

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA



**CONTROL DE ROBOTS CON FLEXIBILIDAD
EN EL ESLABON**

TESIS

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN INGENIERIA ELECTRICA**

PRESENTA:

MARTHA ISABEL AGUILERA HERNANDEZ

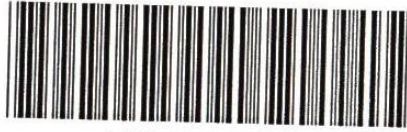
SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L. FEBRERO DE 1999

CONTROL DE ROBOTS CON FLEXIBILIDAD

9
TD
Z5853
.M2
FIME
1999
A3

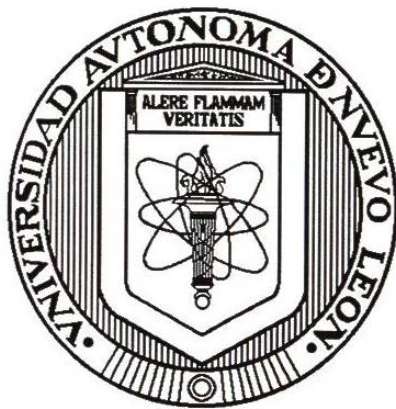
M.L.A.H.

EN EL ESLABON



1020126752

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA



CONTROL DE ROBOTS CON FLEXIBILIDAD
EN EL ESLABÓN

TESIS
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN INGENIERIA ELECTRICA

PRESENTA:
MARTHA ISABEL AGUILERA HERNANDEZ

San Nicolás de los Garza, N. L.

Febrero de 1999



TD
25853
P 2
N-
999
A3

1 of

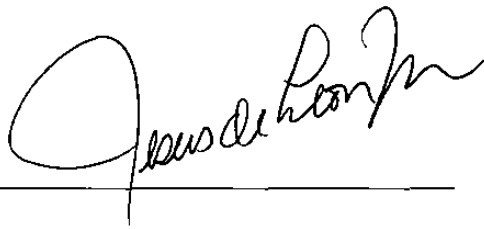


FONDO
TESIS

CONTROL DE ROBOTS CON FLEXIBILIDAD
EN EL ESLABÓN

Los miembros del comité aprueban la tesis
de Doctorado de Martha I. Aguilera Hernández

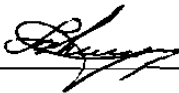
Dr. Jesús de León Morales
Asesor



Dr. Krishna K. Busawon



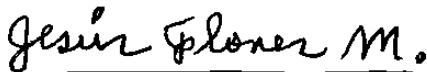
Dr. Mikhail V. Basin




Dr. Salvador Acha Daza



Dr. Jesús Flores Morfín





Dedicada a mis Padres:

Francisco Aguilera Aguilar (Finado)
Isabel Hernández Pérez

Y a mis familiares:

Ramona
Paco y Familia
Mike y Familia
Noe y Familia

Con Cariño

Agradecimientos

Al Dr. Jesús de León Morales, mi asesor, por sus consejos y su preocupación por mi preparación académica, sin la cual no hubiera podido concluir este trabajo de investigación.

Al equipo de profesores que ayudaron en mi formación académica: Dr. Jesús de León Morales, Dr. Joaquín Collado Moctezuma, Dr. Oscar Chacón M., M.C. Guadalupe Cedillo y Dra. Ada Alvarez.

Al Dr. Joaquín Collado, que siempre nos motivó a tener un buen desempeño académico.

Al Dr. Busawon, por sus correcciones, comentarios y sugerencias, que fueron de valiosa ayuda en este trabajo.

Al Dr. Basin y al Dr. Acha, por su disponibilidad para la revisión de este trabajo y por sus excelentes comentarios.

Al Dr. Jesús Flores Morfin, por haber aceptado revisar mi tesis y por su apoyo moral y académico en todo momento.

Al Conacyt por su beca académica.

Al Instituto Tecnológico de Nuevo Laredo, por su apoyo para mi superación académica. Al Departamento de Electrónica y a la División de Estudios de Posgrado, por su confianza y ayuda en todas las situaciones. Quiero hacer mención especial a la Lic. Beatriz Ruiz y al Ing. Jesús Rodríguez por su ayuda en cuestiones administrativas durante mi estancia en Mty. A mis alumnos asesorados de la maestría: Ramón Roque Hdz. y Martín García, que me motivan a ser mejor.

A mis compañeros: Guadalupe Acosta, Daniel Olivares, César Elizondo, Aureliano Esquivel, Gerardo Romero, Hnos. Pérez y Manuel Saucedo con los que pude compartir momentos de alegría y a la vez de preocupación por las tareas académicas.

A los nuevos compañeros: Mario Villanueva, Gustavo Pérez, David Díaz, Francisco Florenzano, Irma Valadez, César Guerra, Ma. de los Angeles Carrera y Oscar Huerta que han mostrado su compañerismo aléntandome siempre en estos últimos meses de preparación.

A mis amigas de Nuevo Laredo: Tere Viveros, Celsa González, Silvia Gómez, Ruth Torres, Margarita González, Angeles Glz., Eva Laurel y Carlota Faz, por hacerme sentir siempre como en casa. A mis amigas de Río Bravo: Martha Elena, Ponchis, Martha Alicia y Graciela, a las de Matamoros: Rossi Arreola, Thelma Rdz. y Gloria Navarro y a las del Grupo de Natación de Mty., que siempre me han brindado su amistad y comprensión.

A la familia Cantú Rodríguez, a la que considero como mi segunda familia, por su apoyo incondicional. Principalmente al Padre Juan Ramón Cantú que, por su valiosa ayuda y consejo, correcciones y comentarios, he podido terminar satisfactoriamente mis etapas de formación académica.

Resumen

Control de Robots con flexibilidad en el eslabón

Publicación No. _____

Martha Isabel Aguilera Hernández, Dr. en Ingeniería Eléctrica

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Profesor Asesor: Dr. Jesús de León Morales

Febrero, 1999

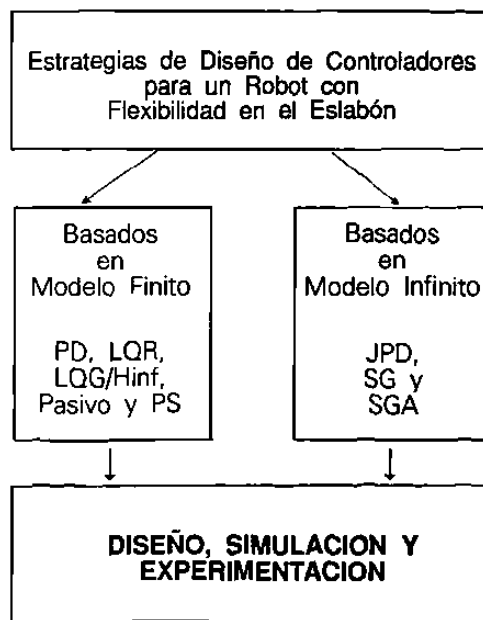
En este trabajo de tesis se presenta un estudio del diseño de algoritmos de control para robots con flexibilidad en el eslabón. El modelo matemático que representa la dinámica del robot se obtiene a partir de la teoría de Euler-Bernoulli y aplicando el principio de Hamilton. Este modelo consiste en un sistema de ecuaciones no lineales integro-diferenciales parciales, esta característica ha hecho que el diseño del control sea un problema complejo.

Las técnicas para el diseño de controladores para los robots flexibles en el eslabón se han diversificado pero se pueden catalogar en dos grandes estrategias: La primera estrategia reduce el modelo original con el fin de obtener un modelo de dimensión finita y, en base a éste, se diseña la ley de control. La segunda estrategia consiste en diseñar directamente del modelo original, el controlador. A esta última se le denomina "basada en modelo infinito".

En este trabajo, se obtuvo el modelo de un robot flexible experimental y se identificaron los parámetros físicos necesarios para el análisis de su comportamiento. Aplicando la primera estrategia, se diseñaron cinco controladores que son el Proporcional-Derivativo(PD), el Regulador Cuadrático Lineal(LQR), el Pasivo, el LQG/ H_{∞} y uno basado en técnicas de Perturbaciones Singulares(PS). Todos estos controladores se implementaron en el robot experimental.

Aplicando la segunda estrategia, se realizó el diseño, simulación y experimentación de tres controladores. Los controladores son el propuesto por Yuan en [81], el de Shifman en [69] y un tercer controlador que es propuesto en este trabajo. El controlador propuesto por Yuan requiere el conocimiento de las variables de la base. Se le ha denominado JPD (Joint PD). El controlador de Shifman, denominado SG, requiere, además de las mediciones de las variables de la base, la medición de una variable agregada que es producto de la medición directa de un strain gage. El tercer controlador, denominado SGA, es similar al obtenido por Shifman, pero en lugar de utilizar la variable agregada, se utiliza una variable auxiliar que representa a la barra dividida por medio de la técnica de elementos finitos. Esta variable auxiliar es una aproximación que se realiza tomando en cuenta las características del material y la posición de la punta, de modo que el controlador sólo requiere retroalimentación de las variables de la base, de la posición de la punta y la variable auxiliar.

El desarrollo de este trabajo se puede resumir en el siguiente diagrama:



Las aportaciones de este trabajo de investigación son: Un análisis experimental que compara el diseño y el estudio de controladores basados en modelos de dimensión finita con los controladores basados en el modelo infinito, con el fin de identificar

las ventajas y viabilidad de aplicación de cada controlador. También se propone un nuevo controlador basado en un modelo de dimensión infinita, se demuestra experimentalmente que este controlador tiene un comportamiento eficiente para su aplicación real a estructuras flexibles.

INDICE

| | |
|--|-----------|
| RESUMEN | IV |
| INDICE DE FIGURAS | IX |
| NOTACION | X |
| | |
| 1 Introducción | 1 |
| 1.1 Motivación | 3 |
| 1.2 Antecedentes | 5 |
| 1.2.1 Esquema con Modelos de Dimensión Finita | 7 |
| 1.2.2 Esquemas de modelo Infinito | 8 |
| 1.3 Contribuciones de este Trabajo | 8 |
| 1.4 Organización de la Tesis | 9 |
| 2 Modelado del Robot flexible en el eslabón | 10 |
| 2.1 Derivación del Modelo | 10 |
| 2.2 Teoría de Rayleigh | 16 |
| 2.3 Resumen | 17 |
| 3 Modelo Dimensional Finito | 18 |
| 3.1 Técnica de Modos | 18 |
| 3.2 Técnica de Análisis Modal Restringida | 21 |
| 3.3 Análisis Modal No Restringido | 23 |
| 3.4 Análisis Modal con la Posición de la Punta | 26 |
| 3.4.1 Análisis de Funciones de Transferencia | 28 |
| 3.4.2 Concepto de Modo | 30 |
| 3.5 Modelo de Elemento Finito | 33 |

| | |
|---|-----------|
| 3.6 Resumen | 35 |
| 4 Diseño de Controladores | 37 |
| 4.1 Controladores Basados en Modelos de Dimensión Finita | 37 |
| 4.1.1 Controlador Proporcional-Derivativo | 37 |
| 4.1.2 Controlador LQR | 38 |
| 4.1.3 Controlador LQG/ H_∞ | 40 |
| 4.1.3 Controlador basado en Perturbaciones Singulares | 46 |
| 4.1.4 Método de Perturbaciones Singulares Modificado | 49 |
| 4.1.5 Controlador Pasivo | 50 |
| 4.2 Controladores Basados en el Modelo Infinito | 57 |
| 4.2.1 Controlador PD en la articulación | 57 |
| 4.2.2 Controlador utilizando medición directa de un strain gage | 58 |
| 4.2.3 Controlador con una aproximación numérica del strain gage | 62 |
| 4.3 Resumen | 65 |
| 5 Evaluación Experimental | 67 |
| 5.1 Descripción del Equipo | 67 |
| 5.2 Proceso de Calibración | 68 |
| 5.3 Modos del Sistema | 69 |
| 5.3 Resultados de simulación y Experimentales | 71 |
| Conclusiones | 78 |
| Bibliografía | 80 |
| Apéndice | 86 |
| A Preliminares Matemáticos | 86 |
| B Coeficientes para una barra | 87 |
| C Teoría de Timoshenko | 89 |
| D Medidor de Tensión Resistivo | 92 |
| E Especificaciones del Robot Experimental | 94 |
| F Programa para obtener el Controlador H_∞ | 95 |
| G Publicaciones | 105 |

Indice de Figuras

| Figura | Descripción |
|---------------|--|
| 1.1 | Rescate de un satélite |
| 1.2 | Sistema tele-operado para endoscopio |
| 1.3 | Ejemplo de prótesis |
| 1.4 | Robot Flexible para trabajos de pintura |
| 1.5 | Efecto Spillover |
| 2.1 | Marco de Referencia |
| 2.2 | Marco de Referencia en la teoría Euler-Bernoulli |
| 3.1 | Grados de Libertad del Elemento Finito |
| 4.1 | Configuración de Retroalimentación LQR-Optimo |
| 4.2 | Configuración en lazo cerrado |
| 4.3 | Respuesta del sistema en lazo abierto con tres modos |
| 4.4 | Respuesta con Retroalimentación LQG |
| 4.5 | Modelo con Incertidumbre |
| 4.6 | Sistema en lazo cerrado en cascada |
| 4.7 | Marco de referencia para la variable $w^*(x, t)$ |
| 4.8 | Sistema en lazo cerrado |
| 4.9 | Medición del strain gage en un segmento |
| 4.10 | Error en Aproximación |
| 5.1 | Esquema del Robot Flexible |
| 5.2 | Robot Flexible Experimental |
| 5.3a | Curva de calibración |
| 5.3b | Modos del sistema |
| | CONTROLADORES |
| 5.4 | Controlador PD. Deflexión |
| 5.5 | Controlador PD. Torque |
| 5.6 | Controlador LQR. Deflexión |
| 5.7 | Controlador LQR. Torque |
| 5.8 | Controlador PS. Deflexión |
| 5.9 | Controlador PS. Torque |
| 5.10 | Controlador LQG/ H_∞ . Deflexión |
| 5.11 | Controlador LQG/ H_∞ . Torque |
| 5.12 | Controlador Pasivo. Deflexión |
| 5.13 | Controlador Pasivo. Torque |
| 5.14 | Controlador JPD. Deflexión |
| 5.15 | Controlador JPD. Torque |
| 5.16 | Controladores SG y SGA. Deflexión |
| 5.17 | Controladores SG y SGA. Torque |

Notación

| | |
|--------------------|---|
| l | Longitud de la Barra |
| A_T | Area transversal |
| ρ | Densidad de masa |
| $q(x, t)$ | Fuerza externa |
| $w(x, t)$ | Deflexión de la barra con respecto al eje fijo |
| ε_{xx} | Deformación de la barra |
| τ_{xx} | Esfuerzo |
| U | Energía Potencial |
| T | Energía cinética |
| T_h | Energía cinética del eje |
| T_l | Energía cinética del eslabón |
| r | Radio de curvatura |
| θ | Angulo de rotación del eje |
| x | Variable Espacial |
| I_h | Inercia del eje |
| ' | Representa diferenciación respecto a x |
| • | Representa diferenciación respecto al tiempo |
| z | Eje perpendicular a y |
| p | Posición absoluta de un punto a lo largo del eslabón. |
| E | Módulo de Young |
| τ | Torque |
| ξ | Frecuencia angular |
| $z(x, t)$ | Desplazamiento total de un punto particular del eslabón |
| ϕ_n | n -Modo del sistema |
| N | Número de modos del sistema |
| $z(l, t)$ | Posición de la punta |
| q | Coordenada Generalizada |
| u | Control |
| k | Matriz de Ganancia |
| K_F | Ganancia de retroalimentación |
| K_∞ | Controlador H_∞ |
| S_{aux} | Sensitividad |
| T_{aux} | Sensitividad complementaria |

CAPITULO 1

Introducción

En nuestros días, los sistemas robóticos se han vuelto indispensables en aplicaciones industriales, comerciales y científicas. Este tipo de sistemas se han utilizado para llegar a lugares inaccesibles o riesgosos para el ser humano. A pesar de ser un área de investigación reciente, la robótica ha adquirido un desarrollo importante en los últimos años.

Como ejemplos se tienen los robots utilizados en la industria para automatizar actividades como ensamble, soldadura o trabajos de pintura. En la medicina se utilizan para microcirugías, dispositivos para los discapacitados y transporte de medicamentos. En el espacio exterior para labores de rescate y mantenimiento de satélites. En los depósitos nucleares para el manejo de desechos radioactivos.

El robot generalmente está integrado a un sistema de producción, se distingue de una máquina clásica por su capacidad de ejecutar diferentes tareas, o la misma de diversas maneras y además tiene la capacidad de tomar en cuenta los cambios que se pueden presentar en su entorno. Consiste en una serie de eslabones conectados entre sí por medio de articulaciones o uniones; es reprogramable y sus algoritmos de control dependen de su capacidad sensorial, lo que lo hace ser multifuncional.

Los robots pueden clasificarse en Rígidos, Móviles, y Flexibles. Los robots rígidos son aquellos que se modelan con dinámicas de cuerpo rígido. Generalmente están sujetos a una base y el área de trabajo está restringido por la longitud de sus eslabones y por su configuración. En estos robots, los actuadores requieren de una gran energía para su funcionamiento, están diseñados con estructuras pesadas y levantan poco peso con respecto a su peso nominal.

Los robots móviles están equipados con ruedas, rieles o patas para su movimiento. Los algoritmos de control son complejos, pero pueden abarcar un área de trabajo muy grande. Algunos robots móviles, están equipados con eslabones o brazos que les permiten realizar alguna operación especializada, como recoger muestras.

Los robots flexibles surgen debido a la necesidad de reducción de energía, espacio y

tiempo. En los últimos años se ha visto la importancia de diseñar sistemas robóticos mas ligeros y pequeños con mayor flexibilidad.

Hay dos tipos de flexibilidad que se pueden presentar en los robots flexibles. La flexibilidad en la articulación y la flexibilidad en el eslabón. Los robots presentan flexibilidad en la articulación debido al desplazamiento dinámico que se introduce entre la posición de los actuadores y de los eslabones. Desde el punto de vista del modelado, la deformación elástica que se presenta puede ser caracterizada como *concentrada en la articulación del robot*. Sin embargo, cuando en la deformación se involucran cuerpos con masas mas grandes o largas, esta suposición ya no es válida. Los robots que pertenecen a esta categoría tienen flexibilidad en el eslabón y no pueden reducir el efecto de la flexibilidad a estar concentrada en la articulación [11].

Los robots con flexibilidad en el eslabón son estructuras ligeras, rápidas ó largas que se utilizan para acceder ambientes no-convencionales: como el espacio exterior, los sitios nucleares, los depósitos de basura subterráneos y los laboratorios químicos o biológicos. Se utilizan en donde el combustible, el área, el peso y el tiempo, son restricciones para realizar un trabajo. Presentan una deflexión en el eslabón que no se puede despreciar y esto es resultado de la longitud de los eslabones, la característica del material con el que fueron diseñados o el ambiente en el cual se encuentran.

El modelado de los robots flexibles es el trabajo primordial cuando se diseñan algoritmos de control. Una vez que se tiene a disposición el modelo dinámico, se efectúa un proceso de identificación de parámetros y posteriormente, se realiza una validación experimental. Los análisis tradicionales de los robots manipuladores consideran a todo el mecanismo como rígido. La no-suposición de la rigidez implica que se deben incluir las dinámicas de la flexibilidad, lo que hace que el análisis sea mas complicado y que surjan dificultades al diseñar el control.

Desde el punto de vista del control, los robots flexibles pertenecen a la clase de sistemas mecánicos que tienen más grados de libertad que actuadores. De modo que el diseño de algoritmos de control para estos robots, requiere una estrategia de diseño diferente con respecto a la clase de robots rígidos.

