

Donde l_0 se considera una cantidad constante igual a la longitud de la barra y la l es medida en tiempo real durante la trayectoria de la barra a la posición deseada.

Al dividir la barra, tenemos que con 6 segmentos es mas que suficiente para aproximar toda la medición

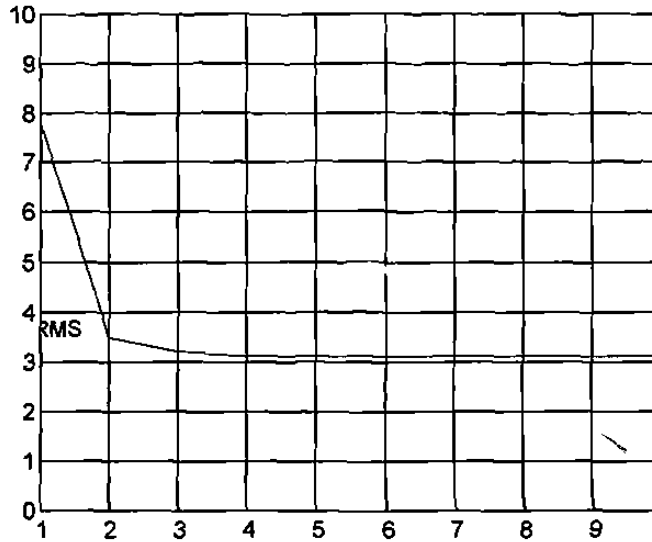


Figura 4.10. Error en aproximación según número de segmentos.

Los valores de los parámetros en la implementación experimental, son los mismos que se utilizaron en la simulación del controlador de Shifman, la razón de esto es comprobar el comportamiento del robot con las variables auxiliares obtenidas de aproximaciones numéricas. Estos parámetros se muestran a continuación:

Parámetro	c_0	c_1	c_2
	80	15	.05

4.3 Resumen

En este capítulo se presentaron los controladores diseñados para la evaluación experimental. Cuatro de ellos se diseñaron basándose en el modelo lineal obtenido por análisis modal. Este modelo se truncó a 3 modos para su implementación. Un controlador se diseñó en base a la técnica de perturbaciones singulares. Esta técnica divide al modelo en dos subsistemas, donde como subsistema lento se considera la parte rígida y como subsistema rápido la parte flexible del robot. Tiene como ventaja que la reducción del modelo se obtiene considerando

las constantes elásticas. La principal ventaja de los controladores basados en modelos de dimensión finita es que se pueden aplicar las técnicas de control lineal existentes y diseñar compensadores para suprimir los efectos de los modos altos. Como la supresión de estos modos no es exacta, aun queda mucho camino por investigar para la aplicación de estas técnicas a estructuras flexibles.

La segunda parte del capítulo se concentró en el diseño de controladores basados en un modelo infinito. Se les ha denominado así, ya que se derivan directamente del modelo original por lo que su principal ventaja es que conservan la estructura del modelo. El controlador de Yuan, es un ejemplo de un controlador que requiere sólo las mediciones de las variables en la articulación. La diferencia de éste con el controlador PD basado en modelo finito es que es aplicable para movimientos de ángulos grandes del robot flexible. La forma que tiene el controlador de Shifman, lo hace factible para aplicación real ya que la variable auxiliar se puede obtener de diversas maneras. La forma mas directa es por medio de un strain gage continuo. El controlador que se propone en este trabajo, es un controlador que utiliza las mediciones de las variables en la articulación y de la punta, que son las que generalmente se tienen disponibles en el robot. Requiere también de una variable auxiliar por lo que se llevó a cabo una aproximación numérica y se aplicó la técnica de elementos finitos para su obtención.

Todos estos controladores muestran un nuevo camino en el diseño de controladores para estructuras flexibles.

CAPITULO 5

Evaluación Experimental

En este capítulo se presentan los resultados experimentales de los controladores diseñados en el capítulo anterior. En forma inicial se presenta la descripción del equipo experimental en el cual se llevaron a cabo las pruebas y se muestran los modos obtenidos de los cálculos de las frecuencias. Finalmente se muestran las gráficas comparativas de los resultados en simulación con los resultados experimentales.

5.1 Descripción del Equipo

El esquema de funcionamiento del robot experimental se muestra en la figura 5.1. Este consta de una barra ó eslabón flexible cuyo material es de aluminio, ésta está fija en uno de sus extremos a una base en la que se encuentra un motor de corriente directa. Este motor aplica el torque al eslabón para su movimiento. Montada sobre el motor se encuentra una cámara con resolución de 0.014 cm/pixel, la función de ésta es detectar la posición del led que se encuentra en el otro extremo de la eslabón, en la punta. Esta detección se realiza en tiempo real durante el movimiento del eslabón. Al momento de que la cámara detecta la posición del led, se determina la deflexión de la punta. Estos datos son retroalimentados a una computadora 486 mediante una interface A/D (Análogo/Digital) y D/A (Digital Análogo). La función de la computadora PC 486 es la retroalimentación de datos y diseño del control, donde este control se implementa en lenguaje de programación C.

El equipo experimental del robot flexible en el eslabón con un grado de libertad se muestra en la figura 5.2.

El experimento consiste en realizar movimientos del robot flexible a $\pm n$ grados con respecto al origen (en este caso el centro, considerando ahí la referencia 0 grados).

Los parámetros del sistema son: Inercia de Cámara $0.002Kgm^2$, Longitud del eslabón $91.4cm$, Altura del eslabón $2.54cm$, Ancho del eslabón $0.3175cm$, Masa del eslabón $0.06Kg$, Inercia del eslabón $0.0042Kgm^2$, Rigidez Flexural $8Kgm^2/s^2$, Densidad Lineal $0.8Kg/m$. Un cuadro mas detallado de las especificaciones del robot experimental, suministrado por el

distribuidor, se encuentra en el apéndice E.

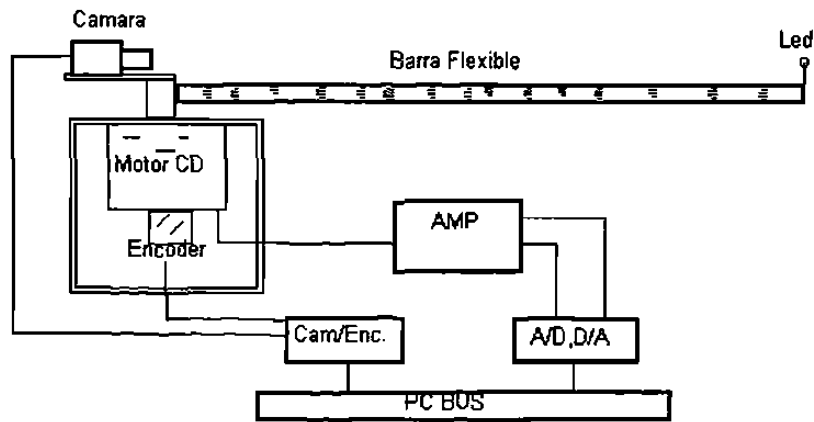


Figura 5.1. Esquema del Robot Flexible

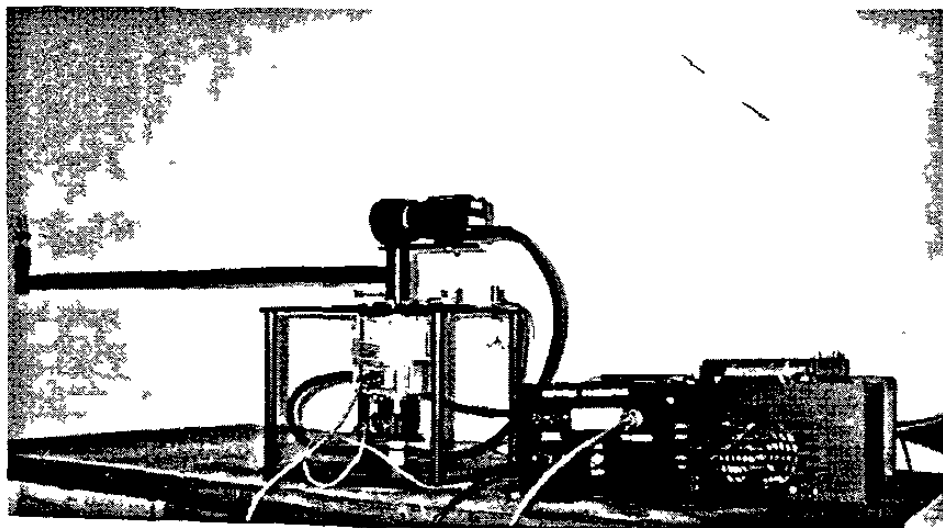


Figura 5.2. Robot Flexible Experimental

5.2 Proceso de Calibración

La salida de la cámara es una señal analógica que es proporcional a la deflexión de la fuente de luz relativa al eje central. La ganancia y el offset de la medición son ajustables a través de dos tornillos localizados en la cámara. La salida de la cámara se calibra para obtener la deflexión de la punta, para esto se requiere de un procedimiento para obtener la medición de la cámara en 13 puntos de deflexión equidistantes.

El procedimiento de calibración es el siguiente:

- 1.- Coloque un dispositivo para obtener la primera medición que es en el origen.
- 2.- Corra el programa de calibración para imprimir el voltaje muestreado usando A/D.
- 3.- Ajuste el offset hasta que la medición sea cero cuando la fuente esté en la posición del origen (cero).
- 4.- Mueva ahora a la primera posición equidistante y ajuste la ganancia hasta que el voltaje sea de 1.5 volts.
- 5.- Repita los pasos 4 y 5 hasta que las mediciones formen una línea recta como se muestra en la siguiente gráfica:

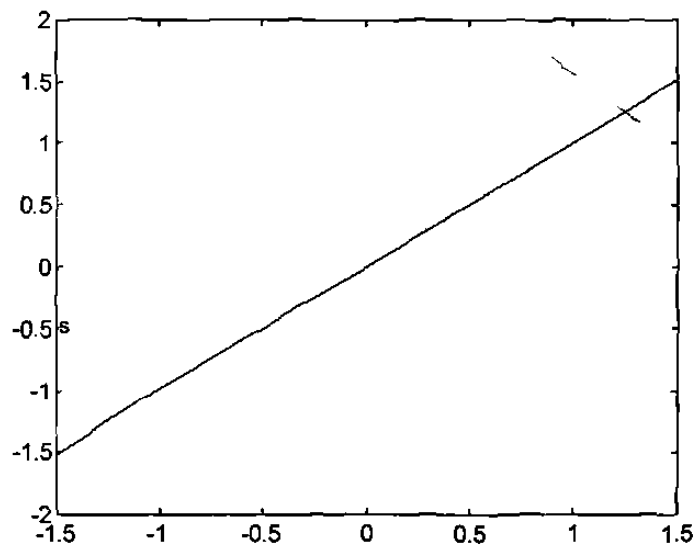


Figura 5.3a. Curva de calibración típica de la posición de la punta vs. voltaje medido.

5.3 Modos del Sistema

Para propósitos de simulación y de implementación se utilizaron tres modos. Para su cálculo, se requiere la ecuación dada por (3.27). Esto nos da los valores de los valores de frecuencia.

Se utilizó un algoritmo que se programó en Matlab para calcular estos valores. En la Figura (5.3b) se muestra en forma gráfica, como el algoritmo determina los valores que satisfacen la ecuación.

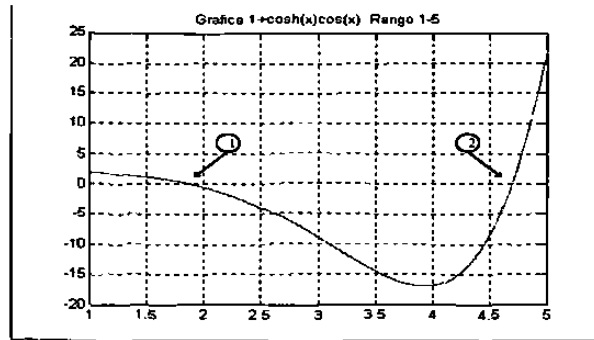


Figura 5.3b. Modos del sistema

La siguiente tabla muestra los modos calculados y los medidos experimentalmente en la estructura de robot flexible:

Modo	Frec. Calc.	Frec. Med.
1	2.11	1.9
2	13.29	13.1
3	37.21	33

Para la obtención de $\phi_i'(0)$, se utiliza la siguiente ecuación

$$\gamma_i = \frac{3 I_b}{L \lambda_i I_h}$$

donde $L = \beta l$ y $\lambda_i = \beta l / l$.

Tomando en consideración que de acuerdo a las especificaciones $I_b = 0.0042$, $I_h = 0.002$, la ecuación anterior resulta

$$\gamma_i = \frac{3 * 2.1 * l^3}{(\beta l)^6}$$

que corresponde a cada modo de frecuencia. Sustituyendo los valores de βl , que son los modos de frecuencia en la ecuación de solución modal dada por (3.37), se obtiene

Modo	Frecuencia	$\phi_i'(0)$	$\phi_i'(l)$
1	1.9	0.4424	-0.3743
2	13.29	0.000899	-0.6829
3	37.21	0.0000409636	-0.5776

5.4 Resultados de simulación y Experimentales

Las siguientes gráficas muestran una comparación de los resultados de simulación (línea Continua) y experimentales (línea punteada) de los controladores diseñados.

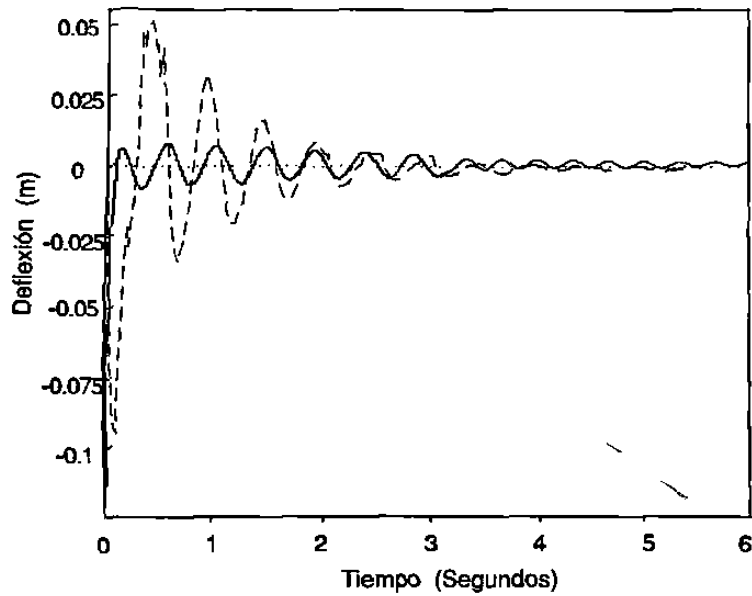


Figura 5.4 Controlador PD. Deflexión.

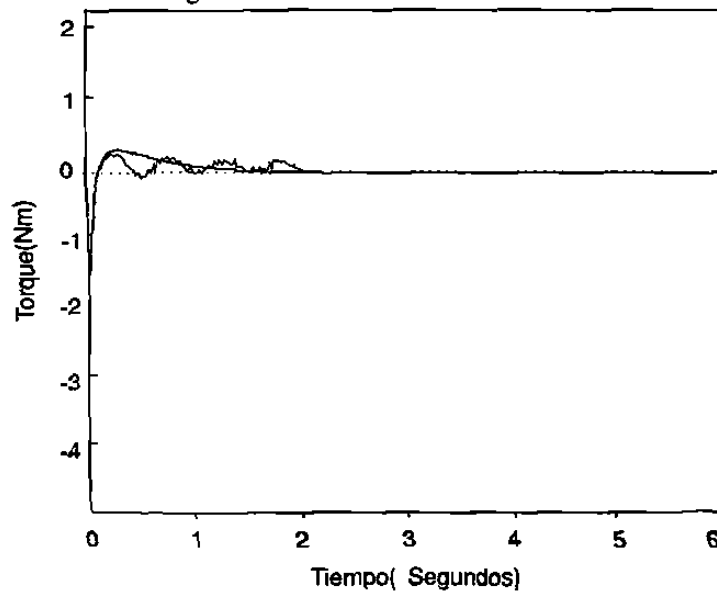


Figura 5.5. Controlador PD. Torque.

El controlador PD, muestra un máximo torque de aproximadamente 1 Nm., pero su respuesta en la deflexión del eslabón es oscilatoria. Hasta después de 5 segundos, la

deflexión es casi nula. Este controlador fue incluido como base de comparación para los otros controladores.

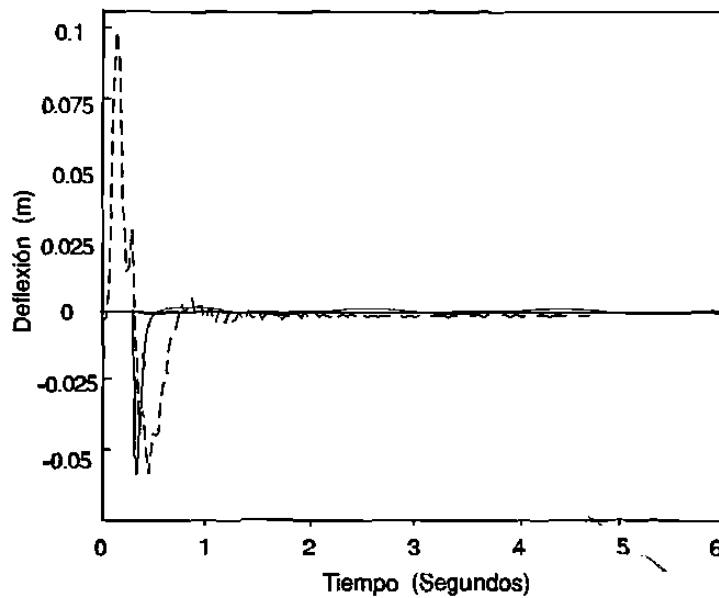


Figura 5.6 Controlador LQR. Deflexión.

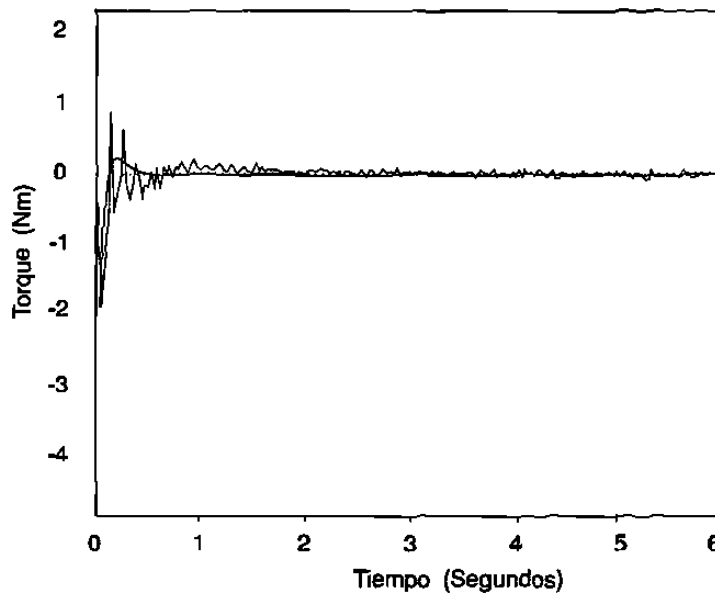


Figura 5.7. Controlador LQR. Torque.

El controlador LQR presenta un máximo torque de aproximadamente 1 Nm., pero su respuesta en la deflexión del eslabón es amortiguada en un tiempo menor que el controlador PD.

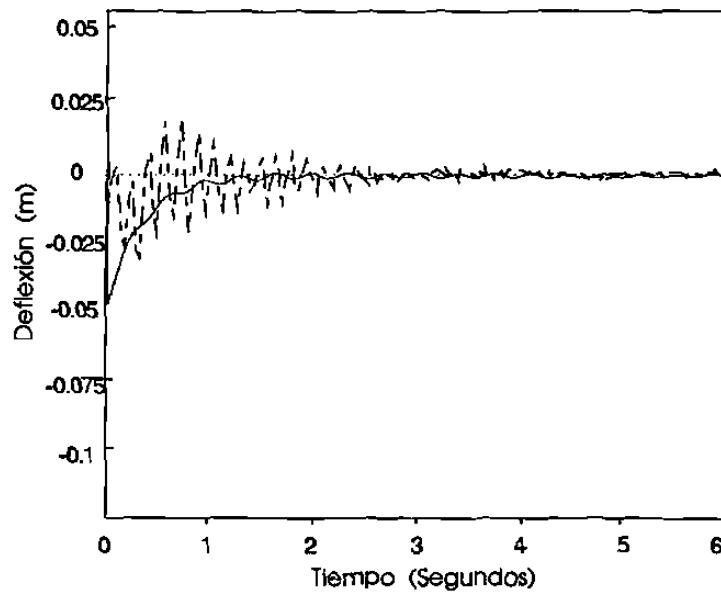


Figura 5.8. Controlador PS. Deflexión.

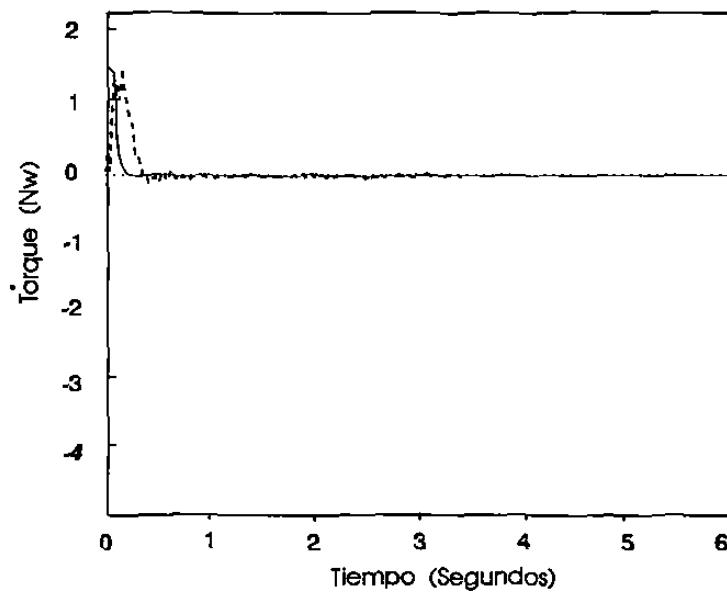


Figura 5.9. Controlador PS. Torque.

Este controlador PS presenta un máximo torque de aproximadamente 1.5 Nm., pero su respuesta en la deflexión del eslabón es amortiguada y en un tiempo menor que el controlador LQR.

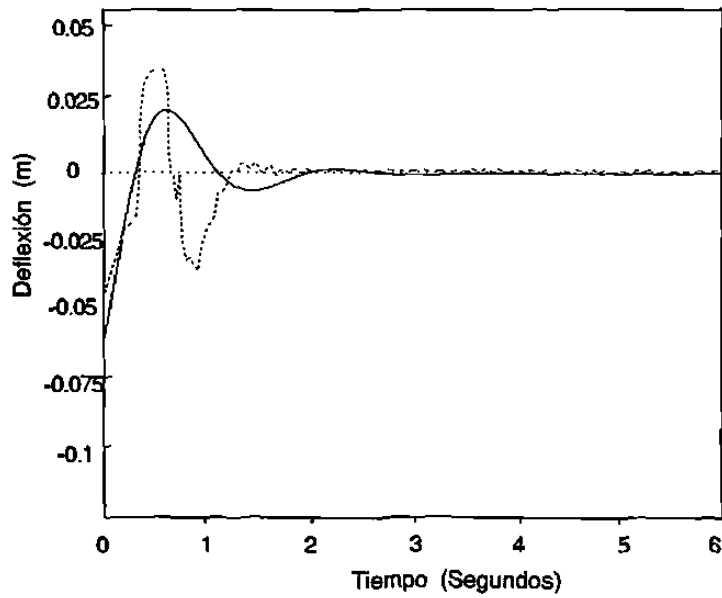


Figura 5.10 Controlador LQG/ H_{∞} . Deflexión.

