

**UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON  
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA  
Y ELECTRICA  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POST-GRADO**



**DINAMICA DE GASES APLICADA A LAS TOBERAS**

**POR**

**ING. ARTURO RODOLFO GONZALEZ ESCAMILLA**

**TESIS**

**EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS  
DE LA INGENIERIA MECANICA CON ESPECIALIDAD  
EN TERMICA Y FLUIDOS**

**SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L. DICIEMBRE 1999**

A.R.G.E.

DINAMICA DE GASES APLICADA A LAS TOBERAS

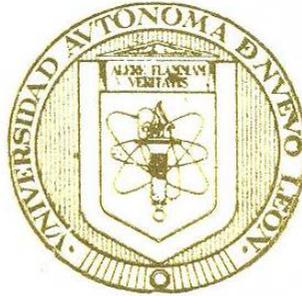
TM  
Z5853  
.M2  
FIME  
1999  
G669243

1999



1020128432

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON  
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA  
Y ELECTRICA  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POST-GRADO



DINAMICA DE GASES APLICADA A LAS TOBERAS

POR

ING. ARTURO RODOLFO GONZALEZ ESCAMILLA

TESIS

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS  
DE LA INGENIERIA MECANICA CON ESPECIALIDAD  
EN TERMICA Y FLUIDOS



SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L. DICIEMBRE 1999

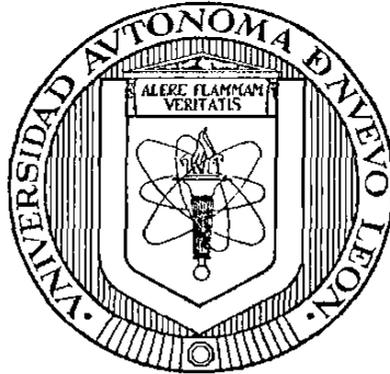
0136-04360

TM  
25853  
-M2  
FINE  
1997  
G669243



FONDO  
TESIS

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA**  
**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POST-GRADO**



**DINÁMICA DE GASES APLICADA A LAS TOBERAS**

**POR:**

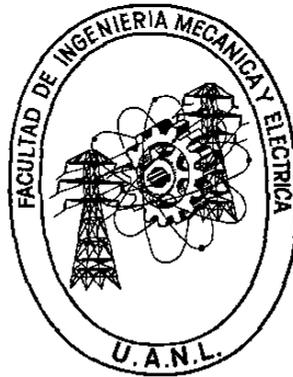
**ING. ARTURO RODOLFO GONZÁLEZ ESCAMILLA**

**TESIS**

**EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA  
INGENIERÍA MECÁNICA CON ESPECIALIDAD EN  
TÉRMICA Y FLUIDOS**

**SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, N. L. DICIEMBRE DE 1999**

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POST-GRADO**



**DINÁMICA DE GASES APLICADA A LAS TOBERAS**

**POR:**

**ING. ARTURO RODOLFO GONZÁLEZ ESCAMILLA**

**TESIS**

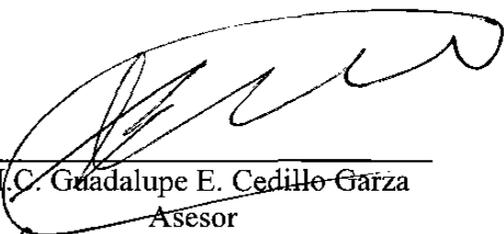
**EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA  
INGENIERÍA MECÁNICA CON ESPECIALIDAD EN  
TÉRMICA Y FLUIDOS**

**SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, N. L. DICIEMBRE DE 1999**

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA**  
**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POST-GRADO**

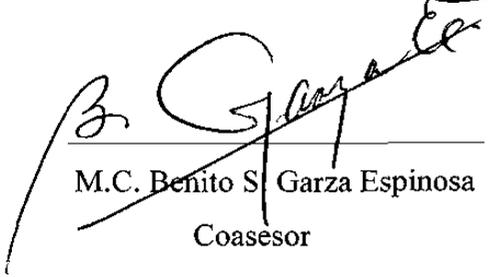
Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis "DINAMICA DE GASES APLICADA A LAS TOBERAS" realizada por el alumno Ing. Arturo Rodolfo González Escamilla, matrícula 0028533 sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestro en Ciencias de la Ingeniería Mecánica con especialidad en Térmica y Fluidos.

**El Comité de Tesis**



---

M.C. Guadalupe E. Cedillo Garza  
Asesor



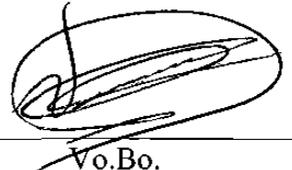
---

M.C. Benito S. Garza Espinosa  
Coasesor



---

M.C. Roberto Villarreal Garza  
Coasesor



---

Vo.Bo.  
M.C. Roberto Villarreal Garza  
División de Estudios de  
Post-grado

San Nicolás de los Garza, N.L. Diciembre de 1999

## **DEDICATORIAS**

**A MI ESPOSA:** Norma Leticia Padilla Frutos de González. Por Toda Su **PACIENCIA, COMPRENSIÓN y APOYO**, y porque en ocasiones sacrificó muchas cosas para que yo pudiera terminar la Maestría **GRACIAS**.

**A MIS HIJOS:** Donick Arturo, Angel Arturo y Kiber Arturo. La Culminación de esta etapa de mi vida fue por **USTEDES**, porque son mi más grande **COMPROMISO**.

**A MI MADRE:** María Luisa Escamilla vda. de González. Con **CARIÑO**.

**A MI PADRE:** Dr. Bricio González Enríquez. Porque aunque tengo **MARAVILLOSOS** recuerdos de él, me hizo mucha **FALTA**.

**A MIS HERMANOS:** Gerardo, Carlos Fernando, María Margarita y Luis Manuel. Porque siempre los llevo en mi **MENTE**.

**A MIS FAMILIARES Y AMIGOS:** Porque de alguna manera todas sus palabras siempre fueron palabras de **COMPRENSIÓN** y de **ALIENTO**.

Gracias

**A MACKRINA:** Por su **EJEMPLO**.

## **AGRADECIMIENTOS**

Primeramente quiero agradecer a **DIOS** por haberme permitido culminar una etapa mas dentro de mi carrera profesional y por acompañarme y llenarme de bendiciones todos los días de mi vida.

**Al Ing. Guadalupe E. Cedillo Garza.** Por su tiempo, su dedicación y por su valiosa aportación como MAESTRO dentro de mi desarrollo profesional y sobre todo por su AMISTAD, GRACIAS.

**Al Ing. Benito S. Garza Espinosa.** Por todo su apoyo, su orientación, su estímulo y su confianza GRACIAS.

**Al Ing. Roberto Villarreal Garza.** Por toda su ayuda, su experiencia y la asesoría brindada a este su servidor GRACIAS.

**Al Ing. Joel González Marroquín.** Por todos sus consejos y acertadas palabras de apoyo que siempre recibí de él GRACIAS.

**Al Los Ingenieros Luis Manuel Martínez Villarreal y Juan Ángel Garza Garza.** Por todas las facilidades que me brindaron en la realización de esta tesis GRACIAS.

A todas aquellas personas que de alguna manera intervinieron en la elaboración de este escrito y muy ESPECIALMENTE a la señoritas **Lizbeth** y **Elda** por toda la ayuda que recibí de ellas GRACIAS.

# PRÓLOGO

Una de las funciones de una Tobera es la de transformar en energía cinética la energía térmica de un gas ó vapor (sustancia fluyente).

Un paso intermedio importante es el de transformar calor en trabajo, esto es esencial para que las Toberas puedan realizar su función eficazmente.

Considerando la cantidad de problemas relacionados con el flujo ó movimiento de un fluido, podemos preguntarnos que es lo que sucede en una corriente de fluido. Estos fenómenos se estudian ampliamente en un curso llamado Mecánica de Fluidos. Afortunadamente la mecánica de fluidos y la termodinámica están muy relacionadas entre sí, puesto que ambas se necesitan para la investigación y solución completa de muchos problemas que se dan en los procesos productivos.

El presente escrito fue pensado en hacer más simples los cálculos del comportamiento de las Toberas tomando en cuenta la existencia de un programa de aplicación computacional que se llama COMPQ el cual es de gran utilidad dada la rapidez del calculo con diferentes parámetros.

# ÍNDICE

## Capítulo

### SÍNTESIS

#### 1. INTRODUCCIÓN

- 1.1. Planteamiento del problema
- 1.2. Objetivo de la tesis
- 1.3. Justificación de la tesis
- 1.4. Metodología
- 1.5. Límites de estudio
- 1.6. Revisión bibliográfica

#### 2. CAMBIO DE ÁREA SIMPLE EN UNA TOBERA (ISOENTROPICO)

- 2.1. La conducta de un flujo en un cambio de área simple
- 2.2. Aplicaciones básicas
- 2.3. Túneles de viento supersónicos
- 2.4. Entradas subsónicas y supersónicas
- 2.5. Uso del programa de aplicación Compq
- 2.6. Análisis Termodinámico de las Toberas

#### 3. APLICACIONES DEL FLUJO FANNO EN LAS TOBERAS

- 3.1. *En una Tobera convergente*

- 3.2. **En una Tobera convergente-divergente**
- 3.3. **Uso del programa de aplicación Compq**

#### **4. APLICACIONES DEL FLUJO RAYLEIGH EN LAS TOBERAS**

- 4.1. **En una Tobera convergente**
- 4.2. **En una Tobera convergente-divergente**
- 4.3. **Uso del programa de aplicación Compq**

#### **5. FRICCIÓN EN LAS TOBERAS (ISOTÉRMICO)**

- 5.1. **Uso del programa de aplicación Compq**

#### **6. ANÁLISIS TERMODINÁMICO**

- 6.1. **Dinámica de gases en un fluido**
- 6.2. **Numero de Mach y Velocidad Sónica**
- 6.3. **Ondas Mach**
- 6.4. **Ondas de choque en un plano normal**
- 6.5. **Relaciones de las propiedades de estado a través del choque en un plano normal**
- 6.6. **Ondas oblicuas inclinadas**
- 6.7. **Ondas de choque oblicuas fuertes**
- 6.8. **Presión, Entalpía y Temperatura de Estancamiento**
- 6.9. **Flujo Isoentropico en una sección transversal variable**

#### **7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**

#### **BIBLIOGRAFÍA**

#### **LISTA DE FIGURAS**

#### **LISTA DE TABLAS**

#### **APÉNDICE 1 (FIGURAS Y TABLAS SUPLEMENTARIAS)**

#### **AUTOBIOGRAFÍA**

## SÍNTESIS

El objetivo primordial de la tesis se lleva a cabo en los capítulos intermedios donde se determina el comportamiento de los fluidos, el efecto que se tiene con el flujo FANNO y el flujo RAYLEIGH, así como la influencia que tiene la fricción en los mismos, además se desarrollan los modelos matemáticos, y se presentan con toda claridad las ecuaciones y las combinaciones de ellas con las cuales podemos determinar con toda precisión la Temperatura, Presión, Velocidad, Volumen y el número de Mach de un fluido al pasar por un Pasaje, todo esto dependiendo de las condiciones iniciales que se tengan de un problema, es de vital importancia que los fluidos que fluyen por un pasaje deben de satisfacer 4 leyes que son la Segunda Ley de **NEWTON**, y de la **TERMODINÁMICA** así como la conservación de la **MASA** y de la **ENERGÍA**, así como también se describe la aplicación del programa computacional correspondiente para las diferentes condiciones que se puedan presentar en un problema. En el inicio de este escrito se señala la razón por la cual se realizó esta tesis, así como al final de la misma se hacen las conclusiones y las recomendaciones

# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN

### 1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Al tratar de resolver diferentes problemas relacionados con el movimiento de los fluidos nos damos cuenta de una gran cantidad de operaciones matemáticas que deben de ser llevadas a cabo para encontrar las posibles soluciones en el comportamiento de un fluido al pasar por una Tobera, ya que estas pueden tener diferentes formas como lo es la Divergente, la Convergente ó la Convergente-Divergente

## **1.2. OBJETIVO**

Analizaremos termodinamicamente el comportamiento de una Tobera mediante los métodos utilizados en la Dinámica de Gases realizando sus modelos matemáticos además de la aplicación del Programa Computacional correspondiente.

Esta tesis tiene la finalidad de servir como apoyo en los cursos de Dinámica de Gases o de otros cursos afines tanto en Licenciatura como en Post-grado debido a la gran complejidad que se tiene al tratar de resolver los problemas que se presentan en el estudio de los Gases.

## **1.3. JUSTIFICACION DE LA TESIS**

Se pretende que esta tesis sirva como material de consulta, porque podremos resumir en pocas ecuaciones matemáticas el comportamiento de los gases además de que en esta época con todos los adelantos de la tecnología es muy importante saber hacer uso del programa computacional correspondiente, el cual se presenta de una manera clara y simple y hará que la solución de muchos de los problemas que se presentan cuando existe un fluido en movimiento sean más simples de calcular, la investigación realizada en este campo opera bajo condiciones de masa constante.

### **1.3. METODOLOGÍA**

Alimentando al programa correspondiente diferentes valores a las variables y propiedades termodinámicas que suelen afectar la Dinámica de Gases, como el número de Mach, la Velocidad ó la Temperatura y se analizarán los resultados obtenidos para *diferentes modelos matemáticos del flujo*.

### **1.4. LÍMITES DE ESTUDIO**

El presente escrito fue pensando en presentar los posibles casos que se pueden presentar, estudiar su comportamiento, analizar las ecuaciones matemáticas y visualizar que tan ágil es el programa computacional al tratar de resolver la problemática que se presenta en los fluidos.

El estudio esta basado en que la **MASA** se conserva constante, y se analizaron el comportamiento y la fricción de un fluido dentro de una **Tobera** según las condiciones dadas.

## CAPÍTULO 2

# CAMBIO DE ÁREA SIMPLE EN UNA TOBERA (ISOENTROPICO)

### 2.1 La conducta de un flujo en un cambio de área simple

Considerar una Tobera convergente junto a un deposito con condiciones de estancamiento  $p_o$  y  $T_o$  y escapando gas a una contrapresión variable  $p_b$ .

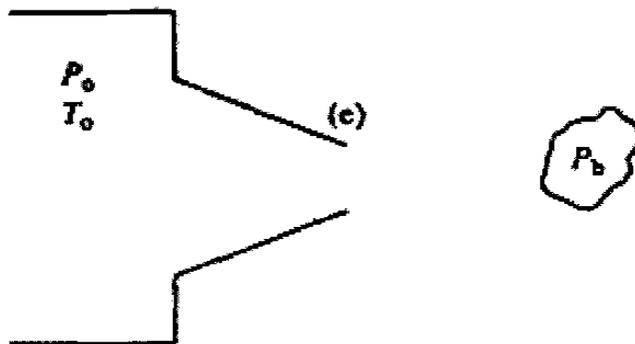


Figura 2.1

Si la contrapresión es igual a la presión de estancamiento, entonces el flujo no ocurre y la presión es constante a lo largo de toda la Tobera.

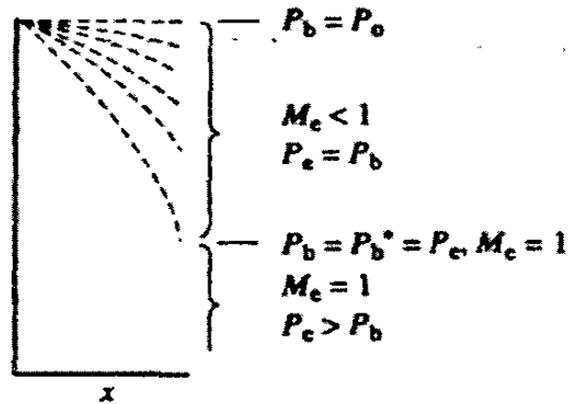


Figura 2.2

Un ligero decremento en la contrapresión induce un flujo a través de la Tobera la razón del flujo debe ser tal que la presión en el plano de salida de la Tobera es igual a la contrapresión. Esta condición es la misma en un flujo incompresible en el plano de salida.

Como la contrapresión decrece adicionalmente, la razón de flujo de masa se incrementa y la presión decrece para conservar en el plano de salida una presión igual a la contrapresión.

El incremento de la razón del flujo de masa correspondiente al decremento de la contrapresión se muestra en la siguiente figura.

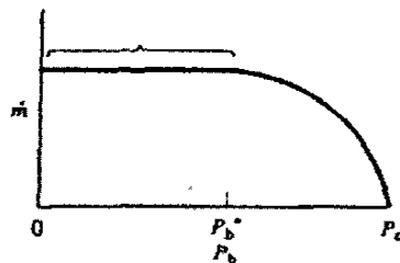


Figura 2.3

Finalmente, si la contrapresión se reduce suficientemente baja, tal que en el plano de salida el número de Mach es igual a 1. Cuando esto ocurre, Mach 1 en el área mínima, el flujo en la Tobera es estrangulado y entonces la presión en el plano de salida es igual a la contrapresión cuando el flujo estrangulado es alcanzado, la contrapresión máxima que produce el flujo estrangulado llega a ser:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{c.v.} \rho dV_0 + \int_{c.c.} PV^* dA \quad Po(0.5283Po \text{ para } \gamma=1.4)$$

Que se espera si la contrapresión es suficientemente baja  $p_b$  ? Cuando la contrapresión es  $p_{bi}$ , el fluido ha alcanzado la velocidad sónica en el plano de la salida de la Tobera.

Cualquier reducción adicional de contrapresión no tendrá efecto sobre la razón del flujo de masa ó en la distribución de presión en la Tobera convergente. Esto es una declaración de salida. Pero debemos considerar que tenemos establecido generalmente flujos alrededor de la Tobera convergente. El número de Mach nunca puede exceder de 1 en el plano de la salida de la Tobera convergente, puesto que el plano de salida representa el área mínima, así ninguna reducción adicional en la contrapresión tendrá efecto sobre el número de Mach en el plano de la salida porque la onda de sonido no puede propagarse corrientes arriba contra la velocidad del sonido en el área mínima. Con la distribución de presión dentro de la Tobera cerca de las condiciones de estancamiento del deposito, el perfil de la Tobera y el número de Mach en el plano de salida hacen que no ocurra cambio en la razón del cambio de flujo de masa ó la distribución de la presión si en el plano de salida el número de Mach permanece igual a 1.

Para una Tobera convergente en un flujo compresible, las condiciones del plano de salida son:

$$P_c = P_b \text{ para } M_e < 1$$

para un número de Mach subsónico en el plano de salida

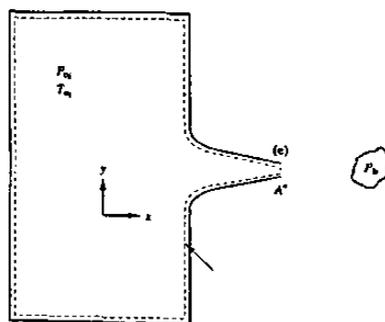
$$P_e \geq P_b \text{ para } M_e = 1$$

Este comportamiento es dramáticamente diferente para un flujo incompresible.

Fuera de la Tobera, el flujo entonces se expande y la presión es reducida al valor de contrapresión. Esta expansión es acompañada por un proceso llamado Prandtl-Meyer en la vecindad de la Tobera en el plano de la salida.

En la siguiente figura 2.4 se ilustra un tanque presurizado de un volumen  $vol.$ , que inicialmente contiene un gas a  $p_{oi}$  y  $t_{oi}$  ventilado a través de una Tobera convergente de área  $A^*$  dentro de una contrapresión  $p_b$ . El proceso se puede notar que es inestable como en el proceso de soplado, la presión en el tanque decrece. Entonces la presión en el tanque esta en función del tiempo, la razón de flujo de masa de la Tobera convergente es también una función del tiempo. Pero asumiendo que el proceso sea cuasi-estable, podemos desarrollar expresiones relacionando la presión del tanque en el tiempo.

La asumción de cuasi-estable no tiene serios errores porque será introducido en un instante dado del tiempo. El campo de flujo de la Tobera es tomado de tal manera que corresponde a la presión instantánea en el tanque. Esta asumción es valida si la presión en el tanque no cambia rápidamente con respecto al tiempo.



**Figura 2.4**

La asunción cuasi-estable será aceptada si el flujo de masa a la salida de la Tobera convergente es más pequeña comparada con la masa del gas en el tanque.

la conservación de masa es

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{c.v.} \rho dVol + \int_{s.c.} \rho V^* dA$$

aplicado al volumen de control

$$0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{P_0}{RT_0} Vol \right) + \rho_e A_e V_e$$

Donde las condiciones uniformes en el tanque, el flujo Isoentropico dentro de la Tobera, y el flujo unidimensional a través del plano de salida son asumidas.

si el análisis es limitado al flujo estrangulado entonces:

$$\rho_e A_e V_e = \rho^* A^* V^* = \dot{m}^0$$

y la razón de flujo de masa puede ser expresada como

$$\dot{m}^0 = \rho^* A^* V^* = \frac{P^*}{RT^*} A^* \sqrt{\gamma RT^*} = \sqrt{\frac{\gamma}{RT^*}} A^* P^*$$

recordemos las condiciones para el flujo estrangulado

$$P^* = \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} P_0$$

$$T^* = \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right) T_0$$

la razón de flujo de masa es:

$$\dot{m} = \sqrt{\frac{\gamma}{R A^*}} \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2} \frac{1}{T_0} \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}} P_0$$

$$\frac{Vol}{R} \frac{d}{dt} \left( \frac{P_0}{T_0} \right) = - \sqrt{\frac{\gamma}{R} \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}} \frac{A^* P}{\sqrt{T_0}}$$

Si el proceso es isotérmico entonces  $t_0 = t_{0i}$ . Este proceso resulta de un análisis relativamente simple

$$\frac{Vol}{R} \frac{1}{T_0} \frac{dP_0}{P_0} = - \sqrt{\frac{\gamma}{R} \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma + 1)}}} \frac{A^* P}{\sqrt{T_0}} dt$$

Si tomamos las condiciones iniciales de  $p_{oi}$  cuando  $t=0$  y la presión del tanque  $p_o$  en  $t$

$$t = -\frac{Vol}{A^*} \left[ \frac{1}{\gamma R T_o} \left( \frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \right]^{\frac{1}{2}} \ln \left( \frac{P_o}{P_{oi}} \right)$$

la asumcción Isoentropica.

Un proceso Isoentropico temporal ó basado en el tiempo será asumido y puede ocurrir en el tanque durante el soplado del tanque. Así en el tanque las condiciones iniciales son relatadas para las condiciones de estancamiento del tiempo por:

$$\frac{P_o}{P_{oi}} = \left( \frac{T_o}{T_{oi}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$T_o = T_{oi} \left( \frac{P_o}{P_{oi}} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}$$

dentro de la derivada del tiempo

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{P_o}{T_o} \right) = \frac{d}{dt} \left[ P_o \frac{1}{T_{oi}} \left( \frac{P_{oi}}{P_o} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \right]$$

finalmente por

$$\frac{d\left(\frac{P_o}{T_o}\right)}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{P_{oi}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{T_{oi}} P_o^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \frac{dP_o}{dt}$$

del mismo modo

$$\frac{P_o}{\sqrt{T_o}}$$

$$\frac{P_o}{\sqrt{T_o}} = \frac{P_o^{\left(\frac{\gamma-1}{2\gamma}\right)}}{\sqrt{T_{oi}}} P_o^{\left(\frac{\gamma-1}{2\gamma}\right)}$$

$$t = \frac{2Vol \left[ \left( \frac{P_o}{P_{oi}} \right)^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}} - 1 \right]}{(\gamma - 1)A^* \sqrt{\gamma RT_{oi} \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\left( \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right)}}$$

Esta ecuación fue derivada desde dos procesos Isoentropicos (1) especialmente en la Tobera en cualquier instante del tiempo y (2) temporalmente en el tanque como una función del tiempo.

Comparado con las Toberas convergentes, las Toberas convergentes-divergentes presentan un arreglo más complejo de estados posibles. Las Toberas convergentes-divergentes, por ejemplo han sido generalmente mencionadas en el contexto de flujos acelerados a velocidades supersónicas, que algunas veces las Toberas convergentes no

pueden cumplir. El punto de inicio para entender las Toberas convergentes-divergentes es el comportamiento del campo de flujo en la Tobera con respecto a la contrapresión.

Considerar una Tobera convergente-divergente conectada a un deposito con condiciones fijas de estancamiento  $p_0$  y  $T_0$  y escapando adentro una contrapresión  $p_b$  variable. El área de salida de la Tobera es  $a_e$  y el área de la garganta es  $a^*$ .

