su desenfrenada tarea de identificar lo mejor posible el sistema mediante las técnicas de los métodos numéricos y base a esto poder usar algunas de las técnicas de control óptimo, mientras que el control robusto plantea en forma permisiva la incertidumbre de los parámetros con el concepto de todas las posibilidades que se puedan presentar dentro de los límites de incertidumbre y establecer un criterio de tolerancia.

Ahora la importancia de los sistemas de control de velocidad de motores, juega un papel muy importante en la industria, debido a las favorables demandas que día a día se presentan en procesos de mayor calidad, estos dependen en grado del área de esta disposición de equipos, que entablan en forma primaria los resultados del proceso.

En la industria donde muchos de los procesos requieren de sistemas de velocidad regulada y par controlado, la disposición de equipos hasta la fecha eran y son implementados en el control de motores de corriente directa, por muchas razones. Esto es debido a su linealidad que presenta bajo sus señales de control, tal como el par controlado, muy necesario en la industria de laminación de productos, donde la tensión juega un papel muy importante y la velocidad, que responde a un sistema de dinámica lineal, que puede ser controlada bajo las técnicas de los sistemas de control lineal, ofreciendo así una brecha para el estudio en el análisis de optimización, sin embargo las desventajas de la utilización de los motores de corriente directa, entornan críticos problemas respecto a los motores de corriente alterna, debido a la necesidad de un mantenimiento perpetuo y frecuente, además es muy costoso comparado con los motores de corriente alterna que requieren muy poco mantenimiento y son más rápidos y eficientes, aunque las técnicas de operación y los análisis de Control resultaban muy complicados, para ser operados con sistemas de control analógico la evolución de las computadoras digitales hizo factible el desarrollo de los motores de corriente alterna en el campo de control.



Este trabajo esta dividido en 7 capítulos. En el Capítulo 1 se presentan los siguientes puntos Descripción del Problema a Resolver, Objetivo de al Tesis, Justificación del Trabajo de Tesis, Metodología, Limites del Estudio y Revisión Bibliográfica como introducción al tema de control de motores, en el Capítulo 2 se inician las bases del análisis de las maquinas de inducción, lo cual se realizará con herramientas matemáticas que involucran modelos matemáticos del motor de CD como de CA, la ecuación de Euler como resolución de método numérico para ecuaciones diferenciales lineales y no lineales y algunas fórmulas básicas empleadas para el análisis de motores. En el Capítulo 3 se desarrollan los principios de electrónica de potencia en conmutación para la aplicación en motores de inducción y el análisis de series de Fourier para la formulación de fenómenos armónicos. En el Capítulo 4 se tratarán los temas que involucran el análisis de control lineal enfocado a los sistemas de optimización dinámica y adaptivo, utilizando las herramientas matemáticas que involucran el segundo método de Lyapunov y la ecuación algebraica de Ricatti. El Capitulo 5 formará la parte del desarrollo para proyectos en el control adaptable, que involucran las estrategias para el análisis con el apoyo del método numérico de mínimos cuadrados. El Capítulo 6 se expondrán los dispositivos que se encuentran en el mercado para la posible elaboración de proyectos viables, y el programa para computadora SIMPROTC (Simulación de Prototipos de Control), como herramientas para diseño de sistemas de control, y para finalizar se presentaran las conclusiones y recomendaciones en el Capítulo 7.

# ÍNDICE

SINTESIS.....	I
LISTA DE FIGURAS.....	VII
1. INTRODUCCIÓN.....	1
1.1 Descripción del problema a resolver.....	1
1.2 Objetivo de la tesis.....	1
1.3 Justificación del trabajo de tesis.....	2
1.4 Metodología.....	3
1.5 Límites del estudio.....	3
1.6 Revisión bibliográfica.....	4
2. ANÁLISIS DE MÁQUINAS ELÉCTRICAS ENFOCADO AL CONTROL.....	5
2.1 Desarrollo de modelos físicos de los motores.....	6
2.1.1 Motores de corriente continua controlados por inducido.....	6
2.1.2 El motor de inducción jaula de ardilla.....	11
2.2 Aproximación lineal por la serie reducida de Taylor.....	15
2.2.1 Linealización de Funciones de una variable de dos y de una Ecuación diferencial.....	17
2.2.2 Equivalente lineal de la Ecuación diferencial del motor de inducción.....	20
2.3 Resolución de ecuaciones diferenciales no lineales por métodos numéricos.....	24
2.3.1 Resolución del modelo dinámico del motor de inducción (Ejemplo).....	27
3. LOS SISTEMAS ELECTRÓNICOS DE POTENCIA DE BASE EN EL CONTROL DE MOTORES CA.....	30
3.1 Interpretación de señales por el análisis en series de Fourier.....	31
3.2 Modulación de anchura de pulso (PWM).....	37
3.3 Inversor polifásico: PWM.....	39

3.4	Control de velocidad de motores de compensación por deslizamiento.....	43
3.5	Sistema de control por par controlado.....	44
3.6	Sistema de control orientado al campo (FOC) .....	46
4.	IMPLEMENTACIÓN DE LOS ANÁLISIS DE OPTIMIZACIÓN.....	49
4.1	Optimización de los sistemas de control por medio del segundo método de Lyapunov.....	51
4.2	Aplicación de un modelo dinámico de motor.....	53
4.3	Diseño de sistemas de control discreto de regulación óptima.....	57
5.	DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL DIGITAL Y ADAPTACIÓN.....	60
5.1	Desarrollo de algoritmos de control.....	61
5.2	Solución de un filtro exponencial.....	65
5.3	Control Adaptable.....	65
5.3.1	Identificación del proceso.....	66
5.3.2	Identificando el orden y los parámetros del proceso.....	69
5.3.3	Identificación del proceso y control adaptivo.....	73
6.	DISPOSITIVOS Y HERRAMIENTAS.....	76
6.1	Dispositivos viables para la implementación.....	76
6.2	Proyecto para análisis de control por computadora.....	77
7.	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	85
	BIBLIOGRAFÍA.....	87
	AUTOBIOGRAFÍA.....	88



# LISTA DE FIGURAS

Número	Título	Página
2.1	(a) Diagrama esquemático de un motor CC controlado por inducido.....	
	(b) Diagrama de bloques.....	7
2.2	Curvas de par que presentan los motores de inducción.....	11
2.3	Diagrama de par respecto al deslizamiento por unidad.....	13
2.4	Diagrama de la tangente de una función no lineal.....	18
2.5	Diagrama de coordenadas de la función de la pendiente.....	25
2.6	Diagrama de velocidad angular del rotor de un motor de inducción.....	29
3.1	Simulación de un solo ancho de pulso.....	32
3.2	Gráfica de modulación de anchura de pulso por computadora.....	34
3.3	Perfil armónico de la modulación de un solo ancho de pulso.....	36
3.4	Modulación en anchura de pulsos con simetría impar.....	37
3.5	Diagrama de salida de un inversor simple de onda cuadrada.....	38
3.6	Modulación en anchura de pulsos con modificación en cada pulso.....	39
3.7	Diagrama del circuito de potencia del inversor trifásico PWM.....	40
3.8	Diagrama esquemático de modulación.....	41
3.9	Sistema de control de un inversor con esquema de blocs.....	42
3.10	Sistema de control por compensación por deslizamiento.....	43
3.11	Diagrama de un sistema de control de tracción torque.....	44
3.12	Circuito equivalente del motor de inducción.....	45
3.13	(a) Rotación de ejes.....	47
	(b) Control orientado al campo directo.....	
	(c) Control indirecto orientado al campo.....	48
4.1	Sistema de lazo cerrado de control.....	54
5.1	Muestreo de una señal analógica.....	61
5.2	Respuesta de un filtro exponencial a un escala y a una rampa.....	63
5.3	Diagrama de lazo con filtro.....	64

5.4	Identificación exponencial del proceso dinámico.....	68
5.5	Esquema de lógica de un control Adaptable.....	73
5.6	Respuesta del sistema de lazo cerrado con o sin Adapción.....	75
6.1	Pantalla inicial del SIMPROTC.....	78
6.2	Selección del modelo y entrada de datos.....	80
6.3	Representación gráfica del modelo dinámico.....	81
6.4	Selección para modelo de muestreo.....	82
6.5	Representación del registro de muestreo y los datos de los coeficientes..... de la ecuación en diferencia.....	83
6.6	Resultado gráfico de la salida del sistema Adaptado.....	84

# CAPITULO 1

## INTRODUCCION

### 1.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA A RESOLVER

En esta tesis se presentan los fundamentos básicos para el análisis y desarrollo de proyectos de control de motores de corriente alterna CA (Motores de Inducción), así como las estrategias de diseños de sistemas inversores.

Hablando de procesos de operación en régimen permanente la mayoría de los inversores proporcionan un rendimiento satisfactorio pero no una respuesta dinámica buena, por lo cual muchos de los proyectos de control no podían ser llevados a cabo por inversores típicos dando origen al desarrollo de nuevas técnicas que permitan mejores respuestas tales como, la técnica de control orientado al campo (FOC), conocido también como control vectorial y las técnicas de control adaptable en sistemas de control de lazo de par controlado de motores de corriente alterna CA, que es una versión robusta de los sistemas (FOC), siendo este último como parte fundamental a tratar. Así una buena dinámica puede permitir un mejor desarrollo óptimo.

### 1.2 OBJETIVO DE LA TESIS

Describir y analizar la metodología básica para la implementación de la teoría de optimización en los sistemas dinámicos enfocado al control de motores de inducción,

donde el objetivo principal es cubrir las técnicas más viables para la elaboración de prototipos de control en operación óptima de forma armoniosa, apoyado en los sistemas de control digital para su aplicación.

### 1.3 JUSTIFICACIÓN DEL TRABAJO DE TESIS

La importancia de los sistemas de control de velocidad de motores, juega un papel muy importante en la industria, debido a las favorables demandas que día a día se presentan en procesos de mayor calidad, estos dependen en grado del área de esta disposición de equipos, que entablan en forma primaria los resultados del proceso.

En la industria donde muchos de los procesos requieren de sistemas de velocidad regulada y par controlado, la disposición de equipos hasta la fecha eran y son implementados en el control de motores de corriente directa CD, por muchas razones. Esto es debido a su linealidad que presenta bajo sus señales de control, tal como el par controlado, muy necesario en la industria de laminación de productos, donde la tensión juega un papel muy importante y la velocidad, que responde a un sistema de dinámica lineal, que puede ser controlada bajo las técnicas de los sistemas de control lineal, ofreciendo así una brecha para el estudio en el análisis de optimización, sin embargo las desventajas de la utilización de los motores de corriente directa, entornan críticos problemas respecto a los motores de corriente alterna, debido a la necesidad de un mantenimiento perpetuo y frecuente, además es muy costoso comparado con los motores de corriente alterna que requieren muy poco mantenimiento y son más rápidos y eficientes, aunque las técnicas de operación y los análisis de Control resultaban muy complicados, para ser operados con sistemas de control analógico la evolución de las computadoras digitales y bajo costo actual hizo factible el desarrollo de los motores de corriente alterna en el campo de control.

## 1.4 METODOLOGÍA

Bajo las condiciones de operación, propongo las estrategias para la implementación del control lineal en los motores de inducción. Si bien no resulta benéfico, plantear el análisis de un motor de inducción en forma natural, ya que tal dinámica forma parte de un sistema no lineal, que en forma concreta no conduce a nada bajo las técnicas de control lineal. En el Capítulo 3, se presentará una técnica de lazos de control, que nos permitirá manipular un motor de inducción en forma muy semejante a un motor CD, que estará controlado bajo una señal de comando de par, facilitando mucho más el análisis de control. Aunque el uso de las técnicas del control no lineal podrían sacar mayor provecho en el rendimiento de la operación de motores de inducción ya que en su base son sistemas no lineales, actualmente la base de optimización se encuentra supeditada a las técnicas de control adaptable, que estas solo pueden ser aplicadas exclusivamente a sistemas lineales.

Por el cual la propuesta a seguir sera:

- Diseñar un sistema de lazos de control linealizantes.
- Postular un modelo aproximado y efectuar un proceso de identificación, para algunas alinealidades que presente el sistema e incertidumbre de sus parametros.
- Proseguir con alguna técnica de optimización bajo la acción de un control.

## 1.5 LIMITES DEL ESTUDIO

Solo se contemplara el estudio del control de motores de inducción para la aplicación en par y velocidad tal para el caso de control linealizante para tracción de par controlado y una representación breve de los sistemas (FOC). Para sistemas de optimización dinamica, el análisis de optimización estadístico cuadrático para sistemas continuos y el regulador lineal cuadrático (lqr), para sistemas discretos. Una explicación somera de los

sistema de control digital con ejemplos y con las técnicas de identificación por el método de mínimos cuadrados y sistemas de adaptación.

## 1.6 REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

- [1]. Electrónica de Potencia, Muhammad H. Rashid, Prentice Hall, 1993
- 15.2.2. Control del Voltaje de Estator, Pag. 549.
  - 10.6.1. Modulación de un solo Ancho de Pulso, Pag. 372.
    - Control Orientado al Campo del Motor de Inducción, Pag. 574.
    - Apéndice E (Análisis de Fourier), Pag. 643.
- [2]. Principles of Electric Machines and Power Electronics, P.C. Sen, Wiley, 1996.
- 5.9 Performan Characteristics, Pag. 233.
  - 5.13.5 Closed – Loop Control, Pag, 260.
- [3]. Ingeniería de Control Moderna, Katsuhiko Ogata, Prentice Hall, 1993.
- Relación Par Inercia, Pag, 133.
  - Análisis Vectorial. Pag. 183.
  - Teorema de Euler, Pag. 17.
  - Sistemas de Control Optimo Cuadratico, Pag, 891.
  - Sistemas de Control Adaptable, Pag, 905.
- [4]. Principles and Practice of Automatic Control, Carlos A. Smith, Ph.D., P.E., 1997.
- 2.6.2 Linearization of Functions, Pag, 62.
  - 15.1 Development of Control Algorithms, Pag, 650.
- [5]. Chemical Process Control, George Stefanopoulos, Prentice Hall, 1984.
- 30.5 Design of Optimal Regulatory Control Systems, Pag, 650.
  - 31.1 Process Identification, Pag, 657.
  - 31.2 Proces Identiffication and Adptive Control, Pag, 662.



# CAPITULO 2

## ANÁLISIS DE MÁQUINAS ELÉCTRICAS ENFOCADO AL CONTROL

En este Capítulo se presentará la formulación de las ecuaciones dinámicas de las máquinas eléctricas como interés básico para el análisis de control, con la metodología tanto del análisis clásico como del moderno, tratando como temas de inicio la representación de los modelos en función de la frecuencia (función de transferencia) y las ecuaciones en el espacio de los estados, (espacio de los coeficientes), también se argumentará las técnicas de aproximación lineal (Series de Taylor), y como resolución de ecuaciones diferenciales por el análisis de los métodos numéricos (Ecuación de Euler) y finalizando el capítulo se tratará el diseño para la operación de los motores de inducción bajo un sistema que permitirá la ejecución en forma lineal por medio de una señal de comando de par.

Todo esto tiene interés para la implementación y desarrollo de las máquinas eléctricas en el campo de control, justificando la aportación de este Capítulo, sirviendo como resultado en planteamiento de diseños que puedan ser usados como análisis en el contenido de los siguientes Capítulos.

## 2.1 DESARROLLO DE MODELOS FISICOS DE LOS MOTORES

2.1.1 MOTOTORES DE CORRIENTE CONTINUA CONTROLADOS POR INDUCIDO. Frecuentemente se emplea un motor de corriente continua en sistemas de control en que se necesita una apreciable cantidad de potencia en el eje. Los motores de corriente continua CC son mucho más eficientes que los servomotores de dos fases.

Las características ideales del servomotor de CC controlado en el inducido asemeja las características ideales del servomotor de CA de dos fases.

Sea el motor de CC controlado en el inducido que puede verse en la Figura (2.1 a).

$R_a$  = resistencia del devanado de inducido en ohm.

$L_a$  = inductancia del devanado de inducido en henry..

$i_a$  = corriente del devanado de inducido en amperes.

$i_f$  = corriente de campo en amperes.

$e_a$  = tensión aplicada a la armadura en volts.

$e_b$  = fuerza contra-electromotriz en volts.

$\theta$  = desplazamiento angular del eje del motor en radianes.

$T$  = par desarrollado en libras - pie.

$J$  = momento de inercia equivalente del motor y carga referido al eje del motor en libras - pie.

$f$  = coeficiente de fricción viscosa equivalente de motor y carga referido al eje del motor en libras - pie / rad / seg.

El par  $T$  desarrollado por el motor es proporcional al producto de la corriente de inducido  $i_a$  y el flujo  $\psi$  del entrehierro que a su vez es proporcional a la corriente del campo o

$$\psi = K_f i_f$$

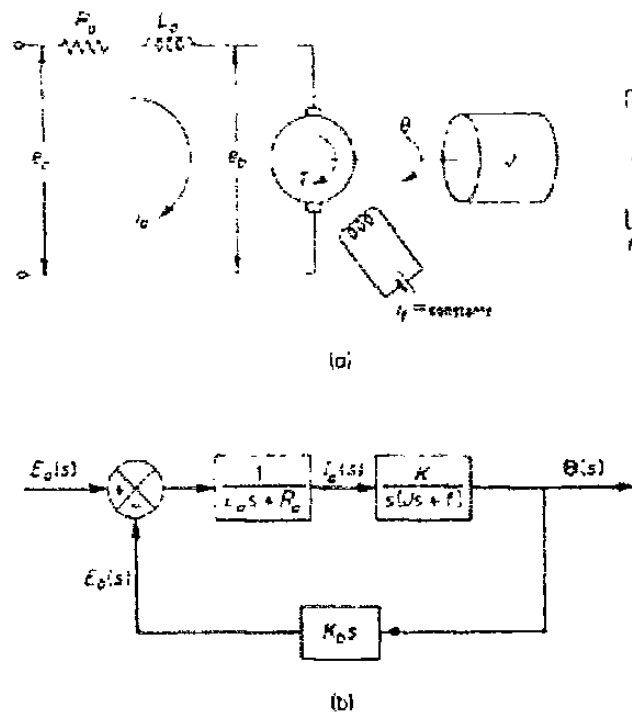


Figura 2.1. (a) Diagrama esquemático de un motor de CC controlado por inducido;  
(b) Diagrama de bloques.

donde  $K_f$  es una constante. Por tanto, se puede escribir el par  $T$

$$T = K_f I_f K_1 i_a$$

donde  $K_1$  es una constante.

En el motor CC controlado en el inducido, se mantiene constante la corriente del campo. Para una corriente de campo constante el flujo se vuelve constante y el par se hace directamente proporcional a la corriente de inducido, de manera que

$$T = K i_a$$

Donde  $K$  es una constante del par motor. Cuando el inducido esta en rotación, se induce en el inducido una tensión proporcional al producto del flujo por la velocidad angular. Para un flujo constante, la tensión inducida  $e_b$  es directamente proporcional a la velocidad angular  $d\theta/dt$ . Así,

$$e_b = K_b \frac{d\theta}{dt} \quad (2.1)$$

donde  $K_b$  es una constante de fuerza contraelectromotriz.

Se controla la velocidad de un motor de CC controlado por el inducido por medio de la tensión de inducido  $e_a$ . La tensión de inducido  $e_a$  es suministrada por un amplificador (o por un generador a su vez alimentado por un amplificador). La ecuación diferencial del circuito de inducción es

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_b = e_a \quad (2.2)$$

La corriente de inducido produce el par que se aplica a la inercia y fricción; por tanto

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt} = T = K i_a \quad (2.3)$$

Suponiendo que todas las condiciones iniciales son cero, y tomando la transformada de Laplace de las Ecs. (2.1), (2.2) y (2.3), se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$K_b s \Theta(s) = E_b(s) \quad (2.4)$$

$$(L_a s + R_a) I_a(s) + E_b(s) = E_a(s) \quad (2.5)$$

$$(J s^2 + f s) \Theta(s) = T(s) = K I_a(s) \quad (2.6)$$

Considerando a  $E_a(s)$  como la entrada y  $\Theta(s)$  como la salida, se puede construir el diagrama de bloques de las Ecs. (2.4), (2.5) y (2.6), como puede verse en la Figura (2.1b). Se ve el efecto de la fuerza contraelectromotriz en la señal de realimentación proporcional a la velocidad del motor. Esta fuerza contraelectromotriz, por tanto, aumenta el amortiguamiento efectivo del sistema. Se obtiene la función transferencia de este sistema como

$$\frac{\Theta(s)}{E_a(s)} = \frac{K}{s[L_a J s^2 + (L_a f + R_a J)s + R_a f + K K_b]} \quad (2.7)$$

La inductancia  $L_a$  en el circuito de inducido generalmente es pequeña y se puede deprecia. Si se desprecia  $L_a$  función transferencia dada por la Ec. (2.7) se reduce a

$$\frac{\Theta(s)}{E_a(s)} = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)} \quad (2.8)$$

donde

$$K_m = K (R_a f + K K_b) = \text{constante de ganancia de motor}$$

$$T_m = R_a J (R_a f + K K_b) = \text{constante de tiempo del rotor}$$

De las Ecs. (2.7) y (2.8) se puede ver que las funciones de transferencia involucran el tiempo  $1/s$ . Por lo tanto, este sistema posee una propiedad integrativa. En la Ec. (2.8) puede notarse que la constante de tiempo del motor es más pequeña al ser más pequeña  $R_a$  y más pequeña  $J$ . Con  $J$  pequeña, al reducirse la resistencia  $R_a$ , la constante del motor tiende a cero y el motor actúa como un integrador ideal.