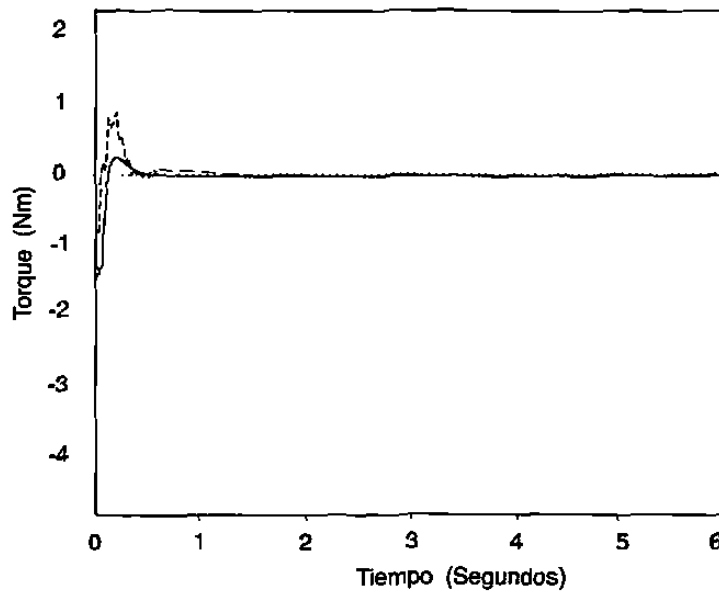


Figura 5.11. Controlador LQG/ H_{∞} . Torque.

El controlador LQG/ H_{∞} presenta un máximo torque de aproximadamente 1 Nm., pero su respuesta en la deflexión del eslabón es amortiguada en un tiempo mayor que el controlador PS.

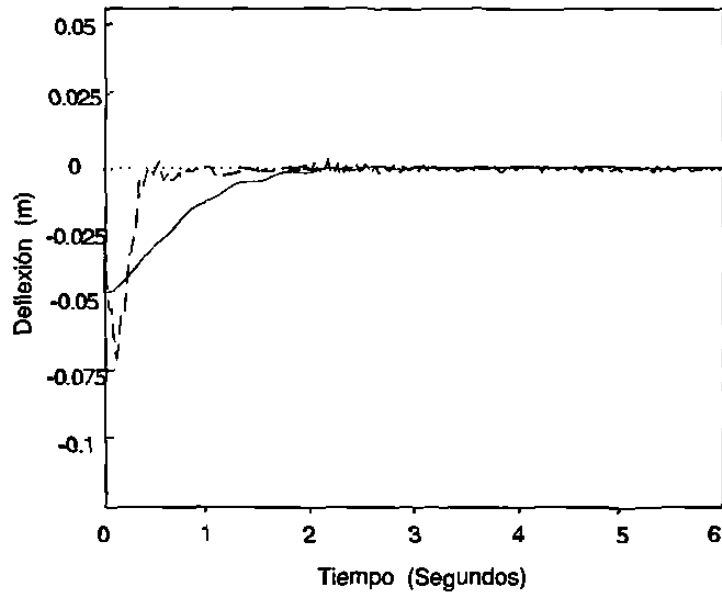


Figura 5.12. Controlador Pasivo. Deflexión.

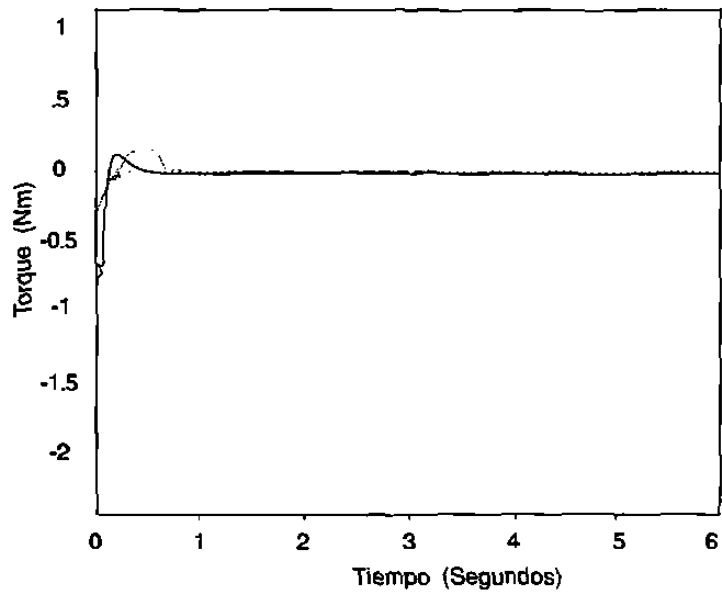


Figura 5.13. Controlador Pasivo. Torque.

El controlador Pasivo presenta un máximo torque de aproximadamente 0.5 Nm. y su respuesta en la deflexión del eslabón es amortiguada en un tiempo semejante al controlador PS. En comparación con la respuesta en deflexión del controlador PS, presenta una máxima deflexión de 0.075 contra 0.05 del controlador PS.

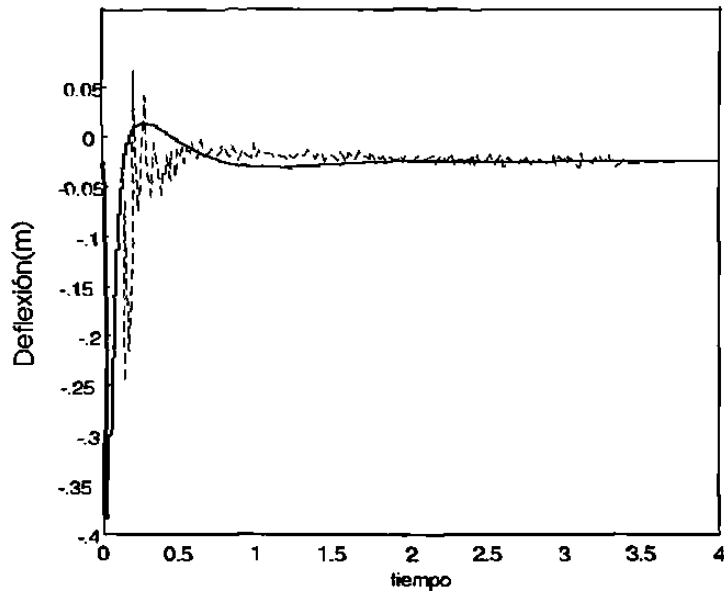


Figura 5.14. Controlador JPD. Deflexión.

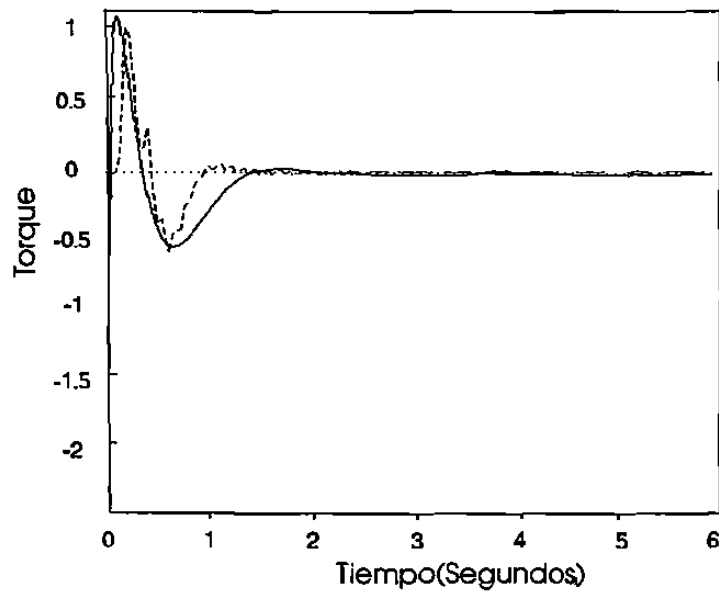


Figura 5.15. Controlador JPD. Torque.

El controlador JPD presenta un máximo torque de aproximadamente 1 Nm. y su respuesta en la deflexión del eslabón es amortiguada en un tiempo semejante al controlador PS. En comparación con la respuesta en deflexión del controlador PS, presenta una máxima deflexión de 0.35 contra 0.05 del controlador PS.

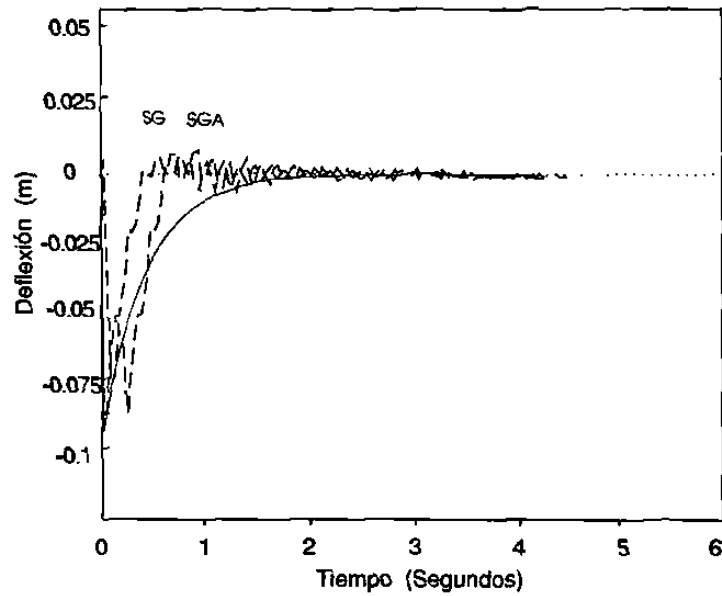


Figura 5.16. Controladores SG y SGA. Deflexión

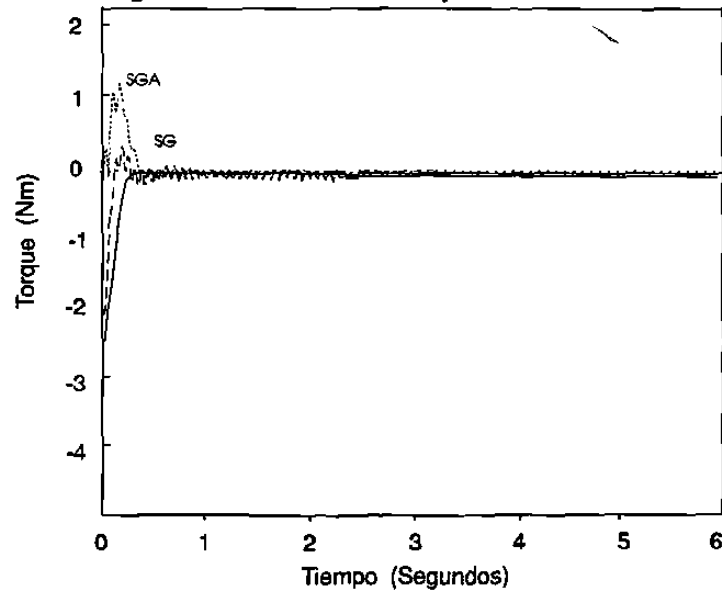


Figura 5.17. Controladores SG y SGA. Torque

El controlador SG presenta un máximo torque de aproximadamente 0.5 Nm. y su respuesta en la deflexión del eslabón es amortiguada en un tiempo semejante al controlador SGA. El controlador SGA muestra un máximo torque de 1 Nm. En comparación con la respuesta en deflexión del controlador PS, muestra una máxima deflexión de 0.07 contra 0.05 del controlador PS, pero la oscilación que se presenta en el controlador SGA es menor.

Conclusiones

Esta investigación ha tratado de contribuir al análisis del diseño del control de robots flexibles, mediante el estudio de dos estrategias. La primera se centra en el diseño de controladores basados en modelos de dimensión finita. La segunda en el diseño de controladores basados en el modelo PDE, denominado modelo infinito. Como método para demostrar el comportamiento de todos estos controladores, se desarrollaron simulaciones. También se aplicaron los mismos controladores a un robot flexible experimental.

En la primera estrategia, la reducción del orden del modelo PDE se obtuvo por truncamiento y por el método de perturbaciones singulares. Como ejemplo se diseñaron los controladores PD, el LQR, el PS, el LQG/ H_∞ y el Pasivo. Los resultados mostraron que:

- ▶ El controlador PD, con sensor/control colocado, no es eficiente en la supresión de las oscilaciones del eslabón.

- ▶ Los controladores LQR, PS y Pasivo, son una alternativa para cuando se tiene sensor/control no colocado. El más eficiente de éstos fue el de perturbaciones singulares, que necesitó un menor tiempo para controlar la deflexión de la punta y presentó menor deflexión.

- ▶ Los resultados cuando se utilizan las técnicas de LQG/ H_∞ muestran que la deflexión es amortiguada adecuadamente. Esta respuesta es similar a la observada por el controlador diseñado con técnicas de perturbaciones singulares. El torque requerido es mayor, pero esta desventaja puede anularse encontrando unos valores de peso más adecuados.

En la segunda estrategia, se diseñaron tres controladores. El primero se retroalimenta sólo de la medición de variables de la base. El segundo utiliza un strain gage para la medición de las variables del eslabón. El tercero se diseñó mediante una aproximación numérica de una variable auxiliar. Esta aproximación se basó en los datos de la posición de la punta.

Los resultados mostraron que:

- ▶ Estos controladores logran suprimir las oscilaciones en un tiempo semejante al de los controladores LQR, PS.

- ▶ En el primer controlador, el torque fue mayor al de los otros dos controladores.

- ▶ El segundo controlador requiere poco torque y su variable de salida es controlada en forma precisa. Sin embargo, el hecho de necesitar un strain gage en su eslabón, lo hace inutilizable en estructuras largas.

- ▶ El tercer controlador es similar al segundo, aunque requiere de un torque mayor. Como se retroalimenta de la medición de la posición de la punta, tiende a ser un opción viable para

el control de estructuras flexibles largas.

El estudio del diseño de robots flexibles sigue en proceso. Las conclusiones emitidas son valiosas para un mejor entendimiento del campo y sirven como punto de partida para trabajos futuros.

Bibliografía

- [1] Ahmed S., *"Why characterise Flexible Structures" A Radarsat Project Perspective*, American Mathematical Society. Vol. 2, 1993.
- [2] Aldridge H., Juang J., *"Virtual Passive Controller for Robot Systems Using Joint Torque Sensors"*, NASA Technical Memorandum 110316. January 1997.
- [3] Aoustin, Chevareau, Glumineau, Moong, *"Experimental Results for the End-Effector Control of a single Flexible Robotic Arm"*, IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol2, No. 4, Dec. 1994.
- [4] Astrom K., Wittenmark B. *"Computer Controlled Systems"*, Prentice Hall, 1990.
- [5] Balas G. Doyle J. *"Robustness and Performance Trade-Offs in Control Design for Flexible Structures"*. IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 2, No. 4, December 1994.
- [6] Banavar R., Dominic P. *"An LQG/ H_{∞} Controller for a Flexible Manipulator"*. IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol.3, No.4, December 1995.
- [7] Bayo Eduardo, *"A Finite-Element Approach to Control the End-Point of a Single-Link Flexible Robot"*, Journal of Robotics Systems, 4(1), 63-75 (1987).
- [8] Barbieri Enrique, *"Single-Input/Single-Output Transfer Functions for a flexible Slewing Link"*, Journal of Robotics Systems. 10(7), 913-929, 1993.
- [9] Boulet B., Francis B., Hughes P. Hong T., *"Uncertainty Modeling and Experiments in H_{∞} Control of Large Flexible Space Structures"*, IEEE Transactions on Control Systems Technology. Vol. 5, No. 5, September 1997.
- [10] Cannon R., Schmitz E., *"Initial Experiments on the End-Point Control of a flexible One-Link Robot"*, The International Journal of Robotics Research, Vol 3, No.3, pp. 62-75, Fall 1984.
- [11] Canudas C. Siciliano B. Bastin G. (Eds) *"Theory of Robot Control"*. Springer Verlag 1996.
- [12] Carusone J., D'Eleuterio G. *"Tracking Control for End-Effector Position and Orientation of Structurally Flexible Manipulators"*, Journal of Robotics Systems 10 (6), 847-870 (1993).
- [13] Curtain R., Pritchard A., *"Infinite Dimensional Linear Systems Theory"*, Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer Verlag, 1978.
- [14] Chalhoub N., Ulsoy A., *"Control of a Flexible Robot Arm: Experimental and Theoretical Results"*, Journal of Dynamics Systems, Measurement and Control, Vol. 109, pp. 299-309.

Dec. 1987

- [15] Chang P. Jayasuriya S. "An Evaluation of Several Controller Synthesis Methodologies Using a Rotating Flexible Beam as a Test Bed", Transactions of the ASME, 360/Vol. 117, September 1995.
- [16] Charles C., Jong S. Leondes C. "Adaptive Control for the Space Station", IEEE Control Systems Magazine, February 1987.
- [17] Chapnik B.V., Heppler G.R., and Aplevich J.D., "Modeling Impact on a One-Link Flexible Robotic Arm", IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol 7, pp 479-488, 1991.
- [18] Chedmail P., Glumineau A. Bardiaux J., "Plane Flexible Robot Modelization and Application to the Control of an Elastic Arm", ICAR 87, Versailles, 13-17 October 1987.
- [19] Choi B., Krishnamurthy K., "Unconstrained and Constrained Motion Control of a Planar Two-Link Structurally Flexible Robotic Manipulator" Journal of Robotics Systems 11(6), 557-571 (1994).
- [20] Daafouz J., Garcia G. Bernussou J. "Robust Control of a Flexible Robot Arm Using Quadratic d-Stability Approach". IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 6, No. 4, July 1998.
- [21] Dally J. "Experimental Stress Analysis", Mc. Graw Hill Company, 1987.
- [22] Damaren C., "Modal Properties and Control System Design for Two-Link Flexible Manipulators". The International Journal of Robotics Research. Vol 17, No. 6, June 1998, pp. 667-678.
- [23] Doebelin E., "Measurements Systems", International Student Edition. Mc. Graw Hill, 1975.
- [24] Dorato P., Abdallah C., Cerone V. "Linear Quadratic Control. An Introduction". Prentice Hall. 1995.
- [25] Fukuda T., "Flexibility Control of Elastic Robotics Arms", Journal of Robotics Systems, 2 (1), 73-88 (1985).
- [26] Gawronski W. "Balanced Control of Flexible Structures", Lecture Notes in Control and Information Series 211. Springer Verlag 1996.
- [27] Geniele H. Patel R.V. Khorasani K. "End-Point Control of a Flexible-Link Manipulator: Theory and Experiments". IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 5, No. 6, November 1997.
- [28] Green M., Limebeer D., "Linear Robust Control", Prentice Hall, 1996.

- [29] Gross E., Tomizuka M., "Experimental Flexible Beam Tip Tracking Control with a Truncated Series Approximation to Uncancelable Inverse Dynamics", IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 2. No. 4, December 1994.
- [30] Hastings G. Book W. "A Linear Dynamic Model for Flexible Robotic Manipulators", IEEE Control Systems Magazine. February 1987.
- [31] Heppler G.R., "On Dynamic Mass Capture by Flexible Robots", Fields Institute Communications. Vol. 2, 1993.
- [32] Herrera M., Castro R., Glumineau A. "Passivity Based Control for tip position Regulation of a Flexible Link", IASTED International Conference of Robotics. June 14-17,1995, Cancún, México.
- [33] Hu F.L., Ulsoy A.G., "Dynamic Modeling of Constrained Flexible Robots arms for Controller Design", Transactions of the ASME, vol 116, pp 56-65, 1994.
- [34] Hughes Peter C. "Space Structure Vibration Modes, How Many Exist? Which Ones Are Important?", IEEE Control Systems Magazine, Feb. 1987. \
- [35] Isidori Alberto. "Nonlinear Control systems". Second Edition, Springer Verlag.
- [36] Jacobs, Kilduff, "Enginnering Materials Technology", Prentice Hall Inc., 1985.
- [37] Kelly J., Ydstie E. "Adaptive H_∞ Control with Application to Systems with Structural Flexibility". IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 42, No. 10, October 1997.
- [38] Kelkar A., Joshi S. "Control of Nonlinear Multibody Flexible Space Structures", Lecture Notes in Control and Information Sciences 221. Springer Verlag 1996.
- [39] Khalil H., "Nonlinear Systems", Second Edition, Prentice Hall, 1996
- [40] Konno A., Uchiyama M., Kito Y.,Murakami M. "Configuration-Dependent Vibration Controllability of Flexible-Link Manipulators". The International Journal of Robotics Research, Vol. 16, No. 4, August 1997, pp. 567-576.
- [41] Krasnov M.I. , Makarenko G.I., Kiseliov. A.I., "Cálculo Variacional". Editorial Mir, Moscú, 1976
- [42] Lagnese J.E. , Leugering G, Schmidt E.J.P.G. "Modeling, Analysis and Control of Dynamic Elastic Multi-Link Structures". Ed. Birkhäuser, 1994.
- [43] Lammerts I., Veldpaus F., Van de Molengraft M., Kok J. "Adaptive Computed Reference Computed Torque Control of Flexible Robots", Journal of Dynamics Systems, Measurement, and Control. March 1995, Vol. 117/31

- [44] Lee S., Mote C., *"Vibration Control of an Axially Moving String by Boundary Control"*, Transactions of the ASME 66/Vol. 118, March 1996.
- [45] Lewis F. L., Vendegrift M. *"Flexible Robot Arm Control by a Feedback Linearization/Singular Perturbation Approach"*, 1050-4729/93, IEEE 1993
- [46] Lim K.B. *"A Disturbance Rejection Approach to Actuator and Sensor Placement"*, NASA Report, NASA-97-jgcdz, 1997.
- [47] Lin J., Lewis F.L. *"Enhanced Measurement and Estimation Methodology for Flexible Link Arm Control"*, Journal of Robotics Systems 11(5), 367-385 (1994)
- [48] Lin J., Lewis F.L. *"Improved Measurement / Estimation Technique for Flexible Link Arm Control"*, CDC 1993. San Antonio Tx., December 1993.
- [49] Love L., Kress R., Jansen J. *"Control for a Hydraulically Actuated Flexible-Prismatic Link Robot"*. IEEE Control Systems. Vol. 18. No. 1, February, 1998.
- [50] Luo Z., Guo B., *"Shear Force Feedback Control of a Single-Link Flexible Robot with a Revolute Joint"*, IEEE Transactions on Automatic Control. Vol. 42, No. 1, January 1997.
- [51] Matsuno F., Murachi T. Sakawa Y., *"Feedback Control of Decoupled Bending and Torsional Vibrations of Flexible Beams"*, Journal of Robotics Systems 11(5) 341-353 (1994)
- [52] Matsuno F., Yamamoto K., *"Dynamic Hybrid Position/Force Control of a Two Degree of Freedom Flexible Manipulator"*, Journal of Robotics Systems 11(5), 355-366 (1994).
- [53] Milford R., Asokanthan S. *"Experimental On-Line Frequency Domain Identification and Adaptive Control of a Flexible Slewing Beam"*, Transactions of the ASME, 58/Vol. 118, March 1996.
- [54] Murray R. , Li Z., Sastry S., *"A mathematical Introduction to Robotic Manipulation"* CRC Press, 1993.
- [55] Oakley C. Cannon Jr. R., *"Anatomy of an Experimental Two-Link Flexible Manipulator Under End-Point Control"*, CH2917-3/90/0000-0507. 1990 IEEE.
- [56] Ower J.C., Van de Vegte J., *"Classical Control Design for a Flexible Manipulator: Modeling and Control System Design"* IEEE Journal of Robotics and Automation. Vol. RA-3, No. 5, October 1987.
- [57] Qian W., Ma H., *"A New Controller Design for a Flexible One-Link Manipulator"*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol 37, No. 1, January 1992.
- [58] Quanser C., Apkarian Jacob, *"A Comprehensive and Modular Laboratory For Control"*

Systems Design and Implementation". Quanser Consulting 1994

- [59] Rao J.S. *"Advanced Theory of Vibration"*, Ed. John Wiley and Sons, 1992.
- [60] Rossi M. Wang D. Zuo R., *"Issues in the Design of Pasive Controllers for Flexible-Link Robots"*, The International Journal of Robotics Research, Vol 16, No.4, August 1997, pp. 577-588.
- [61] Rovner D., Cannon Jr. R, *"Experiments Toward On-Line Identification and Control of a Very Flexible One-Link Manipulator"*, The International Journal of Robotics Research, Vol. 6 No. 4, Winter 1987.
- [62] Singhose W., Pao L., *"A Comparison of Input Shaping and Time Optimal Flexible-Body Control"*, 1997. MIT.
- [63] Saberi A., Chen B., Sannuti P., *"Loop Transfer Recovery: Analysis and Design"*, Springer Verlag, 1993.
- [64] Sakawa Y, Matsuno F., Fukushima S. *"Modeling and Feedback Control of a Flexible Arm"*, Journal of Robotics Systems, 2(4), 453-472 (1985)
- [65] Scott Peter B., *"The Robotics Revolution"*, Basil Blackwell, 1984.
- [66] Siciliano B., Book W. *"A singular perturbation approach to control of Lightweight Flexible Manipulator"*, The International Journal of Robotics Research, Vol 7, No. 4, pp. 79-90, 1988.
- [67] Siciliano B., Yuan B., Book W., *"Model Reference Adaptive Control of a One Link Flexible Arm"*, 25th CDC Athens, Greece, December 1986.
- [68] Sudipto Sur, PHD Thesis *"Robotic Manipulation with Flexible Link Fingers"*. California Institute of Technology. Pasadena, California, 1997.
- [69] Shifman Jeffrey J. , *"Lyapunov Functions and the control of the Euler-Bernoulli Beam"*, International Journal of Control, vol 57, pp971-990, 1993.
- [70] Shifman J. *"The Control Of Flexible Robots"*, PHD Thesis, Churchill College., March 1991.
- [71] Skelton R. *"Dynamics Systems Control"*, John Wiley & Sons, 1988.
- [72] Strang G., *"An Analysis of the Finite Element Method"*, Prentice Hall, 1973.
- [73] Thomson William T. *"Teoría de Vibraciones. Aplicaciones"*. Editorial Prentice Hall. Internacional. 1983.
- [74] Torfs D., Vuerinckx R., Swevers J., Schoukens J., *"Comparison of Two Feedforward Design Methods Aiming at Accurate Trajectory Tracking of the End Point of a Flexible Robot Arm"*, IEEE Transactions on Control Systems Technology. Vol. & No. 1, January 1998.