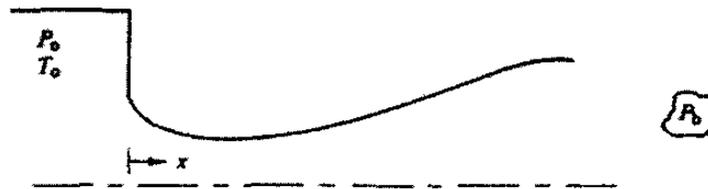


Figura 2.5 Comportamiento de una Tobera convergente-divergente

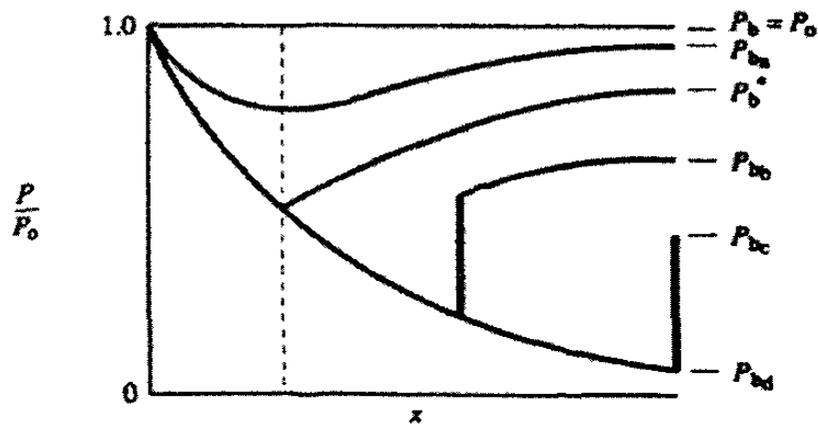
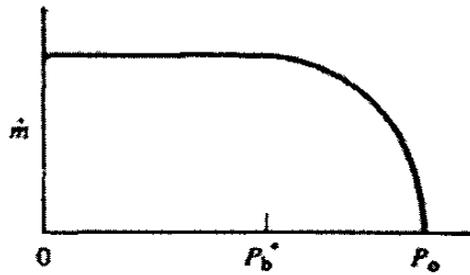


Figura 2.6 Distribución de presión para varias contrapresiones

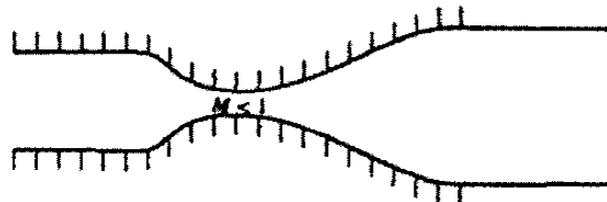


**Figura 2.7** Razón de flujo de masa como una función de la contrapresión

Cuando la contrapresión  $p_b$  es igual a la presión del depósito, no ocurre flujo. Si la contrapresión es reducida ligeramente se dice que el flujo para  $p_b$  es inducido a la Tobera.

La presión en la porción convergente de la Tobera decrece y como decrece también el área, entonces el número de Mach se incrementa. En la porción divergente el número de Mach decrece y la presión se incrementa como también se incrementa el área. Los números de Mach grandes ocurren en las áreas mínimas, los cuales son puntos de presión mínima. La contrapresión  $p_{be}$  es suficientemente alta que hace que el flujo subsónico exista a través de la Tobera.

Formas de escape para varias condiciones



**Figura 2.8** Sin estrangulamiento

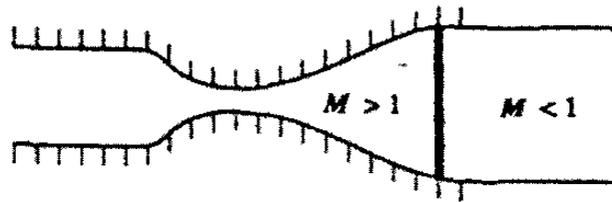


Figura 2.9 Choque normal en la Tobera

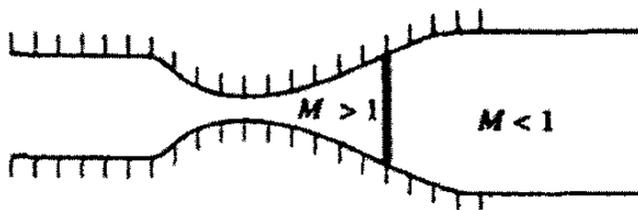


Figura 2.10 Choque normal en el plano de salida de la Tobera

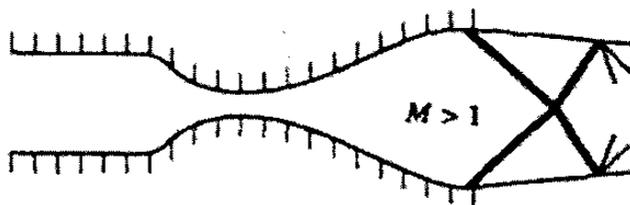


Figura 2.11 Sobreexpandido

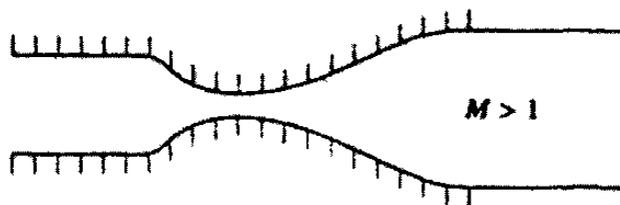
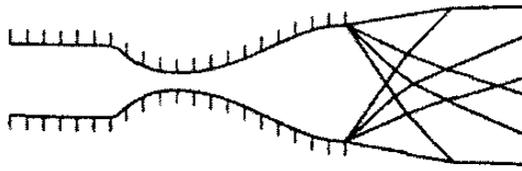


Figura 2.12 Isoentropico



**Figura 2.13** Bajo expansión

La reducción en la contrapresión baja  $p_{bd}$  no tiene efecto en el número de Mach ó en la distribución de presión dentro de la Tobera por lo tanto el flujo es Supersónico en la porción divergente.

La presión y el número de Mach en el plano de salida no son funciones de contrapresión para  $p_b < p_{bd}$ . Así el flujo en una Tobera convergente-divergente  $p_e$  puede ser más grande que  $p_b$  si el número de Mach en el plano de salida de la Tobera es supersónico. El flujo es regular desde  $p_e$  a  $p_b$  fuera de la Tobera, entonces la presión en el plano de la salida de la Tobera es más grande que la contrapresión, esta condición de flujo es llamada bajo-expansión.

La siguiente figura 2.14 se realiza con tres tipos de contrapresión que separa las condiciones de salida de la Tobera en cuatro regiones.

- 1.- El máximo flujo para estrangulamiento.
- 2.- La presión requerida para un choque normal en el plano de salida de la Tobera.
- 3.- La presión requerida para el flujo supersónico en la Tobera con una estructura sin onda exterior en el plano de salida.

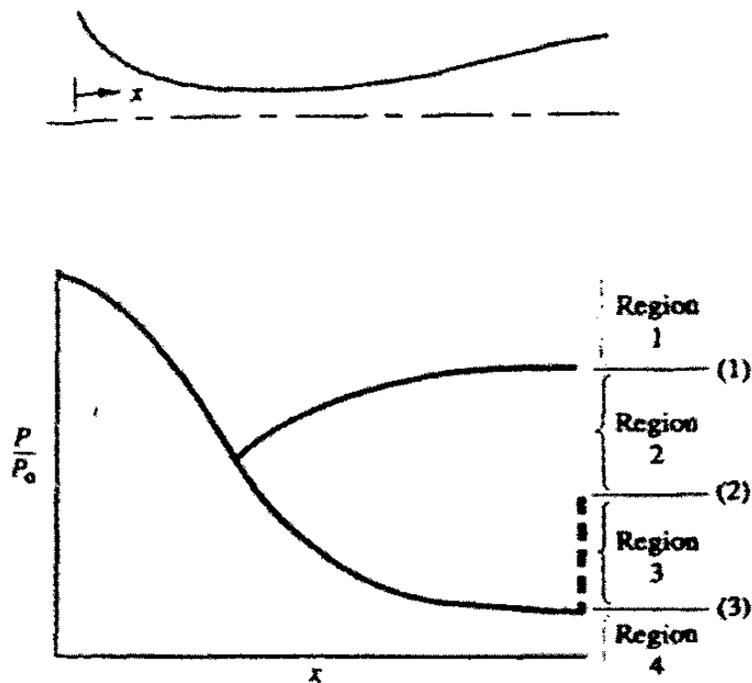


Figura 2.14

La región 1 está asociada con el flujo subsónico en todas partes de la Tobera, la región 2 con una onda de choque normal en la Tobera, la región 3 con una onda de choque oblicua en el borde de la Tobera y la región 4 con una onda de expansión en el borde de la Tobera.

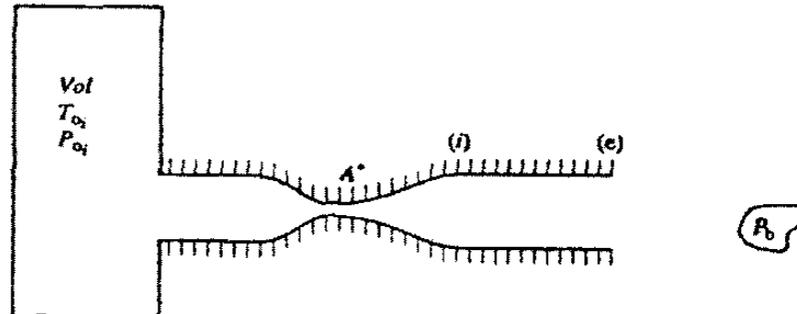
## 2.2 Túneles de viento supersónicos

Un túnel de viento supersónico facilita en un laboratorio, el poder producir condiciones que se puedan usar para simular un vuelo con un número de Mach supersónico. El uso de Toberas convergentes-divergentes para producir flujos supersónicos se explicó anteriormente.

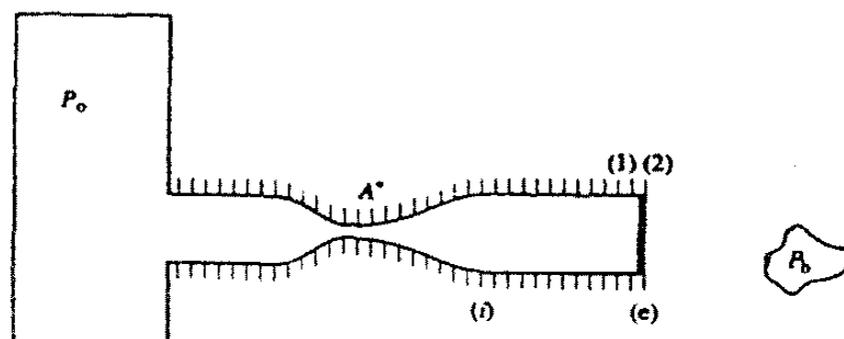
Se identifican las siguientes cuatro características para el soplado en túneles de viento:

- 1.- Alta presión de un gas almacenado en tanques para ductos con área continua en túneles de viento.
- 2.- Un compresor y un difusor para área continua en túneles de viento.
- 3.- Un tanque vacío con entrada atmosférica en túneles de viento.
- 4.- Tubos de choque para una entalpía alta en túneles de viento.

Esta sección está interesada solamente en los tipos 1 y 2 desde luego la mayoría de los túneles de viento caen dentro de estas categorías.



**Figura 2.15** Soplado en un Túnel de Viento



**Figura 2.16** Choque normal en la sección de prueba en la salida

Los procesos de soplado fueron discutidos en términos del flujo estrangulado en Toberas convergentes. Muchas de estas discusiones y desarrollos son usuales para soplado en operaciones de túneles de viento.

El soplado típico del túnel de viento consiste de un tanque presurizado y alimentando una Tobera convergente-divergente.

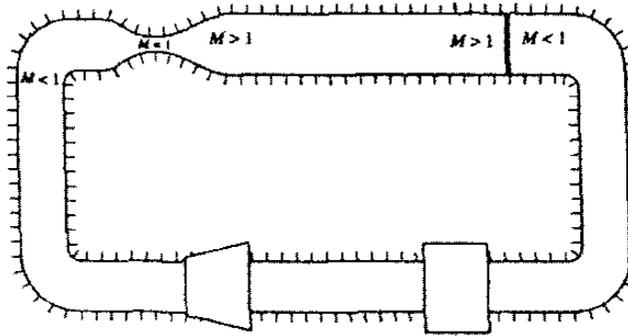
El propósito del túnel de viento es para desarrollar un número de Mach específico, y la razón de área de la sección de prueba en la sección de prueba. Así por lo tanto la presión en el tanque es suficiente para proveer la región 3 ó la región 4 del flujo, la sección de prueba opera con el número de Mach especificado ó de diseño.

Cuando la presión del depósito llega a ser menor con respecto a la contrapresión, el flujo en la región 2 se inicia y la sección de prueba no opera supersónicamente.

Dos de las opciones simples para prolongar las condiciones en la sección de la prueba y que sean aceptables son

Descargar la sección de prueba en un tanque vacío inicialmente y/o para proveer un difusor entre la sección de prueba y la contrapresión. Ambas de estas opciones resultan en una presión baja del depósito para las regiones 3 y 4 del flujo. El tanque vacío esencialmente provee una contrapresión baja por el sistema.

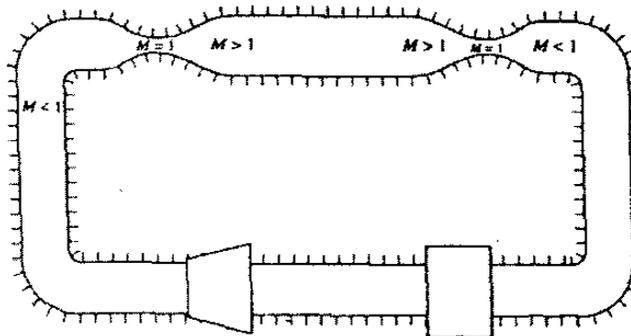
El flujo supersónico continuo en túneles de viento incluye otras clases de túneles de viento que tenemos que examinar. Los túneles de viento son básicamente cerrados en circuitos que contienen dispositivos como compresores e intercambiadores de calor. Por supuesto el túnel tiene flujo continuo, el compresor debe ser suficientemente grande para vencer las pérdidas de estado estable del sistema para proveer el arranque. El intercambiador de calor debe estar provisto de un gas frío entonces el gas es calentado por el compresor.



**Figura 2.17** Túnel de viento continuo

La potencia de estado estable requerida por el compresor puede ser minimizado por la minimización de las pérdidas que el compresor debe tener.

Una componente significativa de las pérdidas puede ser menor en la presión de estancamiento cuando el flujo es desacelerado, vía una onda de choque desde velocidades supersónicas a subsónicas así debe ser a priori para la entrada del compresor. Esta pérdida de presión de estancamiento puede ser reducida por el decremento del número de Mach en la onda de choque que determina el flujo supersónico. El concepto esquemático está en la figura siguiente **2.18**. El difusor es básicamente una sección adicional convergente-divergente que es usado para reducir el ingreso del flujo supersónico al flujo subsónico sin travesía a través de una onda de choque.

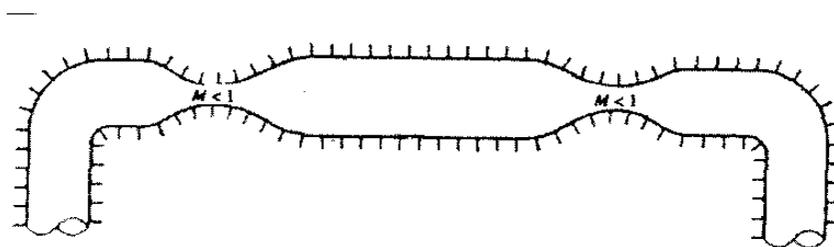


**Figura 2.18** Túnel de viento continuo con difusor

Considerar la secuencia mostrada en las figuras siguientes 2.19

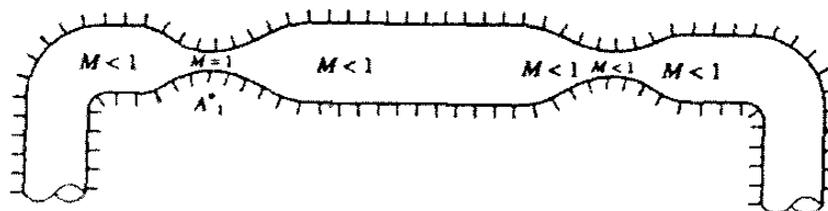
Ya que la potencia es inicialmente aplicada al compresor corrientes-arriba, el flujo es subsónico a través de la red entera. Los incrementos adicionales en potencia al compresor en dirección del estrangulamiento del flujo son en el área mínima, con el flujo subsónico en otra parte.

La distribución del número de Mach del túnel de viento con estrangulamiento inicial se ilustra en la figura 2.19b

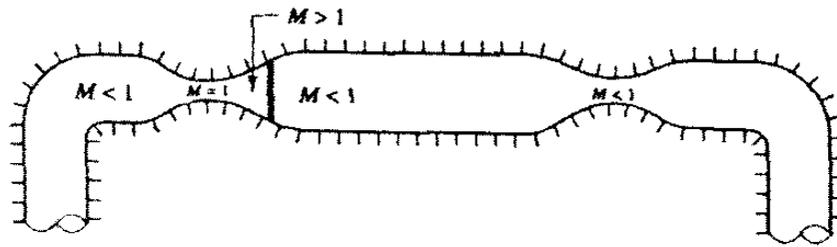


**Figura 2.19a** Marcha inicial

Cualquier incremento adicional en potencia para el compresor resultará un establecimiento de flujo supersónico en una región corrientes-abajo de la primera garganta. El incremento adicional en potencia al compresor causa que el choque normal deba moverse adicionalmente en la porción divergente fig. 2.19c

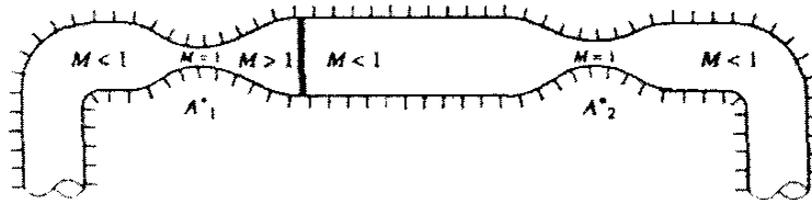


**Figura 2.19b** Primera garganta sónica



**Figura 2.19c** Choque y sección divergente

Eventualmente el choque normal será poseionado en la salida de la sección divergente, la cual es la sección de prueba. Esta condición se ilustra en la figura 2.19d



**Figura 2.19d** Choque en la sección de prueba de la entrada

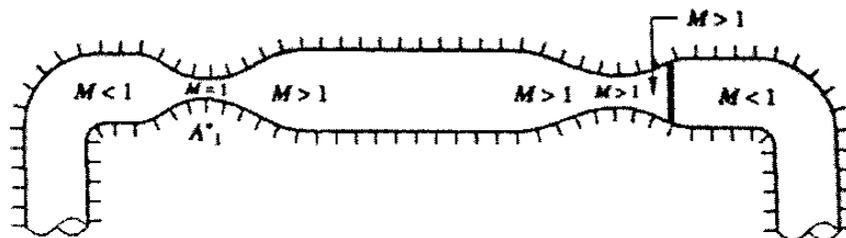
La región supersónica será determinada por una onda de choque normal a través de la cual la presión de estancamiento es mínima. La segunda garganta del difusor debe ser más grande que la primera garganta. Las grandes presiones de estancamiento que se pierden asociadas con el proceso de marcha ocurrirían cuando la onda de choque normal esté en la sección de prueba.

La garganta del difusor debe ser suficientemente grande para que pase la razón de flujo de masa requerido aun con la presión de estancamiento reducida corrientes-abajo de la onda de choque.

La primera garganta y la garganta de difusor son entonces:

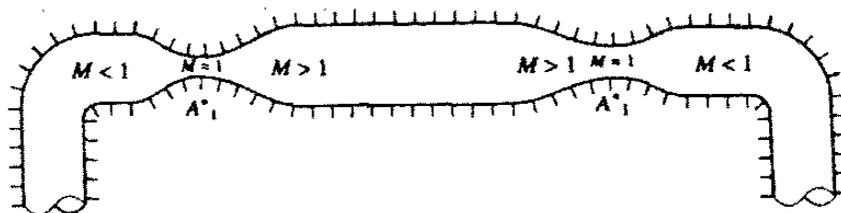
$$\frac{A_2^*}{A_1^*} = \frac{P_{01}}{P_{02}}$$

Para flujos en un cambio de área simple, algún incremento adicional en la potencia del compresor resultará en la onda de choque moviéndose en la sección de convergencia, que se mueve a través de la garganta del difusor. Esto debido a que la onda de choque no puede permanecer en una sección de convergencia, que se mueve a través de la garganta del difusor ó sea la segunda garganta, ver la figura 2.19e



**Figura 2.19e** Choque tragado

Entonces la onda de choque ha sido tragada y ambas gargantas ahora poseen la misma presión de estancamiento. Si el difusor de área de la garganta es variable, puede ser reducida a la misma área como la primera garganta. Esta condición se muestra en la figura 2.19f



**Figura 2.19f.** Desaceleración de choque libre con área variable en la garganta del difusor

La figura 2.19g ilustra la operación del túnel de viento para un difusor de área con el mínimo número de Mach para una onda de choque normal.

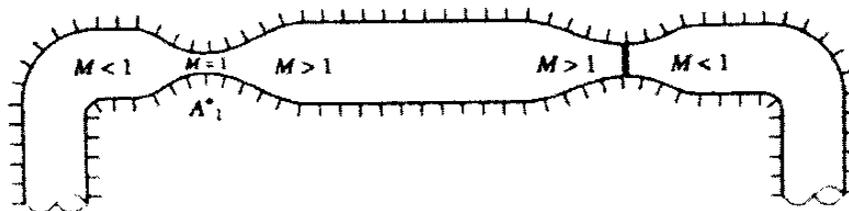


Figura 2.19g

### 2.3 Entradas subsónicas y supersónicas

En esta sección tenemos que investigar, en el sentido unidimensional, los conceptos fundamentales y las ideas concernientes a entradas subsónicas y supersónicas.

Las entradas son ampliamente divididas en subsónicas y supersónicas dependiendo del número de Mach de fluencia (vuelo) del vehículo. Para cada entrada subsónica ó supersónica, la corriente libre de aire entrando en la entrada es llamada el aire de captura. Lejos de las corrientes-arriba de una entrada, el área definida por las líneas de corriente encerrando al aire de captura es llamada el área de captura  $a_0$ . El área de captura es ilustrada en la figura 2.20

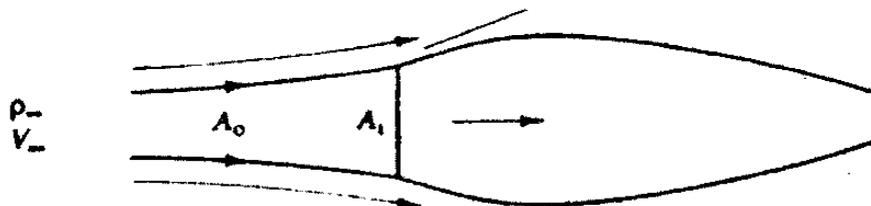


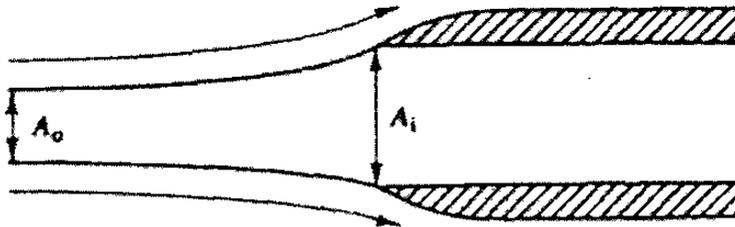
Figura 2.20

Si el área de entrada de la entrada  $a_i$  es más grande que el área de captura, entonces  $P_\infty V_\infty (A_o - A_i)$  representa el flujo que es vertido sobre la entrada.

El flujo sobrevertido es desacelerado corrientes-arriba en la entrada de la entrada y entonces acelerado al pasar sobre el borde principal de la entrada.

Las entradas para un número de Mach de vuelo supersónico están invariablemente implicadas con ondas de choque y la existencia de pérdidas de presión y de estancamiento. El sobrevertido en entradas supersónicas puede también ser un problema que resulta en el incremento de entrada de arrastre.

En una entrada subsónica la velocidad del aire entrando en la entrada ó sea el aire capturado es subsónico en todas las partes de la trayectoria del flujo. Las entradas subsónicas pueden ser divididas en entradas de Compresión Externa y de Compresión Interna. En las figuras 2.21 a y b se ilustran dos tipos básicos de entradas subsónicas.

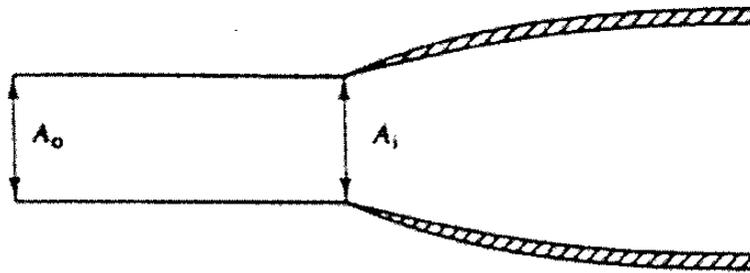


**Figura 2.21 a** Compresión Externa

Esta compuesta por un ducto de área constante. Una vez que el aire capturado entra al ducto de área constante su velocidad es constante. Cualquier difusión que tome lugar debe ocurrir antes de la entrada del aire: entonces de aquí el nombre de compresión externa (en una entrada el proceso es Isoentropico).

