

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA
Y ELECTRICA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



EL METODO DEL ELEMENTO FINITO APLICADO EN LA SOLUCION DE
PROBLEMAS DE TRANSFERENCIA DE CALOR EN UNA DIMENSION

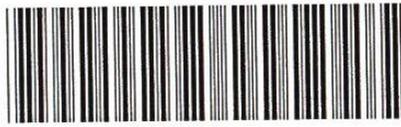
POR

ADRIAN SALAZAR VARGAS

TESIS

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE
LA INGENIERIA MECANICA CON ESPECIALIDAD EN
TERMICA Y FLUIDOS

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L.
NOVIEMBRE DE 1999



1020130043

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA
Y ELECTRICA

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



EL METODO DEL ELEMENTO FINITO APLICADO EN LA SOLUCION DE
PROBLEMAS DE TRANSFERENCIA DE CALOR EN UNA DIMENSION

POR

ADRIAN SALAZAR VARGAS

TESIS

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE
LA INGENIERIA MECANICA CON ESPECIALIDAD EN
TERMICA Y FLUIDOS

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L.
NOVIEMBRE DE 1999

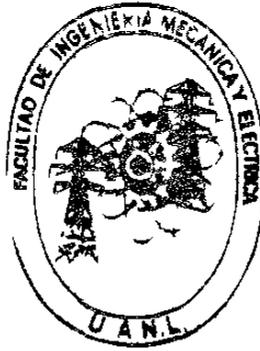
TM
25853
MA
FINE
999
S24

0134 87 -0



FONDO
TESIS

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA
Y ELECTRICA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



EL METODO DEL ELEMENTO FINITO APLICADO EN LA SOLUCION DE
PROBLEMAS DE TRANSFERENCIA DE CALOR EN UNA DIMENSION

POR

ADRIAN SALAZAR VARGAS

TESIS

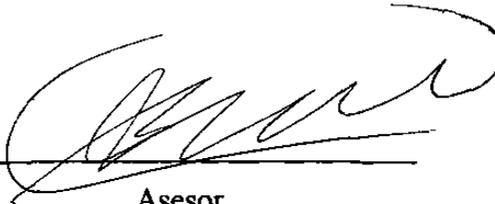
EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE
LA INGENIERIA MECANICA CON ESPECIALIDAD EN
TERMICA Y FLUIDOS

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L.
NOVIEMBRE DE 1999

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis EL METODO DEL ELEMENTO FINITO APLICADO EN LA SOLUCION DE PROBLEMAS DE TRANSFERENCIA DE CALOR EN UNA DIMENSION realizada por el ING. ADRIAN SALAZAR VARGAS sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestro en Ciencias de la Ingeniería Mecánica con especialidad en Térmica y Fluidos.

El Comité de Tesis



Asesor

M. C. Guadalupe E. Cedillo Garza



Coasesor

M.C. Roberto Villarreal Garza



Coasesor

M.C. Tomas N. Matrinez Perez



Vo. Bo.

M.C. Roberto Villarreal Garza
División de Estudios de Postgrado

San Nicolás de los Garza, N.L. a 16 de Noviembre de 1999

PROLOGO

El método del elemento finito representa una herramienta muy útil como alternativa para la solución de problemas complejos de transferencia de calor.

El método del elemento finito permite el análisis de problemas complejos en dos y tres dimensiones.

En ésta tesis nos abocaremos a la solución de problemas de una sola dimensión. Aquí el dominio total del problema será dividido en sub-dominios a los cuales llamaremos elementos finitos, y la intersección entre ellos la conoceremos como nodo.

La solución individual aproximada de cada elemento finito aportará suficiente información para la solución del problema global en la medida en que se disminuya el tamaño de cada sub-división o elemento finito del dominio total.

Los programas computacionales actuales han venido a facilitar la metodología de solución para el método del elemento finito aplicado a problemas complejos de transferencia de calor.

INDICE	Página
Síntesis	i
CAPITULO 1. Introducción.	
1.1. - Comentarios generales.	1
1.2. - Antecedentes históricos.	3
1.3. - El concepto básico del elemento finito.	4
CAPITULO 2. - Formulaciones integrales y métodos variacionales.	
2.1. - La forma integral pesada.	14
2.2. - Conceptos y fórmulas matemáticas.	17
2.3. - Formulación débil en problemas de valor frontera.	28
2.4. - Métodos variacionales de aproximación.	45
CAPITULO 3. - Análisis del elemento finito en problemas de una dimensión con valor frontera de segundo orden.	
3.1. - Comparación del elemento finito con los métodos variacionales.	66
3.2. - Pasos básicos para el análisis del elemento finito.	70
CAPITULO 4. – Analisis de error del elemento finito.	
4.1. – Errores de aproximación.	123
4.2. – Diversas medidas de errores.	124
4.3. – Convergencia de la solución.	125
4.4. – Exactitud de la solución.	126
CAPITULO 5. - Solución a problemas de transferencia de calor en una dimensión aplicando el método del elemento finito con auxilio de un programa de computadora.	
	136

CAPITULO 6. - Conclusiones y recomendaciones.	154
CAPITULO 7. - Bibliografía.	157
CAPITULO 8. - Listado de tablas.	158
CAPITULO 9. - Listado de figuras.	159
CAPITULO 10. - Apéndice.	161
CAPITULO 11. - Resumen autobiográfico.	164

SINTEISIS

CAPITULO 1. Observaciones fundamentales del metodo del elemento finito, ejemplos de su aplicación, comentarios con respecto a otros métodos similares y antecedentes históricos.

CAPITULO 2. Conocimiento de fórmulas de integración básicas, exposición principal de la integral pesada para ecuaciones algebraicas con coeficientes desconocidos. Comentarios de los diferentes métodos variacionales, con sus correspondientes formulaciones integrales. Notas y terminología referente a dominio y frontera, problemas de valor inicial y valor propio, obtención de la ecuación para integración por partes y la forma débil. Teorema del gradiente, teorema de divergencia, funcionales, simbolo variacional, formulación pesada y formulación débil para análisis y solución de problemas de valor frontera. Conocimientos necesarios para la obtención de la formulación débil, las formas lineal y bilineal, las funciones cuadráticas, exposición de los métodos variacionales de aproximación Raileigh-Ritz, Petrov-Galerkin, cuadrado mínimo, el método de colocación, ejemplos y comparación de resultados.

CAPITULO 3 Exposición del alcance de los métodos de aproximación variacionales. Análisis del método del elemento finito en problemas de una sola dimensión con valor frontera de segundo orden, características básicas del método, pasos involucrados en la solución de un problema, características necesarias para solución de problemas mediante métodos computacionales. Pasos para la formulación de la ecuación modelo de un problema utilizando el método del elemento finito, obtención de las ecuaciones elemento, análisis de la formulación débil, aproximación de la solución, comentarios sobre las funciones interpolación de la familia Lagrange y Hermite. Obtención de las ecuaciones para elemento lineal, elemento cuadrático, la conectividad de los elementos para conocer las ecuaciones de ensamble, solución de un ejemplo para indicar como

imponer las condiciones frontera en las ecuaciones algebraicas para su solución y el post-procesamiento de la solución en cuanto a la relación error-número de elementos.

CAPITULO 4. Comentarios, análisis de las fuentes básicas de error en la solución de ecuaciones diferenciales dadas. Conocimientos de las distintas formas de medir la diferencia entre dos funciones, la convergencia de la solución del elemento finito hacia la solución verdadera y la exactitud de la solución..

CAPITULO 5. Análisis y solución a problemas complejos de transferencia de calor en una dimensión por medio del elemento finito y un programa de computadora como una herramienta auxiliar muy útil para conocer la solución mediante los métodos variacionales y con el auxilio de un sistema de cómputo. Elaboración del archivo de datos de entrada al programa de acuerdo al problema y condiciones particulares, así como resultados obtenidos.

CAPITULO 6. De acuerdo al análisis, conocimientos de la metodología y el desarrollo en la solución de los problemas expuestos, se obtienen conclusiones con referencia a la solución manejada con otros métodos variacionales y el método del elemento finito.

CAPITULO 7. Apoyo bibliográfico utilizado.

CAPITULO 8. Listado de tablas utilizadas y páginas de ubicación.

CAPITULO 9. Lista de figuras utilizadas y páginas de ubicación

CAPITULO 10. Glosario de conceptos y terminología utilizados.

CAPITULO 11. Presentación de la autobiografía del sustentante.

CAPITULO 1

INTRODUCCION

1.1.Comentarios Generales:

Virtualmente, cada fenómeno en la naturaleza sea biológico, geológico o mecánico, se puede describir con ayuda de las leyes de la Física en términos de ecuaciones algebraicas, diferenciales o integrales, relacionando diversas cantidades de interés. Para determinar la concentración de esfuerzos en un recipiente a presión, con agujeros impares, numerosos refuerzos y sujeto a cargas mecánicas, térmicas y/o aerodinámicas, para encontrar la contaminación en el agua del mar o en la atmósfera, en la simulación del estado del tiempo para entender y predecir los mecanismos de formación de tornados y tormentas, son unos cuantos ejemplos de muchos problemas prácticos importantes.

La mayoría de los Ingenieros y Científicos que estudian los fenómenos físicos están implicados en dos tareas principales:

1. La formulación matemática de los procesos físicos.
2. El análisis numérico del modelo matemático.

La formulación matemática de un proceso físico requiere de las leyes de la Física y además, ciertas herramientas matemáticas, la formulación consiste en exposiciones

matemáticas, a menudo ecuaciones diferenciales que relacionan cantidades de interés para el entendimiento y/o diseño de procesos físicos. El desarrollo del modelo matemático de un proceso se obtiene a través de suposiciones referentes a cómo trabaja el proceso. En una simulación numérica, usamos un método numérico y una computadora para evaluar el modelo matemático y estimar las características del proceso.

Mientras que la derivación de las ecuaciones que rigen para la mayoría de los problemas no es difícil, su solución por métodos exactos de análisis es una enorme tarea. En tales casos, métodos de análisis aproximados proveen medios alternativos de solución, tales como los métodos de Rayleigh- Ritz ó Galerkin.

En la aproximación de diferencia finita de una ecuación diferencial, las derivadas se reemplazan por cocientes diferentes (o la función se expande en una serie Taylor) que involucran los valores de la solución en puntos de malla discretos del dominio. Las ecuaciones algebraicas que resultan se resuelven, luego de imponer las condiciones de frontera, para los valores de la solución en los puntos de la malla.

En la solución de una ecuación diferencial por el método variacional, la ecuación se pone en una forma equivalente, la integral pesada y luego la solución aproximada sobre el dominio se supone que es una combinación $(\sum_j c_j \phi_j)$ de funciones aproximación ϕ_j ; escogidas apropiadamente y coeficientes no determinados, c_j .

Los coeficientes c_j , se determinan de modo que la exposición de la integral equivalente a la ecuación diferencial original se satisfaga.

Los diferentes métodos variacionales, por ejemplo: Rayleigh-Ritz, Galerkin y el método de cuadrados mínimos difieren uno del otro en la selección de la forma integral, funciones peso, y/o funciones de aproximación. Tienen la desventaja de que las funciones de aproximación para problemas con dominio arbitrario son difíciles de construir.

El método del elemento finito supera la desventaja de los métodos variacionales tradicionales mediante un procedimiento sistemático para la derivación de las funciones

de aproximación, en subregiones del dominio. El método se basa en tres características que lo hace superior a los demás métodos:

Primero, un dominio geoméricamente complejo del problema se representa como un conjunto de subdominios geoméricamente simples llamados elementos finitos. Segundo, sobre cada elemento finito, las funciones de aproximación se derivan bajo la idea básica de que cualquier función continua puede ser representada por una combinación lineal de polinomios algebraicos. Tercero, se obtienen relaciones algebraicas entre los coeficientes no determinados (valores nodales) satisfaciendo las ecuaciones que rigen, a menudo en un sentido de integral pesada, sobre cada elemento. Por lo tanto, el método del elemento finito, puede verse en particular como una aplicación hábil de los métodos Rayleigh-Ritz o residuo pesado. En él, las funciones de aproximación son a menudo consideradas como polinomios algebraicos y los parámetros no determinados representan los valores de la solución de un número finito de puntos preseleccionados, llamados nodos, en la frontera y en el interior del elemento. Las funciones de aproximación se derivan usando los conceptos de la teoría de la interpolación, y son por lo tanto, llamadas funciones de interpolación. Encuentra uno que el grado de las funciones de interpolación depende del número de nodos en el elemento y del orden de la ecuación diferencial a resolverse.