La habilidad para diseñar y experimentar con controladores para estos robots flexibles influye en el desarrollo futuro de la robótica de muchas maneras. Permite la clasificación de los factores que influyen en el desempeño de estas estructuras robóticas flexibles.

1.1 Motivación

El estudio, análisis y experimentación de controladores aplicados a las estructuras flexibles constituye un área de constante desarrollo para el investigador actual. Los beneficios que se han obtenidos cuando estas estructuras se aplican a diversas áreas como el espacio exterior, en la medicina y en la industria en general, son indiscutibles.

En el espacio exterior, una aplicación de estos robots es el caso de los rescatadores de satélites (Figura 1.1), los cuales consisten en brazos largos articulados, controlados por una unidad central. En las misiones espaciales futuras se contemplan plataformas y manipuladores espaciales para ensamble y servicio. Esto requiere de antenas y plataformas largas así como arreglos solares. Las estructuras podrían tener entre 50m. a varios kilómetros de longitud. Estas estructuras tendrán poco peso y un gran tamaño lo que resulta en algunos modos estructurales (elásticos) de baja frecuencia y ligeramente amortiguados. Las frecuencias naturales estarán muy cercanas entre sí y algunas otras frecuencias pueden encontrarse en el ancho de banda del controlador. Además, los parámetros de los modos elásticos no se conocerán con exactitud [38]. Estas características hacen de el control de estas estructuras un problema difícil pero debe reconocerse que juega un papel esencial, ya que de él depende el éxito de las misiones espaciales.

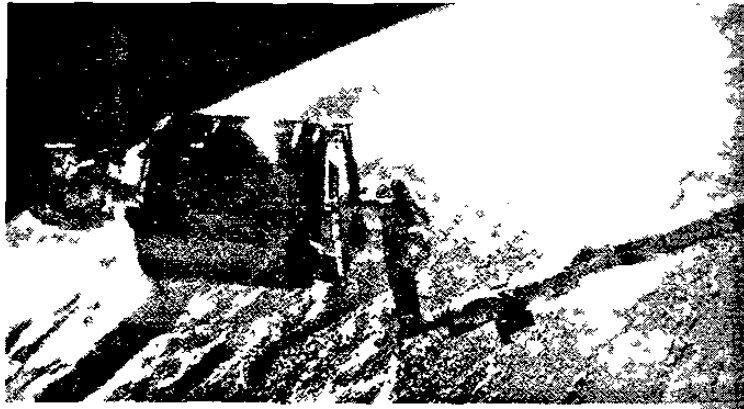


Figura 1.1 Rescate de un satélite

Algunas situaciones que se han presentado, permiten ilustrar la necesidad del modelado y del control de estructuras flexibles.

En 1958, el EXPLORER I empezó a fallar después de varias órbitas, a consecuencia de las dinámicas no modeladas de la antena unida a la base principal. Estos efectos no fueron

considerados en el diseño del algoritmo y dispositivo de control [42] . En el MARINER 10 en 1973, el algoritmo de control resultó inoperante cuando apareció el séptimo modo de frecuencia, el cual no había sido tomado en cuenta en el modelado de la estructura flexible.

Otra situación más reciente se presentó en 1989 con el telescopio HUBBLE, donde el problema fue que no se podía controlar el movimiento de los paneles solares, debido a los cambios abruptos de la temperatura, que afectaban las barras que los sujetaban. Este fenómeno conocido como estrés termal, producía un cambio en la flexibilidad de las barras provocando un cambio en la posición de los paneles solares. Este fenómeno no había sido considerado en el modelado. Estos ejemplos muestran que el estudio de estructuras flexibles puede solucionar problemas de diseño y control de dichos sistemas.

Una aplicación de estas estructuras flexibles en la medicina es el uso de endoscopios, utilizado en el estudio de órganos internos del paciente. Estos endoscopios consisten de dedos robóticos en uno de los extremos, los cuales son controlados remotamente mediante un guante articulado por un médico especialista. El médico especialista observa en la pantalla de la computadora los movimientos generados, los cuales son reproducidos por el robot flexible. En este caso el robot flexible requiere de elementos que sean flexibles y de materiales especiales tales que permitan no causar daño al paciente y desplazarse en regiones estrechas. Además, el control de la posición tiene que ser preciso. Este sistema se muestra en la figura 1.2 [68] .

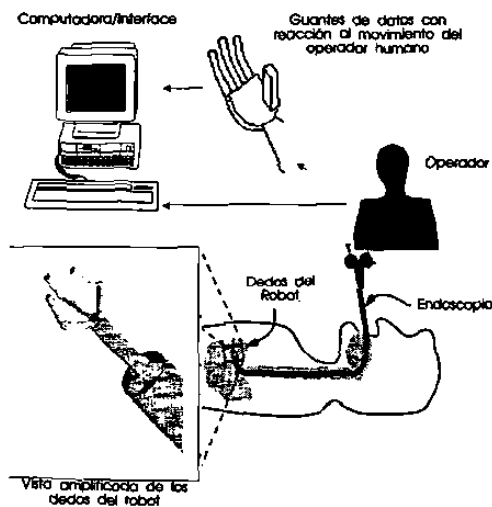


Figura 1.2: Sistema tele-operado para Endoscopia



Figura 1.3 Ejemplo de Prótesis.

Otro ejemplo son las prótesis. En este caso, se requieren estructuras ligeras y en cierta

forma flexibles. El análisis del control de estas estructuras permiten encontrar materiales mas apropiados para el diseño de estos dispositivos y permitir que las personas que los utilizan, tengan menos problemas para portar éstos y desarrollar movimientos adecuados [65] , por ejemplo, para sujetar algún objeto como se muestra en la figura 1.3.

En el área industrial, se han implementado unos robots con eslabones flexibles para trabajos de soldadura y de pintura. Como ejemplo, en la figura 1.4, se muestra un robot flexible en trabajos de pintura, en una planta automotriz [65] .

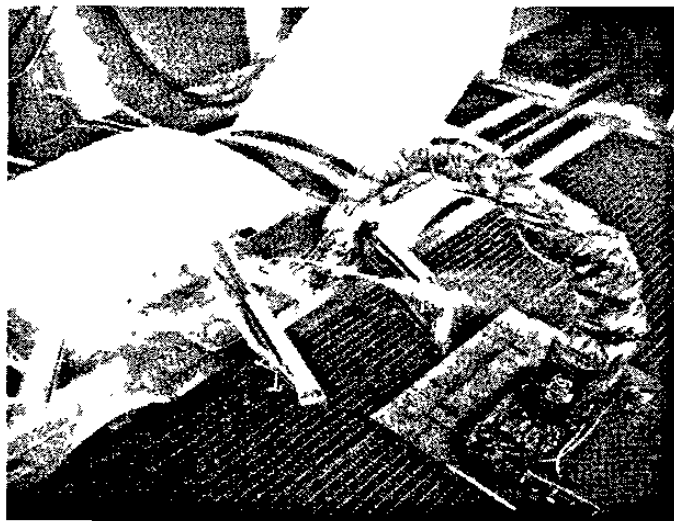


Figura 1.4. Robot flexible para trabajos de pintura.

1.2 Antecedentes

El modelo matemático que se obtiene para un robot con flexibilidad en el eslabón, está descrito por un sistema de ecuaciones integro-diferenciales parciales. El modelo es un sistema de parámetros distribuidos. El sistema de ecuaciones integro-diferenciales del robot se puede representar por un sistema de ecuaciones diferenciales parciales (PDE).

Uno de los enfoques para resolver el problema de control de este tipo de sistemas, es el utilizar una versión dimensional finita del sistema PDE. Esto se ha venido realizando en forma práctica ya que el controlador se calcula en base a mediciones y datos tomados de la estructura de dimensión finita. Esta reducción de la dimensión del modelo original se establece tomando en cuenta los modos de frecuencia naturales del eslabón flexible. A mayor número de modos que se tomen en cuenta, mayor será la dimensión del sistema y mayor será la aproximación al sistema original. Sin embargo, el aumento en la dimensión del sistema reducido aumenta

la complejidad del diseño del control.

En la sección anterior, se comentaron casos en que los controladores tuvieron serios problemas de estabilidad por modos de frecuencia no considerados en el modelado. Este tipo de controladores que se basan en modelos de orden reducido, en muchos casos producen el efecto denominado “*spillover*” de energía en los modos de alto orden del sistema (figura 1.5) [38]. La razón es que cuando se implementa un lazo alrededor de los modos controlables, otro lazo de retroalimentación imprevisto se construye también alrededor de los modos truncados. Esta excitación de los modos truncados debido a la entrada y la contribución indeseada de los modos truncados a la salida, se les conoce como “*Spillover del Control*” y “*Spillover de observación*”.

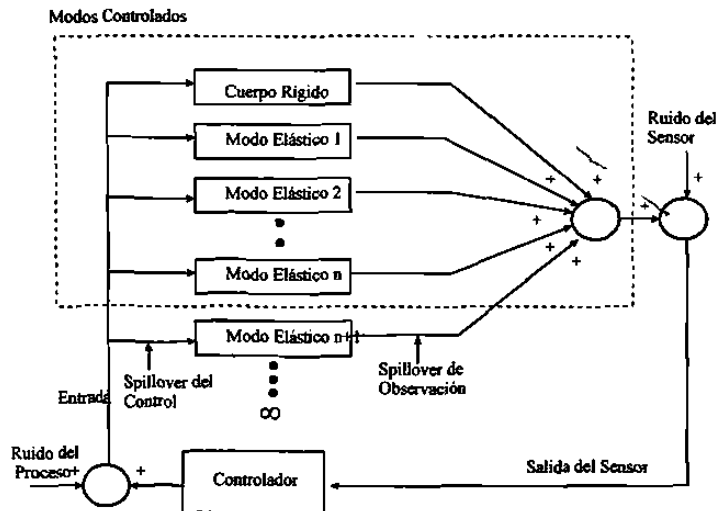


Figura 1.5: Efecto “Spillover”

Es preciso indicar que los controladores deben diseñarse tomando en cuenta que el sistema es de dimensión infinita, de otra manera son en principio cuestionables [42]. Generalmente, los controladores que se diseñan en base a un modelo truncado incluyen filtros pasa-bajos para atenuar la contribución de los modos elásticos. Sin embargo, cuando se tienen estructuras largas, el movimiento elástico es mucho mayor y se presentan serios problemas de control.

Los objetivos de control para obtener exactitud en la posición de la punta en los robots flexibles en el eslabón son una respuesta transitoria rápida y capacidad de rechazo de perturbaciones. El primer objetivo requiere una amortiguación de los errores en la posición de la punta y el segundo, la minimización del error RMS (Root Mean Square).

Hasta el momento se han manejado dos grandes enfoques para el control de los robots con flexibilidad en el eslabón, el primero consiste en obtener del modelo PDE un modelo dimensional finito. Esto se realiza a través de técnicas que utilizan series infinitas las cuales se truncan apropiadamente. Uno de los trabajos iniciales considerado como clásico en el estudio formal del control de robots con flexibilidad en el eslabón por medio de una versión discretizada del modelo es el trabajo de Cannon y Schmitz publicado en 1984 en [10] . En este trabajo la modelización del robot flexible se basó en la teoría de Euler-Bernoulli, se aplicó la técnica de análisis modal para obtener un modelo lineal y a partir de éste, se diseñó un controlador LQG. En la última década se ha incrementado el desarrollo de controladores para aplicarlos a este tipo de estructuras donde generalmente se utiliza el modelo dimensional finito para el diseño del controlador.

El segundo enfoque consiste en el diseño del controlador tomando en cuenta que es un sistema de parámetros distribuidos y por lo tanto trabajar con un sistema de dimensión infinita. A partir del sistema dimensional infinito, diseñar la estrategia de control.

En resumen, las técnicas para el diseño del control para el robot con flexibilidad en el eslabón se pueden dividir en dos grandes esquemas:

Las basadas en esquemas de modelos de dimensión finita y las basadas en esquemas de modelo infinito.

1.2.1 Esquema con Modelos de Dimensión Finita

Los esquemas de dimensión finita han sido utilizados bajo la premisa de que la ley de control tiene que ser implementada basándose en las mediciones y datos de un sistema dimensional finito. El esquema comúnmente utilizado es el de truncamiento.

Las técnicas mas usuales que se utilizan para obtener un modelo dimensional finito son:

La *Serie Infinita de Modos Asumidos* que representan al modelo original mediante una serie infinita apropiada. Ejemplo de esto son los trabajos de Cannon [10] en 1984, Fukuda [25] en 1985, Hastings y Book [30] en 1987 y Balas [5] en 1994.

La *Serie Infinita de Modos Eigenfunciones* que representan al modelo original mediante una serie infinita apropiada de eigenfunciones. Como ejemplo tenemos el trabajo de Wang y Vidyasagar [77] en 1992.

Las Funciones *Shape* que consisten en un conjunto de funciones completas que representan al modelo original. Como ejemplo tenemos el trabajo de Siciliano y Book [66] en 1988.

Y la técnica de *Elemento Finito* que consiste en el análisis del eslabón dividiéndolo en elementos, los cuales en conjunto representan al modelo original. Como ejemplo tenemos el

trabajo de Aoustin y Glumineau [3] en 1994.

Para el diseño de controladores basados en modelos de dimensión finita se tienen dos esquemas principales. El primer esquema consiste en resolver el problema no lineal de la parte rígida y tratar la dinámica flexible separadamente. Dentro de este enfoque denominado Rígido-Flexible, se encuentran los trabajos de Nicosia, Fukuda, Siciliano y Book.

El segundo esquema es utilizar una versión linealizada del modelo. Dentro de este enfoque podemos encontrar: El LQG que es el “Linear Quadratic Gaussian Control” utilizado por Cannon, y el enfoque de Factorización Estable de Wang.

1.2.2 Esquemas de modelo Infinito

Cuando el controlador se obtiene directamente del modelo PDE, se dice que está basado en un modelo infinito. El trabajo realizado por Shifman [69] en 1990, pone en evidencia la falta de capacidad de los modelos “truncados” de garantizar estabilidad en lazo cerrado, lo que hace resaltar la importancia del estudio del modelo infinito. En [69], Shifman desarrolla un controlador basado en la medición del strain gage colocado en el eslabón flexible. Su método requiere de la información de cuatro variables que son: la posición de la punta, una variable que da la información de todo el eslabón (medida por el strain gage), y sus respectivas derivadas. Para la prueba de estabilidad aplicó la teoría de semigrupos para operadores lineales.

Yuan [82] en 1995, desarrolla un controlador basado solamente en mediciones hechas en la base del robot. La prueba de estabilidad recae en una función de Lyapunov. A este tipo de control se le denomina “Joint Control”, que es un control basado en variables medibles en la articulación. El diseño del controlador se deriva en base a la función de Lyapunov seleccionada.

1.3 Contribuciones de este trabajo

Los estudios que se han realizado con respecto al diseño y a la experimentación de controladores para un robot con flexibilidad en el eslabón, han considerado un modelo dimensional finito. En este trabajo se incluyen los controladores basados en el modelo infinito que permite mostrar las ventajas y viabilidad de su aplicación. Las contribuciones de este trabajo se describen a continuación:

- Obtención del modelo del robot flexible experimental e identificación de los parámetros físicos del mismo.

► Diseño e implementación de los controladores Proporcional-Derivativo (PD), Regulador Cuadrático Lineal (LQR), Pasivo y LQG/ H_{∞} que están basados en un modelo dimensional finito. Además, un controlador basado en técnicas de Perturbaciones Singulares (PS)

► Diseño e implementación de dos controladores que están basados en un modelo dimensional infinito. Estos controladores han sido propuestos por Yuan en [82] y por Shifman en [69] .

► Se propone un nuevo controlador. Es similar al obtenido por Shifman [69] , pero en lugar de utilizar la variable agregada producto de la medición directa del strain gage, la barra se divide por medio de la técnica de elementos finitos para aproximar la información de esta variable. Esta aproximación se realiza tomando en cuenta las características del material y la posición de la punta. Este controlador sólo requiere retroalimentación de las variables de la base, de la posición de la punta y la variable auxiliar. En forma semejante a los demás, se realizó su diseño e implementación.

► Un análisis experimental que compara el diseño y el estudio de controladores basados en modelos de dimensión finita con los controladores basados en el modelo infinito. Esto tiene la finalidad de identificar las ventajas de la implementación y funcionamiento de cada controlador, para su aplicación real.

1.4 Organización de la Tesis

Este trabajo de investigación está organizado de la siguiente manera:

Capítulo 2: Presenta la derivación del modelo del robot con flexibilidad en el eslabón. Se basa en la teoría Euler-Bernoulli para la caracterización del eslabón. En base al principio de Hamilton, se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales parciales que describen al robot.

Capítulo 3: Se presentan los modelos dimensionales finitos. El primero de ellos se obtiene mediante la técnica análisis modal y el segundo mediante la técnica de elementos finitos. Los dos modelos son semejantes. Se utiliza el modelo obtenido de análisis modal para el diseño de los controladores basados en modelo de dimensión finita.

Capítulo 4: Está dividido en dos secciones. En la primera se presenta el diseño de los controladores basados en un modelo de dimensión finita. Los controladores PD, LQR, LQG/ H_{∞} y Pasivo se derivan a partir del modelo obtenido mediante la técnica de análisis modal. El controlador PS se obtiene aplicando la técnica de perturbaciones singulares para obtener el modelo de orden reducido. La segunda sección comprende el diseño de los

controladores basados en dimensión infinita.

Capítulo 5: Se muestran los resultados obtenidos de la simulación y experimentación de los diferentes esquemas de diseño propuestos en el capítulo 4. Se presenta también el análisis comparativo de los esquemas de diseño.

Finalmente se presentan las conclusiones de esta tesis y se anexa un apéndice que comprende preliminares matemáticos y algunos resultados que ayudan a fundamentar las conclusiones obtenidas. Asimismo en esta sección, se presentan las publicaciones en congresos y revistas relacionadas con este trabajo de tesis.

CAPITULO 2

Modelado del Robot flexible en el eslabón

En este capítulo se presenta la derivación del modelo para el robot con flexibilidad en el eslabón. El modelado se realizó tomando en cuenta las propiedades más relevantes de la estructura articulada y sus principales características dinámicas [11]. El modelo será utilizado tanto en simulación como para experimentación. El robot, considerado para este estudio, consta primordialmente de dos partes: eslabón¹ y la base. En la base se encuentra el actuador² que aplica el torque a la estructura. Para el análisis del eslabón, se utiliza la teoría Euler-Bernoulli que considera al eslabón como una barra sujeta a vibraciones laterales. Para la obtención de las ecuaciones del modelo se aplica el Principio de Hamilton. La barra tiene contribución en las energías cinética y potencial del sistema y la base sólo en la energía cinética.

2.1 Derivación del Modelo

El robot con flexibilidad en el eslabón de un grado de libertad consiste de un eslabón flexible que está conectado a una base. En la base, se encuentra un motor, el cual aplica un torque al eslabón para moverlo a la posición deseada. El movimiento del eslabón es horizontal, por lo que las fuerzas gravitacionales no son consideradas. El objetivo primordial del control, es que la deflexión sea lo más pequeña posible.

En la figura 2.1, se muestra el marco de referencia utilizado para definir las variables relativas al robot. La longitud del eslabón se denota por l , el torque por τ , la variable en el tiempo por t , la deflexión del eslabón con respecto al eje neutral por $w(x, t)$, la coordenada a través del eje neutral del eslabón por x y por $\theta(t)$, el ángulo de rotación del eje del eslabón con respecto al eje neutral (línea rígida).