Generalmente las entradas subsónicas de compresión externa no son atractivas para las aplicaciones del número de Mach subsónico alto, debido a la posibilidad de un número de Mach local más grande que 1

Las entradas subsónicas de compresión interna se ilustran en la figura 2.21b



**Figura 2.21 b** Compresión Interna

Como no ocurre difusión fuera de la entrada, el área de captura es igual al área de entrada de la entrada. Se sugiere que el ángulo de divergencia para la entrada de compresión interna cilíndrica no sea más que de 5 a 7 grados, así la separación se puede evitar. El diseño de entradas de compresión interna establece una relación entre longitud, ancho y pérdida de presión de estancamiento.

Las entradas supersónicas debido a que invariablemente implican ondas de choque, son generalmente más difíciles de diseñar ó de operar que las entradas sónicas.

Las entradas supersónicas pueden ser ampliamente divididas en choque normal, choque oblicuo y entradas convergente-divergente. Las entradas de choque normal son similares en apariencia a entradas subsónicas de compresión interna. Las entradas que implican ondas de choque oblicuo son clasificadas como de compresión externa ó de compresión mixta, dependiendo en donde la difusión de flujo supersónico sea terminada.

Las configuraciones convergentes-divergentes también pueden ser usadas como entradas supersónicas. Las entradas de choque normal son algunas veces llamadas entrada de **Pitot** debido a su semejanza con el **Tubo de Pitot**.

La entrada de choque normal esta diseñada para operar con un choque normal junto al borde de la entrada, como se ilustra en la figura 2.22a, si la contrapresión se aumenta el choque normal se mueve hacia afuera del borde de la entrada como se puede ver en la figura 2.22b, y un decremento en la contrapresión causa que el choque sea tirada hacia adentro de la entrada donde una expansión liviana ó sistema de onda de compresión se genere adelante del choque normal, esto se ilustra en la figura 2.22c

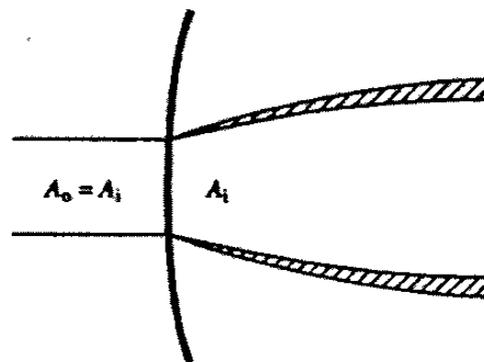


Figura 2.22a

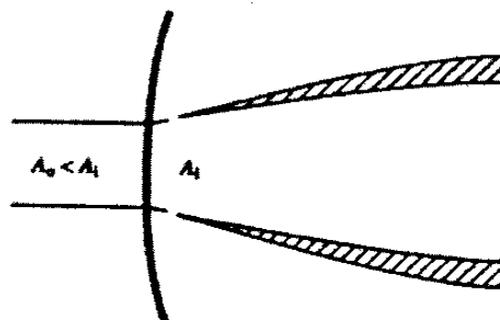


Figura 2.22b

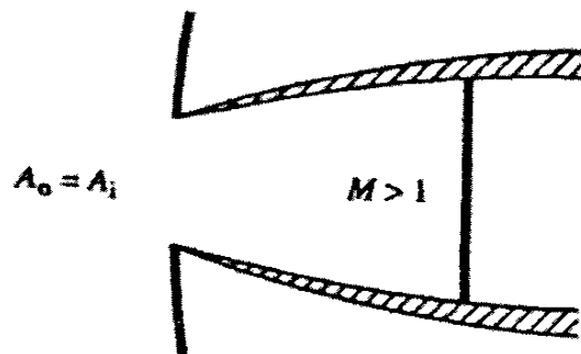


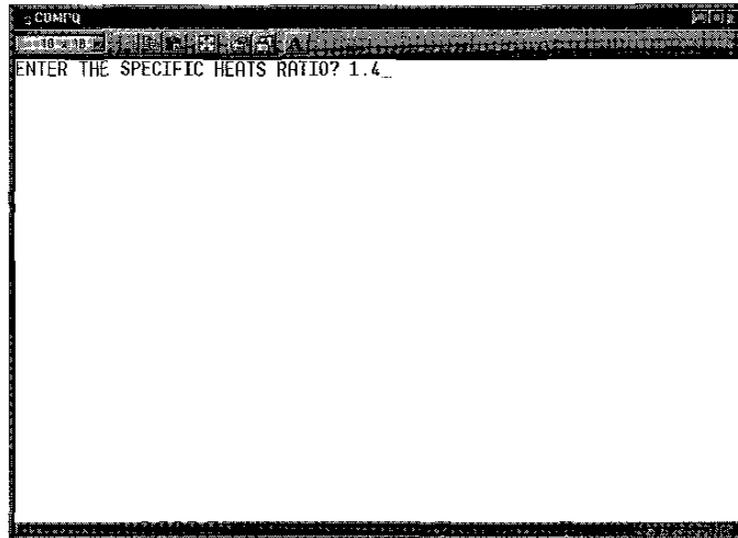
Figura 2.22c

La región supersónica eventualmente termina por una onda de choque normal relativamente fuerte.

Debido a la excesiva pérdida de presión de estancamiento con incremento del número de Mach en el vuelo, la entrada de choque normal no es atractiva para usarse con números de Mach superiores a 1.8

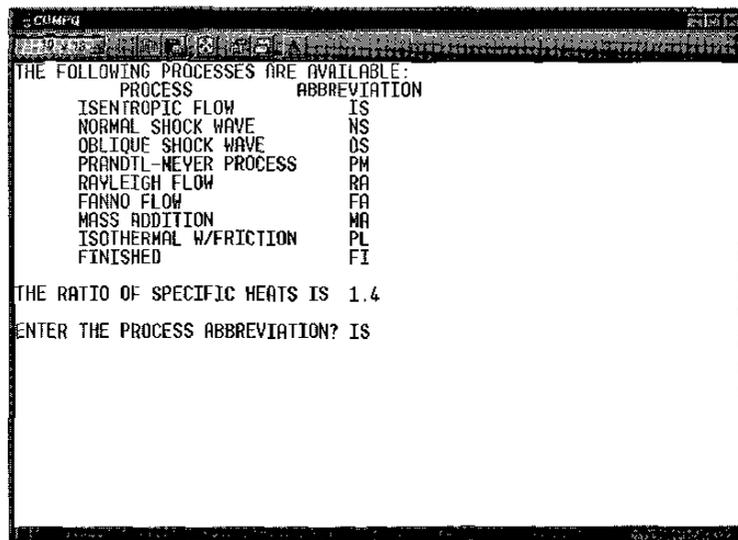
## 2.4. Uso del programa de aplicación (COMPQ)

Utilizando el programa **Compq** nos despliega una pantalla que nos pide como dato inicial la razón de calor específico. Escogeremos **1.4** (supondremos que es aire)



**Pantalla 2.1**

Nos despliega una segunda pantalla, esta pantalla nos indica cuales son las opciones que podemos utilizar.



**Pantalla 2.2**

Si utilizamos la opción **IS** (flujo isoentropico) nos despliega una tercera pantalla.

```

COMPT
ISENTROPIC PROCESS CALLED FOR
INPUT PARAMETERS ARE:
  PRESSURE RATIO      P
  MACH NUMBER        M
  AREA RATIO         A
  TEMPERATURE RATIO  T
  AREA CHANGE PROCESS AC
  M1-M2 AREA REQUIRED AR

ENTER THE DESIRED LETTER? P
ENTER THE PRESSURE RATIO, P/P0 (MUST BE < 1.0).?

```

### Pantalla 2.3

Esta pantalla nos indica cuales son los parámetros de entrada al programa.

De acuerdo a los datos que tengamos del problema para este caso escogeremos el caso **P** y en esta misma pantalla nos pide que se introduzca la razón de presión **P / Po** ( debe ser  $< 1$  ) para este caso 0.9

```

COMPT
ISENTROPIC PROCESS CALLED FOR
INPUT PARAMETERS ARE:
  PRESSURE RATIO      P
  MACH NUMBER        M
  AREA RATIO         A
  TEMPERATURE RATIO  T
  AREA CHANGE PROCESS AC
  M1-M2 AREA REQUIRED AR

ENTER THE DESIRED LETTER? P
ENTER THE PRESSURE RATIO, P/P0 (MUST BE < 1.0).? 0.9

  MACH      T RATIO    P RATIO    A RATIO    IMPULSE RATIO
  0.3909    0.9703    0.9000    1.6204    1.3963

STAGNATION PRESSURE AND TEMPERATURE ARE CONSTANT FOR ISENTROPIC FLOW.
ARE ADDITIONAL ISENTROPIC RELATIONS DESIRED? ...

```

### Pantalla 2.4

Esta pantalla nos muestra el número de **Mach**, y las razones de **Temperatura**, de **Área** y de **Impulso** para la razón de presión dada, por otra parte nos pregunta si queremos otras relaciones Isoentropicas.

Nota: Tenemos la opción de seleccionar **SI** ó **NO**

Si escogemos el caso **M** el programa nos pide que se introduzca el número de **Mach** ( puede ser menor ó mayor que 1 ) si escogemos 1

```

ISENTROPIC PROCESS CALLED FOR
INPUT PARAMETERS ARE:
  PRESSURE RATIO      P
  MACH NUMBER        M
  AREA RATIO         A
  TEMPERATURE RATIO  T
  AREA CHANGE PROCESS AC
  M1-M2 AREA REQUIRED AR

ENTER THE DESIRED LETTER? M
ENTER THE MACH NUMBER? 1

  MACH      T RATIO    P RATIO    A RATIO    IMPULSE RATIO
  1.0000    0.8333    0.5283    1.0000    1.0000

STAGNATION PRESSURE AND TEMPERATURE ARE CONSTANT FOR ISENTROPIC FLOW.
ARE ADDITIONAL ISENTROPIC RELATIONS DESIRED? _

```

### Pantalla 2.5

Esta pantalla nos muestra las razones de **Temperatura**, **Presión**, **Área** y de **Impulso** para ese número de Mach dado.

Si escogemos el caso **A** al programa nos pide se introduzca la razón de área ( debe ser  $> 1$  ) si escogemos 1.5

```

COMPQ
ISENTROPIC PROCESS CALLED FOR
INPUT PARAMETERS ARE:
  PRESSURE RATIO      P
  MACH NUMBER         M
  AREA RATIO          A
  TEMPERATURE RATIO  T
  AREA CHANGE PROCESS AC
  M1-M2 AREA REQUIRED  AR

ENTER THE DESIRED LETTER? A

ENTER THE AREA RATIO? 1.5

  MACH      T RATIO      P RATIO      A RATIO      IMPULSE RATIO
  0.4303    0.9643      0.8805      1.4999      1.3117

  MACH      T RATIO      P RATIO      A RATIO      IMPULSE RATIO
  1.8541    0.5926      0.1602      1.4999      1.1015

STAGNATION PRESSURE AND TEMPERATURE ARE CONSTANT FOR ISENTROPIC FLOW.
ARE ADDITIONAL ISENTROPIC RELATIONS DESIRED?

```

Pantalla 2.6

Esta pantalla nos muestra el número de **Mach**, y las razones de **Temperatura**, de **Presión** y de **Impulso** tanto para corrientes arriba como para corrientes abajo.

Si escogemos el caso **T** el programa nos pide la razón de temperatura  $T/T_0$  (debe ser  $< 1$ ) si escogemos 0.5 .

```

COMPQ
ISENTROPIC PROCESS CALLED FOR
INPUT PARAMETERS ARE:
  PRESSURE RATIO      P
  MACH NUMBER         M
  AREA RATIO          A
  TEMPERATURE RATIO  T
  AREA CHANGE PROCESS AC
  M1-M2 AREA REQUIRED  AR

ENTER THE DESIRED LETTER? T

ENTER THE TEMPERATURE RATIO, T/T0 (MUST BE < 1.0)? 0.5

  MACH      T RATIO      P RATIO      A RATIO      IMPULSE RATIO
  2.2361    5.000E-01    8.839E-02    2.070E+00    1.1547

STAGNATION PRESSURE AND TEMPERATURE ARE CONSTANT FOR ISENTROPIC FLOW.
ARE ADDITIONAL ISENTROPIC RELATIONS DESIRED? _

```

Pantalla 2.7

Esta pantalla nos muestra el número de **Mach** y las razones de **Presión, Impulso y Área**.

Si escogemos el caso **AC** el programa nos pide el número de Mach y la razón de cambio de área si escogemos 1 y 1.4 respectivamente.

Nota: asegurarse que al introducir estos valores al programa estén en el mismo renglón y separados por una coma (1,1.4).

```

CONPO
ISENTROPIC PROCESS CALLED FOR
INPUT PARAMETERS ARE:
    PRESSURE RATIO      P
    MACH NUMBER        H
    AREA RATIO         A
    TEMPERATURE RATIO  T
    AREA CHANGE PROCESS AC
    M1-M2 AREA REQUIRED  AR

ENTER THE DESIRED LETTER? AC
ENTER M1 AND A2/A1 ? 1,1.4

AREA CHANGE PROCESS IN ISENTROPIC FLOW
  M1      M2      A2/A1      T2/T1      P2/P1
  1.0000   0.4708   1.4000   1.1491   1.6263

THE PROCESS IS ISENTROPIC; HENCE NO CHANGE IN STAGNATION PROPERTIES.
ARE ADDITIONAL ISENTROPIC RELATIONS DESIRED? _

```

### Pantalla 2.8

Esta pantalla nos muestra el número de **Mach** tanto para la región 1 como para la región 2 así como también las razones de **Temperatura y presión** para ambas regiones.

Si escogemos el caso **AR** (cambio de área requerida) el programa nos pide los números de **Mach 1 y Mach 2** si escogemos 1 y 1.5 respectivamente.

Nota: asegurarse que al introducir estos valores al programa estén en el mismo renglón y separados por una coma (1,1.5).

```

COMP2
ISENTROPIC PROCESS CALLED FOR
INPUT PARAMETERS ARE:
  PRESSURE RATIO      P
  MACH NUMBER        M
  AREA RATIO         A
  TEMPERATURE RATIO  T
  AREA CHANGE PROCESS AC
  M1-M2 AREA REQUIRED  AR

ENTER THE DESIRED LETTER? AR

ENTER THE VALUE OF M1 AND M2? 1,1.5

AREA CHANGE PROCESS IN ISENTROPIC FLOW
  M1      M2      A2/A1      T2/T1      P2/P1
  1.0000   1.5000   1.1762   0.8276   0.5156

THE PROCESS IS ISENTROPIC; HENCE NO CHANGE IN STAGNATION PROPERTIES.
ARE ADDITIONAL ISENTROPIC RELATIONS DESIRED?

```

### Pantalla 2.9

Esta pantalla nos muestra las razones de **Área**, **Temperatura** y **Presión** para ambas regiones.

En todos los casos también nos indica que las propiedades de estancamiento son constantes.

## CAPÍTULO 3

# APLICACIONES DEL FLUJO FANNO EN LAS TOBERAS

### 3.1 En una Tobera convergente

Si consideramos que en una Tobera convergente como se muestra en la figura 3.1, la parte convergente de la Tobera puede ser moldeada para un flujo Isoentrópico y el segmento de área constante como un flujo FANNO.

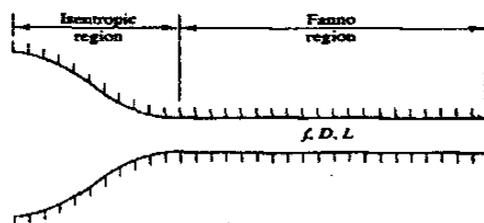
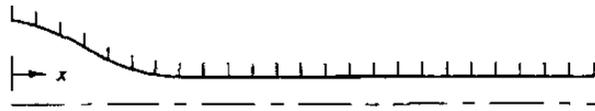


Figura 3.1 Tobera convergente con un ducto de área constante

En un flujo no *simple* cuando se tiene un cambio de área y fricción simultáneamente, los efectos que ocurren con respecto al cambio de área normalmente son más que los que ocurren por la fricción.

El comportamiento de una Tobera convergente con un ducto de área constante con respecto a la contrapresión puede ser establecida de igual manera como la de una Tobera convergente. Las siguientes figuras nos proporcionan detalles de su comportamiento.

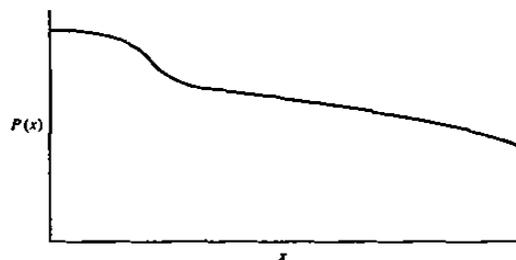


**Figura 3.2a**

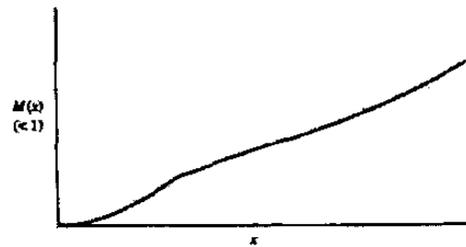
En la figura 3.2a Si la contrapresión y la presión del depósito son iguales el flujo no ocurre.

Si la contrapresión es disminuida ligeramente el flujo se induce al sistema.

La presión en el plano de salida del ducto debe seguir las mismas características como las de cualquier ducto convergente en el plano de salida. Si el número de Mach en la salida es subsónico, la presión en el plano de salida del ducto debe ser igual a la contrapresión y si el número de Mach en la salida es sónico ó supersónico la presión en el plano de salida del ducto debe ser igual ó más grande que la contrapresión. En las figuras 3.2b y 3.2c se muestra una distribución tanto de la presión como del número de Mach.

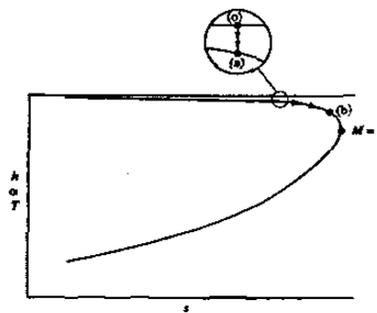


**Figura 3.2b** Distribución de presión



**Figura 3.2c** Distribución del número de Mach

El comportamiento de la línea de FANNO se ilustra en la figura 3.2d



**Figura 3.2d** Representación de la línea FANNO.

Como la línea vertical de la figura va desde el estado de estancamiento "o" al estado de la salida de la Tobera "a", el ducto de área constante, como el segmento del flujo FANNO es indicado como: Desde el estado "a" al plano de la salida "b".

En ambos segmentos, el de la Tobera convergente y el del ducto con área constante, el número de Mach se incrementa y la presión disminuye. (un número de Mach muy grande ocurre dentro del sistema en la salida del ducto) Este comportamiento es evidente examinando la línea FANNO.

El flujo no puede estrangularse en la salida de la Tobera convergente porque es a su vez la entrada a la región del flujo FANNO, esto sucede en el punto con máxima entropía y moviéndose a lo largo de la línea FANNO dentro de las regiones de disminución de entropía y esto viola la 2da. Ley de la Termodinámica.

El único camino posible es por el flujo que debe ser subsónico en el plano de salida de la Tobera el cual es también la entrada hacia la región del flujo FANNO y por el flujo que se mueve subsónicamente hacia el punto sónico sobre la línea FANNO.

Una vez que la presión es reducida bastante baja por el flujo estrangulado en la Tobera convergente con un ducto de área constante, reducciones posteriores en la contrapresión no tendrán efecto sobre la razón de flujo de masa del sistema, ó las distribuciones del número de Mach ó de las propiedades a través del sistema.

Esto es exactamente el comportamiento de la Tobera convergente con respecto a la contrapresión. En la figura 3.3 se ilustra el comportamiento de un flujo estrangulado dentro de una Tobera convergente con un ducto de área constante

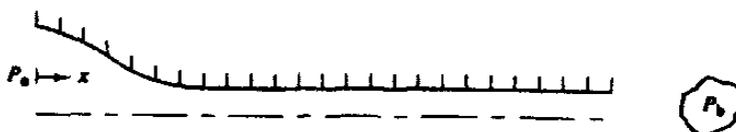


Figura 3.3a Esquema

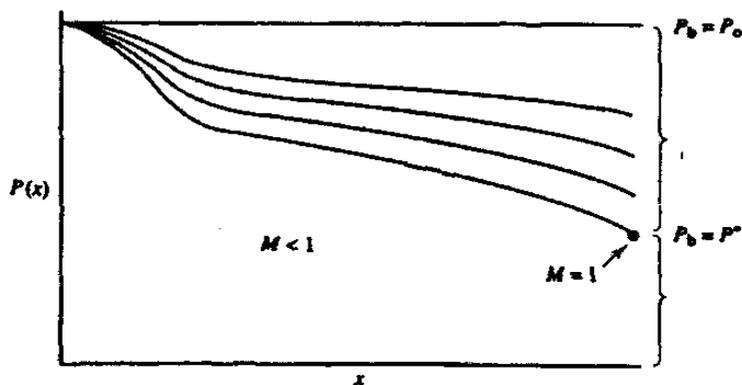
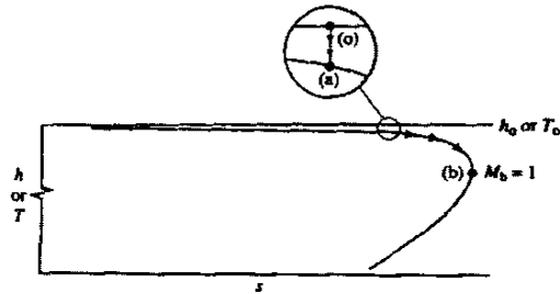


Figura 3.3b Distribución de presión



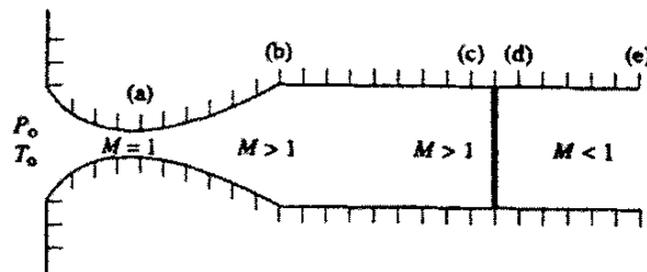
**Figura 3.3c** Comportamiento de la línea FANNO

### 3.2 En una Tobera convergente-divergente

Una Tobera convergente-divergente también puede ser usada con un segmento de ducto que contenga área constante.

Usualmente las Toberas convergentes-divergentes van adelante (antes) que el segmento que contiene área constante.

En la figura 3.4 se ilustra un arreglo típico con regiones FANNO e Isoentropico.



**Figura 3.4** Tobera convergente-divergente conectada a un ducto con área constante.

Puesto que el número de Mach en la salida de una Tobera convergente-divergente puede ser en todo caso subsónico ó supersónico y dado que las ondas de choque pueden ocurrir en ambas partes ( en la Tobera ó en el ducto ) existe entonces

una diversidad de condiciones de flujo en este tipo de arreglo, comparado con las condiciones simples de un arreglo de Tobera convergente con un segmento de ducto con área constante.

La principal diferencia de un flujo FANNO supersónico ó subsónico es la posible longitud del segmento de ducto que contiene área constante, mientras que para un flujo supersónico es limitada, para un flujo subsónico es ilimitada. En la figura 3.5a se muestra un segmento de ducto con un número de Mach supersónico en la entrada.