1.2. ANTECEDENTES HISTORICOS:

La idea de representar un dominio dado, como un conjunto de partes discretas no es solamente hacia el elemento finito. El valor de π fue estimado por los antiguos matemáticos, considerando que el perímetro de un polígono inscrito en un círculo se aproxima a la circunferencia del último. Ellos predijeron el valor de π con aproximación de casi 40 dígitos, representando el círculo como un polígono de un número finitamente grande de número de lados. En los tiempos modernos, la idea encontró aplicación en el análisis estructural de aeronaves, donde, por ejemplo, alas y fuselaje son tratados como ensambles de largueros, revestimiento y paneles de corte. En 1941, Hrenikoff introdujo el llamado método armazón, en el cual, un medio elástico plano se representó como un conjunto de barras y vigas. Courant en 1943 usó un

Considérese el problema de determinar el perímetro de un círculo de radio R (ver fig. 1.1a). Los antiguos matemáticos estimaron el valor de la circunferencia por aproximación, mediante segmentos de línea cuyas longitudes eran medibles. El valor aproximado de la circunferencia es obtenido sumando las longitudes de los segmentos de línea usados para representarla. Aunque este es un ejemplo trivial, ilustra varias ideas y pasos involucrados en el análisis del elemento finito de un problema. Nosotros planeamos en los pasos involucrados en el cálculo un valor aproximado de la circunferencia del círculo. Haciéndolo así introducimos ciertos términos que se usan en el análisis del elemento finito de cualquier problema.

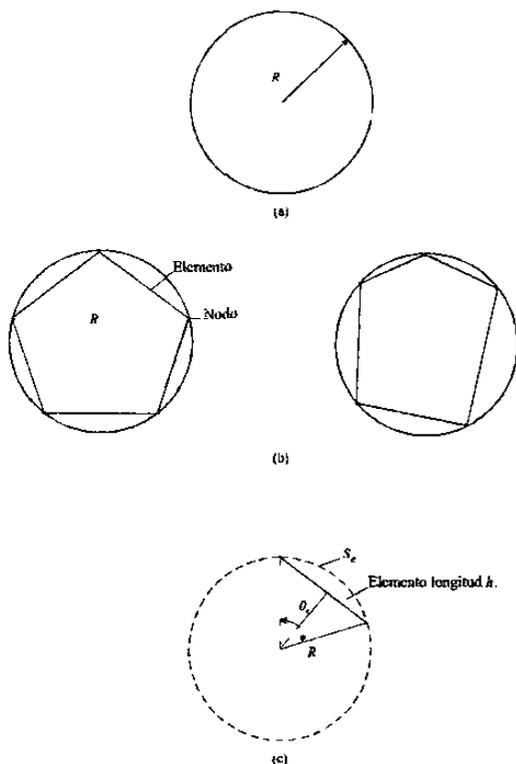


Figura 1.1^a Aproximación de la circunferencia de un círculo mediante elementos línea

Círculo de radio R .

Mallas uniforme y no uniforme usadas para representar la circunferencia del círculo.

Un elemento típico

Discretización del elemento finito. Primero, el dominio (por ejemplo la circunferencia del círculo) se representa como un conjunto de número finito n de subdominios, denominados segmentos línea. Esto se llama discretización del dominio. Cada subdominio (segmento línea) se llama un elemento. El conjunto de elementos es llamado malla del elemento finito. Los elementos están conectados unos a otro en puntos llamados nodos. En el caso presente, discretizamos la circunferencia en una malla de 5 ($n = 5$) segmentos línea. Los segmentos línea pueden ser de diferente longitud. Cuando

todos los elementos (eje. segmentos línea) son de igual longitud se dice que la malla es uniforme; lo contrario se llama malla no uniforme ver figura (1.1b).

Ecuaciones del elemento. Un elemento típico (ejemplo el segmento Ω^e) se aísla y se requieren sus propiedades por ejemplo longitud y se calculan por algún medio apropiado. Haga que h_e sea la longitud del elemento Ω^e en la malla para un elemento típico Ω^e , h_e está dado por (ver fig. 1.1c)

$$h_e = 2R \text{Sen} \frac{1}{2} \theta_e \quad (1.1)$$

donde R es el radio del círculo y $\theta_e < \pi$ es el ángulo subtendido por el segmento línea.

Las ecuaciones anteriores se llaman ecuaciones elemento.

3. Ensamble de ecuaciones elemento y solución. El valor aproximado de la circunferencia (o perímetro) del círculo se obtiene colocando las propiedades del elemento de manera significativa; este proceso se llama el ensamble de las ecuaciones elemento. Este está basado en el caso presente en la idea simple de que el perímetro total de polígono (elementos ensamblados) es igual a la suma de las longitudes de los elementos individuales:

$$P_n = \sum_{e=1}^n h_e \quad (1.2)$$

Entonces P_n representa una aproximación del perímetro real p . Si la malla es

uniforme, o h_e es la misma para cada elemento de la malla, entonces $\theta_e = \frac{2\pi}{n}$, y

tenemos:

$$P_n = n \left(2R \operatorname{Sen} \frac{\pi}{n} \right) \quad (1.3)$$

4. Convergencia y error estimado. Para éste problema simple, conocemos la solución exacta: $p = 2\pi R$. Podemos estimar el error en la aproximación y mostrar que la solución aproximada P_n converge a p exacta en el límite cuando $n \rightarrow \infty$. Considere el elemento típico Ω^e . El error en la aproximación es igual a la diferencia entre la longitud del sector y la del segmento línea (vea figura 1.1c)

$$E_e = |S_e - h_e| \quad (1.4)$$

Donde $S_e = R\theta_e$ es la longitud del sector. Por tanto, el error estimado para un elemento en la malla está dado por

$$E_e = R \left| \frac{2\pi}{n} - 2 \operatorname{Sen} \frac{\pi}{n} \right| \quad (1.5)$$

El error total (llamado error global) está dado por la multiplicación de E_e por n :

$$E = 2R \left(\pi - n \operatorname{Sen} \frac{\pi}{n} \right) = 2\pi R - P_n \quad (1.6)$$

Mostramos ahora que E tiende a cero como $n \rightarrow \infty$. Haciendo $x = \frac{1}{n}$, tenemos

$$P_n = 2Rn \operatorname{Sen} \frac{\pi}{n} = 2R \frac{\operatorname{Sen} \pi x}{x}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2R \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2\pi R \frac{\cos \pi x}{1} \right) = 2\pi R \quad (1.7)$$

de aquí, E_n tiende a cero como $n \longrightarrow \infty$. Esto completa la prueba de convergencia.

En resumen, se demuestra que la circunferencia de un círculo puede ser aproximada tanto como queramos mediante un número finito de funciones lineales. Conforme el número de elementos aumente, mejora la aproximación, el error en la aproximación disminuye.

Determinación aproximada del centro de masa.

Otro ejemplo elemental para ilustrar el concepto de elemento finito consiste en el cálculo del centro de masa de un cuerpo continuo.

Se recordará, de un primer curso de estática de cuerpos rígidos que el cálculo del centro de una masa irregular o el centroide de un volumen irregular hace uso del método llamado de cuerpos compuestos, en el cual un cuerpo es dividido convenientemente (discretización malla) en varias partes (elementos) de forma simple, para los cuales, la masa y el centro de masa (propiedades del elemento) pueden calcularse fácilmente. El centro de masa del cuerpo total, se obtiene usando el principio de Varignon del momento (una base para el ensamble de las propiedades del elemento).

$$(m_1 + m_2 + \dots + m_n) \bar{X} = m_1 \bar{x}_1 + m_2 \bar{x}_2 + \dots + m_n \bar{x}_n \quad (1.8)$$

Donde \bar{X} es la coordenada x del centro de masa del cuerpo total, m_e es la masa de la e -ésima parte \bar{x}_e es la coordenada x del centro de masa de la e -ésima parte. Expresiones similares se establecen para las coordenadas x e y del centro de masa del

cuerpo total. Relaciones analógicas se establecen para líneas compuestas, áreas y volúmenes respectivamente.

Cuando un cuerpo dado, no es expresable en términos de formas geométricas simples (elementos) para el cual la masa y el centro de masa puedan ser representadas matemáticamente, es necesario usar un método de aproximación para representar las propiedades de un elemento. Como un ejemplo, considere el problema de encontrar el centroide (\bar{X}, \bar{Y}) del área irregular (región) mostrada en la Fig.1.2. La región puede dividirse en un número finito de tiras rectangulares (elementos). Un elemento típico con un ancho de h_e y de altura b_e . El área de la e-ésima tira está dada por : $A_e = h_e b_e$. El área A_e es una aproximación del área verdadera del elemento debido a que b_e es una altura promedio estimada del elemento. Las coordenadas del centroide de la región se obtienen aplicando el principio del momento:

$$\bar{X} = \frac{\sum_e A_e \bar{x}_e}{\sum_e A_e}, \quad \bar{Y} = \frac{\sum_e A_e \bar{y}_e}{\sum_e A_e}$$

donde \bar{x}_e y \bar{y}_e son las coordenadas del centroide del e-ésimo elemento con respecto al sistema de coordenadas usado para el cuerpo total. Cuando el centro de masa es requerido, A_e en las ecuaciones anteriores se reemplaza por la masa $m_e = \rho_e A_e$, ρ_e es la densidad de la masa del e-ésimo elemento; para un cuerpo homogéneo, ρ_e es la misma para todos los elementos.

Se notará que la exactitud de la aproximación se mejorará incrementando el número de tiras usadas (decreciendo su ancho) se usan elementos rectangulares en la discusión presente, sólo por razones de simplicidad. Uno puede escoger el uso de elementos de cualquier tamaño y forma que aproximen al área dada, hacia una exactitud satisfactoria. Por ejemplo, un elemento trapezoidal requerirá dos alturas para calcular el área

$$A_e = \frac{1}{2} h_e (b_e + b_{e+1})$$

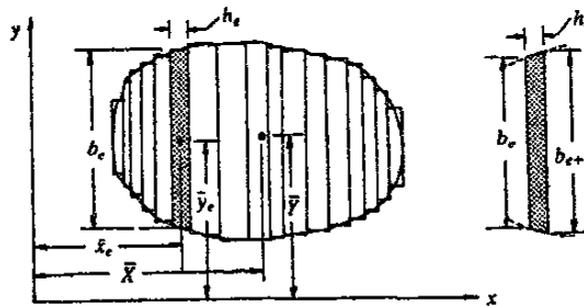


Figura 1.2

Determinación aproximada del centroide de masa (o geométrico) de una región irregular dividiéndolo en una serie de subregiones rectangulares o trapezoidales.

Donde b_e y b_{e+1} son las alturas izquierda y derecha del e-ésimo elemento.

Algunas Observaciones:

En resumen, en el método del elemento finito, un dominio dado, es dividido en subdominios, llamados elementos finitos, y una solución aproximada hacia el problema se desarrolla sobre cada uno. La subdivisión de un total en partes tiene dos ventajas:

1. Permite una representación exacta de geometría compleja y la inclusión de materiales heterogéneos.
2. Da lugar a una representación exacta de la solución dentro de cada elemento, para descubrir efectos locales (grandes gradientes de la solución)

Los tres pasos fundamentales del método del elemento finito son:

1. Dividir el total en partes (ambos para representar la geometría y solución del problema).
2. Sobre cada parte, buscar una aproximación a la solución como una combinación de valores nodales y funciones aproximación.
3. Derivar las relaciones algebraicas entre los valores nodales de la solución para cada parte, y ensamble las partes para obtener la solución del total.

Aunque los ejemplos anteriores ilustran la idea básica del método del elemento finito hay otras características que no se presentaron o no aparecen en la discusión de los ejemplos.

Algunas observaciones son, en orden:

1. Uno puede discretizar un dominio, dependiendo de su forma, en una malla de más de un tipo de elemento. Por ejemplo en la aproximación de un dominio irregular, uno puede usar una combinación de rectángulos y triángulos.
2. Si más de un tipo de elemento es usado en la representación del dominio, uno de cada clase será aislado y sus ecuaciones desarrolladas.
3. Las ecuaciones que rigen, son generalmente más complejas que las consideradas en los primeros dos ejemplos. Son generalmente ecuaciones diferenciales. En la mayoría de los casos las ecuaciones no pueden resolverse sobre un elemento, por dos razones. **Primero**, no permiten la solución exacta. De aquí que los métodos variacionales entren en juego. **Segundo**, las ecuaciones discretas obtenidas en los métodos variacionales no pueden resolverse independientemente de los elementos restantes debido a que el ensamble de los elementos está sujeto a cierta continuidad, frontera y/o condiciones iniciales.
4. Hay dos diferencias principales en la forma de la solución aproximada usada en el método del elemento finito y la que se usó en el método variacional clásico (por ejemplo: método variacional aplicado al dominio total). **Primero**, en lugar de representar la solución u como una combinación lineal $(u = \sum c_j \phi_j)$ en términos

de parámetros arbitrarios c_j , como en los métodos variacionales, en el método del elemento finito la solución es representada a menudo como una combinación lineal $(u = \sum_j u_j \psi_j)$ en términos de los valores u_j de u (y posiblemente sus derivadas) en los puntos nodales. **Segundo**, las funciones aproximadas en el método del elemento finito son por lo regular polinomios que se resuelven usando la teoría de interpolación. Sin embargo, el método del elemento finito no está restringido, al uso de aproximaciones, que son combinaciones lineales de valores nodales u_j y funciones interpolaciones ψ_j , que son polinomios algebraicos. Uno puede usar, en adición a valores nodales, variables sin nodo (como en el método Rayleigh-Ritz) para representar la aproximación de una función.