Ya teniendo la función de transferencia ahora obtendremos la representación en el espacio de estado (ecuación en el espacio de los coeficientes). Se puede tener un modelo en el espacio de los estados del sistema de motor controlado por armadura recién

analizado, del modo que se muestra a continuación. Primero, se observa la Ec. (2.8) que la ecuación diferencial para este sistema es

$$\ddot{\theta} + \frac{1}{T_m} \dot{\theta} = \frac{K_m}{T_m} e_a$$

Las variables de estado para este sistema son

$$x_1 = \theta$$

$$x_2 = \dot{\theta}$$

La variable de entrada  $u$  por

$$u = e_a$$

y la variable de salida  $y$  por

$$y = \theta = x_1$$

entonces la representación en el espacio de estado del sistema del motor de CD esta dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1/T_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_m/T_m \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$



### 2.1.2 EL MOTOR DE INDUCCIÓN JAULA DE ARDILLA

El principio de funcionamiento de estos motores es semejante al transformador, al igual, también pueden ser trifásicos o monofásicos. El sentido de la marcha del motor de inducción monofásico está determinado por la conexión de la bobina de arranque o con el acople de un capacitor. A diferencia del trifásico, donde este no requiere de bobina o capacitor de arranque y el sentido de marcha queda determinado por la conexión de las fases en el estator.

El motor monofásico tiene un par de arranque bajo, ya que su flujo de rotación a principio de cuentas no es rotatorio, sino más bien alternante, produciendo así en el rotor magnitudes de par opuestas a rotor bloqueado, lo cual el control a bajas velocidades de estos motores no es aconsejable. Aunque existen controladores de velocidad para estos motores son raros, por su ineficiencia a baja velocidad y por el control del sentido de su marcha. En la Figura (2.2), se muestran las gráficas velocidad-torque del motor monofásico y trifásico, haciendo evidente lo ya antes mencionado.

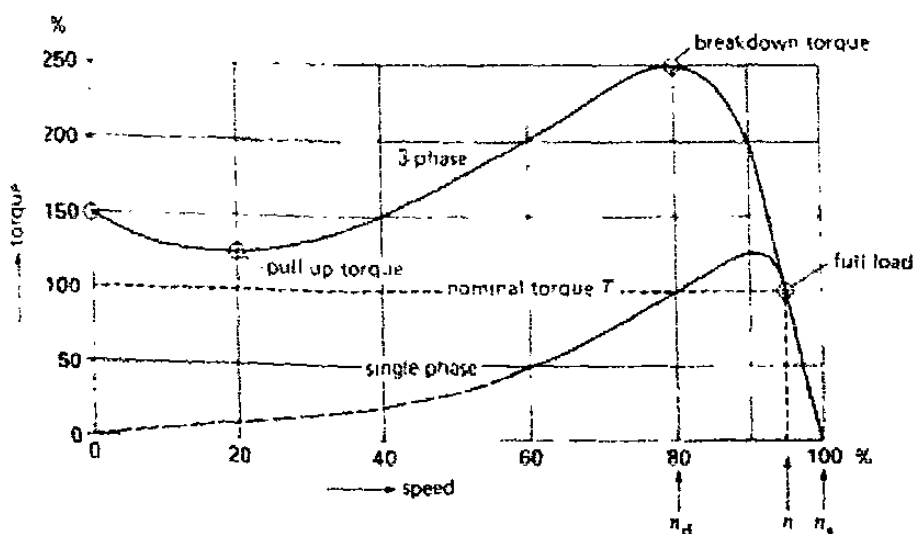


Figura 2.2 Curvas de par que presentan el motor de inducción monofásico y trifásico.

MODELACION DEL MOTOR DE CORRIENTE ALTERA (MOTOR DE INDUCCIÓN). Es el motor de más frecuente uso en el área industrial que tiene regular potencia y característica de velocidad auto regulada, por lo cual presenta un modelo dinámico no lineal, por lo tanto se presentaran fórmulas más detalladas que nos conducirán al desarrollo del modelo dinámico.

Teniendo la función aproximada del par respecto al voltaje de entrada  $V_l$  y deslizamiento  $s$  [1], [2]

$$T = F(V_l, s) \quad (2.11)$$

así que la función aproximada de par es

$$T = \frac{K_m}{\omega_s} V_l^2 (-15s^3 + 17s^2 - 3s + 1) \quad (2.12)$$

donde

$K_m$  = la constante de las características de construcción para par motor

$\omega_s$  = velocidad angular sincronía del flujo magnético producido por el estator

$V_l$  = voltaje de entrada al motor

$S$  = relación de deslizamiento del rotor

El polinomio de tercer grado, representa la curva característica en forma aproximada del par  $T$  en relación al deslizamiento, en unidad porcentual, esto es una forma mucho mas práctica, en vez de usar las fórmulas complementarias, basadas en la construcción del circuito. Cabe mencionar que este polinomio representa en forma general la construcción de motores de jaula de ardilla tipo  $A$ , y que los coeficientes están sujetos a cambios para ser tratados en forma particular.

La Figura (2.3) presenta la gráfica realizada por computadora del polinomio de tercer orden que establece la función de par

$$F(s) = 1 - 3(1-s) + 17(1-s)^2 - 15(1-s)^3$$

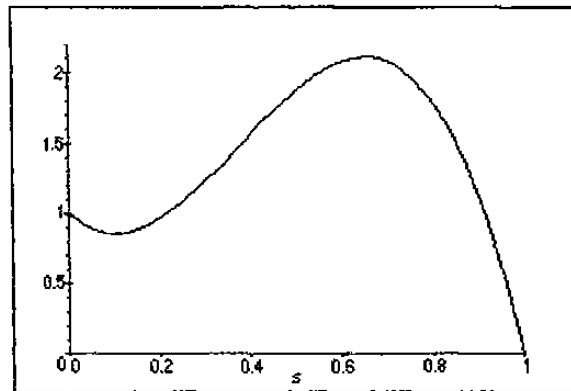


Figura 2.3 *Diagrama de par respecto al deslizamiento por unidad*

Para el desarrollo de la ecuación dinámica, se propone la ecuación de equilibrio de pares en función de la velocidad angular del rotor [3]

$$T = J\dot{\omega} + f\omega \quad (2.13)$$

donde  $J$  es el momento de inercia del motor y carga con referencia al eje del motor y  $f$  es el coeficiente de fricción viscosa del motor y carga con referencia al eje del motor.

Tal que el par producido del motor puede quedar representado también en  $\omega_m$  y las constantes  $k_1, k_2, k_3$  y  $k_4$  donde las características del motor se basan en estas constantes.

$$T = KV_1^2(-k_1\omega^3 + k_2\omega^2 - k_3\omega + k_4) \quad (2.14)$$

Para  $Kk_x = C_1, \dots, C_4$  la ecuación diferencial queda de la forma

$$J \frac{d\omega}{dt} + (f + C_3V_1^2)\omega + C_1V_1^2\omega^3 - C_2V_1^2\omega^2 = C_4V_1^2 \quad (2.15)$$

y en función de  $\theta$  quedaría de la forma

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + (f + C_3V_1^2) + C_1V_1 \frac{d\theta^3}{dt} - C_2V_1 \frac{d\theta^2}{dt} = C_4V_1 \quad (2.16)$$

así podemos ver que la ecuación diferencial es no lineal, debido a que presenta términos con potencias y el producto de la variable de entrada  $V_1$  con el término  $\omega$ , por lo tanto no podemos usar la transformada de Laplace. Para poder obtener la resolución de la ecuación diferencial es necesario recurrir a algún método numérico o linealizar en forma aproximada por el método de la serie reducida de Taylor.

## 2.2 APROXIMACIÓN LINEAL POR MEDIO DE LA SERIE REDUCIDA DE TAYLOR

Toda función puede ser expresada por medio de una serie de potencia donde sus dos primeros términos aportan la parte lineal de la función. En una ecuación diferencial cada término se puede interpretar como una función individual, que se puede catalogar en tres formas, como constante como función lineal y como no lineal, dado que cada expresión de la ecuación diferencial forma un lazo hacia el estado de orden superior (parte homogénea) expresado en ecuación estado, esta retroalimentación debe de ser en forma proporcional (lineal) a su propio estado, de lo contrario se dice que el sistema dinámico es no lineal, por lo cual si fuera así no podríamos interpretar su dinámica en el dominio de la frecuencia y en el espacio de los coeficientes ya que no tenemos valores característicos definidos en forma general al igual que la resolución exacta en el dominio del tiempo, esto lo podemos ver más claro en la resolución de la ecuación de estado homogénea de versión escalar.

$$\dot{x} = ax \quad (2.17)$$

Para resolver esta ecuación, se supone una solución  $x(t)$  de la forma

$$x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_k t^k + \dots \quad (2.18)$$

Y para la derivada tenemos

$$\dot{x}(t) = b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + \dots + kb_k t^{k-1} + \dots \quad (2.19)$$

Reemplazando esta solución supuesta en la Ec. (2.17), se obtiene

$$b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + \dots + kb_k t^{k-1} + \dots = a(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_k t^k + \dots) \quad (2.20)$$

Si la solución supuesta es correcta, la Ec. (2.20) debe de ser válida para toda  $t$ , igualando entonces los coeficientes de igual potencia de  $t$ , a esto se le llama principio de superposición, que solo lo cumple si  $a$  es constante, por lo tanto esto es una propiedad que solo cumplen los sistemas lineales. Finalmente se podrá comprobar obteniendo los coeficientes  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_k$ , respecto a  $b_0$  para después obtener la serie en función de  $t$  con los coeficientes que involucran una función en  $a$  constante, entonces se halla

$$\begin{aligned} b_1 &= ab_0 \\ b_2 &= \frac{1}{2}ab_1 = \frac{1}{2}a^2b_0 \\ b_3 &= \frac{1}{3}ab_2 = \frac{1}{3 \times 2}a^3b_0 \\ &\dots \\ b_k &= \frac{1}{k!}a^kb_0 \end{aligned}$$

Se determina el valor de  $b_0$  reemplazando  $t = 0$  en la Ec. (2.18), o

$$x(0) = b_0$$

Por lo tanto, se puede escribir la solución  $x(t)$  como

$$x(t) = \left[ 1 + at + \frac{1}{2!}a^2t^2 + \dots + \frac{1}{k!}a^kt^k + \dots \right] x(0) \quad (2.21)$$

$$= e^{at} x(0) \quad (2.22)$$

Teniendo como resultado la serie de la función exponencial de  $at$  que es la base para toda resolución de los sistemas lineales, si  $a$  no es constante la propuesta de coeficientes indeterminados no es posible por lo tanto no se puede obtener la solución de



la serie de potencias. La serie de Taylor no difiere mucho de esta, donde la función puede estar dada en cualquier variable y también en múltiples variables.

Una de las mayores dificultades en el análisis de respuesta de muchos procesos es que los sistemas son no lineales, una ecuación diferencial lineal consiste de una suma de términos que cada cual no contiene más que una variable o derivada, cual debe aparecer a la primer potencia. El método de la transformada de Laplace nos permite realizar la respuesta característica de una amplia variedad de sistemas físicos. Desafortunadamente solo los sistemas lineales pueden ser analizados por la transformada de Laplace. No hay técnica comparable por el cual nosotros podamos analizar la dinámica de un sistema no lineal y generalizar los resultados a representar sistemas físicos similares.

El método de linealización por las series de Taylor es muy usado para el análisis de control convencional, ya que nos permite aproximar sistemas no lineales a un modelo lineal, que presenta características de respuesta casi iguales cercanas al punto de operación semejante a un sistema lineal, por lo cual esto es válido a un área cerrada al punto de operación.

2.2.1 LINEALIZACIÓN DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE DE DOS Y DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL. Alguna función puede ser expandida en una serie de Taylor acerca de la base de un punto, como se ve en la Ec. (2.23)

$$f[x(t)] = f(\bar{x}) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{\bar{x}} [x(t) - \bar{x}] + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{\bar{x}} [x(t) - \bar{x}]^2 + \dots \quad (2.23)$$

donde  $\bar{x}$  es la base alrededor de  $x$  donde la función es expandida. La linealización de la función  $f[x]$  consiste de la aproximación de este con solo los primeros dos términos de la expansión de la serie de Taylor [4]:

$$\boxed{f[x(t)] = f(\bar{x}) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{\bar{x}} [x(t) - \bar{x}]} \quad (2.24)$$

Esta es la fórmula de linealización básica. Porque  $\bar{x}$  es constante, trabajando con el lado derecho de la ecuación, es lineal en la variable  $x(t)$ .

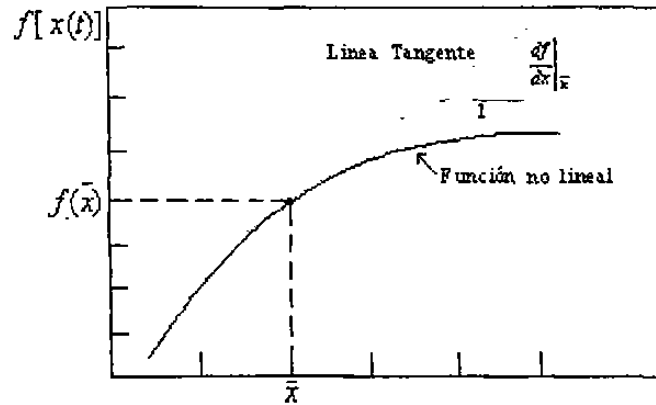


Figura 2.4 La aproximación lineal es la tangente en la función no lineal en la base del punto  $\bar{x}$ .

La Figura (2.4) presenta una gráfica que interpreta la linealización de la fórmula en la Ec. (2.24). Esta es por definición la tangente de  $f(x)$  en  $\bar{x}$ . Se nota que la diferencia entre la función no lineal y la aproximación lineal es pequeña cercana a la base del punto  $\bar{x}$  y haciéndose mas grande al alejarse mas  $x(t)$  de  $\bar{x}$ .

Para la linealización de dos o más variables se toma se hace de la misma forma solo tomando hasta los términos de las primeras derivadas parciales. Tal como se expresa la fórmula en forma general en la Ec.(2.25).

$$\begin{aligned}
 f[x_1(t), x_2(t), \dots] &= f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots) \\
 &+ \frac{\partial f}{\partial x_1} [x_1(t) - \bar{x}_1] \\
 &+ \frac{\partial f}{\partial x_2} [x_2(t) - \bar{x}_2]
 \end{aligned}
 \tag{2.25}$$

donde  $\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} \Big|_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots)}$ , y  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots$ , son los valores base de cada variable.

Y finalmente se prosigue para la linealización de una ecuación diferencial no lineal, asumiendo que la ecuación puede ser expresada en primer orden, donde esto no significa una restricción, para la linealización de mayor grado, ya que en ecuaciones de estado se maneja igual.

Considerando la siguiente ecuación diferencial de primer orden con una entrada:

$$\frac{dy(t)}{dt} = g[x(t), y(t)] + b \quad (2.26)$$

Donde  $g[x(t), y(t)]$  es una función no lineal de la variable de entrada  $x(t)$ , y la variable de salida  $y(t)$ , y  $b$  es una constante. En condiciones de estado estable la Ec.(2.26), puede ser escrita como

$$0 = g(x(t), y(t)) + b \quad (2.27)$$

Donde nosotros tenemos que seleccionar la base del punto para la linealización teniendo las condiciones iniciales,  $\bar{x} = x(0)$ ,  $y = \bar{y}(0)$ , asumiendo que la derivada del tiempo es cero por el estado estable en que se encuentra el sistema. Substrayendo de la Ec. (2.27) de la Ec. (2.26), se obtiene

$$\frac{dy(t)}{dt} = g[x(t), y(t)] + g(\bar{x}, \bar{y}) \quad (2.28)$$

Si ahora aproximamos la Ec. (2.28) usando la fórmula para la linealización de función multivariable, Ec. (2.25), el resultado es

$$\frac{dy(t)}{dt} = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(\bar{x}, \bar{y})} [x(t) - \bar{x}] + \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{(\bar{x}, \bar{y})} [y(t) - \bar{y}] \quad (2.29)$$

Los términos en los corchetes nos determina la desviación de la variable, porque  $x$  y  $y$  son las condiciones iniciales. Sustituyendo la desviación de variables por  $X(t) = x(t) - \bar{x}$  y  $Y(t) = y(t) - \bar{y}$ , se obtiene

$$\frac{dY(t)}{dt} = a_1 X(t) + a_2 Y(t) \quad (2.30)$$

Donde  $a_1 = \partial g / \partial x |_{(\bar{x}, \bar{y})}$  y  $a_2 = \partial g / \partial y |_{(\bar{x}, \bar{y})}$ .

**2.2.2 EQUIVALENTE LINEAL DE LA ECUACIÓN DIERENCIAL DEL MOTOR DE INDUCCIÓN.** Este motor presenta una ecuación diferencial no lineal, donde sería útil la linealización en algunos puntos determinados de operación para el análisis dinámico.

Formulando lo anterior tenemos una ecuación diferencial que presenta productos de más de una variable con potencias diferentes a la unidad como se observo en la Ec.(2.15) de subcapítulo anterior, dada la ecuación en función de la velocidad angular tenemos que  $V_1$  es la variable de entrada en voltaje y  $\omega$  la variable de salida en Rad / seg.

$$J \frac{d\omega}{dt} + (f + C_3 V_1^2) \omega + C_1 V_1^2 \omega^3 - C_2 V_1^2 \omega^2 = C_4 V_1^2 \quad (2.28)$$

Partiendo de que

$$\frac{d\omega}{dt} = g(\omega, V_1) \quad (2.31)$$

Siendo que  $g(\omega, V_1)$  es la función de la pendiente que forma la parte no lineal como se observa en la Ec. (2.32)

$$g(\omega, V_1) = \frac{V_1^2}{J} [C_4 - C_3\omega + C_2\omega^2 - C_1\omega^3] + \frac{f}{J}\omega \quad (2.32)$$

Entonces podemos obtener la ecuación en estado estable a partir de las condiciones iniciales, donde la Ec. (2.31) puede ser escrita como

$$0 = g(\bar{\omega}, \bar{V}_1) + b$$

$$0 = \left[ \frac{V_1^2}{J} (C_4 - C_3\omega + C_2\omega^2 - C_1\omega^3) + \frac{f}{J}\omega \right] \Big|_{(\bar{\omega}, \bar{V}_1)} \quad (2.33)$$

Presentando la ecuación en variables de desviación tenemos la siguiente forma, primero obteniendo la ecuación de estado estable se forma

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial g}{\partial \omega} \Big|_{(\bar{\omega}, \bar{V}_1)} [\omega(t) - \bar{\omega}] + \frac{\partial g}{\partial V} \Big|_{(\bar{\omega}, \bar{V}_1)} [V(t) - \bar{V}] \quad (2.34)$$

Obteniendo las constantes de la derivadas parciales.

$$\frac{\partial g}{\partial \omega} \Big|_{(\bar{\omega}, \bar{V}_1)} = a_1 \quad \& \quad \frac{\partial g}{\partial V} \Big|_{(\bar{\omega}, \bar{V}_1)} = a_2$$

Y las nuevas variables en desviación serán:

$$\Omega(t) = \omega(t) - \bar{\omega} \quad \& \quad \mathbf{V}(t) = V_l(t) - \bar{V}$$

y finalmente substituyendo las variables en desviación obtenemos la ecuación lineal aproximada

$$\frac{d\Omega(t)}{dt} = a_1\Omega(t) + a_2\mathbf{V}(t) \quad (2.35)$$

por último se prosigue a obtener la función de transferencia para el análisis en función de la frecuencia y poder determinar las características en forma local, ya como se comentó anteriormente, la información que se obtenga solo sera válida cercano al punto de operación.

Transformando Ec. (2.35) tenemos la función transferencia de un modelo de primer orden con polo en  $a_1$ ,

$$\frac{d\Omega(s)}{\mathbf{V}(s)} = \frac{a_2}{s - a_1}$$

o de forma general  $K_m = -a_1 \ a_2 \ \& \ T = -1 \ a_1$

$$\frac{d\Omega(s)}{\mathbf{V}(s)} = \frac{K_m}{Ts + 1} \quad (2.36)$$

Es claro que el sistema esta representado por una ecuación diferencial de primer orden, resultando un modelo muy simple, en realidad la versión completa difiere algo de este, ya que la ecuación diferencial esta en función de posición angular y más variables tales como la frecuencia sincrona del estator y la ficción de desplazamiento no viscosa, por lo cual la ecuación diferencial en aproximación lineal seria de mayor orden.

Para generalizar el método de linealización y trabajar con ecuaciones de estado, se recurre a la matriz Jacobiana, que formará la matriz de coeficientes dentro de la ecuación homogénea, teniendo que

Si  $A$  forma una matriz en función de una o mas variables tal que  $A(x)$

$$\frac{d x(t)}{d t} = A(x) x(t) \quad (2.37)$$

Para  $A(x)$  tenemos la matriz

Jacoviana

$$A(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_k} \\ \frac{\partial f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_k(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial f_k(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_k} \end{bmatrix}$$

Este método de linealización por la matriz Jacobiana es conocido con el nombre de linealización exacta, que es útil en el análisis de sistemas de control con el espacio de estado de sistemas no lineales, el procedimiento es el mismo al que se maneja en la ecuación de primer grado que es de la forma escalar, así poniendo el punto de operación bajo las condiciones de estado estable y prosiguiendo por las derivadas parciales de cada coeficiente tal como lo indica la matriz y establecer las condiciones en el punto de operación con la sustitución de cada variable en estado estable y finalmente modificar el vector de estados sustituyendo por las variables de desviación.

## 2.3 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES POR METODOS NUMÉRICOS

los métodos numéricos ofrecen la ventaja para la solución de ecuaciones diferenciales, y tareas complejas, tales como la integración de funciones, inversión de matrices, regresión de ecuaciones y solución de raíces de ecuaciones de grado enésimo por medio de la ayuda de sistemas por computadora, pero lo más importante es que pueden analizarse modelos dinámicos no lineales, tal como el modelo dinámico del motor de inducción que es una ecuación diferencial no lineal, aunque en el subcapítulo pasado se trató sobre la posibilidad de linealizar sistemas dinámicos no lineales, este tipo de métodos no ofrecen la ventaja de poder analizar en forma transitoria la dinámica de este tipo de sistemas, dejando un hueco en esta área tan importante, por el cual se justifica lo expuesto en este tema.

El método de Euler es uno de los primeros métodos para la resolución de ecuaciones diferenciales lineales y no lineales, aunque la exactitud de este método no es tan buena como la de otros métodos, ofrece la ventaja de un entendimiento práctico, por el cual se tratará en este tema principalmente. Existen otros métodos que son derivados del mismo tal como el método de Euler modificado y Euler mejorado. Los métodos más apropiados son Runge—Kutta, 23 y 45 (2do. 3er orden y 4to 5to orden) y el más exacto Runge—Kutta—Fehlberg.