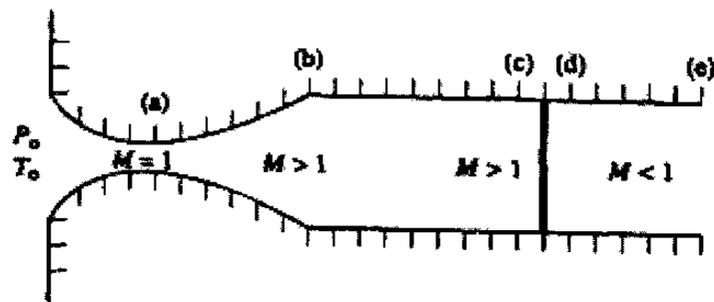
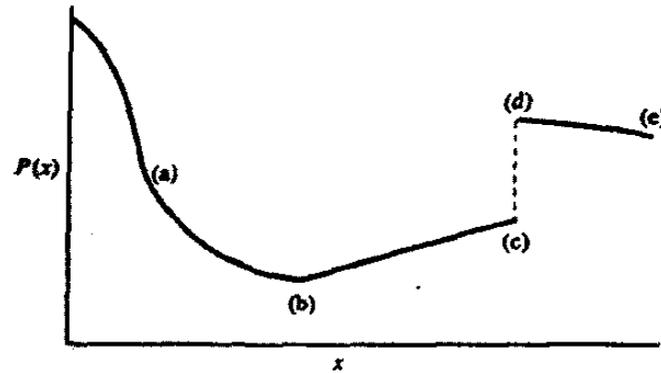


Figura 3.5a Esquema

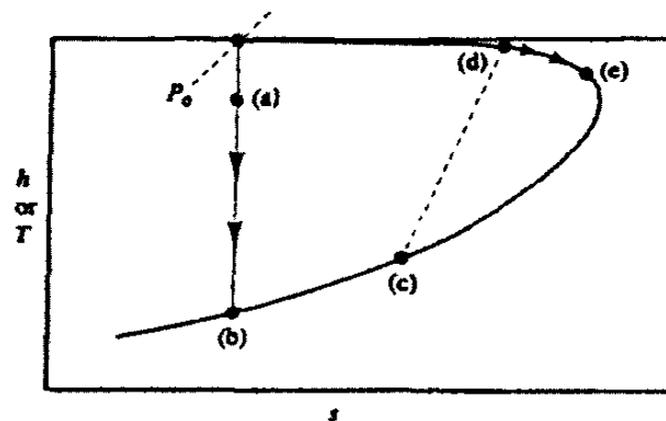
Para un número de Mach supersónico en la entrada dado, el parámetro  $4fL^*/Dh$  determina la máxima longitud del ducto que contenga el área constante en el cual el flujo supersónico puede ser mantenido. Si la longitud actual del segmento de ducto para un número de Mach supersónico en la entrada es más grande que la máxima longitud permitida para un flujo supersónico entonces las ondas de choque deben estar en el ducto.

Una onda de choque normal puede también aparecer en un flujo FANNO con un número de Mach supersónico en la entrada, si la longitud actual del ducto es menor que la longitud permitida para un flujo supersónico. La localización exacta de la onda de choque puede depender de la forma y de las condiciones del ducto, así como de la contrapresión.

Esta situación se muestra también en la figura anterior 3.5a, la distribución de presión así como la línea FANNO se ilustran en las figuras 3.5b y 3.5c respectivamente.



**Figura 3.5b** Distribución de presión



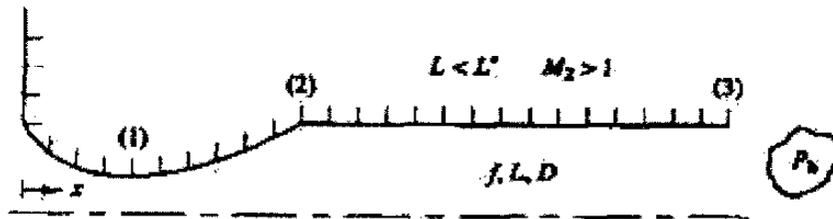
**Figura 3.5c** Comportamiento de la línea FANNO

Por medio de la onda de choque el número de Mach va de supersónico a subsónico, puesto que el proceso no es isoentropico, la entropía entonces se incrementa.

Se efectúa un salto de la línea de región FANNO supersónica, a la línea de región FANNO subsónica, cuando en la entrada a un segmento de un ducto con área constante el número de Mach es supersónico. Existen dos posibilidades para las condiciones del flujo dentro del ducto, Primero si la longitud actual es menor que la longitud permitida,

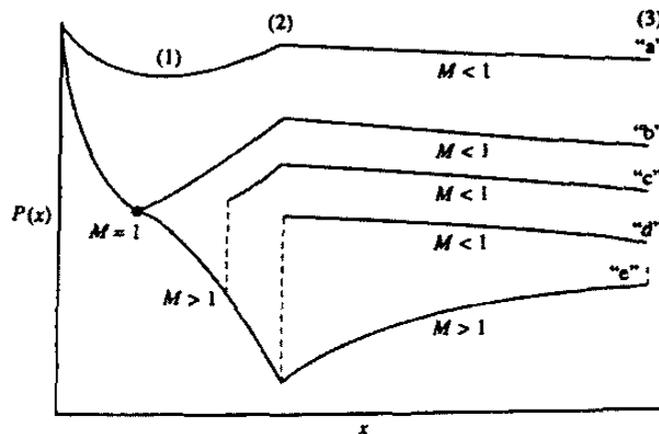
la onda de choque puede ó no puede estar en el ducto, Segundo, si la longitud es más grande que la longitud permitida la onda de choque está en el ducto.

El comportamiento de la contrapresión puede ser examinado en el primer caso y en la figura 3.6a se ilustra el sistema.

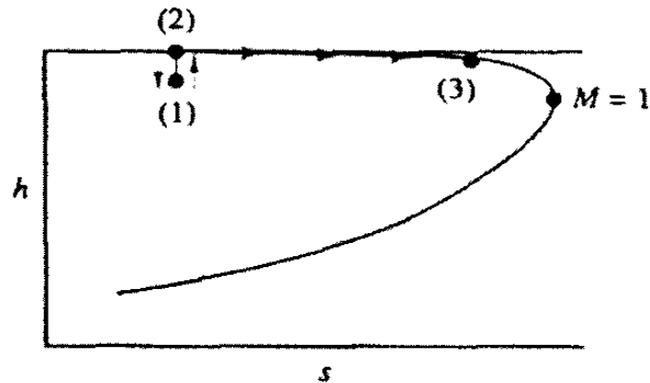


**Figura 3.6a** Esquema

Como la contrapresión decrece el flujo se induce al sistema. La distribución de la presión para una contrapresión dada resulta completamente de un flujo subsónico dentro del sistema esto se muestra en la curva "a" de la figura 3.6b, y el comportamiento de la línea FANNO en la figura 3.6c.

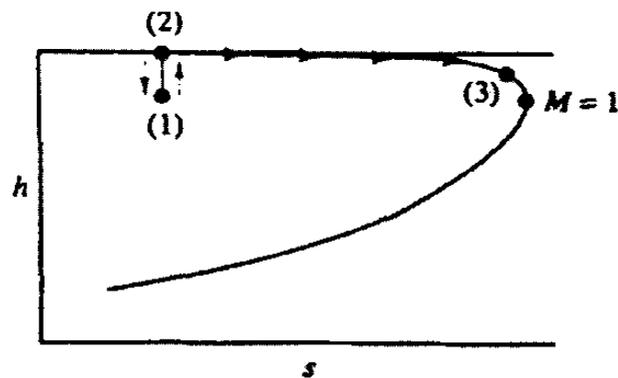


**Figura 3.6b** Distribución de presión para diferentes contrapresiones



**Figura 3.6c** Comportamiento del flujo FANNO para la curva "a"

Para una contrapresión suficientemente baja el flujo estrangulado está en la garganta de la Tobera. En la curva "b" de la figura 3.6b se observa la distribución de presión y en la figura 3.6d se ilustra el comportamiento del flujo FANNO.



**Figura 3.6d**

Posteriores reducciones en la contrapresión van adelante del choque normal constante en la porción divergente de la Tobera.

La distribución de la presión para un choque en la Tobera está ilustrada en la curva "c" de la figura 3.6b, y el camino FANNO en la figura 3.6e

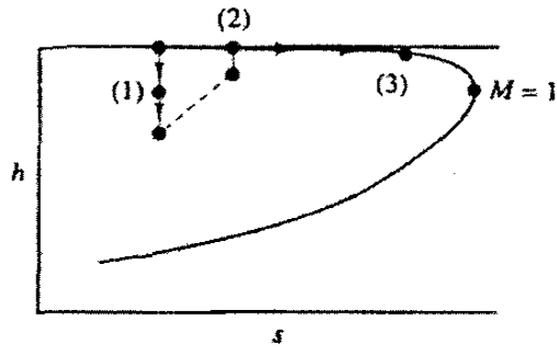


Figura 3.6e

Una posterior reducción en la contrapresión lleva la onda de choque hacia el plano de salida de la Tobera, esto se muestra en la curva "d" de la figura 3.6b, y el camino FANNO en la figura 3.6f

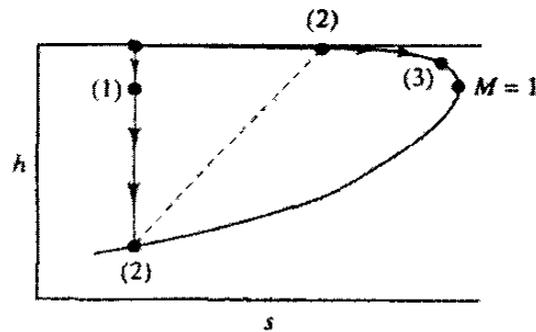


Figura 3.6f

Una posterior reducción en la contrapresión lleva el choque hacia adelante en el plano de salida de la Tobera.

Esto se muestra en la curva "e" de la figura 7-19b, y el camino FANNO en la figura 3.6g

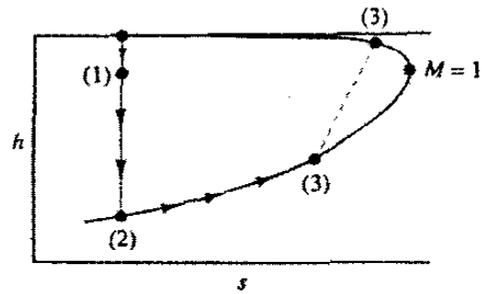
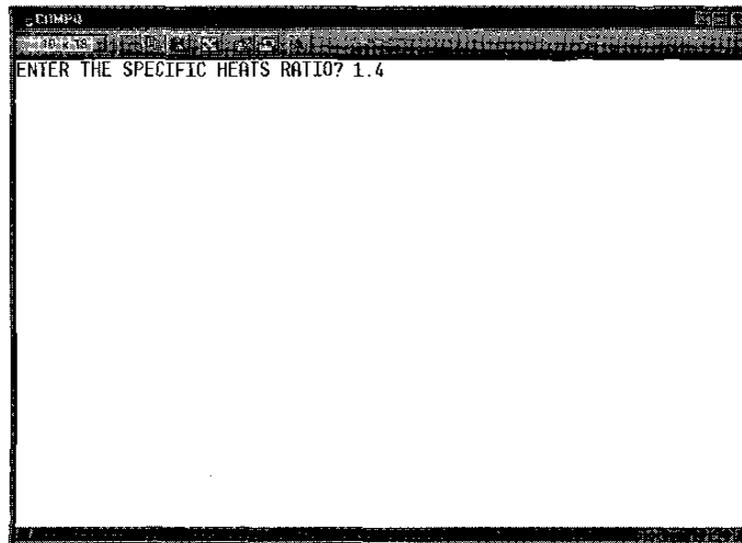


Figura 3.6g

### 3.3. Uso del programa de aplicación (COMPQ)

Utilizando el programa **Compq** nos despliega una pantalla y nos pide como dato inicial la razón de calor específico. Escogeremos **1.4** (supondremos que es aire).



Pantalla 3.1

Nos despliega una segunda pantalla

```

COMPO
THE FOLLOWING PROCESSES ARE AVAILABLE:
PROCESS          ABBREVIATION
ISENTROPIC FLOW  IS
NORMAL SHOCK WAVE NS
OBLIQUE SHOCK WAVE OS
PRANDTL-MEYER PROCESS PM
RAYLEIGH FLOW   RA
FANNO FLOW      FA
MASS ADDITION   MA
ISOTHERMAL W/FRICTION PL
FINISHED        FI

THE RATIO OF SPECIFIC HEATS IS 1.4
ENTER THE PROCESS ABBREVIATION? FA

```

### Pantalla 3.2

Esta pantalla nos indica cuales son las opciones que tenemos, utilizaremos la opción FA (Parámetro FANNO ) Nos despliega una tercera pantalla.

```

COMPO
FANNO FLOW SELECTED
INPUT PARAMETERS ARE:
MACH NUMBER      M
4fL/D            F
P/PSTAR          P
DUCT ADDITION    DA

THE FANNING FRICTION FACTOR IS USED IN ALL FANNO COMPUTATIONS
ENTER THE DESIRED LETTER(S)?

```

### Pantalla 3.3

Esta pantalla nos muestra cuales son los parámetros de entrada al programa.

De acuerdo a los datos que tengamos del problema se escoge el parámetro deseado, en este caso escogemos **M** y en esta misma pantalla nos pide que se introduzca el número de **Mach**, supondremos que es 4.

```

COMPU
FANNO FLOW SELECTED
INPUT PARAMETERS ARE:
MACH NUMBER          M
4fL/D                F
P/PSTAR              P
DUCT ADDITION        DA
THE FANNING FRICTION FACTOR IS USED IN ALL FANNO COMPUTATIONS
ENTER THE DESIRED LETTER(S)? M
ENTER THE MACH NUMBER? 4
THE MACH NUMBER IS 4.0000
4fL/D    T/T*    P/P*    P0/P0*    RHO/RHO*
0.6331   0.2857  0.1336  10.7188  0.4677
STAGNATION TEMPERATURE IS CONSTANT FOR A FANNO FLOW.
ARE ADDITIONAL FANNO COMPUTATIONS DESIRED?

```

**Pantalla 3.4**

Esta pantalla nos muestra el parámetro **FANNO** la **Densidad** y las razones de **Temperatura, Presión y Presión de Estancamiento**.

Si escogemos **F** nos pide el valor del parámetro de FANNO **4f/D** y de acuerdo a este valor nos indica si tiene solución con un número de **Mach** subsónico ó supersónico.

**Para un valor de 4f/D igual a 0.5**

```

COMPO
FANNO FLOW SELECTED
INPUT PARAMETERS ARE:
  MACH NUMBER      M
  4FL/D            F
  P/PSTAR          P
  DUCT ADDITION    DA
THE FANNING FRICTION FACTOR IS USED IN ALL FANNO COMPUTATIONS
ENTER THE DESIRED LETTER(S)? F
ENTER THE VALUE OF 4FL/D? 0.5

THE MACH NUMBER IS 0.5977
  4FL/D      T/T*      P/P*      PO/PO*      RHO/RHO*
  0.5000    1.1200    1.7706    1.1909    1.5809

THE MACH NUMBER IS 2.8602
  4FL/D      T/T*      P/P*      PO/PO*      RHO/RHO*
  0.5000    0.4552    0.2959    3.7867    0.5182

STAGNATION TEMPERATURE IS CONSTANT FOR A FANNO FLOW.
ARE ADDITIONAL FANNO COMPUTATIONS DESIRED? _

```

### Pantalla 3.5

La pantalla nos muestra los números de **Mach**, la **Densidad** y las razones de **Temperatura**, **Presión** y **Presión de Estancamiento** tanto para corrientes-arriba como para corrientes-abajo.

Si escogemos el parámetro **P** nos pide el valor de la razón  $p/p^*$  supondremos que es 5 nos despliega la siguiente pantalla.

```

COMPO
FANNO FLOW SELECTED
INPUT PARAMETERS ARE:
  MACH NUMBER      M
  4FL/D            F
  P/PSTAR          P
  DUCT ADDITION    DA
THE FANNING FRICTION FACTOR IS USED IN ALL FANNO COMPUTATIONS
ENTER THE DESIRED LETTER(S)? P
ENTER THE VALUE OF P/P*? 5

THE MACH NUMBER IS 0.2181
  4FL/D      T/T*      P/P*      PO/PO*      RHO/RHO*
  11.8455    1.1887    5.0000    2.7904    4.2063

STAGNATION TEMPERATURE IS CONSTANT FOR A FANNO FLOW.
ARE ADDITIONAL FANNO COMPUTATIONS DESIRED?

```

### Pantalla 3.6

Esta pantalla nos muestra el parámetro **FANNO**, el número de **Mach**, la **Densidad** y las razones de **Temperatura**, **Presión** y **Presión de Estancamiento**.

Si escogemos **DA** nos pide el número de **Mach** y el parámetro **FANNO**  $4f/D$  supondremos 3 y 0.5 respectivamente.

Nota: Asegurarse que estos valores se introduzcan al programa en el mismo renglón y separados por una coma ejemplo 3,0.5

```

COMPU
FANNO FLOW SELECTED
INPUT PARAMETERS ARE:
MACH NUMBER           M
4FL/D                 F
P/PSTAR               P
DUCT ADDITION         DA
THE FANNING FRICTION FACTOR IS USED IN ALL FANNO COMPUTATIONS
ENTER THE DESIRED LETTER(S)? DA
ENTER THE MACH NUMBER AND THE 4FL/D INCREMENT? 3,0.5
  M1   (4FL/D)1   D(4FL/D) (4FL/D)2
  3.0000   0.5222   0.5000   0.0222
AT STATE 2 THE MACH NUMBER IS   1.1567
  T2/T1   P2/P1   P02/P01   RH02/RH01
  2.2089   3.8548   0.2406   1.7451
STAGNATION TEMPERATURE IS CONSTANT FOR A FANNO FLOW.
ARE ADDITIONAL FANNO COMPUTATIONS DESIRED?

```

### Pantalla 3.7

Esta pantalla nos muestra para el estado 2 el número de **Mach**, y las razones de **Temperatura**, **Presión**, **Presión de Estancamiento** y la **Densidad** para los dos estados.

En todos los casos también nos indica que la temperatura de estancamiento es constante.

## CAPÍTULO 4

### FLUJO RAYLEIGH EN LAS TOBERAS

#### 4.1. Adición y Expulsión de Calor

Si solo manejamos la adición ó expulsión de calor, un flujo Adiabático simple ó un flujo RAYLEIGH deben de definirse.

Porque lo único que cambia en un flujo Adiabático es la Temperatura  $T$  algunas veces es llamada también un cambio simple de temperatura. Como en un simple cambio de área, las variables iniciales significan condiciones hacia el punto sónico. De este modo el flujo RAYLEIGH es un flujo sin fricción ( $f = dF = 0$ ) en un ducto de área constante y con masa constante pero con un cambio en la temperatura, y en la entalpía de estancamiento.

Si las ecuaciones de conservación y algunas definiciones son aplicadas para el control de un volumen elemental con área constante, y la razón del flujo de masa no cambia y no hay fricción, las expresiones de la tabla 4.1a resultan. La integración total de las relaciones de la tabla 4.1a con las condiciones referenciadas para el punto sónico producen las relaciones de la tabla 4.1b.

## a) Formas Diferenciales

$$\frac{dM^2}{M^2} = \frac{(1 + \gamma M^2) \Psi dT_0}{1 - M^2} \frac{dT_0}{T_0} \quad \Psi = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{\Psi}{1 - M^2} \frac{dT_0}{T_0}$$

$$\frac{dT}{T} = \frac{(1 - \gamma M^2) \Psi}{1 - M^2} \frac{dT_0}{T_0}$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\Psi}{1 - M^2} \frac{dT_0}{T_0}$$

$$\frac{dP}{P} = -\frac{\gamma M^2 \Psi}{1 - M^2} \frac{dT_0}{T_0}$$

$$\frac{dP_0}{P_0} = -\frac{\gamma M^2}{2} \frac{dT_0}{T_0}$$

$$\frac{dI}{I} = 0$$

$$\frac{ds}{C_p} = \Psi \frac{dT_0}{T_0}$$

$$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{2(\gamma + 1)M^2 \Psi}{(1 + \gamma M^2)^2}$$

## b) Razones de Propiedad

$$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{2(\gamma + 1)M^2 \Psi}{(1 + \gamma M^2)^2}$$

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{1 + \gamma M^2}{(\gamma + 1)M^2}$$

$$\frac{T}{T^*} = \frac{(\gamma + 1)^2 M^2}{(1 + \gamma M^2)^2}$$

$$\frac{V}{V^*} = \frac{(\gamma + 1)M^2}{1 + \gamma M^2}$$

$$\frac{P_0}{P_0^*} = \frac{\gamma + 1}{1 + \gamma M^2} \left[ \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right) \Psi \right]^{\gamma(\gamma - 1)}$$

$$\frac{P}{P^*} = \frac{\gamma + 1}{1 + \gamma M^2}$$

$$\frac{\Delta s}{C_p} = \ln \left\{ M^2 \left( \frac{\gamma + 1}{1 + \gamma M^2} \right)^{\frac{\gamma + 1}{\gamma}} \right\}$$

$$A = A^* = \text{constante}$$

$$f = 0$$

$$m = \text{constante}$$

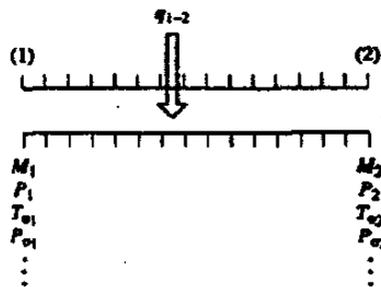
$$I = I^*$$

$$\Psi = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

**Tabla 4.1.** Recopilación de relaciones para el flujo RAYLEIGH

La única expresión que aparece con una nueva función es esa la de  $T_0/T_0^*$  para el número de Mach. Para el flujo RAYLEIGH el incremento en la temperatura de estancamiento es un parámetro importante, no distinguirlo es un hecho que envuelve la distancia sobre la cual la temperatura de estancamiento cambia. De este modo un paso incrementa de  $T_{01}$  hacia  $T_{02}$ , ó un incremento gradual de  $T_{01}$  hacia  $T_{02}$ , produce el mismo resultado sobre las asunciones del flujo RAYLEIGH. La longitud del ducto en el cual el cambio de temperatura se va a llevar a cabo no es consideración del flujo RAYLEIGH. La influencia de los coeficientes de entropía y de la presión de estancamiento muestran que cuando hay adición de calor se produce un incremento en la entropía y un decremento en la presión de estancamiento, en tanto que cuando hay expulsión de calor produce un decremento en la entropía y un incremento en la presión de estancamiento.

Un decremento en la presión de estancamiento asociada con una adición de calor es algunas veces llamada el EFECTO RAYLEIGH es de considerable importancia en el diseño de sistemas de combustión. La figura 4.1 representa esquemáticamente las condiciones y nomenclatura para un flujo RAYLEIGH.



**Figura 4.1.** Nomenclatura del flujo RAYLEIGH

Este flujo es llamado algunas veces adición de calor reversible ó expulsión porque el cambio solo ocurre en la entropía y es causado tanto por la adición de calor ó el proceso de expulsión. Si la misma cantidad de energía es agregada y después expulsada ( ó expulsada y después agregada ) las propiedades no cambian pues esto ocurre en medio de las condiciones de entrada y de salida.

El camino del proceso RAYLEIGH es un diagrama entalpía-entropía (**h-s**) ó temperatura-entropía (**T-s**) un diagrama es un mecanismo conveniente para analizar este simple flujo. Aunque el camino RAYLEIGH puede ser representado con diagramas propios envolviendo otras variables, el diagrama entalpía-entropía (**h-s**) es la versión tradicional mas útil y usada. La tabla 4.1b anteriormente escrita nos da los cambios de entropía (en el estado sónico) como

$$\frac{\Delta s}{C_p} = \ln \left\{ M^2 \left( \frac{\gamma + 1}{1 + \gamma M^2} \right)^{\frac{\gamma + 1}{\gamma}} \right\} \quad (4-1)$$

la razón de temperatura estática como una función del número de Mach

$$\frac{T}{T^*} = \left[ \frac{(\gamma + 1)M}{1 + \gamma M^2} \right]^2 \quad (4-2)$$

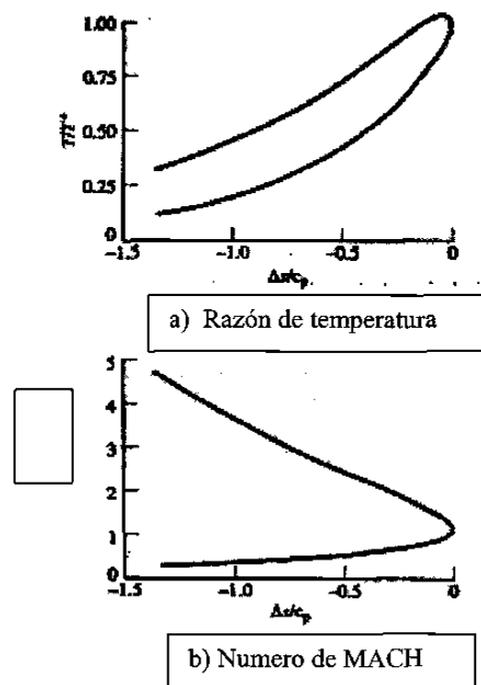
hacia el punto sónico

$$\frac{T^*}{T_0^*} = \frac{2}{\gamma + 1} \quad (4-3)$$

La línea RAYLEIGH sin dimensiones pueden ser generadas usando el número de Mach como el parámetro en conjunción con las ecuaciones 4-1 y 4-2. una expresión simple para un cambio de entropía como una función de la razón de temperatura,  $T/T^*$  puede ser derivada eliminando el número de Mach, y por medio de las ecuaciones 4-1 y 4-2, pero este proceso es muy largo y no muy manejable. Para un gas caloríficamente perfecto la razón de temperatura es igual a la razón de entalpía, puesto que

$$\frac{h}{h^*} = \frac{C_p T}{C_p T^*} = \frac{T}{T^*} \quad (4-4)$$

Las ecuaciones 4-1 y 4-2 representan una línea RAYLEIGH sin dimensiones para un diagrama (**h-s**) ó (**T-s**) donde la abscisa es la entropía sin dimensiones y la ordenada puede ser la razón de temperatura o de entalpía. El camino RAYLEIGH formado sin dimensiones en un diagrama (**T-s**) para una razón de calor específico de 1.4 esta esquematizado en la figura 4.2a y el número de Mach como una función del cambio de entropía para una razón de calor específico de 1.4 en la figura 4.2b



**Figura 4.2.** Líneas RAYLEIGH para un gas caloríficamente perfecto ( $\gamma = 1.4$ )

Aunque las líneas RAYLEIGH pueden ser empatadas sobre diagramas de propiedad para cualesquiera dos propiedades, entalpía ó temperatura contra entropía ó por el diagrama de MOLLIER.