5. El número y localización de los nodos en un elemento depende de: a)La geometría del elemento. b)El grado de aproximación polinomial. c)La forma integral de las ecuaciones. Mediante la representación de la solución requerida en términos de sus valores en los nodos, uno obtiene la solución aproximada en los nodos.
6. El ensamble de elementos, en un caso general, está basado en la idea de que la solución (y posiblemente sus derivadas para ecuaciones de mayor orden) es continua en las fronteras del inter-elemento.
7. En general, el ensamble del elemento finito está sujeto a la frontera y/o condiciones iniciales. Las ecuaciones discretas asociadas con la malla del elemento finito, se resuelven solamente después de que se imponen la frontera y/o las condiciones iniciales
8. Hay tres fuentes de error en la solución de elemento finito: a)Las debidas a la aproximación del dominio (que fue el error presentado en los dos ejemplos). b)Las debidas a la aproximación de la solución. c)Las debidas al cálculo numérico. La estimación de estos errores, en general, no es materia sencilla. Sin embargo bajo ciertas condiciones, pueden estimarse para un elemento y problema dado.
9. La exactitud y convergencia de la solución del elemento finito depende de la ecuación diferencial, su forma integral y el elemento usado.

Exactitud se refiere a la diferencia entre la solución exacta y la solución de elemento finito, mientras la convergencia se refiere a la exactitud conforme el número de elementos en la malla se incrementa.

10. Para problemas dependientes del tiempo, se sigue una formulación en dos etapas. En la primera, las ecuaciones diferenciales son aproximadas mediante el método del elemento finito para obtener una serie de ecuaciones diferenciales en tiempo. En la segunda, las ecuaciones diferenciales en tiempo se resuelven exactamente o aún más aproximadas por métodos variacionales o métodos de diferencia finita para obtener ecuaciones algebraicas, las cuales se resuelven para los valores nodales.
11. Cuando las condiciones de continuidad de ensamble se reemplazan por las condiciones de contacto, el método se conoce como el método del elemento discreto (DEM). En el método del elemento discreto, elementos individuales pueden tener movimientos finitos (desplazamientos y rotaciones). Tales métodos tienen aplicaciones en mecánica de rocas, mecánica de hielo, y otros campos donde un continuo es desintegrado durante la deformación o el medio original es un conjunto de partículas individuales (medio granular y biología molecular).

CAPITULO 2

FORMULACIONES INTEGRALES Y METODOS VARIACIONALES.

2.1 LA FORMA INTEGRAL PESADA.

En el método del elemento finito, usamos una exposición integral para establecer relaciones algebraicas entre los coeficientes u_j de la aproximación

$$u \approx \sum_{j=1}^n u_j \psi_j \quad (2.1)$$

Donde u representa la solución de una ecuación diferencial particular. El uso de una exposición integral equivalente a la ecuación diferencial de dominio se necesita por el hecho de que la sustitución de (2.1) en la ecuación diferencial de dominio no siempre resulta con el número de ecuaciones algebraicas lineales independientes requerido para los coeficientes desconocidos. Una forma de asegurarse que hay exactamente el mismo número de ecuaciones como de incógnitas es considerar que el error sea como en la integral pesada.

A continuación se darán más detalles sobre esto.

Suponga que deseamos determinar una solución aproximada de la ecuación.

$$-\frac{d}{dx}\left(x\frac{d\mu}{dx}\right)+u=0 \quad \text{para } 0 < x < 1 \quad (2.2 \text{ a})$$

$$u(0)=1, \quad \left(x\frac{du}{dx}\right)_{x=1}=0 \quad (2.2 \text{ b})$$

buscamos una solución aproximada, sobre el dominio completo $\Omega = (0,1)$ en la forma,

$$u \approx U_N \equiv \sum_{j=1}^N c_j \phi_j(x) + \phi_0(x) \quad (2.3)$$

donde c_j son los coeficientes a determinar $\phi_j(x)$ y $\phi_0(x)$ son funciones preseleccionadas de modo que las condiciones frontera del problema se satisfagan para la solución aproximada de N parámetros U_N . Por ejemplo si $N=2$ ($\phi_1 = x^2 - 2x, \phi_2 = x^3 - 3x, \phi_0 = 1$)

$$u \approx U_N = c_1(x^2 - 2x) + c_2(x^3 - 3x) + 1$$

Lo cual satisface las condiciones de frontera (2.2b) del problema para cualquier valor de c_1 y c_2 . Las constantes c_1 y c_2 son determinadas de modo que la solución aproximada U_N en (2.3) satisfaga (2.2a) en algún sentido. Si queremos que U_N satisfaga (2.2a) en el sentido exacto, obtenemos

$$\begin{aligned} -\frac{dU_N}{dx} - x\frac{d^2U_N}{dx^2} + U_N &= -2c_1(x-1) - 3c_2(x^2-1) - 2c_1x - 6c_2x^2 \\ &+ c_1(x^2-2x) + c_2(x^3-3x) + 1 = 0 \end{aligned}$$

Ya que esta expresión puede ser cero para cualquier valor de x , los coeficientes de las diferentes potencias de x deben ser cero.

$$\begin{aligned}
 1 + 2c_1 + 3c_2 &= 0 \\
 -(6c_1 + 3c_2) &= 0 \\
 c_1 - 9c_2 &= 0 \\
 c_2 &= 0
 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones son inconsistentes; no hay solución para las ecuaciones. Por otro lado requerimos que la solución aproximada U satisfaga la ecuación diferencial (2.2a) en el sentido de integral-pesada .

$$\int_0^1 w R dx = 0 \quad (2.4a)$$

donde R es llamado residuo

$$R = -\frac{dU_N}{dx} - x \frac{d^2 U_N}{dx^2} + U_N$$

y w es llamada la función peso. De (2.4a) obtenemos ecuaciones independientes lineales que son funciones independientes de w . Por ejemplo, si tomamos $w = 1$ y $w = x$ obtenemos.

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_0^1 1R dx = (1 + 2c_1 + 3c_2) + \frac{1}{2}(-6c_1 - 3c_2) + \frac{1}{3}(c_1 - 9c_2) + \frac{1}{4}c_2 \\
 0 &= \int_0^1 xR dx = \frac{1}{2}(1 + 2c_1 + 3c_2) + \frac{1}{3}(-6c_1 - 3c_2) + \frac{1}{4}(c_1 - 9c_2) + \frac{1}{5}c_2
 \end{aligned}$$

ó

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{3}c_1 + \frac{5}{4}c_2 &= 1 \\
 \frac{3}{4}c_1 + \frac{31}{20}c_2 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned} \quad (2.4b)$$

que proporcionan dos ecuaciones lineales independientes para c_1 y c_2

$$\left(\text{dando } c_1 = \frac{222}{23} \text{ y } c_2 = -\frac{100}{23} \right)$$

Por lo tanto, las exposiciones integrales del tipo (2.4a) proporcionan medios de obtención de muchas ecuaciones algebraicas tantos como coeficientes desconocidos en la aproximación. Este capítulo trata con la construcción de diferentes tipos de exposiciones integrales usadas en diferentes métodos variacionales. Un método variacional es en el cual se buscan soluciones aproximadas del tipo $u \approx \sum_j c_j \phi_j + \phi_0$ y los coeficientes c_j se determinan usando una exposición integral. El método variacional difiere de otros en la selección de la función peso w y la exposición integral usada, lo cual dicta la selección de las funciones aproximación ϕ_j . En el método del elemento finito, un dominio dado es visto como un ensamble de subdominios (elementos), y una solución aproximada se busca sobre cada subdominio de la misma manera como en los métodos variacionales, por lo tanto el estudio del método variacional es informativo, antes de estudiar el método del elemento finito, nuestro objetivo en este capítulo es ilustrar los pasos básicos en las formulaciones integrales y las aproximaciones asociadas de varios problemas frontera. Hacia este objetivo; primero introducimos terminología y anotaciones.

2.2 PROBLEMAS DE VALOR FRONTERA, INICIAL, VALOR PROPIO.

Dominio y frontera. El objetivo de la mayoría de los análisis es determinar funciones desconocidas, llamadas variables dependientes, que satisfagan una serie dada de ecuaciones diferenciales en un dominio dado o región y alguna condición de frontera del dominio. Un dominio es un conjunto de puntos en el espacio, con la propiedad de que si P es un punto en el dominio entonces todos los puntos cierran hacia P perteneciendo al dominio. Si dos puntos cualesquiera del dominio pueden unirse mediante una línea tendida completamente dentro de él, entonces se dice que el dominio

es convexo y simplemente conectado. Las fronteras de un dominio son la serie de puntos tal que, en cualquier cercanía de esos puntos, hay puntos que pertenecen al dominio como hay puntos que no. Notar que de la definición que los puntos en las fronteras no pertenecen al dominio. Usaremos el símbolo Ω para representar un dominio arbitrario y Γ representa su frontera.

Una función de diversas variables se dice que es de la clase $C^m(\Omega)$ en un dominio Ω si todas sus derivadas parciales existen e incluyen el m-ésimo orden y son continuas en Ω . Por lo tanto, si f es de clase C^0 en dos dimensiones entonces f es continua (ejem. $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ existen, pero no pueden ser continuas). Las letras x e y serán usadas para coordenadas rectangulares de un punto en dos dimensiones.

Cuando las variables dependientes son funciones de dos variables independientes (x e y) el (dos dimensiones) dominio es una superficie (un plano) y la frontera es la curva que lo encierra. No es raro encontrar problemas en que la variable dependiente y posiblemente sus derivadas están especificadas en puntos interiores el dominio (ejem. Doblez de vigas continuas).

Se dice que una ecuación diferencial describe un problema de valor frontera, si la variable dependiente y posiblemente sus derivada toman valores especificados de la frontera, un problema de valor inicial es en el que la variable dependiente y posiblemente sus derivada son especificadas inicialmente (ejem. en tiempo $t = 0$). Los problemas de valor inicial generalmente son problemas dependientes del tiempo. Ejemplos de problemas de frontera y valor inicial se dan a continuación.

Problemas de valor frontera:

$$-\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right) = f \quad \text{para } 0 < x < 1 \quad (2.5)$$

$$u(0) = d_0, \quad \left(a \frac{du}{dx} \right)_{x=1} = g_0 \quad (2.6)$$

Problema de valor inicial:

$$\rho \frac{d^2 u}{dt^2} + au = f \quad \text{para } 0 < t \leq t_0 \quad (2.7)$$

$$u(0) = u_0, \quad \left(\frac{du}{dt} \right)_{t=0} = v_0 \quad (2.8)$$

Problemas de valor inicial y frontera:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \rho \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t) \quad \text{para } \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < t \leq t_0 \end{cases} \quad (2.9)$$

$$u(0, t) = d_0(t), \quad \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=1} = g_0(t), \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad (2.10)$$

Las condiciones en (2.6) se llaman condiciones frontera, las de (2.8) condiciones iniciales. Cuando cualquiera de los valores especificados (ejemplo, d_0, g_0, u_0 y v_0) no son cero, las condiciones son no-homogéneas, por lo contrario se dice que son homogéneas. Por ejemplo $u(0) = d_0$ es una condición de frontera no-homogénea y la condición de frontera, homogénea, asociada es $u(0) = 0$. La serie de cantidades especificadas ($a, g_0, d_0, \rho, u_0, v_0$) se llaman los datos del problema. Las ecuaciones diferenciales en las que el lado derecho f es cero se llaman ecuaciones diferenciales homogéneas.

Problema valor propio. El problema de determinar los valores de la constante λ tal que:

$$-\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right) = \lambda u \quad \text{para } 0 < x < 1 \quad (2.11)$$

$$u(0) = 0, \quad \left(a\frac{du}{dx}\right)\Big|_{x=1} = 0$$

Se llama el problema de valor propio asociado con la ecuación diferencial (2.5). Los valores de λ para los cuales (2.11) satisface se llaman valores propios, y las funciones asociadas se llaman funciones propias.

La solución clásica (o exacta) de una ecuación diferencial es la función que satisface idénticamente la ecuación diferencial y las condiciones de frontera.

RELACIONES INTEGRALES

La integración por partes se usa frecuentemente en la formulación integral de ecuaciones diferenciales. En casos de dos dimensiones la integración por partes se conoce más como los teoremas de gradiente y divergencia. En esta sección, derivamos algunas identidades usuales para uso posterior.