El eslabón se caracteriza como una barra sujeta a fuerzas externas distribuidas a través de toda su longitud. Entre las teorías utilizadas en la descripción de las vibraciones de una barra

¹ El eslabón, en el equipo experimental es una barra de 0.914m. de longitud. El material es Aluminio.

² En el equipo experimental utilizado para las pruebas de los controladores, el actuador es un motor de corriente directa.

se encuentran la de Euler-Bernoulli, la de Rayleigh y la de Timoshenko. La teoría más simple de vibración lateral es la de Euler-Bernoulli [59] .

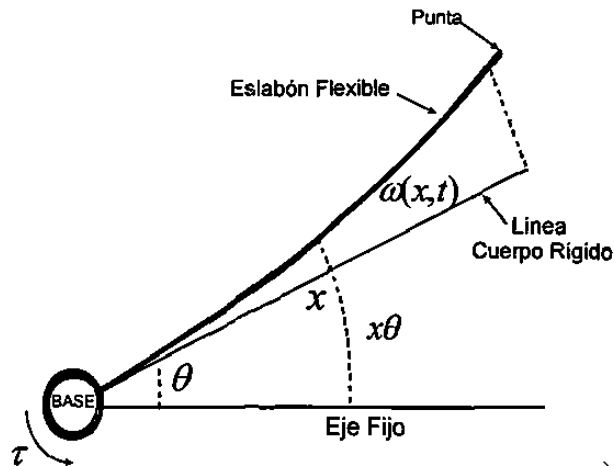


Figura 2.1: Marco de Referencia

En base a la teoría de Euler-Bernoulli se modela el eslabón. En esta teoría, los términos de segundo y alto grado en las variables de deformación se desprecian y se consideran las siguientes hipótesis:

- ◆ El eslabón es una barra con características geométricas uniformes y una distribución de masa uniforme. Esta suposición implica que la deflexión de una sección a través del eslabón es debido solo al doblamiento o deflexión y no a un corte. Además, la contribución de la inercia rotatoria de la sección del eslabón a la energía total es despreciable.

- ◆ El eslabón es flexible en la dirección lateral, sólo las deformaciones elásticas están presentes. Esta suposición está reforzada por la construcción mecánica de un brazo flexible real.

- ◆ Las deformaciones no lineales así como la fricción interna u otras perturbaciones externas son despreciables.

Al aplicar esta teoría, el eslabón es una barra de longitud l como se muestra en la figura 2.2. El área transversal de la barra se denota por A_T , ρ es la densidad de masa que actúa sobre una fuerza externa $q(x, t)$ en dirección al eje z , I_h es la inercia del eje y E es el módulo de Young.

Se asume que la sección del plano a una distancia x permanece plano inclusive después del curvado y tiene una rotación a través del eje y dado por la pendiente w' de la curva elástica. Se pueden entonces definir los desplazamientos de la barra como

$$\begin{aligned} u_x &= -z\omega'(x, t) \\ u_y &= 0 \\ u_z &= \omega(x, t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

La deformación está dada por $\varepsilon_{xx} = z\omega''(x, t)$. El esfuerzo está dado por $\tau_{xx} = -Ez\omega''(x, t)$.

Nota 2.1 En las ecuaciones, una coma en la parte superior representan diferenciación respecto a x , y un punto representa la diferenciación con respecto al tiempo.

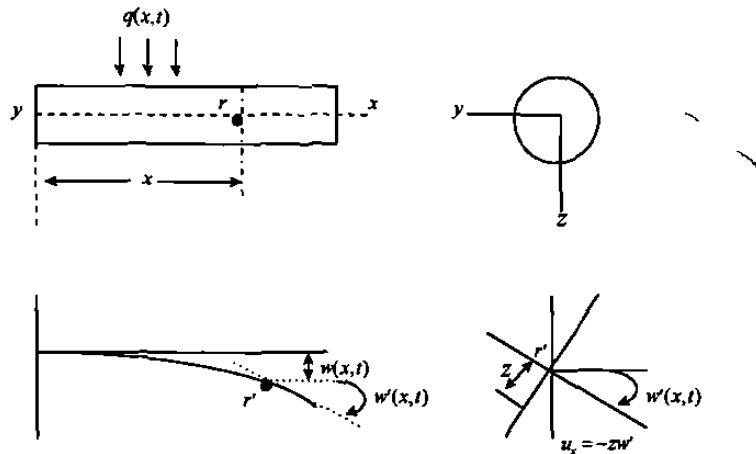


Figura 2.2. Marco de Referencia en la Teoría Euler-Bernoulli

Para aplicar el Principio de Hamilton se requieren las energías cinética y potencial del robot. La primera está constituida por la contribución del eslabón y de la base. La segunda, la energía potencial, depende completamente del eslabón.

La energía potencial (de la deformación) está dada por

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \int_A Ez^2 \omega''(x, t) dA dx = \frac{1}{2} \int_0^l EI (\omega''(x, t))^2 dx \quad (2.2)$$

De la figura 2.1, la posición absoluta de un punto a lo largo del eslabón está descrita por

$$p = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta(t) - \omega(x, t) \sin \theta(t) \\ x \sin \theta(t) + \omega(x, t) \cos \theta(t) \end{pmatrix}$$

Ya que el eslabón está sujeto a la base, las siguientes condiciones geométricas de frontera se satisfacen,

$$\omega(0, t) = \omega'(0, t) = 0 \quad (2.3)$$

La energía cinética está dada por

$$T = T_h + T_l$$

donde la energía cinética del eje está dada por

$$T_h = \frac{1}{2} I_h \dot{\theta}(t)^2$$

y la del eslabón, al despreciar la inercia axial debido a \dot{u}_x , es descrita por

$$\begin{aligned} T_l &= \frac{1}{2} \rho \int_0^l (\dot{p}_x^2 + \dot{p}_y^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \rho \int_0^l (x^2 \dot{\theta}(t)^2 + \omega^2(x, t) \dot{\theta}(t)^2 + \dot{\omega}^2(x, t) + 2x \dot{\theta}(t) \dot{\omega}(x, t)) dx \end{aligned} \quad (2.4)$$

Al aplicar el Principio de Hamilton, se tiene

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T(t) - \delta U(t) + \delta W(t)) dt = 0$$

donde $\delta W(t) = u(t) \delta \theta(t)$ representa el trabajo virtual realizado por el torque.

Para determinar $\delta T(t)$, considere la funcional

$$T[\theta(t)] = \int_{t_1}^{t_2} F(t, \theta(t), \dot{\theta}(t))$$

Al aplicar la ecuación general de Euler, se obtiene

$$\delta T(t) = [I_h \dot{\theta} + \rho \int_0^l (x^2 \ddot{\theta}(t) + \omega^2 \ddot{\theta}(t) + x \ddot{\omega}(x, t)) dx] \delta \theta + [\rho \int_0^l (\ddot{\omega}(x, t) + x \ddot{\theta}(t)) dx] \delta \omega \quad (2.5)$$

Nota 2.2 La deformación $\omega(x, t)$ se considera muy pequeña con respecto a la longitud del eslabón. $\omega(x, t) \leq 0.1l$. Ver artículo Cannon [10].

Al despreciar el término que involucra $\omega(x, t)^2$, y al agrupar los términos en $\delta\theta$, se obtiene

$$I_h \ddot{\theta} + \rho \int_0^l (x^2 \ddot{\theta}(t) + x \ddot{\omega}(x, t)) dx = u \quad (2.6)$$

A partir de la funcional

$$U[\omega(x, t)] = \frac{1}{2} \int_0^l \omega''(x, t)^2 dx \quad (2.7)$$

se calcula la variación δU , la cual es dada por la expresión

$$\delta U = \int_0^l \omega''(x, t) \delta \omega''(x, t) dx \quad (2.8)$$

Si se integra por partes, resulta que

$$\delta U = \omega''(x, t) \delta \omega'(x, t) \Big|_{0,l} - \int_0^l \omega'''(x, t) \delta \omega'(x, t) dx \setminus$$

Al integrar de nuevo por partes, se obtiene

$$\delta U = \omega''(x, t) \delta \omega'(x, t) \Big|_{0,l} - \omega'''(x, t) \delta \omega(x, t) \Big|_{0,l} + \int_0^l \omega''''(x, t) \delta \omega(x, t) dx \quad (2.9)$$

Esta expresión debe anularse en la extremal de la funcional³, es decir,

$$\omega''(l, t) = 0; \quad \omega'''(l, t) = 0 \quad (2.10)$$

Al agrupar los términos que involucran $\delta\omega$, se obtiene

$$EI \omega''''(x, t) + \rho \ddot{\omega}(x, t) + \rho x \ddot{\theta}(t) = 0 \quad (2.11)$$

Entonces, de las ecuaciones dadas por (2.3), (2.10), (2.6), (2.11), el modelo dinámico que representa al robot flexible en el eslabón está descrito por

³ La ecuación de Euler-Poisson tiene la forma $w^{IV} = 0$, su solución general: $w = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3$, contiene cuatro constantes arbitrarias $C_i (i = 1..4)$ y las condiciones de frontera no bastan para determinarlas. Por esto, se calcula la variación de la funcional 2.7, y la expresión resultante se anula en la extremal de la misma funcional.

$$\Sigma_{RFE} : \begin{cases} I_t \ddot{\theta}(t) + \rho \int_0^l x \ddot{\omega}(x, t) dx = u(t) \\ EI \omega''''(x, t) + \rho \ddot{\omega}(x, t) + \rho x \ddot{\theta}(t) = 0 \\ \omega(0, t) = \omega'(0, t) = 0 \\ \omega''(l, t) = \omega'''(l, t) = 0 \end{cases}$$

donde $I_t = I_h + \rho l^3/3$, el cual es un modelo integro-diferencial.

Al integrar con respecto al tiempo la segunda ecuación de Σ_{RFE} , y sustituyendo el resultado en la primera ecuación se obtiene

$$\Sigma_{RFET} : \begin{cases} I_h \ddot{\theta}(t) - EI \omega''(0, t) = u(t) \\ EI \omega'''(x, t) + \rho \dot{\omega}(x, t) + \rho x \dot{\theta}(t) = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

Siendo el modelo Σ_{RFET} un sistema descrito con ecuaciones diferenciales parciales (PDE).

Este sistema será utilizado para derivar modelo de dimensión finita para Σ_{RFE} .

2.2 Teoría de Rayleigh

Si en el modelo se incluye el término inercial \dot{u}_x , entonces se puede considerar la teoría de Rayleigh. El término aparece como consecuencia de la componente de velocidad en la dirección axial. Este efecto adicional es originalmente denominado por Rayleigh como Inercia Rotatoria.

Sea

$$\dot{u}_x = -z\omega'(x, t)$$

el término inercial.

Puesto que la energía cinética de este componente está dada por

$$T_x = \int_0^l \int_A \frac{1}{2} \rho z^2 (\dot{\omega}')^2 dA dx = \int_0^l \frac{1}{2} \rho I (\dot{\omega}')^2 dx$$

Entonces, la energía cinética total del eslabón es dada por

$$T_l = \frac{1}{2} \int_0^l \{ \rho A \dot{\omega}^2 + \rho I (\dot{\omega}')^2 \} dx$$

De modo que al calcular la variación de T , la segunda ecuación de Σ_{RFE} , se modifica a

$$EI\omega''''(x, t) - \rho I\ddot{\omega}''(x, t) + \rho A\ddot{\omega}(x, t) = u \quad (2.13)$$

con las condiciones de frontera dadas por

$$EI\omega'' \delta\omega'_{[0,l]} - (EI\omega'''' - \rho I\ddot{\omega}'')\delta\omega_{[0,l]} = 0$$

2.3 Resumen

En este capítulo se presentó la derivación del modelo que representa al robot con flexibilidad en el eslabón. Se utilizó teoría Euler-Bernoulli para modelar el eslabón flexible y se aplicó el principio de Hamilton para la obtención de las ecuaciones dinámicas. El modelo que se obtuvo consiste de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales. También se presentó el efecto que tiene en el modelo dinámico la adición de la inercia rotatoria, para esto se utilizó la teoría de Rayleigh.

CAPITULO 3

Modelo Dimensional Finito

El sistema descrito por Σ_{RFET} consta de ecuaciones diferenciales parciales. Esta característica representa un sistema de parámetros distribuidos. Uno de los enfoques para resolver el problema de control para este tipo de sistemas, es reducir el sistema Σ_{RFET} a un modelo de dimensión finita. El objetivo de obtener este modelo es el poder aplicar las técnicas de control lineal. En este capítulo se describen tres técnicas para la obtención de un modelo reducido. La primera utiliza la función de transferencia del sistema para calcular los modos, la segunda utiliza el análisis modal que consiste en el cálculo de eigenvalores y de eigenvectores del sistema y la tercera utiliza la técnica de elementos finitos.

3.1 Técnica de Modos

Una de las técnicas para obtener un modelo dimensional finito, es la aproximación de la solución del sistema PDE mediante la información de los modos de frecuencia del eslabón (barra). El objetivo de esta sección es obtener la forma de los modos mediante el cálculo de la función de transferencia del sistema. En este desarrollo, se utiliza el sistema de ecuaciones dadas por (2.13) que toma en cuenta la inercia rotatoria. Para obtener la forma de los modos, se busca primeramente una representación más simple para (2.13). Para esto, se hacen las siguientes asignaciones

$$\begin{aligned}\frac{x}{l} &\rightarrow x, & \frac{t}{t_o} &\rightarrow t \\ \frac{E}{E_o} &\rightarrow E, & \frac{I_{yy}}{I_{yyo}} &\rightarrow I \\ \frac{\rho}{\rho_o} &\rightarrow \rho, & \frac{w}{l} &\rightarrow w \\ \frac{q}{q_o} &\rightarrow q, & \frac{I_{yyo}}{A_o l^2} &\rightarrow r_1^2\end{aligned}$$

donde I_{yy} es el segundo momento del área transversal y t_o y q_o están dados por

$$t_o^2 = \frac{\rho_o A_o l^4}{E_o I_{yyo}}$$

$$q_o = \frac{\rho_o A_o l}{t_o^2} = \frac{E_o I_{yyo}}{l^3}$$

Al aplicar la asignación anterior, la ecuación (2.13) se escribe como

$$M\ddot{w} + Kw = u \quad (3.14)$$

donde el operador⁴ de masa está dado por

$$M = \rho A - r_1^2 \partial_x (\rho I \partial_x)$$

y el operador de rigidez es

$$K = \partial_x^2 EI \partial_x^2$$

cuyas condiciones de frontera son

$$(EI \partial_x^2 w) \delta \partial_x w_{[0,l]} + \{-\partial_x (EI \partial_x^2 w) + r_1 \rho I \partial_x \ddot{w}\} \delta w_{[0,l]} = 0$$

donde $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$

Para barras uniformes con los valores originales puestos de valores de referencia, las ecuaciones anteriores se reducen a

$$M = 1 - r_1^2 \partial_x^2$$

$$K = \partial_x^4$$

$$(\partial_x^2 w) \delta \partial_x w_{[0,l]} + \{-\partial_x^2 w + r_1^2 \partial_x \ddot{w}\} \delta w_{[0,l]} = 0$$

Para vibraciones libres se tiene que $w(x, t) = W(x)e^{ipt}$, entonces (3.14) puede reescribirse como

$$(d_x^4 + r_1^2 d_x^2 p^2 - p^2)W = 0$$

$$(d_x^2 W) \delta d_x W_{[0,l]} - \{d_x^3 W + r_1^2 d_x p^2 W\} \delta W_{[0,l]} = 0 \quad (3.15)$$

donde $d_x = \frac{d}{dx}$ y p es la frecuencia natural.

Si se asigna $b = -r_1^2 p^2$ y $c = p^2$, las ecuaciones descritas por (3.15), toman la forma

$$(d_x^4 + b d_x^2 - c)W = 0$$

$$(d_x^2 W) \delta d_x W_{[0,l]} + \{b d_x W - d_x^3 W\} \delta W_{[0,l]} = 0 \quad (3.16)$$

⁴ Dados dos espacios topológicos lineales E y E_1 , cualquier mapeo $y = Ox$ ($x \in E, y \in E_1$) de un subconjunto de E (posiblemente E mismo) en E_1 , es llamado operador (de E a E_1).

Al obtener la Transformada de Laplace de (2.8), resulta

$$(s^4 - bs^2 - c)\vec{W} = (s^3 - bs)W(0) + s^2W'(0) + sW''(0) + (W'''(0) - bW'(0))$$

Si se definen los siguientes valores positivos, las variables b y c están relacionados por las raíces del polinomio característico

$$\begin{aligned} s_1^2 &= \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4c + b} \\ s_2^2 &= \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4c - b} \\ p^2 &= \frac{s_1^4}{1+s_1^2s_2^2} \end{aligned}$$

y también están relacionadas por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} (s^2 - s_1^2)(s^2 - s_2^2) &= (s^4 - bs^2 - c) = 0 \\ b &= (s_1^2 - s_2^2) \\ c &= (s_1^2s_2^2) \\ s_1^4 - bs_1^2 - c &= 0 \\ s_2^4 - bs_2^2 - c &= 0 \end{aligned}$$

De modo que la función de transferencia $T(x)$ del sistema está dada por

$$T(x) = \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s^4 - bs^2 - c} = \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{(s^2 - s_1^2)(s^2 - s_2^2)}$$

Al calcular la transformada inversa, $T(x)$ resulta

$$T(x) = \frac{1}{s_1s_2(s_1^2 - s_2^2)} (s_2 \sinh s_1x - s_1 \sin s_2x)$$

De acuerdo a este resultado, la forma del modo ("modo shape") y sus derivadas pueden ser escritas como

$$\begin{aligned} W &= [(d_x^3 - bd_x)W(0) + d_x^2W'(0) + d_xW''(0) + \{W'''(0) - bW'(0)\}]T(x) \\ W' &= [cW(0) + d_x^3W(0) + d_x^2W''(0) + d_x\{W'''(0) - bW'(0)\}]T(x) \\ W'' &= [cd_xW(0) + (bd_x^2 + c)W'(0) + d_x^3W''(0) + d_x^2\{W'''(0) - bW'(0)\}]T(x) \\ W''' - bW' &= [(cd_x^2 - bc)W(0) + cd_xW'(0) + cW''(0) \\ &\quad + (d_x^3 - bd_x)\{W'''(0) - bW'(0)\}]T(x) \end{aligned} \quad (3.17)$$

En el caso del eslabón flexible que es una barra en configuración Fija-Libre ("fixed free"), las condiciones de frontera están dadas por

$$\begin{aligned} W(0) &= 0; & W''(1) &= 0 \\ W'(0) &= 0; & W'''(1) - bW'(1) &= 0 \end{aligned}$$

Al sustituir estas condiciones en (3.17), se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= [cW''(0) + (d_x^3 - bd_x)W'''(0)]T(1) \\ 0 &= [d_x^3W''(0) + d_x^2W'''(0)]T(1) \end{aligned}$$

que puede ser representada en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} cT(1) & (d_x^3 - bd_x)T(1) \\ d_x^3T(1) & d_x^2T(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W''(0) \\ W'''(0) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.18)$$

Una solución no trivial se obtiene cuando el determinante de la matriz (3.18) es igual a

$$cT(1)d_x^2T(1) - (d_x^3 - bd_x)T(1)d_x^3T(1) = 0$$

Esto nos lleva a la ecuación de frecuencia dada por

$$\left\{ \frac{s_1^2}{s_2^2} + \frac{s_2^2}{s_1^2} \right\} \cosh s_1 \cos s_2 + \left\{ \frac{s_1}{s_2} + \frac{s_2}{s_1} \right\} \sinh s_1 \sin s_2 + 2 = 0$$

con el modo shape dado por

$$s_1 s_2 (s_1 \sinh s_1 + s_2 \sin s_2) (\cosh s_1 x - \cos s_2 x) - (s_1^2 \cosh s_1 + s_2^2 \cos s_2) (s_2 \sinh s_1 x - s_1 \sin s_2 x)$$

Ahora bien, para el caso de la barra modelada mediante Euler-Bernoulli (sistema Σ_{RFET}), ésta no considera el término axial, de manera que la ecuación de la frecuencia está dada por

$$\cosh \sqrt{p} \cos \sqrt{p} + 1 = 0$$

y el modo shape está dado por

$$(\sinh \sqrt{p} + \sin \sqrt{p})(\cosh \sqrt{p}x - \cos \sqrt{p}x) - (\cosh \sqrt{p} + \cos \sqrt{p})(\sinh \sqrt{p}x - \sin \sqrt{p}x)$$

donde p es la frecuencia natural.

