

2. No deberá tener limitaciones cuando se considere la geometría, la composición física del dominio, o la naturaleza de la carga.
3. El procedimiento formulativo deberá ser independiente de la forma del dominio y la forma específica de las condiciones frontera.
4. El método deberá ser flexible en cuanto a los grados de aproximación sin reformular el problema completo.
5. Deberá involucrar un procedimiento sistemático que pueda automatizarse para usarse en computadoras digitales.

El método del elemento finito es una técnica en la que el dominio está representado como un conjunto de dominios simples, llamadas elementos finitos, tal que, es posible construir sistemáticamente las funciones aproximación necesitadas en una aproximación variacional o residuo pesado de la solución de un problema sobre cada elemento. Por lo tanto, el método del elemento finito difiere de los métodos tradicionales estudiados antes en la manera de cómo se construyen las funciones aproximación.

El método del elemento finito tiene tres características básicas:

1. **División del todo en partes.** Lo cual representa geoméricamente un dominio completo como un conjunto geométrico de dominios simples, que dan lugar a una derivación sistemática de las funciones aproximación.
2. **Derivación de funciones aproximación sobre cada elemento;** las funciones aproximación son por lo regular, polinomios algebraicos que se derivan usando la teoría de interpolación.
- 3 **Ensamble de elementos.** Basado en la continuidad de la solución y balance de flujos internos. El ensamble de elementos representa una analogía discreta del dominio natural, y el sistema asociado de ecuaciones algebraicas representa una analogía numérica del modelo matemático del problema que se está analizando.

Las tres características constituyen los tres pasos principales de la formulación del elemento finito. La geometría de los elementos usada para representar el dominio de un problema deberá ser, tal que, las funciones aproximación puedan ser derivadas únicas. Las funciones aproximación dependen no solamente de la geometría, sino también, del

número y localización de puntos llamados nodos, en el elemento y las cantidades a ser interpoladas (ejem. solución, o solución y sus derivadas). Una vez que las funciones aproximación se han derivado, el procedimiento para obtener relaciones algebraicas entre los coeficientes desconocidos (lo cual da los valores de la solución en los nodos del elemento finito) es exactamente el mismo usado en los métodos **Rayleigh-Ritz** y residuo pesado.

El método del elemento finito, no sólo supera el defecto de los métodos variacionales tradicionales, sino que también está dotado de una técnica computacional efectiva.

Los pasos básicos involucrados en el análisis del elemento finito de un problema se dan en la tabla 3.1

TABLA 3.1:

Pasos involucrados en el análisis del elemento finito de un problema:

1. Discretización (o representación) del dominio dado en un conjunto de elementos finitos preseleccionados. (Este paso puede postponerse hasta que se complete la formulación de la ecuación del elemento finito)
 - a) Construya la malla del elemento finito de los elementos preseleccionados
 - b) Número de nodos y elementos
 - c) Genere las propiedades geométricas (coordenadas y áreas de sección transversal) necesarias para el problema.
2. Derivación de las ecuaciones de elemento para todos los elementos típicos en la malla.
 - a) Construir la formulación variacional de la ecuación diferencial dada sobre el elemento típico.
 - b) Suponga que la variable dependiente típica u es de la forma.

$$u = \sum_{i=1}^n u_i \psi_i$$

y sustituya en el paso 2a para obtener las ecuaciones de elemento en la forma

$$[K^e]\{u^e\} = \{F^e\}$$

- c) Derive o seleccione, si están disponibles en la redacción, funciones interpolación de elementos ψ_j , y calcule las matrices de elemento.
3. Ensamble las ecuaciones de elemento para obtener las ecuaciones del problema total
- Identificar las condiciones de continuidad de inter-elemento entre las variables primarias (relaciones entre los grados de libertad locales y los grados de libertad globales-conectividad de elementos) mediante la relación nodos del elemento a nodos globales.
 - Identificar las condiciones de equilibrio entre las variables secundarias (relación entre la fuente local o componentes fuerza y las componentes de la fuente especificada globalmente).
 - Ensamble las ecuaciones de elemento usando los pasos 3a y 3b.
4. Imposición de las condiciones frontera de un problema.
- Identificar los grados de libertad globales primarios especificados.
 - Identificar los grados de libertad globales secundarios especificados (si no se dan en el paso 3b).
5. Solución de las ecuaciones ensambladas.
6. Postprocesamiento de los resultados.
- Calcular el gradiente de la solución de otras cantidades deseadas de los grados de libertad primarios calculados en el paso 5.
 - Represente los resultados en forma tabular o gráfica.

En las secciones que siguen, nuestro objetivo será introducir muchas ideas fundamentales que forman las bases del método del elemento finito. Los pasos básicos de un análisis de elemento finito se introducen vía un modelo de ecuación diferencial de segundo orden, representativa de muchos sistemas de una ecuación de una dimensión.

3.2 PASOS BASICOS PARA EL ANALISIS DEL ELEMENTO FINITO

MODELO DE PROBLEMA DE VALOR FRONTERA

Considere el problema de encontrar la función $u = (x)$ que satisfaga la ecuación diferencial :

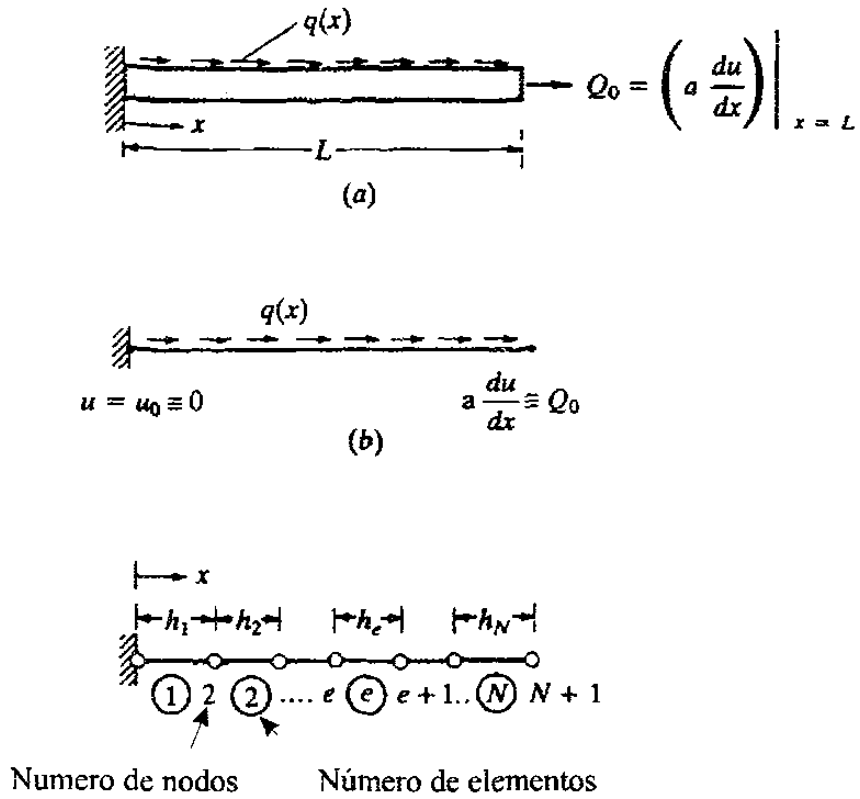
$$-\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right) + cu - q = 0 \quad \text{para: } 0 < x < L \quad (3.1)$$

y las condiciones frontera

$$u(0) = u_0, \quad \left(a\frac{du}{dx}\right)\Big|_{x=L} = Q_0 \quad (3.2)$$

donde $a = a(x)$, $c = c(x)$, $q = q(x)$, u_0 y Q_0 son los datos del problema (cantidades conocidas).

La ecuación 3.1 está en conexión con la descripción analítica de muchos procesos físicos. Por ejemplo, conducción y convección de calor en una pared plana o aleta (transferencia de calor en una dimensión), flujo a través de canales y tuberías, deflexión transversal de cables, deformación axial de barras (ver fig. 3.1a) y muchos otros procesos descritos en la tabla(3.1). La tabla 3.2 contiene una lista de varios campos de problemas descritos por (3.1).