Sea la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad ; \quad y(x_0) = y_0$$

condición inicial

Como podemos ver la ecuación diferencial de primer orden es la función misma de la pendiente. Bajo cierta condición inicial y una entrada específica podemos partir al siguiente punto desplazarnos por medio de esta pendiente y así del siguiente punto se



establece la siguiente pendiente par desplazarnos a otro en forma sucesiva, con desplazamientos constantes, con incremento constantes en el eje del dominio de la función formamos la trayectoria de la función en el tiempo.

Formulando la ecuación de la pendiente tenemos que

$$\tan \phi = \frac{c.o}{c.a} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

En la Figura (2.5) se presentan las variables en incremento de unidades enteras de la función pendiente

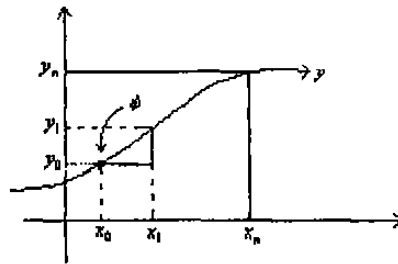


Figura 2.5 Diagrama de coordenadas de la función de la pendiente.

Ahora proponemos sustituir la función de la tangente por la función de la pendiente de la ecuación diferencial  $f(x, y)$ , evaluando en forma analógica a la función de la pendiente de dos puntos.

Primero tenemos que:

$$(x_1 - x_0) \tan \phi = y_1 - y_0$$

De forma obvia queda claro que el producto del incremento en el dominio por la pendiente, da como resultado el incremento del codominio.

Seguido de esto formulamos la ecuación recursiva en  $Y_{n+1}$  reorganizando la salida  $Y_1$  en función de  $Y_0$  mas el producto de la función de la pendiente por la diferencia de la variable de dominio  $X_1 - X_0$ .

---


$$\begin{aligned} y_1 &= (x_1 - x_0) \tan \theta + y_0 \\ y_0 + (x_1 - x_0) f(x, y) &= y_1 \\ y_0 + (x_1 - x_0) f(x_0, y_0) &= y_1 \end{aligned}$$

y finalmente obtenemos la función recursiva de  $y_{n+1}$   
en función del incremento  $h$

$$y_n + h f(x_n, y_n) = y_{n+1} \quad (2.38)$$

Teniendo que  $h = (x_1 - x_0)$ , entonces para una mejor aproximación debemos tener que los incrementos de las  $x$ 's sean lo más pequeño posible.

Para ecuaciones de mayor grado podemos utilizar la expresión matricial vectorial de la forma

$$\begin{pmatrix} y_{n+1} \\ y_{n+2} \\ \vdots \\ y_{n+k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ y_{n+1} \\ \vdots \\ y_{n+k} \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} a_{11}(x_n, y_n) & a_{12}(x_n, y_n) & \cdots & a_{1k}(x_n, y_n) \\ a_{21}(x_n, y_n) & a_{22}(x_n, y_n) & \cdots & a_{2k}(x_n, y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1}(x_n, y_n) & a_{k2}(x_n, y_n) & \cdots & a_{kk}(x_n, y_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ \vdots \\ y_k(0) \end{pmatrix}$$

La ecuación de Euler trabaja en forma análoga a una ecuación en diferencia, solo estructurada en otra forma, dado que sustituyendo  $h$  se puede factorizar  $Y_n$  donde  $h$  en tal caso equivale al periodo de muestreo  $T$ . Resumiendo, como se menciono anteriormente la calidad y confianza de la Ec. (2.38), depende en su totalidad de el incremento en  $h$ ,

siendo más chico mejor, también resuelve conveniente ecuaciones no lineales y es de fácil uso para operarlo por computadora, resultando muy conveniente para el análisis de dinámica de motores de inducción.

2.3.1 Resolución de modelo dinámico del motor de inducción propuesto en el Subcapítulo 2.1, se formulará por medio del método de Euler la ecuación recursiva y se graficará la respuesta dinámica en computadora por medio del paquete matemático MATLAB. Primero se opta por tomar la ecuación diferencial en función del voltaje de entrada y el deslizamiento, para después determinar en razón de velocidad angular.

Tenemos que la ecuación diferencial del motor de inducción expresado en voltaje, velocidad angular y velocidad sincrónica es

$$\frac{d \omega}{d t} = \frac{1}{J} \left[ \frac{K_m}{\omega_s} V^2 \left[ 1 - \frac{3}{\omega_s} \omega_m + \frac{17}{\omega_s^2} \omega_m^2 - \frac{15}{\omega_s^3} \omega_m^3 \right] - f \omega_m \right] \quad (2.39)$$

donde tenemos que

$T$  = par desarrollado en libras - pie.

$J$  = momento de inercia equivalente del motor y carga referido al eje del motor en Newton \*metro.

$f$  = coeficiente de fricción viscosa equivalente de motor y carga referido al eje del motor en libras - mts/ rev / min.

$K_m$  = constante de fuerza del motor.

$\omega_s$  = velocidad angular sincrónica, en rpm.

$\omega_m$  = velocidad angular del motor en rpm.

$V$  = voltaje aplicado al estator, volts, rms.

Teniendo la velocidad angular sincrónica 1800 rpm, y un par a rotor bloqueado de 12N\*m

$$K_m = 1800 * 12 = 19600$$

$$J = 70 \text{ N*m},$$

$$f = 25 \text{ mts/rev/min}$$

de la ecuación diferencial queda  $\phi(\omega_m, V)$  con los valores de

$$\phi(\omega_m, V) = \frac{1}{J} \left[ \frac{K_m}{\omega_s} V^2 \left[ 1 - \frac{3}{\omega_s} \omega_m + \frac{17}{\omega_s^2} \omega_m^2 - \frac{15}{\omega_s^3} \omega_m^3 \right] - f \omega_m \right]$$

y proponiendo para resolver en forma numérica tenemos la ecuación de Euler de la forma  $i$ -ésimo valor.

$$\omega_{i+1} = \omega_i + h \phi(\omega_i, V_i)$$

Y se obtiene más detalladamente substituyendo valores de masa inercial, constante del par motor y velocidad de sincronía en forma parcial, ya que en la variable  $\omega_m$  debe anularse con esta

$$\omega_{n+1} = \omega_n + 0.0014 \times h \times \left[ 12 V^2 \left[ 1 - 3 \frac{\omega_n}{\omega_s} + 17 \left[ \frac{\omega_n}{\omega_s} \right]^2 - 15 \left[ \frac{\omega_n}{\omega_s} \right]^3 \right] - f \omega_n \right]$$

graficando la salida a entrada escalón en V a 220 volts tenemos y a frecuencia sincrona que,  $\omega_s$  a 1800 rpm obtenemos la siguiente gráfica ejecutada en MATLAB.

Codificación de la solución gráfica en el paquete matemático MATLAB.

```

hold on
v=220;
x=0;
y=0;
ys=1800;
Yk1=0;Yk2=0;Yk3=0;
xp=0; yp=0;
h=0.05;
n=70;
for p=1:n,
    Yk1=y/ys; Yk2=(y^2)/(ys^2); Yk3=(y^3)/(ys^3);
    y1=y+0.0014*h*(12*v^2*(1-3*Yk1+17*Yk2-15*Yk3)-250*y);
    x=x+h;
    y=y1;
    [x,y];
    plot([xp x],[yp y],'G')
    %plot(x,y,'R')
    xp=x; yp=y;
end

```

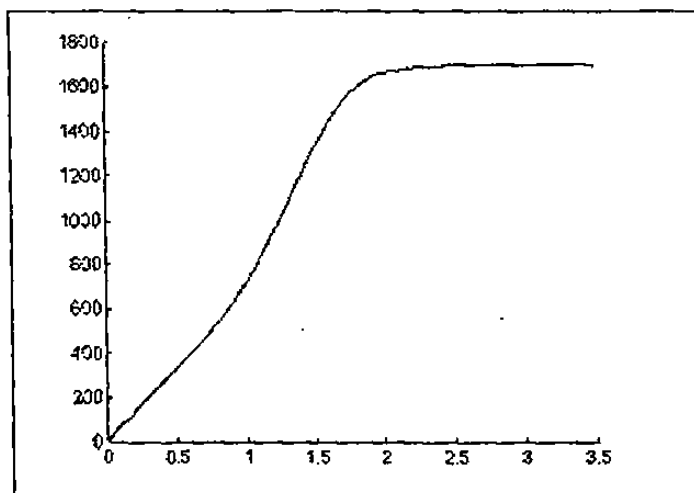


Figura 2.6. Diagrama de velocidad angular del rotor  $\omega$  (rev/min) y tiempo en segundos, de la dinámica de arranque del motor de inducción.

# CAPITULO 3

## LOS SISTEMAS ELECTRÓNICOS DE POTENCIA DE BASE EN EL CONTROL DE MOTORES DE CA

Mediante los circuitos electrónicos de potencia, podemos llevar acabo la difícil tarea de manipular en forma plena los motores de inducción con lo presente en este capítulo. Es claro que el estudio de la electrónica de potencia es una área basta para ser tema tratado individualmente y la pregunta es en que concierne tratar el tema, si pareciera no formar parte directamente en la temática de control, pues la cuestión es que este tema sera un suplemento exclusivo del área de motores de CA, introduciéndonos con algunas técnicas ayudando en forma directa a simplificar los equipos de control.

Los motores de inducción aparentemente son maquinas eléctricas simples comparado con los motores de corriente directa, además la instalación es considerablemente sencilla, y de fácil uso, ya que éstos pueden ser conectados directamente a la red y lo más importante de todo es que presenta una autorregulación en la velocidad, siendo muy conveniente para cualquier tipo de operación convencional, lo que hace que sea el motor más usado en la industria y también en el área comercial y doméstica, pero hablando en cuestión de procesos que requieren operaciones más especializadas tal que requieran un control de velocidad variable y par controlado entre otras cosas, resulta muy complicado ya que implica la tarea de proporcionar una frecuencia variable tanto como la amplitud

del voltaje, por el cual era la razón que no hace mucho estas aplicaciones eran exclusivas de los motores de corriente directa, si bien los equipos electrónicos de potencia para los motores de CA eran complejos y de dispositivos muy costosos, aunque la complejidad de estos equipos aumenta día a día, el desarrollo de dispositivos en el área de los componentes digitales en lo que respecta a microcontroladores, son ahora más veloces y de mayor capacidad y convertidores analógicos de mayor resolución e igualmente más veloces.

Solo se presentará los sistemas inversores de potencia para motores de CA, como aportación y ayuda en el desarrollo de proyectos en el control electrónico de motores de CA.

La aportación de la técnica de inversión en este capítulo, será la modulación de anchura de pulso (PWM), ya que presenta una menor distorsión en las corrientes de fase del sistema, por los efectos armónicos y mejoramiento en la respuesta del motor.

### 3.1 INTERPRETACIÓN DE SEÑALES POR EL ANÁLISIS EN SERIES DE FOURIER

Primero se expondrá el caso del inversor para la modulación de anchura de un solo pulso facilitando la comprensión para la modulación sinusoidal en anchura de pulso (SPWM), que es el caso a tratar, ofreciendo una expectativa en el área de control armónico.

En el control por modulación de un solo ancho de pulso, existe un solo pulso por cada medio ciclo, el ancho de pulso se hace variar, afin de controlar el voltaje de salida del inversor. La figura 3.1 muestra la generación de las señales de excitación y el voltaje de salida para los inversores monofásicos en puente completo.

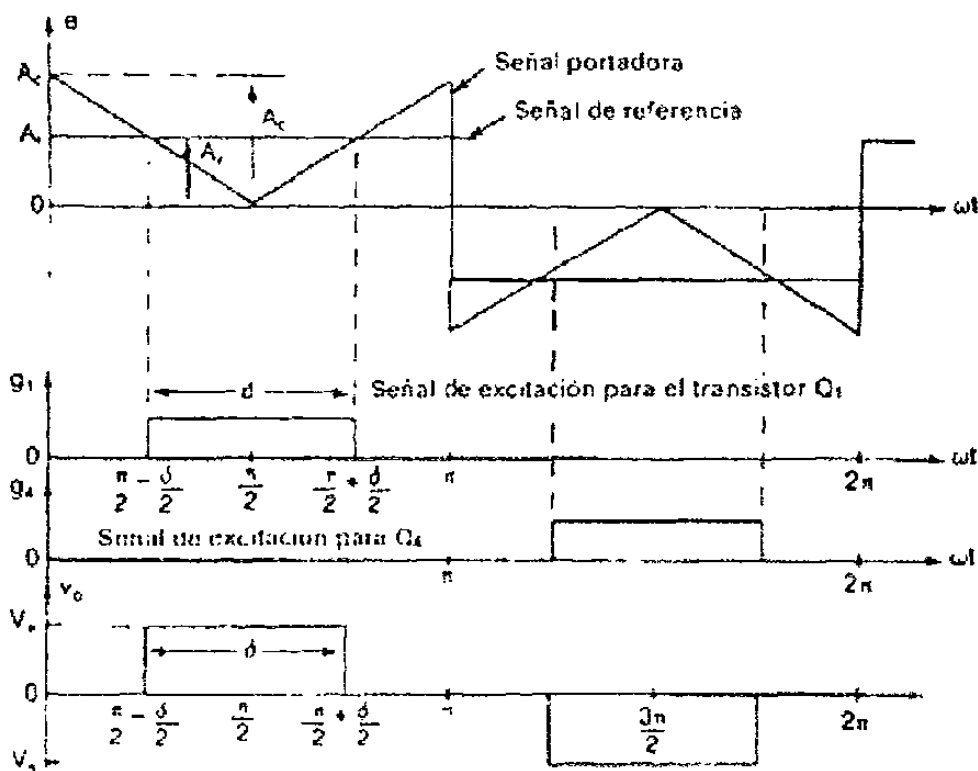


Figura 3.1 Simulación de un solo ancho de pulso

Las señales de excitación se generan comparando una señal rectangular de referencia de amplitud,  $A_r$ , con una onda portadora triangular,  $A_c$ , la frecuencia de la señal de referencia determina la frecuencia fundamental del voltaje de salida. Si se varía  $A_r$  desde 0 hasta  $A_c$ , el ancho de pulso,  $\delta$ , puede modificarse desde 0 hasta 180°. La relación de  $A_r$  con  $A_c$  es la variable de control y se define como el *índice de modulación de la amplitud*, o simplemente índice de modulación.

$$M = \frac{A_r}{A_c} \quad (3.1)$$



El voltaje rms de salida se puede determinar a partir de

$$V_0 = \left[ \frac{2}{2\pi} \int_{(\pi+\delta)/2}^{(\pi+\delta)/2} V_s^2 d(\omega t) \right]^{1/2} \quad (3.2)$$

Para la función en el tiempo  $V(t)$  se requiere calcular la armónica fundamental con todas las magnitudes armónicas para la forma de onda periódica. La serie resultante se conoce como la serie de Fourier, la cual para una función periódica  $V(t)$  se tiene la expresión [1]

$$V_0(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n \omega t + b_n \text{sen} n \omega t] \quad (3.3)$$

Esto constituye una representación en el dominio del tiempo de la función periódica. En esta expresión  $a_0/2$  es el valor promedio del voltaje de salida  $V_0(t)$ , mientras que  $a_n$  y  $b_n$  son los coeficientes de la serie para la n-esima armónica.

El término constante de la serie de Fourier es dado por

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T v_0(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v_0(\omega t) d(\omega t) \quad (3.4)$$

Lo cual es el doble del área bajo la curva de  $V_0(t)$  desde 0 hasta T, dividido por el periodo de la forma de onda T; es decir, igual al valor promedio de la función, mientras que  $a_n$  y  $b_n$  son dados respectivamente por

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T v_0(t) \cos n \omega t dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v_0(\omega t) \cos n \omega t d(\omega t) \quad (3.5)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T v_0(t) \text{sen} n \omega t dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v_0(\omega t) \text{sen} n \omega t d(\omega t) \quad (3.7)$$

Las ecuaciones (3.5) y (3.7) se simplifican cuando la forma de onda tiene simetría. Si la forma de onda tiene simetría impar, esto es  $V_0(t) = -V_0(-t)$  entonces  $a_n$  es cero para todos los valores de  $n$ , y así solo presenta  $b_n$ , igualmente para el caso de simetría par, donde es  $V_0(t) = V_0(-t)$ , ahora siendo  $b_n$ , cero para todos los valores de  $n$ , y presentando solo valores  $a_n$ , es obvio que para todos los casos que se presente simetría ya sea par o impar, el promedio de voltaje tendrá que ser siempre cero, siendo así  $a_0$  siempre cero.

Ahora presentado lo anterior podemos resolver el voltaje de salida aplicando la serie de Fourier. Tenemos que  $V_0(t) = -V_0(-t)$  con simetría impar, por lo tanto  $a_n$  es cero, y por ser simétrico tiene un promedio de salida de cero o sea que  $a_0$  es cero.

Teniendo los límites establecidos en función  $\delta$  de anchura tales que el primer semiciclo en transición de activación  $(\pi - \delta)/2$  y desactivación  $(\pi + \delta)/2$  y para el segundo semiciclo en activación tenemos  $(3\pi - \delta)/2$  y desactivación  $(3\pi + \delta)/2$ , por lo cual se fragmentará en dos integrales de la fórmula del coeficiente  $b_n$ , formando la parte positiva y negativa.

$$b_n = \frac{V_s}{\pi} \int_{(\pi-\delta)/2}^{(\pi+\delta)/2} \sin n(\omega t) d(\omega t) - \frac{V_s}{\pi} \int_{(3\pi-\delta)/2}^{(3\pi+\delta)/2} \sin n(\omega t) d(\omega t)$$

$$b_n(1er, semiciclo) = -\frac{V_s}{\pi} \left[ \frac{\cos n\omega t}{n} \right]_{(\pi-\delta)/2}^{(\pi+\delta)/2} = -\frac{V_s}{n\pi} \left[ \cos \frac{1}{2}n(\pi + \delta) - \cos \frac{1}{2}n(\pi - \delta) \right]$$

$$b_n(1er, semiciclo) = \frac{V_s}{n\pi} \left[ \cos \frac{1}{2}n(\pi - \delta) - \cos \frac{1}{2}n(\pi + \delta) \right]$$

$$b_n(1er, semiciclo) = \frac{2V_s}{n\pi} \sin \frac{n\delta}{2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$b_n(2do, semiciclo) = \frac{V_s}{\pi} \left[ \frac{\cos n\omega t}{n} \right]_{(3\pi-\delta)/2}^{(3\pi+\delta)/2} = \frac{V_s}{n\pi} \left[ \cos \frac{1}{2}n(3\pi + \delta) - \cos \frac{1}{2}n(3\pi - \delta) \right]$$

$$b_n(2do, semiciclo) = -\frac{V_s}{n\pi} \left[ \cos \frac{1}{2}n(3\pi - \delta) - \cos \frac{1}{2}n(3\pi + \delta) \right] = -\frac{2V_s}{n\pi} \sin \frac{3n\pi}{2} \sin \frac{n\delta}{2}$$

$$b_n(2do, semiciclo) = (\text{Pero si } \sin \frac{3n\pi}{2} = -\sin \frac{n\pi}{2}), \text{ entonces } = \frac{2V_s}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\delta}{2}$$

$$b_n = b_n(1er, sem.) + b_n(2do, sem.) = \frac{4V_s}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\delta}{2}$$

$$\text{Para la serie de fourier } V_0(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t],$$

$$\text{donde } a_0 = 0, a_n = 0$$

Sustituyendo en al Ec.(3.7) el coeficiente  $b_n$  tenemos como resultado la serie

$$V_0(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{4V_s}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\delta}{2} \sin n\omega t \right] \quad (3.8)$$

$$= \frac{4V_s}{15\pi} \left[ 15 \sin \frac{1}{2} \delta \sin \omega t - 5 \sin \frac{3}{2} \delta \sin 3\omega t + 3 \sin \frac{5}{2} \delta \sin 5\omega t, \dots \right]$$

La ecuación (3.8), de la serie de Fourier, puede ser comprobada gráficamente, mediante *Scientific WorkPlace 2.5* tal como se ve en la figura (3.2)

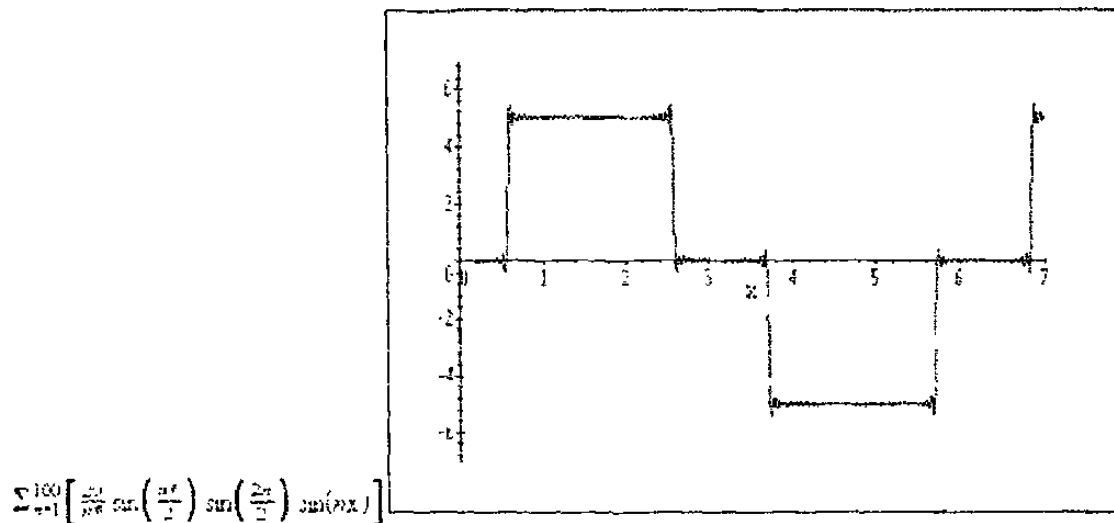


Figura 3.2 Gráfica de modulación en anchura de pulso en  $\delta = 2$  Rad. al 100va. armónico

Un perfil armónico es muy conveniente para la evaluación de cada magnitud armónica y el factor de distorsión, tal como se muestra en la figura (3.3) para índice de modulación de un solo ancho de pulso.