3.2 Técnica de Análisis Modal Restringida

Si al sistema Σ_{RFET} se le asigna como entrada $u(t)$ el valor de cero, se obtiene un sistema homogéneo. Esto permite el cálculo de los eigenvalores y los eigenvectores. En el caso del robot flexible en el eslabón, esto representa las frecuencias de resonancia con sus modos shape respectivos. El análisis modal, denominado restringido, se desarrolla asumiendo $\theta(t) \equiv 0$ (o $\dot{\theta}(t) \equiv 0$), esto equivale a suponer que el eje rígido tiene inercia infinita y, por lo tanto siempre estará en reposo[11].

Con $u(t) = 0$, la segunda ecuación Σ_{RFET} , se convierte en

$$EI\omega'''(x, t) + \rho\ddot{\omega}(x, t) = 0 \quad (3.19)$$

con las mismas condiciones de frontera dadas por las dos últimas ecuaciones de Σ_{RFE} .

Al aplicar el método de separación de variables, $\omega(x, t)$ puede expresarse como

$$\omega(x, t) = \Psi(x)\eta(t) \quad (3.20)$$

y al sustituir ésta en (3.19), se obtiene

$$\Psi''''(x)\eta(t) + \frac{\rho}{EI}\Psi(x)\ddot{\eta}(t) = 0 \quad (3.21)$$

la cual se puede separar en una ecuación en el tiempo

$$\ddot{\eta}(t) + \xi^2\eta(t) = 0 \quad (3.22)$$

y otra ecuación en el espacio

$$\Psi''''(x) + \frac{\rho}{EI}\xi^2\Psi(x) = 0 \quad (3.23)$$

donde ξ^2 representa el eigenvalor y Ψ es representa la eigenfunción.

La solución de (3.22) está dada por $\eta(t) = e^{j\xi t}$, la cual representa una oscilación armónica no amortiguada en la frecuencia angular ξ .

Las condiciones de frontera para Σ_{RFET} resultan ser

$$\begin{aligned} \Psi(0) = \Psi'(0) &= 0 \\ \Psi''(l) = \Psi'''(l) &= 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Siendo EI una constante y $\beta^4 = \rho \frac{\xi^2}{EI}$, la ecuación (3.23) toma la forma

$$\Psi''''(x) + \beta^4\Psi(x) = 0$$

cuya solución general es dada por

$$\Psi = A \cosh \beta x + B \sin h\beta x + C \cos \beta x + D \sin \beta x \quad (3.25)$$

Para determinar los valores de A , B , C , y D , se utilizan las condiciones de frontera. Al sustituir la condición de límite en $x = 0$, es decir $\Psi(0) = \Psi'(0) = 0$, en la solución general, se obtiene

$$\begin{aligned} \Psi(0) = A + C &= 0 \\ \Psi'(0) = B + D &= 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Al sustituir ahora las condiciones en $x = l$, es decir, $\Psi''(l) = \Psi'''(l) = 0$, junto con la anterior,

en la solución general, se tiene

$$\begin{aligned}\Psi''(l) &= A(\cos \beta l + \cosh \beta l) + B(\sin \beta l + \sinh \beta l) = 0 \\ \Psi'''(l) &= B(\cos \beta l + \cosh \beta l) + A(\sin \beta l - \sinh \beta l) = 0\end{aligned}$$

A partir de estas dos ecuaciones, se obtiene finalmente

$$1 + \cosh \beta l \cos \beta l = 0 \quad (3.27)$$

donde esta ecuación se satisface para un número de valores de βl , correspondientes a cada modo normal de oscilación [73] y además tiene una cantidad contable de soluciones, una frecuencia angular $\xi = \beta_i^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}}$, y un modo $\Psi_i(x)$.

Al aplicar las condiciones de frontera dadas por (2.18), la solución general toma la forma

$$\Psi(x) = A(\sin \beta x - \sinh \beta x) + B(\cos \beta x - \cosh \beta x) \quad (3.28)$$

Mediante un proceso de normalización adecuada de la eigenfunción $\Psi(x)$, la solución resulta

$$\Psi(x) = \Psi_o [(\cos \beta l + \cosh \beta l)(\sinh \beta x - \sin \beta x) + (\sin \beta l + \sinh \beta l)(\cos \beta x - \cosh \beta x)] \quad (3.29)$$

donde Ψ_o es una constante que se determina de la normalización.

3.3 Análisis Modal No Restringido

El análisis modal no restringido se obtiene sin hacer la suposición de que $\theta(t) = 0$ (Figura 2.1). Sea $\theta(t)$ de la forma

$$\theta(t) = \alpha(t) + k\Gamma(t) \quad (3.30)$$

donde $\alpha(t)$ describe el movimiento del centro de masa del eslabón y $\Gamma(t)$ es función del tiempo. La deflexión $\omega(x, t)$ tiene la forma

$$\omega(x, t) = \Phi(x)\Gamma(t) \quad (3.31)$$

donde $\Phi(x)$ está en función del espacio. Al sustituir (3.30) y (3.31) en primera ecuación de \sum_{RFE} , se obtiene

$$I_i \ddot{\alpha} + \ddot{\Gamma}(t) [I_i k + \rho \int_0^l x \Phi(x) dx] = u \quad (3.32)$$

donde k se puede elegir para que satisfaga

$$I_t k + \rho \int_0^l x \Phi(x) dx = 0 \quad (3.33)$$

con lo cual se garantiza que ninguna perturbación ocurra en el centro de masa, es decir $\ddot{\alpha} = 0$.

Al sustituir (3.30) y (3.31) en la segunda ecuación de Σ_{RFE} , resulta

$$EI \Phi''''(x) \Gamma(t) + \rho \Phi(x) \ddot{\Gamma}(t) + \rho x (\ddot{\alpha}(t) + k \ddot{\Gamma}(t)) = 0$$

en la cual, al aplicar el método de separación de variable, se puede describir en tiempo y espacio, como

$$\Phi''''(x) + \frac{\rho \eta^2}{EI} (\Phi(x) + kx) = 0 \quad (3.34)$$

$$\ddot{\Gamma}(t) + \eta^2 \Gamma(t) = 0 \quad (3.35)$$

donde η^2 es el eigenvalor, $(\Phi(x) + kx)$ es la eigenfunción y la solución de (3.35) está dada por $\Gamma(t) = e^{-j\eta t}$ con las condiciones de frontera para $\Phi(x)$

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= \Phi'(0) = 0 \\ \Phi''(l) &= \Phi'''(l) = 0 \end{aligned}$$

Entonces, la solución general para $\Phi(x)$ tiene la forma

$$\Phi(x) = A \sin(\gamma x) + B \cos(\gamma x) + C \sinh(\gamma x) + D \cosh(\gamma x) \quad (3.36)$$

donde $x \in [0, l]$, $\gamma^4 = \frac{\rho \eta^2}{EI}$, y las constantes A, B, C, D son determinadas a partir de las condiciones de frontera.

Una solución de $\Phi(x)$ es de la forma

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \Phi_o [(\cos(\gamma l) \sinh(\gamma l) - \sin(\gamma l) \cosh(\gamma l))(\cos(\gamma x) - \cosh(\gamma x)) \\ &\quad + (1 + \sin(\gamma l) \sinh(\gamma l) + \cos(\gamma l) \cosh(\gamma l))(\sin(\gamma x) - \sinh(\gamma x)) \\ &\quad + 2(1 + \cos(\gamma l) \cosh(\gamma l))(\sinh(\gamma x) - \sin(\gamma x))] \end{aligned} \quad (3.37)$$

donde Φ_o se determina por una condición de normalización y γ debe satisfacer la ecuación característica

$$I_h \gamma^3 (1 + \cos(\gamma l) \cosh(\gamma l)) + \rho (\sin(\gamma l) \cosh(\gamma l) - \cos(\gamma l) \sinh(\gamma l)) = 0 \quad (3.38)$$

Se puede observar que esta ecuación tiene una doble solución en $\gamma = 0$, esto se debe al movimiento sin restricción en la base del robot. Si en esta ecuación, la inercia del eje I_h

tiende a infinito, la ecuación característica (3.38), se convierte en (3.27), con $\gamma = \beta$. Con esta aproximación, se obtiene el modelo restringido.

Por otra parte, se puede obtener un modelo dimensional finito aproximado utilizando solo un número finito de eigenvalores y eigenvectores. Considerando sólo las primeras n_e raíces de la solución (3.37), la deformación del eslabón puede expresarse en términos de n_e modos modelados como sigue

$$\omega(x, t) = \sum_{i=1}^{n_e} \Phi_i(x) \Gamma_i(t) \quad (3.39)$$

$$\theta(t) = \alpha(t) + \sum_{i=1}^{n_e} \Phi'_i(0) \Gamma_i(t) \quad (3.40)$$

Esto permite transformar las ecuaciones Σ_{RFE} , en un conjunto de $n_e + 1$ ecuaciones diferenciales de segundo orden de la forma

$$\begin{aligned} I_t \ddot{\alpha}(t) &= u(t) \\ \ddot{\Gamma}_i(t) + \eta_i^2 \Gamma_i(t) &= \Phi'_i(0) u(t) \quad i = 0, \dots, n_e \end{aligned} \quad (3.41)$$

las cuales pueden describirse en forma matricial

$$\begin{pmatrix} I_t & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\alpha}(t) \\ \ddot{\Gamma}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \Gamma(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ \Phi'(0) \end{pmatrix} u \quad (3.42)$$

donde los bloques cero y la matriz identidad son de dimensiones apropiadas. La naturaleza desacoplada de estas ecuaciones es una consecuencia de la ortogonalidad de las eigenfunciones $\Phi'_i(x)$, además la matriz de rigidez está definida como

$$k = \text{diag}\{\eta_i^2\}$$

Otra representación se puede obtener al hacer las siguientes sustituciones

$$\begin{aligned} I_t \ddot{\alpha} &= u \\ I_t [\ddot{\theta}(t) - \sum_{i=0}^{n_e} \Phi'_i(0) \ddot{\Gamma}_i(t)] &= u \end{aligned}$$

y sustituirla en

$$\begin{aligned} \ddot{\Gamma}(t) + k\Gamma(t) - \Phi'_i(0)u &= 0 \\ \ddot{\Gamma}(t) + k\Gamma(t) - \Phi'_i(0)I_t[\ddot{\theta}(t) - \sum_{i=0}^{n_e} \Phi'_i(0)\ddot{\Gamma}_i(t)] &= 0 \end{aligned}$$

en forma matricial, se obtiene

$$\underbrace{\begin{pmatrix} I_t & -I_t\Phi'(0)^T \\ -I_t\Phi'(0)^T & I + I_t\Phi'(0)\Phi'(0)^T \end{pmatrix}}_M \underbrace{\begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\Gamma} \end{pmatrix}}_{\ddot{Q}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}}_D \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\Gamma} \end{pmatrix}}_{\dot{Q}} \quad (3.43)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}}_K \underbrace{\begin{pmatrix} \theta \\ \Gamma \end{pmatrix}}_Q = \underbrace{\begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}}_F u$$

en donde se ha introducido una matriz de amortiguamiento D , la cual se puede calcular a partir de la matriz de rigidez, o experimentalmente. Esto último, se puede realizar observando el tiempo de caída del sistema, excitado a cada frecuencia de deformación.

En consecuencia, el sistema descrito por (3.43), con $Q = [\theta \ \Gamma]^T$ tiene la forma

$$M\ddot{Q} + D\dot{Q} + KQ = F \quad (3.44)$$

la cual es semejante a la representación de un robot rígido.

3.4 Análisis Modal con la Posición en la Punta

Uno de los elementos primordiales en el diseño del control de robots con eslabones flexibles, es la localización de los sensores y de los actuadores [46]. La razón de esto recae en que una selección apropiada de la posición de los sensores y actuadores conlleva a una optimización del desempeño del sistema en lazo cerrado. Sin embargo, en el caso de los robots con eslabones flexibles, el sensor generalmente se coloca en la posición de la punta para asegurar la retroalimentación de la posición de la herramienta. La medición de la posición de la punta del eslabón flexible, se capta por medios ópticos como una cámara⁵ o por algún otro dispositivo.

El objetivo del diseño de un control para los robots flexibles es posicionar la punta en el lugar exacto con la trayectoria y el tiempo deseados.

En esta sección, se presenta el modelo del robot flexible desarrollado en las secciones anteriores, ahora considerando como referencia la posición de la punta, denominada $z(l, t)$, en lugar de la deflexión $\omega(x, t)$.

El desplazamiento total de un punto particular del eslabón, se define por

$$z(x, t) \triangleq x\theta(t) + \omega(x, t) \quad (3.45)$$

⁵ En el caso del robot flexible en el eslabón experimental, el medio óptico que posee es una cámara con una resolución de 0.014 cm. a un metro de distancia.

que representa la longitud del arco medido a través del círculo de radio x , centrado en el eje más un desplazamiento relativo. Esto se muestra en la figura 2.1. Al hacer la sustitución de (3.45), en la ecuación de \sum_{RFET} , se obtiene

$$\begin{aligned} EIz''''(x, t) + \rho\ddot{z}(x, t) &= 0 \\ I_h\ddot{\theta}(t) - EIz''(0, t) &= 0 \end{aligned} \quad (3.46)$$

Con las condiciones de frontera dadas por

$$\begin{aligned} z'(0, t) &= \theta(t) \\ z(0, t) = z''(l, t) = z'''(l, t) &= 0 \end{aligned}$$

Si se aplica el método de separación de variables, se tiene

$$z_n = \phi_n(x)q_n(t) \quad (3.47)$$

$$\theta_n = \alpha_n q_n(t) \quad (3.48)$$

donde ϕ es el n -ésimo modo shape y q_n es el modo asociado.

Al sustituir z_n y θ_n , en la ecuación (3.46), se obtiene

$$\phi_n''''(x)q_n(t) + \frac{\rho}{EI}\phi_n(x)\ddot{q}_n(t) = 0 \quad (3.49)$$

de las cuales, se puede observar que

$$\begin{aligned} \phi_n''''(x) - \lambda_n^4\phi_n(x) &= 0 \\ \ddot{q}_n(t) + \omega_n^2q_n(t) &= 0 \end{aligned} \quad (3.50)$$

con $\omega_n^2 = (\frac{EI}{\rho})\lambda_n^4$, y las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \phi_n(0) &= 0 \\ \rho\phi_n''(0) + I_h\lambda_n^4\phi_n'(0) &= 0 \\ \phi_n''(l) = \phi_n'''(l) &= 0 \end{aligned}$$

donde $\alpha_n = \phi_n'(0)$.

A partir de estas ecuaciones, se puede encontrar una solución mediante un análisis similar al desarrollado anteriormente. Al considerar sólo los primeros N modos, se obtiene entonces, un sistema de $N + 1$ ecuaciones lineales, cuya representación de espacio de estado es de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= C^T x(t) \end{aligned} \quad (3.51)$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & -\xi_1^2 & -2\zeta\xi_1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & -\xi_n^2 & -2\zeta\xi_n \end{bmatrix} \quad B = \frac{1}{I_t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \Phi'_1(0) \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \Phi'_n(0) \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} l & 0 & \Phi_1(0) & 0 & \cdots & \Phi_n(0) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Phi'_1(0) & \cdots & 0 & \Phi'_n(0) \end{pmatrix}$$

donde el vector de estado es $x(t) = [q_0 \ \dot{q}_0 \ q_1 \ \dot{q} \ \cdots \ q_n \ \dot{q}_n]$ y ζ , representa el amortiguamiento del sistema. Los renglones de C representan los variables medibles del sensor. Este modelo lineal es similar al utilizado en la literatura [9] para el control de estructuras espaciales largas.

3.4.1 Análisis de Funciones de Transferencia

Los estudios realizados por Lim [46] en 1997, muestran que la selección de la retroalimentación de salida para el sistema del robot flexible, es una pieza clave en el diseño del control. Uno de los enfoques para analizar la estabilidad de un sistema, son los estudios basados en el plano s , estos esquemas de identificación y control involucran típicamente funciones de transferencia. Las características de las funciones de transferencia dependen de la selección de entrada y salida del sistema. Al utilizar modelos lineales reducidos (truncados) conviene analizar el comportamiento del sistema mediante las funciones de transferencia que se obtienen al seleccionar cierta entrada y salida.

En esta sección, se presentan las funciones de transferencia más comunes del robot flexible con sus respectivas características. Esta sección se basa en el estudio realizado por Barbieri en [8] . Para esto, se considera al sistema lineal dado por Σ_L con el vector $x(t) = q = [q_0 \ q_1 \ \cdots \ q_n]^T$ y $b = (1/I_t)[\phi'_1 \ \phi'_2 \ \cdots \ \phi'_n]^T$.

3.4.1.1 Ángulo del Eje al Torque del Eje

Consideremos que la salida seleccionada del sistema Σ_L está definida por

$$\theta = q_0 + I_t b^T q$$

donde q_o es el modo rígido. Esta salida representa el ángulo del eje. La función de transferencia $H_1(s)$ de \sum_L está dada por

$$H_1(s) = \frac{\theta(s)}{\Gamma(s)} = \frac{1}{I_t s} + \frac{1}{I_t} \sum_{n=1}^N \frac{2 \left[\phi'_n(0) \right]^2}{(s^2 + \xi_n^2)} \quad (3.52)$$

donde Γ representa al torque, θ la salida, ξ_n es la n -ésima frecuencia modal y N es el número de modos.

Esta función de transferencia es un ejemplo de "Sensor/Control Colocado", es decir, que el sensor y el actuador se encuentran localizados en el mismo lugar.

Además, $H_1(s)$ resulta en un patrón de alternación simple de polos y ceros en el eje imaginario del plano complejo s . Wang y Vidyasagar [77] demostraron que este patrón implica que la función de transferencia es pasiva y relativamente fácil de estabilizar.

3.4.1.2 Posición de la punta al torque del eje

Ahora, consideremos que la salida medible es la posición de la punta $z(l, t)$, entonces se tiene que

$$z(l, t) = z_{tip}(t) = l q_o + \left[\phi_1(l) \quad \phi_2(l) \quad \dots \quad \phi_N(l) \right] q$$

cuya función de transferencia está dada por

$$H_2(s) = \frac{Z_{tip}(s)}{\Gamma(s)} = \frac{l}{I_t s^2} + \frac{1}{I_t} \sum_{n=1}^N \frac{2 \phi_n(l) \phi'_n(0)}{(s^2 + \omega_n^2)} \quad (3.53)$$

Esta función es representativa de lo que se llama "Sensor/Control No Colocado". A diferencia de la función de transferencia $H_1(s)$, el sensor y el actuador se encuentran localizados en lugares distintos. Por otro lado, resulta que el sistema de fase no-mínima, con ceros en el semiplano derecho.

Como consecuencia de esto se ha requerido el diseño de compensadores. Los casos donde el sensor y el actuador no pueden situarse en el mismo lugar son muy variados, ejemplo de ello son los robots utilizados para la inspección de desechos nucleares.