(b)

Figura 3.1 Discretización del elemento finito de un dominio en una dimensión: (a) problema físico; (b) idealización matemática; (c) discretización del elemento finito.

TABLA 3.2

Algunos ejemplos de las ecuaciones de segundo orden en una dimensión

$$-\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right) = q \quad \text{para } 0 < x < L$$

Condiciones: de frontera esencial: $u|_{x=0} = u_0$ de frontera natural $\left(a\frac{du}{dx}\right)|_{x=L} = Q_0$

Campo	Variable primaria u	Variable secundaria a	Término fuente q	Variable secundaria Q_0
1. Deflexión transversal de un cable	Deflexión transversal	Tensión en cable	Carga transversal distribuida	Fuerza axial
2. Deformación axial de una barra	Desplazamiento longitudinal	EA(E=módulo, A= Area secc. Transv.)	Fricción o fuerza de contacto sobre barra	Fuerza axial
3. Transferencia de calor	Temperatura	Conductividad térmica	Generación de calor	Calor
4. Flujo a través de tubos	Presión hidrostática	$\pi D^2/128\mu$ D=Diámetro μ = viscosidad	Fuente de flujo (generalmente cero)	Razón de flujo
5. Flujo laminar incompresible a través de un canal bajo gradiente a presión constante	Velocidad	Viscosidad	Gradiente de presión	Esfuerzo axial
6. Flujo a través de un medio poroso	Fuente de fluido	Coefficiente de permeabilidad	Flujo de fluido	Flujo
7. Electrostática	Potencial electrostático	Constante dieléctrica	Densidad de carga	Flujo eléctrico

5. Flujo laminar incompresible a través de un canal bajo gradiente a presión constante	Velocidad	Viscosidad	Gradiente de presión	Esfuerzo axial
6. Flujo a través de un medio poroso	Fuente de fluido	Coefficiente de permeabilidad	Flujo de fluido	Flujo
7. Electrostática	Potencial electrostático	Constante dieléctrica	Densidad de carga	Flujo eléctrico

Cuando $c(x) = 0$.

A continuación se presenta paso por paso un procedimiento para la formulación y solución de (3.1) mediante el método del elemento finito.

DISCRETIZACION DEL DOMINIO

El dominio del problema en el caso presente, consiste en que todos los puntos entre $x = 0$ y $x = L$; $\Omega(0, L)$; ver fig. 3.1(b). El dominio Ω se divide en dos series de elementos finitos, un elemento típico de longitud h_e , existe y está localizado entre los puntos A y B. El conjunto de tales elementos se llama la malla del elemento finito del dominio. (ver fig 3.1c). La razón para dividir el dominio en elementos finitos es doble: primero, para representar la geometría del dominio; y, segundo para aproximar la solución sobre cada elemento de la malla para representar mejor la solución sobre el dominio entero. La aproximación del dominio en el caso presente no es interés, ya que es una línea recta. Si el dominio es una curva entonces la aproximación mediante una serie de líneas rectas o curvas es necesaria para representarlo. La aproximación de la solución sobre cada elemento de la malla es mas simple que su aproximación sobre el dominio entero. Recordar que en los métodos variacionales tradicionales, la solución requiere satisfacer las condiciones frontera del problema. Esto presenta algunas restricciones en la selección de funciones aproximación, especialmente cuando existe discontinuidad en la geometría, propiedades del material, y/o carga del problema.

Para conectar los elementos e imponer continuidad de la solución en nodos comunes a elementos, identificamos los extremos de cada elemento línea como los nodos del elemento.

Dependiendo del grado de aproximación polinomial usado para representar la solución, se pueden identificar nodos adicionales dentro del elemento. Los nodos juegan el papel de puntos de interpolación, en la construcción de las funciones aproximación de un elemento.

El número de elementos usados en un problema, depende del tipo de elemento y exactitud deseada. Siempre que un problema se resuelva por el método del elemento finito por primera vez, uno requiere investigar las características de convergencia de aproximación del elemento finito refinando la malla gradualmente (incrementado el número de elementos) y comparando la solución con los obtenidos por elementos de mayor orden. El orden de un elemento se refiere al grado de polinomio usado para representar la solución sobre el elemento.

DERIVACION DE LAS ECUACIONES ELEMENTO

La derivación de ecuaciones de elemento finito, esto es ecuaciones algebraicas que relacionan las variables primarias con las variables secundarias en los nodos de los elementos involucran tres pasos.

1. Construir la forma débil o residuo pesado de la ecuación diferencial.
2. Suponer la forma de la aproximación sobre un elemento finito típico.
3. Derivar las ecuaciones de elemento finito mediante la sustitución de la solución aproximada en la forma débil o residuo pesado.

Un elemento típico $\Omega^e = (x_A, x_B)$, cuyos puntos extremos tienen las coordenadas $x = x_A$ y $x = x_B$, se aísla de la malla (ver fig 3.2a). Damos una solución aproximada a la ecuación que rige sobre el elemento, usando el método **Rayleigh-Ritz**.

En principio, cualquier método que permita la derivación de las relaciones algebraicas necesarias entre los valores nodales de la variable dependiente puede usarse. Aquí se desarrollan las ecuaciones, algebraicas usando el método **Rayleigh-Ritz**, que se basa en la forma débil de la ecuación diferencial. Las ecuaciones resultantes de la aplicación de un método variacional, son relaciones entre las variables primarias

(aquellas involucradas en la especificación de las condiciones frontera esenciales) y las variables secundarias (las involucradas en la especificación de las condiciones de frontera naturales). Los tres pasos en la derivación de las ecuaciones de elemento finito de un elemento típico de la malla se discuten enseguida:

PASO 1: FORMA DEBIL. En el método del elemento finito damos una solución aproximada a (3.1) sobre cada elemento finito. La aproximación polinomial de la solución para un elemento finito Ω^e es de la forma:

$$U^e = \sum_{j=1}^n u_j^e \psi_j^e(x) \quad (3.3)$$

donde u_j^e son los valores de la solución en los nodos del elemento finito y ψ_j^e son las funciones aproximación sobre el elemento. Los coeficientes u_j^e son determinados de modo que (3.1) sea satisfecha en sentido de integral pesada. El número necesario y suficiente de relaciones algebraicas entre los u_j^e puede obtenerse, cambiando la forma de la ecuación diferencial (3.1) en una forma integral pesada.

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} w \left[-\frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) + cu - q \right] dx \quad (3.4)$$

donde $w(x)$ representa a la función peso y $\Omega^e = (x_A, x_B)$ es el dominio de un elemento típico (ver fig. 3.2a). Para $u \approx U^e$ y cada selección independiente de w , obtenemos una ecuación algebraica independiente relacionando todos los u_j^e del elemento. Un total de n ecuaciones independientes se requieren resolver para n valores u_j^e . Cuando se escoge

que w sea ψ_i^e y (3.4) se usa para obtener la i -ésima ecuación de las n ecuaciones requeridas, el modelo del elemento finito resultante (sistema de ecuaciones algebraicas entre los valores modales) es el modelo del elemento finito Galerkin. Ya que (3.4) contiene la segunda derivada de U^e , las funciones aproximación ψ_j^e pueden ser doblemente diferenciables. En adición, si las variables secundarias son incluidas en el modelo, ψ_i^e puede ser cúbica.

Para suavizar la continuidad requerida de las funciones $\psi_j^e(x)$, nos ocupamos de la diferenciación de (3.4) desde u hasta w tal que u y w sean igualmente diferenciadas una vez cada una en el presente caso. La forma integral resultante es llamada la forma débil de (3.1). Esta forma, no tan solo es equivalente a (3.1) sino también contiene las condiciones frontera natural del problema. El procedimiento de tres pasos de construcción de la forma débil de (3.1) se presentó en el cap. 2 y es visitada de nuevo en el siguiente párrafo.