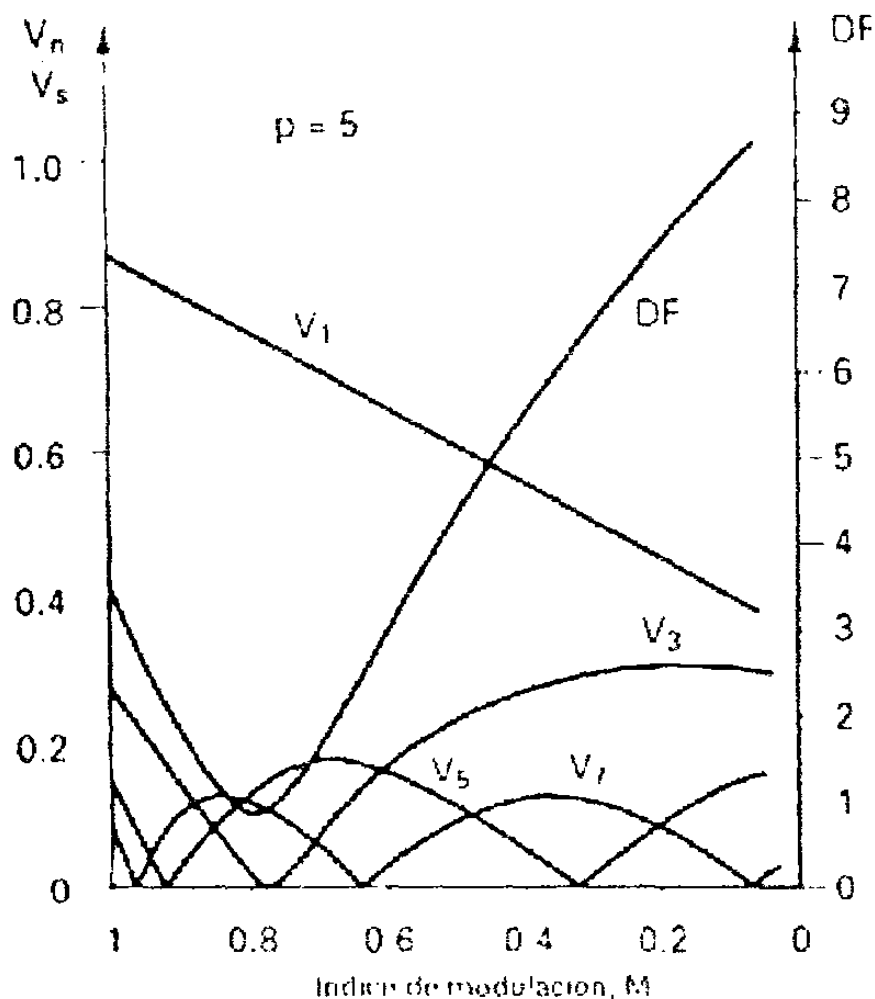


Figura 3.3 Perfil armónico de la modulación de un solo ancho de pulso.

Mediante esta información podemos obtener un control en el factor de distorsión y armónicos que puedan afectar en el área de proceso. Modificando mediante la duración en anchura de pulso, podemos mover los armónicos de más bajo nivel a un nivel mas alto, mediante la modulación senoidal de ancho de pulso SPWM, que consiste en fragmentos de variaciones de ancho de pulso por cada semiciclo.

### 3.2 MODULACIÓN DE ANCHURA DE PULSO (PWM)

Extendiendo la interrupción en la sección precedente a cualquier punto de interrupción por ciclo se llama modulación de anchura de pulso (PWM) porque el resultado final es variado o muchos pulsos por ciclo, cada uno de los cuales es controlado en duración. El método usual para implementar PWM arreglado así para producir un número entero de pulsos por medio ciclo y también para arreglar los pulsos ya que cada medio ciclo es simétrico alrededor del centro de el medio ciclo. La función está arreglada como se ve en la Fig. (3.4) ya que es una función impar. El resultado de éste arreglo es que no hay armónicas lisas en la serie de Fourier para la forma de onda ya que todas las de la serie de coeficientes  $a_n$  son cero.

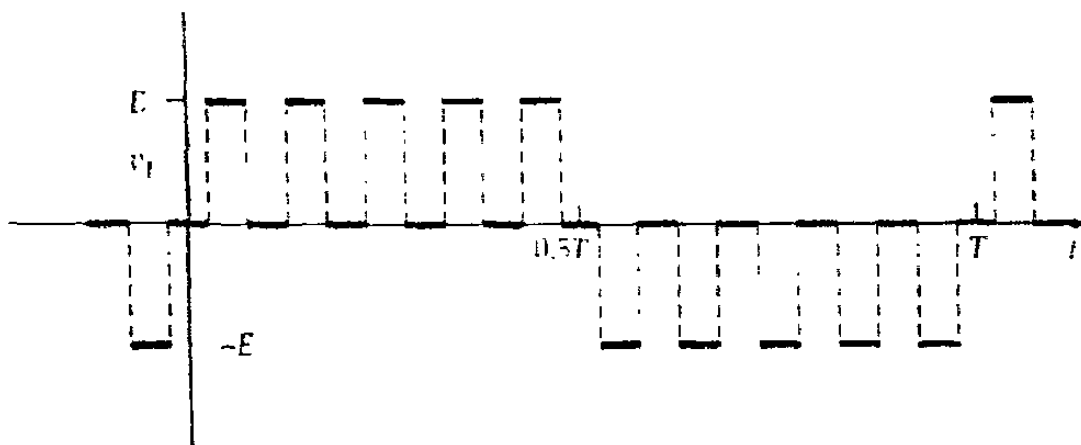


Figura 3.4 *Modulación en anchura de pulsos con simetría impar*

El propósito del PWM es para controlar a ambas, amplitud de voltaje de salida y al menos en algunos casos, el tamaño de uno o más componentes de las armónicas de salida. Una posible implementación es usar un cierto número de pulsos en cada medio ciclo tal que todos los pulsos tengan la misma anchura. Un ejemplo con cinco pulsos por medio ciclo se muestra en la Figura (3.4). La anchura del pulso es variable como se requiera para proporcionar el deseado voltaje de salida fundamental.

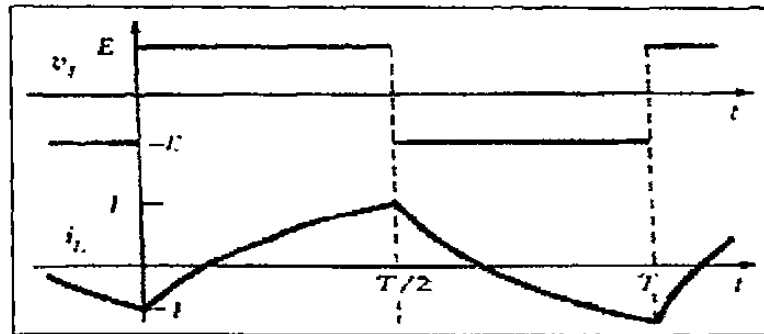


Figura 3.5. Diagrama de salida de un inversor simple de onda cuadrada

Los pulsos están espaciados a  $180^\circ/5$ , o  $36^\circ$ , aparte con la anchura del pulso necesitado. Una anchura de pulso de  $36^\circ$  nos revierte la forma de onda de un inversor simple como se muestra en la Figura (3.5). Un análisis aproximado de la forma de onda se muestra en la Fig. (3.4). Como es evidente en la figura, la forma de onda es una función impar y tiene medio periodo simétrico. Pero, la serie de Fourier contiene solo términos senoidales de orden impar. Cada pulso está representado por una función impulso de valor igual al área del pulso actual. El impulso es localizado en el centro del pulso actual, esta es una aproximación, pero se entiende que una senoidal puede estar representada por una línea recta sobre la anchura de pulso, la aproximación es exacta.

Si el procedimiento del método PWM es modificado para permitir una variada anchura de pulsos durante el ciclo, entonces una mejorada forma de onda del voltaje resulta. El número de pulsos por medio ciclo se restan en cantidades enteras como antes, pero ahora la anchura de cada pulso es variado o modulado de acuerdo a su posición dentro del medio ciclo. La variación de la anchura de los pulsos es proporcional al seno de la posición angular y se muestra en la Figura (3.6). La anchura actual de cada pulso, de acuerdo, también es proporcional a la amplitud del voltaje de salida deseado.

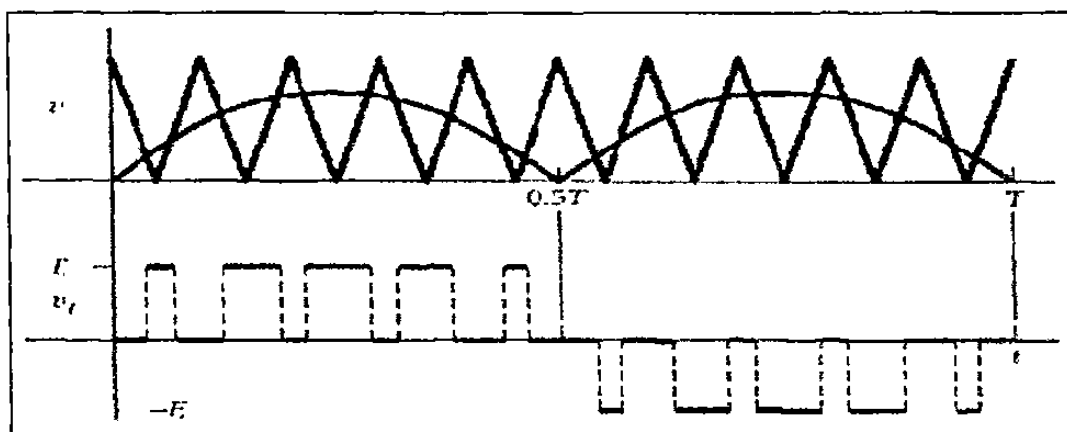


Figura 3.6 *Modulación en anchura de pulsos con modificación en cada pulso*

Es comprensible que esta técnica produce mejoras increíbles en los efectos nocivos ocasionados por los armónicos de bajo nivel, ya que al implementar esta técnica hace que los armónicos de bajo nivel sean desplazados a armónicos superiores de la 17va. armónica, ya que las armónicas de orden superior son filtrados por las inductancias del mismo motor, evitando así pérdidas por sobre calentamiento y poder tener una mejor respuesta para el control de los motores de inducción.

### 3.3 INVERSOR POLIFÁSICO: PWM

El inversor VSI de seis etapas basado en conmutación sencilla requiere de un control inversor relativamente simple, pero esto se lleva a cabo a expensa de proporcionar una variable requerida en la fuente de voltaje CD. Si el inversor es del tipo PWM, entonces una fuente de voltaje variable CD no muy grande se requiere. El proceso PWM puede controlar la magnitud de voltaje de salida inversora, así como controlar el contenido de armónicas de salida.

El método PWM en los inversores polifásicos es más restringido en el sentido de que el método puede proporcionar un conjunto balanceado de voltajes y debe ser arreglado ya que no siempre las armónicas son introducidas. Una de tales restricciones es que el número de pulsos por cada medio ciclo es divisible por tres. Una restricción más es que el número de pulsos es impar. El proceso puede ser implementado en más de una forma, así el método que se describe es una sola representación, y puede no ser el método óptimo, pero tiene la propiedad de ser relativamente simple para comprenderlo y es similar al proceso monofásico.

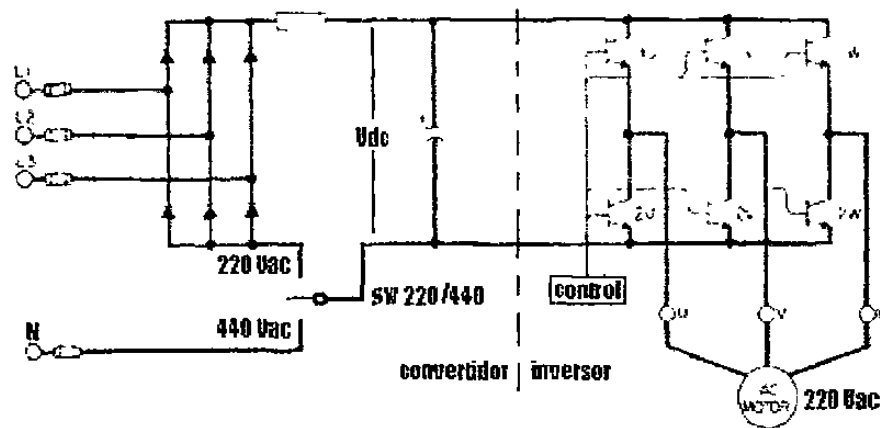


Figura 3.7 Diagrama del circuito de potencia del inversor trifásico PWM

En la gráfica que presenta la Figura (3.7) se muestran las conexiones del circuito electrónico de potencia en la red trifásica tanto con el motor de inducción que es la base de aplicación, tratando en el desarrollo de un circuito más económico en los dispositivos de potencia, ya que la posibilidad que se presenta en el circuito del puente rectificador, reduce el sobre voltaje en el circuito inversor y además permite trabajar en un índice de modulación más alto para la alimentación de 440 Volts de CA reduciendo el nivel armónico de voltaje.

En la Figura. (3.8), una onda triangular modulada se muestra dentro de dos sinusoides que están desplazadas  $120^\circ$ . Las sinusoides que tienen la amplitud de salida deseada están centradas cerca de la mitad de la forma de onda triangular. El proceso se aplica a



un puente inversor trifásico como se muestra en la Figura (3.7). El polo "a" del inversor, el cual consiste de los interruptores S1 y S4 (Transistores), están controlados de la siguiente manera. Si la senoide "a" es mayor que la forma de onda triangular, entonces el interruptor S1 está cerrado con S4 abierto. En contraposición, si la senoide es menor que la forma de onda triangular, S4 está cerrado con S1 abierto.

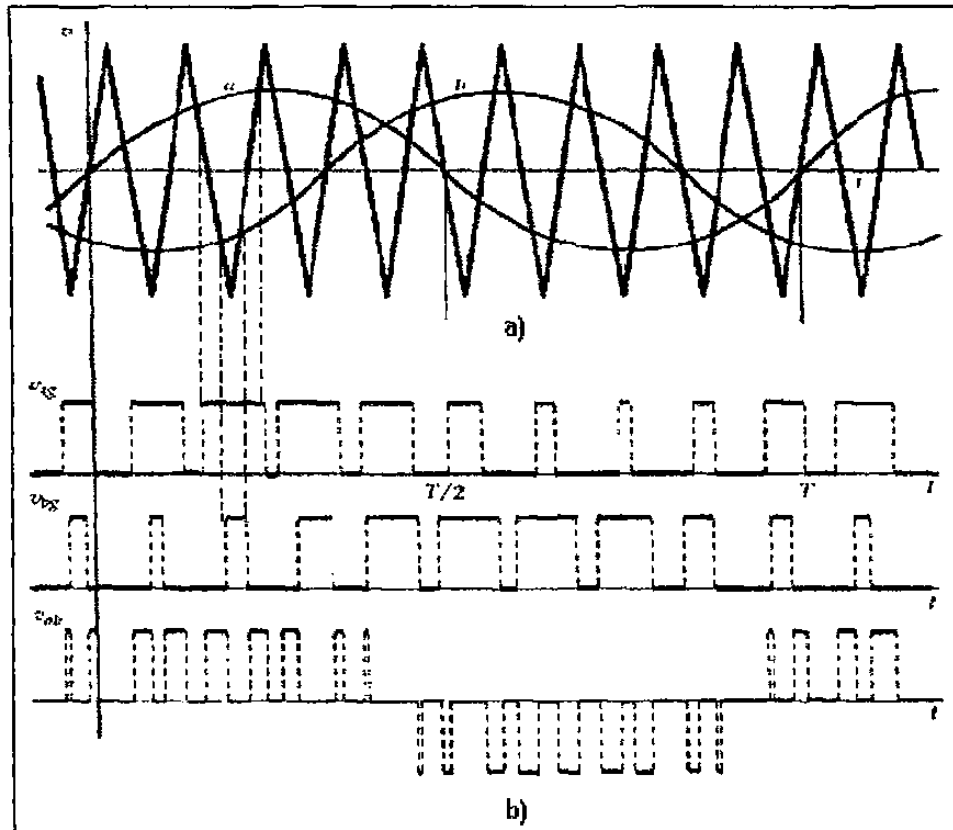


Figura 3.8 Diagrama esquemático de la formación de la señal de fase trifásica modulada por comparación de una señal portadora triangular

El voltaje resultante del punto "a" con respecto al bus negativo DC, el punto "g" se muestra en la Figura. 3.8 b. En una forma similar, el polo de la fase "b" es controlado utilizando la senoide "B", el cual el resultado se muestra también en la figura. La trayectoria es la misma como para la fase "A" excepto que está desfasada a la derecha por 120°. Aunque no se muestra, la fase "C" es controlada de una forma similar.

Uno de los voltajes de línea a línea aplicado a la carga del inversor (usualmente un motor trifásico) también se muestra en la Figura. (3.8). Este voltaje es hallado por sustracción del voltaje del polo B desde el polo A. Puede notarse que el voltaje tal como desde A al bus negativo no es el mismo que el voltaje de línea a línea del motor.

En la Figura (3.9) tenemos un diagrama de blocs del controlador de un motor de CA, donde integra los típicos instrumentos para la operación del mismo.

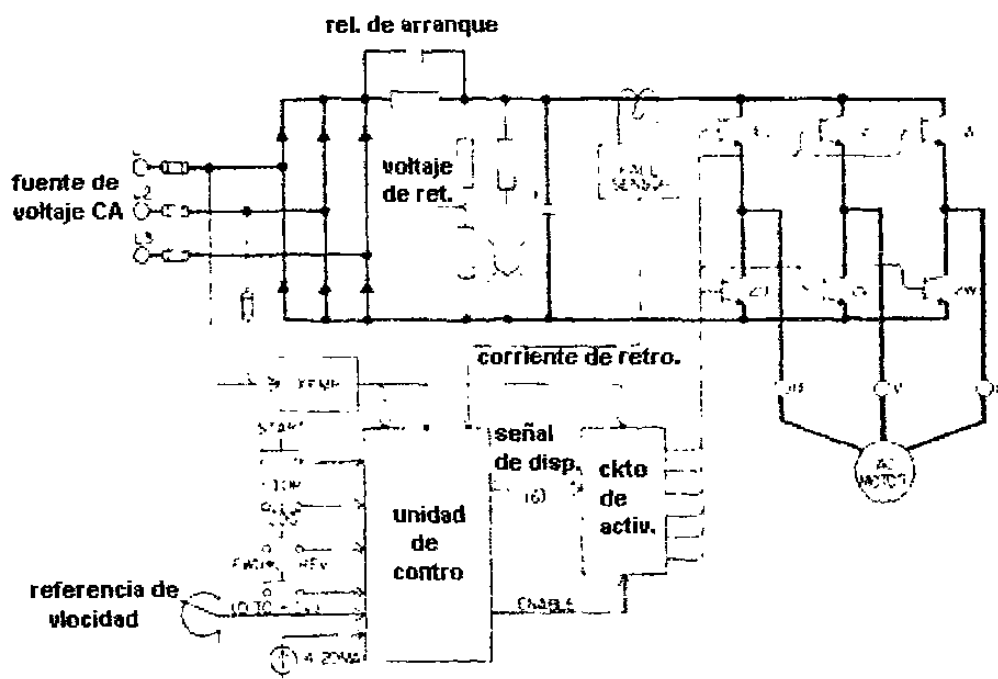


Figura 3.9. Sistema de control de un inversor con esquema de blocs.

Como puede verse esta unidad de control opera en forma de lazo abierto y su ajuste en la calidad de control de velocidad puede darse por medio de la corriente producida por deslizamiento, esto se refiere a una compensación en frecuencia y voltaje, debida al incremento de corriente producido por la carga, el diagrama de blocs de funciones se muestra en al Figura (3.10).

### 3.4 CONTROL DE VELOCIDAD DE MOTORES DE INDUCCIÓN CON COMPENSACIÓN POR DESLIZAMIENTO

Los inversores de más frecuente uso en aplicaciones industriales son del tipo de compensación por deslizamiento, son equipos más económicos y pueden ser usados en cualquier tipo de motor de inducción.

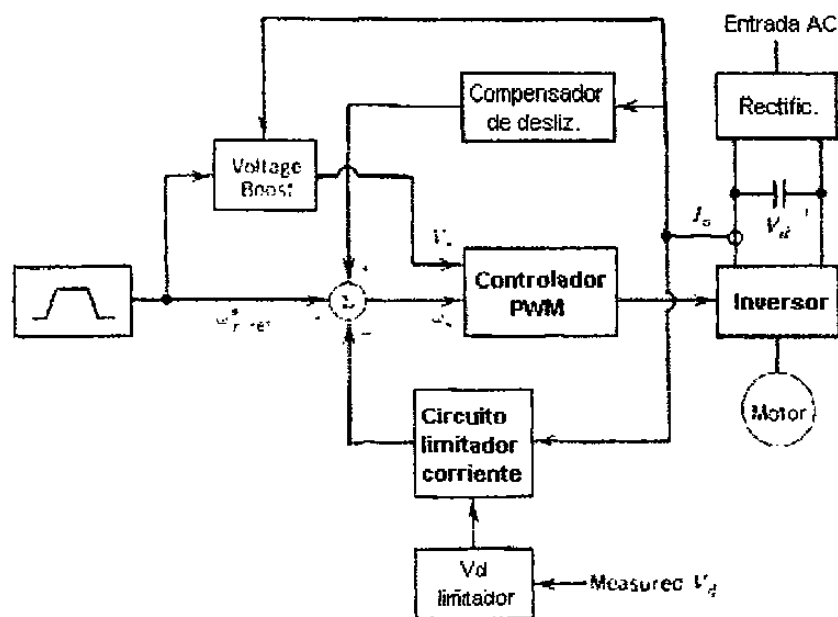


Figura 3.10. Diagrama de bloques de un sistema de control de compensación de deslizamiento

Este tipo de control de inversión por compensador de deslizamiento tiene un rendimiento satisfactorio en régimen permanente, proporcionando una buena regulación solo para el punto de operación, con el ajuste previo en compensación de deslizamiento del mismo, esto significa que para un nuevo punto de operación de velocidad su calidad de regulación disminuye, dado que es conveniente hacer un nuevo ajuste en compensación para cada nuevo ajuste en velocidad. Ahora un ajuste de compensación

debe efectuarse para operaciones en proceso a plena carga, así garantizando solo a toda una gama de cargas inferiores a la establecida a plena carga.