3.4.1.3 Longitud del arco menos la deflexión al torque del eje

Sea $w^*(l, t)$, la variable de salida que describe la longitud del arco menos la deflexión total

de la punta y la cual está definida por la siguiente expresión

$$w^*(l, t) = w_{tip}^*(t) = lq_o - [\phi_n(l) - l\phi_n'(0)]q_n$$

Entonces la función de transferencia del sistema \sum_L es de la forma

$$H_3(s) = \frac{W_{tip}^*(s)}{\Gamma(s)} = \frac{l}{I_t s^2} + \frac{1}{I_t} \sum_{n=1}^N \frac{\phi_n'(0)[2l\phi_n'(0) - \phi_n(l)]}{(s^2 + \xi_n^2)} \quad (3.54)$$

la cual es de fase mínima. Se caracteriza por mostrar un patrón de pares alternados de polos y ceros en el eje imaginario.

3.4.1.4 Posición relativa de la punta al torque del eje

Ahora, consideremos que la salida es la deflexión total de la punta. Esta salida es descrita por

$$y(l, t) = y_{tip}(t) = \sum_{n=1}^N [\phi_n(l) - l\phi_n'(0)]q_n(t)$$

y la función de transferencia de \sum_L resulta

$$H_4(s) = \frac{Y_{tip}(s)}{\Gamma(s)} = \frac{1}{I_t} \sum_{n=1}^N \frac{\phi_n'(0)[\phi_n(l) - l\phi_n'(0)]}{(s^2 + \xi_n^2)} \quad (3.55)$$

Al igual que $H_3(s)$ se caracteriza por mostrar un patrón de pares alternados de polos y ceros en el eje imaginario.

En la tabla 1, se muestran, como ejemplo, valores típicos de los polos y ceros de las funciones de transferencia consideradas. Estos valores se obtuvieron utilizando una aproximación de dos modos.

| Función de Transferencia | Polos | Ceros |
|--------------------------|----------------------------------|----------------------------|
| $H_1(s)$: (3.52) | 0;0; $\pm j12.35$; $\pm j49.04$ | $\pm j6.02$; $\pm j47.76$ |
| $H_2(s)$: (3.53) | 0;0; $\pm j12.35$; $\pm j49.04$ | ± 9.61 ; $\pm j72.31$ |
| $H_3(s)$: (3.54) | 0;0; $\pm j12.35$; $\pm j49.04$ | $\pm j3.89$; $\pm j50.24$ |
| $H_4(s)$: (3.55) | $\pm j12.35$; $\pm j49.04$ | $\pm j52.24$ |

Tabla 1: Ejemplos de polos y ceros de las funciones: $N = 2$

3.4.2 Concepto de Modo

En las secciones anteriores, se presentó el análisis modal con el cual se obtuvo un modelo lineal del robot flexible en el eslabón. Para obtener un modelo de dimensión finita se utilizaron

solamente los primeros N modos, por lo que se considera necesario analizar hasta qué punto es factible el uso de modos.

Un modo de vibración [34], se refiere al movimiento periódico que es físicamente posible en ausencia de cualquier influencia externa. En este movimiento, el desplazamiento elástico $w(x, t)$ en la posición x y el tiempo t se mueven regulados por la regla de que “todos los desplazamientos pasan a través del cero simultáneamente y todos obtienen su máxima simultáneamente”.

El concepto de modo de vibración es, de hecho, un concepto matemático y se expresa como

$$\omega(x, t) = \Psi(x)\eta(t) \quad (3.56)$$

donde $\Psi(x)$ se le llama modo shape y $\eta(t)$ muestra la dependencia del tiempo de los desplazamientos elásticos en todos los puntos de la estructura. Esta expresión es un caso especial de la idea matemática de separación de variables. Como ejemplo se analizó la barra uniforme en el capítulo 2 donde la ecuación diferencial asociada con los desplazamientos laterales está dada por

$$\begin{aligned} EI\omega'''' + \rho\ddot{\omega} &= f(x, t) \\ \omega(0, t) = \omega'(0, t) = \omega''(l, t) = \omega'''(l, t) &= 0 \end{aligned} \quad (3.57)$$

La ecuación diferencial dada por (3.57) tiene modos de la forma (3.56). En teoría, tiene un infinito número de esos modos. La pregunta en cuestión es, si barras reales poseen esta propiedad.

El suposición de que una estructura real tiene un número infinito de modos, es como establecer un absurdo. ¿Cómo puede, una estructura, tener más modos que sus moléculas, o de otro manera, más que las moléculas en el universo conocido?.

Generalmente, cuando se dice que una estructura tiene un número infinito de modos, quiere decir que la estructura tiene un número muy grande de modos. Una estructura física no posee un número infinito de modos.

Entonces, la cuestión es ¿Cuántos modos de vibración tiene?. La respuesta mas precisa sería ninguno, sin embargo para propósitos de aproximación matemática, el concepto de modo es muy útil.

La aproximación matemática para la barra es válida para los modos de vibración bajos. Pero para los modos altos, conforme estos aumentan, su manejo matemático se vuelve inapropiado. Para enfatizar esta idea se introduce la siguiente definición.

DEFINICION 3.1 *El subespacio absurdo asociado con la idealización de una estructura*

PDE (Ecuaciones Diferenciales Parciales) es el subespacio extendido por todos excepto los primeros billones de modos.

Todos los modelos estructurales PDE tienen un subespacio absurdo, esto significa que la obtención de modos para una estructura se puede aproximar hasta N modos, donde N es tan grande como se desee pero siempre habrá modos más allá de $N + 1$ que constituyen el subespacio absurdo.

En la práctica, la ventaja del análisis modal es que el analista puede expandir el movimiento general de una estructura, en términos de unos pocos submovimientos importantes. Esta ventaja se perdería si se insiste tomar una infinitud de modos.

Un método clásico para solucionar sistemas PDE similares a (3.57), es expandir la solución en términos de series de funciones que son definidas, examinadas y catalogadas. Usualmente estas funciones no son sencillas de calcular, inclusive las funciones \sin , $\sin h$, \cos , \cosh , que proporcionan una solución bien conocida para los modos de vibración de una barra simple, requieren de una sofisticación numérica.

Debido a estas dificultades, a las estructuras complicadas se les divide matemáticamente en pequeños elementos, donde cada uno de éstos es analizado por separado. De esta manera, se pueden extraer los datos numéricos con la precisión requerida y en forma relativamente sencilla. A este método se le denomina de Elemento Finito.

Este método de elemento finito⁶ (FEM) es una implementación ingeniosa de un método mas antiguo: el Método de Ritz. Tiene los mismos fundamentos teóricos que el Método de Ritz, en forma particular se conocen las condiciones de convergencia. La solución que se obtiene al utilizar el método FEM es exacta para el modelo PDE solamente. No es exacta para la estructura, ya que el modelo PDE, en sí mismo, no es exacto.

El modelo FEM debe ser visto como un tratamiento numérico del modelo PDE, ya que permiten la obtención de una aproximación numérica bastante precisa del modelo PDE. Si se utiliza el número de elementos apropiados, el error que se presenta, debido al número finito de elementos, siempre puede ser restringido al *subespacio absurdo*.

La *ventaja* del modelo FEM es que, con el análisis estructural es posible realizar los cálculos numéricos para estructuras complicadas. Su *debilidad* está en que nunca puede ser mejor que el modelo PDE, al cual converge.

⁶ La búsqueda de una solución exacta a la ecuación diferencial de Euler normalmente es imposible por lo que se requiere una aproximación de la solución. La idea de Rayleigh-Ritz-Galerkin es seleccionar un numero finito de funciones $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ con combinaciones de la forma $\sum q_j \varphi_j$ y encontrar cual de estas combinaciones es mínima. Esta última es la aproximación de Ritz. Los pesos q_j son determinados por medio de un sistema de N ecuaciones algebraicas. Entonces, el objetivo consiste en seleccionar las funciones φ tal que la energía potencial pueda calcularse y minimizarse y al mismo tiempo encontrar la aproximación mas apropiada a la solución de la ecuación de Euler.

3.5 Modelo de Elemento Finito

En este método, el eslabón o barra flexible, se divide en un número finito de elementos. Estos elementos son apropiados para cuestiones de cálculo y de identificación. Generalmente son triángulos o rectángulos. Entonces para cada elemento ó pieza se seleccionan funciones completas⁷, como ejemplo los polinomios. Las propiedades de cada elemento se analizan, y las propiedades de toda la estructura se obtienen aplicando a cada elemento su aproximación asociada.

Los pasos básicos[72] en el método de elemento finito son: La formulación variacional del problema, la construcción de las funciones polinomiales, el cálculo de la matriz de rigidez y la solución del sistema discreto y por último, la estimación de la exactitud de la aproximación de Ritz final.

El desplazamiento total de un punto en el eslabón flexible [7] , se describe por

$$z(x, t) \triangleq x\theta(t) + \omega(x, t) \quad (3.58)$$

Al aplicar la teoría Euler-Bernoulli, desarrollada en el capítulo 2, resulta que la energía cinética puede ser expresada en términos de $z(x, t)$ como

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho(\dot{z}(x, t))^2 dx + I_h \dot{\theta}(t)^2 \quad (3.59)$$

Asimismo, la energía potencial puede expresarse como

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI(z''(x, t))^2 dx \quad (3.60)$$

Además, el trabajo hecho por el torque, es descrito por

$$W = u(t)\theta(t)$$

Ahora bien, al aplicar el Principio de Hamilton, resulta

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0$$

⁷ El conjunto de funciones completas son aquellas cuyas combinaciones lineales llenan el espacio de soluciones cuando $N \rightarrow \infty$, y por lo tanto el método de Ritz converge.

Al sustituir (3.59) y (3.60), en la ecuación anterior e integrando por partes, resulta

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^l (\rho \ddot{z}(x,t) \delta z + EI z''(x,t) \delta z'') dx + I_n \ddot{\theta} \delta \theta - u \delta \theta \right] = 0 \quad (3.61)$$

Por otro lado, el desplazamiento $z(x,t)$ puede ser discretizado usando la siguiente expansión de elemento finito

$$z(x,t) = \sum_{i=1}^N N_i(x) z_i(t) \quad (3.62)$$

donde $z_i(t)$ representa la variación de los desplazamientos nodales en el tiempo, N es el número total de grados de libertad, y $N_i(x)$ son polinomios hermitianos que satisfacen las condiciones de admisibilidad y que son definidos sobre una fracción de la longitud que constituyen el elemento finito.

Cuando se utiliza la teoría Euler-Bernoulli, el método requiere que para un elemento con nodos en la punta, cada elemento posea dos grados de libertad, una deflexión transversal y una rotación. Esto requiere el uso de funciones de base cúbica[17].

Las funciones Hermitianas de base cúbica, usuales para el intervalo local $[0 \ l]$, son usadas de manera que las funciones shape de los elementos son dadas por

$$\begin{aligned} \phi_1(s) &= 1 - 3s^2 + 2s^3 \\ \phi_2(s) &= I_n(s - 2s^2 + s^3) \\ \phi_3(s) &= 3s^2 - 2s^3 \\ \phi_4(s) &= I_n(s^3 - s^2) \end{aligned}$$

La coordenada local s está relacionada con la coordenada x de la barra utilizando la transformación lineal del n -ésimo elemento, como sigue

$$x = x_{n-1} + I_n s$$

Esta transformación permite que la ecuación (3.62) pueda expresarse en N elementos. De este modo, la aceleración puede expresarse como

$$\ddot{z}(x,t) = \sum_{i=1}^N N_i(x) \ddot{z}_i(t) \quad (3.63)$$

y la curvatura mediante la ecuación

$$z''(x,t) = \sum_{i=1}^N N_i''(x) z_i(t) \quad (3.64)$$

Ahora, al sustituir (3.62), (3.63) y (3.64) en (3.61), e integrando apropiadamente, se obtiene

$$\begin{bmatrix} M_{hh} & M_{hi} & 0 \\ M_{ih} & M_{ii} & M_{it} \\ 0 & M_{ti} & M_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z}_h \\ \ddot{z}_i \\ \ddot{z}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{hh} & K_{hi} & 0 \\ K_{ih} & K_{ii} & K_{it} \\ 0 & K_{ti} & K_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_h \\ z_i \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde z_h se refiere al grado de libertad en el eje, es decir, $z_h = \theta$, z_i se refiere a los grados de libertad internos, es decir, aquellos entre la punta y el eje, y z_t se refiere al grado de libertad traslacional en la punta. Las matrices de masa, rigidez, y de amortiguamiento son particionadas con las dimensiones apropiadas.

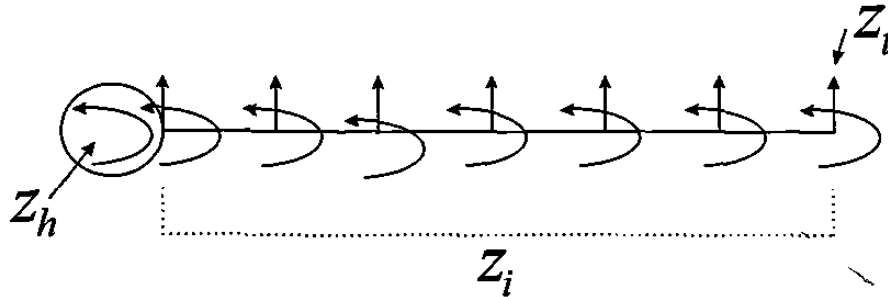


Figura 3.1. Grados de libertad del elemento finito.

Las ecuaciones semidiscretizadas del movimiento de un robot con flexibilidad en el eslabón, pueden entonces, ser expresadas como

$$[M]\{\ddot{Q}\} + [D]\{\dot{Q}\} + [K]\{Q\} = \{F\} \quad (3.65)$$

donde $[M]$, $[D]$ y $[K]$ son las matrices de masa global, amortiguamiento, y de rigidez respectivamente. $\{F\}$ es el vector de fuerzas externas.

La matriz de amortiguamiento, se puede obtener directamente de las matrices de masa y rigidez para una razón de amortiguamiento dada en términos de la serie de Caughey[7].

De esta manera, la respuesta total del sistema se obtiene mediante los modos de vibración. El sistema dado por (3.65), puede reducirse usando el análisis modal. Con las correspondientes transformaciones, se obtiene un conjunto reducido de ecuaciones, que describen al sistema.

3.6 Resumen

En este capítulo se presentaron tres de las técnicas más comunes para obtener un sistema dimensional finito. La primera utiliza una función de transferencia, con la cual se calculan

los eigenvalores del sistema, la segunda utiliza el análisis modal para obtener el cálculo de eigenvalores y eigenvectores y la tercera es la aproximación por medio de elementos que en su conjunto representan una aproximación al eslabón. También se presentaron las funciones de transferencia obtenidas de acuerdo a la selección de la salida. Se hizo un análisis de cada una de ellas para observar sus características. En el siguiente capítulo se podrá apreciar la utilidad de los modelos obtenidos en el diseño de controladores para el robot flexible.

CAPITULO 4

Diseño de Controladores

En este capítulo se presenta el diseño de controladores para el robot con flexibilidad en el eslabón. La primera sección presenta los controladores que se derivan de un modelo de dimensión finita. Cuatro de estos controladores están basados en el modelo lineal obtenido por medio de la técnica de análisis modal presentada en el capítulo anterior. Otro controlador se deriva de un modelo reducido por medio de la técnica de Perturbaciones Singulares. La segunda sección del capítulo se centra en el diseño de tres controladores basados en un modelo infinito, es decir, se derivan directamente del modelo original del robot.

4.1 Controladores Basados en Modelos de Dimensión Finita

En esta sección, se presenta el diseño de los controladores que están basados en modelos de dimensión finita. Uno de los modelos es el modelo lineal \sum_L , que se obtuvo por medio de análisis modal en el capítulo anterior. Con este modelo lineal se diseñaron los controladores: Proporcional-Derivativo (PD), el Regulador Cuadrático Lineal (LQR), el Pasivo y el LQG (Linear Quadratic Gaussian)/ H_∞ . Otro modelo de dimensión finita se obtuvo aplicando la técnica de perturbaciones singulares. Este modelo está compuesto de dos subsistemas (generalmente un subsistema representa la parte rígida y el otro la elástica), por lo que el controlador se diseña tomando en cuenta la ley de control para cada subsistema. Se incluye también una modificación de este modelo para la elección de la variables elásticas.

4.1.1 Controlador Proporcional-Derivativo

En la industria, el controlador Proporcional-Derivativo (PD) ha sido aplicado con éxito a los robots rígidos, por lo que se ha extendido su aplicación a los robots flexibles en el eslabón. Como ejemplo, en esta sección se presenta el diseño de un controlador Proporcional-Derivativo para el robot flexible experimental.

En el capítulo anterior, en el análisis de las funciones de transferencia, se pudo observar que cuando se retroalimenta la posición del ángulo del eje, el sistema es de fase mínima.

El controlador proporcional derivativo, se diseña utilizando los datos de el ángulo del eje con sus respectivas derivadas, éste tiene la forma

$$\tau = k_p(\theta_d - \theta) + k_v(\dot{\theta}_d - \dot{\theta})$$

donde θ es el ángulo del eje, θ_d es el ángulo deseado y $\dot{\theta}$, $\dot{\theta}_d$, sus respectivas derivadas.

Los valores de k_p y k_v , se obtuvieron al considerar la mejor sintonización del sistema con la función de transferencia dada por $H_1(s)$ con tres modos ($N = 3$).

Los valores usados para la experimentación fueron

$$k_p = 1.35 \quad k_v = 0.28$$

Los resultados experimentales se muestran en el capítulo 5, en los cuales se pueden observar severas oscilaciones cuando el robot se posiciona en el punto deseado. Esto muestra que, aunque el robot alcanza su posición deseada, la retroalimentación sólo del ángulo del eje no es suficiente para obtener una buena respuesta del robot. Una extensión de este controlador, a un robot de dos eslabones flexibles, puede hacerse únicamente considerando eslabones independientes.

Una forma de mejorar la respuesta de un controlador PD se presenta en [81], en el cual las ganancias del control no dependen de los parámetros del sistema. Un controlador similar al propuesto por Yigit es presentado en la sección 4.2.1.

4.1.2 Controlador LQR

Los valores de las ganancias para el controlador PD, generalmente no son las óptimas para el sistema. Para esto se puede utilizar un criterio de optimización para el cálculo de las ganancias de control. En esta sección, se presenta el diseño de un controlador que además de considerar como retroalimentación las variables de la base, toma en cuenta las del eslabón flexible. La ley de control resultante utiliza el criterio de optimización LQR para obtener las ganancias del controlador. Las ventajas[24] al aplicar la técnica LQR son:

- ◊ Permite optimización sobre intervalos finitos (El enfoque en dominio de la frecuencia está limitado a intervalos de optimización finita).
- ◊ Es aplicable a sistemas variantes en el tiempo. (El enfoque en dominio de la frecuencia está limitado a sistemas invariantes en el tiempo).
- ◊ Puede manejar sistemas multivariantes.

Para el diseño del controlador se utiliza el sistema lineal descrito por (3.51). En forma

general, la ley de control es descrita por

$$u = -k^T x \quad (4.66)$$

donde k es una matriz de ganancia, y x es el vector de estado. El control se determina por medio de una combinación lineal de los estados del sistema. Este lazo de retroalimentación se muestra en la figura 4.1. Los valores que conforman a k son las ganancias que deben determinarse.

Al sustituir (3.51) en (4.66), se obtiene

$$\dot{x} = (A - Bk^T)x$$

en la cual, el control lineal aplicado, tiene como efecto, el mover los polos del sistema.