FORMULA PARA INTEGRACION POR PARTES. Considere que u, v, w son funciones de las coordenadas x suficientemente diferenciables. Luego la siguiente formula de integración por parte deduce:

$$\int_a^b w \frac{dv}{dx} dx = \int_a^b w dv = -\int_a^b v dw + [wv]_a^b$$

$$= -\int_a^b v \frac{dw}{dx} dx + w(b)v(b) - w(a)v(a) \quad (2.12)$$

Esta identidad puede demostrarse fácilmente. Primero, anote la siguiente identidad de la regla diferenciación del producto

$$\frac{d}{dx}(wv) = \frac{dw}{dx}v + w\frac{dv}{dx}$$

Por lo tanto

$$w \frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(wv) - \frac{dw}{dx}v$$

Integrando ambos lados en el intervalo (a,b), obtenemos

$$\begin{aligned} \int_a^b w \frac{dv}{dx} dx &= \int_a^b \left[\frac{d}{dx}(wv) - \frac{dw}{dx}v \right] dx \\ &= \int_a^b \frac{d}{dx}(wv) dx - \int_a^b \frac{dw}{dx}v dx \\ &= [wv]_a^b - \int_a^b \frac{dw}{dx}v dx \end{aligned}$$

Que es lo mismo como en (2.12)

Enseguida, considere la expresión

$$\begin{aligned} \int_a^b w \frac{d^2u}{dx^2} dx &= \int_a^b w \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} \right) dx \\ &= \int_a^b w \frac{d}{dx} dx, \quad v \equiv \frac{du}{dx} \end{aligned}$$

Usando (2.12), se obtiene

$$\begin{aligned} \int_a^b w \frac{d^2u}{dx^2} dx &= - \int_a^b v \frac{dw}{dx} dx + w(b)v(b) - w(a)v(a) \\ &= - \int_a^b \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} dx + w(b) \frac{du}{dx}(b) - w(a) \frac{du}{dx}(a) \end{aligned} \tag{2.13a}$$

ó

$$- \int_a^b \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} dx = \int_a^b w \frac{d^2u}{dx^2} dx + w(a) \frac{du}{dx}(a) - w(b) \frac{du}{dx}(b) \tag{2.13b}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}\int_a^b v \frac{d^4 w}{dx^4} dx &= \int_a^b v \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) dx \\ &= \int_a^b v \frac{d^2 u}{dx^2} dx, \quad \text{cuando } u \equiv \frac{d^2 w}{dx^2}\end{aligned}$$

Usando (2.13a) cuando $w = v$, se escribe del lado derecho como

$$-\int_a^b \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx + v(b) \frac{du}{dx}(b) - v(a) \frac{du}{dx}(a) \quad (2.14a)$$

Usamos (2.13b) con $w = u$ y $u = v$ para escribir (2.14a) como

$$\int_a^b u \frac{d^2 v}{dx^2} dx + u(a) \frac{dv}{dx}(a) - u(b) \frac{dv}{dx}(b) + v(b) \frac{du}{dx}(b) - v(a) \frac{du}{dx}(a) \quad (2.14b)$$

Y, al final, reemplazamos u por el actual valor $u = d^2 w / dx^2$, llegamos a

$$\begin{aligned}\int_a^b v \frac{d^4 w}{dx^4} dx &= \int_a^b \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} dx + \frac{d^2 w}{dx^2}(a) \frac{dv}{dx}(a) - \frac{d^2 w}{dx^2}(b) \frac{dv}{dx}(b) \\ &\quad + v(b) \frac{d^3 w}{dx^3}(b) - v(a) \frac{d^3 w}{dx^3}(a)\end{aligned} \quad (2.15)$$

Las ecuaciones (2.13a) y (2.15) se usan en la formulación débil de ecuaciones diferenciales de segundo y cuarto orden respectivamente.

Haga que ∇ y ∇^2 representen, respectivamente, al operador gradiente y al operador Laplaciano en el sistema cartesiano de coordenadas rectangulares (x, y) :

$$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y}, \quad \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.16)$$

Donde \hat{i} y \hat{j} representan los vectores base unitarios a lo largo de las coordenadas x e y respectivamente. El signo de intercalación " ^ " sobre los vectores indica que son de longitud unitaria. Si $F(x,y)$ y $G(x,y)$ son funciones escalares de clase $C^0(\Omega)$ en el dominio de dos dimensiones Ω , se establecen los siguientes teoremas de gradiente y divergencia.

TEOREMA DEL GRADIENTE

$$\int_{\Omega} \text{grad } F dx dy = \int_{\Omega} \nabla F dx dy = \int_{\Gamma} \hat{n} F ds$$

o

$$\int_{\Omega} \left(\hat{i} \frac{\partial F}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial F}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} (n_x \hat{i} + n_y \hat{j}) F ds \quad (2.17a)$$

La segunda ecuación da lugar (debido a que dos vectores son iguales, si y solo si, sus componentes son iguales) a que se establezcan las siguientes relaciones:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial x} dx dy = \int_{\Gamma} n_x F ds, \quad \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial y} dx dy = \int_{\Gamma} n_y F ds \quad (2.17b)$$

TEOREMA DE LA DIVERGENCIA

$$\int_{\Omega} \text{div } G dx dy = \int_{\Omega} \nabla \cdot G dx dy = \int_{\Gamma} \hat{n} \cdot G ds \quad (2.18)$$

o

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} (n_x G_x + n_y G_y) ds$$

Aquí el punto representa al producto escalar de vectores, \hat{n} representa al vector unitario normal a la superficie Γ del dominio Ω , n_x y n_y , (G_x, G_y) son los componentes rectangulares de $\hat{n}(G)$ y el círculo de la integral frontera indica que la integral se hace sobre la frontera completa (ver Fig. 2.1)

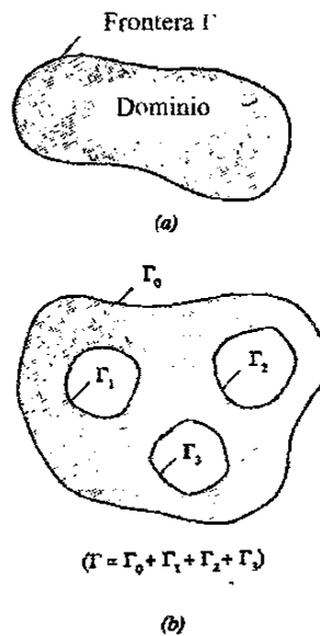


Fig. 2.1

La dirección cosenos n_x y n_y del vector unitario \hat{n} se pueden escribir como:

$$n_x = \cos(x, \hat{n}), \quad n_y = \cos(y, \hat{n}) \quad (2.19)$$

Donde $\cos(x, \hat{n})$ es el coseno del ángulo entre la dirección positiva x y el vector \hat{n} .

Las siguientes identidades, pueden demostrarse usando los teoremas del gradiente y divergencia se usarán en la continuación. Considere w y G sean funciones escalares definidas en el dominio Ω de dos dimensiones.

Entonces:

$$\int_{\Omega} (\nabla G) w \, dx \, dy = - \int_{\Omega} (\nabla w) G \, dx \, dy + \int_{\Gamma} \hat{n} w G \, ds \quad (2.20 \text{ a})$$

Y

$$\boxed{- \int_{\Omega} (\nabla^2 G) w \, dx \, dy = \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla G \, dx \, dy - \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n} w \, ds} \quad (2.20 \text{ b})$$

Donde $\frac{\partial}{\partial n}$ representa a la derivada normal del operador:

$$\frac{\partial}{\partial n} = \hat{n} \cdot \nabla = n_x \frac{\partial}{\partial x} + n_y \frac{\partial}{\partial y} \quad (2.21)$$

La siguiente forma de la ecuación (2.20 a) con un cambio aproximado de variables, se usa

$$\int_{\Omega} w \frac{\partial G}{\partial x} \, dx \, dy = - \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x} G \, dx \, dy + \int_{\Gamma} n_x w G \, ds \quad (2.22 \text{ a})$$

$$\int_{\Omega} w \frac{\partial G}{\partial y} \, dx \, dy = - \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial y} G \, dx \, dy + \int_{\Gamma} n_y w G \, ds \quad (2.22 \text{ b})$$

FUNCIONALES:

Una expresión integral de la forma:

$$I(u) = \int_a^b F(x, u, u') \, dx, \quad u = u(x), \quad u' = \frac{du}{dx}$$

Donde el integrando $F(x, u, u')$ es una función dada de los argumentos x, u y du/dx se llama funcional. El valor $I(u)$ de la integral depende de u ; de aquí que la anotación $I(u)$ sea apropiada. Sin embargo, para una u dada, $I(u)$ representa un valor escalar. Usaremos el término funcional para describir funciones definidas por integrales cuyos argumentos involucrados son funciones. Una funcional es una "función de funciones". Matemáticamente, una funcional es un operador I reconociendo u en el escalar $I(u)$ se dice lineal en u si y sólo si satisface la relación:

$$I(\alpha u + \beta v) = \alpha I(u) + \beta I(v) \quad (2.23)$$

Para cualquier escalar α y las variables dependientes u y v .

Una funcional $B(u, v)$ se dice que es bilineal si está es lineal en cada uno de sus argumentos u y v .

$$B(u, \alpha v_1 + \beta v_2, v) = \alpha B(u, v_1, v) + \beta B(u, v_2, v) \quad (2.24)$$

(linealidad en el primer argumento)

$$B(u, \alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha B(u, v_1) + \beta B(u, v_2)$$

(linealidad en el segundo argumento)

Donde u, u_1, u_2, v, v_1 y v_2 son variables dependientes. Una forma bilineal $B(u, v)$ se dice que es simétrico en sus argumentos u, v si:

$$B(u, v) = B(v, u) \quad (2.25)$$

Para todos u y v .

Un ejemplo de una funcional lineal es:

$$I(v) = \int_0^L v f dx + \frac{dv}{dx}(L) M_0$$

Donde $f = f(x)$ y M_0 son cantidades conocidas. Un ejemplo de una función bilineal es

$$B(u, w) = \int_0^L a \frac{dw}{dx} \frac{dv}{dx} dx$$

Donde $a = a(x)$ es una función conocida.

EL SIMBOLO VARIACIONAL.

Considere la función $F = F(x, u, u')$. Para un valor fijo arbitrario de la variable independiente x , F depende de u y u' . El cambio αv en u , donde α es una constante y v es una función, es llamada la variación de u y representada por δu :

$$\delta u = \alpha v \quad (2.26)$$

El operador δ se llama el símbolo variacional. La variación δu de una función u representa un cambio admisible en la función $u(x)$ en un valor fijo de la variable independiente x . Si u es especificada en un punto (generalmente en la frontera), la variación de u es cero, ello debido a que el valor especificado no puede variarse. Entonces, la variación de una función de u debería, satisfacer la forma homogénea de las condiciones frontera para u . La variación δu en u es un cambio virtual. Asociado con este cambio en u (ejemplo u tendiendo a $u + \alpha u$), hay un cambio en F . En analogía con la diferenciación total de una función de dos variables, la primera variación de F en u es definida por

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' \quad (2.27)$$

Notar la analogía entre la primera variación (2.27), y la diferenciación total de F ,

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial u'} du' \quad (2.28)$$

Ya que x no es variada durante la variación de u hacia $u + \delta u$, $dx = 0$ y la analogía entre δF y dF llega a ser evidente, δ actúa como un operador diferencial con respecto a las

variables dependientes. Se puede verificar fácilmente que las leyes de variación de sumas, productos, relaciones, potencias, y así sucesivamente son completamente análogas a las leyes de diferenciación correspondiente. Por ejemplo si $F_1 = F_1(u)$ y $F_2 = F_2(u)$ entonces:

$$1. \quad \delta(F_1 \pm F_2) = \delta F_1 \pm \delta F_2 \quad (2.29)$$

$$2. \quad \delta(F_1 F_2) = F_2 \delta F_1 + F_1 \delta F_2$$

$$3. \quad \delta\left(\frac{F_1}{F_2}\right) = \frac{F_2 \delta F_1 - F_1 \delta F_2}{F_2^2}$$

$$4. \quad \delta[(F_1)^n] = n(F_1)^{n-1} \delta F_1$$

Aún más, el operador variacional puede conmutar con los operadores diferencial e integral (así como se fijan las coordenadas x, y coordenadas Lagrangianas):

$$\frac{d}{dx}(\delta u) = \frac{d}{dx}(\alpha v) = \alpha \frac{dv}{dx} = \delta u' = \delta\left(\frac{du}{dx}\right) \quad (2.30a)$$

$$\delta \int_a^b u(x) dx = \int_a^b \delta u(x) dx \quad (2.30b)$$

2.3 FORMULACION DEBIL EN PROBLEMAS DE VALOR FRONTERA

De la sección 2.1, recordar que la motivación para formulaciones integrales de problemas de valor frontera se debe al hecho de que los métodos variacionales de aproximación, el Ritz, Galerkin, colocación o en general métodos de residuo-compensado, están basados en las exposiciones de integral-pesada de las ecuaciones que rigen. De aquí el método del elemento finito es una técnica para construir funciones aproximación requeridos en aplicación de elemento discreto de cualquier metodo variacional, es necesario estudiar la formulación de integral-pesada y la formulación

débil de ecuaciones diferenciales. En adición a la razón anterior, las formulaciones suaves también facilitan, de manera natural, la clasificación de condiciones frontera en condiciones natural y esencial. La cual juega un papel importante en la derivación de las funciones aproximación y la selección de los grados de libertad nodales del modelo de elemento finito.

En esta sección, nuestro objetivo primario será construir la forma suave de una ecuación diferencial dada y clasificar las condiciones frontera asociadas con la ecuación. Una forma débil es una exposición de integral-pesada de una ecuación diferencial en la que diferenciación se distribuye entre las variables dependientes y la función peso e incluye las condiciones frontera naturales del problema.