El primer paso es multiplicar la ecuación diferencial gobernante con una función peso e integrar sobre un elemento típico. El segundo paso es llevar a cabo la diferenciación desde u hasta w , usando integración por partes. Considere la identidad.

$$-w \left[\frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) \right] = -\frac{d}{dx} \left(wa \frac{du}{dx} \right) + a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} \quad (3.5^a)$$

Lo cual es simplemente la regla de la diferenciación del producto aplicada al producto de dos funciones, $a \frac{du}{dx}$ y w . Integrando esta identidad sobre el dominio del elemento obtenemos:

$$-\int_{x_A}^{x_B} w \left[\frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) \right] dx = -\int_{x_A}^{x_B} \frac{d}{dx} \left(wa \frac{du}{dx} \right) dx + \int_{x_A}^{x_B} a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} dx = -\left[wa \frac{du}{dx} \right]_{x_A}^{x_B} + \int_{x_A}^{x_B} a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} dx \quad (3.5b)$$

Sustituyendo (3.5b) en (3.4) llegamos al resultado

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left(a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} + cwu - wq \right) dx - \left[wa \frac{du}{dx} \right]_{x_A}^{x_B} \quad (3.6)$$

El tercer y ultimo paso es identificar las variables primarias y secundarias de la forma (débil) variacional. Esto requiere que clasifiquemos las condiciones frontera esencial (ó geométrica) y natural (o fuerza). La clasificación se hace únicamente examinando el término frontera que aparece en la forma débil (3.6).

$$\left[wa \frac{du}{dx} \right]_{x_A}^{x_B}$$

Como una regla, el coeficiente de la función peso en la expresión frontera se llama la variable secundaria, y su especificación constituye la condición frontera natural. La incógnita dependiente en la misma forma como en la función peso en la expresión frontera es la variable primaria, y su especificación constituye la condición frontera esencial. Para el modelo de ecuación a la mano, las variables primarias y secundarias son:

$$u \text{ y } a \frac{du}{dx} \equiv Q$$

En el escrito de la forma final de la expresión variacional (o débil), suponemos que todas las condiciones frontera en el nivel del elemento son del tipo natural, así que pueden incluirse en la exposición variacional.

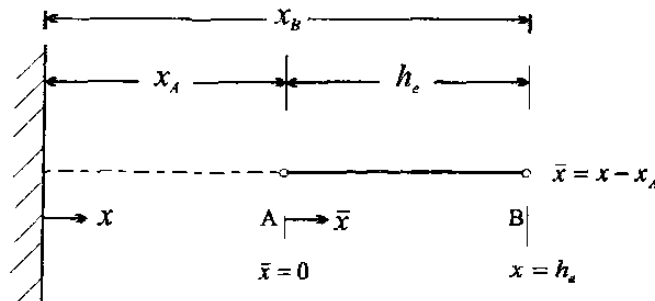
$$-Q_A = \left(a \frac{du}{dx} \right)_{x_A}, \quad -Q_B = \left(a \frac{du}{dx} \right)_{x_B}, \quad (3.7)$$

Las variables primarias y secundarias en los nodos se muestran sobre el elemento típico fig. 3.2 (b).

Esta figura es el diagrama de cuerpo libre del elemento típico. Con sus fuerzas internas (reacciones) Q_1^e y Q_2^e . Las cantidades $Q_1^e \equiv Q_A$ y $Q_2^e \equiv Q_B$ tienen el significado de fuerzas en la deformación axial de barras; Q_1^e es una fuerza compresiva mientras Q_2^e es una fuerza a tensión (algebraicamente ambas positivas como se muestra en la fig. 3.2b).

Con la observación en (3.7) la forma variacional llega a ser.

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left(a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} + cwu - wq \right) dx - w(x_A) Q_A - w(x_B) Q_B \quad (3.8)$$



$$Q_1^e = - \left(a \frac{du}{dx} \right)_{x=x_A} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c} u(x_A) = u_1^e \\ \circ \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} u(x_B) = u_2^e \\ \circ \\ 2 \end{array} \quad \longrightarrow \quad Q_2^e = - \left(a \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=x_B}$$

Fig. 3.2. Discretización del elemento finito de un dominio en una dimensión para el modelo de problema (3.1) (a) Un elemento finito típico de la malla de elemento finito en

fig. 3.1 (c); $x =$ coordenada global $\bar{x} =$ coordenada local, (b) un elemento típico, con la definición de variables primarias (u) y secundarias (Q) de los nodos elementos.

La ec. (3.8) completa el procedimiento de tres pasos para construir la forma débil en (3.8) contiene dos tipos de expresiones; las que contienen w y u ; y las que contienen solo w . Agrupando en una expresión simple llamada la forma bilineal:

$$B(w, u) \equiv \int_{x_A}^{x_B} \left(a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} + cwu \right) dx \quad (3.9a)$$

Representando todos los términos que contienen solamente w por $\lambda(w)$, llamada la forma lineal.

$$I(w) = \int_{x_A}^{x_B} wq dx + w(x_A)Q_A + w(x_B)Q_B \quad (3.9b)$$

La exposición variacional puede escribirse ahora como:

$$B(w, u) = I(w) \quad (3.10)$$

La cual se llama el problema variacional asociado (3.1) como se verá mas tarde, la forma bilineal resulta directamente en la matriz coeficiente del elemento, y la forma lineal aparece en el vector columna al lado derecho de las ecuaciones del elemento finito.

Cuando se tiene interés en matemáticas aplicadas, o mecánica de sólidos y estructural se apreciará el hecho de que el problema variacional (3.10) no es nada, pero la exposición de la minimización de una cuadrática funcional o de energía potencial total $I(u)$:

$$\delta I = 0$$

donde δ es el símbolo variacional (ver sec. 2.3.3) e I es la funcional cuadrática definida por [ver(2.43b)]

$$I(u) = \frac{1}{2}B(u, u) - \lambda(u) \quad (3.11)$$

La ecuación (3.11) se cumple solo cuando $\lambda(u)$ es lineal en u y $B(w, u)$ es bilineal y simétricamente en u y w .

Cuando (3.1) describe la deformación axial de una barra $\frac{1}{2}B(u, u)$ representa la energía elástica de deformación almacenada en la barra, $\lambda(u)$ representa al trabajo desarrollado por las fuerzas aplicadas y $I(u)$ representa la energía potencial total del elemento barra. Es importante notar, que las formulaciones de elemento finito, no requieren de la existencia de la funcional $I(u)$. La cual es necesitada como una forma de obtener exactamente n ecuaciones algebraicas entre las u_j^e de (3.3) de modo que la ecuación diferencial gobernante sea satisfecha sobre el elemento de manera significativa. En el presente estudio, usamos la forma suave de la ecuación diferencial (3.8) ó (3.10) y el método **Rayleigh-Ritz** para obtener las n ecuaciones algebraicas entre las variables nodales u_i^e y Q_i^e .

Paso 2. Aproximación de la solución. La forma débil sobre un elemento es equivalente a la ecuación diferencial y a las condiciones de frontera natural del elemento. Las condiciones de frontera esencial del elemento, digamos $u(x_A) = u_A$, y $u(x_B) = u_B$ no están incluidas en la forma débil. De aquí que puedan incluirse en la aproximación de $u(x)$. Por lo tanto, la aproximación de $u(x)$ debe ser un interpolante, es decir igual a u_A en x_A y u_B en x_B .

Una vez que la forma débil contiene la derivada de primer orden de u , cualquier función continua sería candidata para la solución del elemento finito. Representemos la solución del elemento finito sobre el elemento $\Omega^e = (x_A, x_B)$ por U^e . Entonces daremos la solución aproximada U^e en forma de polinomios algebraicos. La razón para esta

selección es doble: primero, la teoría de interpolación de análisis numérico puede usarse para obtener las funciones aproximación sistemáticamente sobre un elemento; segundo, la evaluación numérica de integrales de los polinomios algebraicos es sencilla.

Como en los métodos variacionales, la solución aproximación U^e debe cumplir ciertos requisitos para que sea convergente con la solución real u así como se incrementa el número de elementos. Estos son:

1. La solución aproximada deberá ser continua sobre el elemento, y diferenciable, así requerida por la forma débil.
2. Deberá ser un polinomio completo, esto es, incluir todos los términos desde el menor hasta el de mayor orden usado.
3. Deberá ser un interpolante de las variables primarias en los nodos del elemento finito.