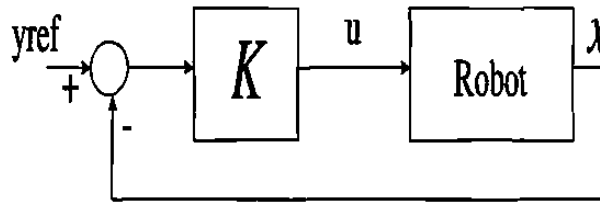


Figura 4.1: Configuración de Retroalimentación LQR-Optimo

Una forma de obtener los valores de k es aplicando el método de asignación de polos, pero para optimizar este resultado se utiliza el criterio de optimización LQR (Linear Quadratic Regulator). Las matrices de ganancia son obtenidas por el criterio de optimización LQR [24] donde Q es semidefinida positiva, y r es definida positiva.

Los valores de la matriz de peso Q , pueden ser seleccionados de acuerdo con ([4] ,pag. 350), donde las especificaciones son dadas en términos de la máxima desviación en los estados y señales de control para una perturbación dada.

Si se define la entrada de control como

$$\tau = -k_v(\dot{x} - \dot{x}_d) - k_p(x - x_d)$$

donde k_v y k_p son matrices de dimensión (1×6) (dos modos), que se calculan por el método de optimización. Se requiere el conocimiento de todo el vector de estado. En el diseño experimental de este controlador, el vector x , se formó con θ , $\dot{\theta}$, $\omega(l, t)$, $\dot{\omega}(l, t)$, $z(l, t)$ y $\dot{z}(l, t)$. Estas variables describen, respectivamente, el ángulo y la velocidad angular del eje, la posición y velocidad de la deflexión, la posición y la velocidad de la punta.

Si se define el error como

$$e = x - x_d$$

donde x_d es el valor deseado. Se puede aplicar el criterio de optimización

$$O_p = \int_0^{\infty} (e^T Q e + u^T r u) dt \quad (4.67)$$

Los valores utilizados fueron

$$r = 1$$

$$Q = \text{diag}(8, 1, 1, 1, 1, 1)$$

la solución correspondiente, utilizando Matlab, es dada por,

$$k_v = [2.8284 \quad 1.4005 \quad 1.3363]$$

$$k_p = [0.1323 \quad -0.0012 \quad 0.0168]$$

En el capítulo 5 se muestran los resultados en simulación y experimentales. Los resultados muestran, que este controlador logra la respuesta deseada del sistema en un menor tiempo que el controlador PD, además no muestran oscilaciones severas. Este método asegura márgenes de ganancia y de fase adecuados.

La ventaja de este controlador con respecto al PD es que permanece insensible a perturbaciones externas. Para una extensión del método a un robot flexible de dos eslabones, el modelo depende de la configuración del robot [3].

4.1.3 Controlador LQG/ H_{∞}

El controlador LQG, ha sido utilizado para el control de estructuras espaciales [10], a pesar de sus propiedades atractivas, tiene la desventaja de que no garantiza márgenes de estabilidad. En la última década, se ha visto el surgimiento de la teoría de control robusto en la forma de control optimal H_{∞} . En este contexto, la característica más importante de esta teoría, es la garantía de un margen de estabilidad ante perturbaciones acotadas normadas⁸.

Cuando al sistema lineal \sum_L de dimensión finita se le retroalimenta la posición de la punta, el sistema resultante es de fase no-mínima y tiene polos ligeramente amortiguados. Uno de los enfoques para diseñar un controlador para este sistema es la técnica LQG combinada con H_{∞} . Esta técnica se presentó en [6] donde se diseña un controlador en lazo interno usando la técnica LQG. Este lazo interno introduce suficiente amortiguamiento a los modos flexibles y a la vez condiciones favorables para aplicar H_{∞} . Al hacer esto se aumenta el orden del

⁸ Esta característica es mas poderosa que la estabilidad en presencia de perturbaciones paramétricas.

controlador, pero en el procedimiento se inicia con un modelo de cuarto orden y el controlador resultante estabiliza a un nuevo sistema de octavo orden.

En la sección 3.4.1 se mostró que la función de transferencia del torque a la punta del robot flexible es dada por

$$\frac{Z_{tip}(s)}{\Gamma(s)} = \frac{1}{I_t s^2} + \frac{1}{I_t} \sum_{n=1}^N \frac{\phi_n(l)\phi_n'(0)}{(s^2 + 2\zeta_n\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (4.68)$$

donde ζ es el amortiguamiento modal. En la sección 3.4 se obtuvo un modelo⁹ de orden $2(n_e + 1)$. Claramente puede verse que si se selecciona una aproximación a un modo, se obtiene un sistema de cuarto orden y si se eligen 3 modos se tendrá uno de octavo orden.

Al derivar un modelo dimensional finito lineal, se han considerado suposiciones restrictivas que usualmente no son aplicables para movimientos largos de los manipuladores, lo que ocasiona que se presente incertidumbre en el sistema. Otra característica de los sistemas ligeramente amortiguados es la presencia de polos y ceros muy cerca del eje jw que hace que el sistema sea mal-condicionado. Las matrices de estado de estos sistemas tienen valores singulares muy alejados entre si, lo que provoca dificultades computacionales en el diseño del controlador.

Este procedimiento busca solventar las dificultades numéricas y la incertidumbre del modelo lineal. El controlador LQG en el lazo interno proporciona amortiguamiento flexural y el controlador H_∞ en el lazo externo proporciona la estabilidad robusta.

Para eliminar el error de estado estable a una función paso, se incluye una retroalimentación de ganancia constante.

El siguiente esquema muestra la configuración en lazo cerrado del sistema con el controlador LQG, H_∞ y la ganancia de retroalimentación K_F .

El doble integrador en el origen, la fase no-mínima y los modos flexibles ligeramente amortiguados hacen al sistema lineal del robot flexible mal-condicionado numéricamente. La aplicación del controlador H_∞ por si solo no es posible debido a la presencia de polos en el eje imaginario.

⁹ Existen algunas otras técnicas de reducción, se tiene la reducción de modelo Hankel (desarrollada por Glover) y la del modelo estocástico balanceado de Green y Safonov [28]. La primera tiene la desventaja de que el modelo reducido es de fase no-mínima, no propio e inestable. Mientras que el modelo original tiene ceros en el semiplano derecho lejos del eje jw , el modelo reducido tiene los ceros del semiplano derecho muy cerca del eje jw . Esto deteriora el desempeño en el dominio del tiempo del sistema en lazo cerrado. En la segunda técnica, se requiere que la matriz D sea de rank completo y además es aplicable para plantas estables (el modelo del robot es de fase no-mínima).

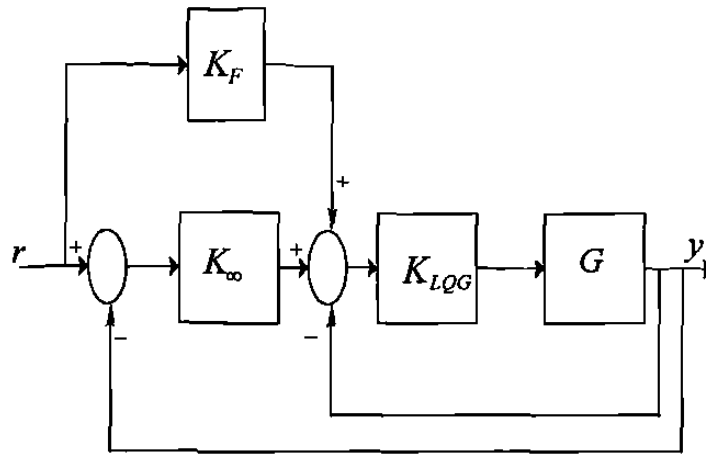


Figura 4.2 Configuración en lazo cerrado.

El algoritmo LQG permite la estabilización del sistema obteniendo ciertos requisitos de desempeño usando retroalimentación de salida. Esto tiene dos propósitos, estabilizar al sistema y volverlo bien-condicionado numéricamente. El controlador LQG se diseña para minimizar el siguiente índice de desempeño

$$J = \int_0^{\infty} [(z'Qz + u'Ru)]$$

donde el modelo en espacio de estado está dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + w \\ y &= Cx + v \quad z = Cx \end{aligned}$$

donde w y v denotan procesos de ruido blanco.

La respuesta en frecuencia del sistema con tres modos en lazo abierto se muestra en la figura 4.3. Los valores de w, v, Q, R se obtienen mediante prueba y error, empezando con matrices de covariancia arbitrarias. Los pesos de Q y R tienen el valor de

$$Q = 0.25 \quad R = 3000$$

y las covarianzas del ruido del proceso y de la medición están dadas por

$$w = 0.1I \quad v = 100$$

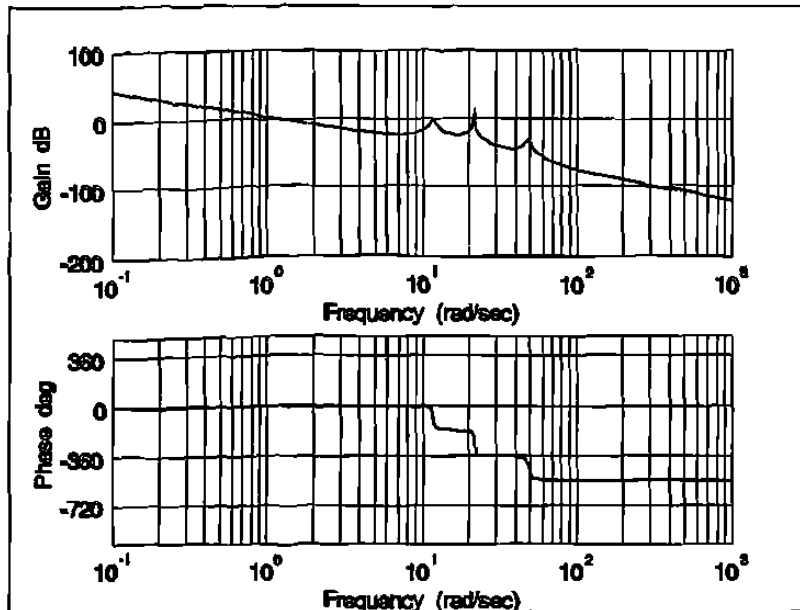


Figura 4.3. Respuesta del sistema en Lazo abierto con tres modos.

A partir de esta información, la función de transferencia del controlador LQG está dada por

$$K_{LQG} = \frac{3.5s^3 + 2.3s^2 + 502.94s + 25.4746}{s^4 + 54.4s^3 + 519.65s^2 + 4934.559s + 4937.7}$$

La respuesta a la función paso se muestra en la figura 4.4. De esta figura se puede observar que la respuesta es lenta y que el sistema en lazo cerrado muestra un comportamiento de estado estable. Pero el sistema obtenido ya es numéricamente condicionado para la aplicación de síntesis de control robusto. Además, agregando una compensación en la retroalimentación se puede llevar a cero el error de estado estable que se presenta a la señal de entrada paso.

La columna vertebral del teorema de pequeñas ganancias es la síntesis de H_∞ [28]. Aplicando este teorema, si T_{zw} representa una matriz de una función de transferencia estable de las señales exógenas (w) a las variables controladas (z) y Δ es cualquier perturbación estable¹⁰, entonces una condición suficiente para estabilidad del sistema en lazo cerrado es

$$\|T_{zw}\|_\infty \|\Delta\|_\infty < 1$$

donde $\|(\cdot)\|_\infty$ denota la norma infinito y está definida por las matrices función de transferencia

¹⁰ Aplicando el criterio de Nyquist no habrá rodeos del punto $-1 + j0$.

G que son analíticas en el semiplano abierto derecho como

$$\|G\|_{\infty} \triangleq \sup_w (\sigma_{\max}(G(j\omega)))$$

donde σ_{\max} denota el valor singular máximo.

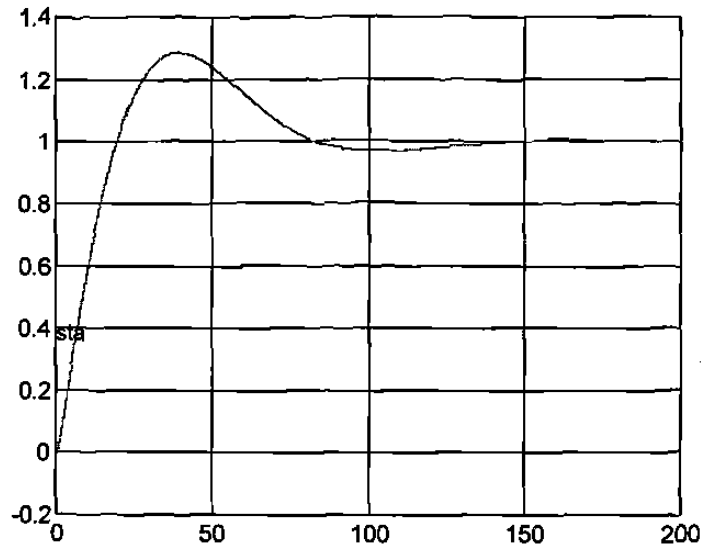


Figura 4.4 Respuesta con retroalimentación LQG.

Como el objetivo en este caso es la atenuación de perturbaciones y la robustez, el controlador está diseñado de modo que minimice la norma de una combinación de las funciones de transferencia de sensibilidad y sensibilidad complementaria, cada una de las cuales es ponderada por un peso determinado. Entonces definiendo la función de transferencia de lazo interno como

$$G_1 = \frac{GK_{LQG}}{1 + GK_{LQG}}$$

Resulta que las funciones de transferencia de sensibilidad y sensibilidad complementaria están dadas por

$$S_{aux} = \frac{1}{1 + G_1 K_{\infty}} \quad T_{aux} = \frac{G_1 K_{\infty}}{1 + G_1 K_{\infty}}$$

Esta formulación tiene la forma de un modelo con incertidumbre multiplicativa como se muestra en la figura 4.5.

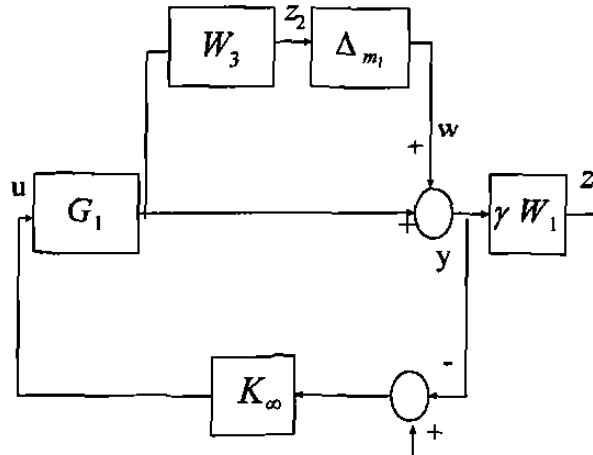


Figura 4.5 Modelo con Incertidumbre

Luego, la función de transferencia de ω a $[z_1, z_2]$ está dada por

$$T_{z\omega} = \begin{pmatrix} \gamma W_1 (I + G_1 K_\infty)^{-1} \\ W_3 G_1 K_\infty (I + G_1 K_\infty)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma W_1 S_{aux} \\ W_3 (I - S_{aux}) \end{pmatrix}$$

entonces, el objetivo es minimizar

$$\|T_{z\omega}\|_\infty$$

Los pesos W_1 y W_3 , deben reflejar las especificaciones de desempeño y garantizar las especificaciones de margen de estabilidad. Generalmente W_1 es una función de transferencia pasa-bajo W_3 es un filtro pasa alto. Después de cálculos a prueba y error se encontró que una buena elección es dada por

$$W_3 = \frac{44.85s}{s+1} \quad W_1 = \frac{1.1\gamma}{15s+1}$$

El controlador H_∞ se sintetizó con la ayuda de la rutina *hinf* del toolbox de Control Robusto de Matlab. Esta rutina fue modificada para que aceptara nuevos pesos para la búsqueda de un controlador con mejor desempeño.

La modificación de esta rutina y los resultados obtenidos se muestran en el apéndice E. Los resultados experimentales se muestran en el capítulo 5.

4.1.4 Controlador basado en Perturbaciones Singulares

Un modelo perturbado singularmente de un sistema mecánico [39], es un modelo de espacio de estado en que las derivadas de algunos estados son multiplicados por un parámetro positivo pequeño ε , esto es

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = f(t, x, z, \varepsilon), & x \in \mathcal{R}^n \\ \varepsilon \dot{z} = g(t, x, z, \varepsilon), & z \in \mathcal{R}^m \end{cases}$$

donde las funciones f y g son continuas y diferenciables en sus argumentos. Si $\varepsilon \neq 0$, el sistema es de orden $n + m$. Pero si $\varepsilon = 0$, la segunda ecuación de Σ se convierte en

$$0 = g(t, x, z, 0) \quad (4.69)$$

por lo que el modelo Σ está en forma estándar si y solo si la ecuación 4.69 tiene $k \geq 1$ raíces reales, es decir

$$z = h_i(t, x), \quad i = 1, 2, \dots, k$$

esto implica que se tendrá un modelo bien definido de dimensión n que corresponde a cada raíz de 4.69.

El sistema resultante consiste de

$$\Sigma_p : \begin{cases} \dot{x} = f(t, x, z, 0) & ; n \text{ ecuaciones diferenciales ordinarias} \\ 0 = g(t, x, z, 0) & ; m \text{ ecuaciones algebraicas} \end{cases}$$

en el cual, el orden del sistema se reduce de $n + m$ a n .

En el control de los robot flexibles se tiene como objetivo el movimiento de la estructura a la posición deseada y al mismo tiempo estabilizar las vibraciones excitadas. Un método para lograrlo es la aplicación de la técnica de perturbaciones singulares, en el que se reduce el orden del sistema en una manera distinta a la técnica de truncamiento. Esta sección se basa en el trabajo realizado por Siciliano y Book en 1988 en [66].

En este método el sistema se separa en dos subsistemas. Uno se considera “subsistema lento”, mientras que el otro se le considera “subsistema rápido”. Las variables de estado “rápidas” son las fuerzas elásticas y sus derivadas en el tiempo.

Los dos subsistemas identificados son:

- a) Un subsistema “lento” que es del mismo orden que del manipulador rígido.
- b) Un subsistema “rápido” en donde las variables de estado lentas juegan el rol de parámetros.

Sea el modelo del robot flexible descrito por

$$M\ddot{q} + D\dot{q} + Kq = F$$

donde las matrices M , D , y K , están definidas como en (3.42). Este sistema puede reescribirse como

$$M(q, \delta) \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(q, \dot{q}) \\ f_2(q, \dot{q}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(q, \dot{q}, \delta, \dot{\delta}) \\ g_2(q, \dot{q}, \delta, \dot{\delta}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

donde M es la matriz de inercia. $q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]$ es el vector de variables de estado en la base. δ es el vector de variables de deflexión, de orden m . f_1 y f_2 son los vectores que contienen los términos de fuerzas de gravitación, coriolis y centrífuga. g_1 , g_2 son los vectores que representan la interacción entre las variables q y δ . K es la matriz diagonal de rigidez de la forma $K = \text{diag}(k_1, \dots, k_m)$. u el vector de fuerza aplicada.

Si se define

$$H = M^{-1} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$$

se puede reescribir (4.70) como

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= -H_{11}f_1 - H_{12}f_2 - H_{11}g_1 - H_{12}g_2 - H_{12}K\delta + H_{11}u \\ \ddot{\delta} &= -H_{21}f_1 - H_{22}f_2 - H_{21}g_1 - H_{22}g_2 - H_{22}K\delta + H_{21}u \end{aligned}$$

Este sistema se caracteriza por tener $n + m$ coordenadas generalizadas. Donde n es el número de variables de la base y m es el número de modos usados para describir la deflexión.

Para obtener un modelo de orden reducido, se obtiene un factor escalar común, por ejemplo la constante más pequeña del resorte. Sea $k_i = k\hat{k}_i$, $i = 1, \dots, m$.