Observando la figura 4-2b sugiere que el máximo estado de entropía es en el estado sónico. El cambio en la entropía para un flujo RAYLEIGH, está en términos del número de Mach y están dados por la ecuación 4-1. Para encontrar el número de Mach en el estado de máxima entropía, la derivada de  $\Delta s/C_p$  ó  $\exp(\Delta s/C_p)$  con respecto al número de Mach puede ser tomado e igualado a cero. No existe una entropía mínima desde ambos ramales de la línea RAYLEIGH no ligado a la dirección negativa. El estado hacia el cual la derivada de la entropía se desvanece podría de este modo ser el estado de máxima entropía.

la derivada es

$$\frac{d}{dM} e^{\frac{\Delta s}{C_p}} = 2M \left( \frac{\gamma+1}{1+\gamma M^2} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} + M^2 \left( \frac{\gamma+1}{\gamma} \right) \left( \frac{\gamma+1}{1+\gamma M^2} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \frac{(\gamma+1)(-1)}{(1+\gamma M^2)^2} 2\gamma M \quad (4-5)$$

la cual se reduce a

$$M^2 = 1 \quad (4-6)$$

Para el flujo RAYLEIGH de un gas caloríficamente perfecto, el estado de máxima entropía es de este modo el estado sónico,  $M=1$ . La línea RAYLEIGH muestra también el máximo valor de  $T/T^*$ . El número de Mach asociado con el máximo valor de la razón de temperatura puede ser encontrado resolviendo la derivada de  $T/T^*$  expresión en la tabla 4.1b igualada a cero

por lo tanto

$$\frac{d}{dM} \left( \frac{T}{T^*} \right) = \frac{(\gamma+1)^2 2M}{(1+\gamma M^2)^2} - \frac{(\gamma+1)^2 M^2}{(1+\gamma M^2)^3} (2\gamma M) = 0 \quad (4-7)$$

la cual se reduce a

$$M^2 = \frac{1}{\gamma} \quad (4-8)$$

En la figura 4-3 se ilustra información acerca del proceso RAYLEIGH, el movimiento hacia la derecha en el diagrama (h-s) es para la adición de calor y el de la izquierda para la expulsión de calor. El estado sónico ocurre hacia el punto de máxima entropía y el número de Mach para el máximo valor de  $T/T^*$  es  $1/\sqrt{\gamma}$ . Los números de Mach subsónicos están asociados con temperaturas grandes ó razones de entalpía, y los números de Mach supersónicos con valores pequeños de las razones. De este modo la porción superior de la línea RAYLEIGH corresponde al flujo subsónico y la porción baja al flujo supersónico.

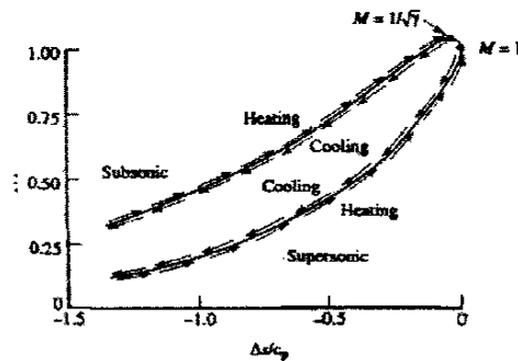


Figura 4.3. Representación de las líneas RAYLEIGH

La razón de temperatura estática decrece como calor es agregado en la región de en medio de  $M = 1/\sqrt{\gamma}$ . La temperatura de estancamiento se incrementa durante el proceso de adición de calor, pero el flujo se acelera rápidamente en esa región cuando el calor es agregado, y así de este modo la energía térmica adicional es requerida para convertirla en energía cinética. Por otra parte, desde el punto sónico no puede ser atravesado sin movimiento dentro de la región de decremento de entropía a menos que el sentido de calor transferido sea cambiado, el flujo RAYLEIGH es inicialmente

subsónico y el resto debe ser supersónico. Para una adición de calor ambos flujos RAYLEIGH el subsónico y el supersónico se mueven hacia el número de Mach en el estado 1 como energía es agregada. Sin embargo cuando el calor es expulsado ambos flujos RAYLEIGH el subsónico y el supersónico se mueven a lo lejos del punto sónico. Esta claro que el significado de  $T^*$ , es la temperatura de estancamiento requerida dentro de un flujo RAYLEIGH para que el número de Mach llegue a ser 1. Como tal eso representa el límite de adición de calor para un flujo subsónico ó supersónico. Cualquier adición de calor posterior puede resultar en un decremento en la razón de flujo de masa y un salto hacia otra línea dimensional RAYLEIGH. Como con otro flujo simple, las condiciones para localizar el número de Mach 1 en un flujo RAYLEIGH son únicas para un flujo dado y pueden ser usadas como condiciones de referencia para hacer los cálculos.

Un aspecto interesante de un flujo RAYLEIGH es que provee al menos en teoría una alternativa de usar una Tobera convergente-divergente llevando un flujo supersónico. Si suficiente calor es cedido al flujo subsónico de un deposito dentro de una situación del flujo RAYLEIGH, Mach 1 se puede obtener. Si el calor es expelido después de que Mach 1 se obtenga, el flujo se expande supersónicamente. Así de este modo en concreto la cantidad exacta de adición seguida por la expulsión de calor en el flujo supersónico en un ducto de área constante puede ser obtenida. Porque fuera de los efectos tales como la fricción en las paredes y de la necesidad de un flujo uniforme no considerados en el flujo RAYLEIGH, el proceso no es realmente posible, y en el mejor de nuestro estudio, no siempre tal recurso tiene éxito cuando es obtenido de un flujo en el estado supersónico.

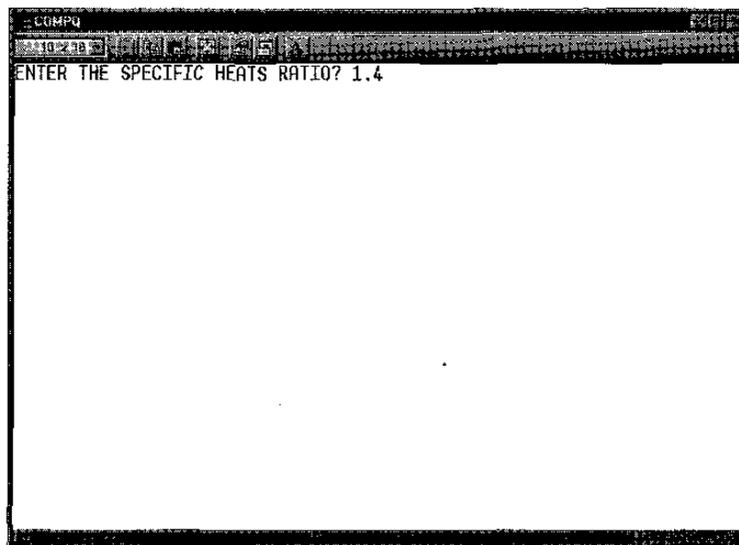
La longitud no entra dentro de cualquiera de las expresiones del flujo RAYLEIGH dadas en la tabla 4.1 para un proceso de flujo RAYLEIGH dado, la adición ó expulsión de calor y el estado inicial determinan el estado final. La fricción, la cual es el único potencial manejado concerniente con la longitud, es el abandono del flujo RAYLEIGH. La longitud del ducto puede entrar dentro de las propiedades de

distribución ( presión contra  $x$ , por ejemplo ) para un flujo RAYLEIGH en el cual la energía agregada ó expelida a la misma razón especificada en una dimensión del ducto.

La figura 4-3 es la representación de la línea RAYLEIGH para todos los flujos RAYLEIGH con una  $\gamma = 1.4$  y son expresados en coordenadas sin dimensiones  $\Delta s/C_p$  y  $T/T^*$  . Si las líneas RAYLEIGH para flujos con diferentes condiciones iniciales de estancamiento y/o diferentes razones de flujo de masa donde están representadas en coordenadas dimensionales  $s$  y  $T$  (ó  $h$  ) entonces las formas podrían ser similares a las de la figura 4-3 pero las líneas RAYLEIGH para una razón de flujo individual podrían ser distintas. Generalmente, para nuestros propósitos, las líneas RAYLEIGH sin dimensiones de la figura 4-3 podrían ser usadas para explicar varios fenómenos asociados con el flujo RAYLEIGH.

## 4.2. Uso del programa de aplicación Compq

Utilizando el programa **Compq** nos despliega una pantalla que nos pide como dato inicial la razón de calor específico. Escogeremos 1.4 (supondremos que es aire )



**Pantalla 4.1**

y nos despliega una segunda pantalla, esta pantalla nos indica cuales son las opciones que podemos utilizar.

```

COMPO
THE FOLLOWING PROCESSES ARE AVAILABLE:
PROCESS          ABBREVIATION
ISENTROPIC FLOW   IS
NORMAL SHOCK WAVE NS
OBLIQUE SHOCK WAVE OS
PRANDTL-MEYER PROCESS PM
RAYLEIGH FLOW     RA
FANNO FLOW        FA
MASS ADDITION     MA
ISOTHERMAL W/FRICTION PL
FINISHED          FI

THE RATIO OF SPECIFIC HEATS IS 1.4
ENTER THE PROCESS ABBREVIATION? RA_

```

#### Pantalla 4.2

Si utilizamos la opción **RA** (flujo RAYLEIGH ) nos despliega una tercera pantalla.

```

COMPO
RAYLEIGH FLOW SELECTED
INPUT PARAMETERS ARE:
MACH NUMBER      M
T0/T0*           T
HEAT TRANSFER    HT
ENTER THE DESIRED LETTER(S)? M
ENTER THE MACH NUMBER? _

```

#### Pantalla 4.3

Esta pantalla nos indica cuales son los parámetros de entrada al programa.

De acuerdo a los datos que tengamos del problema para este caso escogeremos el caso **M** y en esta misma pantalla nos pide que se introduzca el número de **Mach** supondremos para este caso que es 1.5

```

COMPU
RAYLEIGH FLOW SELECTED
INPUT PARAMETERS ARE:
MACH NUMBER           M
T0/T0*                T
HEAT TRANSFER         HT
ENTER THE DESIRED LETTER(S)? M
ENTER THE MACH NUMBER? 1.5
THE MACH NUMBER IS    1.500
T0/T0*      T/T*      P0/P0*      P/P*      RHO/RHO*
0.9093      0.7525      1.1215      0.5783      0.7685
ARE ADDITIONAL RAYLEIGH FLOW COMPUTATIONS DESIRED?

```

#### Pantalla 4.4

Esta pantalla nos muestra las razones de **Temperatura** y de **Presión** así como también las razones de **Presión** y **Temperatura de Estancamiento** además de la **Densidad**, por otra parte nos preguntan si deseamos hacer mas cálculos del flujo RAYLEIGH ( tenemos la opción de seleccionar **SÍ** ó **NO** )

Si escogemos el caso **T** el programa nos pide se introduzca la razón de temperatura de estancamiento  $T_0/T_0^*$  ( debe de ser menor que 1 ) si escogemos 0.8

```

CONPG
RAYLEIGH FLOW SELECTED
INPUT PARAMETERS ARE:
MACH NUMBER          M
TO/TO*               T
HEAT TRANSFER        HT
ENTER THE DESIRED LETTER(S)? T
ENTER THE VALUE OF TO/TO*? 0.8
THE MACH NUMBER IS   0.583
TO/TO*               T/T*   PO/PO*   P/P*   RHO/RHO*
0.8000              0.8989   1.0814   1.6261  1.8091
THE MACH NUMBER IS   1.967
TO/TO*               T/T*   PO/PO*   P/P*   RHO/RHO*
0.8000              0.5411   1.4691   0.3739  0.6910
ARE ADDITIONAL RAYLEIGH FLOW COMPUTATIONS DESIRED?

```

#### Pantalla 4.5

Esta pantalla nos muestra el número de **Mach**, las razones de **Presión**, **Temperatura** y **Densidad**, así como también la razón de la **Presión de Estancamiento** tanto para corrientes-arriba como para corrientes-abajo.

Si escogemos el caso **HT** ( transferencia de calor ) el programa nos pide se introduzca el número de **Mach** inicial y la **Temperatura** ( °K ó °R ) escogeremos 1 y 500°K respectivamente.

Nota: asegurarse que al introducir estos valores al programa computacional estén en el mismo renglón y separados por una coma.

También nos pregunta si el cambio de temperatura es adición ó expulsión de calor.

```

COMPU
RAYLEIGH FLOW SELECTED
INPUT PARAMETERS ARE:
MACH NUMBER          M
T0/T0*               T
HEAT TRANSFER        HT
ENTER THE DESIRED LETTER(S)? HT

ENTER THE INITIAL MACH NUMBER AND THE STAGNATION TEMP (K OR R)? 1.50
ENTER THE CHANGE IN STAGNATION TEMP (+ ADD, - REJ)? +
THE INITIAL MACH NUMBER IS 1.0. STATE 2 CAN BE EITHER SUBSONIC
OR SUPERSONIC.
ENTER SUB FOR SUBSONIC OR SUP FOR SUPERSONIC? SUP

HEAT TRANSFER PROCESS COMPUTATIONS

M1      M2      T01      DELT0
1.0000  -2.9999  50.00   0.00

T02/T01  T2/T1  P02/P01  P2/P1  RH02/RH01
1.0000   0.2803  3.4243  0.1765  0.6296

ARE ADDITIONAL RAYLEIGH FLOW COMPUTATIONS DESIRED? _

```

**Pantalla 4.6**

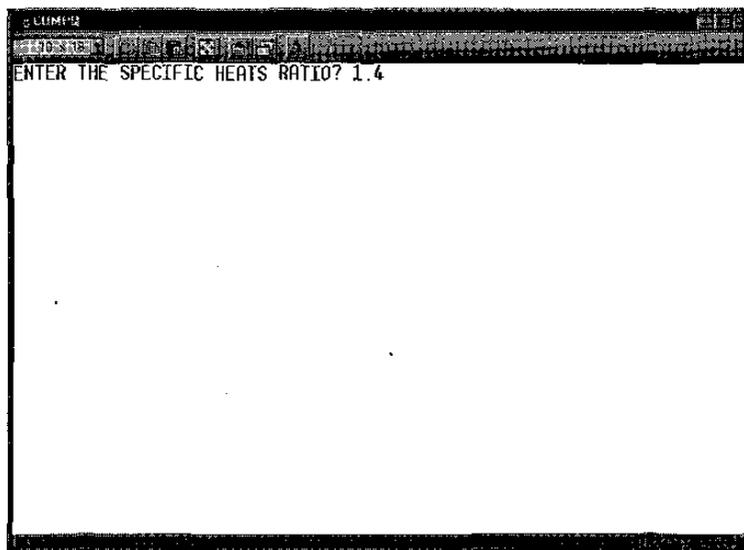
Esta pantalla nos muestra el número de **Mach 2**, la **Densidad** y las razones de **Presión y Temperatura** de estancamiento así como también las razones de **Presión y Temperatura**.

## CAPÍTULO 5

# FRICCIÓN EN LAS TOBERAS (ISOTÉRMICO)

### 5.1. Uso del programa de aplicación Compq

Utilizando el programa **Compq** nos despliega una pantalla que nos pide como dato inicial la razón de calor específico. Escogeremos 1.4 (supondremos que es aire).



**Pantalla 5.1.**

Nos despliega una segunda pantalla

```

COMPO
THE FOLLOWING PROCESSES ARE AVAILABLE:
PROCESS          ABBREVIATION
ISENTROPIC FLOW   IS
NORMAL SHOCK WAVE NS
OBLIQUE SHOCK WAVE OS
PRANDTL-MEYER PROCESS PM
RAYLEIGH FLOW    RA
FANNO FLOW       FA
MASS ADDITION    MA
ISOTHERMAL W/FRICTION PL
FINISHED        FI

THE RATIO OF SPECIFIC HEATS IS 1.4
ENTER THE PROCESS ABBREVIATION? PL

```

**Pantalla 5.2.**

Esta pantalla nos muestra cuales son las opciones que podemos utilizar.

Si utilizamos la opción **PL** (flujo isotérmico con fricción) nos despliega una tercera pantalla.

```

COMPO
ISOTHERMAL FLOW SELECTED. ISOTHERMAL FLOW CHOKES AT 1/SQR(GAM).
ONLY THE MACH NUMBER RANGE < 1/SQR(GAM) IS COVERED.
THE FANNING FRICTION FACTOR IS USED IN ALL ISOTHERMAL CALCULATIONS.

INPUT PARAMETERS ARE:
MACH NUMBER          M
& FL/D              F
DUCT ADDITION        DA

ENTER THE DESIRED LETTER(S)? M
ENTER THE MACH NUMBER? 0.8

```

**Pantalla 5.3.**

De acuerdo a los datos que tengamos del problema se escoge el parámetro deseado, en este caso escogemos **M** y en esta misma pantalla nos pide que se introduzca el número de **Mach**, supondremos que es 0.8.

```

-LUMPQ
-----
ISOTHERMAL FLOW SELECTED. ISOTHERMAL FLOW CHOKES AT 1/SQR(GAM).
ONLY THE MACH NUMBER RANGE < 1/SQR(GAM) IS COVERED.
THE FANNING FRICTION FACTOR IS USED IN ALL ISOTHERMAL CALCULATIONS.

INPUT PARAMETERS ARE:
MACH NUMBER           M
4 FL/D                F
DUCT ADDITION         DA

ENTER THE DESIRED LETTER(S)? M
ENTER THE MACH NUMBER? 0.8

      M      P/P*   TO/TO*  PO/PO*   4 FL/D   T/T*
0.8000   1.0564  0.9870   1.0092   0.0063   1.0000

ARE MORE ISOTHERMAL COMPUTATIONS DESIRED?

```

**Pantalla 5.4.**

Nota: El programa nos indica cual es el rango del número de Mach.

Esta pantalla nos muestra el parámetro **FANNO**, las razones de **Presión** y **Temperatura** así como también las razones de **Presión** y **Temperatura** de estancamiento.

Si escogemos el caso **F** nos pide el valor del parámetro FANNO 4fl/D supondremos que es 3

```

COMPT
-----
ISOTHERMAL FLOW SELECTED. ISOTHERMAL FLOW CHOKES AT 1/SQR(GAM).
ONLY THE MACH NUMBER RANGE < 1/SQR(GAM) IS COVERED.
THE FANNING FRICTION FACTOR IS USED IN ALL ISOTHERMAL CALCULATIONS.

INPUT PARAMETERS ARE:
MACH NUMBER           M
4 FL/D               F
DUCT ADDITION        DA

ENTER THE DESIRED LETTER(S)? F
ENTER THE VALUE OF 4 FL/D? 3

      M      P/P*   TO/TO*  PO/PO*  4 FL/D  T/T*
0.3525  2.3977  0.8967  1.6373  3.0001  1.0000

ARE MORE ISOTHERMAL COMPUTATIONS DESIRED?

```

**Pantalla 5.5.**

La pantalla nos muestra el número de **Mach**, las razones de **Presión** y **Temperatura** así como también las razones de **Presión** y **Temperatura** de estancamiento.

Si escogemos el caso **DA** el programa nos pide el número de Mach y el parámetro FANNO  $4f/D$  supondremos 2 y 0.9 respectivamente.

Nota: Asegurarse que estos valores se introduzcan al programa en el mismo renglón y separados por una coma ( 2,0.9 )

```

COMPU
ISOTHERMAL FLOW SELECTED. ISOTHERMAL FLOW CHOKES AT 1/SQR(GAM).
ONLY THE MACH NUMBER RANGE < 1/SQR(GAM) IS COVERED.
THE FANNING FRICTION FACTOR IS USED IN ALL ISOTHERMAL CALCULATIONS.

INPUT PARAMETERS ARE:
MACH NUMBER           M
  4 FL/D              F
DUCT ADDITION         DA

ENTER THE DESIRED LETTER(S)? DA

ENTER THE MACH NUMBER AND THE 4 FL/D INCREMENT? 2,0.9

  M1    (4FL/D)1  D(4FL/D)  (4FL/D)2
2.0000  0.9013   0.9008   0.0013

AT STATE 2 THE MACH NUMBER IS  0.8238

T2/T1    T02/T01  P2/P1    P02/P01  RH02/RH01
1.0000   0.6310  2.4279   0.4844   2.4279

ARE MORE ISOTHERMAL COMPUTATIONS DESIRED?

```

### Pantalla 5.6.

Esta pantalla nos muestra el número de **Mach** para el estado 2, el parámetro **FANNO** para los dos estados y las razones de **Presión, Temperatura y Densidad** así como también las razones de **Presión y Temperatura** de estancamiento.

# CAPÍTULO 6

## ANÁLISIS TERMODINÁMICO

### 6.1. Dinámica de gases en un fluido

El análisis de un fluido que fluye a través de un pasaje debe satisfacer 4 leyes

- 1) **CONSERVACIÓN DE MASA**
- 2) **LA SEGUNDA LEY DE NEWTON**
- 3) **CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA**
- 4) **LA SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA**

Nosotros podemos empezar con la aplicación de estas 4 leyes para analizar un fluido corriente.

Para el caso especial de un fluido corriendo hacia un tubo recto con un área de sección constante, y en ausencia de fricción interna ó de viscosidad, la velocidad de una partícula del fluido es paralela a las paredes del tubo, como se puede mostrar en la figura **6.1a**, y la velocidad tiene el mismo valor en todos los puntos de cualquier sección. Aun cuando las fuerzas de la viscosidad se presenten, el análisis puede ser basado en el promedio de la velocidad. Ahora, si  $A$  es el área de sección transversal de un tubo y la

velocidad del fluido en esta sección es  $V$ , entonces el volumen  $v$  del fluido el cual fluye en el tiempo  $dt$  es

$$\text{Volumen} = A V dt$$

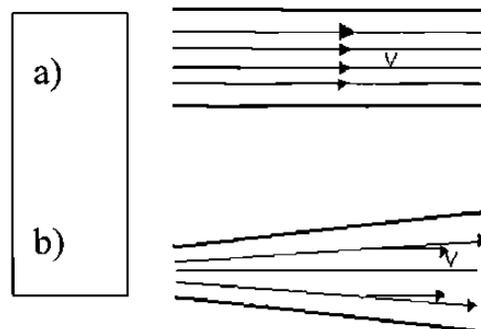
y la razón del volumen del flujo es

$$\text{Razón del volumen del flujo} = A V \quad (6.1)$$

La razón del flujo de masa es igual a la razón del volumen del flujo dividido por el volumen específico del fluido ó multiplicado por la densidad

$$\text{Razón del flujo de masa} = A V / v = \rho A V \quad (6.2)$$

Si el área de sección transversal de un tubo es variable, como se muestra en la figura 6.1b, la velocidad también variará en dirección y en magnitud en toda la sección.



**Figura 6.1** Distribución de la velocidad en ausencia de fricción interna

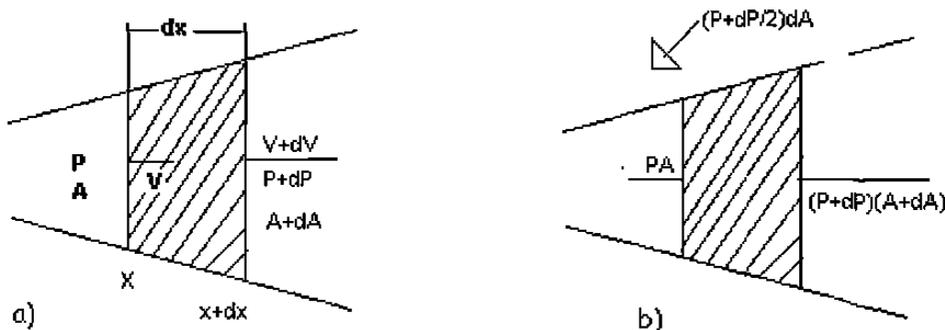
Si el área no cambia radicalmente, las componentes transversales de la velocidad son comparativamente pequeñas, entonces nosotros podemos asumir con una aproximación razonable que la velocidad es axial en dirección y tiene una magnitud que da la razón del flujo de masa correcta.

Bajo esas condiciones la ecuación 6.2 puede ser aplicada con la especificación de que  $V$  es el promedio de la velocidad sobre el área de sección transversal  $A$ .

Generalmente hablando, la velocidad varía desde un punto a otro punto en dirección axial, y para un punto particular estos variarán con el tiempo. Por lo tanto, en una dirección axial la velocidad está en función de posición y del tiempo. Otras cantidades tales como la presión, densidad y la energía interna, pueden estar también en función de la posición y del tiempo.