- [75] Vandegrift M. Lewis F., Zhu S., "*Flexible-Link Robot Arm Control by a Feedback Linearization/Singular Perturbation Approach*", Journal of Robotics Systems 11(7), 591-603 (1994).
- [76] Vandegrift M., Lewis F. "*Improved Reduced-Order Model for Control of Flexible-Link Robots*", CDC 1993. San Antonio Tx., December 1993.
- [77] Wang D., Vidyasagar M. "*Passive Control of a Stiff Flexible Link*", International Journal of Robotics Research. Vol. 11, No. 6, December 1992.
- [78] Wang D. "*Comparison of Control Strategies for the Single Flexible Link*". 1993 American Mathematical Society, 1069-5265/93
- [79] Wang J. Lu S., Hsu C., "*Output Feedback Control of a Flexible Robot Arm*", 25th. CDC, Athens, Greece, December 1986.
- [80] Yeung K.S., Chen Y.P., "*Regulation of a One-Link Flexible Robot Arm Using Sliding-Mode Technique*", International Journal of Control, 1989, Vol. 49, No. 6, 1965-1978
- [81] Yigit A., "*On the stability of PD Control for a two-link Rigid-Flexible Manipulator*", Transactions of the ASME, vol 116, pp 208- 215, 1994
- [82] Yuan King, "*Regulation of a geometrically exact flexible beam manipulator*", Systems & Control Letters 25 (1995) 9-12.
- [83] Yuan K., Hu C., "*Nonlinear Modeling and Partial Linearizing Control of a Slewing Timoshenko-Beam*", Journal of Dynamics Systems, Measurement and Control. March 1996, Vol. 118/75.

Apéndice A

Preliminares Matemáticos

DEFINICION 5.1 Una Función continua $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es localmente positiva definida si para algún $\epsilon > 0$ y una función continua estrictamente creciente $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$V(0, t) = 0 \quad y \quad V(x, t) \geq \alpha(\|x\|) \quad \forall x \in B_\epsilon, \forall t \geq 0.$$

Una función positiva definida es localmente una función positiva con la condición adicional de que $\alpha(p) \rightarrow \infty$ como $p \rightarrow \infty$.

DEFINICION 5.2 Una Función decreciente es una función continua $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ si para algún $\epsilon > 0$ y alguna función estrictamente creciente $\beta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$V(x, t) \leq \beta(\|x\|) \quad \forall x \in B_\epsilon, \forall t \geq 0$$

TEOREMA 5.1 (Teorema de Lyapunov para estabilidad). Considere una función no-negativa $V(x, t)$, $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ teniendo como derivada a \dot{V} a través de las trayectorias del sistema

$$\dot{x} = f(x, t) \quad x(t_0) = 0 \quad x \in \mathbb{R}^n$$

entonces,

1) Si V es positiva definida localmente y $\dot{V} \leq 0$ localmente en x para todo t , entonces el origen del sistema es localmente estable en el sentido de Lyapunov.

2) Si V es localmente positiva definida y decreciente, y $-\dot{V}$ es localmente positiva definida, entonces el origen del sistema es uniformemente asintóticamente estable localmente.

3) Si V es localmente positiva definida y decreciente, y $-\dot{V}$ es positiva definida, entonces el origen del sistema es globalmente uniformemente asintóticamente estable.

A V se le denomina función de Lyapunov para el sistema.

DEFINICION 5.3 (Principio de Invariancia de La Salle). Sea $V(x)$, $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función positiva definida localmente tal que en un conjunto compacto $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq c\}$, $\dot{V}(x) \leq 0$. Definiendo

$$S = \{x \in \Omega_c : \dot{V}(x) = 0\}$$

entonces, como $t \rightarrow \infty$, la trayectoria $s(t, x_0, t_0)$ tiende al conjunto mas grande invariante en S . En particular si S contiene solamente al conjunto invariante $x = 0$, entonces 0 es asintóticamente estable.

Apéndice B

Coeficientes para una barra

Coeficientes para una barra (Long slender rod). Una solución bien conocida a la ecuación (3.57) es

$$u(x, t) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \phi_{\alpha}(x) \eta_{\alpha}(x)$$

donde

$$\ddot{\eta}_{\alpha} + \omega_{\alpha}^2 \eta_{\alpha} = \int_0^l \phi_{\alpha}(x) f(x, t) dx$$

$$\phi_{\alpha} = (\rho l)^{\frac{1}{2}} [\cosh \lambda_{\alpha} \xi - \cos \lambda_{\alpha} \xi] - k_{\alpha} (\sinh \lambda_{\alpha} \xi - \sin \lambda_{\alpha} \xi)$$

$$\lambda_{\alpha} = \frac{\rho \omega_{\alpha}^2 l^4}{EI} \quad ; \quad \xi = \frac{x}{l}$$

$$k_{\alpha} = (\sinh \lambda_{\alpha} - \sin \lambda_{\alpha}) / (\cosh \lambda_{\alpha} + \cos \lambda_{\alpha})$$

Las frecuencias naturales son calculadas de la solución numérica de la ecuación trascendental

$$1 + \cos \lambda_{\alpha} \cosh \lambda_{\alpha} = 0$$

Los modos "Shape" de la ecuación (3.57), satisfacen las condiciones de ortogonalidad

$$\int_0^l \phi_{\alpha}(x) \phi_{\beta}(x) dx = 0 \quad \alpha \neq \beta$$

También la ecuación (3.57), satisface la condición de normalización

$$\int_0^l \phi_{\alpha}^2 dm = \rho l \int_0^l \phi_{\alpha}^2 d\xi = 1$$

En vibración libre, la fuerza y el torque en la barra en 0 son:

$$F(t) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} p_{\alpha} \ddot{\eta}_{\alpha}$$

$$G(t) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} h_{\alpha} \ddot{\eta}_{\alpha}$$

donde p_α y h_α son los coeficientes de la estructura dados por

$$p_\alpha = \int \phi_\alpha dm = \rho l \int_0^l \phi_\alpha d\xi = 2(\rho l)^{\frac{1}{2}} k_\alpha / \lambda_\alpha$$

$$h_\alpha = \int x \phi_\alpha dm = \rho l^2 \int_0^l \xi \phi_\alpha d\xi = 2(\rho l^3)^{\frac{1}{2}} / \lambda_\alpha^2$$

Apéndice C

Teoría de Timoshenko

Como complemento, se describe en esta tesis, la teoría desarrollada por Timoshenko. Esta teoría asume que la deformación de la barra solamente es debida al cortado y que el elemento vertical antes de la deformación permanece vertical después de la deformación y se mueve a una distancia ω en la dirección transversal z . El campo de desplazamiento es entonces dado por

$$\begin{aligned}u_x &= 0 \\u_y &= 0 \\u_z &= \omega(x, t)\end{aligned}$$

Los elementos tangenciales a la línea central de la barra están sometidos a una rotación $\beta(x, t)$, mostrada en la figura 2.3b, que claramente tiene un ángulo de corte ψ . Las deformaciones correspondientes están dadas por $\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\omega'$ que en reposo tiene un valor $\varepsilon = 0$.

El esfuerzo consiste de sólo un componente $\tau_{xz} = G\omega'$, donde G es el módulo de cortado. Con estos datos se puede continuar para derivar las ecuaciones de la barra sujeta puramente a la fuerza de cortado con un procedimiento similar al anterior. En los casos reales, se sabe que una componente significativa surge durante la deformación, por lo que se analizan los efectos combinados de las componentes por cortado y las componentes dadas en la teoría Euler-Bernoulli.

Se asumen, entonces, los siguientes desplazamientos

$$\begin{aligned}u_x &= -z\psi(x, t) = -z\{\omega' - \beta(x)\} \\u_y &= 0 \\u_z &= \omega(x, t)\end{aligned}$$

La pendiente total de la deflexión de la barra, consiste de dos partes: Una debida al curvado denotada por $\psi(x)$ y la otra debida al corte denotada por $\beta(x)$. El desplazamiento axial de un punto a una distancia z de la línea central es debido solamente a la pendiente de curvado.

El campo de desplazamiento es entonces dado por

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= -z\psi' \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2}(\omega' - \psi) \\ \varepsilon &= 0, \text{ en reposo}\end{aligned}$$

Los esfuerzos están dados por

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= -Ez\psi' \\ \tau_{xz} &= k'G(\omega' - \psi) \\ \tau &= 0, \text{ en reposo}\end{aligned}$$

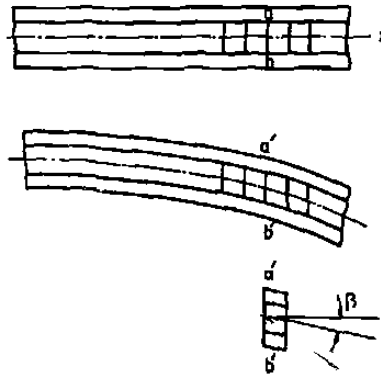


Figura 2.3a. Deflexión de la barra

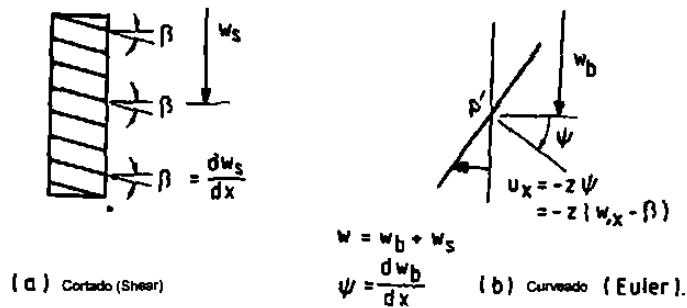


Figura 2.3b. Curvado y Cortado

La energía potencial es dada por

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \{EI(\psi')^2 + k'AG(\omega' - \psi)^2\} dx$$

La contribución de energía cinética del eslabón, está definida como

$$T_l = \frac{1}{2} \int_0^l (\rho A \dot{\omega}^2 + \rho I \dot{\psi}^2) dx$$

El trabajo realizado por la fuerza externa se denota por

$$\int_0^l q\omega dx$$

Al aplicar el principio de Hamilton, se obtiene

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} \int_0^l \{EI(\psi')^2 + k' AG(\omega' - \psi)^2\} dx - \frac{1}{2} \int_0^l (\rho A \dot{\omega}^2 + \rho I \dot{\psi}^2) dx - \int_0^l q\omega dx \right] dt = 0$$

Mediante el cálculo de la variación de esta expresión, se obtienen las ecuaciones diferenciales del eslabón, descritas por

$$\begin{aligned} -\{k' AG(\omega' - \psi)\}' + \rho A \ddot{\omega} &= q \\ -EI\psi'' - k' AG(\omega' - \psi) + \rho I \ddot{\psi} &= 0 \\ k' AG(\omega' - \psi) \delta\omega_{[0,l]} &= 0 \\ EI\psi' \delta\omega_{[0,l]} &= 0 \end{aligned}$$

Apéndice D

Medidor de Tensión Resistivo

Uno de los dispositivos que se utilizan para la medición de posición en un eslabón, es el medidor de tensión, denominado Strain Gage. En esa sección se presenta un análisis medidor de tensión resistivo, el cual está basado en [23]. Considere un conductor de área transversal uniforme A_T y longitud L , compuesto de un material con resistividad ρ . La resistencia R del conductor es dada por

$$R = \frac{\rho L}{A_T} \quad (D.1)$$

Si este conductor es sometido a compresión o tensión, su resistencia cambiará debido a los cambios dimensionales (longitud y área transversal). La resistencia también cambiará debido a la propiedad de materiales denominada *piezoresistencia*, que indica la dependencia de la resistividad ρ en las tensiones mecánicas.

Para encontrar como el cambio, denominado dR , en R depende de los parámetros básicos, se deriva la ecuación D.1, lo que resulta

$$dR = \frac{A_T(\rho dL + Ld\rho) - \rho L dA_T}{A_T^2} \quad (D.2)$$

Como el volumen es dado por $V = A_T L$, al calcular su derivada se obtiene

$$dV = A_T dL + L dA_T$$

la cual es igual a

$$dV = L(1 + \epsilon)A_T(1 - \nu)^2 - A_T L \quad (D.3)$$

donde ϵ es la tensión unitaria y ν es la razón de Poisson. Dado que ϵ es pequeña, se puede hacer la siguiente aproximación

$$(1 - \nu)^2 \approx 1 - 2\nu\epsilon$$

aplicando la ecuación anterior, D.3 resulta

$$dV = A_T L \epsilon (1 - 2\nu) = A_T dL + L dA_T$$

y como $\epsilon = \frac{dL}{L}$, entonces

$$dV = A_T dL (1 - 2\nu) = A_T dL + L dA_T$$

de donde

$$-2vA_T dL = L dA_T$$

Al sustituir este resultado en D.2, se obtiene

$$dR = \frac{\rho A_T dL + L A d\rho + 2v\rho A_T dL}{A_T^2}$$

y por lo tanto

$$dR = \frac{\rho dL(1 + 2v)}{A_T} + \frac{L d\rho}{A_T}$$

Al dividir esta ecuación sobre D.1, resulta

$$\frac{dR}{R} = \frac{dL}{L}(1 + 2v) + \frac{d\rho}{\rho}$$

Por lo que el factor de medición, denominado Gage Factor, está dado por

$$\frac{dR/R}{dL/L} = \underbrace{1}_{\text{Cambio en la resistencia debido al cambio de longitud}} + \underbrace{2v}_{\text{Cambio en la resistencia debido al cambio en el área}} + \underbrace{\frac{d\rho/\rho}{dL/L}}_{\text{Cambio en la resistencia debido al efecto piezoresistivo}}$$

Entonces, si el factor de medición se conoce, la medición de dR/R , permite la medición de la tensión $dL/L = \epsilon$. Este es el principio de un medidor resistivo de tensión.

El término $\frac{d\rho/\rho}{dL/L}$ también puede ser expresado como $\pi_1 E$, donde π_1 es el coeficiente longitudinal piezoresistivo y E es el módulo de elasticidad. La propiedad del material π_1 puede ser positivo o negativo. La razón de Poisson está siempre entre 0 y 0.5 para todos los materiales.

Apéndice E

Especificaciones del Robot Experimental

Las siguientes especificaciones fueron suministradas por el distribuidor.

Camera	EG&G Reticon Model 1911 KKN, 2048 pixel linear CCD. 13 micrometer per pixel at image end. Resolution when light source is 1 metre away: 0.014cm. (.036in.) per p
Camera/Encoder Board	Eight bit PC bus Quanser Consulting board. Camera scan rate: 3.5 MHz. Led Position sampling rate: 1682Khz. Maximum encoder pulse frequency: 1.75Mhz. Encoder counters: 16 bit.
Lens	Nikon 85mm F1.4
Motor and Encoder	Direct drive PMI permanent magnet DC motor. Peak Torque: 13.4 Nm (118 Lb-in). Stall Torque:1.22 Nm (10.8 Lb-in) Continuous Stall Current: 7.52 Amps. Cogging Torque: ZERO. Torque Constant: 0.17Nm/Amp (1.5 Lb-in/Amp) Armature resistance: 0.73 Ohm. Encoder Resolution: 0.03 degrees per count
Flexible beam	Anodized aluminum. Width: 2.54cm. Thick: 0.3175 cm. Long: 91.4 cm
Amplifier Module	4 quadrant PWM current mode amplifier. Gain: 2 Amps per volt. Output Current: 10 Amps. 20 Amps peak. Bandwidth: 500 Hz. Deadband: ZERO. Self Protected.
A/D, D/A Board	Eight bit PC Bus Translation DT2811PGH board. 8 differential bipolar input 12 bit A/D. 2 bipolar output 12 bit D/A Real time clock, 8 digital inputs, 8 digital outputs.
Protection	Mechanical limit switches disable the amplifier. Current limiting built in amplifier. Compliant and latching hard stop.

Apéndice F

Programa para obtener el Controlador H_∞

En este apéndice se muestra el listado del programa utilizado para obtener el controlador H_∞ . Al final se muestra el sistema que representa al controlador. %

```
% Programa para obtener controlador H INFINITO
% Modificado por Martha Aguilera.
% Copyright. All Rights Reserved.
%
clc
disp(' ')
disp(' ')
disp(' << #1: Robot Flexible >>')
disp(' ')
disp(' ')
disp(' ')
disp(' -----')
disp(' + / | H-inf | / | | Rob. |')
disp(' -->(X)--- | Cont- | --- -->| ZOH |--->| |--->')
disp(' ^- Ts:0.01 | roller| Ts:0.01 | | | fle. |')
disp(' | sec ----- sec ----- |')
disp(' | |')
disp(' |-----|')
disp(' ')
disp(' ')
disp(' (Presione una tecla para Continuar ...)')
pause
format long e
ceros8 = [-30.6308+19.4495*i -30.6308-19.4495*i 29.9349+21.1595*i 29.9349-21.1595*i -
10.7968 11.1877]';
polos8 = [-0.9678+48.3716*i -0.9678-48.3716*i -.04323+21.611*i -.04323-21.611*i -
.1772+11.811*i -.1772-11.811*i 0 0]';
```

```

[num,den]=zp2tf(ceros8,polos8,1);
[a,b,c,d] = tf2ss(num,den);
clc
disp(' ')
disp(' ')
disp(' Lazo abierto del modelo del robot:')
num
den
disp(' Polos de la planta en lazo abierto:')
polog = roots(den)
disp('Ceros de la planta en lazo abierto ')
zerog=roots(num)
disp(' ')
disp(' ')
disp(' (Presione cualquier tecla para Continuar..)')
pause
clc
disp(' ')
disp(' ')
disp(' << Plano W >>')
disp(' ')
disp(' ')
disp(' Añadir a la planta un Z.O.H y convertirlo al ')
disp(' ')
disp(' plano W- ( periodo de muestreo: 0.01 seg) ....')
disp(' ')
disp(' ')
disp(' _____')
disp(' [az,bz] = c2d(a,b,0.01);
disp(' _____')
[az,bz] = c2d(a,b,0.01);
disp(' [ag,bg,cg,dg] = bilin(az,bz,c,d,-1,'Tustin',0.01);')
disp(' _____')
[ag,bg,cg,dg] = bilin(az,bz,c,d,-1,'Tustin',0.01);

```



```

disp(' ')
disp(' ')
disp(' (Presione cualquier tecla para Continuar..)')
%pause
clc
disp(' ')
disp(' ')
disp(' --- Calculando la Grafica de Bode de la planta en lazo abierto (en s & w) ---')
w = logspace(-3,5,100);
svg = bode(a,b,c,d,1,w); svg = 20*log10(svg);
svw = bode(ag,bg,cg,dg,1,w); svw = 20*log10(sv);
disp(' ')
disp(' ')
disp(' ')
disp(' ')
disp(' (Presione cualquier tecla para ver la GRAFICA.)')
%pause
semilogx(w,svg,w,svw)
title('SISO Robot Flexible en Lazo Abierto (in s & w domain)')
xlabel('Frequency - Rad/Sec')
ylabel('SV - db')
text(150,-30,'Nyquist Freq.: 100pi')
grid
%pause
clc
%disp(' ')
%disp(' << Especificaciones de Diseño >> ')
%disp(' ')
%disp(' 1). Especific. de Robustez : ancho de banda – 30 r/s')
%disp(' Pesos asociados:')
%disp(' ')
%disp(' -1 50')
%disp(' W3(s) = ——')
%disp(' s')

```

```

%disp(' ')
%disp(' ')
%disp(' 2). Performance Spec.: sensitivity reduction of at least 100:1')
%disp(' up to approx. 1 r/s')
%disp(' Associated Weighting:')
%disp(' ')
%disp(' -1 -1 15s+1')
%disp(' W1(s) = Gam * _____')
%disp(' 10')
%disp(' ')
%disp(' donde "Gam" es de rango 1 -> 1.5')
nuw3i=[1 1];dnw3i=44.8*[1 0];
svw3i = bode(nuw3i,dnw3i,w); svw3i = 20*log10(svw3i);
nuw1i =[1 1/15]; dnw1i=1.1*[0 1/15];
svw1i = bode(nuw1i,dnw1i,w); svw1i = 20*log10(svw1i);
disp(' ')
disp(' ')
disp(' (Presione cualquier tecla para ver la grafica de los pesos ...)')
pause
semilogx(w,svw1i,w,svw3i)
grid
title('MIMO LSS Ejemplo de Diseño. Especificaciones de Diseño')
xlabel('Frequency - Rad/Sec')
ylabel('1/W1 & 1/W3 - db')
text(0.005,-20,'Sensitivity Spec.- 1/W1(s)')
text(100,0,'Robustness Spec.')
text(1000,-10,'1/W3(s)')
pause
clc
disp(' << FORMULACION DEL PROBLEMA >>')
disp(' ')
disp(' Formar una planta aumentada P(s) con las dis funciones de pesos:')
disp(' ')
disp(' 1). W1 que penaliza la señal de error "e"')