La razón para el primer requisito es obvia; asegura una matriz coeficiente no cero. El segundo requisito es necesario para capturar todos los estados posibles, esto es constante lineal y así sucesivamente de la solución real.

El tercer requisito es necesario para satisfacer las condiciones de frontera esencial del elemento y forzar continuidad de las variables primarias en puntos comunes a varios elementos.

Para la exposición variacional a la mano, el polinomio de mínimo orden es lineal. Un polinomio lineal completo es la forma.

$$U^e = a + bx \quad (3.13)$$

donde a y b son constantes. Esta expresión cumple los primeros dos requisitos en (3.12). Para satisfacer el tercero:

$$U^e(x_A) = u_1^e, \quad U^e(x_B) = u_2^e \quad (3.14)$$

Expresamos las constantes a y b en (3.13) en términos de u_1^e y u_2^e . Las ecuaciones (3.14) provee dos relaciones entre (a, b) y (u_1^e, u_2^e)

$$\begin{aligned} u_1^e &= a + bx_A \\ u_2^e &= a + bx_B \end{aligned} \quad (3.15a)$$

o en forma de matriz

$$\begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_A \\ 1 & x_B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} \quad (3.15b)$$

Invirtiendo (3.15b) por la regla de Cramer's obtenemos

$$\begin{aligned} a &= \frac{u_1^e x_B - u_2^e x_A}{x_B - x_A} = \frac{1}{h_e} (u_1^e x_B - u_2^e x_A) \equiv \frac{1}{h_e} (\alpha_1^e u_1^e + \alpha_2^e u_2^e) \\ b &= \frac{1}{h_e} \frac{u_1^e x_B - u_2^e x_A}{x_B - x_A} = \frac{1}{h_e} (u_2^e - u_1^e) \equiv \frac{1}{h_e} (B_1^e u_1^e - B_2^e u_2^e) \end{aligned} \quad (3.15c)$$

donde $h_e = x_B - x_A$ y

$$\alpha_i^e = (-1)^j x_j^e, \quad \beta_i^e = (-1)^i; \quad x_1^e = x_A, \quad x_2^e = x_B \quad (3.15d)$$

En (3.15d), i y j permutan en un orden natural

Si $i=1$, entonces $j=2$, si $i=2$, entonces $j=1$

α_i^e y β_i^e se introducen para mostrar la forma típica de las funciones interpolación. La sustitución de (3.15c) en (3.13) produce:

$$\begin{aligned}
 U^e(x) &= \frac{1}{h_e} \left[(\alpha_1^e u_1^e + \alpha_2^e u_2^e) + (\beta_1^e u_1^e + \beta_2^e u_2^e) x \right] \\
 &= \frac{1}{h_e} (\alpha_1^e + \beta_1^e x) u_1^e + \frac{1}{h_e} (\alpha_2^e + \beta_2^e x) u_2^e
 \end{aligned}$$

Esto es :

$$U^e(x) = \psi_1^e(x) u_1^e + \psi_2^e(x) u_2^e = \sum_{j=1}^2 \psi_j^e(x) u_j^e \quad (3.16a)$$

donde :

$$\psi_1^e(x) = \frac{1}{h_e} (\alpha_1^e + \beta_1^e x) = \frac{x_B - x}{x_B - x_A}, \quad \psi_2^e(x) = \frac{1}{h_e} (\alpha_2^e + \beta_2^e x) = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} \quad (3.16b)$$

Las cuales se llaman funciones aproximación del elemento finito lineal.

Para la interpolación lineal (3.16) marcamos los extremos como nodos 1 y 2, y renombramos las variables secundarias como :

$$Q_A = Q_1^e, \quad Q_B = Q_2^e \quad (3.17)$$

El número de nodos global para elementos conectados en serie puede relacionarse con el número de nodos del elemento. Para elementos lineales, el número de nodos global del elemento Ω^e son e y $e+1$, y las coordenadas globales de los nodos del elemento son x_e, x_{e+1} (esto es $x_A = x_e$ y $x_B = x_{e+1}$)

Notar que las funciones interpolación del elemento ψ_i^e en (3.16b) están expresadas en términos de la coordenada global x (la coordenada del problema) pero se definen solamente en el dominio del elemento $\Omega^e = (x_A, x_B) = (x_e, x_{e+1})$. Si los

expresamos en términos de una coordenada \bar{x} con origen en el nodo 1 del elemento, ψ_i^e (3.16b) toma las formas:

$$\psi_1^e(\bar{x}) = 1 - \frac{\bar{x}}{h_e}, \quad \psi_2^e(\bar{x}) = \frac{\bar{x}}{h_e} \quad (3.18)$$

La coordenada \bar{x} se llama la local o coordenada elemento. Las funciones ψ_i^e se muestran en la fig 3.3(a). Notar que ψ_1^e es igual a 1 en el nodo 1 y cero en el nodo 2, y ψ_2^e es igual a 1 en el nodo 2 y cero en el nodo 1. Estas propiedades de ψ_i^e se conocen como las propiedades de interpolación.

Las funciones interpolación global Φ_I se pueden definir en términos de las funciones interpolación del elemento correspondiente al nodo global I (ver

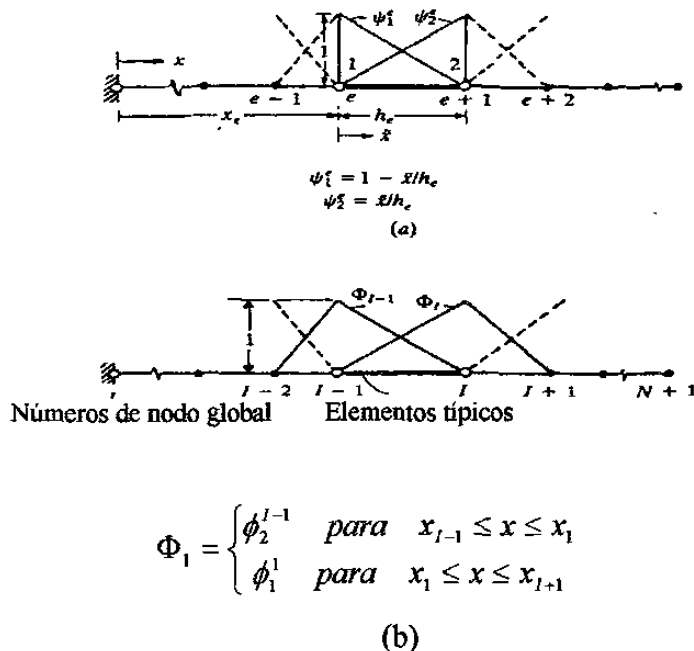


Figura 3.3. Funciones interpolación a) local, b) global para el elemento dos nodos lineal ($x_A = x_e, x_B = x_{e+1}$)

fig.3.3 b), ya que $U^e(x)$ de (3.16a) es una interpolante de $u(x)$ sobre los elementos Ω^e , ψ_i^e son llamadas También funciones interpolación. Las funciones interpolación derivadas usando la dependiente desconocida - no sus derivadas- en los nodos (esto es

funciones interpolación con continuidad c^0) se llaman la familia **Lagrange** de funciones interpolación. Cuando la dependiente desconocida y sus derivadas en los nodos se usan para derivar las funciones interpolación, las funciones interpolación resultantes se conocen como la familia **Hermite** de funciones interpolación.

Notar que ψ_i^e son derivadas sistemáticamente; arrancando con un grado de polinomios algebraicos supuesto para la dependiente desconocida y determinando los coeficientes del polinomio en términos de los grados de libertad primarios, expresamos la variable dependiente como una combinación lineal de funciones aproximación y las variables nodal primarias. La llave del procedimiento es seleccionar el número y localización de nodos en el elemento, tal que, la geometría del elemento este perfectamente definida. El número de nodos debe ser suficiente, para permitir el grado de interpolación supuesto de la solución, en términos de las variables primarias. Para una aproximación polinomial, lineal, dos nodos con una incógnita primaria por nodo, son suficientes para definir la geometría del elemento, siempre que los dos nodos sean los extremos del elemento. Ya que un polinomio cuadrático se define únicamente por tres parámetros, un total de tres puntos nodales deben ser identificados en el elemento.