### 3.5 SISTEMA DE CONTROL POR PAR CONTROLADO

En aplicaciones industriales es requerido frecuentemente el uso de par controlado por motor en procesos que requieren de una tensión controlada. El equipo establecido en la sección pasada entabla una relación en control de velocidad donde no tenemos referencias para la aplicación del enlace de par, dada la situación de los equipos inversores típicos en esta área de proceso siempre la aplicación conveniente era la implementación con sistemas convertidores de aplicación en motores de CD por las características no acopladas del motor de CD.

Ahora se presenta una técnica de control para la aplicación de motores de inducción de par controlado [2] tal como se muestra en la Figura (3.11).

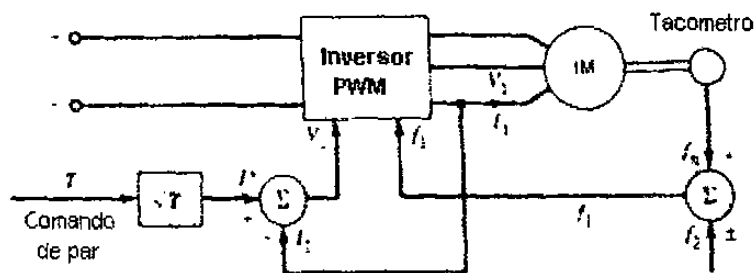


Figura 3.11 Diagrama de un sistema de control de tracción torque

El sistema consiste en dos lazos de control donde establecemos una frecuencia de deslizamiento constante y una corriente controlada de campo. Para la frecuencia de operación variable el voltaje en la terminal  $V_1$  es conbinado con la frecuencia  $f_1$  para

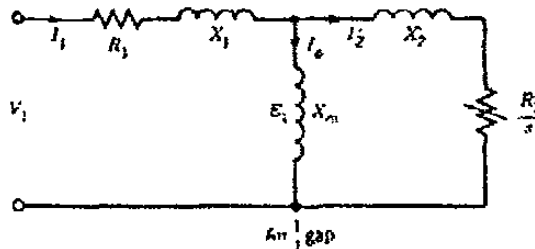


Figura 3.12 *Circuito equivalente del motor de inducción*

mantener un flujo en la máquina a un nivel deseado. En región de baja frecuencia  $V_1$  es bajo. El voltaje a través de la resistencia  $R_1$  y la reactancia  $X_1$  de campo puede ser comparable a voltaje  $V_1$ . Por lo tanto  $V_1$  no puede ser asumida a ser igual a  $E_1$ . En el circuito equivalente, la rama paralela  $X_m$  (reactancia del flujo del motor) no puede ser movida en las terminales de la máquina por lo tanto para la operación a frecuencia variable el circuito de la Figura (3.12) es más apropiada a ser usado para la predicción de la respuesta y de éste circuito se obtiene

$$I_2' = \frac{jX_m}{(R_2'/s) + j(X_2' + X_m)} I_1 \quad (3.9)$$

$$(I_2')^2 = \frac{(X_m)^2}{(R_2'/s)^2 + (X_2' + X_m)^2} I_1^2 \quad (3.10)$$

$$T = \frac{1}{\omega_{syn}} I_2'^2 \frac{R_2}{s} \quad (3.11)$$

Donde

$$\omega_{syn} = \frac{4\pi}{p} f_1 \quad \text{y} \quad s = \frac{f_2}{f_1}$$

De la Ec. (3.10) y (3.11) tenemos que

$$T = \frac{\pi p L_m^2}{R_2'} I_1^2 \frac{f_2}{1 + \left| \frac{2\pi(L_m + L_2')f_2}{R_2'} \right|^2} \quad (3.12)$$

De la Ec. (3.12) observamos que si  $f_2$  permanece constante

$$T \propto I_1^2 \quad (3.13)$$

Este sistema es aproximado ya que el control de flujo a diferentes niveles de operación no es el mismo como se presume, esto es debido a que las características del motor son altamente acopladas y esto conlleva a un ajuste impreciso en la corriente de par motor dado que la corriente de flujo en el entrehierro varía a diferentes niveles de operación, por lo cual para aplicaciones más precisas y respuestas de dinámicas más lineales donde puedan intervenir controles tales como atraso-adelanto debe implementarse equipos con control enfocado al campo (FOC), este tipo de sistemas es comunmente llamado en la industria como sistemas de control, aunque este nombre es inadecuado ya que también precisa en tipos de control Volts-Hertz que son sistemas de control de lazo abierto.

### 3.6 SISTEMAS DE CONTROL ORIENTADO AL CAMPO (FOC)

Los métodos de control que se han analizado hasta ahora proporcionan un rendimiento satisfactorio en régimen permanente pero su respuesta dinámica no es buena, aunque lo presentado en la sección anterior detalla un sistema de respuesta lineal esta difiere a puntos de operación más distantes, entonces la operación del sistema que fue mencionado es un sistema aproximado o robusto. Un motor de inducción tiene una característica altamente acoplada de multivariantes no lineales esto significa que todas las variables y parámetros del sistema están correlacionadas entre sí. El control orientado al campo (FOC) desacopla los dos componentes de la corriente del estator: una que proporciona el flujo en el entrehierro y la otra que proporciona el par motor. Este control

es independiente del flujo y del par motor y sus características quedan linealizadas. Las corrientes del estator se convierten en un marco de referencia, en rotación síncrona ficticia, alineada con el corrector de flujo y se transforma de nuevo en el marco del estator antes de ser devueltas a la máquina. Los dos componentes son análogos en  $i_{ds}$  al eje de la  $d$  con la corriente de la armadura y análogos en  $i_{qs}$  al eje de las  $q$  ( $d$  y  $q$  son el marco de referencia giratoria síncrona) con la corriente de campo de un motor en CD de excitación independiente. El vector de enlace de flujo del rotor queda alineado a lo largo del eje del marco de referencia [1]. El eje de rotación correspondiente a varias cantidades que aparece en la Figura (3.13 a).

Este tipo de control puede ponerse en práctica ya sea según un método directo o un método indirecto. En el método directo, se calcula el vector de flujo a partir de las cantidades terminales del motor, tal y como aparece en la Figura (3.13 b). El método indirecto utiliza la frecuencia de deslizamiento del motor  $\omega_s$ . Para calcular el vector de flujo deseado, tal y como aparece en la Figura (3.13 c). Resulta más sencillo poner en práctica el método directo, por lo que se utiliza cada vez más en el control de motores de inducción.  $T_d$  es el par motor deseado  $\omega_r$  es el enlace de flujo del rotor,  $\tau_r$  es la constante del tiempo del rotor y  $L_m$  es la inductancia mutua. La cantidad de desacoplamiento depende de los parámetros del motor a menos que el flujo se mida en forma directa. Sin el conocimiento exacto de los parámetros del motor no es posible, un desacoplamiento ideal.

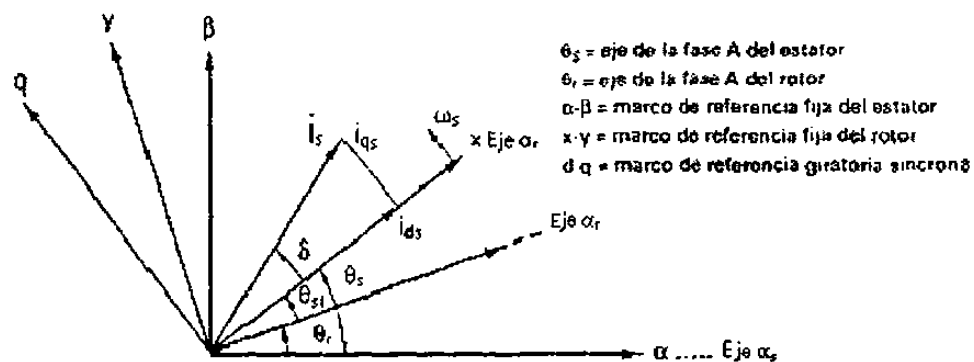


Figura 3.13 (a) Rotación de ejes

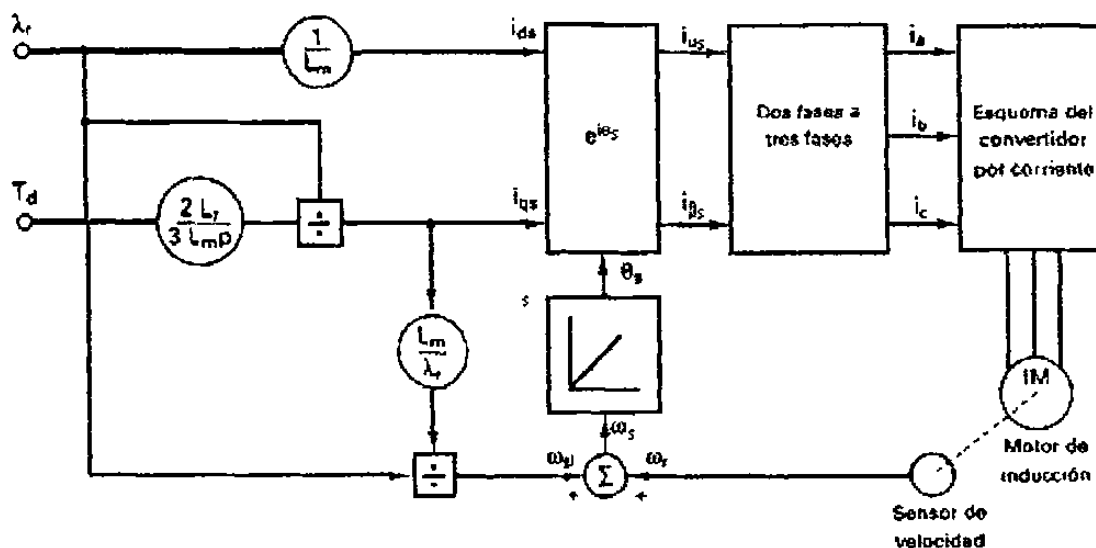
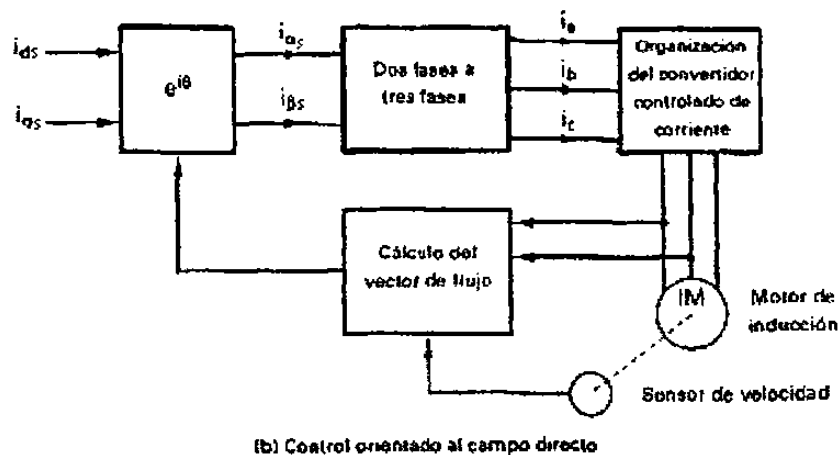


Figura 3.13 (c) Control indirecto orientado al campo

La función de desacoplo está dada por la función exponencial del vector de flujo por la corriente, cambiando el marco de referencia giratoria síncrona, al marco de referencia fija del estator de las corrientes. El enlace del vector de flujo está determinado en función de la frecuencia e igualmente la función exponencial, por lo cual es un atraso de tiempo, aprovechando esto, los vectores de los componentes pueden ser desplazados de un marco a otro por el desfase producido por el mismo, a su vez, este vuelve a formar parte del mismo enlace modificando la magnitud en su nuevo vector o marco de referencia [3].



# CAPITULO 4

## IMPLEMENTACIÓN EN EL ANÁLISIS DE OPTIMIZACIÓN

Una de las necesidades primordiales en los proyectos de control es establecer respuestas satisfactorias en la dinámica del sistema, como base fundamental se tiene el análisis de sistemas de control óptimo por índices de comportamiento y función de desempeño

En esta sección se han de considerar primeramente el proyecto de sistema de control óptimo basados en índices de comportamiento cuadrático. El sistema de control que se a de considerar puede ser representado por

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Donde

$x$  = vector de estado (vector n-dimensional)

$u$  = vector de control (vector real n-dimensional)

$A$  = matriz constante de  $n \times n$

$B$  = matriz constante de  $n \times r$

Al proyectar sistemas de control, frecuentemente interesa elegir el vector de control  $u(t)$  tal que se haga mínimo un índice de comportamiento dado. Se puede probar que los índices de comportamiento cuadrático en que los límites de integración son  $\theta$  y por tanto

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \bullet & \bullet & \bullet & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \bullet & \bullet & \bullet & k_{2n} \\ \bullet & \bullet & & & & \bullet \\ \bullet & \bullet & & & & \bullet \\ \bullet & \bullet & & & & \bullet \\ k_{r1} & k_{r1} & \bullet & \bullet & \bullet & k_{rn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

el proyecto de sistemas de control óptimo basados en estos índices de comportamiento cuadrático, se reduce a la determinación de los elementos de la matriz  $K$ .

En lo que sigue, primero se ha de tratar el problema de la optimización de parámetros; es decir, la determinación de valores óptimos de parámetros del sistema. Específicamente se considera un sistema inicialmente desplazado

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x}, \quad \bar{x}(0) = c \quad (4.2)$$

donde  $A$  tiene un parámetro o parámetros ajustables. Se desea transferir al origen a cualquier estado inicial haciendo mínimo el índice de comportamiento cuadrático

$$J = \int_0^{\infty} \bar{x}' Q \bar{x} dx \quad (4.3)$$

donde  $Q$  es una matriz simétrica real positiva definida (o positiva semidefinida). Entonces el problema se convierte en el de determinar el o los valores del o de los parámetros, para hacer mínimo el índice de comportamiento.

Luego se ha de considerar el problema de control óptimo basado en índices de comportamiento cuadrático y determinar la ley de control. Es decir, se considera el problema de determinar el vector de control óptimo  $u(t)$  para el sistema descrito por

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu \quad (4.4)$$

y el índice de comportamiento dado por

$$J = \int_0^{\infty} (x' Q x + u' R u) dx \quad (4.5)$$

donde  $Q$  es una matriz simétrica real positiva definida (o positiva semidefinida).  $R$  es una matriz simétrica real positiva definida y  $u$  no tiene restricción.

Hay muchos procedimientos distintos de solución de estos dos tipos de problemas. En esta sección se presenta un método basado en el segundo método de Lyapunov [3].

#### 4.1 OPTIMIZACIÓN DE SISTEMAS DE CONTROL POR MEDIO DEL SEGUNDO MÉTODO DE LYAPUNOV

Clásicamente, primero se proyectan los sistemas de control y luego se examina su estabilidad. Un procedimiento diferente es aquél en el que primero se formulan las condiciones de estabilidad y luego se proyecta el sistema dentro de esas limitaciones. Para una gran cantidad de sistemas de control se puede encontrar una relación directa entre las funciones de Lyapunov y los índices de comportamiento cuadrático generalizado utilizados en la síntesis de sistemas de control óptimo. Si se utiliza el segundo método de Lyapunov para constituir la base del proyecto de un control óptimo, se tiene la seguridad de que el sistema ha de funcionar, es decir, que la salida del sistema tenderá continuamente hacia su valor deseado. Así el sistema diseñado tiene una configuración con características de estabilidad inherentes.

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN DE PARÁMETROS RESUELTOS POR EL SEGUNDO MÉTODO DE LYAPUNOV. En lo que sigue se ha de tratar una relación directa entre las funciones de Lyapunov y los índices de comportamientos cuadráticos generalizados, y se ha de resolver el problema de optimización de parámetros utilizando esta relación. Sea el sistema siguiente:

$$\dot{x} = Ax$$

donde todos los valores característicos de  $A$  tienen partes reales negativas, o el origen  $x=0$  es asintóticamente estable. (A una matriz  $A$  así, se la denomina matriz *estable*). Se desea hacer mínimo el índice de comportamiento cuadrático definido por

$$J = \int_0^{\infty} x' Q x dt$$

donde  $Q$  es una matriz simétrica real positiva definida (o positiva semidefinida).

Se ha de mostrar que se puede utilizar efectivamente una función de Lyapunov para resolver este problema. Se supone que

$$x' Q x = - \frac{d}{dt} (x' P x) \quad (4.6)$$

donde  $P$  es una matriz simétrica real positiva definida. Entonces se obtiene

$$x' Q x = - \dot{x}' P x - x' P \dot{x} = - x' A' P x - x' P A x = - x' (A' P + P A) x$$

Por el segundo método de Lyapunov se sabe que para  $Q$  dada si  $A$  es estable, existe  $P$  tal que

$$A' P + P A = - Q \quad (4.7)$$

Por tanto, de esta ecuación se puede determinar los elementos de  $P$ . Se puede evaluar el índice de comportamiento  $J$  como

$$J = \int_0^{\infty} x' Q x dt = -x' P x \Big|_0^{\infty} = -x'(\infty) P x(\infty) + x'(0) P x(0)$$

Como todos los autovalores de  $A$  tienen partes reales negativas, se tiene  $x(\infty) \rightarrow 0$

Por tanto, se obtiene

$$J = x'(0) P x(0) \quad (4.8)$$

Entonces se puede obtener el índice de comportamiento  $J$  en términos de la condición inicial  $x(0)$  y  $P$ , que está relacionada con  $A$  y  $Q$  por la Ec. (4.7). Si, por ejemplo, tiene que ajustarse un parámetro del sistema, de modo que el índice de comportamiento se haga mínimo  $J$ , se le puede lograr haciendo mínimo a  $x'(0) P x(0)$  con respecto al parámetro en cuestión. Como  $x(0)$  es la condición inicial dada, y  $Q$  también está dada,  $P$  es una función de los elementos de  $A$ . Por lo tanto, este proceso de minimización lleva a un valor óptimo del parámetro ajustable.

Es importante notar que el valor óptimo de este parámetro depende, en general, de la condición inicial  $x(0)$ . Sin embargo, si  $x(0)$  involucra un solo componente no nulo, es decir,  $x_1(0) \neq 0$ , y las demás condiciones iniciales son cero, el valor óptimo del parámetro no depende del valor numérico de  $x_1(0)$ . (Véase el ejemplo siguiente)

## 4.2 APLICACIÓN DE UN MODELO DINÁMICO DE MOTOR

*Ejemplo 4.1* Sea el sistema que se ve en la Figura 4.1. Determinar el valor de la relación de amortiguamiento  $\zeta > 0$  de modo que cuando el sistema esté sometido a una entrada escalón unitario  $r(t) = 1(t)$ , se haga mínimo el índice de comportamiento siguiente:

$$J = \int_0^{\infty} x'(t) Q x(t) dt$$

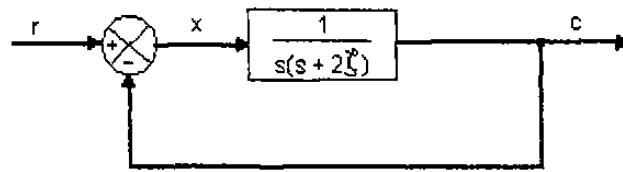


Figura 4.1 Sistema de control

Donde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (\mu > 0) \quad (4.9)$$

Se supone que el sistema inicialmente está en reposo.

De la Figura 4.1 se obtiene para el sistema la ecuación siguiente:

$$\ddot{e} + 2\zeta\dot{e} + e = r \quad (4.10)$$

Notando que  $x = r - c$ ,  $r(t) = 1(t)$  y las condiciones iniciales son iguales a cero, se tiene

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + x = 0 \quad (4.11)$$

La representación en espacio de estado de esta última ecuación se convierte en

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x' = Ax$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2\zeta \end{bmatrix}$$

Como  $A$  es una matriz estable, el valor de  $J$  está dado por

$$J = x'(0) P x(0)$$

donde  $P$  está determinado por

$$A' P + P A = -Q$$

o

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

esta ecuación produce las siguientes tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} -2p_{12} &= -1 \\ p_{11} - 2\zeta p_{12} - p_{22} &= 0 \\ 2p_{12} - 4\zeta p_{22} &= -\mu \end{aligned}$$

despejando las  $p_{ij}$  de estas tres ecuaciones se obtiene

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta + \frac{1+\mu}{4\zeta} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1+\mu}{4\zeta} \end{bmatrix}$$

Entonces el índice de comportamiento  $J$  es

$$J = x'(0) P x(0) = \left(\zeta + \frac{1+\mu}{4\zeta}\right) x_1^2(0) + x_1(0) x_2(0) + \frac{1+\mu}{4\zeta} x_2^2(0)$$

Reemplazando en esta última ecuación las condiciones iniciales  $x_1(0) = 1$  y  $x_2(0) = 0$ , se obtiene

$$J = \zeta + \frac{1+\mu}{4\zeta}$$

Para hacer mínima  $J$  con respecto a  $\zeta$ , se hace  $\partial J / \partial \zeta = 0$ , o sea

$$\frac{\partial J}{\partial \zeta} = 1 - \frac{1+\mu}{4\zeta} = 0$$

Esto da

$$\zeta = \frac{\sqrt{1+\mu}}{2}$$

Así, el valor óptimo de  $\zeta$  es  $\sqrt{1+\mu}/2$ . Por ejemplo, si  $\mu = 1$  el valor óptimo de  $\zeta$  es  $\sqrt{2}/2$  ó  $0.707$ .