```

```

disp(' ')
disp(' 2). W3 que penaliza la salida de la planta "y"')
disp(' ')
disp(' y encontrar un controlador estabilizador F(s) tal que la Hinf-norm')
disp(' de TF Ty1u1 es mínima y menor que uno, i.e.')
```

$$\min |Ty1u1| < 1,$$

```

disp(' F(s) inf')
disp(' ')
disp(' donde ')
disp(' |-1|')
disp(' Ty1u1 = | Gam*W1*(I + GF) | = | Gam * W1 * S |')
disp(' |-1| | W3 * (I - S) |')
disp(' | W3*GF*(I + GF) |')
```

$$|Ty1u1| = | \text{Gam} * W1 * (I + GF) | = | \text{Gam} * W1 * S |$$

$$|-1| | W3 * (I - S) |$$

$$| W3 * GF * (I + GF) |$$

```

disp(' ')
disp(' ')
disp(' ')
disp(' (Presione cualquier tecla para Continuar..)')
%pause
%clc
disp(' ')
disp(' ')
disp(' << PROCEDIMIENTO DE DISEÑO >>')
disp(' ')
disp(' * * * * *')
disp(' * [Step 1]. Realizar el aumento de la Planta (run AUGTEM or *)')
disp(' * AUGSS.M) *')
disp(' * *')
disp(' * [Step 2]. Balancear la planta aumentada para una mejor *')
disp(' * condicion numerica (run OBALREAL.M) *')
disp(' * *')
disp(' * [Step 3]. Realizar H-inf synthesis (run HINFEM) *')
disp(' * *')
disp(' * [Step 4]. Hacer de nuevo 1 y 2 *')
```

```

disp(' * para una nueva "Gam" -> 1.5 y correr HINFM *')
disp(' *****')
disp(' ')
disp(' ')
disp(' (Presione cualquier tecla para Continuar..)')
%pause
%clc
disp(' ')
disp(' Introduzca el coeficiente de costo "Gam" -> 1 ')
disp(' ')
disp(' Este valor sirve de base para el diseño ....')
disp(' ')
disp(' _____')
disp(' % Aumento de la planta del actuador:')
disp(' [aw1,bw1,cw1,dw1]=tf2ss(Gam*dnw1i,nuw1i); sysw1=[aw1 bw1;cw1 dw1];')
disp(' [aw3,bw3,cw3,dw3]=tf2ss(dnw3i,nuw3i); sysw3=[aw3,bw3;cw3 dw3];')
disp(' sysw2 = []; sysg = [ag bg;cg dg]; dim = [8 1 0 1];')
disp(' [A,B1,B2,C1,C2,D11,D12,D21,D22]=augss(sydog,sysw1,sysw2,sysw3,dim);')
disp(' _____')
Gam = input(' Introduzca coeficiente "Gam" = ');
[aw1,bw1,cw1,dw1] = tf2ss(Gam*dnw1i,nuw1i); sysw1 = [aw1 bw1;cw1 dw1];
[aw3,bw3,cw3,dw3] = tf2ss(dnw3i,nuw3i); sysw3 = [aw3,bw3;cw3 dw3];
sysw2 = []; sysg = [ag bg;cg dg]; dim = [8 1 0 1];
[A,B1,B2,C1,C2,D11,D12,D21,D22] = augss(sysg,sysw1,sysw2,sysw3,dim);
disp(' ')
disp(' - - - El espacio de estado (A,B1,B2,C1,C2,D11,D12,D21,D22) esta listo para')
disp(' el problema de pequeña ganancia - - -')
disp(' ')
disp(' _____')
disp(' Balanceando la planta para mejor condicion numerica ')
disp(' ...')
disp(' ')
disp(' [aa,bb,cc,mm,tt] = obalreal(A,[B1 B2],[C1:C2]) % Balancing P(s)')
disp(' A = aa; B1 = bb(:,1); B2 = bb(:,2); C1 = cc(1:2,:); C2 = cc(3,:);')

```

```

disp(' _____')
[aa,bb,cc,mm,tt] = obalreal(A,[B1 B2],[C1;C2]);
A = aa; B1 = bb(:,1); B2 = bb(:,2); C1 = cc(1:2,:); C2 = cc(3,:);
disp(' ')
disp(' ')
disp(' (Presione cualquier tecla para Continuar..)')
%pause
%clc
disp(' ')
disp(' ')
disp(' _____')
disp(' hinf % Corriendo script file HINF.M ')
disp(' _____')
hinf
disp(' ')
disp(' ')
disp(' (Presione cualquier tecla para Continuar..)')
pause
pltopt % Preparing singular values for plotting
svwli1 = svwli; hsvs1 = sv; hsvt1 = svt; hsvtt1 = svtt;
disp(' ')
disp(' ')
disp(' (Presione cualquier tecla para Continuar..)')
%pause
clc
disp(' ')
disp(' ')
disp(' ')
%disp(' After a few iterations, we found a new Gam of 1.5 can push the')
disp(' ')
%disp(' H-inf cost function close to its limit. ')
disp(' ')
disp(' ')
disp(' Introduzca "Gam" -> 1.5, y corra HINF de nuevo .....')

```

```

disp(' ')
disp(' ')
disp(' (Presione cualquier tecla para Continuar..)')
%pause
Gam = input(' Introduzca coeficiente de costo "Gam" = ');
[aw1,bw1,cw1,dw1] = tf2ss(Gam*dnw1i,nuw1i); sysw1 = [aw1 bw1;cw1 dw1];
[A,B1,B2,C1,C2,D11,D12,D21,D22] = augss(sysg,sysw1,sysw2,sysw3,dim);
[aa,bb,cc,mm,tt] = obalreal(A,[B1 B2],[C1;C2]);
A = aa; B1 = bb(:,1); B2 = bb(:,2); C1 = cc(1:2,:); C2 = cc(3,:);
disp(' ')
disp(' ')
disp(' (Presione cualquier tecla para Continuar..)')
pause
hinf
disp(' ')
disp(' ')
disp(' (Presione cualquier tecla para Continuar..)')
pause
pltopt
svw1i2 = svw1i; hsvs2 = sv; hsvt2 = sv; hsvt2 = svtt;
disp(' ')
disp(' ')
disp(' (Presione una tecla para ver las graficas de comparación ...)')
pause
semilogx(w,svw1i1,w,hsvs1,w,svw1i2,w,hsvs2)
title('H-inf W-Plane Actuator Design – 1/W1 & Sensitivity Func.')
xlabel('Frequency - Rad/Sec')
ylabel('SV - db')
grid
text(0.002,10,'H-inf (Gam = 1) —> H-inf (Gam = 1.5)')
pause
semilogx(w,svw3i,w,hsvt1,w,hsvt2)
title('H-inf W-Plane Actuator Design – 1/W3 & Comp. Sens. Func.')
xlabel('Frequency - Rad/Sec')

```

```

ylabel('SV - db')
grid
text(0.002,-30,'H-inf (Gam = 1) —> H-inf (Gam = 1.5)')
pause
semilogx(w,hsvt1,w,hsvt2)
title('H-inf W-Plane Actuator Design – Cost function Ty1u1')
xlabel('Frequency - Rad/Sec')
ylabel('SV - db')
grid
text(0.002,-10,'H-inf (Gam = 1) —> H-inf (Gam = 1.5)')
pause
clc
disp(' ')
disp(' ')
disp(' << H-inf Controller (Gam = 1.5) >>')
disp(' ')
disp(' Polos del Controlador :')
polecp = eig(acp)
disp(' ')
disp(' (Presione cualquier tecla para Continuar..)')
pause
clc
disp(' ')
disp(' Espacio de Estado para el controlador H-inf FINAL:')
disp(' ')
acp
disp(' (Presione cualquier tecla para Continuar..)')
pause
clc
bcp
disp(' (Presione cualquier tecla para Continuar..)')
pause
clc
ccp

```

```
dcp
disp(' (Presione cualquier tecla para Continuar..)')
pause
clc
disp(' ')
disp(' Polos en lazo cerrado TF matrix Ty1u1:')
poletyu = eig(acl)
disp(' (Presione cualquier tecla para Continuar..)')
pause
%
% —FIN
```


Apéndice G

Publicaciones

En este apéndice se anexan las copias de las siguientes publicaciones realizadas en diferentes congresos y revistas:

M. Aguilera, J. De León. *“Análisis Comparativo de Diferentes Controles Aplicados a un Robot Flexible en el Eslabón”*. Academia Tamaulipeca de Investigación Científica y Tecnológica. Cd. Victoria, Tam. Mayo, 1996.

M. Aguilera, J. De León. *“Diseño de Diferentes Controladores para un Robot Flexible en el Eslabón”*. XVIII Congreso Internacional Académico de Ingeniería Electrónica. Chih.Oct. 1996.

M. Aguilera, J. De León. *“Estudio Comparativo de Diferentes Controles Aplicados a un Robot Flexible en el Eslabón”*. Segunda Conferencia de Ingeniería Eléctrica. CINVESTAV,México. Sept.1996.

M. Aguilera, J. De León. *“Diseño de Diferentes Controladores para un Robot Flexible en el Eslabón”*. Revista SIGMA, Ejemplar 1, 1998. I.T. Nvo. Laredo.

M. Aguilera, J. De León. *“Experimental Evaluation of Infinite Model Based Controllers for a Flexible Link Robot”*. Aceptado para publicación en el “International Symposium on Robotics and Automation 98”. Saltillo Coah., México. Diciembre de 1998.

M. Aguilera, J. De León. *“Experimental Study of Finite and Infinite Model Based Controllers for a Flexible Link Robot”*. Aceptado para publicación en “Modelling, Identification and Control MIC 99”. Innsbruck Austria. Febrero de 1999.

ANALISIS COMPARATIVO DE DIFERENTES CONTROLES APLICADOS A UN ROBOT FLEXIBLE EN EL ESLABON

Martha I. Aguilera Hernández.
Instituto Tecnológico de Nvo. Laredo
Doctorado en Ingeniería Eléctrica
FIME, Universidad Autónoma de Nvo. León
Apdo. Postal 137-F
E-mail:ad917911@gama.fime.uanl.mx
San Nicolás de los Garza N.L. 66451
MEXICO

Abstracto: Tres tipos de control son aplicados a un robot flexible en el eslabón, para comparar su comportamiento y versatilidad. Los resultados obtenidos se muestran en forma gráfica y se analizan las diferentes posibilidades de cada controlador.

I. INTRODUCCION

En la actualidad, los robots flexibles tienen una gran importancia dentro del ámbito de la robótica. Como ejemplos, podemos mencionar los brazos largos que se requieren para acceder lugares hostiles como sitios nucleares, espacio, sitios con sustancias químicas, y en el area industrial como robots diseñados con materiales ligeros apropiados para el manejo de herramientas y ensamble, etc.

Recientemente, la aparición de nuevos materiales y el diseño de estructuras robóticas más ligeras y/o largas, ha dado lugar al desarrollo de estrategias de control que minimicen los fenómenos elásticos inclusive en la presencia de perturbaciones.

Con el fin de resolver los problemas de control asociados a estas estructuras, se tienen disponibles diferentes metodologías para diseñar leyes de control, en base a: Modelo de parámetros distribuidos de brazos flexibles (Tarn, Bejcky,1988), Modelo discreto en tiempo y en el espacio (Rattan,Feliu,1992) y un Modelo discreto en el espacio y continuo en el tiempo. Dentro de este último podemos encontrar el análisis Modal (Siciliano, W.J.Book,1988) y el esquema de elemento finito (Chedmail,Michel,1992).

En este artículo, se deriva un modelo matemático de un robot flexible en el eslabón de un grado de libertad, que considera los parámetros físicos del sistema. Se utiliza la teoría Euler-Bernoulli de la barra. Partiendo de un modelo discreto en el espacio y continuo en el tiempo, mediante la técnica de análisis modal, se obtiene un modelo dimensional finito para propósitos de simulación y diseño del control.

Asimismo se muestra un estudio comparativo de estrategias de control, las cuales son aplicadas al robot flexible. Se consideran tres tipos de controladores: el Proporcional-Derivativo (PD), el Linear Quadratic Regulator (LQR) y el de Perturbaciones Singulares (PS). Los tres fueron aplicados al equipo de Robot flexible que consiste de una barra de

aluminio fija en uno de sus extremos a un motor de CD. Montada sobre el motor se encuentra una cámara con resolución de .014 cm/pixel. En el otro extremo de la barra, en la punta, se encuentra un led. La cámara detecta la posición del led y de esta manera se determina la deflexión del elemento terminal. Una interfase entre el equipo del robot y una computadora PC es utilizada para la retroalimentación de datos y control. El modelo y el control es implementado en lenguaje de programación C. Los resultados experimentales obtenidos se muestran en forma gráfica.

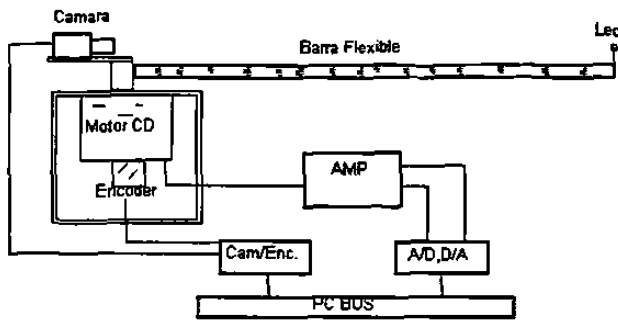


Fig. 1: Robot Flexible Experimental

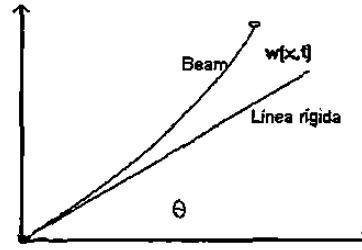


Fig. 2. Marco de referencia

El artículo está organizado de la siguiente manera: La sección I da al introducción. En la sección II, se muestra la derivación del modelo matemático del robot flexible. En la sección III, se muestra el controlador PD, el controlador LQR y el controlador de Perturbaciones Singulares. Finalmente, se muestran las conclusiones del artículo.

II.- MODELO MATEMATICO MODELADO DE UN BRAZO FLEXIBLE EN EL ESLABON

Para el modelado, se utilizó las ecuaciones de Euler-Bernoulli para una barra. Los términos de segundo y alto grado en las variables de deformación son despreciables. Las hipótesis en las que se basa son: h1) El brazo es una barra con características geométricas uniformes y una distribución de masa uniforme, h2) El brazo es flexible en la dirección lateral, solo las deformaciones elásticas están presentes. h3) Las deformaciones no lineales así como la fricción interna u otras perturbaciones externas son efectos despreciables. Los parámetros de interés son: La densidad lineal (ρ), Flexural rigidity (EI) y la Longitud del brazo (l).

La posición absoluta de un punto a lo largo de la barra (fig. 2) está descrita por:

$$P_x = x \cos \theta_t - w(x,t) \sin \theta_t,$$

$$P_y = x \sin \theta_t + w(x,t) \cos \theta_t,$$

donde $w(x,t)$ es la deflexión de la barra con respecto al eje neutral.

Además, dado que la barra está sujeta a la base, se tienen las siguientes condiciones geométricas de frontera $w(0,t) = w'(0,t) = 0$.

La energía cinética está dada por: $T = T_h + T_l$. Del eje: $T_h = \frac{1}{2} I_h \dot{\theta}(t)$ y del brazo

donde: k =Matriz de rigidez ($n_e \times n_e$), D = amortiguamiento estructural del eslabón. (puede ser calculado en base a la matriz de rigidez o experimentalmente)

CONTROLADORES

Controlador PD

Se utiliza la ley de control $\tau = k_p(\theta_d - \theta) + k_v(\dot{\theta}_d - \dot{\theta})$. En los resultados experimentales, podemos observar severas oscilaciones cuando el robot se posiciona en el punto deseado. Una extensión de este controlador a un robot de dos eslabones flexibles, puede hacerse únicamente considerando eslabones independientes.

Controlador LQR

El torque está definido por $\tau = -k_v(\dot{\theta} - \dot{\theta}_d) - k_p(\theta - \theta_d)$, donde k_v, k_p son matrices de ganancia obtenidas por el método LQR. Este método asegura márgenes de ganancia y de fase adecuados. La ventaja de este controlador con respecto al PD es que permanece insensible a perturbaciones externas. Para una extensión a un robot flexible de dos eslabones, el modelo linealizado, depende de la configuración del robot.

Controlador PS

Este método separa al sistema en dos subsistemas denominados sistema "lento" y sistema "rápido". Se reescribe el sistema como

$$\dot{x}_1 = F(x_1, x_2, u, t, \varepsilon)$$

$$\varepsilon \dot{x}_2 = G(x_1, x_2, u, t, \varepsilon)$$

donde x_1 es la variable lenta y x_2 es la variable rápida.

$$x_1 = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} z \\ \varepsilon z \end{bmatrix} \quad z = k\theta_e$$

donde θ_e es medida en el proceso.

El torque viene dado por $\tau = 5.254(\ddot{\theta}_d - k_v(\dot{\theta} - \dot{\theta}_d)) + .346D + .1324\dot{D} - .3221\theta_B - .2134\dot{\theta}_B$

La principal ventaja de este método es que minimiza los cálculos en línea y permite su extensión al caso multieslabones.

EXPERIMENTO

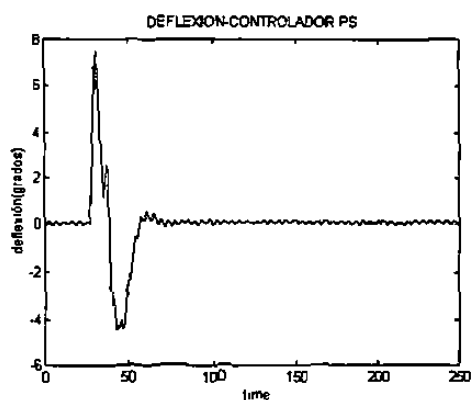
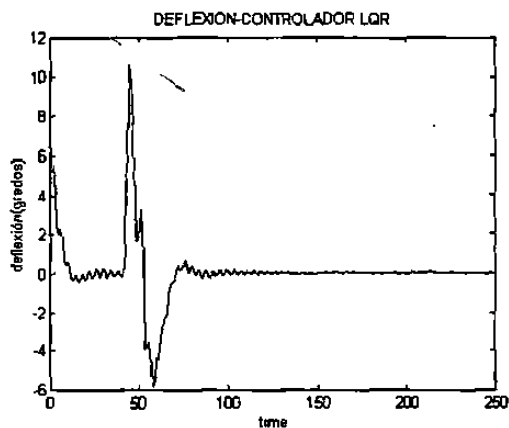
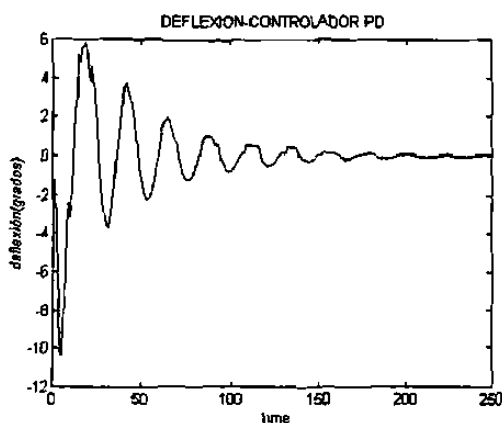
Consiste en realizar movimientos del robot flexible (fig. 1) a $\pm n$ grados con respecto al origen (en este caso el centro, considerando ahí la referencia 0 grados). Es decir, la

estructura recorre en total $2n$ grados. En las gráficas mostradas se utilizó $n = 20$. Esto ha permitido calcular también repetibilidad y exactitud. Donde estos últimos son parámetros de interés en el estado presente de la investigación.

PARAMETROS DEL SISTEMA

Inercia de Cámara (Incluyendo Inercia del Motor)	.002 Kgm ²
Longitud del eslabón	91.4 cm
Altura del eslabón	2.54 cm
Ancho del eslabón	.3175cm
Masa del eslabón	.06 Kg
Inercia del cuerpo rígido del eslabón	.0042 Kgm ²

RESULTADOS EXPERIMENTALES



CONCLUSIONES

En el estado presente, se han analizado 3 controladores, de los cuales el que ha mostrado mejor comportamiento es el de perturbaciones singulares. Se pretende obtener un estudio completo de 2 controladores mas, que son, el de Modos Deslizantes e implementación de

Control Adaptivo. Además de obtener un modelo del robot flexible sin hacer una aproximación finita.

Referencias

- [1] F.L.Hu, A.G.Ulsoy, " *Dynamic Modeling of Constrained Flexible Robots arms for Controller Design*", Transactions of the ASME, vol 116, pp 56-65, 1994.
- [2] B.V. Chapnik, G.R. Heppler, and J.D. Aplevich, " *Modeling Impact on a One-Link Flexible Robotic Arm*", IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol 7, pp 479-488, 1991.
- [3] Ahmet S. Yigit, " *On the stability of PD Control for a two-link Rigid-Flexible Manipulator*", Transactions of the ASME, vol 116, pp 208- 215, 1994
- [4] R. Murray, Zexiang Li, S. Shankar Sastry, " *A mathematical Introduction to Robotic Manipulation*", CRC Press, 1993.
- [5] Jeffrey J. Shifman, " *Lyapunov Functions and the control of the Euler-Bernoulli Beam*", International Journal of Control, vol 57, pp971-990, 1993.

VOLUMEN XVIII

ISSN 1405-2172

XVIII CONGRESO INTERNACIONAL ACADEMICO DE
INGENIERIA ELECTRONICA

MEMORIA

ELECTRO '96

INSTITUTO TECNOLOGICO DE CHIHUAHUA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACION
21-25 OCTUBRE 1996

DISEÑO DE DIFERENTES CONTROLADORES PARA UN ROBOT FLEXIBLE EN EL ESLABON

Martha I. Aguilera Hernández

Jesús de León Morales

Programá Doctoral en Ingeniería Eléctrica
FIME, Universidad Autónoma de Nvo. León
Instituto Tecnológico de Nvo. Laredo
Apdo. Postal 137-F
San Nicolás de los Garza N.L. 66451, México
E-mail: ad917911@gama.fime.uanl.mx

RESUMEN: *En este artículo se presenta el diseño y experimentación de controladores para un robot flexible en el eslabón de un grado de libertad. Se utiliza la técnica de análisis modal para obtener un modelo dimensional finito que nos permite realizar simulación y diseño del control. Un análisis del comportamiento de los controladores es mostrado y los resultados obtenidos se muestran en forma gráfica.*

I. INTRODUCCION

En los últimos años se han desarrollado nuevos materiales con la finalidad de obtener incremento de rigidez (inflexibilidad), dureza, fuerza (resistencia a impactos), estabilidad dimensional, resistencia a la corrosión, reducción de deflexión debido a la temperatura, permeabilidad a gases y líquidos, absorción de agua, costos y energía; modificación de propiedades eléctricas, etc.

Estos nuevos materiales han surgido debido al desarrollo de aplicaciones especiales en la industria en general y en el espacio donde se presenta la necesidad de estructuras más ligeras, largas o resistentes en ambientes no convencionales. Como ejemplos, podemos mencionar los brazos largos que se requieren para acceder lugares hostiles como sitios nucleares, espacio, sitios con sustancias químicas, y en el área industrial como robots diseñados con materiales ligeros apropiados para el manejo de herramientas y ensamble, pintado, soldado, etc. La necesidad de controlar estas estructuras en estos ambientes se ha presentado como una función inherente en el desarrollo de las diferentes aplicaciones.

Se sabe que si una estructura flexible es controlada colocando un sensor exactamente en el actuador que va a controlar, entonces se obtiene una operación estable. En forma contraria, si se tiene en uno de los extremos de la estructura el actuador y en el otro extremo el sensor, el problema de obtener estabilidad se complica [9,10].

Varios estudios con respecto al control de estas estructuras se han realizado y experimentado (Cannon & Schmitz, 1984, Qian & Ma, 1992) El enfoque es aplicar torque de control a un extremo del robot. Este control se basa en un sensor fijo en el otro extremo (en la punta). Pero una tecnología para utilizar sensores y actuadores en los extremos no se ha desarrollado en su totalidad. Los robots industriales requerirán de este tipo de control, debido a la necesidad de ser más ligeros para obtener una respuesta rápida con poca energía y una gran precisión en la posición del elemento terminal.