Para definir la geometría del elemento, dos de los nodos deben ser los extremos del elemento. El tercero puede identificarse dentro del elemento.

Retornando a la aproximación lineal (3.13) que se rehace como (3.16a), notamos que la solución verdadera es aproximada sobre cada elemento mediante un polinomio lineal $U^e(x)$ (vea fig. 3.4a). El error en la aproximación, $E = u(x) - U^e(x)$, puede reducirse disminuyendo el tamaño del elemento h_e o incrementando el grado de la aproximación (ver fig. 3.4b).

Una aproximación cuadrática, es de la forma:

$$U^e(x) = a + bx + cx^2 \quad (3.19)$$

La cual requiere tres nodos para reescribir U^e en términos de los valores de $u(x)$ en los nodos. Dos de los nodos están identificados en los extremos de los elementos para definir la geometría, y el tercer nodo se toma del interior del elemento. En teoría el tercer elemento puede colocarse en cualquier punto interior. Sin embargo, el punto

medio del elemento, equidistante de los nodos extremos es la mejor selección. Otras selecciones (punto cuarto) se dictan mediante consideraciones especiales (para tener un cierto grado de singularidad en la derivada de la solución).

Por lo tanto, identificamos tres nodos en el elemento de longitud h_e (ver fig. 3.5a) y reescribimos $U^e(x)$ en términos de los tres valores nodales, (u_1^e, u_2^e, u_3^e) Tenemos:

$$\begin{aligned} u_1^e &= U^e(x_1^e) = a + bx_1^e + c(x_1^e)^2 \\ u_2^e &= U^e(x_2^e) = a + bx_2^e + c(x_2^e)^2 \\ u_3^e &= U^e(x_3^e) = a + bx_3^e + c(x_3^e)^2 \end{aligned} \quad (3.20a)$$

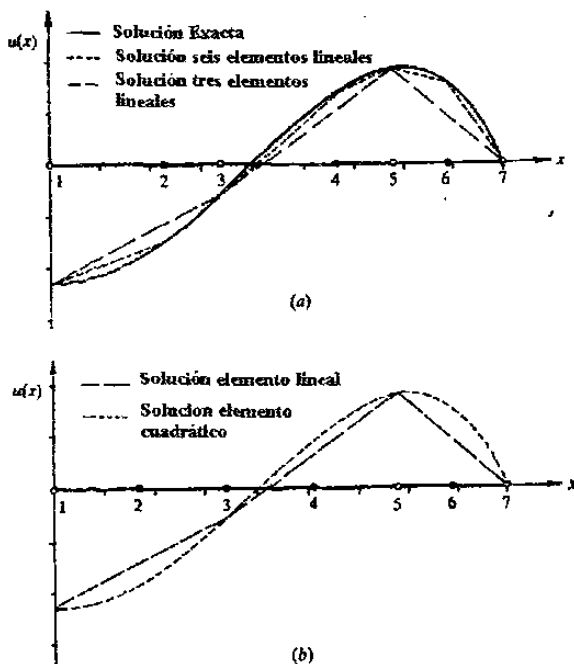


Figura 3.4

Refinamiento de soluciones de elemento finito

a) Refinamiento de la malla usando elementos lineales

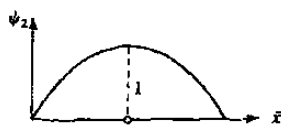
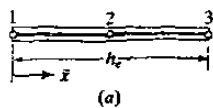
b) Solución cuadrática del elemento usando tres elementos

o en forma de matriz :

$$\begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1^e & (x_1^e)^2 \\ 1 & x_2^e & (x_2^e)^2 \\ 1 & x_3^e & (x_3^e)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} \quad (3.20b)$$

donde x_i^e es la coordenada global del i -ésimo nodo del elemento Ω^e . Invirtiendo las ecuaciones de arriba, obtenemos

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{D^e} \sum_{i=1}^3 \alpha_i^e u_i^e, & \alpha_i^e &= x_j^e (x_k^e)^2 - x_k^e (x_j^e)^2 \\ b &= \frac{1}{D^e} \sum_{i=1}^3 \beta_i^e u_i^e, & \beta_i^e &= (x_j^e)^2 - (x_k^e)^2 \\ c &= \frac{1}{D^e} \sum_{i=1}^3 \gamma_i^e u_i^e, & \gamma_i^e &= -(x_j^e - x_k^e), \quad D^e = \sum_{i=1}^3 \alpha_i^e \end{aligned} \quad (3.21)$$



(b)

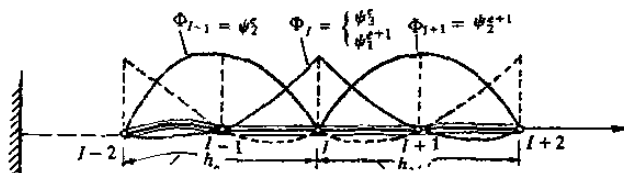


Figura 3.5

Elemento cuadrático **Lagrange** de una dimensión y sus funciones interpolación a) geometría del elemento, b) funciones interpolación, c) funciones interpolación global correspondientes a las funciones interpolación cuadráticas. I representa al número global, e al número de elemento e i al número de nodo del elemento.

y (3.19) toma la forma :

$$U^e(x) = \psi_1^e(x)u_1^e + \psi_2^e(x)u_2^e + \psi_3^e(x)u_3^e = \sum_{j=1}^3 \psi_j^e(x)u_j^e \quad (3.22)$$

donde ψ_j^e son las funciones interpolación cuadrática de **Lagrange**,

$$\psi_i^e(x) = \frac{1}{D^e} (\alpha_i^e + \beta_i^e + \gamma_i^e x^2) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.23)$$

Aquí D^e representa al determinante de la matriz en 3.20b), y α_i^e, β_i^e y γ_i^e están definidas por 3.21). Los subíndices usados (3.21) permutan en un orden natural.

$$\begin{array}{ll} \text{si } i = 1 & \text{el } j = 2 \text{ y } k = 3 \\ \text{si } i = 2 & \text{el } j = 3 \text{ y } k = 1 \\ \text{si } i & \text{E}^{\text{th}} \text{ elemento } 1 \text{ y } k = 2 \end{array} \quad (\text{e-1})^{\text{th}} \text{ elemento} \quad (3.24)$$

Por ejemplo, α_2^e, β_3^e y γ_1^e , están dados por

$$\alpha_2^e = x_3^e (x_1^e)^2 - x_1^e (x_2^e)^2, \quad \beta_3^e = (x_1^e)^2 - (x_2^e)^2, \quad \gamma_1^e = x_3^e - x_2^e$$

Las funciones interpolación cuadráticas pueden expresarse en términos de una coordenada local \bar{x} , con origen en el nodo 1, el extremo izquierdo del elemento. La coordenada global x está relacionada con la coordenada local \bar{x} mediante la relación

$$x = x_1^e + \bar{x} \quad (3.25)$$

donde $x_1^e = x_A$ es la coordenada global del primer nodo del elemento Ω^e . Para un elemento cuadrático, con el nodo interior, nodo 2, localizado en $\bar{x} = \alpha h_e$, tenemos:

$$\begin{aligned}\psi_1^e(\bar{x}) &= \left(1 + \frac{\bar{x}}{h}\right) \left(1 - \frac{1}{\alpha} \frac{\bar{x}}{h}\right) \\ \psi_2^e(\bar{x}) &= \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \frac{\bar{x}}{h} \left(1 - \frac{\bar{x}}{h}\right) \\ \psi_3^e(\bar{x}) &= \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \frac{\bar{x}}{h} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \frac{\bar{x}}{h}\right)\end{aligned}\quad (3.26)$$

donde $0 < \alpha < 1$ y $x_2^e = x_1^e + \alpha h_e$. Para $\alpha = \frac{1}{2}$, cuando el nodo 2 se coloca en el punto medio del elemento, (3.26) llega a ser:

$$\begin{aligned}\psi_1^e(\bar{x}) &= \left(1 - \frac{\bar{x}}{h}\right) \left(1 - \frac{2\bar{x}}{h}\right) \\ \psi_2^e(\bar{x}) &= 4 \frac{\bar{x}}{h} \left(1 - \frac{\bar{x}}{h}\right) \\ \psi_3^e(\bar{x}) &= -\frac{\bar{x}}{h} \left(1 - \frac{2\bar{x}}{h}\right)\end{aligned}\quad (3.27)$$

La gráfica de las funciones interpolación cuadrática se da en la fig. 3.5(b). La función ψ_i^e es igual a 1 el nodo i y cero en los otros dos nodos, pero varía cuadráticamente entre los nodos.