Se pueden definir entonces las siguientes variables

$$\begin{aligned} \zeta &= k\hat{K}\delta \\ \hat{K} &= \text{diag}(k_1, \dots, k_m) \end{aligned}$$

Si se define $\mu = 1/k$, se obtiene el nuevo modelo

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= -H_{11}(q, \mu\zeta)f_1(q, \dot{q}) - H_{12}(q, \mu\zeta)f_2(q, \dot{q}) - H_{11}(q, \mu\zeta)g_1(q, \dot{q}, \mu\zeta, \mu\dot{\delta}) \\ &\quad - H_{12}(q, \mu\zeta)g_2(q, \dot{q}, \mu\zeta, \mu\dot{\delta}) - H_{12}(q, \mu\zeta)\zeta + H_{11}(q, \mu\zeta)u \\ \ddot{\delta} &= -H_{21}(q, \mu\zeta)f_1(q, \dot{q}) - H_{22}(q, \mu\zeta)f_2(q, \dot{q}) - H_{21}(q, \mu\zeta)g_1(q, \dot{q}, \mu\zeta, \mu\dot{\delta}) \\ &\quad - H_{22}(q, \mu\zeta)g_2(q, \dot{q}, \mu\zeta, \mu\dot{\delta}) - H_{22}(q, \mu\zeta)\zeta + H_{21}(q, \mu\zeta)u \end{aligned} \quad (4.71)$$

que es un modelo de perturbaciones singulares para el robot flexible.

Si se elije $x_1 = q$, $x_2 = \dot{q}$, $z_1 = \zeta$, $z_2 = \varepsilon\dot{\zeta}$ con $\varepsilon = \sqrt{\mu}$, ver [66], se obtiene una representación de estado dada por

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -H_{11}(x_1, \varepsilon^2 z_1) f_1(x_1, x_2) - H_{12}(x_1, \varepsilon^2 z_1) f_2(x_1, x_2) - H_{11}(x_1, \varepsilon^2 z_1) g_1(x_1, x_2, \varepsilon^2 z_1, \varepsilon z_2) \\
&\quad - H_{12}(x_1, \varepsilon^2 z_1) g_2(x_1, x_2, \varepsilon^2 z_1, \varepsilon z_2) - H_{12}(x_1, \varepsilon^2 z_1) z_1 + H_{11}(x_1, \varepsilon^2 z_1) u \\
\varepsilon \dot{z}_1 &= z_2 \\
\varepsilon \dot{z}_2 &= -H_{21}(x_1, \varepsilon^2 z_1) f_1(x_1, x_2) - H_{22}(x_1, \varepsilon^2 z_1) f_2(x_1, x_2) - H_{21}(x_1, \varepsilon^2 z_1) g_1(x_1, x_2, \varepsilon^2 z_1, \varepsilon z_2) \\
&\quad - H_{22}(x_1, \varepsilon^2 z_1) g_2(x_1, x_2, \varepsilon^2 z_1, \varepsilon z_2) - H_{22}(x_1, \varepsilon^2 z_1) z_1 + H_{21}(x_1, \varepsilon^2 z_1) u
\end{aligned} \tag{4.72}$$

Para obtener el subsistema lento, se aplica $\varepsilon = 0$, que corresponde a la dinámica del robot rígido. Para el subsistema rápido, se aplica la constante de tiempo $\tau = t/\varepsilon$ a (4.72). Para obtener el controlador, se hace una composición de los controles diseñados para ambos subsistemas, lento y rápido.

$$u = u_s + u_f$$

donde u_s es el control para el subsistema lento y u_f es el control para el rápido. Sea $x = [\theta \ \dot{\theta}]^T$. El control para el subsistema lento se obtuvo de un control lineal como el desarrollado en [11], dado por

$$u_s = \gamma [\ddot{\theta}_d + k_v(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}) + k_p(\theta_d - \theta)]$$

donde k_p, k_v son seleccionadas para mantener la separación en la escala de tiempo entre los subsistemas lento y rápido, γ es una constante dependiente de la matriz de Inercia. Los valores obtenidos fueron: $k_p = 1.5$, $k_v = 0.56$.

Para el control del subsistema rápido se tiene

$$u_f = k_{pf} z_1 + k_{vf}(x) z_2$$

Se utilizó la técnica de asignación de polos de sistemas lineales para obtener los valores de k_{pf}, k_{vf} . Los valores obtenidos fueron $k_{pf} = -1.56$, $k_{vf} = 0.12$.

La ley de control implementada en la experimentación está dada por:

$$u = 0.42 [\ddot{\theta}_d + 0.56(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}) + 1.5(\theta_d - \theta)] - 1.56\dot{p}_{et} + 0.12p_{et}$$

donde p_{et} y \dot{p}_{et} son las variables de la deflexión.

Entre las ventajas de este método, se puede constatar la reducción del orden del modelo. Esto permite resolver el problema de sistemas que tienen menor número de entradas de control que el número de variables controlables. Hay minimización de los cálculos en línea, además, permite su extensión al caso multieslabones.

4.1.5 Método de Perturbaciones Singulares Modificado

El análisis de flexibilidad, usando perturbación singular, se basa en la suposición de que los modos del sistema pueden ser separados en dos grupos distintos: Los modos de frecuencia baja, denominados modos lentos y los modos de alta frecuencia, denominados modos rápidos.

Tradicionalmente el parámetro de perturbación ε , usado para el análisis de la flexibilidad, es el inverso de la rigidez del mecanismo flexible o la inversa de la rigidez ajustada por un factor dependiente de la masa. Esto da por resultado, que el sistema reducido sea el rígido. Como éste solo está alejado por medio de una perturbación del sistema completo, se puede manipular sólo flexibilidades pequeñas[68].

El punto de partida para el análisis de perturbaciones es el modelo dinámico

$$M(\Theta, \Psi) \begin{bmatrix} \ddot{\Theta} \\ \ddot{\Psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1(\Theta, \dot{\Theta}, \Psi, \dot{\Psi}) \\ D_2(\Theta, \dot{\Theta}, \Psi, \dot{\Psi}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K\Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde Θ son los ángulos de la junta y las Ψ son las variables introducidas para modelar la flexibilidad. El término $K\Psi$ es una medida de flexibilidad. El 0 de la parte derecha de la ecuación denota que las fuerzas/torques no son aplicados directamente a las variables flexibles.

Para llevar a cabo el método de perturbaciones singulares, la suposición que se hace es que las dinámicas del brazo pueden ser particionadas en dinámicas rápidas que son debidas a la flexibilidad y las dinámicas lentas que son debidas a los modos del cuerpo rígido. Para reforzar las dinámicas de alta frecuencia de la flexibilidad, la rigidez del manipulador necesita ser grande. Es por esto, que generalmente se utiliza como parámetro de perturbación el inverso de la rigidez. El sistema reducido es rígido ($\varepsilon = 0, K \rightarrow \infty$). Valores pequeños en el parámetro de perturbación corresponden a sistemas que poseen "pequeña" flexibilidad, es decir, que el análisis presenta resultados útiles para los sistemas cercanos a ser rígidos. Inclusive es dudoso que la separación de variables se justifique particularmente en un movimiento de alta velocidad. La suposición es más cuestionable cuando se considera movimiento restringido del manipulador. Debido a esta restricción, cualquier movimiento de las "variables rígidas" tienen que ser descritas por el movimiento de las "variables flexibles" para mantener la restricción. Es por esto que la separación de frecuencias parece no cumplirse.

Dado que lo que se requiere es modelar flexibilidades grandes en tareas restringidas del robot, Sudipto en [68] propone un enfoque alternativo del análisis de perturbaciones singulares para robots flexibles que son capaces de manejar una flexibilidad significativa.

Considere el sistema lineal, escalar, mecánico

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

El factor de amortiguamiento (o razón de amortiguamiento) del sistema es dado por

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

El valor de ζ es importante en la determinación de la respuesta transitoria del sistema. Si $\zeta = 1$, el sistema es críticamente amortiguado, $\zeta > 1$, es sobreamortiguado y $\zeta < 1$, es subamortiguado. Se asume que la respuesta transitoria de la barra flexible es la característica más importante en el análisis. Por esto, se debe conservar el valor de ζ , entonces el valor de c tiene la forma

$$c = b\sqrt{m}$$

donde b es una constante. En este sistema, si la masa del sistema tiende a cero, el sistema responde infinitamente rápido a cualquier entrada. Una forma de elegir el parámetro de perturbación, es

$$\varepsilon^2 = m_{fl}$$

donde m_{fl} es la masa de los subeslabones flexibles. Los eslabones no tienen que tener la misma masa, sin embargo, se hace la suposición de que la razón de amortiguamiento, se mantiene constante.

4.1.6 Control Pasivo

La noción de pasividad se ha venido utilizando para el análisis de estabilidad de entrada-salida de una clase general de sistemas no lineales interconectados ([77], [11]). Esto se ha motivado por el estudio de la disipación de energía en circuitos eléctricos. En forma general, se dice que un sistema pasivo no puede crear energía.

Se ha demostrado que la función de transferencia entre la posición final y el torque de entrada no puede ser controlado por un controlador PD simple en lazo cerrado porque la función es de fase no mínima. Una condición necesaria mas no suficiente para que la función sea pasiva es que la función de transferencia sea de fase mínima. Una vez que la función de transferencia sea pasiva, el sistema puede ser estabilizado aplicando el siguiente teorema

TEOREMA 4.1 (Vidyasagar 1995) *Suponga que en un sistema en lazo cerrado en cascada (Figura 4.6), el compensador es estrictamente pasivo con ganancia finita y que la planta es*

pasiva. Entonces el sistema en lazo cerrado es L_2 estable.

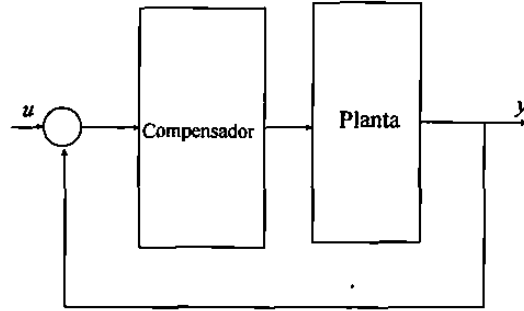


Figura 4.6. Sistema en Lazo Cerrado en cascada

En estudios recientes [77], se ha demostrado que si el eslabón es lo suficientemente rígido, la función de transferencia de la punta con respecto al torque es pasiva. Esto permite, por el teorema de pasividad, diseñar un controlador estrictamente pasivo con ganancia finita. Con esto, se obtiene un sistema L_2 -estable. Para poder diseñar el controlador pasivo, se establecen las siguientes definiciones:

DEFINICION 4.1 El sistema $y = F(u)$ es estrictamente pasivo si para todo t y para todo $u(t)$,

$$\int_0^t y(\tau)u(\tau)d\tau \geq \delta \int_0^t u(\tau)^2 d\tau, \quad \delta > 0 \quad (4.73)$$

El sistema es pasivo si $\delta = 0$, en la expresión (4.73).

DEFINICION 4.2 El conjunto L_2 , es el conjunto de todas las funciones medibles $f : \mathcal{R}_+ \rightarrow \mathcal{R}$ tal que

$$\|f(t)\|_2 = \left(\int_0^\infty |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

DEFINICION 4.3 El sistema $y = F(u)$ es L_2 - estable si $u \in L_2$ implica que $y \in L_2$. Si

$$\gamma := \sup \left\{ \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2} : u \in L_2, u \neq 0 \right\} < \infty$$

entonces la ganancia del sistema es γ .

PROPOSICION 4.1 Una función de transferencia $G(s)$ es estrictamente pasiva si y solo si

$$\operatorname{Re}[G(j\omega)] \geq \delta, \quad \text{and} \quad \delta > 0 \quad \forall \omega \in \mathcal{R}. \quad (4.74)$$

La función de transferencia es pasiva si $\delta = 0$ en la expresión (4.74).

El objetivo es entonces determinar una representación pasiva del robot flexible de modo que el teorema anterior se pueda utilizar.

En la sección 3.4.1, se presentó la función de transferencia $H_3(s)$, la cual tiene como salida, la variable reflejada de la deflexión. Al seleccionar $\dot{w}^*(l, t)$ como salida, la función de transferencia resultante es dada por

$$sH_3(s) = \frac{sW_{tip}^*(s)}{\Gamma(s)} = \frac{l}{(I_h + I_b)s} + \sum_{n=1}^N \frac{\phi_n'(0)[2l\phi_n'(0) - \phi_n(l)]}{(I_h + I_b)} \frac{s}{(s^2 + \omega_n^2)}$$

la cual es pasiva¹¹. Se ha demostrado (Wang y Vidyasagar, 1992) que esta característica se mantiene siempre y cuando N no sea muy grande y que $\Omega = I_h/I_b$ sea lo suficientemente pequeña¹². Si se asume que N es un número fijo, para el robot con un eslabón flexible se puede garantizar que Ω permanezca pequeña haciendo I_h suficientemente pequeña, pero cuando esto no es posible, la función de transferencia ya no es pasiva.

Rossi en [60] propone una salida modificada, la cual se muestra en la figura 4.6 y es descrita por

$$y(t) = lq(t) - kw^*(l, t)$$

donde k es un factor entre 0 y 1.

Se utiliza la variable k ya que eligiendo ésta en forma apropiada, se puede obtener una función de transferencia pasiva inclusive cuando se tiene un valor de inercia muy grande.

La función de transferencia con esta nueva salida es dada por

$$\frac{sW_{tip}^*(s)}{\Gamma(s)} = \frac{l}{(I_h + I_b)s} + \sum_{n=1}^N \frac{((1+k)l\phi_n'^2(0) - k\phi_n'(0)\phi_n(l))}{(I_h + I_b)} \frac{s}{(s^2 + \omega_n^2)}$$

¹¹ Las funciones de transferencia $1/s$ y $s/(s^2 + \omega_i^2)$ son pasivas por la proposición 4.1. Los coeficientes $\phi_n'(0)[2l\phi_n'(0) - \phi_n(l)]$ son no-negativos por lo que se garantiza que la función de transferencia es pasiva.

¹² I_h es la inercia del eje e I_b la del eslabón.

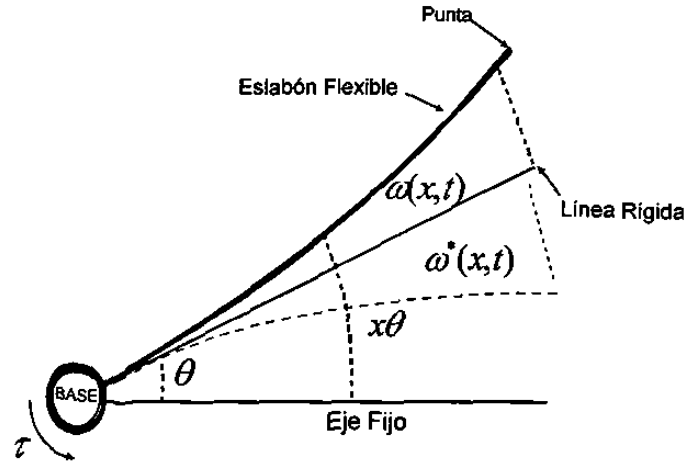


Figura 4.7. Marco de referencia para la variable $\omega^*(x, t)$.

el sistema será pasivo si la siguiente condición se cumple

$$((1 + k)l\phi_n'^2(0) - k\phi_n'(0)\phi_n(l)) > 0$$

si $(l\phi_n'^2(0) - \phi_n'(0)\phi_n(l)) < 0$, entonces

$$0 < k < \frac{-l\phi_n'(0)}{l\phi_n'(0) - \phi_n'(l)}$$

Un compensador posible es de la forma

$$C(s) = \frac{K_p}{s + \epsilon} + K_v$$

donde ϵ es una constante positiva pequeña cuya función es hacer que la ganancia del sistema sea finita. La ecuación anterior es estrictamente pasiva ya que

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{K_p}{j\omega + \epsilon} + K_v \right\} = \frac{K_p \epsilon}{\omega^2 + \epsilon^2} > 0, \quad \forall \omega \in \mathcal{R}^+$$

Si la entrada es dada por $e(t) = y_{ref} - y(t)$, entonces se tiene que

$$sC(s) = s \left(\frac{K_p}{s + \epsilon} + K_v \right) \approx K_p + K_v s$$

ya que ϵ es pequeña. Como el sistema es L_2 -estable con respecto a $\dot{y}(t)$, esto implica que $\dot{y}(t)$ tenderá a $\dot{y}_{ref}(t)$. No se puede asumir que $y(t)$ tienda a $y_{ref}(t)$, por lo que en general se

tendrá un error de estado estable.

Los parámetros del compensador se calcularon por medio de la técnica de asignación de polos. En la implementación experimental están dados por $K_p = 0.546$, $K_v = 0.966$ y $\epsilon = 0.001$.

4.1.6.1 Diseño de un Control Pasivo sin Modificación de la Salida

En la sección anterior se diseñó un controlador pasivo que modificaba la salida por medio de una variable k . En esta sección, se diseña un controlador pasivo mediante retroalimentación estática de estado, sin alterar la salida. Este controlador se propone en [32]. Esto tiene la finalidad de complementar el estudio de controles pasivos para el robot flexible en el eslabón.

Considere un sistema dinámico descrito por ecuaciones de la forma

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Sea U el conjunto de todas las entradas admisibles, consiste de todas las \mathbb{R}^m funciones continuas a pedazos definidas sobre \mathbb{R} , ω una función real definida sobre $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ denominada Supply Rate.

Se asume que $\forall u \in U$ y $x \in \mathbb{R}^n$, la salida

$$y(t) = C\phi(t, x^o, u)$$

con $x = \phi(t, x^o, u)$ es tal que $\omega(\delta) = \omega(u(\delta), y(\delta))$ satisface

$$\int_0^t |\omega(\delta)| d\delta < \infty \quad \forall t \geq 0$$

Para la implementación del controlador se presentan las siguientes definiciones y lemas:

DEFINICION 4.4 El sistema Σ_1 con supply rate

$$\omega = \langle u, y \rangle = y^T u$$

se dice ser pasivo si \exists una función C^0 no negativa $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface $V(0) = 0$, llamada la función storage, tal que $\forall u \in U$ y $x^o \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$

$$V(x) - V(x^o) \leq \int_0^t y^T(\delta)u(\delta)d\delta$$

LEMA 4.1 *El sistema Σ_1 es pasivo si y solo si \exists una matriz simétrica definida positiva Q tal que*

$$A^T Q + Q A \leq 0, \quad Q B = C^T$$

Además, la función

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T Q x$$

define una función storage cuadrática si y solo si satisface las desigualdades.

DEFINICION 4.5 *Suponga que CB es no singular. Entonces, el sistema lineal Σ_1 es*

1.- Fase mínima: Si $z = 0$ es un equilibrio asintóticamente estable de $\dot{z} = \theta_1 z$

2.- Fase mínima débil: Si existe una función cuadrática $W^(z) = \frac{1}{2} z^T W z$, con $W = W^T > 0$, tal que*

$$\theta_1^T W + W \theta_1 \leq 0 \quad (4.75)$$

Para el diseño del control, se utiliza la aproximación dada por (3.51), con dos modos. Típicamente, la variable de salida, a controlar, es el movimiento neto de la punta del eslabón, esto es

$$y_1 = L\theta + \omega(l, t)$$

Sin embargo, el grado relativo es 2 y las correspondientes dinámicas cero son inestables. Por otro lado, si se toma como salida, la velocidad de la posición reflejada de la punta, es decir

$$y_1 = L\dot{\theta} - \dot{\omega}(l, t)$$

el grado relativo es 1 y las correspondientes dinámicas cero son estables. Se puede aplicar entonces, el siguiente teorema de pasividad.