Muchas veces en el caso de optimización para sistemas de control no podemos modificar los parámetros del proceso directamente y se recurre a la técnica de controlabilidad, que se presenta como base fundamental en el análisis de control moderno. En el caso de optimización por controlabilidad, se obtiene el vector de control óptimo a partir de la ecuación de Riccati que define un regulador lineal cuadrático (LQR), que derivada a partir de la ecuación de energía ficticia del segundo método de Lyapunov tal como se presenta en la Ec. (4.12)

$$A' P + P A - P B R^{-1} B' P + Q = 0 \quad (4.12)$$

Teniendo que el vector de control óptimo es  $k = R^{-1} B' P$



### 4.3 DISEÑO DEL SISTEMA DE CONTROL DISCRETO DE REGULACIÓN ÓPTIMA

En esta sección se propone un sistema de control digital como una metodología más de desarrollo práctico en la implementación de controladores óptimos para cambios de carga.

Considerar un sistema dinámico descrito por una K-esima ecuación lineal en diferencia

$$y_n = a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \dots + a_k y_{n-k} + b_1 m_{n-1} + b_2 m_{n-2} + \dots + b_k m_{n-k} \quad (4.13)$$

donde  $a_1, a_2, \dots, a_k; b_1, \dots, b_k$  son parámetros constantes con valores conocidos. Suponiendo que el propósito del sistema de control regulador es mantener la salida de lazo cerrado tan cerrada como sea posible en un preestablecido ajuste de el valor  $y_{sp}$  en la presencia de cambios en la carga. La desviación en la carga puede ser especificada por una de las siguientes mediciones [5]

$$P_1 = (y_n - y_{sp})^2 \quad (4.14a)$$

$$P_2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (y_n - y_{sp})^2 \quad (4.14b)$$

En la primera medición  $P_1$ , es referido como control de una etapa; el segundo como n-etapas de control. Así el problema del diseño del controlador puede ser formulado como sigue:

Encontrando un controlador que minimiza a  $P_1$  o  $P_2$  en la presencias de cambios en la carga.

La acción de control que minimiza a  $P_1$  tiende a mantener la salida lo más cerrado al punto de ajuste por la decisión de control hecha en cada etapa. La minimización de  $P_2$ , por otro lado, relaja la restricción a cerca de la planta a la acción del control sobre un tiempo en el horizonte más grande, permitiendo resolver los dos diseños sobre el problema.

Suponiendo que es el  $n$ -ésimo instante de muestreo y que queremos calcular la acción de control  $m_n$  de tal forma que  $y_{n+1}$  sea tan cerrado como sea posible en el deseado  $y_{sp}$ . Usando el criterio  $P_1$ , tenemos

$$P_1 = (y_{n+1} - y_{sp})^2 = [a_1 y_n + a_2 y_{n-1} + \dots + a_k y_{n-k+1} + b_1 m_n + b_2 m_{n-1} + \dots + b_k m_{n-k+1} - y_{sp}]^2 \quad (4.15)$$

El mínimo de  $P_1$  es encontrado cuando la derivada parcial de  $P_1$  con respecto a  $m_n$  es igual a cero ( $\partial P_1 / \partial m_n = 0$ ). Entonces tenemos

$$2[a_1 y_n + a_2 y_{n-1} + \dots + a_k y_{n-k+1} + b_1 m_n + b_2 m_{n-1} + \dots + b_k m_{n-k+1} - y_{sp}](b_1) = 0 \quad (4.16)$$

Y la acción de control de regulación óptima en el  $n$ -ésimo instante es dado por

$$m_n = \frac{1}{b_1} [y_{sp} - a_1 y_n - a_2 y_{n-1} - \dots - a_k y_{n-k+1} - b_2 m_{n-1} - \dots - b_k m_{n-k+1}] \quad (4.17)$$

El controlador definido por la Ec. (4.17) es físicamente realizable porque este usa solamente la información pasada en la variable manipulada y la salida controlada.

Ahora poniendo atención en el diseño del segundo criterio,  $P_2$  considera la situación en el instante de muestreo ( $N - 1$ ). Las salidas  $y_{N-1}, y_{N-2}, \dots, y_1$ , están siendo medidas y el

problema de control es determinar el valor de la variable manipulada  $m_{n-1}$ . Desde  $m_{n-1}$  solo influye el último término de  $P_2$  donde tenemos

$$\text{minimizar } P_2 = [y_n - y_{sp}]^2$$

Entonces el valor óptimo de  $m_{n-1}$  es dado por la Ec. (4.17) con  $n = N - 1$ .

Ahora consideraremos el caso en  $n = N - 2$ . La salida está siendo medida para  $n = N - 2, N - 3, \dots, 1$  y el problema está determinado el valor óptimo de  $m_{n-2}$ . Desde  $m_{n-2}$  influye los dos términos últimos de  $P_2$ , teniendo

$$\text{minimizar } P_2 = [y_n - y_{sp}]^2 + [y_{N-1} - y_{sp}]^2 \quad (4.18)$$

Si el valor óptimo de  $m_{n-1}$  está siendo medida para la última etapa, la minimización del problema es producido por la Ec. (4.18)

Porque  $y_N - y_{sp} = 0$  para el óptimo valor de  $m_{n-1}$ . Pero el valor óptimo de  $m_{n-2}$  entonces resolviendo el último problema es dado nuevamente por la Ec. (4.17) para  $n = N - 2$ . Entonces se obtiene la siguiente conclusión:

La acción de un control de regulación óptima para un sistema descrito por k-esimo orden del modelo en diferencia con constantes y parámetros conocidos es dado por la Ec.(4.17). Independientemente de que criterio,  $P_1$  o  $P_2$  es usado.

# CAPITULO 5

## DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL DIGITAL Y ADAPTACIÓN

Antes de desarrollar algún programa por computadora, donde se sustituirán algunos algoritmos de sistemas electrónicos de control analógicos clásicos por el microcontrolador, se deberá primero de implementar las técnicas de control digital, permitiéndonos emular circuitos de funciones continuas.

Por medio de la digitalización de las señales (convertidor A/D) de los dispositivos de medición, la computadora puede obtener información de lo que ocurre en el sistema, y por medio de la ejecución de su programa hace los cálculos necesarios determinando la acción de salida o variable de control.

Los programas del microcontrolador o computadora consta de uno o varios algoritmos de control y/o funciones de circuitos, los cuales serán ejecutados por una base de programa, siendo el algoritmo el que determina la operación dentro del sistema o subsistema, pero tal algoritmo debe de ser establecido para que opere en una computadora, ya que en la forma que se encuentran teóricamente representados, no pueden ser usados directamente, esto se debe a que son modelos matemáticos para análisis y su variable independiente queda determinada solo por el tiempo, ya que las ecuaciones diferenciales y funciones de transferencia, nos determinan el comportamiento, y la solución de salida en función del tiempo, no nos lleva a alguna

aplicación práctica, porque los valores de entrada quedan determinados, y aunque las variables de entrada quedarán independientes por el desarrollo en series de Taylor, la cuantificación del tiempo en los cálculos del microcontrolador a un tiempo largo desbordarían el sistema, lo cual llevaría a técnicas de programación muy complicadas.

## 5.1 DESARROLLO DE ALGORITMOS DE CONTROL

La implementación de la transformada-z es el método más práctico para el desarrollo de los algoritmos de control digital, ya que la anti-transformada-z nos da una ecuación recursiva o ecuación en diferencia, proporcionándonos una nueva variable que determina el periodo de muestreo  $T$ , la que hace el enlace del tiempo real con el algoritmo de control, donde el muestreo queda determinado por el periodo  $T$ , como se muestra en la Figura (5.1).

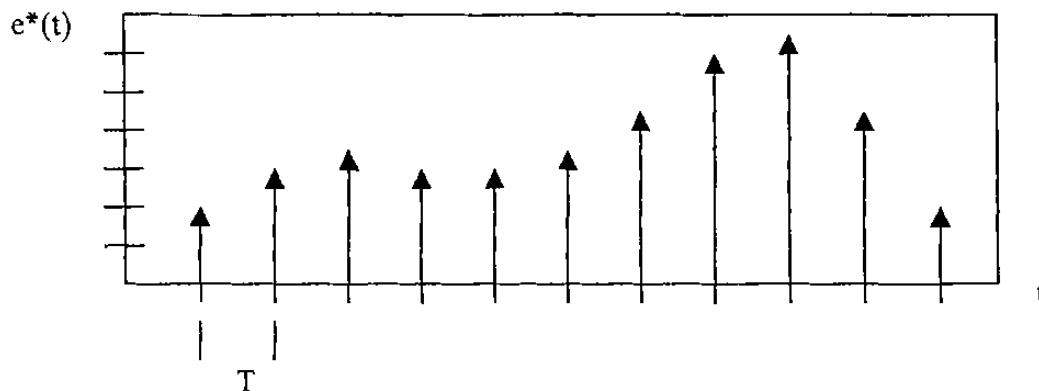


Figura 5.1 *Muestreo de una señal analógica*

Tal que el periodo  $T$  determina el tiempo de una muestra a otra, (denominado periodo de muestreo).

Para la solución de la transformada-z, un método práctico de gran aproximación, es la sustitución de la variable  $s$  en la función de transferencia, dado por

$$s \approx \left( \frac{1-z^{-1}}{T} \right) \quad (5.1)$$

## 5.2 SOLUCION DE UN FILTRO EXPONENCIAL

Este filtro exponencial de primer orden, es el filtro estándar usado en los sistemas de control digital para atenuar señales de ruido, siendo un emulador del filtro original pasabajo "R-C". El filtro es un sistema de atraso de primer orden con ganancia unitaria [2].

$$Y(s) = \frac{1}{\tau_F s + 1} X(s) \quad (5.2)$$

Este sistema es un ejemplo sencillo para desarrollar un algoritmo digital, que nos servirá para un mejor entendimiento del control digital. Siendo  $Y(s)$  la salida del filtro, y  $X(s)$  la entrada de ruido, y  $\tau_F$  es la constante de tiempo del filtro, que es un parámetro de ajuste en el control de señales de ruido. Sustituyendo la Ec. (5.1) en la función de transferencia se obtiene

$$Y(z) = \frac{1}{\tau_F \left( \frac{1-z^{-1}}{T} \right) + 1} X(z) = \frac{T}{(\tau_F + T) - \tau_F z^{-1}} X(z)$$

Despejando el denominador de  $X(z)$  y multiplicando los dos términos en  $Y(z)$ , tenemos

$$(\tau_F + T)Y(z) - \tau_F z^{-1}Y(z) = TX(z)$$

Como  $\mathcal{Z}^{-1}[z^{-1}] = \delta(t - KT)$  que es el atraso de un impulso, entonces para  $\mathcal{Z}^{-1}[z^{-1}Y(z)]$  será  $Y(t - KT)$ , que representa la muestra del valor anterior de  $Y(t)$ , y en forma discreta representa  $Y_{n-1}$  (en estado sostenido). Por lo tanto tenemos una ecuación recursiva de la forma

$$(\tau_F + T)Y_n - \tau_F Y_{n-1} = TX_n$$

Finalmente, resolviendo para la salida

$$Y_n = aY_{n-1} + (1-a)X_n \quad (5.3)$$

Donde  $a = \frac{\tau_F}{\tau_F + T}$

Es fácil observar que el parámetro  $a$  debe de estar en el rango de  $0 \leq a < 1$ , teniendo la función un polo en  $z = a$ . En las gráficas de la Figura (5.2) se observa que en la función exponencial del filtro, al incrementarse el parámetro  $a$  tiene un mayor aumento en la constante de tiempo, eliminando o atenuando el efecto de ruido (señal perturbadora de frecuencia mayor) en la entrada del sistema.

El sistema digital emula un proceso continuo de primer orden, donde la calidad del filtro esta determinada por el período de muestreo  $T$ . Para la aproximación del valor dado por la fórmula exponencial deberá ser  $T \ll \tau_F$ . Por lo tanto el sistema que representa la Ec.(5.3) del filtro, es un sistema robusto, porque la constante de tiempo del filtro  $\tau_F$  se ajusta por el parámetro  $a$  y cuando  $a = 0.5$ , entonces  $T = \tau_F$ , esto provocara una respuesta inadecuada, produciendo un filtro de mala calidad, esto es

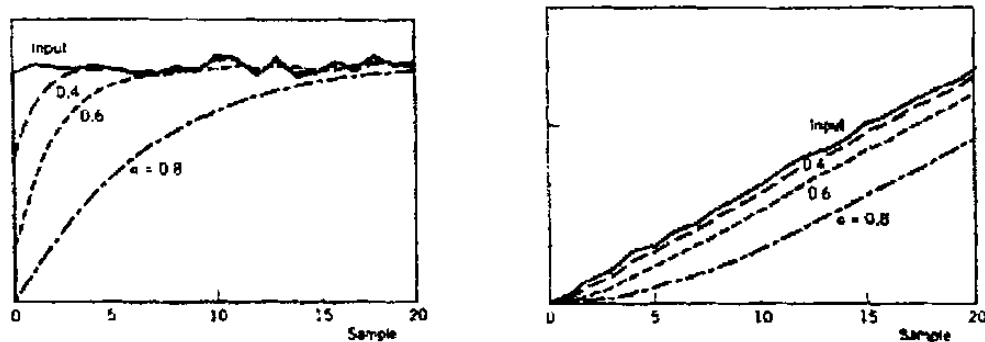
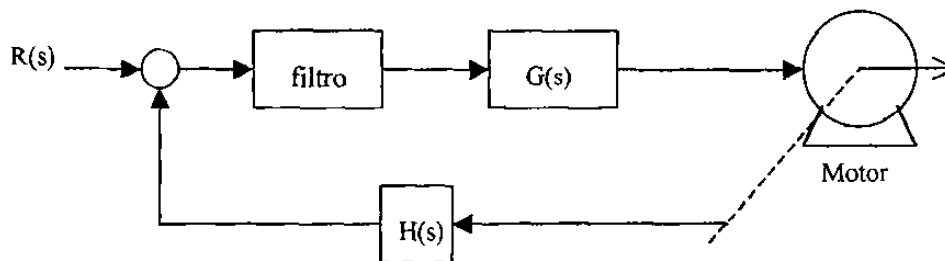


Figura 5.2 Respuesta de un filtro exponencial a un escalón y a una rampa

debido a que la calidad en la estimación de respuesta es proporcional a la cantidad de cálculos efectuados en el periodo de  $\tau_F$ , por lo tanto  $T > \tau_F$  sería una selección negligente para la operación del filtro digital. Con el control por el parámetro  $a$  se aprecia como una mala aproximación que puede conducir a un algoritmo con una respuesta no deseada. Una manera para solucionar este problema sería por el ajuste en el periodo de muestreo  $T$ , tal que el parámetro  $a$  permaneciera constante con aproximación a la unidad. Para una relación de unidades donde la constante de tiempo es muy pequeña y para evitar sobre carga en los cálculos en el microprocesador una buena aproximación sería  $T = \tau_F / 12$ , donde  $a$  permanecería constante en 0.91 aproximadamente.

Un ejemplo en la utilización de este tipo de filtro en el control electrónico de motores, sería el caso donde se requieran ganancias muy grandes como se muestra en la Figura (5.3), eliminando el ruido producido por el dispositivo de medición de velocidad, evitando así la inestabilidad en sistema de lazo cerrado. La ventaja de la utilización del filtro digital, al analógico, es la versatilidad, ya que la modificación de este dispositivo puede efectuarse desde otro lugar por medio de las comunicaciones digitales, además un microcontrolador puede emular una gran número de dispositivos simultáneamente, reduciendo los costos en los circuitos de control.



Figuran 5.3 Diagrama de lazo con filtro



### 5.3 CONTROL ADAPTABLE

Para un diseño efectivo de controladores digitales depende que tan bien conozcamos la dinámica del proceso, así la realización de un controlador depende tanto de los cambios que pueda surgir dentro del sistema ya que estos influyen en esa respuesta de variable de control por lo cual las técnicas de identificación son muy útiles en el análisis de control discreto, previamente indicamos en un control de velocidad de motor como un filtro de primer orden puede compensar los efectos de ruido dentro de nuestro sistema de lazo cerrado siendo esta técnica una versión robusta a las aplicaciones del control adaptable.

En los últimos años se ha incrementado rápidamente el interés en los sistemas de control adaptivo o adaptativo junto con el interés y progreso de los tópicos de control en general. El término sistema adaptivo tiene una variedad de significados específicos, pero habitualmente implica que el sistema tiene capacidad de acomodarse a modificaciones ambientales impredecibles, a medida que esas modificaciones se producen dentro del sistema o fuera de él. Este concepto tiene un gran atractivo para el proyectista de sistemas, pues un sistema altamente adaptivo, además de acomodarse a los cambios ambientales, podría adaptarse a moderados errores de diseño o incertidumbres de ingeniería y también compensaría los fallos de componentes menores del sistema, aumentando de ese modo la confiabilidad del sistema [3].

Ahora se presentará la importancia de las técnicas de control adaptable ya que por medio de éstas nos permitirán tener un concepto objetivo sobre las variantes que se puedan presentar en cualquier tipo de procesos en las cuales éstas están influenciadas principalmente por los cambios del medio ambiente tales como temperatura, humedad, y el deterioro del mismo equipo; no obstante el análisis de control moderno nos ofrece grandes ventajas en el desarrollo de las técnicas de optimización, sin embargo, la mayor parte de los proyectos no pueden ser desarrollados ya que la exactitud es indispensable para el desarrollo de procesos óptimos. Para la realización de procesos óptimos es

necesario precisar en cada instante todos los parámetros involucrados por lo cual los procesos de identificación juegan un papel muy importante, permitiendonos mediante la observación de las entradas y salidas del mismo sistema obtener información exacta de sus parámetros y poder aplicar alguna técnica de control óptimo.

### 5.3.1 IDENTIFICACION DEL PROCESO

Considerando un sistema que es pobremente conocido esto puede significar que un fenómeno físico, que sea el caso de un motor de corriente alterna, pueda cambiarnos la carga repentinamente provocando un desajuste en la sintonización del controlador, teniendo así un proceso pobremente entendido o que varios parámetros del proceso sean pobremente conocidos, en el primer caso el orden del proceso no sea conocido y en segundo caso no tengamos la estimación de los parámetros del proceso, con un modelo de orden conocido.

Primero debe usarse un modelo de referencia que nos pueda interpretar la dinámica en forma aproximada dado que la base para el análisis en torno a los sistemas digitales son las ecuaciones en diferencia, éstas representan en forma numérica a los sistemas dinámicos en el lugar de ser representados por ecuaciones diferenciales [5].

El sistema debe ser descrito por una ecuación en diferencia tal como se presenta en la ecuación

$$y_n = a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \dots + a_k y_{n-k} + b_1 m_{n-1} + b_2 m_{n-2} + \dots + b_k m_{n-k} \quad (5.4)$$

Donde sus coeficientes que son los parámetros del proceso involucrados con una relación de período pueden describir el sistema en puntos específicos, a esto se le conoce como función discreta, donde  $y$  y  $m_i$  son los valores de entrada y salida del proceso o sistema en el  $i$ -ésimo instante de muestreo y  $a_1, a_2, \dots, a_k$ ;  $b_1, b_2, \dots, b_k$  son constantes

que no son conocidas con exactitud, esto significa que no tenemos un conocimiento preciso de ellas, el orden de  $k$  del modelo puede ser no conocida

Introduciendo en la entrada del proceso o sistema un cambio específico y permitiendo efectuar la medición de los valores en la variable de entrada  $m_n$  y la medición de los valores del resultado de la salida del proceso  $y_n$ . en el  $n$ -ésimo instante de muestreo comparamos  $n = 0, 1, 2, \dots$  entonces comparamos los valores calculados en la salida del sistema del modelo postulado Ec (5.4) con la medición de los valores de salida.

Teniendo que el error es

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \bar{y}_n - y_n \\ &= \bar{y}_n - (a_1 \bar{y}_{n-1} + a_2 \bar{y}_{n-2} + \dots + a_k \bar{y}_{n-k} + b_1 \bar{m}_{n-1} + b_2 \bar{m}_{n-2} + \dots + b_k \bar{m}_{n-k}) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Los mejores valores de los parámetros no conocidos son aquellos en que el campo de error sea mínimo entre el teórico y valor real de salida del proceso. Así que los parámetros mejor estimados son dados por la solución del siguiente problema de mínimos cuadrados,

$$\begin{aligned} \text{minimo } P &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \varepsilon_n^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\bar{y}_n - a_1 \bar{y}_{n-1} - a_2 \bar{y}_{n-2} - \dots - a_k \bar{y}_{n-k} - b_1 \bar{m}_{n-1} - b_2 \bar{m}_{n-2} - \dots - b_k \bar{m}_{n-k})^2 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Existen varios métodos de solución para la minimización del problema. Uno de estos es basado en la solución del siguiente juego de ecuaciones algebraicas

$$\frac{\partial P}{\partial a_1} = \frac{\partial P}{\partial a_2} = \dots = \frac{\partial P}{\partial a_k} = \frac{\partial P}{\partial b_1} = \frac{\partial P}{\partial b_2} = \dots = \frac{\partial P}{\partial b_k} = 0 \quad (5.7)$$

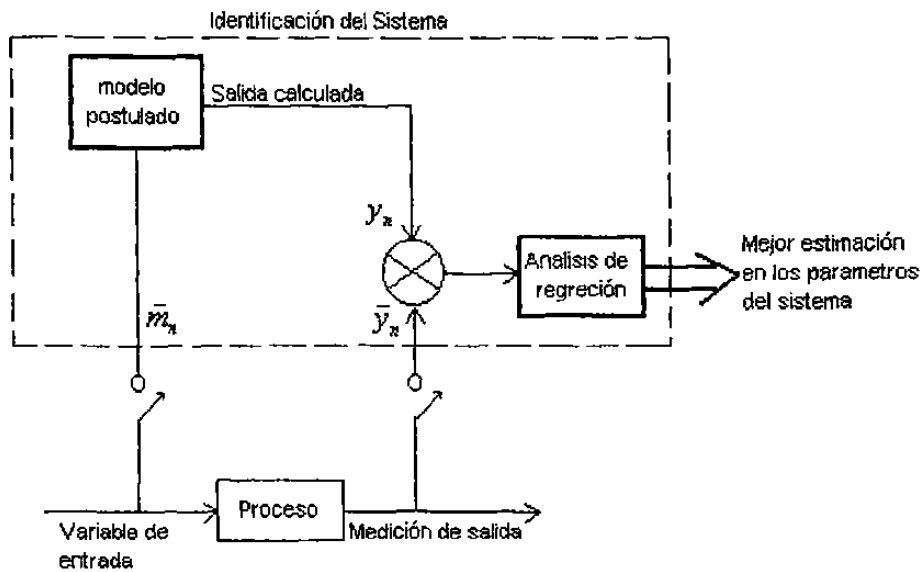


Figura 5.4 *Identificación experimental del proceso dinámico*

Si el valor del error cuadrático  $P$  es significativamente más grande que el posible valor teórico de cero, entonces concluimos que el orden del modelo asumido es inaceptablemente bajo y que un modelo de mayor orden puede ser usado.