Toda la familia de funciones interpolación de **Lagrange** satisfacen las siguientes propiedades, conocidas como las propiedades interpolación.

$$\begin{aligned}(1) \quad \psi_i^e(x_j^e) &= \delta_{ij} \equiv \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \\ (2) \quad \sum_{j=1}^n \psi_j^e(x) &= 1, \text{ de aquí } \sum_{j=1}^n \frac{d\psi_j^e}{dx} = 0\end{aligned}\quad (3.28)$$

donde $n-1$ es el grado de polinomios interpolación y x_j^e es la coordenada global del nodo j en el elemento Ω^e . Se puede verificar que las funciones interpolación lineales en (3.16) y las funciones interpolación cuadráticas en (3.26) y (3.27) satisfacen las dos propiedades en (3.28). La primera es un resultado directo del requisito $U^e(x_j^e) = u_j^e$, y la segunda viene de la inclusión de un termino constante en el polinomio. Por ejemplo, si la aproximación U^e es para representar un estado de solución uniforme, $U^e = U_0^e = \text{constante}$, entonces todas las $u_i^e = U_0^e$, y tenemos:

$$U_0^e = \sum_{j=1}^n U_0^e \psi_j^e(x)$$

ó

$$1 = \sum_{j=1}^n \psi_j^e(x)$$

Las propiedades de interpolación (3.28) pueden usarse para construir las funciones de interpolación de **Lagrange** de cualquier grado. Por ejemplo, las funciones interpolación cuadráticas (3.27) pueden derivarse usando la propiedad (1) de (3.28). De aquí $\psi_1^e(\bar{x})$ debe desaparecer en los nodos 2 y 3 esto es en $\bar{x} = \frac{1}{2}h_e$ y $x = h_e$, esta es de la forma:

$$\psi_1^e(\bar{x}) = C \left(\bar{x} - \frac{1}{2}h_e \right) (\bar{x} - h_e)$$

la constante C se determina de modo que ψ_1^e es igual a 1 en $\bar{x} = 0$:

$$1 = C \left(0 - \frac{1}{2}h_e \right) (0 - h_e) \quad \text{ó} \quad C = \frac{2}{h_e^2}$$

Esto da:

$$\psi_1^e(\bar{x}) = \frac{2}{h_e^2} \left(\bar{x} - \frac{1}{2}h_e \right) (\bar{x} - h_e) = \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right) \left(1 - \frac{2\bar{x}}{h_e} \right)$$

Que es la misma como en (3.27). Las otras dos funciones interpolación pueden derivarse de manera similar.

Aunque aquí se presenta una discusión detallada sobre como construir las funciones interpolación de **Lagrange** para elementos en una dimensión, se encuentran disponibles en bibliografías de análisis numérico, y su derivación es independiente de la física del problema a resolverse. Su derivación depende solamente de la geometría del elemento y del número y localización de los nodos. El número de nodos debe ser igual al número de nodos en el polinomio. Por lo tanto, las funciones interpolación derivadas arriba se usan no solamente en la aproximación del elemento finito del problema a la mano, sino también en problemas que admiten la interpolación **Lagrange** de las variables, esto es, todos los problemas para los que las variables primarias son las incógnitas dependientes de las ecuaciones que rigen:

PASO 3. MODELO DEL ELEMENTO FINITO. La forma débil (3.8) ó (3.10) es equivalente a la ecuación diferencial (3.1) sobre el elemento Ω^e y también contiene las condiciones de frontera natural (3.7). Más aún las aproximaciones del elemento finito (3.16a) ó (3.22) satisfacen las condiciones de frontera esencial (3.14) del elemento. La sustitución de (3.16a) ó (3.22) en (3.8) darán las ecuaciones algebraicas necesarias entre los valores nodales u_i^e y Q_i^e del elemento Ω^e . Para formular el modelo del elemento finito basado en la forma débil (3.8) no se necesita decidir el grado de aproximación de U^e . El modelo puede desarrollarse para un grado de interpolación arbitrario.

$$u \approx U^e = \sum_{j=1}^n U_j^e \psi_j^e(x) \quad (3.29)$$

donde ψ_j^e son las funciones de interpolación de **Lagrange** de grado $n-1$. Cuando $n > 2$, la forma débil en (3.8) debe ser modificada para que incluya las variables secundarias diferentes a cero, si en el interior de cualquier nodo :

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left(a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} + cwu \right) dx - \int_{x_A}^{x_B} wq dx - \sum_{i=1}^n w(x_i^e) Q_i^e \quad (3.30)$$

donde x_i^e es la coordenada global del i -ésimo nodo del elemento Ω^e . Si los nodos 1 y n representan los extremos del elemento entonces Q_1^e y Q_n^e representan las fuentes de punto desconocidos. Y todas las demás Q_i^e son siempre conocidas (es decir fuentes de punto aplicado).

Siguiendo el procedimiento Rayleigh-Ritz desarrollado en la sección 2.4 sustituimos (3.29) para u y $\psi_1^e, \psi_2^e, \dots, \psi_n^e$ para w forma débil (3.30) para obtener n ecuaciones algebraicas:

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[a \frac{d\psi_1^e}{dx} \left(\sum_{j=1}^n u_j^e \frac{d\psi_j^e}{dx} \right) + c\psi_1^e \left(\sum_{j=1}^n u_j^e \psi_j^e(x) \right) - \psi_1^e q \right] dx - \sum_{j=1}^n \psi_1^e$$

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[a \frac{d\psi_2^e}{dx} \left(\sum_{j=1}^n u_j^e \frac{d\psi_j^e}{dx} \right) + c\psi_2^e \left(\sum_{j=1}^n u_j^e \psi_j^e(x) \right) - \psi_2^e q \right] dx - \sum_{j=1}^n \psi_2^e \quad (3.31a)$$

$$\dots$$

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[a \frac{d\psi_i^e}{dx} \left(\sum_{j=1}^n u_j^e \frac{d\psi_j^e}{dx} \right) + c\psi_i^e \left(\sum_{j=1}^n u_j^e \psi_j^e(x) \right) - \psi_i^e q \right] dx - \sum_{j=1}^n \psi_i^e$$

(i -ésima ecuación)

$$\dots$$

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[a \frac{d\psi_n^e}{dx} \left(\sum_{j=1}^n u_j^e \frac{d\psi_j^e}{dx} \right) + c\psi_n^e \left(\sum_{j=1}^n u_j^e \psi_j^e(x) \right) - \psi_n^e q \right] dx - \sum_{j=1}^n \psi_n^e$$

Notar que le número de ecuaciones algebraicas es de acuerdo a las variables primarias del elemento. La i -ésima ecuación algebraica puede escribirse como:

$$0 = \sum_{j=1}^n K_{ij}^e u_j^e - f_i^e - Q_i^e \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.31b)$$

Donde:

$$K_{ij}^e = \int_{x_A}^{x_B} \left(\frac{d\psi_i^e}{dx} \frac{d\psi_j^e}{dx} + c \psi_i^e \psi_j^e \right) dx = \mathbf{B}(\psi_i^e, \psi_j^e), \quad f_i^e = \int_{x_A}^{x_B} q \psi_i^e dx = I(\psi_i^e) \quad (3.31c)$$