INTEGRAL PESADA Y FORMULACIÓN DEBIL

Considere el problema de resolver la ecuación diferencial

$$-\frac{d}{dx} \left[a(x) \frac{du}{dx} \right] = q(x) \quad \text{para } 0 < x < L \quad (2.31a)$$

Para la solución $u(x)$, sujeta a las condiciones frontera:

$$u(0) = u_0, \quad \left(a \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=L} = Q_0 \quad (2.31b)$$

Donde a y q son funciones conocidas de las coordenadas x , u_0 y Q_0 son valores conocidos, y L es la longitud del dominio en una dimensión. Las funciones a y q y las constantes u_0 y Q_0 a lo largo de la longitud L del dominio, son los datos del problema. La solución u es la variable dependiente en el problema. Cuando los valores especificados son diferentes de cero ($u_0 \neq 0$ o $Q_0 \neq 0$), las condiciones de frontera son no homogéneas; cuando los valores especificados son cero, las condiciones frontera son

homogéneas. La forma homogénea de la condición frontera $u(0) = u_0$ es $u(0) = 0$ y la forma homogénea de la condición frontera $\left(a \frac{du}{dx}\right) \Big|_{x=L} = Q_0$.

Deberá recordarse que el propósito único de desarrollar una exposición de integral-pesada de una ecuación diferencial es tener los medios para obtener N relaciones algebraicas lineales independientes, entre los coeficientes c_j de la aproximación.

$$u \approx U_N = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j(x) + \phi_0(x) \quad (2.32)$$

Esta es perfecta si se escogen N funciones de peso lineales independientes en la exposición integral-pesada, como se verá pronto.

Hay tres pasos en la obtención de la forma débil, si ésta existe de una ecuación diferencial. Esos pasos se ilustran por medio del modelo de ecuación diferencial y condiciones frontera en (2.31).

PASO 1. Mover todas las expresiones de la ecuación diferencial hacia un lado, multiplique toda la ecuación por una función w , llamada la función peso, e integral sobre el dominio $\Omega=(0,L)$ del problema.

$$0 = \int_0^L w \left[-\frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) - q \right] dx \quad (2.33)$$

A lo cual llamamos exposición de integral-pesada o residuo compensado equivalente a la ecuación original (2.31a). La expresión en el paréntesis rectangular no es idénticamente cero cuando u se reemplaza para su aproximación, matemáticamente, (2.33) es una exposición en que el error en la ecuación diferencial (debido a la aproximación de la solución) es cero en el sentido de la integral-pesada.

Cuando u es la solución exacta, (2.33) es trivial, la exposición integral (2.33) nos permite escoger N funciones linealmente independientes, para w y obtener N ecuaciones para c_1, c_2, \dots, c_N de (2.32).

Notar que la exposición de integral-pesada de cualquier ecuación diferencial puede desarrollarse. La función peso w en (2.33) puede ser cualquier función integrable diferente de cero. En general, la función peso w es la exposición integral está sujeta a menos requisitos de rigurosa continuidad que la variable dependiente u . La exposición de integral-pesada es equivalente a solamente a la ecuación diferencial y no incluye condiciones frontera.

PASO 2. Mientras la exposición de integral pesada (2.33) nos permite obtener el número necesario N de relaciones algebraicas entre c_j , para N selecciones diferentes de la función peso w , se requiere que las funciones aproximación sea tal que $U_N[\text{ver}(2.32)]$ sea diferenciables cuantas veces sea llamada en la ecuación diferencial original y satisfaga las condiciones de frontera especificadas. Si esto no es importante, uno puede proceder con la exposición integral (2.33) y obtener ecuaciones algebraicas necesarias para c_j . Métodos aproximados basados en la integral-pesada de la forma (2.33) se conocen como métodos residuales compensado. Si la diferenciación se distribuye entre la solución aproximada U_N y la función peso w , la forma integral resultante requerirá de condiciones de suavidad continua en ϕ_j , y entonces la exposición integral-pesada es llamada la forma débil. La formulación débil tiene dos características deseables.

Primero, requiere de continuidad más suave de la variable dependiente, y ordinariamente esto da lugar a una serie simétrica de ecuaciones algebraicas en los coeficientes.

Segundo las condiciones de frontera natural del problema, se incluyen en la forma débil, y por lo tanto la solución aproximada U_N es requerida para satisfacer solamente las condiciones frontera esenciales del problema. Estas dos características de una forma débil juegan un papel importante en el desarrollo de modelos de elemento finito de un problema.

La distribución equitativa de diferenciación entre la función peso y la variable dependiente es posible solamente si las derivadas que aparecen en la ecuación diferencial son de igual orden. El trato de diferenciabilidad de la variable dependiente a la función peso es dictado por la necesidad de incluir físicamente términos de frontera significativos en la forma débil, a pesar del efecto sobre los requisitos de continuidad. Por otro lado, el trato de diferenciación desde la variable dependiente hasta la función peso no deberá llevarse a cabo si conduce a términos de frontera que físicamente no son significativos.

Regresando a la exposición integral (2.33) integramos el primer término de la expresión por partes para obtener :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^L \left\{ w \left[-\frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) \right] - wq \right\} dx \\ &= \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} a \frac{du}{dx} - wq \right) dx - \left[wa \frac{du}{dx} \right]_0^L \end{aligned} \quad (2.34)$$

Donde la fórmula de integración por partes

$$\int_0^L w dv = - \int_0^L v dw + [wv]_0^L \quad (2.35)$$

Con $v = -adu/dx$ es usada en el primer término para arribar a la segunda línea de (2.34) Una parte importante del paso 2 es que identifica los dos tipos de condiciones frontera asociados con cualquier ecuación diferencial: natural y esencial.

La clasificación es importante para los métodos variacionales de aproximación considerados en este capítulo y las formulaciones de elemento finito presentadas en los capítulos 3-5 . La siguiente regla se usa para identificar las condiciones frontera y su forma. Después del trato de diferenciación entre la función peso y la variable por

ejemplo después de completar el paso 2 examine todos los términos frontera de la exposición integral. Los términos frontera involucrarán tanto la función peso como la variable dependiente. Los coeficientes de la función peso y sus derivadas en las expresiones frontera son llamados las variables secundarias (SV). La especificación de las variables secundarias en la frontera, constituye las condiciones de frontera natural(NBC). Para el caso en cuestión, el término frontera es $w\left(a\frac{du}{dx}\right)$. El coeficiente de la función peso es $a\frac{du}{dx}$. De aquí la variable secundaria es de la forma $a\frac{du}{dx}$.

Las variables secundarias siempre tienen significado físico, y son por lo regular cantidades de interés.

La variable dependiente de un problema, expresada en la misma forma que la función peso que aparece en el término frontera, se llama la variable primaria (PV), y su especificación en la frontera constituye la condición de frontera esencial (EBC). Para el caso en consideración, la función peso aparece en la expresión frontera [ver (2.34)] como w . Por lo tanto, la variable dependiente u es la variable primaria, y la condición de frontera inicial involucra especificación u en los puntos frontera.

Debe notarse que el número y forma de las variables primaria y secundaria dependen del orden de la ecuación diferencial. El número de las variables primaria y secundaria siempre es el mismo, y para cada variable primaria hay una variable secundaria asociada. (Ejemplo : desplazamiento y fuerza, temperatura y calor y otras). Solamente una del par de variables primaria o secundaria se puede especificar en un punto de la frontera.

Entonces un problema dado puede tener sus condiciones frontera en una de tres categorías : (i) todas las condiciones de frontera especificadas son EBC; (ii) algunas de las condiciones frontera son EBC y el resto son NBC ; o (iii) todas las condiciones frontera son NBC. Para una ecuación simple de segundo orden , como en el caso presente , hay una variable primaria u y una variable secundaria Q . En un punto de

frontera , sólo uno del par (u, Q) puede especificarse . Para una ecuación de cuarto orden tal como la teoría clásica de vigas (Euler-Bernoulli), hay de dos de cada clase (ejemplo: dos PV_s y dos SV_s) como se ilustrará más tarde. En general una ecuación diferencial de $2m$ th orden tiene mPV_s y mSV_s esto es m pares de variables primarias y secundarias.

Considere la ecuación $Q \equiv \left(a \frac{du}{dx} \right) n_x$

Q = variable secundaria.

donde n_x representa dirección coseno. (2.36)

n_x = los ángulos entre eje x y el normal a la frontera

Para una dimensión, la normal a los puntos de frontera está siempre a lo largo de la longitud del dominio. Por tanto $n_x = -1$ en el extremo izquierdo y $n_x = 1$ en el extremo derecho de dominio : $n_x(0) = -1$ y $n_x(L) = 1$

En (2.36), (2.34) toma la forma:

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_0^L \left(a \frac{dw}{dx} \frac{dv}{dx} - wq \right) dx - \left[wa \frac{du}{dx} \right]_0^L \\
 &= \int_0^L \left(a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} - wq \right) dx - \left(wa \frac{du}{dx} n_x \right)_{x=0} - \left(wa \frac{du}{dx} \right)_{x=L} \\
 &= \int_0^L \left(a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} - wq \right) dx - (wQ)_0 - (wQ)_L
 \end{aligned}
 \tag{2.37}$$

La ecuación 2.37 es llamada la forma débil de la ecuación diferencial (2.31) débil se refiere a la continuidad reducida de, la cual se requiere que sea diferenciable dos veces en la forma integral pesada (2.33) pero sólo una vez en 2.37.

Paso 3. El tercer y último paso de la formulación suave es imponer las condiciones frontera reales al problema. Se requiere que la función peso w desaparezca en los puntos frontera esencial especificadas se requiere que w satisfaga la forma homogénea de las condiciones de frontera esenciales especificadas del problema. Este requerimiento en w podrá verse arbitrario cuando se está familiarizado con cálculo variacional. En las formulaciones débiles, la función peso tiene un significado de cambio virtual (ó variación) de la variable primaria. Si una variable primaria se especifica en punto, el cambio virtual debe ser cero. Para el problema en cuestión las condiciones frontera están dadas, en (2.31b). Mediante las reglas de clasificación de las condiciones frontera, $u = u_0$ es la condición de frontera esencial y $\left(a \frac{du}{dx} \right)_{x=L} = Q_0$ es la condición de frontera natural. La función w es necesario que satisfaga.

$w(0) = 0$, debido a que $u(0) = u_0$ ya que $w(0) = 0$ y

$$Q(L) = \left(a \frac{du}{dx} \right)_{x=L} - \left(a \frac{du}{dx} \right)_{x=L} = Q_0$$

(2.37) reduce a la expresión:

$$0 = \int_0^L \left(a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} - wq \right) dx - w(L)Q_0 \quad (2.38)$$

Que es la forma débil equivalente a la ecuación diferencial original (2.31a) y a la condición de frontera natural (2.31b).

Los términos " forma variacional " y " forma débil " serán usados alternativamente.

La forma débil de una ecuación diferencial es una exposición de integral -pesada equivalente a la ecuación diferencial y las condiciones de frontera natural especificadas en el problema. La forma débil existe para todos los problemas - lineales o no- que son descritas por ecuaciones diferenciales lineal y de igual orden, la forma débil resultante tendrá una forma bilineal simétrica en la variable dependiente u y la función peso w .

FORMAS LINEAL Y BILINEAL Y FUNCIONES CUADRATICAS.

Es informativo, aunque no necesario para el uso de métodos variacionales o métodos del elemento finito, ver la relación entre la forma débil y el mínimo de una función cuadrática asociada con la ecuación diferencial, la forma débil (2.38) contiene dos tipos de expresiones, las que comprenden la variable dependiente u y la función peso w y las que envuelven sólo las últimas. Representamos esos dos tipos de expresiones por $B(w, u)$ y $I(w)$ respectivamente:

$$B(w, u) = \int_0^L a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} dx, \quad I(w) = \int_0^L wq dx + w(L)Q_0 \quad (2.39)$$

De aquí la exposición débil (2.38) puede expresarse en la forma

$$0 = B(w, u) - I(w) \quad (2.40)$$

La cual es llama el problema variacional (o suave) asociado con las ecuaciones (2.31). Usando las definiciones de las formas lineal y bilineal de la sección 2.2.3 puede verificarse que $B(w, u)$ es bilineal y simétrica en w y u y que $I(w)$ es lineal [ver 2.23 y

2.24] . El problema variacional asociado con (2.31 a,b) puede expresarse como uno de encontrar la solución u tal que u tal que:

$$B(w, u) = I(w) \quad (2.41)$$

cumple para cualquier w que satisfaga la forma homogénea de las condiciones de frontera esencial especificada y condiciones de continuidad implicado por la forma débil la función w se puede ver como una variación (o incremento) de la solución real u^* ,

$$u = u^* + w \quad (2.42)$$

y u es la solución variacional, ejemplo la solución de(2.41). ya que u y u^* pueden satisfacer cualquier condición de frontera esencial especificada(en adición , u^* también satisface cualquier condición de frontera natural especificada), se sigue que w debe satisfacer la forma homogénea de la condición de frontera esencial especificada. Por lo tanto en la notación de(2.26), w es la variación, ver sección (2.24) de la solución:

$$w = \delta_u$$

Entonces (2.40) se puede escribir como:

$$0 = B(\delta u, u) - I(\delta u)$$

si $B(\cdot, \cdot)$ es simétrica, podemos escribir:

$$\begin{aligned} &= \delta \left[\frac{1}{2} B(u, u) \right] - \delta [I(u)] \\ &= \delta I(u) \end{aligned} \quad (2.43 \text{ a})$$

donde

$$I(u) = \frac{1}{2} B(u, u) - I(u) \quad (2.43b)$$

Arribando a la segunda línea de la (2.43a) las siguientes identidades son usadas:

$$\begin{aligned} B(\delta u, u) &= \int_{0a}^L a \frac{d\delta u}{dx} \frac{du}{dx} dx = \delta \int_0^L a \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \delta \int_0^L a \frac{du}{dx} \frac{du}{dx} dx = \frac{1}{2} \delta [B(u, u)] \end{aligned} \quad (2.44a)$$

$$\begin{aligned} I(\delta u) &= \int_0^L \delta u q dx + \delta u(L) Q_0 \\ &= \delta \left[\int_0^L u q dx + u(L) Q_0 \right] = \delta [I(u)] \end{aligned} \quad (2.44 b)$$

Notar que la llave de paso en la derivación de la funcional $I(u)$ de la forma suave es la linealidad y simetría de la forma bilineal $B(w, u)$.