Para contribuir experimentalmente en el desarrollo de esta tecnología, el presente artículo muestra el diseño de controladores para un robot con flexibilidad en el eslabón de un grado de libertad (RFE). Se tienen disponibles diferentes metodologías para diseñar leyes de control, en base a: Modelo de parámetros distribuidos de brazos flexibles (Tarn, Bejcky, 1988), Modelo discreto en tiempo y en el espacio (Rattan, Feliu, 1992) y un Modelo discreto en el espacio y continuo en el tiempo. Dentro de este último podemos encontrar el análisis Modal (Siciliano, W.J. Book, 1988) y el esquema de elemento finito (Chedmail, Michel, 1992).

En este artículo, se deriva un modelo matemático para el RFE que considera los parámetros físicos

del sistema. Se utiliza la teoría Euler-Bernoulli de la barra. Partiendo de un modelo discreto en el espacio y continuo en el tiempo, mediante la técnica de análisis modal, se obtiene un modelo dimensional finito para propósitos de simulación y diseño del control.

Se consideran tres tipos de controladores: el Proporcional-Derivativo (PD), el Linear Quadratic Regulator (LQR) y el de Perturbaciones Singulares (PS). Los tres fueron aplicados al equipo de Robot flexible que es descrito en la sección III. Los resultados experimentales obtenidos se muestran en forma gráfica.

El artículo está organizado de la siguiente manera. La sección I da la introducción. En la sección II, se presenta la derivación del modelo matemático del robot flexible. En la sección III, los controladores PD, LQR y Perturbaciones Singulares así como el experimento práctico son mostrados. Finalmente, se tienen las conclusiones del artículo.

II.- MODELO MATEMATICO MODELADO DE UN BRAZO FLEXIBLE EN EL ESLABON

Para el modelado, se utilizó las ecuaciones de Euler-Bernoulli para una barra. Los términos de segundo y alto grado en las variables de deformación son despreciables. Las hipótesis en las que se basa son: h1) El brazo es una barra con características geométricas uniformes y una distribución de masa uniforme, h2) El brazo es flexible en la dirección lateral, solo las deformaciones elásticas están presentes h3) Las deformaciones no lineales así como la fricción interna u otras perturbaciones externas son efectos despreciables. Los parámetros de interés son: La densidad lineal (ρ), Flexural rigidity (EI), la inercia del eje (I_h) y la longitud del brazo (l).

La posición absoluta de un punto a lo largo de la barra (figura 1) está descrita por

$$P = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos(\theta(t)) - w(x,t) \sin(\theta(t)) \\ x \sin(\theta(t)) + w(x,t) \cos(\theta(t)) \end{pmatrix}$$

donde $w(x,t)$ = Deflexión de la barra con respecto al eje neutral

t = Variable en el tiempo

x = Coordenada a través del eje neutral de la barra

$\theta(t)$ = Angulo de rotación del eje

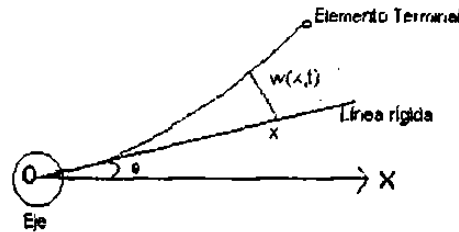


Fig. 1. Marco de referencia

NOTA: En las siguientes ecuaciones una coma en la parte superior representan diferenciación respecto a x , y un punto representa la diferenciación con respecto al tiempo.

Además, dado que la barra está sujeta a la base, se tienen las siguientes condiciones geométricas de frontera $w(0,t) = w'(0,t) = 0$.

La energía cinética está dada por: $T = T_h + T_l$

Del eje: $T_h = \frac{1}{2} I_h \dot{\theta}(t)$ y del brazo

$$T_l = \frac{1}{2} \rho \int_0^l (\dot{P}_x^2 + \dot{P}_y^2) dx$$

$$= \frac{1}{2} \rho \int_0^l (x^2 \dot{\theta}(t)^2 + \omega^2(x,t) \dot{\theta}(t)^2 + \dot{\omega}^2(x,t) + 2x \dot{\theta}(t) \dot{\omega}(x,t)) dx$$

La energía potencial:

$$U = \frac{1}{2} EI \int_0^l (\omega''(x,t))^2 dx$$

Las ecuaciones del sistema son obtenidas de la condición variacional

$$\int_0^l (\delta T(t) - \delta U(t) + \delta W(t)) dt = 0,$$

donde $\delta W(t) = n(t) \delta \theta(t)$ es el trabajo virtual realizado por el torque

El modelo dinámico del robot flexible en el eslabón está dado por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \begin{cases} I_h \ddot{\theta}(t) + \rho \int_0^l x \ddot{w}(x,t) dx - n(t) \\ EI \omega''''(x,t) + \rho \ddot{w}(x,t) + \rho x \ddot{\theta}(t) = 0 \\ \omega(0,t) = \omega'(0,t) = 0 \\ \dot{\omega}''(l,t) = \omega'''(l,t) = 0 \end{cases}$$

donde $I_h = I_h + \rho l^3 / 3$. La primera ecuación puede ser atribuida a la dinámica del eje, mientras que la

segunda ecuación está asociada al eslabón flexible Integrando con respecto al tiempo la segunda ecuación de $\sum_{n=1}^{\infty}$ y sustituyendo en la segunda se obtiene

$$I_s \ddot{\theta}(t) - EI\omega''(0,t) = u(t) \quad (1)$$

$$EI\omega''''(x,t) + \rho \ddot{\omega}(x,t) + \rho x \dot{\theta}(t) = 0$$

Este sistema constituye la base para el análisis modal de la deformación en la barra de Euler-Bernoulli El análisis modal restringido es frecuentemente desarrollado asumiendo $\dot{\theta}(t) = 0$, como si el eje rígido tuviera inercia infinita y por lo tanto siempre estuviera en reposo

De la figura 1, OX es el eje neutral cuando el brazo es rígido. El desplazamiento de cualquier punto P a través del eje neutral a una distancia cualquiera del eje (no excediendo la longitud de la barra l) está dada por el ángulo del eje $\theta(t)$ y la deflexión $\omega(x,t)$ medida desde la línea OX Este desplazamiento se expresará como sigue

$$r(x,t) = \omega(x,t) + x\theta(t)$$

y el sistema de ecuaciones dado por (1), puede escribirse como:

$$\begin{aligned} I_s \ddot{\theta}(t) - EI\omega''(0,t) &= u(t) \\ EI\omega''''(x,t) + \rho \ddot{\omega}(x,t) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Con las condiciones de frontera siguientes

$$r(0,t) = 0$$

$$EI\omega''(l,t) = 0$$

$$EI\dot{\omega}(l,t) = 0$$

Obteniendo la transformada de Laplace del sistema (2) y resolviendo para las raíces del determinante de la matriz de coeficientes, se obtiene una serie de modos vibratoriales naturales del sistema Usando el método de modos asumidos [9,10], las variables del sistema pueden ser expresadas como:

$$r(x,t) = \sum_n \phi_i(x) q_i(t)$$

donde $\phi_i(x)$ es la eigen-función del i th modo

$q_i(t)$ = es la coordenada generalizada del sistema

Usando la ecuación de Lagrange se obtiene una serie de ecuaciones diferenciales ordinarias desacopladas de la forma

$$\ddot{q}_i + 2\zeta_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \frac{1}{I_s} \phi_i'(0) u; \quad i = 0, \dots, \infty$$

Truncando la serie de estas ecuaciones diferenciales ordinarias a un orden menor, reteniendo las primeras

$n_1 + 1$, se escribe un modelo de ecuaciones de la forma

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$v = Cx$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & \omega_1^2 & -2\zeta_1 \omega_1 & \\ & & & & \\ & 0 & & & 0 & 1 \\ & & & & \omega_n^2 & -2\zeta_n \omega_n \end{pmatrix}$$

$$b = \frac{-1}{I_s} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \phi_n''(0) \end{pmatrix}$$

$$x = [q_0, \dot{q}_0, q_1, \dot{q}_1, \dots, q_n, \dot{q}_n]^T$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi_1(l) & 0 & \dots & \phi_n(l) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \phi_1'(0) & \dots & 0 & \phi_n'(0) \end{pmatrix}$$

Los dos renglones de C son vectores medibles del sensor del elemento terminal y del sensor del eje Este modelo lineal es usualmente usado en la literatura [9] para el control de estructuras espaciales largas

Se utilizaron dos modos de vibratoriales obtenidos experimentalmente, los cuales se muestran en la siguiente tabla

Num Modo	Frecuenc (Hz)
0*	0
1	1.8
2	3.3

* cuerpo rígido

III.- CONTROLADORES

Controlador PD

Este tipo de controlador es muy utilizado en robots rígidos y muchos trabajos al respecto se realizado analizando su estabilidad [3] En el de los robots flexibles, se han utilizado diver-

estrategias para su efectividad, por ejemplo el control utilizando un modelo rígido-flexible. En este trabajo se implementó la ley de control $\tau = k_p(\theta_d - \theta) + k_v(\dot{\theta}_d - \dot{\theta})$. Los valores de $k_p = 1.35$ y $k_v = 28$ fueron obtenidos de la mejor sintonización del controlador en su respuesta en el tiempo. En los resultados experimentales (figuras 3a, 3b), podemos observar severas oscilaciones cuando el robot se posiciona en el punto deseado. Una extensión de este controlador a un robot de dos eslabones flexibles, puede hacerse únicamente considerando eslabones independientes

Controlador LQR

Para aplicar este método se linealizó el modelo aproximado del robot alrededor del punto de equilibrio $\theta_e = 0$. La ley de control aplicada está definida por

$$\tau = k_1(\theta - \theta_d) + k_2(\dot{\theta} - \dot{\theta}_d) + \beta_p(p - e - t) + \beta_v(\dot{p} - \dot{e} - t)$$

donde $p - e - t$ es la posición del elemento terminal (que es actualizada en tiempo real) y $k_1, k_2, \beta_p, \beta_v$ son matrices de ganancia obtenidas por el criterio de optimización LQR [12].

$$Q = \int_0^T (e^T Q_1 e + \dot{e}^T Q_2 \dot{e} + u^T r u) dt$$

donde $e = \theta - \theta_d$, Q_1, Q_2 son semidefinidas positivas y r es definida positiva. Utilizando matlab los valores obtenidos fueron

$$k_p = 1.38, k_v = 32, \beta_p = -1, \beta_v = 07$$

Este método asegura márgenes de ganancia y de fase adecuados. La ventaja de este controlador con respecto al PD es que permanece insensible a perturbaciones externas. Las figuras 4a y 4b muestran la respuesta de este controlador. Se aprecia una mejora notable con respecto al controlador PD. Para una extensión a un robot flexible de dos eslabones, el modelo linealizado, depende de la configuración del robot

Controlador Utilizando el Método de Perturbaciones Singulares

Este método se basa en la separación del sistema en dos subsistemas, el cual uno se considera "lento" mientras que el otro se considera "rápido". Las variables de estado "rápidas" son las fuerzas

elásticas y sus derivadas en el tiempo. Un sistema de este tipo es una herramienta para reducir el orden del sistema (los robots flexibles pertenecen al conjunto de sistemas que tienen menor número de entradas de control que el número de variables controlables). Los dos sistemas identificados son:

- a) Un subsistema "lento" que es del mismo orden que del manipulador rígido
- b) Un subsistema "rápido" en donde las variables de estado lentas juegan el rol de parámetros

El control para el sistema lento puede ser diseñado por los esquemas conocidos para los robots rígidos.

Usando el procedimiento dado en [7]. El sistema del robot puede representarse

$$\dot{x} = f(t, x, z, u, \epsilon)$$

$$\epsilon \dot{z} = g(t, x, z, u, \epsilon)$$

donde x es la variable lenta (variables rígidas), u es el control (torque), z es la variable rápida (variables elásticas) y

$$x = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \epsilon \dot{z}_1 \end{pmatrix}$$

Para obtener el modelo reducido, tomamos $\epsilon = 0$ y obtenemos el modelo lento de la forma

$$\dot{x} = f(t, x, z, u, 0)$$

$$0 = g(t, x, z, u, 0)$$

Para el subsistema rápido, con $\tau = t / \epsilon$, obtenemos

$$\dot{x} = \epsilon f(x, z_f(\tau) + z_s, u_f(\tau) + u_s, \epsilon)$$

$$\dot{z}_f = g(x, z_f(\tau) + z_s, u_f(\tau) + u_s, \epsilon)$$

El control para el subsistema lento se obtuvo de un control lineal como el desarrollado en [11], dado por

$$u_s = \gamma [\dot{\theta}_d + k_1(\theta_d - \theta) + k_2(\dot{\theta}_d - \dot{\theta})]$$

donde k_p, k_v son seleccionadas para mantener la separación en la escala de tiempo entre los subsistemas lento y rápido, γ es una constante dependiente de la matriz de Inercia. Los valores obtenidos fueron: $k_p = 1.5, k_v = 56$.

Para el control del subsistema rápido se tiene $u_f = k_{p_f}(x)z_f + k_{v_f}(x)\dot{z}_f$. Se utilizó la técnica de fijación de polos de sistemas lineales para obtener los valores de k_{p_f}, k_{v_f} . Los valores obtenidos fueron $k_{p_f} = -1.56, k_{v_f} = 12$.

La ley de control implementada en la experimentación está dada por:

$$u = 42[\dot{\theta}_d + 56(\theta_d - \theta) + 1.5(\dot{\theta}_d - \dot{\theta})] - 1.56\dot{p} - e - t + 12\dot{p} - e - t$$

Entre las ventajas de este método se puede constatar la reducción del orden del modelo que permite resolver el problema de sistemas que tienen menor número de entradas de control que el número de variables controlables, la minimización de los cálculos en línea además de permitir su extensión al caso multieslabones.

EXPERIMENTO

El equipo del robot flexible en el eslabón con un grado de libertad es mostrado en la figura 2, consiste de una barra de aluminio fija en uno de sus extremos a un motor de CD. Montada sobre el motor se encuentra una cámara con resolución de 014 cm/pixel. En el otro extremo de la barra, en la punta, se encuentra un led. La cámara detecta la posición del led y de esta manera se determina la deflexión del elemento terminal. Una interfase entre el equipo del robot y una computadora PC es utilizada para la retroalimentación de datos y control. El modelo y el control es implementado en lenguaje de programación C.

El experimento consiste en realizar movimientos del robot flexible a $\pm n$ grados con respecto al origen (en este caso el centro, considerando ahí la referencia 0 grados). Es decir, la estructura recorre en total $2n$ grados. En las gráficas mostradas se utilizó $n = 20$. Esto ha permitido calcular también repetibilidad y exactitud. Donde estos últimos son parámetros de interés en el estado presente de la investigación.

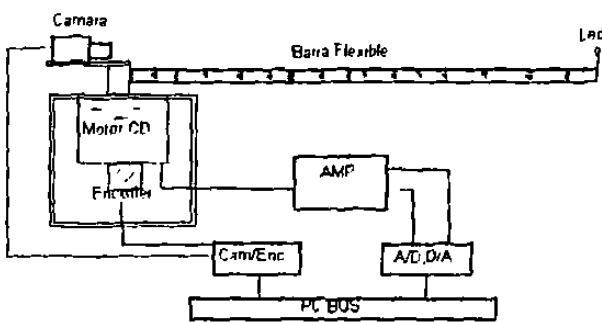


Fig 2: Robot Flexible Experimental

PARAMETROS DEL SISTEMA

Inercia de Cámara	
(Incluyendo Inercia del Motor)	002 Kg ^m ²
Longitud del eslabón	91.4 cm
Altura del eslabón	2.54 cm

Ancho del eslabón	.3175cm
Masa del eslabón	06 Kg
Inercia del cuerpo rígido del eslabón	0042 Kg ^m ²

RESULTADOS EXPERIMENTALES

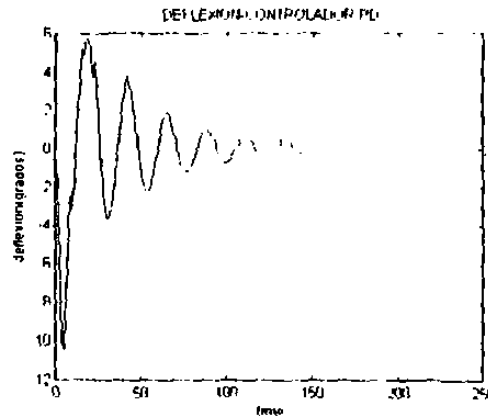


Fig 3a: Controlador PD

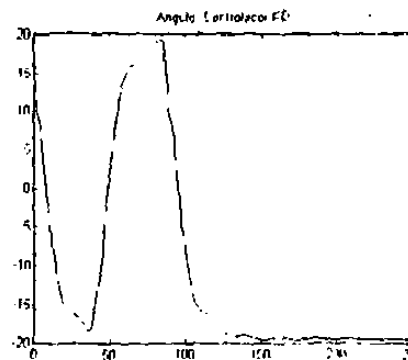


Fig 3b Controlador PD

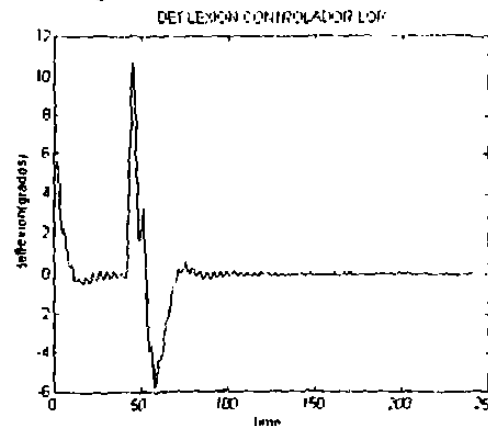


Fig 4a Controlador LQR

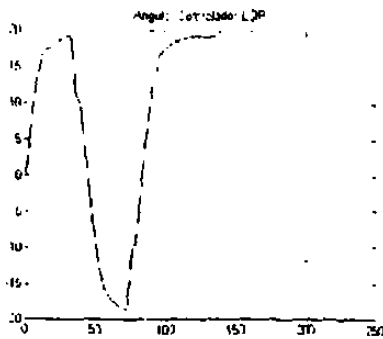


Fig. 4b. Controlador LQR

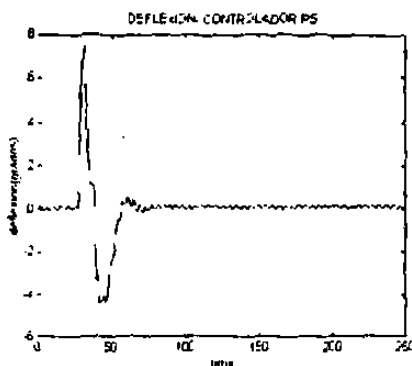


Fig. 5 Controlador PS

CONCLUSIONES

En este trabajo se presentaron tres tipos de controladores. Los que presentan mejor comportamiento son el LQR y el de perturbaciones singulares. Como trabajo futuro se pretende trabajar con un modelo infinito del robot flexible agregando los controladores de Modos Deslizantes y Adaptivo. De esta manera obtener un estudio más completo tanto de análisis como de experimentación de este tipo de estructuras flexibles.

Referencias

[1] F.L. Liu, A.G. Ulsoy, "Dynamic Modeling of Constrained Flexible Robots arms for Controller Design", Transactions of the ASME, vol 116, pp 56-65, 1994
 [2] B.V. Chapnik, G.R. Heppler, and J.D. Aplevich, "Modeling Impact on a One-Link

Flexible Robotic Arm", IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol 7, pp 479-488, 1991.
 [3] Ahmet S. Yigit, "On the stability of PD Control for a two-link Rigid-Flexible Manipulator", Transactions of the ASME, vol 116, pp 208-215, 1994
 [4] R. Murray, Zexiang Li, S. Shankar Sastry, "A mathematical Introduction to Robotic Manipulation", CRC Press, 1993
 [5] Jeffrey J. Shifman, "Lyapunov Functions and the control of the Euler-Bernoulli Beam", International Journal of Control, vol 57, pp971-990, 1993.
 [6] Jacobs, Kilduff, "Engineering Materials Technology", Prentice Hall Inc., 1985
 [7] Khalil H., "Nonlinear Systems", Second Edition, Prentice Hall, 1996
 [8] Chalhoub N., Ulsoy A., "Control of a Flexible Robot Arm: Experimental and Theoretical Results", Journal of Dynamics Systems, Measurement and Control, Vol. 109, pp. 299-309, Dec. 1987
 [9] Cannon R., Schmitz E., "Initial Experiments on the End-Point Control of a flexible One-Link Robot", The International Journal of Robotics Research, Vol 3, No.3, pp. 62-75, Fall 1984
 [10] Qian W., Ma H., "A New Controller Design for a Flexible One-Link Manipulator", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol 37, No 1, January 1992.
 [11] Siciliano B., Book W "A singular perturbation approach to control of Lightweight Flexible Manipulator", The International Journal of Robotics Research, Vol 7, No. 4, pp 79-90, 1988
 [12] Aoustin, Chevareau, Glumineau, Moong, "Experimental Results for the End-Effector Control of a single Flexible Robotic Arm", IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol2, No 4, Dec 1994.



SEGUNDA CONFERENCIA DE INGENIERIA ELÉCTRICA

CIE/96

Septiembre 11-13, 1996

México, D.F.



Julio 10, 1996

CIE/96/015

Ref:10

MARTHA I. AGUILERA HERNANDEZ

UANL

Ciudad Universitaria

C.P 66450 Nuevo León, México

Estimado Colega:

Por medio de la presente, me es grato comunicarle que después de haber revisado su trabajo titulado: "Estudio Comparativo de Diferentes Controles Aplicados a Un Robot Flexible en el Eslabón" ha sido aceptado para su participación en el **CIE/96**, siempre y cuando se realicen las modificaciones sugeridas por los revisores, mismas que le anexamos.

Por otro lado, le informo que la fecha límite para la entrega del resumen corregido y del artículo en extenso, de acuerdo a las instrucciones anexas, es para el 19 de agosto próximo.

Asimismo, mucho le agradecería confirmar la recepción de este documento por correo electrónico, fax o directamente con la Sra. Leticia Gutiérrez.

Sin más por el momento, aprovecho la ocasión para enviarle un cordial saludo.

Atentamente,


DR. JORGE TORRES
PRESIDENTE DEL COMITE DEL
PROGRAMA CIE/96

c.c.p.- Dr. René Asomoza.-Coordinador del **CIE/96**

Comité Organizador **CIE/96**

At'n.: Dr. René Asomoza / Sra. Leticia Gutiérrez

Depto. de Ingeniería Eléctrica, CINVESTAV-IPN

Av. Instituto Politécnico Nacional 2508, 07300 México, D.F. MEXICO.

Tel.: 747-70-00 ext. 3105, Fax: 747-7114, e-mail: cie96@mvax1.red.cinvestav.mx

JT/lg

Segunda

conferencia

de

ingeniería eléctrica

cie
96

Programa
y
Resúmenes

11-13 de septiembre de 1996
México, D. F.

Departamento de Ingeniería Eléctrica. CINVESTAV-IPN

Estudio Comparativo De Diferentes Controles Aplicados A Un Robot Flexible En El Eslabón

Martha L. Aguilera Hernández

Univ. Autónoma de Nuevo León
Instituto Tecnológico de Nuevo Laredo
Apdo. Postal 137-F. Cd. Universitaria
E-mail: ad917911@gama.fime.uanl.mx
San Nicolás de los Garza N.L. 66451
MEXICO

Jesús de León Morales

Univ. Autónoma de Nuevo León
Doctorado en Ingeniería Eléctrica
Apdo. Postal: 148-F. Cd. Universitaria
E-mail: jleon@ccr.dsi.uanl.mx
San Nicolás de los Garza N.L. 66451
MEXICO

Palabras Claves. Flexibilidad en el eslabón, deflexión

RESUMEN

Recientemente, la aparición de nuevos materiales y el diseño de estructuras robóticas más ligeras y/o largas, ha fomentado la investigación en una variedad de problemas técnicos tales como: sistemas sensoriales avanzados, combinaciones de fuerza y movimiento y efectos de flexibilidad en la unión y en el eslabón. Este último ha dado lugar al desarrollo de estrategias de control que minimicen los fenómenos de flexibilidad (tales como desplazamientos elásticos), inclusive en la presencia de perturbaciones.