Notar que la propiedad (1) de interpolación de (3.28) se usa para escribir:

$$\sum_{j=1}^n \psi_j^e(x_i^e) Q_j^e = Q_i^e \quad (3.32)$$

Las ecuaciones (3.31a) pueden expresarse en términos de los coeficientes k_{ij}^e, f_i^e y Q_i^e como:

$$\begin{aligned} k_{11}^e u_1^e + k_{12}^e u_2^e + \dots + k_{1n}^e u_n^e &= f_1^e + Q_1^e \\ k_{21}^e u_1^e + k_{22}^e u_2^e + \dots + k_{2n}^e u_n^e &= f_2^e + Q_2^e \\ &\vdots \\ k_{n1}^e u_1^e + k_{n2}^e u_2^e + \dots + k_{nn}^e u_n^e &= f_n^e + Q_n^e \end{aligned} \quad (3.33a)$$

Las ecuaciones algebraicas (3.33a) pueden escribirse en forma matricial como:

$$[K^e] \{u^e\} = \{f^e\} + \{Q^e\} \quad (3.33b)$$

La matriz $[k^e]$ se llama la matriz coeficiente, o matriz de rigidez en las aplicaciones de la mecánica estructural. El vector columna $\{f^e\}$ es el vector fuente o vector fuerza, en problemas de mecánica estructural. Observe que (3.33) contiene $2n$ incógnitas: $(u_1^e, u_2^e, \dots, u_n^e)$ y $(Q_1^e, Q_2^e, \dots, Q_n^e)$ llamada grados de libertad nodal primario y secundario del elemento. De aquí no se pueden resolver sin tener n condiciones adicionales. Algunas de ellas se proveen por las condiciones de frontera y el resto por balance de las variables secundarias Q_i^e en nodos comunes a diferentes elementos. Este balance puede implementarse colocando los elementos al mismo tiempo. (esto es, ensamblando las ecuaciones elemento). Con el ensamble de ecuaciones y la imposición de las condiciones de frontera obtendremos el mismo número de ecuaciones algebraicas que el número de grados de libertad desconocidos primario y secundario. La matriz coeficiente $[k^e]$, que es simétrica, y el vector fuente $\{f^e\}$ pueden evaluarse para un elemento dado y datos $(a, c, y q)$ para los valores de las constantes del elemento discreto $a, c, y q$ (digamos a_e, c_e y q_e) los coeficientes k_{ij}^e y f_i^e pueden evaluarse fácilmente para un elemento típico

ELEMENTO LINEAL. Para una malla de elementos lineales Ω^e está localizado entre los nodos globales $x_A = x_e$ y $x_B = x_{e+1}$ (ver fig. 3.2). De aquí:

$$K_{ij}^e = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left(a_e \frac{d\psi_i^e}{dx} \frac{d\psi_j^e}{dx} + c_e \psi_i^e \psi_j^e \right) dx, \quad f_i^e = \int_{x_e}^{x_{e+1}} q_e \psi_i^e dx$$

ó en el sistema de coordenadas local \bar{x}

$$K_{ij}^e = \int_0^h \left(a_e \frac{d\psi_i^e}{d\bar{x}} \frac{d\psi_j^e}{d\bar{x}} + c_e \psi_i^e \psi_j^e \right) d\bar{x}, \quad f_i^e = \int_0^h q_e \psi_i^e d\bar{x}$$

donde: $x = x_{e-1}^1 + \bar{x}$, y

$$dx = d\bar{x}, \quad \frac{d\psi_i^e}{dx} = \frac{d\psi_i^e}{d\bar{x}}$$

Las ψ_i^e se pueden expresar en términos de \bar{x} [ver(3.18)] como:

$$\psi_1^e(\bar{x}) = 1 - \frac{\bar{x}}{h_e}, \quad \psi_2^e(\bar{x}) = \frac{\bar{x}}{h_e}$$

Podemos calcular K_y^e y f_i^e evaluando las integrales. Tenemos:

$$\begin{aligned} K_{11}^e &= \int_0^{h_e} \left[a_e \left(-\frac{1}{h_e} \right) \left(-\frac{1}{h_e} \right) + c_e \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right) \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right) \right] d\bar{x} \\ &= \frac{a_e}{h_e} + \frac{1}{3} c_e h_e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{12}^e &= \int_0^{h_e} \left[a_e \left(-\frac{1}{h_e} \right) \frac{1}{h_e} + c_e \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right) \frac{\bar{x}}{h_e} \right] d\bar{x} \\ &= -\frac{a_e}{h_e} + \frac{1}{6} c_e h_e = k_{21}^e \quad (\text{por simetría}) \end{aligned}$$

$$K_{22}^e = \int_0^{h_e} \left[a_e \frac{1}{h_e} \frac{1}{h_e} + c_e \frac{\bar{x}}{h_e} \frac{\bar{x}}{h_e} \right] d\bar{x} = \frac{a_e}{h_e} + \frac{1}{3} c_e h_e$$

Similarmente :

$$f_1^e = \int_0^{h_e} q_e \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right) d\bar{x} = \frac{1}{2} q_e h_e, \quad f_2^e = \int_0^{h_e} q_e \left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right) d\bar{x} = \frac{1}{2} q_e h_e$$

Por lo tanto, para la constante q_e , la fuente total $q_e h_e$ es distribuida igualmente en los dos nodos. la matriz coeficiente y el vector columna son:

$$[K^e] = \frac{a_e}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{c_e h_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.34a)$$

$$\{f^e\} = \frac{q_e h_e}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.34b)$$

Si $a = a_e x$ y $c = c_e$, la matriz coeficiente $[k^e]$ puede evaluarse como :

$$[K^e] = \frac{a_e}{h_e} \left(\frac{x_e + x_{e+1}}{2} \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{c_e h_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

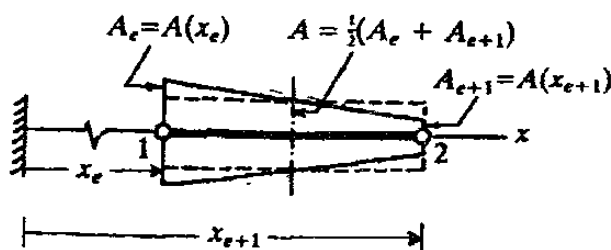


Figura 3.6. Aproximación de un elemento con sección transversal variable linealmente mediante un elemento con sección transversal constante.

Cuando a es una función lineal de x , esto equivale a reemplazar a en la matriz coeficiente con su valor promedio [comparar (3.34) con (3.35)]:

$$a_{\text{avg}} = \frac{1}{2}(x_e + x_{e+1})a_e \quad (3.36)$$

Por ejemplo, en el estudio de barras con sección transversal variable linealmente

$$a = EA(x) = E \left(A_e + \frac{A_{e+1} - A_e}{h_e} \bar{x} \right)$$

Estas cantidades reemplazan la sección transversal variable con una sección transversal constante dentro de cada elemento, el área de la sección transversal de la sección constante, siendo el área promedio de la sección transversal del elemento que

varía linealmente (ver fig. 3.6). Aquí A_e representa al área de la sección transversal en x_e y A_{e+1} es tal que $x = x_{e+1}$.

Cuando a, c y q son polinomios algebraicos en x , la evaluación K_y^e y f_j^e es sencilla. Cuando son funciones de x complicadas se buscará la evaluación numérica de las integrales en $[K^e]$ y $\{f^e\}$.