La relación $B(\delta u, u) = \frac{1}{2} \delta B(u, u)$ se cumple sólo si $B(w, u)$ es bilineal y simétrica en w y en u . Por tanto siempre que $B(w, u)$ sea bilineal y simétrica y $I(w)$ sea lineal, la funcional cuadrática está dada por (2.34b). Cuando $B(w, u)$ no es lineal en w y u , pero es simétrica, la funcional $I(u)$ puede ser derivada, pero no de (2.43b)

La ecuación (2.43a) representa la condición necesaria para la funcional $I(u)$ para tener un valor extremo. Para problemas de mecánica de sólidos, $I(u)$ representa la funcional de la energía potencial total y (2.43a) es la exposición del principio de la energía potencial total.

De todas las funciones admisibles u , que hacen de la energía potencial total $I(u)$ un mínimo, también satisfacen la ecuación diferencial y la condición frontera en (2.31). En otras palabras, la forma suave de una ecuación diferencial es la misma que la exposición del principio de energía potencial total. Para problemas de mecánica de sólidos, la funcional $I(u)$ puede no tener el significado de energía pero no obstante, es usado para análisis matemático.

Como se dijo antes, cada ecuación diferencial admite una exposición de integral-pesada, y una forma débil existe siempre que la ecuación sea de orden de dos o mayor. Sin embargo no todas las ecuaciones admiten la formulación funcional. Para que exista la funcional, la forma bilineal asociada deberá ser simétrica en sus argumentos. Por otro lado, los métodos variacionales y el método del elemento finito no requiere de una funcional; una exposición integral una forma débil de la ecuación a resolverse es suficiente. Si cuenta uno con una funcional, la forma débil se obtiene tomando su primera variación.

Ejemplo 2.1. Considere la ecuación diferencial

$$-\frac{d}{dx}\left(\alpha \frac{du}{dx}\right) - cu + x^2 = 0 \text{ para } 0 < x < 1 \quad (2.45a)$$

sujeto a las condiciones frontera:

$$u(0) = 0 \quad \left(\alpha \frac{du}{dx}\right)\Big|_{x=1} = 1 \quad (2.45b)$$

los datos son[cf.(2.31)] $q = -x^2$, $Q_0 = 1$ $u_0 = 0$.

Siguiendo los tres pasos para la construcción de exposiciones variacionales obtenemos:

$$1. \quad 0 = \int_0^1 w \left[-\frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) - cu + x^2 \right] dx$$

$$2. \quad 0 = \int_0^1 \left(a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} - cwu + wx^2 \right) dx - \left(wa \frac{dw}{dx} \right)_0^1 \quad (2.46)$$

Del termino frontera; es claro que la especificación de u es una condición de frontera esencial, y la especificación de $a \frac{dw}{dx}$ es una condición de frontera natural. Ya que $a \frac{dw}{dx} = 1$ en $x = 1$ y $w = 0$ en $x = 0$ (debido a que u es especificada aquí) obtenemos la forma débil:

$$3. \quad 0 = \int_0^1 \left(a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} - cwu \right) dx + \int_0^1 wx^2 dx - w(1) \quad (2.47a)$$

$$0 = B(w, u) - I(w) \quad (2.47b)$$

Donde:

$$B(w, u) = \int_0^1 \left(a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} - cwu \right) dx$$

$$I(w) = -\int_0^1 wx^2 dx + w(1) \quad (2.47c)$$

ya que $B(\cdot, \cdot)$ es bilineal y simétrica y $I(\cdot)$ es lineal, podemos calcular la funcional cuadrática de (2.43):

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[a \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - cu^2 + 2ux^2 \right] dx - u(1) \quad (2.48)$$

Las ecuaciones del tipo de (2.45) son de interés en el estudio de la deflexión de un cable ($c = 0$), donde u representa la deflexión transversal y a la tensión en el cable. Los primeros dos términos en la funcional cuadrática representan la energía elástica de deformación, mientras el último término representa al trabajo desarrollado por la fuerza distribuida en movimiento a través del desplazamiento u .

El siguiente ejemplo ilustra la formulación variacional de una ecuación diferencial de cuarto orden en una dimensión.

Ejemplo 2.2. Considere el problema de encontrar la solución w a la ecuación diferencial.

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[b(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right] - f(x) = 0 \text{ para } 0 < x < 1 \quad (2.49)$$

sujeta a las condiciones de frontera

$$w(0) = \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \quad \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \Big|_{x=L} = M_0, \quad \left[\frac{d}{dx} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right] \Big|_{x=L} = 0 \quad (2.50)$$

Esta ecuación interesa por ejemplo, en el estudio de la flexión elástica de vigas (bajo la hipótesis de Euler-Bernoulli). En este caso, w representa la deflexión transversal de las vigas, L es la longitud total de la viga, $b(x) \geq 0$ es la rigidez a la flexión de la viga (por ejemplo, el producto del módulo de elasticidad E y el momento de inercia I : $b = EI$), $f(x)$ es la carga transversal distribuida, y M_0 es el momento de flexión. La solución w es la variable dependiente del problema, y las otras cantidades (L, b, f, M_0) que son conocidas, son los datos del problema ya que la ecuación contiene una derivada de cuarto orden. La integramos dos veces por partes para distribuir las derivadas por igual entre la variable dependiente w y la función peso v , e integrando el primer término por partes, dos veces con respecto a x obtenemos [ver 2.15].

$$0 = \int_0^l v \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - f \right] dx \quad (2.51)$$

$$0 = \int_0^l \left[\left(-\frac{dv}{dx} \right) \frac{d}{dx} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - vf \right] dx + \left[v \frac{d}{dx} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right]_0^l$$

$$= \int_0^l \left(b \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} - vf \right) dx + \left[v \frac{d}{dx} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{dv}{dx} b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right]_0^l \quad (2.52)$$

De la última línea, se sigue que la especificación de w y $\frac{dw}{dx}$ constituye las condiciones de frontera esencial (geométrica o estática), y la especificación de

$$\frac{d}{dx} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \equiv V \text{ (fuerza cortante)} \quad (2.53a)$$

$$\left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \equiv M \text{ (momento de flexión)} \quad (2.53b)$$

Constituyen las condiciones de frontera natural. En el caso presente, las condiciones de frontera especificadas son (debido a las condiciones)

$$w(0) = \left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=0} = 0$$

De aquí, la función peso es necesario que satisfaga las condiciones

$$v(0) = \left(\frac{dv}{dx} \right)_{x=0} = 0 \quad (2.54)$$

Las condiciones de frontera son:

$$\left[\frac{d}{dx} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right]_{x=L} = 0, \quad \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=L} = M_0 \quad (2.55)$$

Usando (2.54) y (2.55) en (2.52), obtenemos

$$0 = \int_0^L \left(b \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} - v F \right) dx - \left(\frac{dv}{dx} \right)_{x=L} M_0 \quad (2.56a)$$

$$B(v, w) = \lambda(v) \quad (2.56b)$$

Donde

$$B(v, w) = \int_0^L b \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} dx \quad (2.56c)$$

$$I(v) = \int_0^L v f dx + \left(\frac{dv}{dx} \right)_{x=L} M_0$$

La forma cuadrática, comúnmente conocida como la energía potencial total de la viga, se obtiene usando (2.56c) y (2.43b)

$$I(w) = \int_0^L \left[\frac{b}{2} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 - w f \right] dx - \left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=L} M_0 \quad (2.57)$$

Note que para la ecuación de cuarto orden, las condiciones de frontera esencial involucra, no solamente la variable dependiente sino también la primera derivada. Como se vio antes, en cualquier punto de la frontera, solo una de las dos condiciones frontera puede especificarse (esencial o natural). Por ejemplo, si la deflexión transversa se especifica en un punto de frontera entonces uno no puede especificar la fuerza cortante V en el mismo punto, y viceversa. Comentarios similares se aplican a la pendiente dw/dx y al momento de flexión M . Notar que en el caso presente, w y dw/dx son las variables primarias, y V y M son las variables secundarias.

2.4 MÉTODOS VARIACIONALES DE APROXIMACION.

Nuestro objetivo en esta sección es estudiar los métodos de aproximación variacionales. Estos incluyen los métodos de Rayleigh-Ritz , Galerkin , Petrov-Galerkin , cuadrado mínimo, y colocación. En todos ellos, veremos una solución aproximada en la forma de una combinación lineal de funciones de aproximación ϕ_j , convenientes y parámetros no determinados c_j : $\sum_j C_j \phi_j$. Los parámetros c_j son determinados de manera que la solución aproximada satisfaga la forma integral pesada o forma débil de la ecuación que rige o minimiza la función cuadrática asociada con la ecuación estudiada. Los diferentes métodos difieren uno de otro en la selección de la función peso w y las funciones aproximación ϕ_j .

El objetivo primario de esta sección es presentar un número de métodos variacionales clásicos. El método del elemento finito, hace uso de los métodos variacionales para formular la ecuación directa sobre un elemento.

EL METODO RAYLEIGH-RITZ

En el método Rayleigh-Ritz , los coeficientes C_j de la aproximación se determinan usando la forma débil del problema , y la selección de las funciones peso están restringidas a las funciones aproximación , $w = \phi_i$. Recuerde que la forma débil contiene tanto la ecuación diferencial que rige y las condiciones frontera naturales del problema, y es menos estricta en los requerimientos de continuidad en la solución aproximada de la ecuación diferencial original o su forma integral pesada. El método se describe para un problema variacional lineal.

Considere el problema variacional de encontrar la solución w tal que

$$B(w, u) = \lambda(w) \quad (2.58)$$

Para todas las funciones suficientemente diferenciables w que satisfacen la forma homogénea de cualquier condición de frontera esencial especificada en u . Cuando la funcional B es bilineal y simétrica y λ es lineal, el problema (2.58) equivale a la minimización de la funcional cuadrática

$$I(u) = \frac{1}{2} B(u, u) - \lambda(u) \quad (2.59)$$

En el método Rayleigh-Ritz ; vemos una solución aproximada a (2.64) en la forma de una serie finita

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0 \quad (2.60)$$

donde las constantes c_j llamadas los coeficientes de Ritz, se escogen tal que (2.58) cumpla para $w = \phi_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$). (2.58) cumple para N diferentes selecciones de w , así que las ecuaciones algebraicas N en c_j son obtenidas. La ecuación algebraica i th se obtiene sustituyendo ϕ_i por w :

$$B\left(\phi_i, \sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0\right) = \lambda(\phi_i) \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

Si B es bilineal, la sumatoria y las constantes c_j pueden colocarse fuera del operador. Tenemos

$$\sum_{j=1}^N B(\phi_i, \phi_j) C_j = \lambda(\phi_i) - B(\phi_i, \phi_0) \quad (2.61a)$$

ó

$$\sum_{j=1}^N B_{ij} C_j = F_i, \quad B_{ij} = B(\phi_i, \phi_j), \quad F_i = \lambda(\phi_i) - B(\phi_i, \phi_0) \quad (2.61b)$$

lo cual representa la i ésima ecuación algebraica en un sistema de N ecuaciones algebraicas lineales en N constantes C_j . Las columnas (e hileras) de los coeficientes de la matriz $B_{ij} = B(\phi_i, \phi_j)$ pueden ser independientes linealmente para que se pueda invertir la matriz coeficiente en (2.61).

Para formar bi-lineales simétricas, el método Rayleigh-Ritz puede verse también como uno que busca una solución de la forma en (2.60) en el cual, los parámetros son determinados minimizando la funcional cuadrática correspondiente a la bi-lineal (simétrica, esto es, la funcional $I(u)$ en (2.59). [Sustituyendo después u_N de (2.60) por u en la (2.59) e integrando, la funcional $I(u)$ llega a ser una función (cuadrática) ordinaria de los parámetros c_1, c_2, \dots, c_N] es que su derivada parcial con respecto a cada parámetro sea cero:

$$\frac{\partial I}{\partial c_1} = 0, \frac{\partial I}{\partial c_2} = 0, \mathbf{K}, \frac{\partial I}{\partial N} = 0 \quad (2.62)$$

Entonces, hay N ecuaciones lineales algebraicas en N incógnitas, c_j ($j = 1, 2, \dots, N$). Esas ecuaciones son exactamente las mismas como las de (2.61) para todos los problemas para los cuales el problema variacional (2.58) es equivalente a $\delta I = 0$. Por supuesto, cuando $B(\cdot, \cdot)$ no es simétrica, no tendremos una funcional cuadrática. En otras palabras, (2.61) es más general que (2.62), y son las mismas cuando $B(\cdot, \cdot)$ es bilineal y simétrica. En la mayoría de los problemas de interés en el presente estudio, tendremos una forma bilineal simétrica.