Con el fin de resolver los problemas de control asociados a estas estructuras, se tienen disponibles diferentes metodologías para diseñar leyes de control, en base a: Modelo de parámetros distribuidos de brazos flexibles (Tarn, Bejcky, 1988), Modelo discreto en tiempo y en el espacio (Rattan, Feliu, 1992) y un Modelo discreto en el espacio y continuo en el tiempo. Dentro de este último podemos encontrar el análisis Modal (Siciliano, W.J. Book, 1988) y el esquema de elemento finito (Chedmail, Michel, 1992).

En este artículo, se deriva un modelo matemático de un robot flexible en el eslabón de un grado de libertad, que considera los parámetros físicos del sistema. Se utiliza la teoría Euler-Bernoulli de la barra. Partiendo de un modelo discreto en el espacio y continuo en el tiempo, mediante la técnica de análisis modal, se obtiene un modelo dimensional finito para propósitos de simulación y diseño del control.



El artículo muestra un estudio comparativo de estrategias de control, las cuales son aplicadas al robot flexible. Resultados en simulación así como experimentales son presentados con el fin de analizar los datos obtenidos

Se consideran tres tipos de controladores: el Proporcional-Derivativo (PD), el Linear Quadratic Regulator (LQR) y el de Perturbaciones Singulares (PS). Los tres fueron aplicados al equipo de Robot flexible que consiste de una barra de aluminio fija en uno de sus extremos a un motor de CD. Montada sobre el motor se encuentra una cámara con resolución de 014 cm/pixel. En el otro extremo de la barra, en la punta, se encuentra un led. La cámara detecta la posición del led y de esta manera se determina la deflexión del elemento terminal.

Una interfase entre el equipo del robot y una computadora PC es utilizada para la retroalimentación de datos y control. El modelo y el control es implementado en lenguaje de programación C.

El artículo contiene primeramente un panorama general de las estructuras robóticas flexibles. Luego un modelo matemático del robot flexible es derivado. En la sección siguiente, se analizan los controladores PD, LQR y Perturbaciones Singulares. Finalmente las conclusiones del artículo son mostradas. El resultado principal de este artículo es el análisis comparativo, en base a los resultados experimentales y de simulaciones, de los controladores considerados.

El artículo muestra un estudio comparativo de estrategias de control, las cuales son aplicadas al robot flexible. Resultados en simulación así como experimentales son presentados con el fin de analizar los datos obtenidos

Se consideran tres tipos de controladores: el Proporcional-Derivativo (PD), el Linear Quadratic Regulator (LQR) y el de Perturbaciones Singulares (PS). Los tres fueron aplicados al equipo de Robot flexible que consiste de una barra de aluminio fija en uno de sus extremos a un motor de CD. Montada sobre el motor se encuentra una cámara con resolución de .014 cm/pixel. En el otro extremo de la barra, en la punta, se encuentra un led. La cámara detecta la posición del led y de esta manera se determina la deflexión del elemento terminal.

Una interfase entre el equipo del robot y una computadora PC es utilizada para la retroalimentación de datos y control. El modelo y el control es implementado en lenguaje de programación C.

El artículo contiene primcrazmente un panorama general de las estructuras robóticas flexibles. Luego un modelo matemático del robot flexible es derivado. En la sección siguiente, se analizan los controladores PD, LQR y Perturbaciones Singulares. Finalmente las conclusiones del artículo son mostradas. El resultado principal de este artículo es el análisis comparativo, en base a los resultados experimentales y de simulaciones, de los controladores considerados



INSTITUTO TECNOLÓGICO de nuevo laredo

Depto: División de Estudios de Posgrado
No. Oficio: DEPI/100
Asunto: Constancia

Fecha: 23 de Marzo de 1998.

C. ING. MARTHA I. AGUILERA HERNÁNDEZ
CATEDRÁTICO DEL INST. TEC. de NUEVO LAREDO
PRESENTE.

Por medio del presente, me permito informarle que su artículo " **Diseño de diferentes controladores para un robot flexible en eslabón**", presentado a esta División para su revisión y publicación en la Revista SIGMA ha sido aceptado y saldrá publicado en el ejemplar No. 1 año 1998.

Esperando que esta información sea de utilidad , me reitero.



SECRETARIA DE
EDUCACION PUBLICA
INSTITUTO TECNOLÓGICO
de nuevo laredo
DIVISION DE ESTUDIOS DE
POSGRADO E INVESTIGACION

ATENTAMENTE .


ING. ELISEO ARREDONDO BARRÓN.

JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO e INVESTIGACIÓN

CCP ARCHIVO.

Reforma Sur No 2007
Cod. Post. 88000
Apdo. Post 392

Tel. 14-09-15, 14-00-22, 14-01-26
Fax 15-36-30



Sigma

REVISTA DE LA DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACION DEL
INSTITUTO TECNOLOGICO DE NUEVO LAREDO



AÑO 1998

No. 1

CONTENIDO

	Página
Directorio	
Editorial.....	1
Contenido.....	2
Diseño de diferentes controladores para un robot flexible en el eslabón.	
Martha I. Aguilera Hernández , Jesús de León Morales.....	3
Estabilidad robusta para sistemas lineales con retardo .	
Gerardo Romero G. , Joaquín Collado M. ,	9
Pragmática de los lenguajes algebraico y químico en el ámbito escolar.	
Luis Orlando Castillo Saldaña. , Aurora Gallardo Cabello	15
Determinación del área máxima de un cuadrilátero.	
René Eloy de la Peña.	19
Consejos para la búsqueda de trabajo en el campo de la robótica.	
Gustavo Guerra Guerra	25
Software para calcular diferenciación numérica (La derivada de una función en un punto)	
Juan Manuel García Guerra, Rosa Elva Salas Martínez	27
Análisis de la ciencia y la tecnología .	
Héctor Guerrero Rodríguez	30
Un panorama a fondo de las pantallas planas.	
Artículo traducido y compilado de la revista CONTROL FOR THE PROCESS INDUSTRIES del mes de Septiembre de 1997, autor Daniel A. Herbert.	
José Luis García Barrera, César Adrian Gordillo Lozano.....	36
Requisitos para la presentación de artículos científicos, de Investigación y resúmenes de tesis.....	42

DISEÑO DE DIFERENTES CONTROLADORES PARA UN ROBOT FLEXIBLE EN EL ESLABON

Martha L. Aguilera Hernández

Jesús de León Morales

Programa Doctoral en Ingeniería Eléctrica
FIME, Universidad Autónoma de Nvo. León
Instituto Tecnológico de Nvo. Laredo
Apdo. Postal 137-F
San Nicolás de los Garza N.L. 66451, México
E-mail: ad917911@gama.fime.uanl.mx

RESUMEN: *En este artículo se presenta el diseño y experimentación de controladores para un robot flexible en el eslabón de un grado de libertad. Se utiliza la técnica de análisis modal para obtener un modelo dimensional finito que nos permite realizar simulación y diseño del control. Un análisis del comportamiento de los controladores es mostrado y los resultados obtenidos se muestran en forma gráfica.*

I. INTRODUCCION

En los últimos años se han desarrollado nuevos materiales con la finalidad de obtener incremento de rigidez (inflexibilidad), dureza, fuerza (resistencia a impactos), estabilidad dimensional, resistencia a la corrosión, reducción de deflexión debido a la temperatura, permeabilidad a gases y líquidos, absorción de agua, costos y energía; modificación de propiedades eléctricas, etc.

Estos nuevos materiales han surgido debido al desarrollo de aplicaciones especiales en la industria en general y en el espacio donde se presenta la necesidad de estructuras más ligeras, largas o resistentes en ambientes no convencionales. Como ejemplos, podemos mencionar los brazos largos que se requieren para acceder lugares hostiles como sitios nucleares, espacio, sitios con sustancias químicas, y en en el area industrial como robots diseñados con materiales ligeros apropiados para el manejo de herramientas y ensamble, pintado, soldado, etc. La necesidad de controlar estas estructuras en estos ambientes se ha presentado como una función inherente en el desarrollo de las diferentes aplicaciones.

Se sabe que si una estructura flexible es controlada colocando un sensor exactamente en el actuador que va a controlar, entonces se obtiene una operación estable. En forma contraria, si se tiene en uno de los extremos de la estructura el actuador y en el otro extremo el sensor, el problema de obtener estabilidad se complica [9,10].

Varios estudios con respecto al control de estas estructuras se han realizado y experimentado (Cannon & Schmitz, 1984, Qian & Ma, 1992). El enfoque es aplicar torque de control a un extremo del robot. Este control se basa en un sensor fijo en el otro extremo (en la punta). Pero una tecnología para utilizar sensores y actuadores en los extremos no se ha desarrollado en su totalidad. Los robots industriales requerirán de este tipo de control, debido a la necesidad de ser más ligeros para obtener una respuesta rápida con poca energía y una gran precisión en la posición del elemento terminal.

Para contribuir experimentalmente en el desarrollo de esta tecnología, el presente artículo muestra el diseño de controladores para un robot con flexibilidad en el eslabón de un grado de libertad (RFE). Se tienen disponibles diferentes metodologías para diseñar leyes de control, en base a: Modelo de parámetros distribuidos de brazos flexibles (Tarn, Bejcky, 1988), Modelo discreto en tiempo y en el espacio (Rattan, Feliu, 1992) y un Modelo discreto en el espacio y continuo en el tiempo. Dentro de este último podemos encontrar el análisis Modal (Siciliano, W.J. Book, 1988) y el esquema de elemento finito (Chedmail, Michel, 1992).

En este artículo, se deriva un modelo matemático para el RFE que considera los parámetros físicos

del sistema. Se utiliza la teoría Euler-Bernoulli de la barra. Partiendo de un modelo discreto en el espacio y continuo en el tiempo, mediante la técnica de análisis modal, se obtiene un modelo dimensional finito para propósitos de simulación y diseño del control.

Se consideran tres tipos de controladores: el Proporcional-Derivativo (PD), el Linear Quadratic Regulator (LQR) y el de Perturbaciones Singulares (PS). Los tres fueron aplicados al equipo de Robot flexible que es descrito en la sección III. Los resultados experimentales obtenidos se muestran en forma gráfica.

El artículo está organizado de la siguiente manera: La sección I da la introducción. En la sección II, se presenta la derivación del modelo matemático del robot flexible. En la sección III, los controladores PD, LQR y Perturbaciones Singulares así como el experimento práctico son mostrados. Finalmente, se tienen las conclusiones del artículo.

II.- MODELO MATEMÁTICO MODELADO DE UN BRAZO FLEXIBLE EN EL ESLABON

Para el modelado, se utilizó las ecuaciones de Euler-Bernoulli para una barra. Los términos de segundo y alto grado en las variables de deformación son despreciables. Las hipótesis en las que se basa son: h1) El brazo es una barra con características geométricas uniformes y una distribución de masa uniforme, h2) El brazo es flexible en la dirección lateral, solo las deformaciones elásticas están presentes. h3) Las deformaciones no lineales así como la fricción interna u otras perturbaciones externas son efectos despreciables. Los parámetros de interés son: La densidad lineal (ρ), Flexural rigidity (EI), la inercia del eje (J_h) y la longitud del brazo (l).

La posición absoluta de un punto a lo largo de la barra (figura 1) está descrita por:

$$p = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta(t) - \omega(x,t) \sin \theta(t) \\ x \sin \theta(t) + \omega(x,t) \cos \theta(t) \end{pmatrix}$$

donde $\omega(x,t)$ = Deflexión de la barra con respecto al eje neutral.

t = Variable en el tiempo
 x = Coordenada a través del eje neutral de la barra

$\theta(t)$ = Angulo de rotación del eje

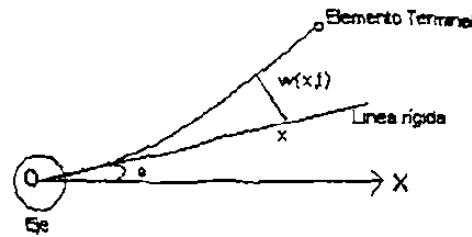


Fig 1 Marco de referencia

NOTA: En las siguientes ecuaciones una coma en la parte superior representan diferenciación respecto a x , y un punto representa la diferenciación con respecto al tiempo.

Además, dado que la barra está sujeta a la base, se tienen las siguientes condiciones geométricas de frontera $\omega(0,t) = \omega'(0,t) = 0$.

La energía cinética está dada por: $T = T_h + T_l$.

Del eje: $T_h = \frac{1}{2} J_h \dot{\theta}(t)$ y del brazo

$$T_l = \frac{1}{2} \rho \int_0^l (\dot{P}_x^2 + \dot{P}_y^2) dx \\ = \frac{1}{2} \rho \int_0^l (x^2 \dot{\theta}(t)^2 + \omega^2(x,t) \dot{\theta}(t)^2 + \dot{\omega}^2(x,t) + 2x \dot{\theta}(t) \dot{\omega}(x,t))$$

La energía potencial:

$$U = \frac{1}{2} EI \int_0^l (\omega''(x,t))^2 dx$$

Las ecuaciones del sistema son obtenidas de la condición variacional

$$\int_0^l (\delta T(t) - \delta U(t) + \delta W(t)) dt = 0,$$

donde $\delta W(t) = u(t) \delta \theta(t)$ es el trabajo virtual realizado por el torque.

El modelo dinámico del robot flexible en el eslabón está dado por:

$$\sum_{RFE} \begin{cases} I_h \ddot{\theta}(t) + \rho \int_0^l x \ddot{\omega}(x,t) dx = u(t) \\ EI \omega''''(x,t) + \rho \ddot{\omega}(x,t) + \rho x \ddot{\theta}(t) = 0 \\ \omega(0,t) = \omega'(0,t) = 0 \\ \omega''(l,t) = \omega'''(l,t) = 0 \end{cases}$$

donde $I_h = I_h + \rho l^3 / 3$. La primera ecuación puede ser atribuida a la dinámica del eje, mientras que la

segunda ecuación está asociada al eslabón flexible. Integrando con respecto al tiempo la segunda ecuación de $\sum_{n \neq i}$ y sustituyendo en la segunda se obtiene:

$$I_n \ddot{\theta}(t) - EI \omega''(0,t) = u(t) \quad (1)$$

$$EI \omega'''(x,t) + \rho \ddot{w}(x,t) + \rho x \ddot{\theta}(t) = 0$$

Este sistema constituye la base para el análisis modal de la deformación en la barra de Euler-Bernoulli. El análisis modal restringido es frecuentemente desarrollado asumiendo $\dot{\theta}(t) = 0$, como si el eje rígido tuviera inercia infinita y por lo tanto siempre estuviera en reposo.

De la figura 1, OX es el eje neutral cuando el orazo es rígido. El desplazamiento de cualquier punto P a través del eje neutral a una distancia cualquiera del eje (no excediendo la longitud de la barra l) está dada por el ángulo del eje $\theta(t)$ y la deflexión $w(x,t)$ medida desde la línea OX. Este desplazamiento se expresará como sigue:

$$y(x,t) = w(x,t) + x \theta(t)$$

y el sistema de ecuaciones dado por (1), puede escribirse como:

$$\begin{aligned} I_n \ddot{\theta}(t) - EI y''(0,t) &= u(t) \\ EI y'''(x,t) + \rho \ddot{y}(x,t) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Con las condiciones de frontera siguientes:

$$\begin{aligned} y(0,t) &= 0 \\ EI y''(l,t) &= 0 \\ EI \dot{y}(l,t) &= 0 \end{aligned}$$

Obteniendo la transformada de laplace del sistema (2) y resolviendo para las raíces del determinante de la matriz de coeficientes, se obtiene una serie de modos vibracionales naturales del sistema. Usando el método de modos asumidos [9,10], las variables del sistema pueden ser expresadas como:

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i'(x) q_i(t)$$

donde $\phi_i(x)$ = es la eigen-función del i th modo
 $q_i(t)$ = es la coordenada generalizada del sistema

Usando la ecuación de Lagrange se obtiene una serie de ecuaciones diferenciales ordinarias desacopladas de la forma:

$$\ddot{q}_i + 2\zeta_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \frac{1}{I_i} \phi_i'(0) u; \quad i = 0, \dots, \infty$$

Truncando la serie de estas ecuaciones diferenciales ordinarias a un orden menor, reteniendo las primeras

$n_s + 1$, se escribe un modelo de ecuaciones de la forma

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$v = Cx$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & & 0 \\ & & 0 & & & & & & \\ & & -\omega_1^2 & & 1 & & & & \\ & & & & -2\zeta_1 \omega_1 & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & & -\omega_n^2 & -2\zeta_n \omega_n \end{pmatrix}$$

$$b = \frac{-1}{I_s} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \phi_1'(0) \\ \vdots \\ 0 \\ \phi_n^{(n)}(0) \end{pmatrix}$$

$$x = [q_0 \quad \dot{q}_0 \quad q_1 \quad \dot{q}_1 \quad \dots \quad q_n \quad \dot{q}_n]^T$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi_1(t) & 0 & \dots & \phi_n(t) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \phi_1'(0) & \dots & 0 & \phi_n'(0) \end{pmatrix}$$

Los dos renglones de C son vectores medibles del sensor del elemento terminal y del sensor del eje. Este modelo lineal es usualmente usado en la literatura [9] para el control de estructuras espaciales largas.

Se utilizaron dos modos de vibracionales obtenidos experimentalmente, los cuales se muestran en la siguiente tabla

Num. Modo	Frecuenc. (Hz)
0*	0
1	1.8
2	3.3

* cuerpo rígido

III.- CONTROLADORES

Controlador PD

Este tipo de controlador es muy utilizado en los robots rígidos y muchos trabajos al respecto se han realizado analizando su estabilidad [3]. En el caso de los robots flexibles, se han utilizado diversas

estrategias para su efectividad, por ejemplo el control utilizando un modelo rígido-flexible. En este trabajo se implementó la ley de control $\tau = k_p(\theta_d - \theta) + k_v(\dot{\theta}_d - \dot{\theta})$. Los valores de $k_p = 1.35$ y $k_v = .28$ fueron obtenidos de la mejor sintonización del controlador en su respuesta en el tiempo. En los resultados experimentales (figuras 3a, 3b), podemos observar severas oscilaciones cuando el robot se posiciona en el punto deseado. Una extensión de este controlador a un robot de dos eslabones flexibles, puede hacerse únicamente considerando eslabones independientes.

Controlador LQR

Para aplicar este método se linealizó el modelo aproximado del robot alrededor del punto de equilibrio $\theta_i = 0$. La ley de control aplicada está definida por

$$\tau = k_p(\dot{\theta} - \dot{\theta}_d) + k_v(\theta - \theta_d) + \beta_p(p_e - t) + \beta_v(\dot{p}_e - t)$$

donde $p_e - t$ es la posición del elemento terminal (que es actualizada en tiempo real) y $k_p, k_v, \beta_p, \beta_v$ son matrices de ganancia obtenidas por el criterio de optimización LQR [12]:

$$O_p = \int_0^{\infty} (e^T Q_1 e + \dot{e}^T Q_2 \dot{e} + u^T r u) dt$$

donde $e = \theta - \theta_d$, Q_1, Q_2 son semidefinidas positivas y r es definida positiva. Utilizando matlab los valores obtenidos fueron $k_p = 1.38, k_v = .32, \beta_p = -1.1, \beta_v = .07$.

Este método asegura márgenes de ganancia y de fase adecuados. La ventaja de este controlador con respecto al PD es que permanece insensible a perturbaciones externas. Las figuras 4a y 4b muestran la respuesta de este controlador. Se aprecia una mejora notable con respecto al controlador PD. Para una extensión a un robot flexible de dos eslabones, el modelo linealizado, depende de la configuración del robot.

Controlador Utilizando el Método de Perturbaciones Singulares

Este método se basa en la separación del sistema en dos subsistemas, el cual uno se considera "lento" mientras que el otro se considera "rápido". Las variables de estado "rápidas" son las fuerzas

elásticas y sus derivadas en el tiempo. Un sistema de este tipo es una herramienta para reducir el orden del sistema (los robots flexibles pertenecen al conjunto de sistemas que tienen menor número de entradas de control que el número de variables controlables). Los dos sistemas identificados son:

a) Un subsistema "lento" que es del mismo orden que del manipulador rígido.

b) Un subsistema "rápido" en donde las variables de estado lentas juegan el rol de parámetros.

El control para el sistema lento puede ser diseñado por los esquemas conocidos para los robots rígidos.

Usando el procedimiento dado en [7]. El sistema del robot puede representarse

$$\dot{x} = f(t, x, z, u, \varepsilon)$$

$$\varepsilon \dot{z} = g(t, x, z, u, \varepsilon)$$

donde x es la variable lenta (variables rígidas), u es el control (torque), z es la variable rápida (variables elásticas) y,

$$x = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}; \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \varepsilon \dot{z}_1 \end{pmatrix}$$

Para obtener el modelo reducido, tomamos $\varepsilon = 0$ y obtenemos el modelo lento de la forma

$$\dot{x} = f(t, x, z, u, 0)$$

$$0 = g(t, x, z, u, 0)$$

Para el subsistema rápido, con $\tau = t / \varepsilon$, obtenemos

$$\dot{x} = \varepsilon f(x, z_f(\tau) + z, u_f(\tau) + u, \varepsilon)$$

$$\dot{z}_f = g(x, z_f(\tau) + z, u_f(\tau) + u, \varepsilon)$$

El control para el subsistema lento se obtuvo de un control lineal como el desarrollado en [11], dado por

$$u_r = \gamma[\ddot{\theta}_d + k_p(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}) + k_v(\theta_d - \theta)]$$

donde k_p, k_v son seleccionadas para mantener la separación en la escala de tiempo entre los subsistemas lento y rápido, γ es una constante dependiente de la matriz de Inercia. Los valores obtenidos fueron: $k_p = 1.5, k_v = .56$.

Para el control del subsistema rápido se tiene $u_f = k_{pf}(x)z_f + k_{vf}(x)z_f$. Se utilizó la técnica de fijación de polos de sistemas lineales para obtener los valores de k_{pf}, k_{vf} . Los valores obtenidos fueron $k_{pf} = -1.56, k_{vf} = .12$.

La ley de control implementada en la experimentación está dada por:

$$u = .42[\ddot{\theta}_d + .56(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}) + 1.5(\theta_d - \theta)] - 1.56\dot{p}_e - t + .12p_e - t$$

Entre las ventajas de este método se puede constatar la reducción del orden del modelo que permite resolver el problema de sistemas que tienen menor número de entradas de control que el número de variables controlables, la minimización de los cálculos en línea además de permitir su extensión al caso multieslabones.

EXPERIMENTO

El equipo del robot flexible en el eslabón con un grado de libertad es mostrado en la figura 2, consiste de una barra de aluminio fija en uno de sus extremos a un motor de CD. Montada sobre el motor se encuentra una cámara con resolución de .014 cm/pixel. En el otro extremo de la barra, en la punta, se encuentra un led. La cámara detecta la posición del led y de esta manera se determina la deflexión del elemento terminal. Una interfase entre el equipo del robot y una computadora PC es utilizada para la retroalimentación de datos y control. El modelo y el control es implementado en lenguaje de programación C.