TEOREMA 4.2 *Suponga el sistema lineal Σ_1 con $\text{rank}\{B\} = m$. Entonces el sistema Σ_1 es equivalente por retroalimentación a un sistema pasivo lineal con función storage $V(x) = \frac{1}{2} x^T Q x$ que es positiva definida, si y solo si CB es no singular y el sistema es de fase mínima débil.*

Al elegir la salida reflejada, como la variable a controlar, se tiene primeramente que CB es no singular. Como el sistema es de grado relativo 1 es posible hacer el mapeo[35]

$$\eta = T x$$

donde T es una matriz constante. Se puede entonces implementar la ley de control

$$u = (CB)^{-1}[-\beta_1 \eta - \beta_2 y + v]$$

donde v es la nueva entrada y β_1, β_2 son matrices constantes de dimensiones apropiadas, que se obtuvieron en el cambio de coordenadas. Con este control, el sistema Σ_1 toma la forma

$$\dot{\eta} = \theta_1 \eta + \theta_2 y + TB(CB)^{-1}v, \quad \dot{y} = v$$

Si se hace el cambio adicional de variable

$$z = \eta - TB(CB)^{-1}y$$

El sistema Σ_1 , se convierte

$$\dot{z} = \theta_1 z + \gamma y, \quad \dot{y} = v$$

donde $\gamma = \theta_1 TB(CB)^{-1} + \theta_2$.

La transformación al utilizar dos modos, es dada por

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.56 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1.324 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma = \text{col}(-0.2235, -0.5468, 0.3456, 0, 0)$$

$$\theta_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -0.3456 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4996 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4965 \\ -320.18 & 443.23 & 0 & 0 & 0 \\ 2.56 & -5.89 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Con esto, con $W = I$, se cumple la desigualdad dada por 4.75.

En las coordenadas originales, el controlador tiene la forma

$$u = Fx + dw$$

donde

$$F = [0 \ 0 \ 0 \ -0.01722 \ -42.3503 \ 10.9871]$$

$$d = 0.0056, \quad w = 60[e + 10 \int_0^t e(\delta) d\delta], \quad e = y - y_r$$

y y_r es la salida de referencia. Los resultados del capítulo 5, en los que se refleja el comportamiento de este controlador, muestran que, a pesar de necesitar un menor torque, requiere de más tiempo que los controladores LQR y PS para suprimir la deflexión.

4.2 Controladores Basados en el Modelo Infinito

En esta sección, se presenta el diseño de tres controladores que se derivan directamente del modelo original. El primero fue propuesto por Yuan en 1995. El segundo por Shifman en 1990. Y el tercero es propuesto en este trabajo de investigación.

El controlador de Yuan requiere sólo la medición de las variables en la articulación. Es un ejemplo de la obtención de un controlador Proporcional-Derivativo en la articulación, sin linealizar el modelo. Una de las ventajas es que en base a éste se pueden encontrar resultados satisfactorios aún cuando se manejen ángulos de gran tamaño. El control lineal aplicado por Cannon y Schmitz en 1984 y por Fukuda en 1985, utilizó un modelo lineal truncado para obtener uno de dimensión finita. Aunque sus resultados fueron satisfactorios, estos son válidos solo para el control del movimiento de ángulos pequeños.

Shifman en [70], utilizó una variable auxiliar para el desarrollo de su controlador. Esta variable la obtuvo directamente del modelo y la aproxima por medio de un medidor de tensión (strain gage) colocado a lo largo del eslabón. Este controlador está limitado por la necesidad de la medición de la variable auxiliar, el uso del strain gages está limitado por la temperatura, la longitud de la estructura y el acceso para llevar a cabo la calibración. Cuando se trata de ambientes no convencionales en los que se utilizan estructuras largas, como los robots flexibles para inspección de desechos nucleares, el uso de un strain gage es impráctico.

Generalmente, la medición de la posición de la punta y de las variables en la articulación son las únicas variables disponibles para el diseño del control del robot flexible, lo cual no es una tarea fácil. En este trabajo, se propone un controlador que utiliza sólo estas variables en su implementación.

4.2.1 Controlador Proporcional-Derivativo en la articulación

En esta sección se diseña un controlador Proporcional-Derivativo en la articulación (Joint PD), derivado directamente de Σ_{RFET} , basándose en técnicas de Lyapunov. El objetivo del diseño de este controlador es el hacer uso directo del modelo original.

Sea la siguiente función, una función candidata de Lyapunov, propuesta en [82].

$$V = T_h + T_l + U + \zeta(T_l + U) + \frac{1}{2}\gamma(\theta - \theta_d)^2 \quad (4.76)$$

y a la vez una función de error con respecto a los estados deseados θ_d . Donde θ_d representa el ángulo deseado del eje, $\zeta > -1$ y $\gamma > 0$ son parámetros de diseño. Es claro que $V > 0$,

$V = 0$ sólo si $\dot{\theta} = 0$ y $\theta = \theta_d$.

Obteniendo la derivada en el tiempo de V , y mediante cálculos directos resulta

$$\dot{V} = [\tau + \zeta(\tau - I_h\ddot{\theta}) + \gamma(\theta - \theta_d)]\dot{\theta} \quad (4.77)$$

Se puede elegir la entrada de control (el torque) como

$$\tau = \frac{1}{1 + \zeta}[-k\dot{\theta} - \gamma(\theta - \theta_d) + \zeta I_h\ddot{\theta}] \quad (4.78)$$

donde $k > 0$ es también un parámetro de diseño.

Sustituyendo la entrada de control en (4.77), se obtiene

$$\dot{V} = -k\dot{\theta}^2$$

la cual es negativa semidefinida. Por lo tanto utilizando el Teorema de Estabilidad de Lyapunov, se puede decir que el robot alcanza el estado de equilibrio bajo la acción del control aplicado. Sustituyendo el control τ in Σ_{RFET} , se tiene que la ecuación de lazo cerrado es dada por

$$I_h\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + \gamma\theta = (1 + \zeta)\omega''(0, t) + \gamma\theta_d$$

Es claro que $\{\theta = \theta_d, \dot{\theta} = 0\}$ es el único estado de equilibrio del sistema en lazo cerrado. También puede observarse que la función V sólo se desvanece en el estado de equilibrio deseado, es decir, $\dot{\theta}$ no puede ser cero hasta que $V = 0$ se alcance.

Sea

$$S = \{(\theta, \dot{\theta}) : \theta - \theta_d = 0, \dot{\theta} = 0\}$$

el conjunto invariante. Invocando el teorema de La Salle de conjuntos invariantes, se obtiene estabilidad asintótica global del punto deseado.

La ley de control dada por τ , no requiere retroalimentación de las variables de deflexión. Esta característica hace a este controlador independiente del modelo utilizado.

4.2.2 Controlador utilizando medición directa de un strain gage

En esta sección, se diseña un controlador al cual se le ha denominado "Controlador SG". La razón de este nombre es que está basado en la medición de una variable auxiliar por medio de un medidor de tensión (strain gage) ¹³. El método para el diseño de este controlador fue propuesto por Shifman [70] en 1991, por lo que esta sección está basada en los trabajos: ([69] , [70]).

¹³ Considere un conductor de área transversal uniforme A_T y longitud L , compuesto de un material con resistividad ρ . La resistencia R

El sistema en lazo cerrado con el controlador se muestra en la figura 4.8.

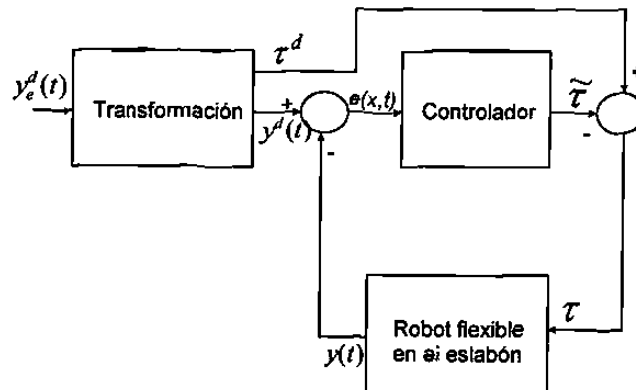


Figura 4.8. Sistema en Lazo Cerrado.

Las trayectorias se definen como los caminos tomados por el eslabón[69] y están en función del espacio y del tiempo. La variable espacial indexa continuamente los puntos a través de la barra. La trayectoria a ser seguida se le denomina "trayectoria deseada", que se asume generada por un sistema idéntico al sistema actual de la barra (con un torque y unas condiciones iniciales diferentes). El problema es forzar el error entre esta trayectoria deseada y la actual a cero. Se asume que la trayectoria deseada es conocida.

Considere la figura 2.1 del capítulo 2. El eslabón tiene densidad de masa uniforme, inercia seccional I , módulo de Young E y longitud l . Opera en un plano horizontal de modo que no hay efectos gravitacionales. Hay un actuador en un extremo de la barra con momento de inercia denotado por I_h . Se indexan los puntos de la barra por la variable espacial x , y la variable del tiempo con t . Esta posición es descrita por la ecuación

$$y(x, t) = x\theta(t) + \omega(x, t) \quad (4.79)$$

del conductor es dada por

$$R = \frac{\rho L}{A_T}$$

Si este conductor es sometido a compresión o a tensión, su resistencia cambiará debido a los cambios dimensionales (longitud y área transversal). La resistencia también cambiará debido a la propiedad de materiales denominada *piezoresistencia*, que indica la dependencia de la resistividad ρ en las tensiones mecánicas.

Al sustituir esta ecuación en el sistema \sum_{RFE} se obtiene

$$\rho \ddot{y} + EI y'''' = 0$$

con las condiciones de frontera dadas por

$$\begin{aligned} EI y &|_0 = 0 \\ EI y'' &|_l = 0 \\ EI y'' &|_l = 0 \\ EI y'' &|_0 = -\tau + I_h \ddot{\theta} \end{aligned}$$

correspondiendo a la barra sujeta a la base y sin momento aplicado en el extremo libre.

Si se consideran las siguientes definiciones de variables

$$\begin{aligned} e &= y^d - y \\ \tilde{\tau} &= \tau^d - \tau \\ \tilde{\theta} &= \theta^d - \theta \end{aligned}$$

donde el superíndice d indica la variable deseada. Al sustituirlas en (4.79), se obtienen

$$\begin{aligned} e &= y^d - x\theta(t) - \omega(x, t) & e &= y^d - y \\ e' &= -\theta(t) - \omega'(x, t) & \dot{e} &= -\dot{y} = -x\dot{\theta}(t) - \dot{\omega}(x, t) \\ e'' &= -\omega''(x, t) & \ddot{e} &= -x\ddot{\theta}(t) - \ddot{\omega}(x, t) \\ e'''' &= -\omega''''(x, t) \end{aligned} \quad (4.80)$$

entonces, la segunda ecuación de \sum_{RFE} en la términos del error está dada por

$$EI e'''' + \rho \ddot{e} = 0 \quad (4.81)$$

con las condiciones de frontera

$$EI e|_0 = 0 \quad EI e'|_l = 0 \quad EI e''|_l = 0 \quad EI e''|_0 = -\tilde{\tau} + I_h \ddot{\tilde{\theta}}$$

Al integrar dos veces la segunda ecuación de (4.81) con respecto a x , primero de x a l , y luego de 0 a l , se obtiene la expresión

$$\tilde{\tau} = \rho \int_0^l \int_{x_1}^l \ddot{e}(x_0) dx_0 dx_1 + I_h \ddot{\tilde{\theta}}$$

de la cual puede notarse que, $\rho \int_0^l \int_{x_1}^l \ddot{e}(x_0) dx_0 dx_1 + I_h \ddot{\tilde{\theta}}$ puede controlarse debido a que el torque afecta directamente la segunda derivada. Para ser más explícitos en esta observación,

sea

$$X := \rho \int_0^l \int_{x_1}^l e(x_o) dx_o dx_1 + I_h \ddot{\theta} \quad (4.82)$$

entonces resulta que

$$\bar{\tau} = -c_1 \dot{X} - c_o X = \ddot{X}$$

con las c_i constantes, que se pueden seleccionar adecuadamente. De este modo, el sistema en lazo cerrado tiene la forma

$$\ddot{X} + c_1 \dot{X} + c_o X = 0$$

donde el comportamiento de las X se determina mediante la elección de las c_i 's.

Como X representa todo el movimiento del error de la barra, se diseña una ley de control para e . Esta ley está dada por

$$\bar{\tau} = c_{10} \dot{X} + c_{11} \dot{\theta} + c_{00} X + c_{01} \bar{\theta}$$

donde las $c_{ij} > 0$ son constantes.

Encontrando una relación entre las c_{ij} , este controlador puede reescribirse como

$$\bar{\tau} = -c_0 (X + c_2 \bar{\theta}) - c_1 (\dot{X} + c_2 \dot{\bar{\theta}})$$

donde el valor de la variable X se puede medir mediante el uso de un medidor de tensión (strain gage).

Los siguientes teoremas, que se encuentran en [70], prueban la estabilidad asintótica y la uniformidad exponencial respectivamente, del sistema (4.81) en lazo cerrado.

TEOREMA 4.3 *El sistema en lazo cerrado descrito por (4.81), es asintóticamente estable sujeto a condiciones iniciales suaves con sus derivadas de cuarto orden continuas a pedazos.*

Prueba: Ver [70].

TEOREMA 4.4 *El sistema en lazo cerrado descrito por (4.81), es uniformemente exponencialmente estable cuando las condiciones iniciales son suficientemente suaves.*

Prueba: Ver [70].

Para el cálculo de la trayectoria, se hace la suposición de que $y_e^d(t)$ es un polinomio en el tiempo y por lo tanto existe una $k \geq 0$ tal que $\frac{d^k}{dt^k} y_e^d = 0$. Como el torque se puede

fijar a cualquier valor, la trayectoria requiere cumplir la ecuación diferencial 4.81 con sus condiciones de frontera y la trayectoria del efector final dada.

La trayectoria seleccionada $y^d(t)$ dada $y_e^d(t)$ está dada por

$$y_e^d(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$$

entonces

$$y^d(t) = \frac{c_0 + c_1 t + c_2 t^2}{l} x + f(x)g(t)$$

donde

$$f(x) = -\frac{2\rho c_2}{lEI} \frac{x^5}{5!} + a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, \quad g(t) = 1$$

y las a_i cumplen las condiciones de frontera siguientes

$$\begin{aligned} y^d(0, t) &= 0 \\ y^{d'}(l, t) &= 0 \\ y^{d''}(l, t) &= 0 \\ y^d(l) &= c_0 + c_1 l + c_2 l^2 = y_e^d(l) \end{aligned}$$

Los parámetros c_0 y c_1 determinan como el tiempo promedio del comportamiento del eslabón, esto es de un sistema de segundo orden con X como la variable. El parámetro c_2 es visto como un término que absorbe parte de la energía vibracional. Es el que varía el torque para absorber esa parte de la energía vibracional. Para la medición de la variable auxiliar (ecuación 4.82) se puede utilizar un medidor de tensión continuo.

Los valores de los parámetros utilizados en simulación, se muestran a continuación:

| Parámetro | c_0 | c_1 | c_2 |
|-----------|-------|-------|-------|
| | 80 | 15 | .05 |

4.2.3 Controlador utilizando una aproximación numérica del medidor de tensión

El controlador propuesto por Shifman, presentado en la sección anterior, garantiza estabilidad del sistema en lazo cerrado, pero requiere la medición de la variable agregada dada por (4.82). Shifman propone el uso de un medidor de tensión continuo para el cálculo de esta variable. Otro método consiste en la colocación de pequeños eslabones flexibles en cascada a través de la estructura flexible, cada uno de ellos retroalimenta del anterior de datos referentes a la deflexión[49] ó diseñar un arreglo de medidores de tensión a través del eslabón y hacer la aproximación numéricamente.

Cuando se trabaja en ambientes no convencionales, el diseño de un robot flexible se realiza tomando en cuenta las características del material. Por esta razón, las especificaciones del material se conocen y contienen una proyección del comportamiento de éste en el ambiente en el que va a trabajar.

En esta sección, se presenta el diseño de un controlador que utiliza para su implementación las mediciones de las variables en la articulación y de la punta. Se le ha denominado "Controlador Strain Gage Aproximado (SGA)", ya que se requiere la aproximación numérica de una variable auxiliar. Este controlador tiene una forma similar al controlador de Shifman, pero en lugar de tomar la medición directa de strain gage continuo, lo hace mediante una aproximación numérica.

Como muestra del método, se utilizará la aproximación numérica de un strain gage para un eslabón flexible. El esfuerzo y las tensión está relacionado a la deflexión $w(x)$ de la barra por

$$\varepsilon_{xx} = \frac{z}{\rho} = z \frac{d^2 w}{dx^2}$$

como $y(x, t) = x\theta(t) + w(x, t)$, se tiene que el esfuerzo (strain) está dado por

$$\varepsilon_{xx} = zw'' = zy''$$

y la tensión es dada por $\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = Ezy''$. También

$$\varepsilon_{xx} \approx \frac{l_x - l_o}{l_o} = \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

y z es la distancia con respecto al eje neutral de la barra al punto de interés.

Como

$$y(x) = x\theta + w(x)$$

la ecuación de la variable auxiliar (4.82), está dada por

$$\int_0^l \int_{x_1}^l y(x_o) dx_o dx_1 = \frac{1}{3} l^3 \tilde{\theta} - \int_0^l p(x) y''(x) dx$$

donde $p(x) = \frac{1}{3} l^3 - \frac{1}{2} l^2 x + \frac{1}{6} x^3$.

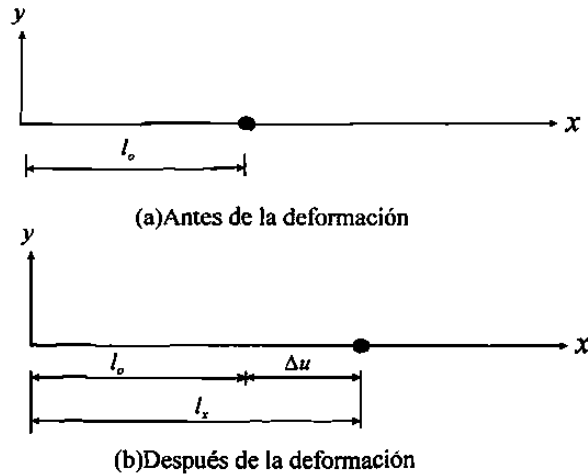


Figura 4.9. Medición del strain gage en un segmento.

Escogiendo como el ancho del strain gage $W(x) = 1/p(x)$ y sabiendo que

$$d \Delta_R(x) = k \frac{y''(x)}{W(x)} dx$$

obtenemos

$$\frac{1}{k} \int_0^l d \Delta_R(x) = \int_0^l p(x) y''(x) dx$$

Desarrollando la aproximación numérica de la integral del lado derecho de la ecuación anterior, se obtiene un valor para el intervalo de 0 a l . Hasta este punto, los errores que se presentan, son los errores de por parte del método numérico utilizado y por redondeo. Para mejorar esta aproximación, se utiliza la técnica de elementos finitos para dividir la barra en segmentos iguales, y en cada segmento aplicar la aproximación numérica.

Uno de los datos que se requieren es el dato de la medición de la punta¹⁴. Aplicando la técnica de elementos finitos, en forma similar a la que se presentó en el capítulo 2, la aproximación numérica en cada segmento de tiempo, en tiempo real está dado por

$$A_s = \frac{1}{3} l^3 \tilde{\theta} + \frac{l^5}{8l_0} - \frac{1}{8} l^4$$

¹⁴ En el robot flexible experimental, esta medición se realiza en tiempo real.