Retornando al método de aproximación u_N Rayleigh-Ritz en (2.60) observamos que u_N debe satisfacer las condiciones de frontera esencial especificadas del problema; cualquier condición de frontera natural especificada estará incluida ya en el problema variacional (2.58). La forma particular de u_N en (2.60) facilita la satisfacción de las condiciones de frontera especificadas. Usaremos la forma:

$$u_N = \sum_{j=1}^N C_j \phi_j(x)$$

No será necesario satisfacer las condiciones de frontera no homogéneas. Por ejemplo, suponga que u_N es requerida para satisfacer la condición $u_N(x_0) = \mu_0$ en un punto de frontera $x = x_0$:

$$\sum_{j=1}^N C_j \phi_j(x_0) = \mu_0$$

Ya que c_j son parámetros desconocidos a ser determinados, no es fácil de escoger $\phi_j(x)$ tal que cumpla esta relación. Si $u_0 = 0$ entonces cualquier ϕ_j tal que $\phi_j(x_0) = 0$ satisfacción del requerimiento. Escribiendo la solución aproximada u_N en la forma (2.60), una suma de partes homogéneas y no homogéneas, las condiciones de frontera esenciales no homogéneas pueden satisfacer por $\phi_0, \phi_0(x_0) = u_0$ y ϕ_j son requeridas a satisfacer la forma homogénea de la misma condición frontera, $\phi_j(x_0) = 0$. De esta manera, u_N satisface las condiciones frontera especificadas:

$$\begin{aligned} u_N(x_0) &= \sum_{j=1}^N C_j \phi_j(x_0) + \phi_0(x_0) \\ &= 0 + u_0 \end{aligned}$$

Si todas las condiciones de frontera esenciales especificadas son homogéneas (en consecuencia el valor especificado u_0 es cero) .Entonces ϕ_0 se toma como cero y ϕ_j deberá satisfacer las mismas condiciones, $\phi_j(x_0) = 0$. Ya que ϕ_i satisface las condiciones de frontera esenciales homogéneas, la selección de $w = \phi_i$ es consistente con los requerimientos de una función de peso. Las funciones aproximación ϕ_i satisfacen las siguientes condiciones

:

1) (a) ϕ_i deberá ser tal que $B(\phi_i, \phi_j)$ este bien definida y no-cero [Esto es , suficientemente diferenciable como lo requiera la forma bilineal $B(\cdot, \cdot)$].

(b) ϕ_i debe satisfacer mínimo la forma homogénea de las condiciones de frontera esencial del problema. (2.63)

2) Para cualquier $m \in \mathbb{N}$, la serie de $\left\{ \phi_i \right\}_{i=1}^m$ a lo largo de las columnas (e hileras) de $B(\phi_i, \phi_j)$ debe ser linealmente independiente .

Ya que ambas condiciones frontera $[u(0) = u(1) = 0]$ son del tipo esencial, podemos seleccionar ϕ_i en el parámetro N de la aproximación Ritz, para satisfacer las condiciones $\phi_i(0) = \phi_i(1) = 0$ seleccionamos las siguientes funciones: $\phi_0 = 0$ y

$$\phi_1 = x(1-x), \phi_2 = x^2(1-x), \dots, \phi_N = x^N(1-x) \quad (2.68)$$

Si uno selecciona las funciones $\phi_1 = x^2(1-x), \phi_2 = x^3(1-x)$ etc., [no incluyendo] el requerimiento 3 en las condiciones (2.63) se viola, debido a que la serie no puede ser usada para generar el termino lineal x si la solución exacta lo contiene. Como regla, uno debe arrancar con la función admisible de orden inferior e incluir todas las funciones de orden mas alto hasta el grado deseado.

La solución parámetro N Rayleigh-Ritz para el problema es de la forma

$$u_N = C_1\phi_1 + C_2\phi_2 + \dots + C_N\phi_N = \sum_{j=1}^N c_j\phi_j \quad (2.69)$$

Sustituyendo esto en el problema variacional $B(w, \mu) = \lambda(w)$ obtenemos

$$\int_0^1 \left[\frac{d\phi_i}{dx} \left(\sum_{j=1}^N C_j \frac{d\phi_j}{dx} \right) - \phi_i \left(\sum_{j=1}^N C_j \phi_j \right) \right] dx = - \int_0^1 \phi_i x^2 dx$$

$$\sum_{j=1}^N C_j \int_0^1 \left(\frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} - \phi_i \phi_j \right) dx = - \int_0^1 \phi_i x^2 dx$$

ó

$$\sum_{j=1}^N C_j B(\phi_i, \phi_j) = \lambda(\phi_i) \quad (2.70a)$$

1020130043

Donde los coeficientes $B(\phi_i, \phi_j)$ y $\lambda(\phi_i)$ están definidos por

$$B(\phi_i, \phi_j) = \int_0^1 \left(\frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} - \phi_i \phi_j \right) dx, \quad \lambda(\phi_i) = - \int_0^1 x^2 \phi_i dx \quad (2.70b)$$

El mismo resultado se puede obtener usando (2.59) [en vez de 2.58] tenemos

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 - u^2 + 2x^2 u \right] dx$$

Sustituyendo para $u \approx u_N$ de (2.75) en la funcional de arriba obtenemos:

$$I(c_j) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\left(\sum_{j=1}^N c_j \frac{d\phi_j}{dx} \right)^2 - \left(\sum_{j=1}^N c_j \phi_j \right)^2 + 2x^2 \left(\sum_{j=1}^N c_j \phi_j \right) \right] dx \quad (2.71)$$

Las condiciones necesarias para la minimización de I , la cual es una función cuadrática de las variables c_1, c_2, \dots, c_N son:

$$\begin{aligned} \frac{\delta I}{\delta c_i} = 0 &= \int_0^1 \left[\frac{d\phi_i}{dx} \left(\sum_{j=1}^N c_j \frac{d\phi_j}{dx} \right) - \phi_i \left(\sum_{j=1}^N c_j \phi_j \right) + \phi_j x^2 \right] dx \\ &= \sum_{j=1}^N B_{i,j} - F_i \end{aligned}$$

donde:

$$B_{i,j} = \int_0^1 \left(\frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} - \phi_i \phi_j \right) dx, \quad F_i = - \int_0^1 x^2 \phi_i dx$$

Que son las mismas como en (2.70). Las ecuaciones (2.70a, b) cumplen para cualquier selección de funciones aproximación permisibles ϕ_i .

Para la selección de funciones aproximación en (2.68).

Los coeficientes de la matriz $B_{ij} \equiv B(\phi_i, \phi_j)$ y coeficientes del vector $F_i \equiv \lambda(\phi_i) - B(\phi_i - \phi_0) = \lambda(\phi_i)$ pueden calcularse usando:

$$\begin{aligned}\phi_i &= x^i(1-x) = x^i - x^{i+1} \\ \frac{d\phi_i}{dx} &= ix^{i-1} - (i+1)x^i\end{aligned}$$

Tenemos:

$$\begin{aligned}B_{ij} &= \int_0^1 \{ix^{i-1} - (i+1)x^i\} \{jx^{j-1} - (j+1)x^j\} - (x^i - x^{i+1})(x^j - x^{j+1}) dx & (2.72a) \\ &= \frac{2ij}{(i+j)[(i+j)^2 - 1]} - \frac{2}{(i+j+1)(i+j+2)(i+j+3)}\end{aligned}$$

$$F_i = -\int_0^1 x^2 (x^i - x^{i+1}) dx = -\frac{1}{(3+i)(4+i)} \quad (2.72b)$$

La ecuación (2.70) se puede escribir en forma matricial como

$$[B]\{c\} = \{F\} \quad (2.73)$$

Por ejemplo cuando $N=2$ (2.73) será

$$\frac{1}{420} \begin{bmatrix} 126 & 63 \\ 63 & 52 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{60} \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

Usando la regla Cramer's para resolver las ecuaciones da

$$c_1 = -\frac{10}{123} = -0.0813, \quad c_2 = -\frac{21}{123} = -0.1707$$

La solución del parámetro dos Rayleigh-Ritz está dada por

$$\begin{aligned} u_2 &= c_1\phi_1 + c_2\phi_2 = \left(-\frac{10}{123}\right)(x - x^2) + \left(-\frac{21}{123}\right)(x^2 - x^3) \\ &= -\frac{1}{123}(10x + 11x^2 - 21x^3) \end{aligned}$$

La solución exacta de (2.65) y (2.66a) está dada por:

$$u(x) = \frac{\text{sen } x + 2 \text{sen}(1-x)}{\text{sen } 1} + x^2 - 2 \quad (2.74)$$

Los valores de los coeficientes de Ritz para varios valores de N pueden obtenerse resolviendo (2.73). Una comparación de la solución Rayleigh-Ritz (2.69) con la solución exacta (2.74) se presenta en la tabla 2.1 y fig. 2.2.

Serie 2. Para la segunda serie de condiciones frontera (2.66b) forma bi-lineal es la misma que la dada en (2.67) y (2.70b). La forma lineal está dada por $\phi_0 = 0$

$$\lambda(w) = -\int_0^1 wx^2 dx + w(1) \quad (2.75a)$$

Y por lo tanto tenemos:

$$F_i = -\int_0^1 x^2 \phi_i dx + \phi_i(1) \quad (2.75b)$$

En este caso, las ϕ_i deberán ser selectas para satisfacer la condición $\phi_i(0) = 0$ debido a que EBC solo están en $x=0$. La siguiente selección de ϕ_i reúne los requerimientos:

$$\phi_i = x^i \quad (2.76)$$

Los coeficientes B_j y F_i pueden calcularse usando (2.76) en (2.70b) y (2.75b) respectivamente:

$$B_j = \int_0^1 (ijx^{i+j-2} - x^{i+j}) dx = \frac{ij}{1+j-1} - \frac{1}{i+j+1} \quad (2.77)$$

$$F_i = -\int_0^1 x^{i+2} dx + 1 = -\frac{1}{i+3} + 1$$

TABLA 2.1

Comparación de las soluciones Rayleigh-Ritz y exactas de la ecuación:

$$-\frac{d^2u}{dx^2} - u + x^2 = 0 \text{ para } 0 < x < 1; \quad u(0) = u(1) = 0$$

Coeficiente	Ritz*	x	Solución Rayleigh-Ritz $-10u$			Solución exacta
			N=1	N=2	N=3	
	N=1:	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	$c_1 = -0.1667$	0.1	0.1500	0.0885	0.0954	0.955
	N=2:	0.2	0.2667	0.1847	0.1890	0.1890
	$c_1 = -0.0813$	0.3	0.3500	0.2783	0.2766	0.2764
	$c_2 = -0.1707$	0.4	0.4000	0.3590	0.3520	0.3518
	N=3:	0.5	0.4167	0.4167	0.4076	0.4076
	$c_1 = -0.0952$	0.6	0.4000	0.4410	0.4340	0.4342
	$c_2 = -0.1005$	0.7	0.3500	0.4217	0.4200	0.4203
	$c_3 = -0.0702$	0.8	0.2667	0.3486	0.3529	0.3530
		0.9	0.1500	0.2115	0.2183	0.2182
		1.0	0.0	0.0	0.0	0.0

*La solución para el parámetro cuatro Rayleigh-Ritz coincide con la solución exacta hasta cuatro posiciones decimales

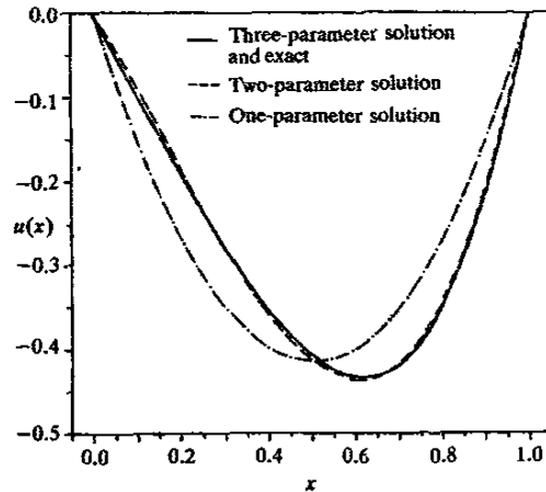


Figura. 2.2 Comparación de la solución Rayleigh-Ritz con la solución exacta de (2.65) y (2.66a). La solución parámetro tres y la solución exacta no difieren en la escala del dibujo.