En el caso del sistema de motor de inducción tratado en el Capítulo 2, precisa un modelo de primer orden no lineal en función de la velocidad angular del rotor  $\omega_r$ , estas características son de forma aproximada, este sistema puede ser identificado con el modelo de primer orden. Esta identificación debe de ser efectuada solo en el punto de operación, con una señal perturbadora pequeña, si el análisis es efectuado para el control en la posición angular  $\theta_r$ , el modelo de identificación a usar será de segundo orden.

Ahora se presentan los pasos que constituye la base experimental para la identificación de un sistema o proceso para el diagrama esquemático de la Figura (5.4).

Paso 1. Postular un modelo para el proceso. El proceso no conocido no es completamente una caja negra. Alguna información acerca del comportamiento dinámico es conocida ya sea por principios básicos y/o experiencia con el sistema. Por lo

tanto, alguna estimación del orden del modelo y algunos valores iniciales para los parámetros no conocidos deberán ser disponibles.

Paso 2. Introducir un cambio de entrada en el proceso y almacenar la salida. Podemos usar datos de operación normal (señales con la que opera el mismo proceso) para los valores de las variables de entrada y salida. Esto puede ser realizado, aunque, una excitación del proceso con un cambio abrupto (de prueba) en la señal de entrada (escalón, pulso, , senoidal) producirá variaciones mas pronunciadas en la variable de salida. Esto no rendirá más información en la dinámica del proceso. En otro caso, un cambio abrupto puede interrumpir seriamente la operación del proceso y así puede ser no recomendado para la identificación de procesos en línea. Los valores de los parámetros calculados por el método de mínimos cuadrados depende del tipo de entrada que fue usado en la prueba. Así podemos tener diferentes resultados para el cambio de entrada escalón y impulso. Esto pueden ser serias desventajas del método para la identificación de sistemas sensitivos.

Paso 3: La mejor estimación de los parámetros del proceso no conocidos. La metodología de minimos cuadrados es conocida también como análisis de regresión. Si el modelo postulado es no lineal, tenemos un análisis de regresión lineal; de otra manera es llamado análisis de regresión no lineal.

### 5.3.2 IDENTIFICANDO EL ORDEN Y LOS PARÁMETROS DEL MODELO

Considerando un sistema que su dinámica es pobremente conocida así que no tenemos una buena estimación para el orden de un modelo propuesto. Asumiendo que el sistema esta inicialmente en estado estable y luego introducimos una señal de entrada donde los valores de muestreo son observados en la Tabla 5.1.el registro de la de la salida de la respuesta del proceso en varios instantes de muestreo es también observado en la Tabla 5.1. notando que las variables de entrada y salida tenemos que están siendo expresadas en forma de desviación, teniendo valor cero para valores negativos.

Instante de muestreo	Variable de entrada	Variable de salida
n	$m_n$	$y_n$
n < 0	0.0	0.0
0	1.0	0.0
1	0.60	0.50
2	0.30	0.90
3	0.10	0.91
4	0.0	0.866
5	0.0	0.732
6	0.0	0.612
7	0.0	0.513
8	0.0	0.430
9	0.0	0.361
10	0.0	0.302
11	0.0	0.253
12	0.0	0.212
13	0.0	0.178
14	0.0	0.149
15	0.0	0.125

Tabla 5.1 *Datos para identificación de proceso*

Inicialmente, postulamos un modelo de primer orden

$$y_n = a_1 y_{n-1} + b_1 m_{n-1} \quad (5.8)$$

El análisis de regresión lineal encuentra los valores de los parámetros  $a_1$  y  $b_1$  que minimiza el índice de error cuadrático.

$$P = \frac{1}{15} \sum_{n=1}^{15} (y_n - a_1 y_{n-1} - b_1 m_{n-1})^2 \quad (5.9)$$

Como sigue: los valores óptimos de  $a_1$  y  $b_1$  deben satisfacer las condiciones necesarias para un punto mínimo

$$\frac{\partial P}{\partial a_1} = \sum_{n=1}^{15} 2(y_n - a_1 y_{n-1} - b_1 m_{n-1})(-y_{n-1}) = 0 \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial P}{\partial b_1} = \sum_{n=1}^{15} 2(y_n - a_1 y_{n-1} - b_1 m_{n-1})(-m_{n-1}) = 0 \quad (5.11)$$

Resolviendo las Ec. (5.10) y (5.11) para  $a_1$  y  $b_1$ , usando los valores de medición de la Tabla 5.1 para  $y_n, y_{n-1}, m_{n-1}$  ( $n = 1, 2, \dots, 15$ ) y encontramos

$$a_1 = 0.86 \quad \text{y} \quad b_1 = 0.57$$

Estos valores de para  $a_1$  y  $b_1$  minimizan el índice del error cuadrático dado por la Ec. (5.9)

$$\text{mínimo } P = 0.00161$$

Esto es razonablemente cerrado a cero así que podemos concluir que un modelo de primer orden describe adecuadamente el proceso no conocido.

Ahora procedemos por postular un modelo de segundo orden de la forma

$$y_n = a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + b_1 m_{n-1} + b_2 m_{n-2}$$

Entonces el objetivo de la función de mínimos cuadrados viene siendo

$$P = \frac{1}{15} \sum_{n=1}^{15} (y_n - a_1 y_{n-1} - a_2 y_{n-2} - b_1 m_{n-1} - b_2 m_{n-2})^2$$

Siguiendo el mismo procedimiento como antes, resolvemos las condiciones necesarias

$$\frac{\partial P}{\partial a_1} = \frac{\partial P}{\partial a_2} = \frac{\partial P}{\partial b_1} = \frac{\partial P}{\partial b_2} = 0$$

Y encontramos

$$a_1 = 0.6, \quad a_2 = 0.2, \quad b_1 = 0.5, \quad b_2 = 0.3$$

Estos valores producen

$$\text{Mínimo } P = 0$$

Por lo tanto el modelo propuesto de segundo orden describe exactamente la dinámica del proceso y el modelo que puede ser usado para el diseño del controlador es

$$y_n = 0.6 y_{n-1} + 0.2 y_{n-2} + 0.5 m_{n-1} + 0.3 m_{n-2}$$



### 5.3.3 IDENTIFICACIÓN DE PROCESO Y CONTROL ADAPTIVO

La naturaleza de un típico sistema no lineal conduce a un cambio en las características dinámicas de operación. En tal situación un controlador puede ser capaz de ajustar sus parámetros de manera óptima. Así quedando claro los sistemas de control adaptivo [5].

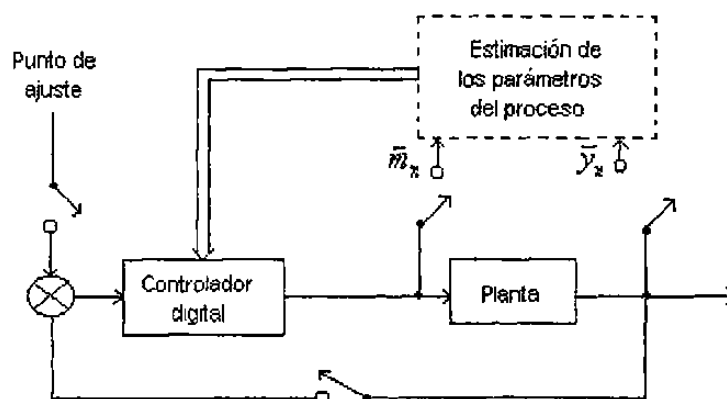


Figura 5.5 Esquema de la lógica de un control adaptable

Una adaptación óptima de los parámetros del controlador pueden ser logrados solo si un buen modelo es disponible, que describa los procesos dinámicos durante las diferentes etapas de esta operación [3]. Por lo tanto la identificación de los procesos es una parte integral de todos los esquemas del control adaptivo, Figura (5.5).

Ahora se considerará un proceso que es descrito por el siguiente modelo de tiempo discreto

$$y_k = a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \dots + a_k y_{k-k} + b_1 m_{k-1} + b_2 m_{k-2} + \dots + b_k m_{k-k} \quad (5.12)$$

Los coeficientes  $a_1, a_2, \dots, a_k; b_1, b_2, \dots, b_k$ , se asume que son parámetros constantes. Asumiendo que el propósito del controlador está manteniendo la salida del sistema tan cerrada como sea posible al punto de ajuste deseado  $y_{sp}$ . En el Capítulo 4

nosotros encontramos que la acción del control que minimiza a cualquiera de los dos errores cuadráticos del periodo próximo o el error cuadrático medio sobre  $N$  períodos de muestreo es dado por la Ec.(4.17)

$$m_k = \frac{1}{b_1} \left[ y_{sp} - a_1 y_k - a_2 y_{k-1} - \dots - a_k y_{k-k+1} - b_2 m_{k-1} - \dots - b_k m_{k-k+1} \right] \quad (4.17)$$

Si los parámetros  $a_1, a_2, \dots, a_k; b_1, b_2, \dots, b_k$  son conocidos, entonces la Ec. (4.17) describe la acción de control óptima en el  $n$ -ésimo instante de muestreo. Cual mantiene la salida tan cerrada como sea posible en el punto deseado. Pero los parámetros  $a_1, a_2, \dots, a_k; b_1, b_2, \dots, b_k$  cambian sus valores porque movemos la operación del proceso a un nuevo ajuste (efecto de no linealidad) o porque el proceso es no estacionario. En ambos casos necesitamos estimar nuevos valores para el cambio en los parámetros. Esto puede ser hecho por el análisis de regresión lineal usando los datos de experimentación de entrada y salida como se describió en esta sección. Consecuentemente, siguiendo el control adaptivo en línea surge la política para cambios de ajuste:

- Se asume que el proceso está operando en el valor de ajuste  $y_{sp}^{(i)}$ . La acción del control dada por la Ec. (5.13) regula la salida en el actual valor de ajuste  $y_{sp}^{(i)}$  contra algún cambio en la carga

$$m_k = \frac{1}{b_1^{(i)}} \left[ y_{sp}^{(i)} - a_1^{(i)} \bar{y}_k - a_2^{(i)} \bar{y}_{k-1} - \dots - a_k^{(i)} \bar{y}_{k-k+1} - b_2^{(i)} \bar{m}_{k-1} - \dots - b_k^{(i)} \bar{m}_{k-k+1} \right] \quad (5.13)$$

Donde el índice ( $i$ ) indica los parámetros estimados del proceso durante el actual  $i$ -ésimo nivel de operación, indicando los valores medidos.

- Suponiendo que queremos mover la salida a un nuevo punto de operación,  $y_{sp}^{(i+1)}$  Donde la operación de los parámetros del sistema poseen diferentes valores. Usando la Ec. (5.13) con  $y_{sp}^{(i+1)}$  llevando el proceso a un nuevo ajuste.

- Durante la transferencia del antiguo al nuevo ajuste, se registra los valores de las variables de la entrada manipulada y la salida del controlador. Usando los datos de entrada y salida para estimar los nuevos valores de los parámetros por la regresión lineal. Entonces, el nuevo controlador será

$$\bar{m}_k = \frac{1}{b_1^{(i+1)}} \left[ y_{SP}^{(i+1)} - a_1^{(i+1)} \bar{y}_k - a_2^{(i+1)} \bar{y}_{k-1} - \dots - a_n^{(i+1)} \bar{y}_{k-n+1} - b_2^{(i+1)} \bar{m}_{k-1} - \dots - b_k^{(i+1)} \bar{m}_{k-k+1} \right] \quad (5.14)$$

La Figura (5.6) dramatiza los efectos de la adaptación en línea en la calidad de respuesta de lazo cerrado contra el caso de un control sin adaptación.

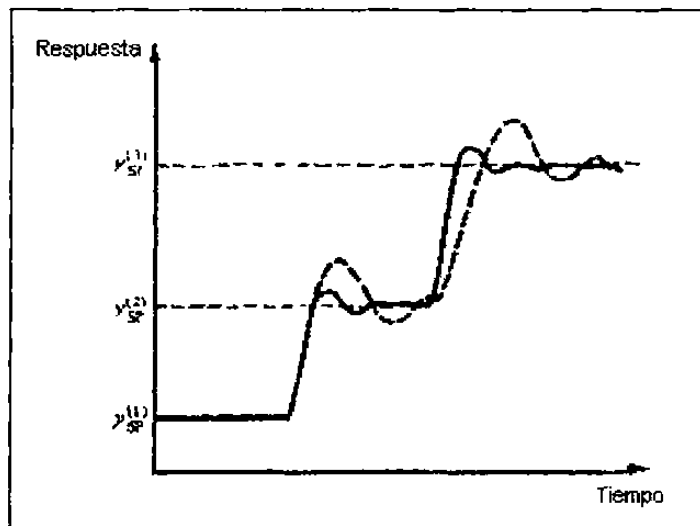


Figura 5.6 *Respuesta del sistema de lazo cerrado (línea sólida) y sin (línea punteada) adaptación en línea.*

# CAPITULO 6

## DISPOSITIVOS Y HERRAMIENTAS

### 6.1 DISPOSITIVOS VIABLES PARA LA IMPLEMENTACIÓN

Para la posible implementación de los sistemas de control enfocado a los motores de inducción, se encuentra una amplia gama de circuitos microcontroladores. Las características necesarias que deben de tener este tipo de dispositivos es la rapidez necesaria para efectuar los cálculos convenientes en un mínimo de tiempo, dado que los microprocesadores y microcontroladores que se disponían hasta hace poco eran ineficientes ya que éstos circuitos operaban en un rango inferior a los 2Mhz; aunque los microprocesadores de mayor velocidad con los que se contaban no eran rentables para el desarrollo de este tipo de proyectos por el costo que estos presentaban. Nuevas generaciones de familias de microcontroladores surgen a mediados de los 90's tales como las series de los microcontroladores PIC's de la familia 16C7X que operan a razón de un rango de frecuencia de 20Mhz, con atributos adicionales integrados en el mismo encapsulado tales como convertidores analógico digital (A/D) y tipo de conversión de salida en modulación de anchura de pulso (PWM), también presenta una arquitectura tipo HARVARD para una base de programación RISC (Reduced instruction set computer), lo que viene a significar computadora con juego de instrucciones reducido, así la programación presenta los atributos de introducir en su ejecución tanto el código de operación como el operando en un solo ciclo de ejecución, esto quiere decir que

reduce el tiempo de trabajo en la ejecución de su programa en un orden de cinco veces a los sistemas de arquitectura convencional denominada VON NEUMANN, que además presentaban estructuras más complejas en los repertorios de instrucciones denominados CISC (Complex instruction set computer). Además precisamos que un verdadero circuito RISC, en principio debe ejecutar todas las instrucciones a la misma velocidad, es decir, en un ciclo de reloj de instrucción, lo que resulta benéfico para las operaciones en el control discreto.

Estos dispositivos cumplen los requisitos necesarios para la operación de controladores para motores de inducción siendo el caso de sistemas de control vectorial ó control enfocado al campo (FOC) como se presentó en el Capítulo 3, dado que éstos requieren de un análisis laborioso en los cálculos de su proceso.

## 6.2 PROYECTO PARA ANÁLISIS DE CONTROL POR COMPUTADORA

En esta sección presento un desarrollo propio para el análisis de sistemas de control lineal y adaptivo por computadora, denominado SIMPROTC (Simulación de Prototipos de Control) desarrollado en la base del lenguaje C. Solo se expondrá en forma breve la operación del paquete y la metodología que emplea para el desarrollo en sus cálculos sin profundizar en la programación.

Este paquete cuenta con un ambiente interactivo facilitando el manejo para la resolución de problemas en los proyectos de control, desarrollando objetivamente la simulación de prototipos con propósito general para el área de control, aunque la base a tratar en esta sección previo a la introducción del manejo del paquete es presentar un ejemplo para el desarrollo de identificación de un modelo de motor de inducción.

Primero se presenta la pantalla principal tal como se muestra en la Figura (6.1) teniendo

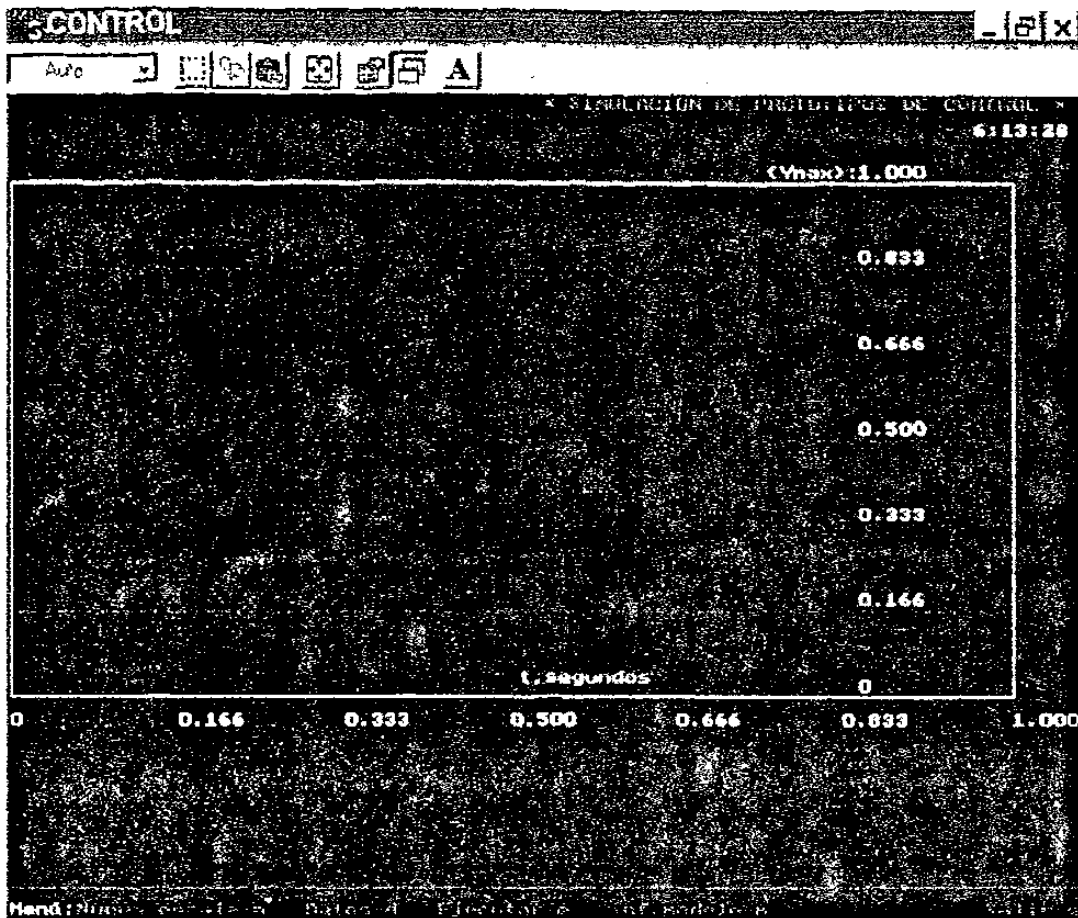


Figura 6.1 Pantalla inicial del SIMPROTC

el menú de opciones de operación básica tal como ajuste de escala , entrada de datos, información del modelo y comando de salida.

El comando en el set de menú *Nueva escala n*, da la opción inicial para el tiempo de ejecución seguida por la opción de escala de magnitud para forma manual o automática y en tercera instancia con o sin asintótica de la función.

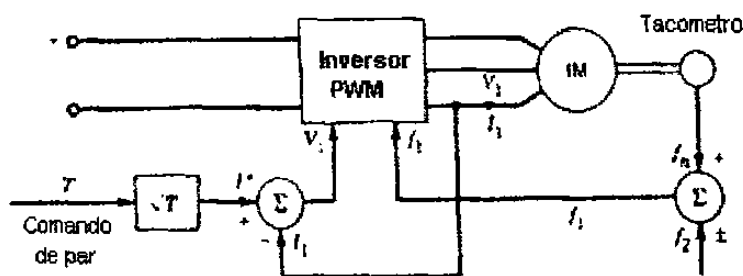
El comando en el set de menú *Datos d*, ofrece tres opciones que son: entrada de datos de modelo, entrada de datos para identificación, y opción de controlador.

El siguiente comando *Ejecutar e*, ofrece la ejecución de las condiciones que se van presentando para cada situación posible.

El comando *Inf. modelo m*, presenta el modelo que se encuentra disponible previamente cargado.

Por último el comando *Salir s*. Salida del sistema SIMPROTC.

Ahora se presentarán los pasos para la ejecución del modelo del motor de inducción con control de par controlado propuesto en el Capítulo 3, (que presenta un modelo lineal tal como se representa en la figura siguiente).



*Diagrama de un sistema de control de tracción torque*

Para la ecuación diferencial del sistema representado esquemáticamente tenemos:

Tal que

$$T \propto I_1^2$$

Por lo tanto

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{f}{J}\omega + \frac{T}{J}$$

que es una ecuación diferencial de primer orden. Por lo tanto hacemos la selección de orden de modelo dentro del comando *Datos* e como se ve en la Figura (6.2).