El experimento consiste en realizar movimientos del robot flexible a $\pm n$ grados con respecto al origen (en este caso el centro, considerando ahí la referencia 0 grados). Es decir, la estructura recorre en total $2n$ grados. En las gráficas mostradas se utilizó $n = 20$. Esto ha permitido calcular también repetibilidad y exactitud. Donde estos últimos son parámetros de interés en el estado presente de la investigación.

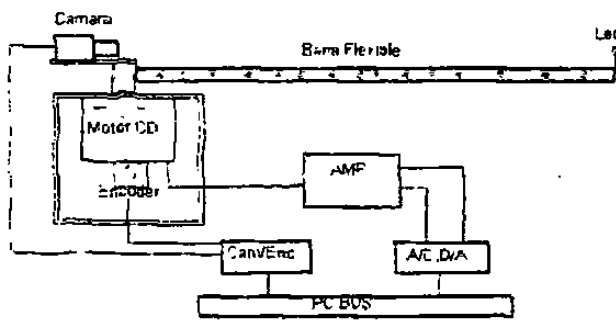


Fig. 2: Robot Flexible Experimental

PARAMETROS DEL SISTEMA

Inercia de Cámara (Incluyendo Inercia del Motor)	0.02 Kg ^m ²
Longitud del eslabón	91.4 cm
Altura del eslabón	2.54 cm

Ancho del eslabón	.3175cm
Masa del eslabón	.06 Kg
Inercia del cuerpo rígido del eslabón	.0042 Kg ^m ²

RESULTADOS EXPERIMENTALES

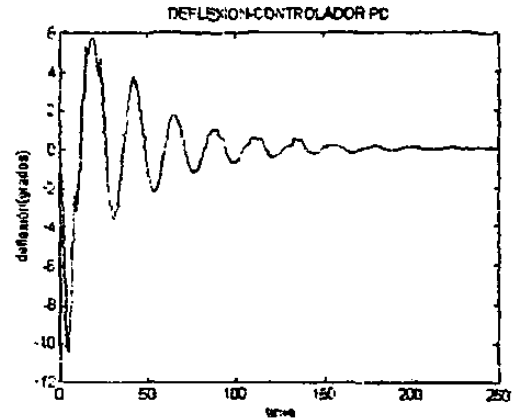


Fig. 3a: Controlador PD

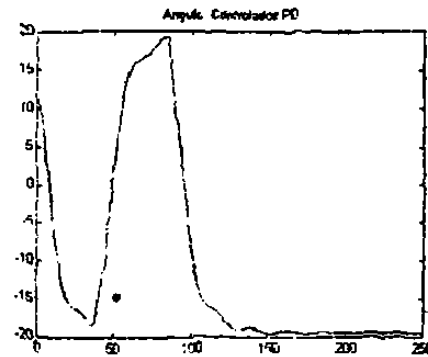


Fig. 3b: Controlador PD

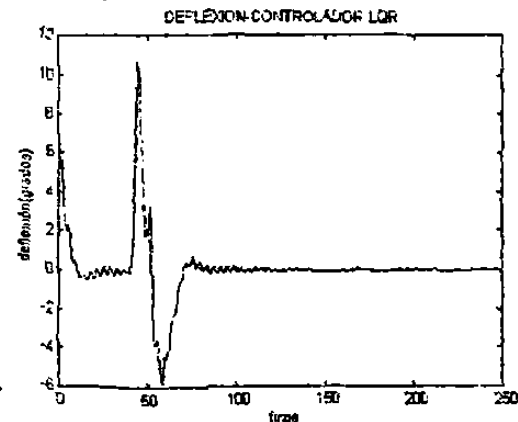


Fig. 4a. Controlador LQR

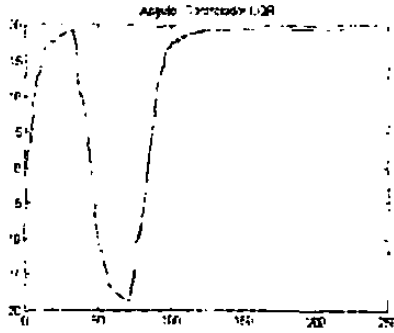


Fig. 4b. Controlador LQR

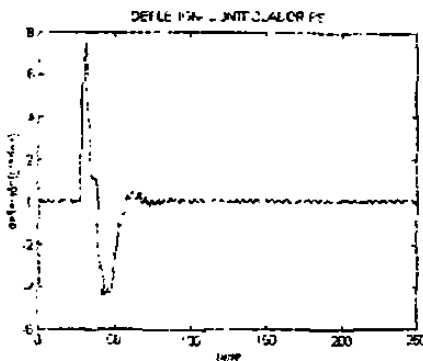


Fig. 5 Controlador PS

CONCLUSIONES

En este trabajo se presentaron tres tipos de controladores. Los que presentan mejor comportamiento son el LQR y el de perturbaciones singulares. Como trabajo futuro se pretende trabajar con un modelo infinito del robot flexible agregando los controladores de Modos Deslizantes y Adaptivo. De esta manera obtener un estudio mas completo tanto de análisis como de experimentación de este tipo de estructuras flexibles.

Referencias

- [1] F.L.Hu, A.G.Ulsoy, "Dynamic Modeling of Constrained Flexible Robots arms for Controller Design", Transactions of the ASME, vol 116, pp 56-65, 1994.
- [2] B.V. Chapnik, G.R. Heppler, and J.D. Aplevich, "Modeling Impact on a One-Link

Flexible Robotic Arm", IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol 7, pp 479-488, 1991.

[3] Ahmet S. Yigit, "On the stability of PD Control for a two-link Rigid-Flexible Manipulator", Transactions of the ASME, vol 116, pp 208-215, 1994

[4] R. Murray, Zexiang Li, S. Shankar Sastry, "A mathematical Introduction to Robotic Manipulation", CRC Press, 1993.

[5] Jeffrey J. Shifman, "Lyapunov Functions and the control of the Euler-Bernoulli Beam", International Journal of Control, vol 57, pp971-990, 1993

[6] Jacobs, Kilduff, "Engineering Materials Technology", Prentice Hall Inc., 1985.

[7] Khalil H., "Nonlinear Systems", Second Edition, Prentice Hall, 1996

[8] Chalhoub N., Ulsoy A., "Control of a Flexible Robot Arm: Experimental and Theoretical Results", Journal of Dynamics Systems, Measurement and Control, Vol. 109, pp. 299-309, Dec. 1987

[9] Cannon R., Schmitz E., "Initial Experiments on the End-Point Control of a flexible One-Link Robot", The International Journal of Robotics Research, Vol 3, No.3, pp. 62-75, Fall 1984.

[10] Qian W., Ma H., "A New Controller Design for a Flexible One-Link Manipulator", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol 37, No. 1, January 1992.

[11] Siciliano B., Book W. "A singular perturbation approach to control of Lightweight Flexible Manipulator", The International Journal of Robotics Research, Vol 7, No. 4, pp. 79-90, 1988.

[12] Austin, Chevareau, Glumineau, Moong, "Experimental Results for the End-Effector Control of a single Flexible Robotic Arm", IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol2, No. 4, Dec. 1994.

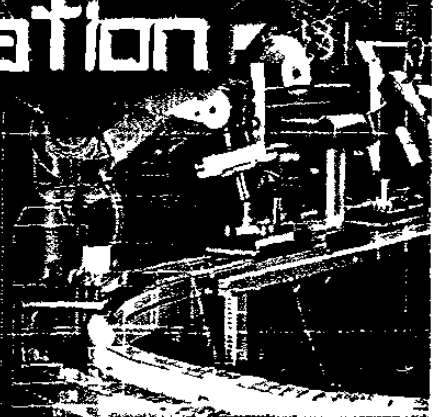


Saltillo, Coah. Mexico
December 12-14



International Symposium on Robotics and Automation '98

*"Robotics and Automation
Innovations for Facing
Challenges of the New Millennium"*



Instituto Tecnológico de Saltillo

PROCEEDINGS



DGIT



Lab-Volt



EXPERIMENTAL EVALUATION OF INFINITE MODEL BASED CONTROLLERS FOR A FLEXIBLE LINK ROBOT

Martha I. Aguilera Hernández¹ and Jesús de León Morales²

email: aguilera@teclaredo.edu.mx, jleon@ccr.dsi.uanl.mx

¹Institute of Technology of Nuevo Laredo, Department of Electrical Engineering
88240 Nuevo Laredo, Tam., México

²University of Nuevo León, Department of Electrical Engineering
66450 San Nicolás de los Garza, N.L., México

ABSTRACT

This paper presents an experimental evaluation of three infinite model based controllers. The results are compared with the simulations to demonstrate the performance of each controller.

Keywords : Flexible link robot, Lyapunov's Method, Distributed Parameter system.

1 INTRODUCTION

One of the most active research area in the last decade has been the flexible link robots control. This happens because of the necessity of light weight manipulators that consume less energy and at the same time improve the end effector accuracy. Some applications of flexible link robots are the aircraft antennas, satellite rescue arms and the industrial links for welding or painting.

These robotics arms have been frequently modeled using the Bernoulli beam theory or Timoshenko beam theory [5]. In most of the cases small deflection assumption has been made. The beam model is a distributed parameter system. This distributed characteristic of the system has made the designing of the controller a difficult task. The model obtained for the flexible link robot is a set of integro-differential equations with coupled non-linear boundary conditions. Due to this characteristic, the original model is often reduced. This can be done by using assumed modes method, finite element technique or singular perturbation theory.

The control strategies are classified in Finite (or Reduced) Model Based Controllers and Infinite Model Based Controllers. In the literature, some controllers are called "model independent". In this article they are classified by the model used to derive them.

The great advantage of the reduced models is that the controller can be obtained by using techniques of linear systems, for instance LQR and PD, or by applying the

singular perturbation theory. The disadvantage of the reduced models is the effects of the truncated modes. Most of the recent studies have been concentrated in compensating the effects of this disregarded modes, usually called "spillover". A survey can be found in [8], where some finite dimensional control strategies are analyzed and compared, concluding that "the effects of high order modes must be considered". Another similar survey can be found in [1].

An attempt to overcome the difficulties associated with the reduced models is the design of an infinite dimensional control strategy. The main advantage of the infinite model approach is the preservation of the model structure, usually destroyed by approximation techniques [11].

Although there have been several experimental studies of different controllers [1,8], none of them has focused the attention to the infinite model based controllers.

This paper examines three *Infinite Model Based Controllers*. The first one was proposed by Shifman in [10,11]. The variable needed for the implementation of this controller is the measurement obtained from a strain gage installed along the beam. The second, is a controller proposed by Yuan in [9]. The controller variables needed for implementation is the measurement of the angle hub with the first and second derivatives. The third one is proposed by Aguilera in [14], and the variables needed for the implementation are the hub variables, an auxiliary approximated variable and the end effector measurement.

The simulations obtained for each controller are compared with the experimental results. The results show that all the infinite based model controllers tested reach the desired position. The inclusion of auxiliary variables in the controller's design improve the performance of the system. The infinite model based controller design is a good approach to control flexible link robots in a wide

range of real applications.

The paper is organized as follows: Section 1, gives the introduction. Section 2 shows the mathematical model of the flexible link robot. This model has been derived using the Euler-Bernoulli beam theory and applying Hamilton Principle. In Section 3, the three Infinite Model Based Controllers are presented. The controller design is described with all the considerations and the assumptions needed for implementation. Section 4 gives the technical details of the flexible link robot apparatus and the simulations and experimental results. Finally the conclusions of this paper are shown.

2 MATHEMATICAL MODEL OF THE FLR

The single flexible link robot (FLR) consists of a flexible link attach to a base. The structure is fixed in one end and free on the other (Figure 2.1), where $\omega(x, t)$ denotes the deflection of the beam with respect to the neutral axis, t is the time variable, l is the beam length, x represents the spatial variable that index the beam points where $x \in [0, l]$, $\theta(t)$ denotes the rotation angle of hub. We assume that the beam is uniform with mass density ρ , Young's Modulus E and cross sectional inertia I . The hub inertia is denoted by I_h and the applied torque by τ .

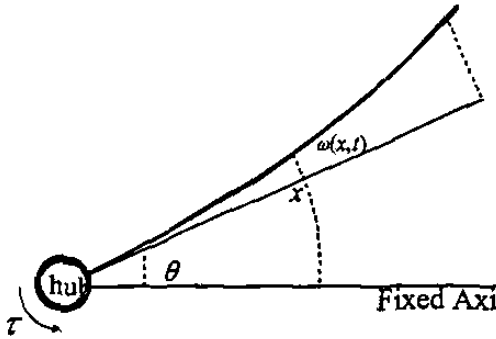


Fig. 2.1: Schematic Flexible Link Robot

Remark 1 In what follows, (\cdot) represents differentiation with respect to x , and a (\cdot) represents differentiation with respect to time.

Since the beam is fixed at the base, the following geometric boundary conditions are verified $\omega(0, t) = \omega'(0, t) = 0$. The mathematical model which represents the dynamic's robot is deduced by means of Hamiltonian's principle, for that, the kinetic energy is given by $T = T_{hub} + T_{link}$, where the contribution of the hub is given by

$$T_{hub} = \frac{1}{2} I_h \dot{\theta}(t)^2 \quad (1)$$

and the link's contribution

$$T_{link} = \frac{1}{2} \rho \int_0^l (x^2 \dot{\theta}(t)^2 + \dot{\omega}^2(x, t) + 2x\dot{\theta}(t)\dot{\omega}(x, t)) dx \quad (2)$$

The potential energy is given by

$$U_{link} = \frac{1}{2} EI \int_0^l (\omega''(x, t))^2 dx \quad (3)$$

Assumption 1: ω is consider to be small with respect to the length of the beam i.e. $\omega \leq 0.1l$

Then, using techniques of calculus of variations, the principle takes the form

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T(t) - \delta U_{link}(t) + \delta W(t)) dt = 0$$

where $\delta W(t) = \tau \delta \theta(t)$ is the virtual work of the torque. Joining $\delta \omega$ and $\delta \theta$ terms, the dynamic model of the flexible link robot is represented by

$$\Sigma_{RFE} \begin{cases} (I_h + \rho l^3/3) \ddot{\theta}(t) + \rho \int_0^l x \ddot{\omega}(x, t) dx = \tau \\ EI \omega''''(x, t) + \rho \ddot{\omega}(x, t) + \rho x \ddot{\theta}(t) = 0 \\ \omega(0, t) = \omega'(0, t) = 0 \\ \omega''(l, t) = \omega'''(l, t) = 0 \end{cases}$$

The first equation of Σ_{RFE} is contribution of the hub and the second is associated with the flexible link[13]. Integrating the second equation with respect to x and substituting in the first one and using, the boundary conditions, we obtain

$$I_h \ddot{\theta}(t) - EI \omega''(0, t) = \tau \quad (4)$$

Now, let $y(x, t) = x\theta(t) + \omega(x, t)$, be the total deflection of the beam, then Σ_{RFE} takes the form

$$\Sigma_{RFET} : \begin{cases} I_h \ddot{\theta}(t) + \rho \int_0^l x \ddot{y}(x, t) dx = \tau \\ EI y''''(x, t) + \rho \ddot{y}(x, t) = 0 \\ y(0, t) = y'(0, t) - \theta(t) = 0 \\ y''(l, t) = y'''(l, t) = 0 \end{cases}$$

3 INFINITE MODEL BASED CONTROLLERS

3.1 JOINT PD CONTROLLER

This controller was proposed by Yuan in [9]. Based on Lyapunov's techniques, the controller is design using a

weighted error function with respect to the target state θ_d as Lyapunov candidate. This function is given by

$$V = T_{hub} + T_{link} + U_{link} + \zeta(T_{link} + U_{link}) + \frac{1}{2}\gamma(\theta - \theta_d)^2 \quad (5)$$

where θ_d represents the hub desired angle and $\zeta > -1$ and $\gamma > 0$ are design parameters. It is clear that $V > 0$, $V = 0$ only if $\dot{\theta} = 0$ and $\theta = \theta_d$.

Taking the time derivative of V , using equations (3, 1, 2) and straightforward calculations it follows that

$$\dot{V} = [\tau + \zeta(\tau - I_h \ddot{\theta}) + \gamma(\theta - \theta_d)] \quad (6)$$

The torque control input can be chosen as

$$\tau = \frac{1}{1 + \zeta}[-k\dot{\theta} - \gamma(\theta - \theta_d) + \zeta I_h \ddot{\theta}] \quad (7)$$

where $k > 0$ is also a design parameter.

Substituting the control input τ in (6), we obtain

$$\dot{V} = -k\dot{\theta}^2$$

which is negative semidefinite. Therefore, using the Lyapunov Stability Theorem, we can say that the robot reaches an equilibrium state under the action of the applied control at which all the joint velocities are equal to zero. Substituting (7) in (4), we have that the closed-loop is given by

$$I_h \ddot{\theta} + k\dot{\theta} + \gamma\theta = (1 + \zeta)\omega''(0, t) + \gamma\theta_d$$

It is clear that $\{\theta = \theta_d, \dot{\theta} = 0\}$ is the unique equilibrium state of the closed-loop system. It is worth noticing that the function V vanishes only at the desired equilibrium state i.e. θ cannot vanishes until $V = 0$ is reached. Invoking La Salle's Invariant Set Theorem, global asymptotic stability of the desired point follows.

The control law given by (7) does not require any feedback from the deflection variables. The design parameters were calculated using the assignment pole technique. The experimental values used were $\zeta = 1$, $\gamma = 40$, $k = 21$.

3.2 CONTROLLER DESIGN USING A STRAIN GAGE

The controller is implemented with the feedback of the deflection variables. This controller was proposed by Shifman in [11]. The deflection variables are measure using a strain gage collocated along the beam.

The position of the link is described by

$$y(x, t) = x\theta(t) + \omega(x, t) \quad (8)$$

The second equation of \sum_{RFET} , given by

$$\rho \ddot{y} + EI y'''' = 0$$

has the following boundary conditions

$$\begin{aligned} EI y &|_0 = 0 \\ EI y'' &|_l = 0 \\ EI y'''' &|_l = 0 \\ EI y'' &|_0 = -\tau + I_h \ddot{\theta} \end{aligned}$$

If we define

$$\begin{aligned} e &= y^d - y \\ \tilde{\tau} &= \tau^d - \tau \\ \tilde{\theta} &= \theta^d - \theta \end{aligned}$$

were the subindex d is use to identify the desired variable. The error is then given by

$$e = y^d - x\theta(t) - \omega(x, t) \quad (9)$$

were the derivatives with respect to x is given by

$$\begin{aligned} e' &= -\theta(t) - \omega'(x, t) \\ e'' &= -\omega''(x, t) \\ e'''' &= -\omega''''(x, t) \end{aligned}$$

and the time derivatives by

$$\begin{aligned} \dot{e} &= -\dot{y} = -x\dot{\theta}(t) - \dot{\omega}(x, t) \\ \ddot{e} &= -x\ddot{\theta}(t) - \ddot{\omega}(x, t) \end{aligned} \quad (10)$$

The second equation of \sum_{RFE} results in an error equation given by

$$EI e'''' + \rho \ddot{e} = 0 \quad (11)$$

with boundary conditions

$$\begin{aligned} EI e &|_0 = 0 & EI e' &|_l = 0 \\ EI e'''' &|_l = 0 & EI e'' &|_0 = -\tilde{\tau} + I_h \ddot{\theta} \end{aligned}$$

If we integrate twice with respect to x , the equation given by (11), first from x to l , and then from 0 to l , we obtain the relation

$$\tilde{\tau} = \rho \int_0^l \int_{x_1}^l \ddot{e}(x_0) dx_0 dx_1 + I_h \ddot{\theta}$$

Assigning

$$X := \rho \int_0^l \int_{x_1}^l \ddot{e}(x_0) dx_0 dx_1 + I_h \ddot{\theta} \quad (12)$$

then we can choose

$$\dot{\tau} = -c_1 \dot{X} - c_0 X = \ddot{X}$$

where the c_i are constants.

The closed loop system has the form

$$\ddot{X} + c_1 \dot{X} + c_0 X = 0$$

where the behavior of X is determined from the section of the c_i s.

X represents all the error movement of the beam, the control law is designed such that the error e can be controlled. The controller has the form

$$\dot{\tau} = c_{10} \dot{X} + c_{11} \dot{\theta} + c_{00} X + c_{01} \bar{\theta} \quad (13)$$

where the $c_{ij} > 0$ are constants. The above equation (13), can be rewritten as

$$\dot{\tau} = -c_0(X + c_2 \bar{\theta}) - c_1(\dot{X} + c_2 \dot{\bar{\theta}})$$

The variable X is directly measure from the strain gage.

3.3 CONTROLLER DESIGN USING FINITE ELEMENT NUMERICAL APPROXIMATION

The use of a strain gage for deflection measure are limited by external factors like temperature or pressure, and have to be calibrated. The longitude of the strain gage is also a limiting factor. Non-conventional sites like nuclear waste places, use long links to perform inspection and service. The use of a strain gage for this kind of work is impractical. Other methods to measure the end-effector position is the use of an acelerometer or photodiodes. However the efficiency of the measure equipment is limited by the longitude of the link and for the working environment.

One method is collocate small flexible links in cascade through the flexible link. Each one feedback the data to the last one. The data is referring to the deflection[15].

The controller proposed by Shifman, explained in the last section, guarantee stability of the closed loop system but requires the aggregate variable measure given by (12). The material properties is a main factor in the design of flexible structures for non-conventional sites, sufficient information of the performance of the material has to be known.

The controller proposed (SGA) has a similar for as Shifman's but the direct measure of the strain gage is approximated numerically, with the help of the material properties information and the feedback of the tip position. A finite technique is use to divide the beam in small links. For each link, the approximation of the

strain gage is made. The total value of approximation is the combination of all the small links values.

The strain is related to the beam deflection $w(x)$ by

$$\epsilon_{xx} = \frac{z}{\rho} = z \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (14)$$

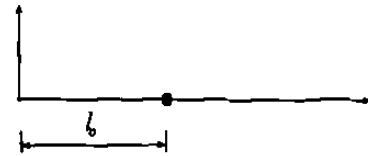
as $y(x,t) = x\theta(t) + w(x,t)$, (14) can be rewritten as $\epsilon_{xx} = zw'' = zy''$, the stress is given by

$$\sigma_{xx} = E\epsilon_{xx} = Ezy''$$

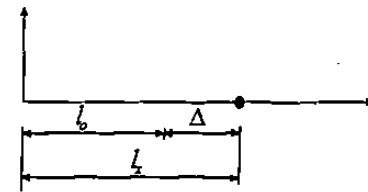
Also

$$\epsilon_{xx} = \frac{l_x - l_0}{l_0} = \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

where z is the distance respect to the neutral axis to the beam point of interest.



(a) Before deformation



(b) After deformation

Figure 3.1 Strain gage measure in a segment.

From the last section, we have that the controller is given by

$$\int_0^l \int_{x_1}^l y(x_0) dx_0 dx_1 = \frac{1}{3} l^3 \bar{\theta} - \int_0^l p(x) y''(x) dx$$

where $p(x) = \frac{1}{3} l^3 - \frac{1}{2} l^2 x + \frac{1}{6} x^3$. Choosing the width of the strain gage as $W(x) = 1/p(x)$ and knowing that

$$d \Delta_R(x) = k \frac{y''(x)}{W(x)} dx$$

we obtain

$$\frac{1}{k} \int_0^l d \Delta_R(x) = \int_0^l p(x) y''(x) dx \quad (15)$$

This approximation by means of a strain gage is valid for a single link. If we separate the link in small sublinks

applying the finite element method, each sublink can be approximated by $A_p = \frac{1}{3}l^3 \ddot{\theta} + \frac{l^5}{8I_c} - \frac{1}{8}l^4$, where l_o is a constant and equal to the beam length, and l is measure in real time during the beam trayectory to the desired position.