Dos métodos de análisis del flujo pueden ser empleados. El método Lagrangiano que considera una masa de flujo definido, considerando en la mente como se comporta a lo largo del tubo ó pasaje, y el método Euleriano que considera un elemento de volumen fijo en el espacio, conocido como volumen de control, y toma dentro de la relación del flujo de masa, cantidad de movimiento y energía dentro y fuera del volumen. Por lo tanto el método Euleriano puede ser usado aquí.

Considere un volumen de control que consiste en un elemento de un tubo de longitud  $dx$  como se muestra en la figura 6.2a la razón de masa del flujo que cruza la superficie corrientes-arriba es  $\rho A V$  y la masa que cruza la superficie corrientes-abajo es  $A V + d(\rho A V)$  donde  $d(\rho A V)$  es el cambio en el producto  $\rho A V$  entre las superficies corrientes-abajo y corrientes-arriba.



**Figura 6.2.** Flujo de un elemento de un fluido en un pasaje de sección variable

La diferencia entre la razón del flujo de masa dentro y fuera del volumen es igual a la razón de masa neta del flujo dentro del volumen de control, ó  $-d(\rho A V)$ . Puesto que  $dx$  es pequeño

$$-d(\rho A V) = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho A V) dx$$

si la razón de masa del flujo dentro del volumen de control excede la corriente de afuera, la masa en el volumen de control se incrementa

$$dm = \rho A dx$$

hacia una razón de incremento

$$\frac{\partial}{\partial t}(dm) = A dx \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

de las dos ecuaciones anteriores obtenemos

$$A \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho A V) = 0 \quad (6.3)$$

La cual es conocida como la Ecuación de la Continuidad y es consecuencia de la Ley de la Conservación de la Masa.

Considerando la cantidad de movimiento del flujo, esta cantidad es notable y es llevada dentro y fuera del volumen de control por el fluido que cruza la superficie de control. La razón de la cantidad de movimiento del flujo que cruza la superficie corrientes-arriba es el producto de la razón de masa de flujo y la velocidad, ó  $\rho A V^2 / g$ .

La cantidad de movimiento correspondiente al flujo fuera del volumen de control (que cruza la superficie corrientes-abajo) es  $\rho A V^2 / g + d ( \rho A V^2 ) / g$  y la razón neta del momento del flujo es

$$-d\left(\rho \frac{AV^2}{g}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \frac{AV^2}{g}\right)dx$$

la cantidad de movimiento del fluido en el volumen de control es

$$\frac{dm}{g}V = \rho \frac{AV}{g}dx$$

la razón del tiempo del cambio del momento es

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dmV}{g}\right) = \frac{Adx}{g} \frac{\partial}{\partial t}(\rho V)$$

Refiriéndose a la figura 6.2.b esta puede ser conocida como la fuerza sobre la superficie corrientes-arriba y es  $P A$  y sobre la superficie corrientes-abajo es

$$(P + dP)(A + dA) = P A + P dA + A dP$$

Reteniendo solo la derivada de primer orden. La presión promedio sobre los lados de las paredes es  $P + dP / 2$  y la componente de la fuerza es axial a la dirección corrientes-abajo de donde el promedio de la presión es

$$\left(P + \frac{dP}{2}\right)dA = PdA$$

despreciando la diferencial de orden superior, por lo tanto la fuerza resultante es

$$(P A + P dA) - (P A + P dA + A dP) = -A dP = -A \frac{\partial P}{\partial x} dx$$

Recordando la segunda Ley de NEWTON, la razón del cambio de la cantidad de movimiento es igual a la fuerza resultante. A esto debemos agregar el cambio neto de esa cantidad que cruza el flujo de la superficie del volumen de control

por lo tanto,

$$\frac{A}{g} \frac{\partial}{\partial t} (\rho V) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{AV^2}{g} \right) = -A \frac{\partial P}{\partial x} dx \quad (6.4)$$

La ecuación 6.4 es conocida como la Ecuación de Momento y es consecuencia de la segunda Ley de NEWTON. Finalmente considerando el flujo de energía, esto es notable es decir, la razón de flujo de energía que cruza la superficie corrientes-arriba dentro del volumen de control es igual al producto de la razón de flujo y la energía de la unidad de masa. La energía de la unidad de masa es igual a la energía interna  $u$  y la energía cinética es  $V^2 / 2g$ . La razón del flujo de energía que cruza la superficie corrientes-arriba dentro del volumen de control se pudiera escribir así

$$AV \left( u + \frac{V^2}{2g} \right)$$

y la razón neta del flujo de energía dentro del volumen de control es

$$-d \left[ \rho AV \left( u + \frac{V^2}{2g} \right) \right] = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho AV \left( u + \frac{V^2}{2g} \right) \right] dx$$

la energía del fluido en el volumen de control es

$$dm \left( u + \frac{V^2}{2g} \right) = A dx \left[ \rho \left( u + \frac{V^2}{2g} \right) \right]$$

y la razón del tiempo de cambio de esta energía es

$$Adx \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( u + \frac{V^2}{2g} \right) \right]$$

La energía en el volumen de control se incrementa a una razón igual a la suma de la razón neta de la energía seguida dentro del volumen de control y la razón del trabajo. La razón hacia la cual trabaja la encontramos sobre la superficie corrientes-arriba y es igual a

$$P A V$$

y la razón de trabajo encontrada sobre la superficie corrientes-abajo es

$$P A V + d ( P A V )$$

de aquí la razón neta de trabajo es

$$-d ( P A V ) = - \frac{\partial}{\partial x} ( P A V ) dx$$

Debido a que las paredes son rígidas las fuerzas que influyen hacia las paredes del tubo no repercuten en el trabajo.

Si la suma de la razón neta del flujo de la energía dentro del volumen de control y de la razón de trabajo se igualan a la razón de incremento de la energía en el volumen de control, el resultado que se obtiene es

$$- \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho A V \left( u + \frac{V^2}{2g} \right) \right] dx - \frac{\partial}{\partial x} ( P A V ) dx = Adx \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( u + \frac{V^2}{2g} \right) \right]$$

ó

$$A \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( u + \frac{V^2}{2g} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho A V \left( u + \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2g} \right) \right] = 0$$

sin embargo

$$u + \frac{P}{\rho} = u + P v = h$$

donde  $v$  es el volumen específico y  $h$  es la entalpía por lo tanto tenemos

$$A \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( u + \frac{V^2}{2g} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ P A V \left( h + \frac{V^2}{2g} \right) \right] = 0 \quad (6.5)$$

Esta ecuación es la Ecuación de la Energía del Flujo en ausencia de transferencia de calor y es consecuencia de la primera Ley de la Termodinámica.

Si el flujo no tiene una sola dirección pero es estable, y las derivadas de tiempo en las ecuaciones de Continuidad, Momento y de Energía son todas iguales a cero entonces por lo tanto la Ecuación de la Continuidad es

$$d(\rho A V) = 0 \quad (6.6)$$

ó

$$G = \rho A V = \text{constante} \quad (6.7)$$

la ecuación del Momento 6.4 llega a ser

$$d\left(\rho \frac{AV^2}{g}\right) + Ad\rho = 0$$

ó

$$\rho \frac{VdV}{g} + dP = 0 \quad (6.8)$$

finalmente la Ecuación de la Energía 6.5 es

$$d\left[\rho AV\left(h + \frac{V^2}{2g}\right)\right] = 0$$

la cual cuando se combina con la ecuación 6.6 se obtiene

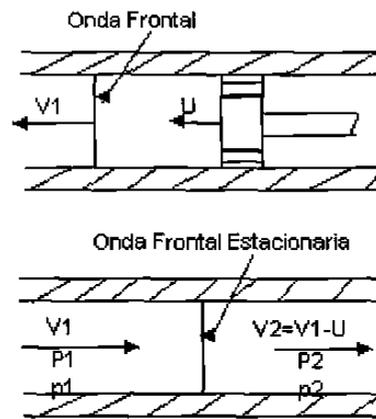
$$d\left(h + \frac{V^2}{2g}\right) = 0 \quad (6.9)$$

Es importante recalcar que todas las ecuaciones anteriormente escritas son aplicadas solo en fluidos compresibles no viscosos.

## 6.2 Número de Mach y Velocidad Sónica

Un disturbio, tal como un cambio de presión, se propaga en un fluido compresible de una manera similar como se propagan las ondas del sonido. Esos disturbios débiles son propagados a la velocidad del sonido ó velocidad sónica. Un disturbio intenso ó explosivo se le conoce como una Onda de choque, y pueden ser propagadas muchas veces a la velocidad del sonido. Una onda que es originada en un punto en el espacio se propaga en su parte frontal en forma esférica y esta a su vez se aproxima a una onda plana cuando esta a una considerable distancia de donde se inició el disturbio.

Un pistón puede representar fácilmente las condiciones para el cual existe la propagación de una onda plana, cuando la onda plana es propagada por un pistón que se mueve repentinamente a una velocidad constante  $U$ , entonces de inmediato el fluido que es empujado por el pistón obtiene una velocidad igual a la del pistón, el límite de la onda frontal la cual avanza con una velocidad de propagación  $V$ , y la magnitud la cual depende parcialmente de la velocidad  $U$ , las propiedades del fluido suben en el movimiento del fluido. Tenemos que aclarar que en la parte de adelante de la onda frontal, el fluido es estacionario.



**Figura 6.3.** Movimiento que se observa de un pistón con una onda frontal

La figura 6.3 describe el movimiento del fluido con una onda frontal estacionaria y en el cual las ecuaciones que se describieron anteriormente se pueden aplicar mas fácilmente. El fluido de la izquierda de la onda frontal se mueve hacia la derecha con una velocidad  $V_1$ , en tanto el remanente de la onda frontal está estacionaria. El fluido hacia la derecha de la onda frontal se mueve con una velocidad  $V_2 = V_1 - U$  en efecto, el fluido que se mueve hacia la derecha a través de la onda frontal en un tubo con área de sección transversal constante. La Presión y la Densidad correspondiente a la izquierda y a la derecha de la onda frontal son designados por los subíndices 1 y 2 respectivamente.

Ahora la Velocidad, Presión, y la Densidad son constantes en el tiempo en cualquier punto y puesto que el área es constante la Ecuación de la Continuidad 6.3 se reduce a

$$\frac{d}{dx}(\rho V) = 0$$

ó

$$\rho V = \text{constante}$$

la ecuación de Momento 6.4 se reduce a

$$\frac{d}{dx} \left( \rho \frac{V}{g} \right) + \frac{dP}{dx} = 0$$

ó

$$\rho \frac{V^2}{g} + P = \text{constante}$$

cuando las ecuaciones de Momento y de Continuidad son aplicadas a puntos hacia la derecha ó hacia la izquierda de la onda frontal obtenemos

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$$

y

$$\frac{\rho_1 V_1^2}{g} + P_1 = \frac{\rho_2 V_2^2}{g} + P_2$$

resolviendo la primera de las dos ecuaciones anteriores para  $V_1$  sacando raíz cuadrada al resultado, y substituyendo en la segunda ecuación se obtiene

$$V_1 = \sqrt{g \frac{\rho_1}{\rho_2} \left( \frac{P_2 - P_1}{\rho_2 - \rho_1} \right)} \quad (6.10)$$

Aunque la velocidad  $U$  no aparece en la ecuación anterior 6.10 esta debe de ser tomada en cuenta porque la  $P_2$  depende de esta velocidad.

Si la diferencia de presiones  $P_2 - P_1$  es grande en comparación con la presión  $P_1$  ó  $P_2$  una onda de choque fuerte existe. Sin embargo lo importante aquí es que un choque débil el cual es un disturbio es propagado con una velocidad sónica. En este caso las diferencias de presión y de densidad son muy pequeñas

$$\rho_2 / \rho_1 \approx 1 \text{ y } (P_2 - P_1) / (\rho_2 - \rho_1) \approx dP / d\rho . \text{ En consecuencia.}$$

$$a = \sqrt{g \frac{dP}{d\rho}} \quad (6.11)$$

La cual es la velocidad del disturbio débil ó de la velocidad sónica. El símbolo  $a$  también es usado para representar la velocidad sónica.

Puesto que la presión y la densidad de un fluido cambian cuando cruzan la onda frontal, es evidente que un cambio de estado Termodinámico ocurre. Si este cambio de estado es rápido, este puede ser considerado como Adiabático, y si no tiene fricción interna, el proceso es Reversible y Adiabático y en consecuencia Isoentrópico. Entonces

$$a = \sqrt{g \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)} \quad (6.12)$$

$$a = \sqrt{-g \frac{v}{\rho} \left( \frac{\partial P}{\partial v} \right)}$$

La Compresibilidad Isoentrópica esta definida como

$$K_a = -\frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial P} \right)$$

y de aquí

$$a = \sqrt{\frac{g}{\rho K_a}} \quad (6.13)$$

Nosotros podemos ver ahora que la velocidad del sonido en un fluido esta en función de la densidad y de la Compresibilidad Isoentrópica del fluido. Por supuesto que esta ecuación no se puede aplicar en caso de choque fuertes, pero si se puede aplicar en cualquier fluido no viscoso en choques débiles.

Considerando ahora un gas ideal, la ecuación para cualquier proceso isoentrópico es

$$P v^k = \text{constante}$$

diferenciándola logaritmicamente,

$$\frac{dP}{P} = k \frac{dv}{v} = 0$$

y

$$\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_s = -\frac{kP}{v}$$

por lo tanto

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s = -v^2 \left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_s = kPv = kRT$$

y como  $a$  es

$$a = \sqrt{gkPv} = \sqrt{gkRT} \quad (6.14)$$

El número de Mach (sin dimensiones) es un número que expresa la razón de la velocidad local de un fluido con la velocidad del sonido en el mismo fluido, ó

$$M = \frac{V}{a} \quad (6.15)$$

en el caso de un gas ideal el número de Mach puede escribirse

$$M = \frac{V}{\sqrt{gkRT}} \quad (6.16)$$

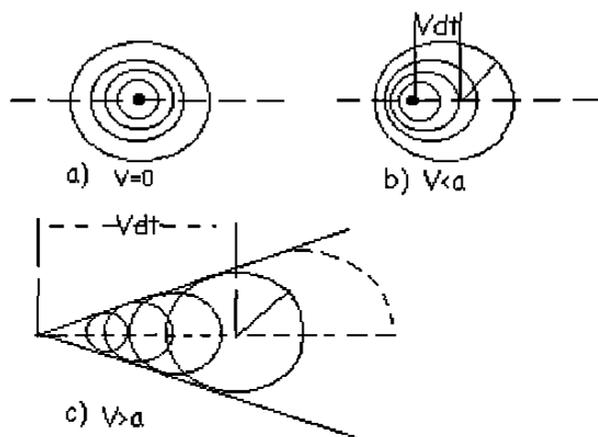
El número de Mach es un parámetro muy importante del flujo y puede ser usado con mucha frecuencia.

### 6.3 Ondas Mach

Fluidos a alta velocidad (sónica ó supersónica) son frecuentemente encontrados en conjunción con corrientes y turbinas de gas, compresores, aviones, cohetes y proyectiles. Los efectos de compresibilidad en los disturbios de un gas que se desacelera

de una velocidad supersónica a sónica tienen consideraciones de importancia para el diseño de cualquiera de los recursos previamente mencionados.

Considerando un disturbio esférico tal como el que emite una chispa eléctrica intermitente ó un cambio de presión en un gas en reposo. El resultado de este fenómeno esta ilustrado en la figura 6.4 a. La onda frontal causada por el disturbio se propaga en todas direcciones a la velocidad del sonido dentro del gas. Suponiendo que el gas está en movimiento con una velocidad menor en el flujo que la velocidad del sonido en el gas. En la figura 6.4b se representa este caso. La velocidad neta de la onda frontal corrientes-arriba es  $a - V$  y corrientes-abajo es  $a + V$ . Si  $a > V$  la onda frontal se mueve corrientes-arriba como en corrientes-abajo. Por otra parte si  $V > a$  la velocidad neta de la onda de propagación corrientes-arriba es negativa y así de este modo la onda frontal no se mueve en su totalidad corrientes-arriba. Es fácil entender que las ondas frontales se pueden mover hacia el infinito. Sin embargo la figura 6.4c nos muestra que todas las ondas esféricas frontales que están envueltas dentro del cono, la cúspide es el origen del disturbio. Esto es consecuencia de la velocidad neta negativa de la onda propagada corrientes-arriba. Esto es notable puesto que la velocidad de propagación a los lados del cono es siempre sónica.



**Figura 6.4** Ondas del sonido en un gas

Considerando la figura anterior 6.4c la mitad del ángulo alfa puede ser expresado como

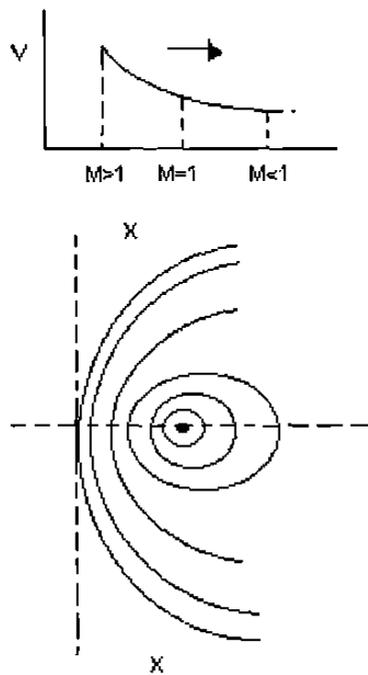
$$\alpha = \arcsen \frac{a}{V} \frac{dt}{dt} = \arcsen \frac{a}{V} = \arcsen \frac{1}{M} \quad (6.17)$$

El ángulo alfa ( $\alpha$ ) es llamado el ángulo Mach. Las ondas son conocidas como ondas Mach y los lados del cono como líneas Mach. Esas ondas son muy débiles y la energía que pasa a través de los límites toman lugares Isoentrópicos. Por lo tanto el uso de un volumen isoentrópico modulado en la ecuación 6.13 está justificado.

#### 6.4 Ondas de choque en un plano normal

Considerando el caso de un flujo desacelerado de velocidad supersónica a velocidad sónica como está representada en la figura 6.5. un disturbio ocurre en la región subsónica, y la onda frontal se mueve corrientes-arriba a una velocidad  $a - V$  hasta que el punto 2 es alcanzado donde  $V = a$ ,  $V - a = 0$ , y  $M = 1$ . Es evidente que la onda frontal no puede pasar la barrera sónica. Las ondas frontales acumuladas se aproximan a la línea XX como un límite creado a lo largo del disturbio el cual resulta como un choque discontinuo. La línea XX es la línea Mach y el ángulo de Mach es de  $90^\circ$  consistente con un número de Mach igual a la unidad. Puesto que ellas no ocasionan un cambio en la dirección del flujo, la onda de choque aparece como una onda constante en el plano normal hacia la dirección del flujo como se muestra en la figura 6.5.

Si consideramos un flujo acelerado donde la velocidad del fluido se acelera de subsónica a supersónica, un choque normal no puede ocurrir. La onda frontal se mueve corrientes-abajo a una velocidad  $a + V$  y por lo tanto nunca será cero. El movimiento de la onda frontal emanada de un disturbio en la región sónica es como una velocidad neta  $a - V$  y puesto que  $a > V$ , su suma nunca puede ser igual a cero y por lo tanto el choque no ocurre.



**Figura 6.5** Flujo desacelerado con un disturbio en la región subsónica

Disturbios ocurridos en la región supersónica son propagados corrientes-arriba a la velocidad  $a - V$ , donde  $V > a$ , y por lo tanto nunca se alcanza el umbral sónico.

El choque es un evento el cual ocurre muy rápidamente, de este modo puede ser considerado como un proceso esencialmente Adiabático. Puesto que el trabajo es nulo, seguidas por la primera ley entonces la energía total del sistema puede ser constante. Sin embargo esto ocasiona un incremento en la entropía con un consecuente decremento en la energía que se puede obtener. Este fenómeno es de gran interés cuando se diseñan Compresores y Turbinas. Aunque esto puede aparentar un choque de compresión, esto debe ser evitado, comúnmente con mucha atención debe de ser dirigido hasta donde sea posible el uso de este fenómeno para llevar a cabo compresión en compresores de aire. Un choque de efecto raro es lo opuesto al choque de compresión descrito anteriormente. Un choque de efecto raro es posible a consecuencia de la presión estática llevada a través del choque, la velocidad del flujo puede ser acelerada de subsónica a supersónica.

Ante la imposibilidad de demostrar un efecto raro por un riguroso análisis, un análisis cualitativo puede ser satisfactorio. Puesto que un choque de compresión es acompañado por un incremento en la entropía, un efecto raro puede ser que ocurra con un decremento en la entropía. Un decremento en la entropía con una energía total constante a través del choque puede ser una clara violación de la segunda ley de la Termodinámica. Por lo tanto solamente un choque de compresión es posible.

### **6.5 Relaciones de las propiedades de estado a través del choque en un plano normal**

El plano en el cual ocurre el choque normal puede ser considerado como una parte delgada infinitesimal y esta acción podemos asumir que ocurre en medio de las paralelas que forman las líneas de corriente. Si las condiciones antes del choque son representadas por el subíndice 1 y las posteriores al choque por el subíndice 2, entonces de la ecuación 6.7 para continuidad y asumiendo una área constante en la superficie de control y de un gas ideal es,

$$\frac{G}{A} = \frac{V_1}{v_1} = \frac{V_2}{v_2}$$

y para la conservación de momento

$$F = \frac{G}{g} dV = P_2 A - P_1 A = \frac{G}{g} (V_1 - V_2)$$

$$P_2 - P_1 = \frac{G}{Ag} (V_1 - V_2)$$

$$P_2 - P_1 = \frac{V_1^2}{v_1 g} - \frac{V_2^2}{v_2 g}$$

Substituyendo por  $v$  que es equivalente  $RT / P$  de la ecuación de estado,

$$P_2 - P_1 = \frac{P_1 V_1^2}{gRT_1} - \frac{P_2 V_2^2}{gRT_2}$$

pero

$$\frac{V_1^2}{gkRT_1} = M^2$$

y

$$P_2 - P_1 = k(P_1 M_1^2 - P_2 M_2^2)$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{kM_1^2 + 1}{kM_2^2 + 1} \quad (6.18)$$

Esta es una forma de la ecuación RAYLEIGH para un choque en el plano normal para un gas ideal en un flujo isoentrópico.

La energía de la ecuación 6.8 para un gas ideal puede ser expresada como sigue

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2gJ} = C_v(T_1 - T_2) + \frac{P_1 v_1 - P_2 v_2}{J}$$

y puesto que  $C_v = \frac{R}{J(k-1)}$

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} = \frac{k}{k-1} (P_1 v_1 - P_2 v_2)$$

ó

$$\frac{V_1^2 (k-1)}{2gk} + P_1 v_1 = \frac{V_2^2 (k-1)}{2gk} + P_2 v_2$$

y

$$P_1 v_1 \left[ 1 + \frac{V_1^2 (k-1)}{2gkP_1 v_1} \right] = P_2 v_2 \left[ 1 + \frac{V_2^2 (k-1)}{2gkP_2 v_2} \right] \quad (6.19)$$

de la ecuación de estado,  $Pv = RT$ , y  $M = V/\sqrt{gkPv}$

$$T_1 \left[ \frac{2 + (k-1)M_1^2}{2} \right] = T_2 \left[ \frac{2 + (k-1)M_2^2}{2} \right]$$

ó

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2 + (k-1)M_1^2}{2 + (k-1)M_2^2} \quad (6.20)$$

La ecuación 6.20 da la razón de las temperaturas absolutas antes y después del choque para un gas ideal.

En la ecuación 6.19 se observa que  $V/v$  es constante y que  $V = M\sqrt{gkRT}$

$$P_1 M_1 \sqrt{gkRT_1} \left[ \frac{2 + (k-1)M_1^2}{2} \right] = P_2 M_2 \sqrt{gkRT_2} \left[ \frac{2 + (k-1)M_2^2}{2} \right]$$

sustituyendo en la ecuación 6.20 tenemos,

$$P_1 M_1 \left[ \frac{2 + (k-1)M_1^2}{2} \right]^{\frac{1}{2}} = P_2 M_2 \left[ \frac{2 + (k-1)M_2^2}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.21)$$

la ecuación anterior 6.21 es una forma de la ecuación FANNO para un gas ideal.