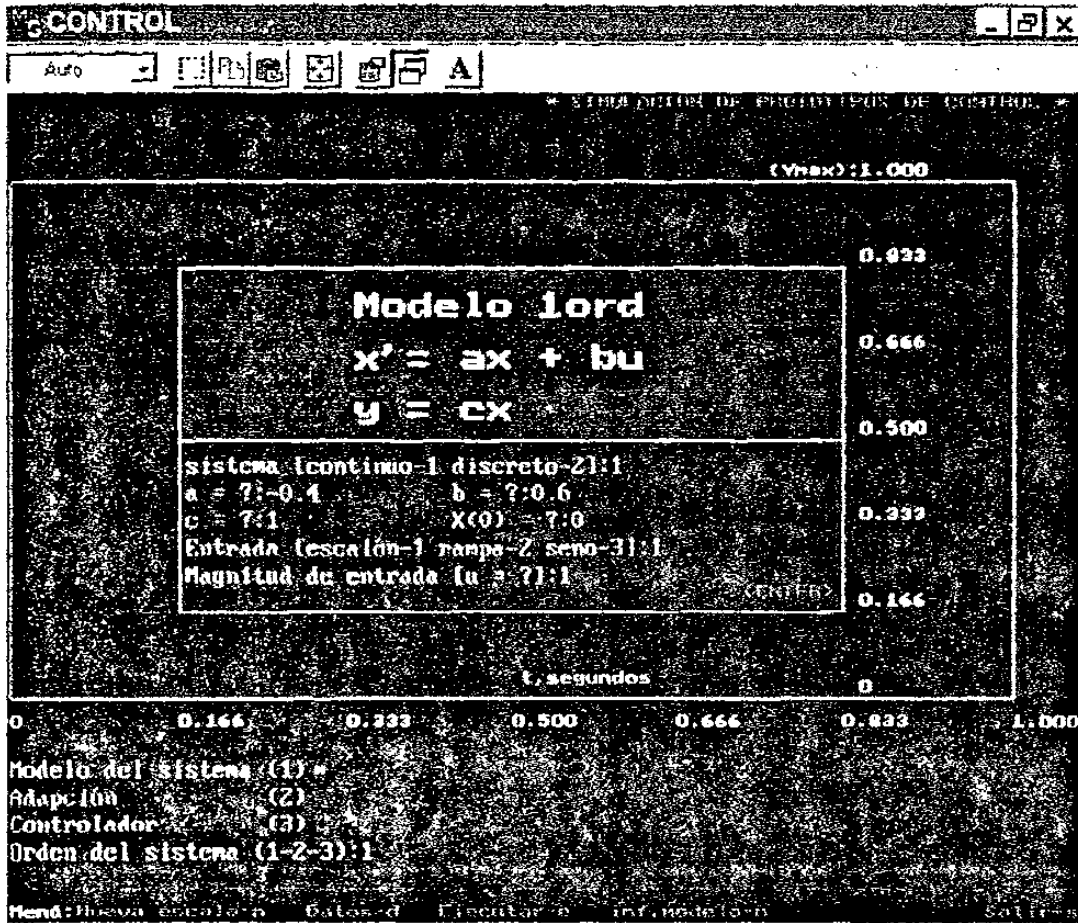


Figura 6.2 Selección de modelo y entrada de datos.

$J$  = Momento de inercia del motor =  $200 \text{ Nw-mts/seg}^2$

$f$  = Coeficiente de fricción viscosa del motor = 80

$T$  = Par generado por el motor = 120Nw

Teniendo que  $a = -f/J$  y  $b = T/J$ . Y con los datos presentados tenemos que  $a = -0.4$  y  $b = 0.6$  y para condiciones iniciales  $\omega(0) = 0$  y dato de entrada en escalón unitario para  $u = 1 \text{ p.u.}$ , y quedando determinado, lo que se presenta en la Figura (6.2).



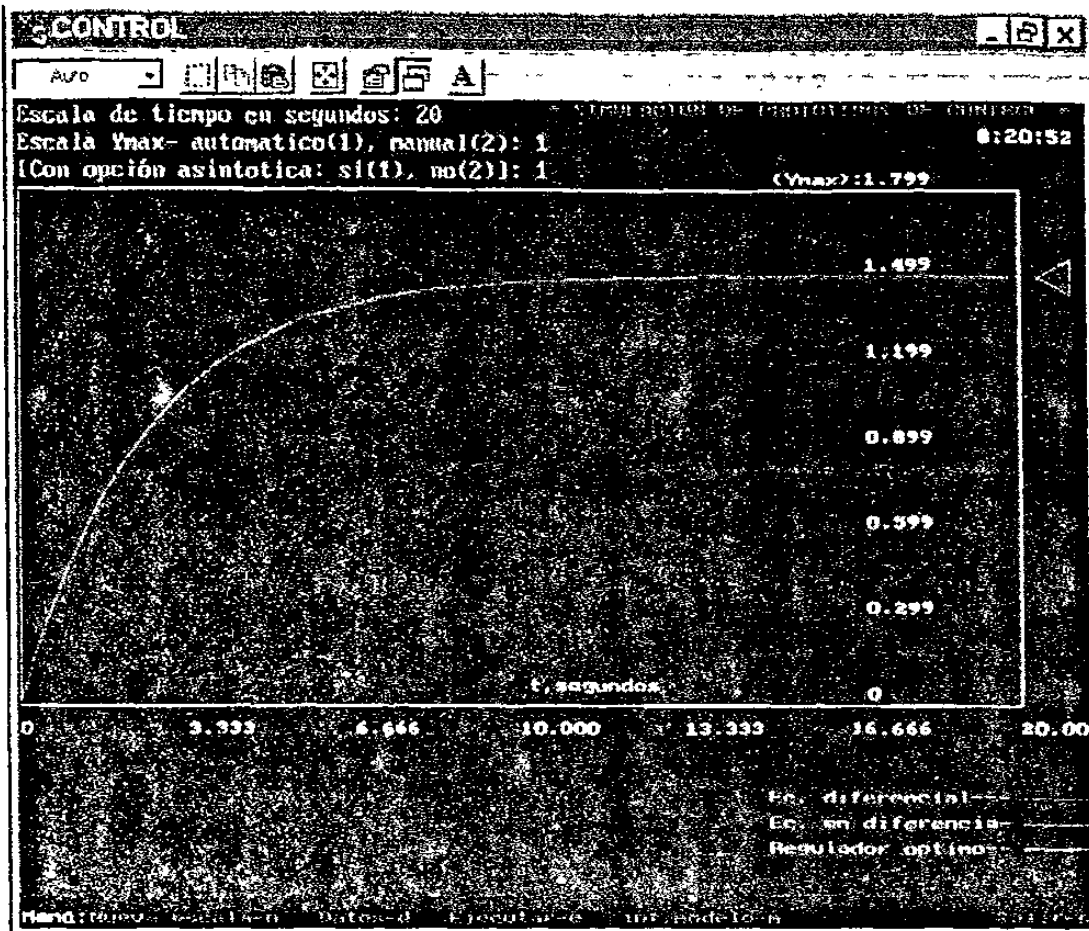


Figura 6.3 Representación gráfica de la ejecución dinámica del modelo

Después se prosigue para ejecutar el modelo dinámico con el comando *Ejecutar* e y visualizarlo en forma gráfica. El método que emplea el sistema para la solución en el tiempo dinámico es basado en la matriz de transición  $\phi(t)$ , solo para el caso de los modelos de segundo orden en adelante. Tal como se muestra en la Figura (6.3).

Siguiendo con el procedimiento de identificación del modelo se selecciona la opción *Adaptación* del menú de *Datos* e y seguido por el orden del sistema, seleccionando ahora la opción *muestreo del modelo* para permitir formar un registro de los datos a los diferentes puntos de la respuesta del sistema. Ver Figura (6.4).

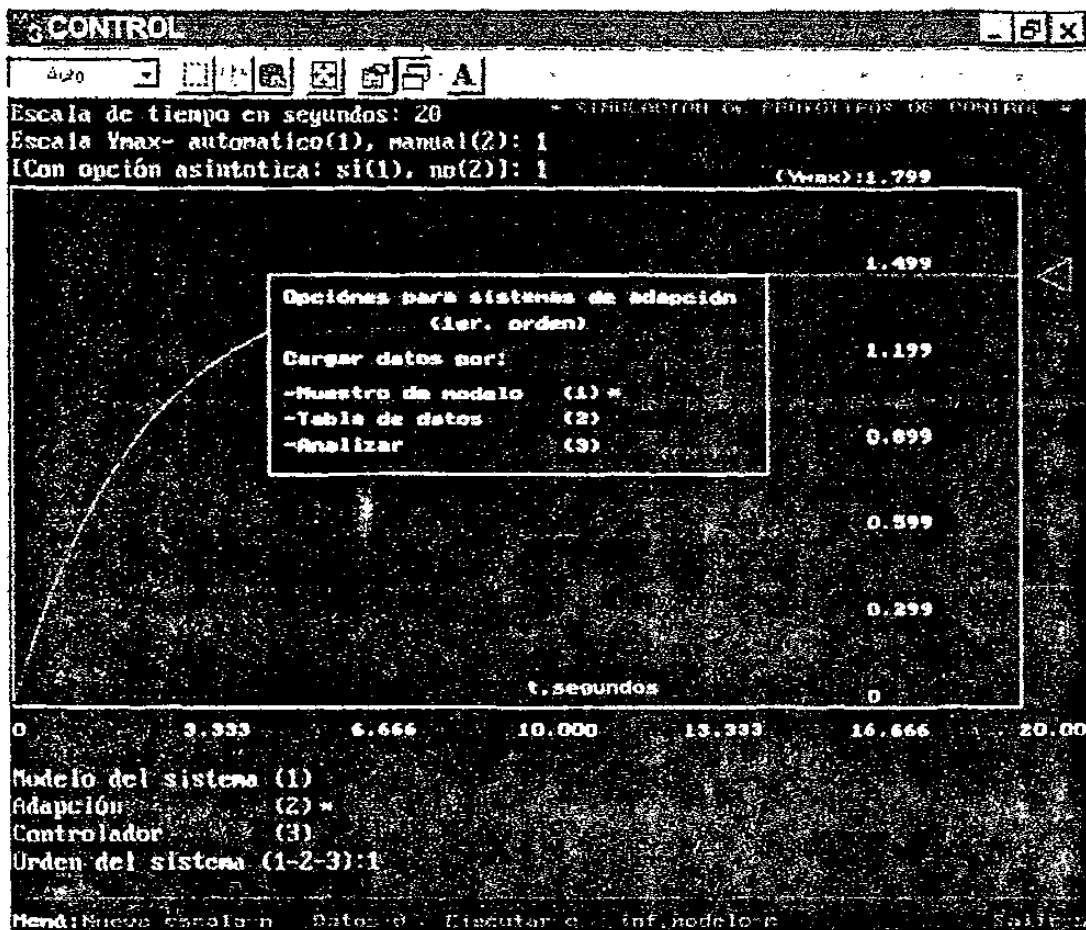


Figura 6.4 Selección para modo de muestreo

y presionando la tecla <enter> aparecerá una nueva opción de condición obligatoria para determinar el período de muestreo en T en segundos.

En seguida, se presiona nuevamente el comando *Ejecutar* e y obtener el resultado de las muestras de entrada y salida del motor, efectuando simultáneamente la regresión de los coeficientes de la ecuación en diferencia por medio del análisis del método numérico de mínimos cuadrados tratado en el Capítulo 5, lo que se observa en la Figura (6.5).

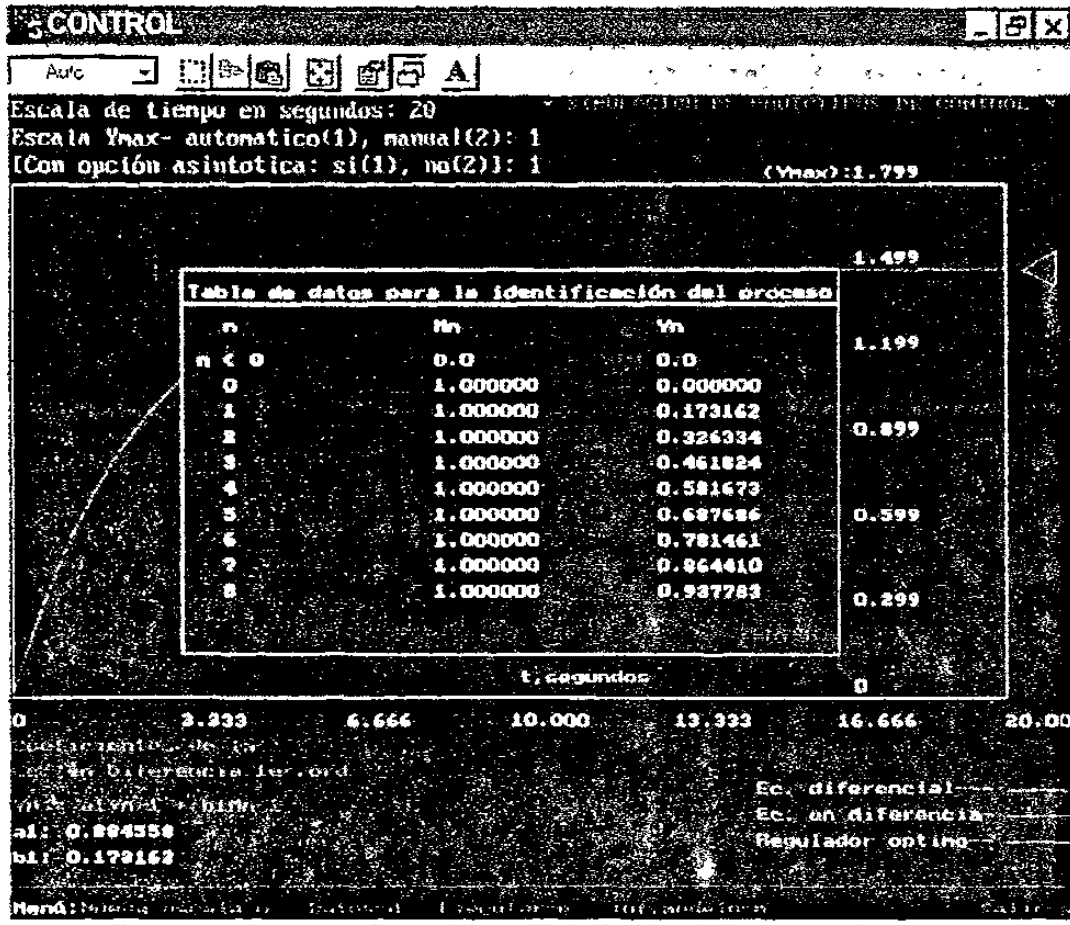


Figura (6.5) Representación del registro de muestreo y los datos de los coeficientes de la ecuación en diferencia

Teniendo ya el análisis de muestreo entonces se efectúa el análisis donde se obtiene la gráfica de la ecuación en diferencia, en pasos discretos, emulando a la función dinámica de tiempo continuo, esto comprueba que el análisis de regresión es correcto y que la desviación de error cuadrático es mínimo para los nuevos parámetros del modelo propuesto.

Finalmente se presenta la adaptación con la medida del controlador de diseño en regulación óptima presentado en el Capítulo 4, tomando la opción de selección

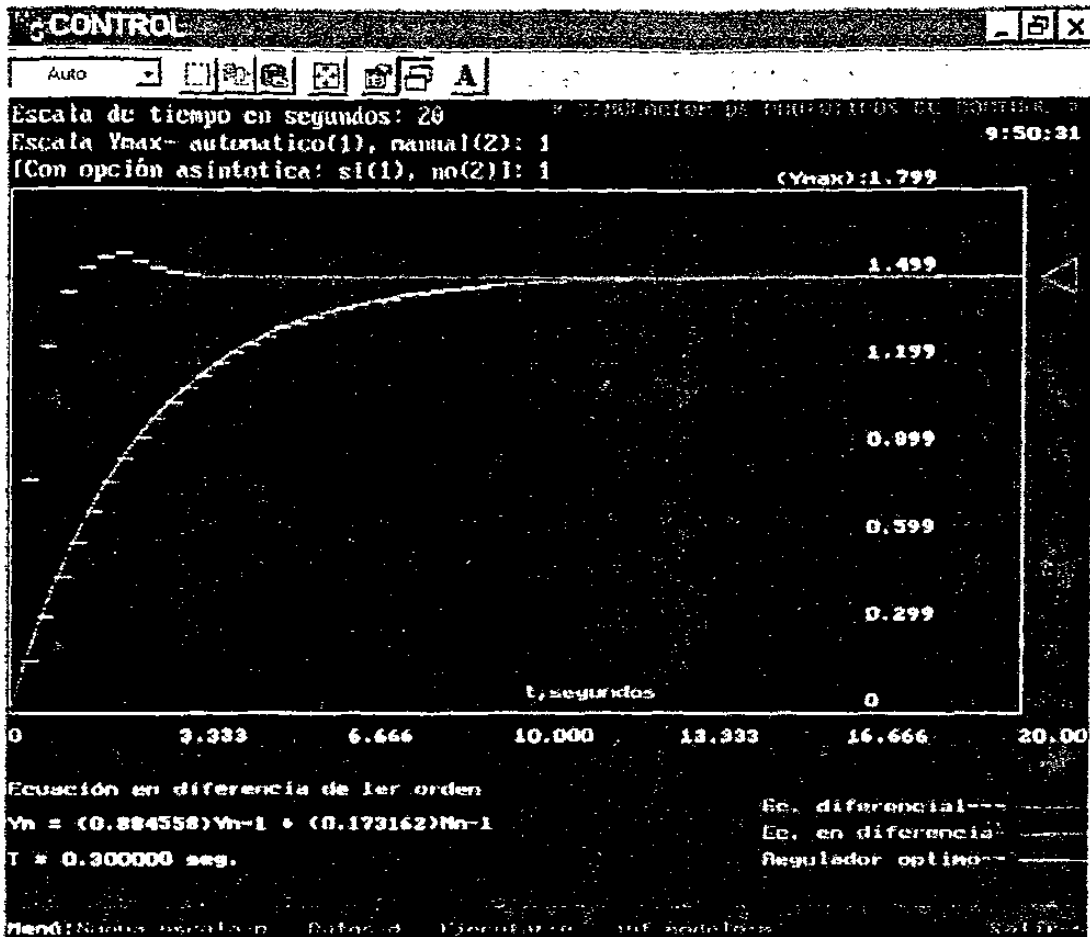


Figura (6.6) Resultado gráfico de la salida del sistema adaptado indicado en color verde

controlador del menú de *Datos d* y como último dar el comando *Ejecutar e*, dando como resultado la salida óptima representada en la gráfica de la Figura (6.6) marcado en color verde.

Es claro que el modelo dinámico del sistema de control por par controlado se presume lineal, sin embargo como se explicó en el Capítulo 3 y 4, presenta cierta alinealidad en la respuesta del sistema para diferentes puntos de operación, por lo cual resulta muy conveniente la aplicación del control adaptable para una operación óptima para cualquier punto de operación, donde también puede compararse con los sistemas de control (FOC), que en tal forma requieren de algún sistema de tipo de adaptación; siendo la única desventaja la complejidad de manejar este tipo de sistema de control.

# CAPITULO 7

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Las demandas funcionales en la industria precisan de nuevas estrategias para un ambiente de operación confiable y mantenido cambiando el sentido habitual en la implementación en los equipos de operación; precisando sobre el área de motores, ha tenido recientemente cambios importantes en la introducción de nuevos equipos tal como la aplicación de inversores en control, en un área de procesos de exigentes requisitos que solamente podían ser llevados a cabo por equipos de control de motores de corriente directa. Poco a poco los sistemas de inversión fueron evolucionando haciendo capaz una manipulación mas completa en la dinámica de éstos motores.

Las ventajas que representa la aplicación de motores de inducción son innumerables en la rama industrial, tales como el poco mantenimiento que requieren comparado con los motores de CD ya que presentan elementos de alto desgaste siendo el conmutador y las escobillas como parte crítica del problema, así que el motor de CA no lo presenta, el bajo costo que éste representa, la eficiencia y mayor rendimiento y la operación a revoluciones más elevadas, entre otras cosas.

Por esto, previamente se hace evidente el estudio de diseños que puedan llevar a proyectos viables bajo un campo de investigación que crece día a día.

Para los prototipos del área de control de motores de inducción cabe mencionar que es importante e imprescindible buscar y ser analizados detalladamente dispositivos electrónicos, que presenten las características necesarias para las exigencias y requisitos que entorna a este tipo control, que es magno en su área.

La postulación de proyectos y diseños no es limitada ya que se a presentado las características de mutivARIABLES que entornan los equipos inversores.

Concluyo que los equipos inversores más complejos tal como los sistemas de control orientado al campo (FOC), que se presento como tema final del Capitulo 3, aún así precisan de alguna técnica de adaptación para una buena operación de estos.

# BIBLIOGRAFIA

Fisher, Marvin J., Power Electronic, PWS-Kent Publishing Comany, 1991.

Mohan, Undeland, Robbins, Power Electronics: Converters, Applications and Design, Jhon Willey, 1989.

O'kelle, Dennis, Performanece and Control of Electrical Machines, McGraw Hill, 1991.

Paice, Derek I., Power Electronic Converter Harmonics, IEEE Press, 1996.

Rashid, Muhammad H., Eléctronica de potencia de Circuitos, Dispositivos y Aplicaciones, Segunda Edición, Prentice Hall, 1995.

P.C.Sen, Principales of Electric Machines and Power Electrics, Wiley, 1996.

Benjamin C. Kuo, Sistemas Automaticos de Control, Cecsca, 1995.

Katsuhiko Ogata, Ingeniería de Control Moderna, Segunda Edición, Prentice Hall, 1993.

Chi-Tsong Chen, Linear System Theory And Design, 1989.

Carlos A. Smith; Ph.D., P.E., Principles and Practice of Automatic Control, 1997.

George Stephanopoulos, Chemical Process Control, Prentice Hall, 1984.

S. Bittanti, A.J. Laub, J.C.Willems, The Riccati Equation, 1991.

# AUTOBIOGRAFÍA

## DATOS PERSONALES:

**NOMBRE:** ALFREDO PUENTE MARTINEZ.

**FECHA DE NACIMIENTO:** NOVIEMBRE 07 DE 1972.

**EDAD:** 26 AÑOS.

**LUGAR DE NACIMIENTO:** MONCLOVA, COAHUILA.

**ESTADO CIVIL:** CASADO.

**CIUDAD:** SAN NICOLAS DE LOS GARZAS, N.L.

## DATOS ESCOLARES

**MAESTRIA EN CIENCIAS DE LA ING. ELECTRICA:** UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON. FIME 1997- 1999. SAN NICOLAS DE LOS GARZAS, N.L.

**ESPECIALIDAD EN POST-GRADO:** CONTROL .

**PROFESIONAL:** UNIVERSIDAD AUTONOMA DE COAH. FIME 1990 – 1995. MONCLOVA, COAH.

**ESPECIALIDAD:** INGENIERO EN ELECTRONICA IND.