TABLA 2.2

Comparación de las soluciones Rayleigh-Ritz y exactas de la ecuación:

$$-\frac{d^2u}{dx^2} - u + x^2 = 0 \text{ para } 0 < x < 1; \quad u(0) = 0, \quad \left(\frac{du}{dx}\right)_{x=1} = 1$$

Coeficiente Ritz*	x	Solución Rayleigh-Ritz			Solución exacta
		N=1	N=2	N=3	
N=1: c ₁ =-1.1250	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.1	0.1125	0.1280	0.1271	0.1262
N=2 c ₁ =1.2950 c ₂ =-0.15108	0.2	0.2250	0.2530	0.2519	0.2513
	0.3	0.3375	0.3749	0.3740	0.3742
	0.4	0.4500	0.4938	0.4934	0.4944

N=3:		0.5	0.5625	0.6097	0.6099	0.6112
	$c_1=1.2831$	0.6	0.6750	0.7226	0.7234	0.7244
	$c_2=-0.11424$	0.7	0.7850	0.8325	0.8337	0.8340
	$c_3=-0.02462$	0.8	0.9000	0.9393	0.9407	0.9402
		0.9	1.0125	1.0431	1.0443	1.0433
		1.0	0.1250	1.1442	1.1442	1.1442

*El parámetro cuatro de la solución Rayleigh-Ritz coincide con la solución exacta hasta cuatro posiciones decimales.

La solución exacta en el presente caso está dada por:

$$u(x) = \frac{2\cos(1-x) - \sin x}{\cos 1} + x^2 - 2 \quad (2.78)$$

En la tabla 2.2 se presenta una comparación de la solución Rayleigh-Ritz con la solución exacta.

EL MÉTODO DE RESIDUOS PESADOS

Como se señaló anteriormente, uno puede escribirse siempre la forma integral pesada de una ecuación lineal o no lineal (en las variables dependientes). La forma débil puede desarrollarse si las ecuaciones son de segundo orden o mayor aún si ellas son no lineales. Sin embargo, no siempre es posible construir una variacional cuya primera variación sea igual a la forma variacional. El método Rayleigh-Ritz puede también aplicarse a todos los problemas, incluyendo problemas no lineales, que tienen forma débil. En este método, las funciones peso son igualadas necesariamente a las usadas en la aproximación. El método de residuos pesado es una generalización del método Rayleigh-Ritz en que las funciones peso pueden escoger de una serie de funciones independientes y requiere solamente la forma integral pesada para determinar los parámetros. El método de residuos pesados puede usarse para aproximar la forma integral pesada de cualquier ecuación. Ya que la forma posterior no incluye cualquier condición de frontera especificada del problema, las funciones aproximación deberán

seleccionarse de modo que la solución aproximada satisfaga las condiciones de frontera esencial y natural. En adición, las funciones peso pueden seleccionarse independientemente de las funciones aproximación, pero se requiere que sean independientes (así que las ecuaciones algebraicas resultantes sean linealmente independientes). Esta flexibilidad es ventajosa en ciertos problemas lineales.

En esta sección, discutimos primero el método general de residuos pesados y luego consideramos ciertos casos especiales que se conocen con nombres específicos (ej. métodos Galerkin y cuadrado mínimo).

El método de residuos pesados se puede describir en su generalidad considerando la ecuación operador

$$A(u) = f \text{ en } \Omega \quad (2.79)$$

Donde A es un operador (lineal o no lineal), a menudo un operador diferencial, actuando sobre la variable dependiente u y f es una función conocida de las variables independientes. Algunos ejemplos de tales operadores son:

1. $A(u) = -\frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) + cu$
 2. $A(u) = \frac{d^2}{dx^2} \left(b \frac{d^2u}{dx^2} \right)$
 3. $A(u) = -\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \right]$
 4. $A(u) = -\frac{d}{dx} \left(u \frac{du}{dx} \right)$
 5. $A(u, v) = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$
- (2.80)

Para que un operador A sea lineal en sus argumentos, debe satisfacer la relación:

donde Ω es un dominio de dos dimensiones, y ϕ_i son las funciones peso, las cuales en general, no son las mismas que las funciones aproximación ϕ_i . La serie $\{\phi_i\}$ debe ser una serie independiente. Por otro lado, las ecuaciones dadas por (2.84) no serán linealmente independientes y no serán solucionables.

Los requerimientos en ϕ_0 y ϕ_j para el método residuo-pesado son distintos de los del método Rayleigh-Ritz, los cuales están basados en la forma débil (integral) de la ecuación diferencial. El requisito de diferenciabilidad sobre ϕ_j en el método de residuo pesado es dictado por la exposición integral (2.84), opuesto a la forma suave del método Rayleigh-Ritz. Por lo tanto, ϕ_j debe tener derivadas diferentes del cero hacia arriba en orden de aparición en la ecuación operador (2.79). Ya que la forma integral pesada (2.84) no incluye cualquiera de las condiciones frontera especificadas (esencial o natural), debemos requerir también que u_N en (2.82) satisfaga todas las condiciones frontera especificadas del problema. Consecuentemente, ϕ_0 se requiere que satisfaga todas las condiciones frontera especificadas, y ϕ_j se requiere que satisfaga la forma homogénea de todas las condiciones frontera especificadas del problema. Esos requerimientos sobre ϕ_0 y ϕ_j incrementarán el orden de las expresiones polinomiales usadas por el método residuo pesado. En general, las ϕ_i usadas en este método son funciones de mayor orden que las usadas en el método Rayleigh-Ritz, y las funciones usadas en el pasado pueden no satisfacer los requisitos de continuidad (diferenciabilidad) del método o residuo pesado. Varios casos especiales del método residuo pesado se discuten en los siguientes párrafos.

EL METODO PETROV-GALERKIN. El método residuo pesado está referido al método Petrov-Galerkin cuando $\psi_i \neq \phi_i$. Cuando el operador A es lineal (2.84) puede simplificarse a la forma

$$\sum_{j=1}^N \left[\int_{\Omega} \phi_i A(\phi_j) dx dy \right] C_j = \int_{\Omega} \psi_i [f - A(\phi_0)] dx dy$$

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} c_j = F_i \quad (2.84)$$

observe que la matriz coeficiente $[A]$ no es simétrica:

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \psi_i A(\phi_j) dx dy \neq A_{ji} \quad (2.85)$$

EL METODO GALERKIN . Para la selección de la función peso ψ_i igual a la de la función aproximación ϕ_i , el método del residuo pesado es mejor conocido como el método Galerkin. Las ecuaciones algebraicas de la aproximación de Galerkin son:

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} c_j = F_i \quad (2.86a)$$

Donde

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i A(\phi_j) dx dy, F_i = \int_{\Omega} \phi_i [f - A(\phi_0)] dx dy \quad (2.86b)$$

De nuevo observamos que A_{ij} no es simétrica.

En general el método Galerkin no es el mismo que el de Rayleigh-Ritz, esto en cuanto a lo requerido para determinar los coeficientes c_j .

Las funciones aproximación usadas en el método Galerkin se requieren que sea de mayor orden que las usadas en el método Rayleigh-Ritz .

Si la ecuación lo permite y uno lo quiere, la diferenciación puede transferirse de la solución u a la función peso $w = \phi_i$; y con ello obtener una forma débil para relajar los requisitos de continuidad en las funciones de aproximación e incluyen las condiciones de frontera natural especificadas del problema.

Los métodos Rayleigh-Ritz y Galerkin producen las mismas condiciones en los dos casos: (i) cuando las condiciones de frontera especificadas del problema son todas del tipo esencial, y por lo tanto los requerimientos sobre ϕ_i en los dos métodos llegan a ser los mismos y la forma integral pesada se reduce a la forma débil; y (ii) cuando las funciones de aproximación del método Galerkin son usadas en el método Rayleigh-Ritz.

EL METODO DE CUADRADO MINIMO. En este método, determinamos los parámetros, minimizando la integral del cuadrado del residuo (2.83):

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \int_{\Omega} R^2(x, y, c_j) dx dy = 0$$

ó

$$\int \frac{\partial R}{\partial \alpha_i} R dx dy = 0 \quad (2.87a)$$

La comparación de (2.87a) con (2.83) muestra que $\varphi = \partial R / \partial \alpha_i$ si A es un operador lineal, $\varphi_i = A(\phi_i)$ y (2.87a) llega a

$$\sum_{j=1}^N \left[\int_{\Omega} A(\phi_i) A(\phi_j) dx dy \right] C_j = \int_{\Omega} A(\phi_i) [f - A(\phi_0)] dx dy$$

ó

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} c_j = F_i \quad (2.87b)$$

Donde:

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i A(\phi_j) dx dy, \quad F_i = \int_{\Omega} \phi_i [f - A\phi_0] dx dy \quad (2.87c)$$

Notar que la matriz coeficiente A_{ij} es simétrica, pero involucra el mismo orden de diferenciación como el de la ecuación diferencial gobernante.

EL METODO DE COLOCACION. En el método de colocación obtenemos una solución aproximada u_N a (2.79) en la forma de (2.82) requiriendo que el residuo en la ecuación sea idénticamente cero en N puntos seleccionados $x' \equiv (x', y')$ ($i = 1, 2, \dots, N$) en dominio de Ω .

$$R(x', y', c_j) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.88)$$

La selección de los puntos x' es crucial en la obtención de un sistema de ecuaciones bien acondicionado y para la obtención de una solución exacta. El método de colocación puede mostrarse como un caso especial de (2.84) con $\psi_i = \delta(x', y')$ donde $\delta(x)$ es la función delta Dirac definida por:

$$\int_{\Omega} f(x) \delta(x - \xi) dx dy = f(\xi) \quad (2.89)$$

Con esta selección de funciones peso, la exposición de residuo pesado llega a ser:

$$\int_{\Omega} \delta(x - x') R(x, c_j) dx dy = 0$$

ó

$$R(x', c_j) = 0 \quad (2.90)$$

Consideremos un ejemplo para ilustrar el uso de varios casos del método residuo pesado.

Ejemplo 2.6. Considere la ecuación diferencial [ver ejemplo 2.4 en condiciones de frontera serie 2]

$$-\frac{d^2u}{dx^2} - u + x = 0, \quad u(0) = 0, \quad u'(1) = 1 \quad (2.91)$$

Para un método de residuo pesado, ϕ_0 y ϕ_1 deben satisfacer las condiciones siguientes:

$$\phi_0(0) = 0, \quad \phi_0'(1) = 1 \quad (\text{satisface las condiciones de frontera real})$$

$$\phi_1(0) = 0, \quad \phi_1'(1) = 0 \quad (\text{satisface la forma homogénea de las condiciones frontera especificadas})$$

Para una selección de polinomios algebraicos, suponemos que $\phi_0(x) = a + bx$ y se usan las dos condiciones en ϕ_0 para determinar las constantes a y b . Obtenemos

$$\phi_0(x) = x$$

Ya que hay dos condiciones homogéneas, debemos suponer un polinomio de parámetro tres como mínimo para obtener una función no cero, $\phi_1 = a + bx + cx^2$.

Usando las condiciones sobre ϕ_1 , obtenemos:

$$\phi_1 = -c_1(2 - x)$$

La constante c puede ser igual a la unidad debido a que se observará dentro del parámetro c_1 .

Para ϕ_2 podemos suponer una de las formas

$$\phi_2 = a + bx + dx^3 \quad \text{ó} \quad \phi_2 = a + cx^3 + dx^3$$

con $d \neq 0$; ϕ_2 no contiene todos los términos de todos los ordenes en cualquier caso pero, la solución aproximada es completa debido a que $\{\phi_1, \phi_2\}$ contiene todos los términos arriba del grado tres. Para la primer selección de ϕ_2 , obtenemos:

$$\phi_2 = x^2 \left(1 - \frac{2}{3}x\right)$$

El residuo en la aproximación de la ecuación es:

$$\begin{aligned} R &= -\left(0 + \sum_{i=1}^N c_i \frac{d^2 \phi_i}{dx^2}\right) - \left(\phi_0 + \sum_{i=1}^N c_i \phi_i\right) + x^2 \\ &= c_1(2 - 2x + x^2) + c_2(-2 + 4x - x^2 + \frac{2}{3}x^2) - x + x^2 \end{aligned} \quad (2.92)$$

CAPITULO 3

ANALISIS DEL ELEMENTO FINITO EN PROBLEMAS DE UNA DIMENSION CON VALOR FRONTERA DE SEGUNDO ORDEN

3.1 COMPARACION DE ELEMENTO FINITO CON LOS METODOS VARIACIONALES.

Los métodos variacionales tradicionales descritos en el capítulo 2 dejan de ser efectivos debido a un defecto serio, particularmente, la dificultad de construir las funciones aproximación. Las funciones aproximación, aparte de satisfacer continuidad, independencia lineal, perfección, y condiciones de frontera esenciales, son arbitrarias, la selección se hace más difícil cuando el dominio dado es geoméricamente complejo. La calidad de la aproximación es afectada directamente por la selección de las funciones aproximación, es inquietante conocer que entonces no existe procedimiento para construir las.

Debido a este defecto, a pesar de la simplicidad en obtener soluciones aproximadas, los métodos variacionales tradicionales de aproximación, nunca se consideran competitivos computacionalmente, cuando se comparan con los esquemas tradicionales de diferencia finita.

Idealmente hablando, un método computacional efectivo debe tener las siguientes características:

1. Debe tener una matemática perfecta así como bases físicas.