De las ecuaciones 6.18 y 6.21 ,

$$\frac{M_2 \left[ \frac{2 + (k-1)M_2^2}{2} \right]^{\frac{1}{2}}}{1 + kM_2^2} = \frac{M_1 \left[ \frac{2 + (k-1)M_1^2}{2} \right]}{1 + kM_1^2} \quad (6.22)$$

La ecuación da la relación entre los números de Mach antes y después del choque en términos de la razón de calor específico. Es evidente que una solución de la ecuación 6.22 es  $M_1 = M_2$  para un flujo sin disturbios y sin discontinuidad. Por lo tanto  $(M_1 - M_2)$  es un factor. Elevando al cuadrado la ecuación 6.22 despejando y dividiendo todo por  $(M_1 - M_2)$  el resultado es,

$$M_2^2 = \frac{2 + (k-1)M_1^2}{2kM_1^2 - (k-1)} \quad (6.23)$$

Las ecuaciones 6.18 y 6.20 ahora se pueden resolver en términos del número de Mach antes del choque y son,

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2kM_1^2 - (k-1)}{k+1} \quad (6.24)$$

y

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{[2kM_1^2 - (k-1)][2 + (k-1)M_1^2]}{(k-1)^2 M_1^2} \quad (6.25)$$

puesto que  $Pv = RT$  de la ecuación 6.25 ,

$$\frac{P_2 v_2}{P_1 v_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{[2kM_1^2 - (k-1)][2 + (k-1)M_1^2]}{(k-1)^2 M_1^2}$$

substituyendo el valor de  $P_2 / P_1$  de la ecuación 6.24 tenemos,

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{2 + (k-1)M_1^2}{(k+1)M_1^2} \quad (6.26)$$

y puesto que

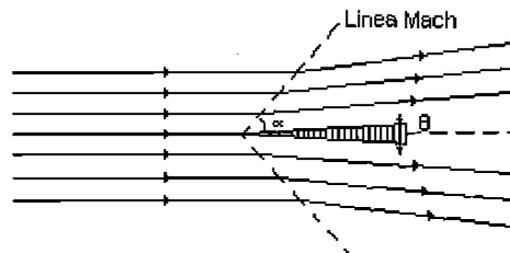
$$\frac{V_1}{v_1} = \frac{V_2}{v_2}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{2 + (k-1)M_1^2}{(k+1)M_1^2} \quad (6.27)$$

Así de este modo la razón de las propiedades de estado entre un plano normal unidimensional y el choque en un gas ideal en un flujo isoentrópico pueden ser expresadas en términos del número de Mach y de la razón de calor específico antes del choque. En valores muy altos de  $M_1$ , para variar el calor específico es evidente que un cambio grande en la temperatura a través de choque se requiera.

## 6.6 Ondas oblicuas ó inclinadas

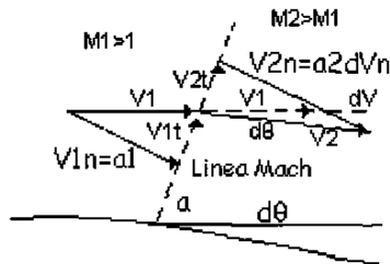
Si una cuña simétrica delgada ( $\theta$  muy pequeña) es sumergida en un gas como si fuera un bisector con un ángulo  $\theta$  y es paralela a la velocidad de aproximación, dos ondas similares a las ondas Mach son producidas. Semejantes a las líneas Mach descritas con anterioridad esas ondas en dos dimensiones son ondas de choque oblicuas débiles. Los cambios en las propiedades de estado del gas a través del choque débil son muy pequeños, y el proceso puede ser considerado esencialmente Isoentrópico. El ángulo de inclinación de la onda de choque oblicua referida hacia la dirección de la velocidad de aproximación es equivalente al ángulo Mach  $\alpha$ , ver la figura 6.6



**Figura 6.6.** Onda de choque oblicua débil ( $\theta$  muy pequeño)

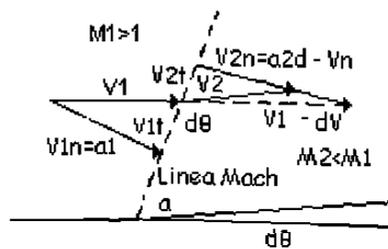
Considerando un flujo supersónico de un gas a lo largo de la pared de un pasaje divergente donde un ligero cambio de dirección  $d\theta$  ocurre como se muestra en la figura 6.7 esto es análogo al flujo que pasa en la superficie baja de la cuña delgada de la figura 6.6 asumiendo una distribución uniforme de la velocidad en la llegada de la corriente del gas, donde  $V_1$  representa la velocidad de llegada ó de aproximación y  $a_1$  es la componente normal a la línea Mach. La componente normal  $a_1$  es igual a la velocidad del sonido, como se mostró en la figura 6.4c. Porque ella no cambia la presión estática a lo largo de la línea Mach, y tampoco cambian las componentes de las velocidades  $V_1$  y  $V_2$  que son paralelas a las líneas Mach. Entonces esto es evidente puesto que  $V_2$  es paralela a la nueva dirección de la pared del pasaje, la componente de  $V_2$  debe incrementarse en un equivalente  $\Delta V$  sobre  $a_1$ . Consecuentemente,  $V_2$  debe de ser

más grande en magnitud que  $V_1$ . Si seguimos, una caída en la presión estática ocurre acompañada por un incremento en el número de Mach y en el volumen específico. Esto lo podemos deducir de la figura 6.7, la magnitud de estos cambios están en función de la magnitud de  $d\theta$ . Así de este modo los valores pequeños ó muy desvanecidos de  $d\theta$  ( $2^\circ$  ó menos) por los cuales  $M_1 \approx M_2$ , y el ángulo de la línea Mach es muy aproximado al dado por la función  $\alpha = \arcsen(1/M)$ .



**Figura 6.7** Onda de choque oblicua débil en un pasaje divergente  
(  $d\theta$  muy pequeño )

Un análisis similar puede ser aplicado a un pasaje convergente como se ilustra en la figura 6.8



**Figura 6.8.** Onda de choque oblicua débil en un pasaje convergente  
(  $d\theta$  muy pequeño )

Refiriéndonos a la figura 6.8 y tomando las mismas asunciones y derivando las relaciones a través del choque en el plano normal que son las apropiadas para la componente normal para una onda oblicua, obtenemos

$$\frac{G}{A} = \frac{V_{1n}}{v_1} = \frac{V_{2n}}{v_2} = \text{constante}$$

ó en forma diferencial,

$$v dV_n - V_n dv = 0$$

ó

$$v dV_n = V_n \frac{dv}{v}$$

de la ecuación 6.8

$$dV_n = -\frac{vgdP}{V_n}$$

de las dos ecuaciones anteriores,

$$V_n = \sqrt{-gv \frac{dP}{dv/v}}$$

Porque el proceso asumido es Isoentrópico (  $d\theta$  muy pequeña ),

$$K_s = kP = \frac{-dP}{dv/v}$$

así como  $a = V_n = \sqrt{gkP_v}$

Por lo tanto las componentes de la velocidad normal en la corriente hacia la línea Mach son iguales a la velocidad del sonido en el gas previamente establecido.

El ángulo Mach  $\alpha = \arcsen ( V_n / V ) = \arcsen ( 1 / M )$ . Ahora las componentes de velocidad  $V_1$  y  $V_2$  paralelas a la línea Mach son iguales y el incremento de la magnitud de  $V_1$  después de la línea Mach es,

$$dV = dV_n \operatorname{sen} \alpha$$

el cambio en la dirección  $V_1$

$$d\theta = d\theta = \frac{dV_n \operatorname{cos} \alpha}{V_1}$$

de las dos ecuaciones anteriores,

$$\frac{dV}{V_1} = \tan \alpha d\theta$$

y

$$\frac{dV}{V_1} = \frac{d\theta}{\sqrt{M^2 - 1}} \quad (6.28)$$

De este modo el campo de flujo consiste de dos zonas separadas, una por la línea Mach y otra por el ángulo  $\alpha$ . La velocidad en cada una de esas zonas es constante, pero la velocidad cambia cuando ocurre entre las dos zonas y esta en función de  $d\theta$ , como se muestra en la ecuación 6.28. El cambio en la magnitud de la velocidad es acompañado naturalmente por un cambio en el número de Mach. Esto es deseable, por lo tanto

podemos establecer una relación entre el número de Mach y la velocidad que toma dentro de la relación la variación de la velocidad sónica y de la velocidad del gas. Establecer esta relación es conveniente, porque podemos escribir una ecuación de energía en una sección del pasaje donde la velocidad del gas es  $V_1$  y en alguna otra sección donde la velocidad del gas es exactamente igual a la velocidad sónica. Este valor de la velocidad sónica es conocido como la velocidad sónica crítica y es designada por  $a^*$ . La velocidad sónica crítica es entonces una característica constante para el flujo.

$$\frac{V_1^2}{2g} \left( \frac{k-1}{k} \right) + P_1 v_1 = \frac{a^{*2}}{2g} \left( \frac{k-1}{k} \right) + P^* v^*$$

y

$$\frac{V_1}{a^*} = \frac{(k+1)M_1^2}{M_1^2(k-1)+2} \quad (6.29)$$

Por conveniencia  $V_1 / a^*$  puede ser representada por  $\bar{V}$ , resolviendo la ecuación 6.29 para  $M_1^2$  en términos de  $\bar{V}^2$  y sustituyendo en la ecuación 6.28,

$$d\theta = \frac{d\bar{V}}{\bar{V}} \sqrt{\frac{\bar{V}-1}{1-[(k-1)/(k+1)]\bar{V}^2}} \quad (6.30)$$

Suponiendo esa en la zona seguida de la línea Mach, otro cambio en la dirección del flujo puede ocurrir a través de una segunda línea Mach aplicando nuevamente la ecuación 6.30 para un valor infinitesimal de  $d\theta$ , una solución exacta puede ser encontrada para el total de las dos zonas. Una solución por extensión puede ser encontrada para un número infinito de valores sucesivos infinitesimales de  $d\theta$ , y es un buen motivo para encontrar la solución de muchos valores pequeños de  $d\theta$ . Si  $\theta_1 = 0$  por

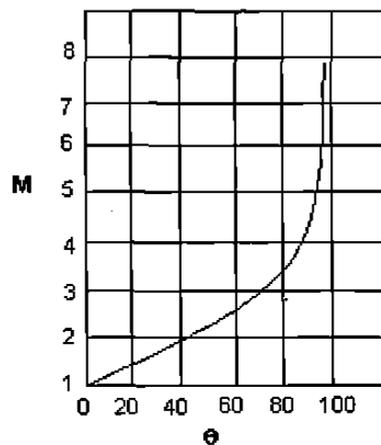
$$M = 1 = \bar{V}$$

y es sustituido como un límite, entonces la ecuación 6.30 puede ser integrada, usando la ecuación 6.29 nos da,

$$\theta = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \arctan \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \sqrt{M^2-1} - \arctan \sqrt{M^2-1} \quad (6.31)$$

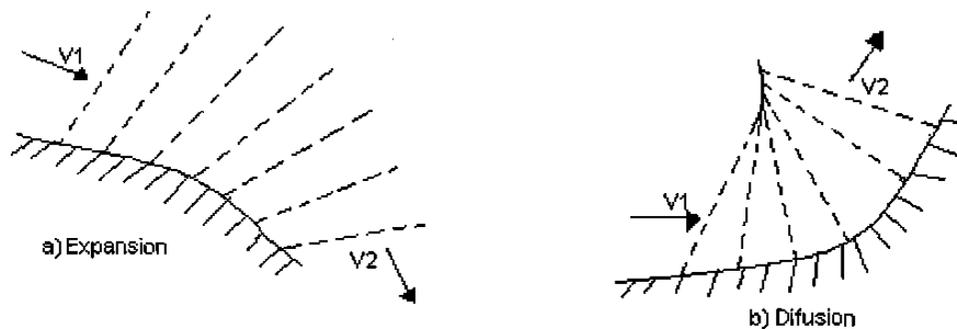
La ecuación 6.31 es una forma de escribir la ecuación Prandtl-Meyer.

Debemos notar que  $\theta$  es el ángulo a través del cual el flujo debe girar, si  $M_1$  es igual a la unidad acercándose a la esquina en la cual en las paredes del pasaje cambian de dirección y si la presión estática final alrededor permite una máxima expansión hacia  $M_2$ . Suponiendo que el flujo antes de la esquina es supersónico por lo tanto  $M > 1$ , entonces si continuamos, la expansión debe llevarse a cabo antes de la esquina para satisfacer el requerimiento que  $M = 1$  en la esquina. Si  $\theta_1$  es el ángulo correspondiente a  $M_1$ , la capacidad de que el flujo se expanda a través de  $\theta_1$  es agotada. Por lo tanto el verdadero ángulo de giro del flujo esta dado por  $\beta = \theta_1 - \theta_2$ , donde  $\theta_2$  es el ángulo correspondiente a  $M_2$ . Algunos valores de  $\theta$  correspondientes a varios diferentes números de Mach están dados en la gráfica 6.1, estos se calcularon a partir de la ecuación 6.31



**Gráfica 6.1** Números de Mach contra el ángulo  $\theta$

En la figura 6.9 se ilustran las condiciones que deben existir cuando una corriente supersónica de un gas es girada en los contornos lisos exteriores ó interiores de las esquinas. El caso representa posteriormente difusión ó compresión. En la figura 6.9a se puede notar que las líneas Mach no se interceptan, sin embargo si el ángulo girado es bastante grande para una esquina interior, como se muestra en la figura 6.9b, las líneas Mach son probables que se intercepten. Dos líneas Mach intersectándose en este camino con una onda singular cuya fuerza es la suma de las líneas Mach individuales, resultando una onda singular que puede interceptar con otra línea Mach hasta formar una onda unida fuerte, y así sucesivamente.



**Figura 6.9** Flujo Supersónico en las esquinas exteriores ó interiores

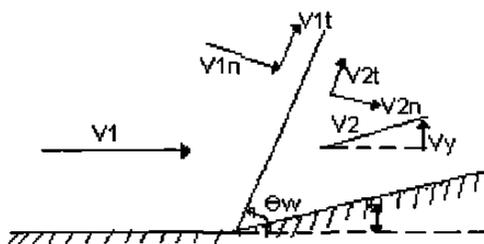
Si suponemos que el número de las líneas Mach es infinito, entonces una onda de choque oblicua se forma, cuya fuerza se incrementa con la longitud. Para el caso actual, si la intensidad del choque es grande, el método de las características no es aplicable, puesto que la aproximación de las condiciones Isoentrópicas no se pueden establecer.

Probablemente otros métodos son posibles para manejar tales situaciones.

## 6.7 Ondas de choque oblicuas fuertes

Las ondas de choque oblicuas fuertes difieren de las ondas de choque oblicuas débiles solo en intensidad. Para una onda de choque oblicua débil, el disturbio es infinitamente pequeño y el proceso es esencialmente Isoentrópico. En un choque oblicuo fuerte, el disturbio es muy intenso entonces el proceso no puede ser considerado Isoentrópico, este es Irreversible y Adiabático y disminuye la presión de estancamiento. Un choque oblicuo fuerte puede ocurrir solo en difusión ó compresión con un valor grande del ángulo de deflexión de la pared  $\delta$ .

Si consideramos la figura 6.10 la cual ilustra un flujo supersónico que pasa por una pared en la cual el ángulo de deflexión es bastante grande que hace que se induzca un fuerte ó intenso choque, las componentes de la velocidad paralelas al choque son iguales a las componentes de la normal y disminuyen a través del choque con una correspondiente disminución en el número de Mach e incrementando la presión estática. El ángulo  $\theta_w$ , llamado el ángulo de la onda, no es igual en longitud al ángulo Mach.



**Figura 6.10** Onda de choque oblicua fuerte

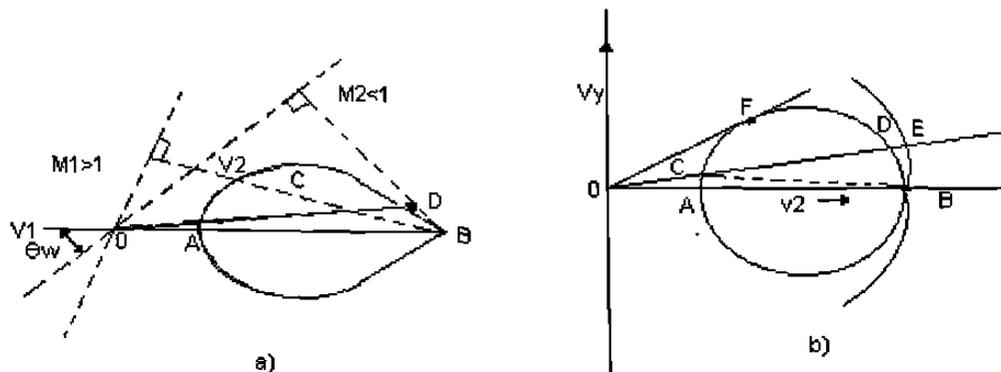
Las ecuaciones de Momento, Continuidad y Energía pueden ser usadas para un choque oblicuo, utilizando las componentes de la velocidad normal y paralelas hacia la onda del choque. La onda y los ángulos de deflexión pueden ser expresados en términos de  $V_1$ ,  $V_2$ , y  $V_y$ . finalmente si utilizamos las siguientes razones ( sin dimensiones ),

$$\frac{V_1}{a^*} = \bar{V}_1 \quad \frac{V_2}{a^*} = \bar{V}_2 \quad \text{y} \quad \frac{V_y}{a^*} = \bar{V}_y$$

la ecuación que sigue puede ser derivada:

$$\bar{V}_y^2 = (\bar{V}_1 - \bar{V}_2) \left[ \frac{V_1 V_2 - 1}{1 + \left(\frac{2}{k+1}\right) \bar{V}_1^2 - \bar{V}_1 \bar{V}_2} \right] \quad (6.32)$$

Los valores establecidos de  $\bar{V}_1$  de la ecuación 6.32 llegan a ser cúbicos en  $\bar{V}_2$ . Entonces graficando  $\bar{V}_y$  contra  $\bar{V}_2$  para un valor fijo de  $\bar{V}_1$ , una curva como la de la figura 6.11 es la que se obtiene. La curva es conocida como **hodograph**, puesto que estas coordenadas representan las componentes horizontales y verticales de  $V_2$ . Esta curva **hodograph** particular puede ser referida como un choque polar, puesto que ella relata las velocidades después del choque. Una familia de curvas puede ser obtenida tomando diferentes valores de  $\bar{V}_1$ .



**Figura 6.11** Choque Polar

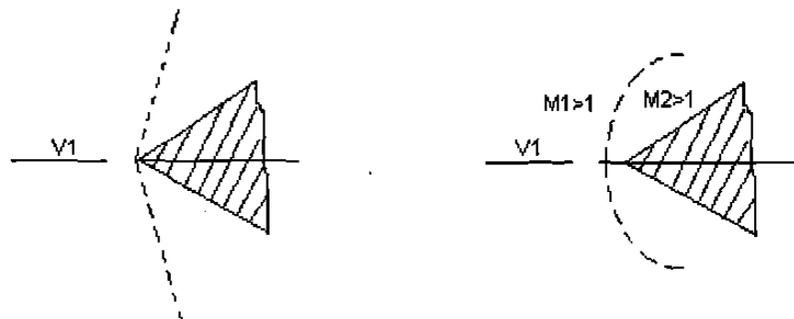
Algunas características de las ondas de choque oblicuas pueden ahora ser presentadas convenientemente en términos de la ecuación 6.32 y del choque polar. La ecuación 6.32 muestra que cuando  $\bar{V}_1 = \bar{V}_2$ ,  $V_y$  puede ser igual a cero, y por lo tanto la

onda es débil ó es una onda Mach. El punto B en la figura 6.11a representa esta situación donde  $\bar{V}_2 = OV = \bar{V}_1$ .  $\bar{V}_y = 0$  cuando  $\bar{V}_1\bar{V}_2 = 1$  ó  $V_1V_2 = a^2$ , que es una condición de un choque normal mostrada como el punto A en la figura 6.11a. Entre la onda Mach del punto B y la onda del choque normal del punto A ella esta un número infinito de ondas de choque acompañadas por el flujo deflecionado. La raya OE con un ángulo de deflección del flujo  $\delta$  corta la curva en los puntos C, D y E. Esto es verdadero puesto que la ecuación 6.32 es cubica en  $\bar{V}_2$ . Una línea trazada normal hacia el segmento de curva BD corta la abscisa en  $\bar{V}_2$  coordinada hacia un ángulo  $\theta_w$ , el ángulo de la onda. Similarmente el ángulo de la onda para un segmento de la curva BC, puede ser obtenido. Como D se aproxima a B, la cuerda BD se aproxima como un límite de la tangente hacia B. La normal hacia la tangente hacia B corta la  $\bar{V}_2$  coordinado hacia el ángulo de Mach  $\alpha$ . Por lo tanto, como D se aproxima a B, el choque llega a ser muy débil. Por el otro lado, como C se aproxima a A, la cuerda BC se aproxima a la cuerda AB y el ángulo de la onda formado por la normal hasta AB es de  $90^\circ$ . Que es la correspondiente a la onda de choque normal. Nosotros podemos concluir que las dos condiciones C y D representan dos soluciones, la primera hacia C para un choque fuerte y la segunda hacia D para un choque débil. La tercera solución indicada hacia E impone un incremento en la velocidad ó un evento raro el cual es físicamente imposible.

Está claro que no existe una solución única para un valor dado de  $\bar{V}_1$  y de  $\theta$  y por lo tanto dos soluciones son físicamente posibles. La primera con una onda de choque débil acompañada por un pequeño decremento en la velocidad y una pequeña elevación de la presión, ( el resto del flujo a través del choque débil es supersónico ) y la segunda solución es con un choque fuerte acompañada con un decremento grande en la velocidad y con una elevación grande en la presión ( el flujo llega a ser subsónico a través del choque fuerte ).

Si observamos en la figura 6.11 como el ángulo de deflección  $\delta$  se incrementa, la intensidad del ángulo del choque débil también se incrementa. Pero para un valor pequeño de  $\delta$ , la intensidad del choque fuerte disminuye y como  $\delta$  se aproxima a cero la onda se puede aproximar a una onda Mach. El ángulo de deflección  $\delta$  puede

incrementarse al máximo así como la raya originada hacia  $O$  puede ser la tangente a la curva en un punto tal como  $F$ . Ahora  $OF$  no es igual a  $\bar{V}_2 = 1$  y el punto  $F$  no significa la subdivisión entre las velocidades supersónicas y subsónicas. Que pasa a través del choque cuando hay una máxima deflección esto depende realmente de una familia particular de curvas. Una familia puede resultar de un flujo supersónico a través del choque en tanto otra familia puede resultar de una reducción de la velocidad subsónica. Si imaginamos que el ángulo de deflección de una cuña colocada en la corriente del flujo es evidente que si un valor de  $\bar{V}_1$  es grande el máximo ángulo de deflección es conocido como el choque polar. Una circunstancia está clara, que no existe solución para la cual la onda de choque es atacada por el borde principal de la cuña. En vez de separarse derecho de la onda de choque normal al aproximarse el flujo en esa dirección puede formarse justo delante de la cuña. La onda de choque separada llega más oblicua en ambos lados de la línea del centro de la cuña como se muestra en la figura 6.12. La región entre el choque separado y el borde principal de la cuña que se extiende hacia afuera distancias iguales sobre ambos lados de la línea central de la cuña es subsónica. En el extremo (punta) de la cuña el borde principal esta muy cercano a las condiciones de estancamiento. Es estáticamente improbable que la intensidad del choque pueda incrementarse a lo largo de la onda de choque y es un procedimiento fuera de la línea del centro de la cuña. Esto es verdadero puesto que la entropía se incrementa a través del choque y puede llegar a ser infinita al incrementarse la intensidad. Actualmente si la fuerza del choque disminuye hasta el infinito la onda llega a ser onda Mach.



**Figura 6.12** Cuña junta y separada de la onda de choque

## 6.8 Presión, Entalpía y Temperatura de Estancamiento

Un estado de estancamiento existe cuando una velocidad alta de un gas es llevada completamente al reposo Isoentropicamente.

Esta definición del estado de estancamiento y las ecuaciones 6.8 y 6.9 son las que se aplican para un proceso con flujo isoentrópico, se sobre entiende que la entalpía de estancamiento es más grande que la entalpía estática por la energía cinética. Similarmente podemos decir que la presión de estancamiento excede a la presión estática por la presión equivalente de la velocidad. Se puede demostrar rápidamente que la entalpía de estancamiento está en función de la temperatura y de la presión de estancamiento. Por lo tanto la temperatura de estancamiento excede a la temperatura estática por la temperatura equivalente de la velocidad. Cuando los efectos de la velocidad son pequeños, estos acompañados de la entalpía estática, la presión y temperatura no difieren apreciablemente de sus contra partes las de estancamiento. Las relaciones de estancamiento son desarrolladas como siguen para un gas **IDEAL** y un flujo Isoentrópico.

la ecuación del momento está dada por la ecuación 6.8

$$vdP + \frac{VdV}{g} = 0 \quad (6.8)$$

pero como  $Pv^k = \text{constante}$

lo cual permite que la ecuación 6.8 pueda ser integrada como

$$\frac{k}{k-1} Pv + \frac{V^2}{2g} = \text{constante}$$

designaremos las condiciones de estancamiento con superíndices °

$$\frac{k}{k-1} P^0 v^0 = \frac{k}{k-1} P v + \frac{V^2}{2g} = \text{constante}$$

y puesto que

$$C_p = \frac{Rk}{J(k-1)}$$

$$P^0 v^0 = R \left( T + \frac{V^2}{2gJ C_p} \right)$$

pero el termino  $V^2 / 2g J C_p$  es la temperatura dinámica, y

$$P^0 v^0 = R T^0 \quad (6.33)$$

Y si designamos condiciones para las dos diferentes secciones del pasaje del flujo con los subíndices 1 y 2 seguidas de la ecuación 6.33 y de las relaciones del gas ideal para un flujo isoentrópico,

$$\frac{P_1}{P_1^0} = \left( \frac{T_1}{T_1^0} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad \text{y} \quad \frac{P_2}{P_2^0} = \left( \frac{T_2}{T_2^0} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

de las cuales

$$\frac{P_1}{P_2^0} = \left( \frac{T_1}{T_2^0} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (6.34)$$

y similarmente

$$\frac{P_1^0}{P_2^0} = \left( \frac{T_1^0}{T_2^0} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (6.35)$$

Las expresiones anteriores muestran claramente que las relaciones del gas ideal y la ecuación de estado pueden ser extendidas a las propiedades de estado de estancamiento.