4 EXPERIMENTAL SETUP

The flexible robot equipment of one degree of freedom is shown in figure 4.2, it consists in an aluminium beam fixed on one end. A CD motor and a camera are mounted in the shaft of the motor. The camera's resolution is 0.014 cm/pixel. A led is used to measure the end beam position. The camera detects the led position and the deflection is measured. An interface is used to feedback the data and control to the equipment. The control is implemented in C language. To determine $\ddot{\theta}$ a software filter was used. The *System Parameters* are: Camera Inertia $0.002Kg m^2$, Link length $l = 0.914m$, Link height $2.54cm$, Link width $0.3175cm$, Link mass $0.06Kg$, Link inertia $0.0042Kg m^2$, Flexural rigidity $EI = 8Kg m^2/s^2$, Linear density $\rho = 0.8Kg/m$. The flexible link robot finite was simulated using three modes. The nominal values used for the first controller were $\zeta = 1, \gamma = 40, k = 21$. For the second controller, the nominal values used were $c_0 = 80, c_1 = 15, c_2 = .05$.

The experiment consist in move the beam to a desired position. The computer collect the values of hub angle, deflection and driven torque. The simulations were performed using Matlab[®] with a stepsize of 0.01s. The time closed loop plot showing the dynamic behavior obtained by simulations and experimental of the deflection are given in figures (7.1) and (7.3). Also in figures (7.2) and (7.4), the driven torque is shown.

From the plots one can notice that the curves obtained from simulations are closed to the ones obtained experimentally.

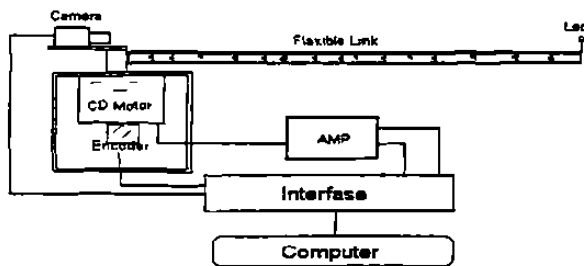


Figure 4.1: Schematic System

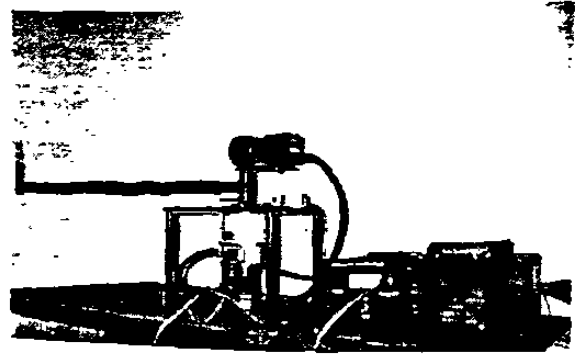


Figure 4.2: Experimental Flexible Robot

5 CONCLUSIONS

An infinite model based controllers were compared and tested in an experimental flexible robot equipment. This experimental results show that controllers derived from the infinite model are a viable approach for the control of flexible link robots. Future work include the design of a controller based on infinite model with gravity effects.

6 REFERENCES

- [1] Aoustin, Chevareau, Glumineau, Moong, "Experimental Results for the End-Effector Control of a single Flexible Robotic Arm", IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol2, No. 4, Dec. 1994.
- [2] Ahmet S. Yigit, "On the stability of PD Control for a two-link Rigid-Flexible Manipulator", Transactions of the ASME, vol 116, pp 208-215, 1994.
- [3] Chalhoub N., Ulsoy A., "Control of a Flexible Robot Arm: Experimental and Theoretical Results", Journal of Dynamics Systems, Measurement and Control, Vol. 109, pp. 299-309. Dec. 1987.
- [4] Cannon R., Schmitz E., "Initial Experiments on the End-Point Control of a flexible One-Link Robot", The International Journal of Robotics Research, Vol 3, No.3, pp. 62-75, Fall 1984.
- [5] William T. Thomson. "Teoria de Vibraciones. Aplicaciones". Editorial Prentice Hal. Internacional. 1983.
- [6] J.E. Lagnese, G. Leugering, E.J.P.G. Schmidt. "Modeling, Analysis and Control of Dynamic Elastic Multi-Link Structures". Ed. Birkhäuser, 1994.
- [7] Barbieri Enrique. "Single-Input/Single-Output Transfer Functions for a flexible Slewing Link". Journal of Robotics Systems 10(7). 913-929 (1993).
- [8] Wang D. "Comparison of Control Strategies for the Single Flexible Beam". American Mathematical Society. 1993. 1069-5265/93
- [9] Yuan King, "Regulation of a geometrically exact flexible beam manipulator", Systems & Control Letters 25 (1995) 9-12.

[10] Jeffrey J. Shifman, "Lyapunov Functions and the control of the Euler-Bernoulli Beam", International Journal of Control, vol 57, pp971-990, 1993.

[11] Shifman J. PHD Thesis. "The Control Of Flexible Robots", Churchill College., March 1991.

[12] Rossi M., Wang D. "Issues in the design of Passive Controllers for Flexible-Link Robots". The International Journal of Robotics Research. Vol. 16. No. 4, August 1997, p.p. 577-588.

[13] Canudas C., Siciliano B., Bastin G. "Theory of Robot Control", Springer Verlag. 2nd Ed., 1997.

[14] Aguilera Martha, "Control de Robots con Flexibilidad en el eslabón". PHD Thesis in progress. UANL 1998. Reporte de Investigación DIE-02-97.

[15] Love L., Kress R., Jansen J. "Control for a Hydraulically Actuated Flexible-Prismatic Link Robot". IEEE Control Systems. Vol. 18. No. 1, February, 1998.

[16] Astrom K., Wittenmark B. "Computer Controlled Systems", Prentice Hall, 1990.

[17] Banavar R., Dominic P. "An LQG/ H_∞ Controller for a Flexible Manipulator". IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol.3, No.4, December 1995.

7 SIMULATION AND EXPERIMENTAL RESULTS

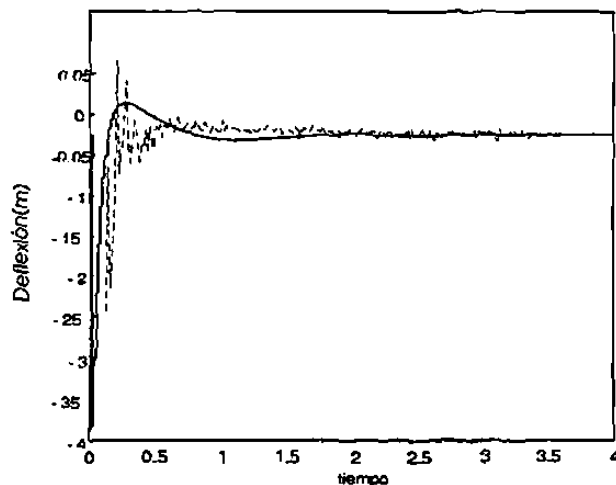


Figura 7.1. JPD Controller. Deflection.

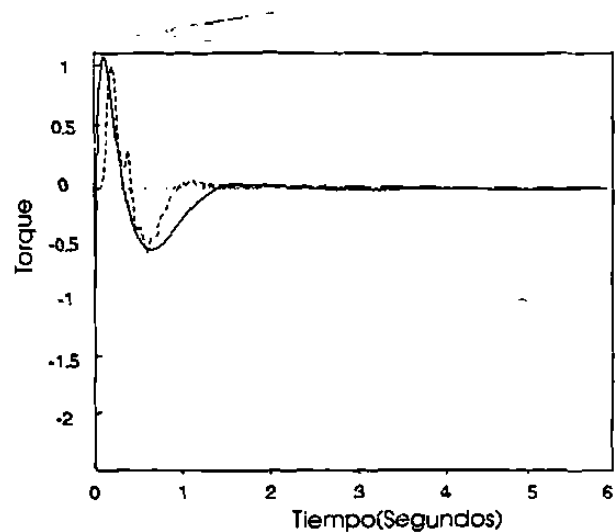


Figure 7.2. JPD Controller. Torque.

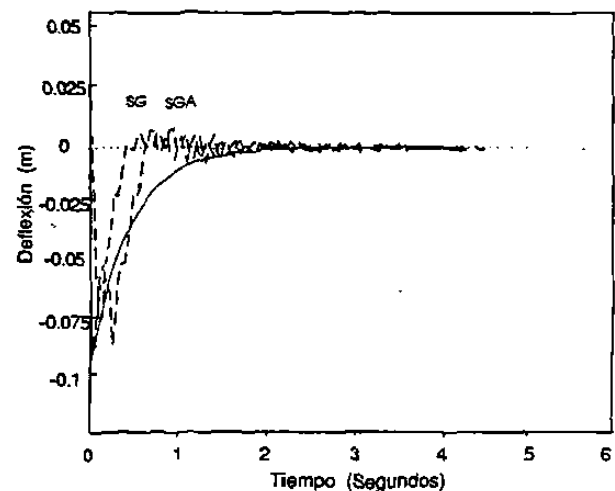


Figure 7.3. SG and SGA Controllers. Deflection

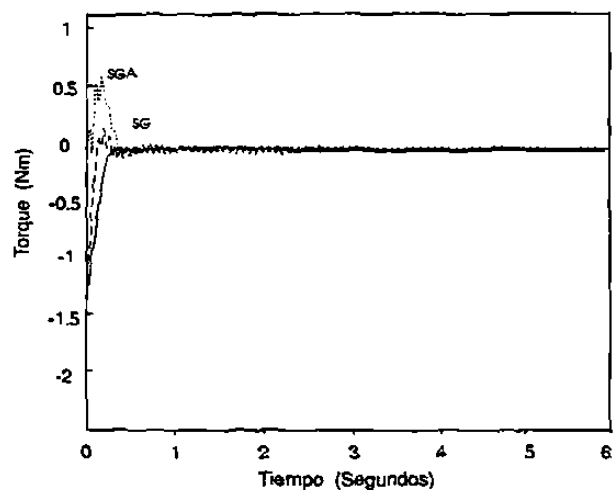


Figure 7.4. SG and SGA Controllers. Torque

X-Sender: iastedmb@mail.cadvision.com (Unverified)
X-Mailer: Windows Eudora Pro Version 3.0.1 (32)
Date: Thu, 12 Nov 1998 12:43:13 -0700
To: aguilera@teclaredo.edu.mx
From: IASTED <iastedmb@cadvision.com>
Subject: MIC'99 Results

November 12, 1998

MARTHA I.A. HERNANDEZ
INST. OF TECH. OF NUEVO LAREDO
DEPARTMENT OF ELECTRICAL ENG.
88240 NUEVO LAREDO
TAM, MEXICO

Dear DR. HERNANDEZ,

It gives me pleasure to inform you that based upon the abstract we have received, your paper,

Paper #: 289-154 Entitled:

Experimental Study of finite and Infinite Model Based Controllers for a flexible Link robot

has been accepted for presentation as a short paper at the Eighteenth IASTED International Conference on Modelling, Identification and Control which is to be held at the Congress Innsbruck, Innsbruck, Austria on February 15-18, 1999.

Enclosed are special forms and instructions for the preparation of your manuscript.

We hereby invite you to attend the conference to present your research. We are looking forward to an enjoyable and informative conference.

Yours sincerely,

Nadia Hamza
for the IASTED International Program Committee

P.S.

1. Please quote your paper number on all correspondence.
2. A slide projector and overhead projector will be available for your presentation. All slides and viewgraphs must be easy to read, please take great care in their preparation.
3. Authors must register and the payment and camera-ready manuscript must be received by January 4th, 1999.
4. New email address: calgary@iasted.com.

Dear Delegate,

EXPERIMENTAL STUDY OF FINITE AND INFINITE MODEL BASED CONTROLLERS FOR A FLEXIBLE LINK ROBOT

M. AGUILERA-HERNANDEZ¹ and J. DE LEON-MORALES²

email: aguiler@teclaredo.edu.mx, jleon@ccr.dsi.uanl.mx

¹Institute of Technology of Nuevo Laredo, Department of Electrical Engineering
88240 Nuevo Laredo, Tam., México

²University of Nuevo León, Department of Electrical Engineering
66450 San Nicolás de los Garza, N.L., México

ABSTRACT

This paper presents an experimental study of finite based controllers (PD, LQR, Passive, LQG/ H_∞ and Singular Perturbation) and three infinite model based controllers. The results are compared with the simulations to demonstrate the efficiency of each control technique.

Keywords : Flexible link robot, Lyapunov's Method, Distributed Parameter system.

1 INTRODUCTION

Over the last decade, the research area of light weight manipulators that consume less energy with an acceptable end effector accuracy had grown. This is because of the development of applications like aircraft antennas, satellite rescue arms and the industrial links for welding, painting or manipulators for nuclear waste remediation.

The flexible robotics arms have been frequently modeled using the Bernoulli beam theory or Timoshenko beam theory. In most of the cases small deflection assumption has been made. The model obtained for a flexible link robot is a set of integro-differential equations with coupled nonlinear boundary conditions, due to this characteristic, the original model is often reduced[4]. This can be done using assumed modes method, finite element technique or singular perturbation theory.

The control strategies are classified in Finite (or Reduced) Model Based Controllers and Infinite Model Based Controllers. In the literature, some controllers are called "model independent". In this article they are classified by the model used to derive them.

The great advantage of the reduced models is that the controller can be obtained using techniques of linear systems. However most of the recent studies has been concentrated in compensate the effects of the disregarded modes, usually called "spillover". A survey can be found in [3], where some finite dimensional control strategies

are analyze and compared, concluding that the "the effects of high order modes must be considered". Another similar survey can be found in [1].

An attempt to overcome the difficulties associated with the reduced models is the design of an infinite dimensional control strategy. The main advantage of the infinite model approach is the preservation of the model structure, usually destroyed by approximation techniques [5]. Although there has been several experimental studies of different controllers ([3],[1]), none of them have include the infinite model based controllers.

This paper examines several control strategies which have been implemented on a single link robot apparatus. The strategies include five *Finite Model Based Controllers* (Proportional-Derivative, the Linear Quadratic Regulator, LQG/ H_∞ , the Passivity approach and a controller derived by using the Singular Perturbation Theory) and three *Infinite Model Based Controllers*. The first one (of the infinite model scheme) was proposed by Shifman in [5]. The variable needed for the implementation of this controller is the measurement obtained from a strain gage installed along the beam. The second, is a controller proposed by Yuan in [4]. The controller variables needed for implementation is the measurement of the angle hub with the first and second derivatives. The third one is proposed by Aguilera in [6], and the variables needed for the implementation are the hub variables, an auxiliary approximated variable and the end effector measurement. The simulations obtained for each controller are compared with the experimental results.

2 MODEL OF THE FLR

The single flexible link robot (FLR) consists of a flexible link attach to a base. The structure is fixed in one end and free on the other (Figure 2.1), were $w(x,t)$ denotes the deflection of the beam with respect to the neutral

axis, t is the time variable, l is the beam length, x represents the spatial variable that index the beam points where $x \in [0, l]$, $\theta(t)$ denotes the rotation angle of hub. We assume that the beam is uniform with mass density ρ , Young's Modulus E and cross sectional inertia I . The hub inertia is denoted by I_h and the applied torque by τ .

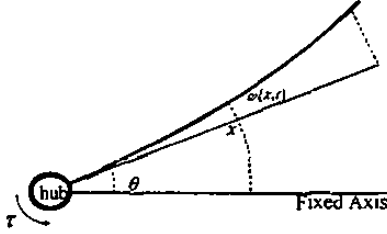


Fig. 2.1: Schematic Flexible Link Robot

Remark 1 In what follows, (\cdot) represents differentiation with respect to x , and a (\cdot) represents differentiation with respect to time.

The dynamic model of the flexible link robot is represented by

$$\Sigma_{RFE} \begin{cases} (I_h + \rho l^3/3)\ddot{\theta}(t) + \rho \int_0^l x \ddot{w}(x, t) dx = \tau \\ EI w''''(x, t) + \rho \ddot{w}(x, t) + \rho x \ddot{\theta}(t) = 0 \\ \omega(0, t) = \omega'(0, t) = 0 \\ \omega''(l, t) = \omega'''(l, t) = 0 \end{cases}$$

3 INFINITE MODEL BASED CONTROLLERS

The first controller tested was the *Joint PD Controller (JPD)*. This controller was proposed by Yuan in [4] and is given by $\tau = \frac{1}{1+\zeta} [-k\theta - \gamma(\theta - \theta_d) + \zeta I_h \ddot{\theta}]$, where θ_d represents the hub desired angle and $\zeta > -1$, $k > 0$ and $\gamma > 0$ are design parameters. The control law does not require any feedback from the deflection variables. The design parameters were calculated using the assignment pole technique. The experimental values used were $\zeta = 1$, $\gamma = 40$, $k = 21$.

The second controller use an *auxilliary variable measure using a strain gage (SG)*. The controller is implemented with the feedback of the deflection variables. This controller was proposed by Shifman in [5]. The deflection variables are measure using a strain gage collocated along the beam.

The control law is given by $\hat{\tau} = -c_0(X + c_2\hat{\theta}) - c_1(\dot{X} + c_2\dot{\hat{\theta}})$, were $X := \rho \int_0^l \int_0^l \ddot{e}(x_o) dx_o dx_1 + I_h \ddot{\theta}$, $\hat{\theta} = \theta^d - \theta$ and X represents all the error movement of the beam and is directly measure from the strain gage. The values of the

c_i used for simulation are given by $c_0 = 80$, $c_1 = 15$, $c_2 = .05$.

The third controller is design using *finite element numerical approximation (SGA)*. The use of a strain gage for deflection measure are limited by external factors like temperature or pressure, and have to be calibrated. The longitude of the strain gage is also a limiting factor. The controller proposed has a similar form as Shifman's but the direct measure of the strain gage is approximated numerically, with the help of the material properties information and the feedback of the tip position. A finite technique is use to divide the beam in small links. For each link, the approximation of the strain gage is made. The total value of approximation is the combination of all the small links values. The approximation for each small link is given by $A_p = \frac{1}{3} l^3 \ddot{\theta} + \frac{l^5}{8l_o} - \frac{1}{8} l^4$, where l_o is a constant and equal to the beam length, and l is measure in real time during the beam trayectory to the desired position.

4 FINITE MODEL BASED CONTROLLERS

The procedure used to obtain a finite model was the assumed modes method. The linear system obtained has dimension $2(\eta_e + 1)$, were η_e is the number of modes. See [2,6] for details. The following table show the first three modes calculated and measured experimentally.

Mode	Calc.-Freq.	Measure-Freq.
1	2.11	1.9
2	13.29	13.1
3	37.21	33

The controllers designed based on this linear truncated model were the Proportional-Derivative (PD), the Linear Quadratic Regulator (LQR), the LQG/ H_∞ , and the Passive. For details see [6]. The PD controller results is shown in figure (5.4). The graphics describe severe oscillations as the robot reach the desired point. This show that only feedback from hub is not enough to obtain a good response from the robot. The LQR results are shown in figure (5.5). This controller has better response than the PD. This method assure adequate gain and phase margins. The design of this controller for the multilink case depend on the robot configuration. The response of the passive controller is similar as the LQR. Only the torque needed is smaller than the one needed for the LQR. The LQG/ H_∞ results are similar as the JPD controller. The H_∞ controller is design with the help of the h inf routine from Matlab. This routine was modified to accept new weights to optimize the system response. The singular perturbation controller was

design by means of the singular perturbations method. The method separate the model in two subsystems. One is consider the "fast subsystem" and the other "slow subsystem". The fast variables are identify as the elastic forces and their respective time derivatives. The advantage of this method is the order reduction of the model that allow to solve the problems of systems having less control signals than controlled variables. The response is similar as the SGA controller.

5 EXPERIMENTAL SETUP

The flexible robot equipment of one degree of freedom is shown in figure 5.1, it consists in an aluminium beam fixed on one end. A CD motor and a camera are mounted in the shaft of the motor. The camera's resolution is 0.014 cm/pixel. A led is used to measure the end beam position. The camera detects the led position and the deflection is measured. An interface is used to feedback the data and control to the equipment. The control is implemented in C language. To determine $\ddot{\theta}$ a software filter was used. The *System Parameters* are: Camera Inertia $0.002Kg\,m^2$, Link length $l = 0.914m$, Link height $2.54cm$, Link width $0.3175cm$, Link mass $0.06Kg$, Link inertia $0.0042Kg\,m^2$, Flexural rigidity $EI = 8Kg\,m^2/s^2$, Linear density $\rho = 0.8Kg/m$. The flexible link robot finite was simulated using three modes. The simulations were performed using Matlab[®] with a stepsize of 0.01s.

The experiment consist in move the beam to a desired position. The computer collect the values of hub angle, deflection and driven torque. From the plots¹ one can notice that the curves obtained from simulations are closed to the ones obtained experimentally.

Conclusions

An infinite and finite model based controllers were compared and tested in an experimental flexible robot equipment. The results show that controllers derived from the infinite model are a viable approach for the control of flexible link robots. Future work include the design of a controller based on infinite model with gravity effects.

References

- [1] Aoustin, Chevareau, Glumineau, Moong, "Experimental Results for the End-Effector Control of a single Flexible Robotic Arm", IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol2, No. 4, Dec. 1994.
- [2] Canudas C., Siciliano B., Bastin G. "Theory of Robot Control", Springer Verlag. 2nd Ed., 1997.
- [3] Wang D. "Comparison of Control Strategies for the Single Flexible Beam". American Mathematical Society. 1993. 1069-5265/93

¹Due of limitation of space, only the deflection variable result is showa for five controllers.

- [4] Yuan King, "Regulation of a geometrically exact flexible beam manipulator", Systems & Control Letters 25 (1995) 9-12.

- [5] Shifman J. PHD Thesis. "The Control Of Flexible Robots", Churchill College., March 1991.

- [6] Aguilera Martha, "Control de Robots con Flexibilidad en el eslabón". PHD Thesis in progress. UANL 1998. Reporte de Investigación DIE-02-97.

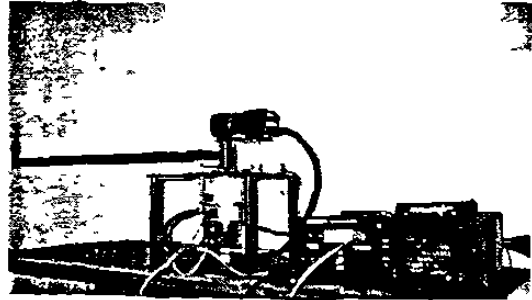


Figure 5.1: Experimental Flexible Robot

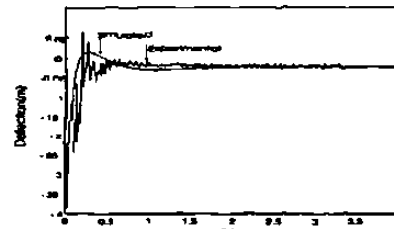


Figure 5.2. JPD Controller. Deflection

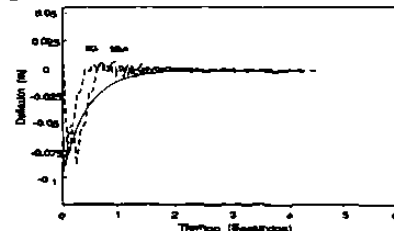


Figure 5.3. SG y SGA Control. Deflection.

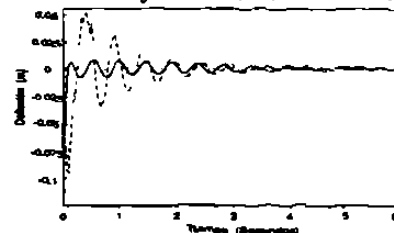


Figure 5.4. PD-Controller. Deflection.

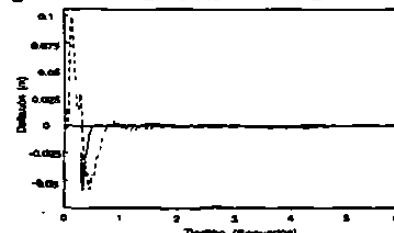


Figure 5.5. LQR-Control. Deflection.