La introducción del número de Mach en las relaciones de la temperatura de estancamiento proporciona una gran comodidad al realizar los cálculos.

$$T^0 = T + \frac{V^2}{2gJC_p} = T \left( 1 + \frac{V^2}{2gJC_p T} \right)$$

sustituyendo la ecuación 6.14, y  $C_p = R K / [ J ( K - 1 ) ]$  obtenemos

$$T^0 = T \left[ 1 + \left( \frac{k-1}{2} \right) M^2 \right] \quad (6.36)$$

sustituyendo la ecuación 6.36 en la ecuación 6.34,

$$P^0 = P \left[ 1 + \left( \frac{k-1}{2} \right) M^2 \right]^{\frac{k}{k-1}} \quad (6.37)$$

La ecuación de la energía 6.9 dadas las relaciones entre la entalpía estática y la de estancamiento son

$$h^0 = h + \frac{V^2}{2gJ} = \text{constante} \quad (6.38)$$

para un flujo Adiabático en el cual el trabajo es nulo, unido a la presencia de fricción, la entalpía y temperatura de estancamiento son constantes en todas las secciones del pasaje del flujo

$$h^{\circ}_1 = h^{\circ}_2 = \text{constante} \quad (6.39a)$$

$$T^{\circ}_1 = T^{\circ}_2 = \text{constante} \quad (6.39b)$$

Si el flujo es isoentrópico con trabajo, la presión de estancamiento es igual en todas las secciones y es,

$$P^{\circ}_1 = P^{\circ}_2 = \text{constante} \quad (6.39c)$$

## 6.9 Flujo Isoentrópico en una área de sección transversal variable

de la ecuación 6.6

$$\frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} - \frac{dv}{v} = 0 \quad (6.40)$$

de una masa Isoentrópica modulada para un gas ideal

$$K_s = K P = - \frac{dP}{dv/v}$$

$$- \frac{dv}{v} = \frac{1}{k} \frac{dP}{P} \quad (6.41)$$

de la ecuación 2.8 dividiendo toda la ecuación entre  $V^2$ ,

$$\frac{dV}{V} = -\frac{gvdP}{V^2} = -\frac{1}{M^2} \quad (6.42)$$

sustituyendo las ecuaciones 6.41 y 6.42 en la ecuación 6.40,

$$\frac{dA}{A} - \frac{1}{M^2} + \frac{1}{k} \frac{dP}{P} = 0$$

ó

$$\frac{dA}{A} = \frac{1}{k} \left( \frac{1}{M^2} - 1 \right) \frac{dP}{P} \quad (6.43)$$

sustituyendo la ecuación 6.41 en la ecuación 6.42 obtenemos

$$k P dv = \frac{VdV}{g}$$

ó

$$\frac{dv}{v} = \frac{VdV}{gkPv}$$

y

$$\frac{dv}{v} = \frac{VdV}{a^2}$$

la cual sustituida en la ecuación 6.40 nos da,

$$\frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} - \frac{VdV}{a^2} = 0$$

ó

$$\frac{dA}{A} = \frac{VdV}{a^2} - \frac{dV}{V} = (M^2 - 1) \frac{dV}{V} \quad (6.44)$$

y de la ecuación 6.14,

$$-dP = kP \frac{dv}{v}$$

sustituyendo en la ecuación 6.42,

$$\frac{dV}{V} = \frac{gkPv}{V^2} \frac{dv}{v} = \frac{1}{M^2} \frac{dv}{v}$$

y sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación 6.40,

$$\frac{dA}{A} = \left(1 - \frac{1}{M^2}\right) \frac{dv}{v} \quad (6.45)$$

Las ecuaciones 6.8, 6.43, 6.44 y 6.45 son fundamentalmente significativas en el estudio de un flujo isoentrópico y por comodidad las escribiremos nuevamente:

$$vdP + \frac{VdV}{g} = 0 \quad (6.8)$$

$$\frac{dA}{A} = \frac{1}{k} \left( \frac{1}{M^2} - 1 \right) \frac{dP}{P} \quad (6.43)$$

$$\frac{dA}{A} = \frac{VdV}{a^2} - \frac{dV}{V} = (M^2 - 1) \frac{dV}{V} \quad (6.44)$$

$$\frac{dA}{A} = \left(1 - \frac{1}{M^2}\right) \frac{dv}{v} \quad (6.45)$$

## CAPÍTULO 7

### CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este momento puedo concluir que las ecuaciones anteriormente descritas 6.8, 6.43, 6.44 y 6.45 son fundamentalmente significativas en el estudio de un flujo isoentrópico y para recordarlas las escribiremos nuevamente:

$$v dP + \frac{V dV}{g} = 0 \quad (6.8)$$

$$\frac{dA}{A} = \frac{1}{k} \left( \frac{1}{M^2} - 1 \right) \frac{dP}{P} \quad (6.43)$$

$$\frac{dA}{A} = \frac{V dV}{a^2} - \frac{dV}{V} = (M^2 - 1) \frac{dV}{V} \quad (6.44)$$

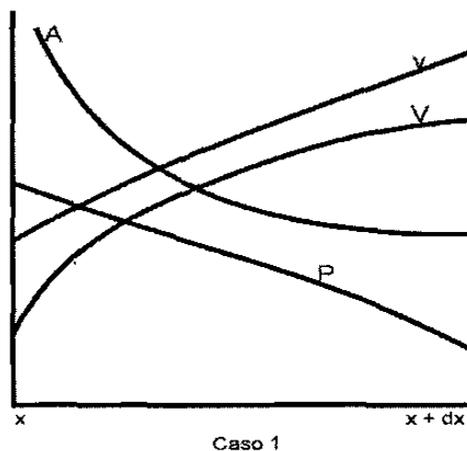
$$\frac{dA}{A} = \left( 1 - \frac{1}{M^2} \right) \frac{dv}{v} \quad (6.45)$$

Algunas condiciones en el flujo pueden ser examinadas en conjunción con las ecuaciones anteriores:

**Caso # 1.           Él numero de Mach < 1 ( subsónico )  
y la Presión Disminuyendo**

De la ecuación 6.8, si  $dP$  es negativa, entonces  $dV$  debe ser positiva. Cuando el número de Mach es menor que 1 la expresión que esta en el paréntesis de la ecuación 6.43 es positiva, y puesto que  $dP$  es negativa,  $dA$  debe de ser también negativa. El mismo resultado se puede obtener de la ecuación 6.44 puesto que la expresión en el paréntesis es negativa,  $dV$  es positiva y  $dA$  tiene que ser negativa. El cambio en el volumen específico en una área de sección transversal puede ser obtenida de la ecuación 6.45 la cual muestra que se va incrementando.

**Resumiendo:** Si la velocidad que entra al pasaje es subsónica y la presión estática en el pasaje está disminuyendo, entonces el área del pasaje debe de ser **CONVERGENTE** con un incremento en la velocidad y en el volumen específico.

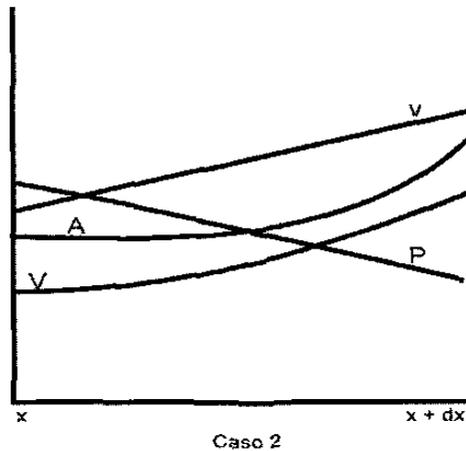


**Gráfica 7.1 Caso # 1**

**Caso # 2. El número de Mach  $> 1$  ( supersónico )  
y la Presión Disminuyendo**

De la ecuación 6.8. Si  $dP$  es negativa, entonces  $dV$  debe de ser positiva. Si la expresión en el paréntesis de la ecuación 6.43 es negativa, y puesto que  $dP$  también es negativa entonces  $dA$  es positiva. Similarmente en la ecuación 6.44 se puede comprobar que  $dA$  es positiva. Y con la ecuación 6.45 se puede establecer que el volumen específico de esta incrementando.

**Resumiendo:** Si la velocidad que entra al pasaje es supersónica y la presión estática del pasaje se está disminuyendo, entonces el área del pasaje debe de ser **DIVERGENTE** con un incremento en la velocidad y en el volumen específico.

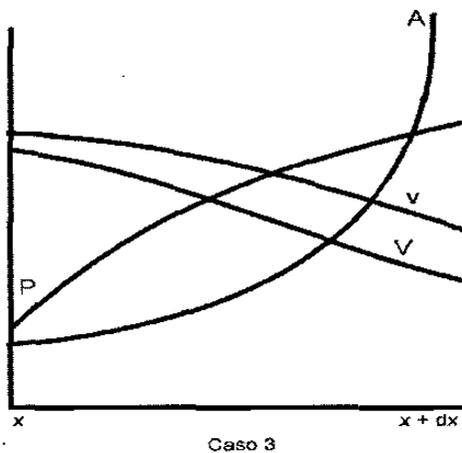


**Gráfica 7.2 Caso # 2**

**Caso # 3. El número de Mach  $< 1$  ( subsónico )  
y la Presión Incrementando**

La ecuación 6.8 muestra que  $dV$  debe de ser negativa cuando  $dP$  es positiva, esta condición también se satisface en la ecuación 6.44 . Y la ecuación 6.45 muestra que el volumen específico disminuye.

**Resumiendo:** Si la velocidad de entrada al pasaje es subsónica y la presión estática dentro del pasaje se está incrementando, entonces el área del pasaje debe de ser **DIVERGENTE** con un decremento en la velocidad y en el volumen específico.

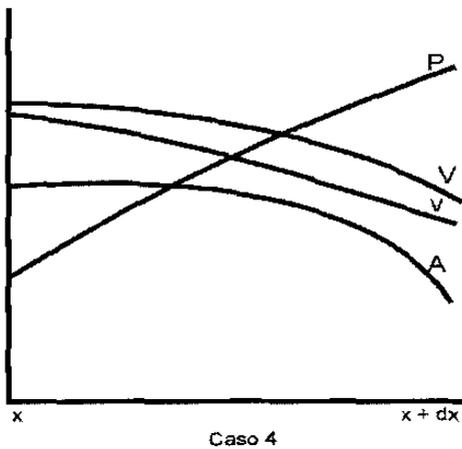


**Gráfica 7.2 Caso # 3**

**Caso # 4. El número de Mach  $> 1$  ( supersónico )  
y la Presión Incrementando**

La ecuación 6.8 muestra que  $dV$  es negativa. Y la ecuación 6.43 indica que  $dA$  es negativa, esta condición también la satisface la ecuación 6.44 . La ecuación 6.45 muestra que el volumen específico disminuye.

**Resumiendo:** Si la velocidad que entra al pasaje es supersónica y la presión estática se está incrementando, entonces el área del pasaje debe de ser **CONVERGENTE** con un decremento en la velocidad y en el volumen específico.



**Gráfica 7.4 Caso # 4**

**Caso # 5. El número de Mach = 1 y la Presión  
Incrementando ó Disminuyendo**

Si el número de Mach es la unidad (1) en la sección del pasaje, de la ecuación 6.43 hasta la ecuación 6.45,  $dA$  es igual a cero (0). Por lo tanto el declive de la curva de área graficada contra el número de Mach es cero (0) cuando  $M = 1$ , un punto de inflexión es alcanzado, y el área de sección transversal debe de ser mínima. Para esta condición la ecuación 6.40 se reduce a

$$\frac{dV}{V} - \frac{dv}{v} = 0$$

ó

$$d\left(\frac{V}{v}\right) = 0 \quad (6.46)$$

y

$$\frac{G}{A} = \frac{V}{v} = \text{maximo} \quad (6.47)$$

Un punto de desvío es alcanzado en la curva de  $V/v$  contra el número de Mach cuando  $M = 1$  y la razón  $V/v$  es máxima. Por lo tanto, cuando  $M < 1$ , la velocidad se incrementa mucho más rápido que el volumen específico hasta que  $M = 1$  es alcanzada, después cuando  $M > 1$  el volumen específico se incrementa más rápidamente que la velocidad con un decremento de la presión.

Para una área de sección transversal mínima dada, ( $dA = 0$  con  $M = 1$ ), esto junto con la ecuación de la continuidad y de la ecuación 6.46 como se expresó en la ecuación 6.47, la máxima razón de masa del flujo ocurre cuando  $M = 1$ . Por lo tanto la razón de masa del flujo en un pasaje está controlada por las condiciones y por  $M = 1$ , a

menos que  $M = 1$  no sea alcanzada, entonces las condiciones de salida del pasaje las controla el flujo. Estas conclusiones son consistentes con el hecho de que los disturbios tales como los cambios de presión no pueden moverse corrientes-arriba después de que  $M = 1$  es alcanzada y por lo tanto son incapaces de afectar el flujo.

Es muy importante recalcar que las características del flujo analizadas en este escrito y en los cinco casos explicados con anterioridad solamente se aplican a las

### **Toberas, Tubos Venturi y Difusores**

Un Transónico ó una Tobera convergente-divergente tienen las características de los casos 1, 5 y 2 en ese orden.

Un Tubo Venturi tiene las características de los casos 1, 5 y 3 consecutivamente.

El Difusor en una rama del chorro de un jet ó de un avión supersónico muestra las características del caso 4 en tanto el jet está caracterizado por el caso 1.

En el caso del programa computacional

Se recomienda que al utilizar el programa computacional **Compq** se verifiquen bien los datos que se tienen y así poder escoger la opción adecuada así como el parámetro a utilizar, hay que recordar que los resultados que se obtienen del programa en su mayoría son **RAZONES** y que de esas despejaremos las incógnitas que se solicitan.

# BIBLIOGRAFÍA

Autores: B. K. Hodge / Keith Koenig

Compressible fluid Dynamics with personal computer aplicaciones

Editorial: Prentice Hall

Año de la Edición: 1995

Autor: Jhon F. Lee

Theory and Design of Steam and Gas Turbines

Editorial: Mc. Graw Hill

Año de la Edición: 1982

Autor: M. David Burghardt

*Ingeniería Termodinámica*

Año de la Edición: 1980

Autores: Smith / Van Ness

Introducción a la Termodinámica en Ingeniería Química

Año de la Edición: 1984

# LISTADO DE FIGURAS

<b>Figura</b>	<b>Página</b>
<b>2.1 Tobera Conectada a un Deposito</b>	<b>13</b>
<b>2.2 Flujo con Diferentes Contrapresiones</b>	<b>14</b>
<b>2.3 Incremento en la Razón del Flujo</b>	<b>14</b>
<b>2.4 Tanque Presurizado con una Tobera Convergente</b>	<b>16</b>
<b>2.5 Comportamiento de una Tobera convergente-divergente</b>	<b>21</b>
<b>2.6 Distribución de Presión para varias Contrapresiones</b>	<b>21</b>
<b>2.7 Razón de Flujo de Masa como una Función</b>	<b>22</b>
<b>2.8 Escape sin Estrangulamiento</b>	<b>22</b>
<b>2.9 Choque Normal en la Tobera</b>	<b>23</b>
<b>2.10 Choque Normal en el plano de salida de la Tobera</b>	<b>23</b>
<b>2.11 Sobreexpandido</b>	<b>23</b>
<b>2.12 Isoentrópico</b>	<b>23</b>
<b>2.13 Bajo Expansión</b>	<b>24</b>
<b>2.14 Diferentes Regiones según el Flujo</b>	<b>25</b>
<b>2.15 Soplado en un Túnel de Viento</b>	<b>26</b>
<b>2.16 Choque Normal en la Sección de Prueba de la Salida</b>	<b>26</b>
<b>2.17 Túnel de Viento Continuo</b>	<b>28</b>
<b>2.18 Túnel de Viento Continuo con Difusor</b>	<b>28</b>
<b>2.19a Marcha Inicial</b>	<b>29</b>
<b>2.19b Primera Garganta Sónica</b>	<b>29</b>
<b>2.19c Choque en una Sección Divergente</b>	<b>30</b>
<b>2.19d Choque en la Sección de Prueba en la Entrada</b>	<b>30</b>
<b>2.19e Choque Tragado</b>	<b>31</b>
<b>2.19f Desaceleración del Choque Libre con Área Variable</b>	<b>31</b>
<b>2.19g Operación del Túnel de Viento para un Difusor de Área</b>	<b>32</b>
<b>2.20 Área de Captura</b>	<b>32</b>
<b>2.21a Compresión Externa</b>	<b>33</b>

2.21b	Compresión Interna	34
2.22a	Choque Normal junto al Labio de la Entrada	35
2.22b	Choque Hacia el Frente de la Entrada	35
2.22c	Choque Hacia Adentro de la Entrada	36
3.1	Tobera Convergente con un Ducto de Área constante	43
3.2a	Contrapresión y Presiones Iguales el Flujo no Ocurre	44
3.2b	Distribución de Presión	44
3.2c	Distribución del Número de Mach	45
3.2d	Comportamiento de la línea FANNO	45
3.3a	Esquema de un Flujo en Movimiento	46
3.3b	Distribución de Presión	46
3.3c	Comportamiento de la línea FANNO	47
3.4	Tobera convergente-divergente conectada a un ducto de Área Cte.	47
3.5a	Un Segmento de ducto con un Número de Mach Supersónico	48
3.5b	Distribución de Presión	49
3.5c	Comportamiento de la línea FANNO	49
3.6a	La onda de Choque puede ó no puede estar en el Ducto	50
3.6b	Distribución de Diferentes Contrapresiones	50
3.6c	Comportamiento del Flujo FANNO para la curva a	51
3.6d	Comportamiento del Flujo FANNO para la curva b	51
3.6e	Comportamiento del Flujo FANNO para la curva c	52
3.6f	Comportamiento del Flujo FANNO para la curva d	52
3.6g	Comportamiento del Flujo FANNO para la curva e	53
4.1	Nomenclatura del Flujo RAYLEIGH	60
4.2a	Líneas RAYLEIGH para un Gas Perfecto ( $\lambda=1.4$ )	62
4.2b	Líneas RAYLEIGH para un Gas Perfecto ( $\lambda=1.4$ )	62
4.3	Representación de las líneas RAYLEIGH	64
6.1	Distribución de la Velocidad en ausencia de Fricción Interna	77
6.2	Flujo de un Elemento de un Fluido en un Pasaje Sección Variable	78
6.3	Movimiento que se Observa con una Onda Frontal	85
6.4a	Ondas del Sonido en un Gas	90

<b>6.4b</b>	<b>Ondas del Sonido en un Gas</b>	<b>90</b>
<b>6.4c</b>	<b>Ondas del Sonido en un Gas</b>	<b>90</b>
<b>6.5</b>	<b>Flujo Desacelerado con un Disturbio en la Región Subsónica</b>	<b>92</b>
<b>6.6</b>	<b>Onda de Choque Oblicua Débil ( <math>\theta</math> muy pequeño )</b>	<b>98</b>
<b>6.7</b>	<b>Onda de Choque Oblicua Débil en un pasaje Divergente (<math>d\theta</math> muy pequeño)</b>	<b>99</b>
<b>6.8</b>	<b>Onda de Choque Oblicua Débil en un pasaje Convergente (<math>d\theta</math> muy pequeño)</b>	<b>99</b>
<b>6.9a</b>	<b>Flujo Supersónico en las esquinas Exteriores ó Interiores</b>	<b>104</b>
<b>6.9b</b>	<b>Flujo Supersónico en las esquinas Exteriores ó Interiores</b>	<b>104</b>
<b>6.10</b>	<b>Onda de choque Oblicua Fuerte</b>	<b>105</b>
<b>6.11</b>	<b>Choque Polar</b>	<b>106</b>
<b>6.12</b>	<b>Cuña Junta y Separada de la Onda de Choque</b>	<b>108</b>

# LISTADO DE PANTALLAS

<b>Pantalla</b>	<b>Página</b>
2.1 Inicio del programa	37
2.2 Opciones	37
2.3 Opción IS del programa	38
2.4 Caso P del programa	38
2.5 Caso M del programa	39
2.6 Caso A del programa	40
2.7 Caso T del programa	40
2.8 Caso AC del programa	41
2.9 Caso AR del programa	42
3.1 Inicio del programa	53
3.2 Opciones	54
3.3 Opción FA del programa	54
3.4 Caso M del programa	55
3.5 Caso F del programa	56
3.6 Caso P del programa	56
3.7 Caso DA del programa	57
4.1 Inicio del programa	66
4.2 Opciones	67
4.3 Opción RA del programa	67
4.4 Caso M del programa	68
4.5 Caso T del programa	69
4.6 Caso HT del programa	70
5.1 Inicio del programa	71
5.2 Opciones	72
5.3 Opción PL del programa	72
5.4 Caso M del programa	73
5.5 Caso F del programa	74
5.6 Caso DA del programa	75

# APÉNDICES

## APÉNDICE 1 ( Tablas y Gráficas Suplementarias )

<b>Tabla 4.1</b>	<b>Relaciones para el flujo RAYLEIGH</b>	<b>59</b>
<b>Gráfica 6.1</b>	<b>Números de Mach contra ángulos <math>\theta</math></b>	<b>103</b>
<b>Gráfica 7.1</b>	<b>Caso # 1</b>	<b>116</b>
<b>Gráfica 7.2</b>	<b>Caso # 2</b>	<b>117</b>
<b>Gráfica 7.3</b>	<b>Caso # 3</b>	<b>118</b>
<b>Gráfica 7.4</b>	<b>Caso # 4</b>	<b>119</b>

# AUTOBIOGRAFÍA

**Ing. Arturo Rodolfo González Escamilla**

**Candidato a obtener el grado de Maestro en Ciencias de la Ingeniería Mecánica con especialidad en Térmica y Fluidos**

**Título de la tesis: DINÁMICA DE GASES APLICADA A LAS TOBERAS**

**Nací en Monterrey N. L. El 28 de Marzo de 1953, mis padres son el Dr. Bricio González Enríquez y la Profra. María Luisa Escamilla Lozano, soy el 4<sup>to</sup> de una familia de 5 hijos.**

**Realicé mis primeros estudios en el Colegio Moderno en la Ciudad de Reynosa Tamaulipas ( 1958 - 1964 ), posteriormente mi familia se trasladó a la Ciudad de Monterrey N. L., donde proseguí los estudios de nivel medio en la Escuela Secundaria # 1 Prof. Andrés Osuna Hinojosa ( 1964 - 1967 ), ingresé a la Escuela Industrial y Preparatoria Técnica Alvaro Obregón donde obtuve el título de Técnico Mecánico Aparatista ( 1967 - 1970 ), continué mis estudios en la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica ( 1970 - 1975 ), donde obtuve el título de Ingeniero Mecánico Electricista en el mes de Febrero de 1976.**

**Contraje matrimonio con la Srita. Norma Leticia Padilla Frutos en el mes de Octubre de 1975 con quien procee 3 hijos: Donick, Angel y Kiber.**

**En 1972 ingresé a la Escuela Preparatoria # 2 de la U.A.N.L. como maestro por horas impartiendo las clases de Física y Álgebra, en 1973 fui nombrado auxiliar de**

**la Secretaría y posteriormente en 1974 Secretario Administrativo del 3<sup>er</sup> turno, fui jefe de la Academia de Matemáticas durante 8 años hasta 1984.**

**En 1980 impartí clases de Álgebra y Física en la Preparatoria Benito Juárez y en 1981 ingresé a impartir la clase de Matemáticas a la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica.**

**En 1986 me separé de la Preparatoria # 2 y trasladé mi carga académica a la F.I.M.E. como maestro de tiempo completo, en este mismo año ingrese al Grupo Industrial Regio como jefe de Producción y de Mantenimiento de las Empresas: Laminados Derbéz S.A., Aceros Industriales Atlas S.A., Plásticos Reforzados Atlas S.A. y Regio Aceros S.A.**

**En 1987 fui nombrado Gerente General de la Empresa Plásticos Reforzados Atlas S.A. de donde me separe en el año de 1990.**

**En 1990 fui nombrado Jefe de la academia de Taller Mecánico y Eléctrico de la F.I.M.E. y en 1996 me nombraron Subsecretario Administrativo de la misma hasta la fecha.**