Cuando a y q son constantes del elemento discreto y $c=0$, las ecuaciones del elemento finito correspondiente al elemento lineal son:

$$\frac{a_e}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} = \frac{q_e h_e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^e \\ Q_2^e \end{Bmatrix} \quad (3.37a)$$

$$\frac{a_e}{h_e} u_1^e - \frac{a_e}{h_e} u_2^e = \frac{1}{2} q_e h_e + Q_1^e$$

$$-\frac{a_e}{h_e} u_1^e + \frac{a_e}{h_e} u_2^e = \frac{1}{2} q_e h_e + Q_2^e \quad (3.37b)$$

ELEMENTO CUADRÁTICO. para una malla de elemento cuadrático, el elemento Ω^e está localizado entre los nodos globales $x_A = x_{2e-1}$ y $x_B = x_{2e+1}$. De aquí.

$$K_{ij}^e = \int_{x_{2e-1}}^{x_{2e+1}} \left(a_e \frac{d\psi_i^e}{dx} \frac{d\psi_j^e}{dx} + c_e \psi_i^e \psi_j^e \right) dx = \int_0^h \left(a_e \frac{d\psi_i^e}{dx} \frac{d\psi_j^e}{dx} + c_e \psi_i^e \psi_j^e \right) dx \quad (3.38)$$

$$f_i^e = \int_{x_{2e-1}}^{x_{2e+1}} \psi_i^e q_e dx = \int_0^h \psi_i^e q_e d\bar{x}$$

Donde las funciones interpolación cuadrática de **Lagrange** $\psi_i^e(\bar{x}) (i=1,2,3)$ están dadas en (3.27). Evaluando las integrales en (3.38), obtenemos:

$$\begin{aligned}
K_{11}^e &= \int_0^{h_e} \left\{ a_e \left(-\frac{3}{h_e} + \frac{4\bar{x}}{h_e^2} \right) \left(-\frac{3}{h_e} + \frac{4\bar{x}}{h_e^2} \right) + c_e \left[1 - \frac{3\bar{x}}{h_e} + 2 \left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right)^2 \right] \left[1 - \frac{3\bar{x}}{h_e} + 2 \left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right)^2 \right] \right\} d\bar{x} \\
&= \frac{7}{3} \frac{a_e}{h_e} + 12 \frac{2}{15} c_e h_e \\
K_{12}^e &= K_{21}^e = \int_0^{h_e} \left\{ a_e \left(-\frac{3}{h_e} + \frac{4\bar{x}}{h_e^2} \right) \left(\frac{4}{h_e} - \frac{8\bar{x}}{h_e} \right) + c_e \left[\frac{1-3\bar{x}}{h_e} + 2 \left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right)^2 \right] \left[4 \frac{\bar{x}}{h_e} \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right) \right] \right\} d\bar{x} \\
&= \frac{8}{3} \frac{a_e}{h_e} + \frac{2}{30} c_e h_e
\end{aligned}$$

así sucesivamente. Similarmente:

$$\begin{aligned}
f_1^e &= \int_0^{h_e} q_e \left[1 - \frac{3\bar{x}}{h_e} + 2 \left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right)^2 \right] d\bar{x} = \frac{1}{6} q_e h_e = f_3^e \quad (\text{por simetría}) \\
f_1^e &= \int_0^{h_e} q_e \left[4 \frac{\bar{x}}{h_e} + \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right) \right] d\bar{x} = \frac{4}{6} q_e h_e
\end{aligned}$$

Notar que, para elementos cuadráticos, la fuente total $q_e h_e$, no está distribuida igualmente entre los nodos. La distribución no es equivalente a la de dos elementos lineales de longitud $\frac{1}{2} h_e$. Por lo tanto, el cálculo de f_i^e estaría basado en las funciones interpolación de ese elemento. La suma de f_i^e para cualquier elemento sería igual a la integral de $q(x)$ sobre el elemento:

$$\sum_{i=1}^n f_i^e = \int_{x_A}^{x_B} q(x) dx \quad (3.39)$$

Los valores de a, c , y q , las matrices del elemento de un elemento cuadrático son:

$$[K^e] = \frac{a_e}{3h_e} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & 8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} + \frac{c_e h_e}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.40a)$$

$$\{f^e\} = \frac{q_e h_e}{6} \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.40b)$$

CONECTIVIDAD DE ELEMENTOS

En la obtención de las ecuaciones del elemento, aislamos un elemento típico (el e -ésimo) de la malla y formulamos el problema variacional (o forma débil) y desarrollamos su modelo de elemento finito. Para resolver el problema total, debemos poner los elementos de vuelta en sus posiciones originales. Haciendo esto, antes de la discretización, imponemos la continuidad de las variables primarias y el balance de las variables secundarias en los nodos de conexión entre los elementos. La continuidad de las variables primarias se refiere aquí a la naturaleza de la solución evaluada simple; el balance de las variables secundarias se refiere al equilibrio de fuentes punto en la unión de varios elementos. Por lo tanto el ensamble de elementos se lleva a cabo imponiendo las dos condiciones siguientes:

1. Continuidad de las variables primarias en nodos conectando

$$u_n^e = u_1^{e+1} \quad (3.41a)$$

esto es, el último valor nodal del elemento Ω^e es el mismo que el primer valor nodal del elemento adyacente Ω^{e+1}

2. Balance de las variables secundarias en los nodos conectados

$$Q_n^e + Q_1^{e+1} = \begin{cases} 0 & \text{si no se aplica fuente de punto externa} \\ Q_0 & \text{si una fuente de punto externa de magnitud } Q_0 \text{ se aplica} \end{cases} \quad (3.41b)$$

En el escrito de (3.41) se supuso que los elementos están conectados en secuencia. La continuidad de las variables primarias $u_2^e = u_1^{e+1}$, y el balance de las variables secundarias $Q_2^e + Q_1^{e+1}$ para una malla de elementos lineales se ilustra en la Fig.3.7. El

balance de las variables secundarias puede interpretarse como la continuidad de $a \frac{du}{dx}$ (no $a \frac{dU^e}{dx}$) en el punto común a los elementos Ω^e y Ω^{e+1} (cuando no hay cambio en $a \frac{du}{dx}$ se impone externamente)

$$\left(a \frac{du}{dx} \right)^e = \left(a \frac{du}{dx} \right)^{e+1}$$

ó

$$\begin{aligned} \left(a \frac{du}{dx} \right)^e + \left(-a \frac{du}{dx} \right)^{e+1} &= 0 \\ Q_2^e + Q_1^{e+1} &= 0 \end{aligned} \tag{3.42}$$

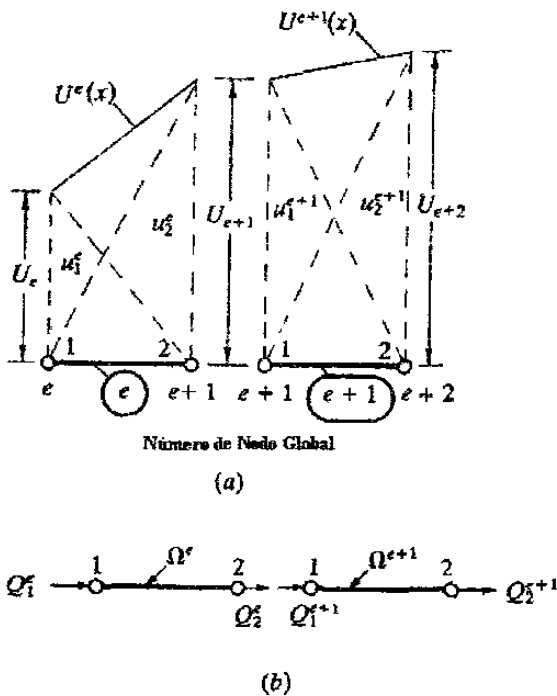


Figura 3.7.
 Ensamble de dos elementos lineales de Lagrange :
 a) continuidad de la variable primaria.

b) balance de las variables secundarias.

La continuidad de las variables primarias en el inter-elemento es impuesta por el renombre de las variables u_n^e y u_1^{e+1} en $x = x_N$ como uno y el mismo, particularmente el valor de u en el nodo global N :

$$u_n^e = u_1^{e+1} \equiv U_N \quad (3.43)$$

donde $N = (n-1)e + 1$ es el número de nodo global correspondiente al nodo n del elemento Ω^e y el nodo 1 del elemento Ω^{e+1} . Por ejemplo, una malla de E elementos finitos lineales ($n = 2$), tenemos:

$$\begin{aligned} u_1^1 &= U_1 \\ u_2^1 &= u_1^2 = U_2 \\ u_2^2 &= u_1^3 = U_3 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ u_2^{E-1} &= u_1^E = U_E \\ u_2^E &= U_{E+1} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Para ejecutar el balance de las variables secundarias Q_n^e (3.41b) es claro que podemos hacer $Q_n^e + Q_1^{e+1}$ igual a cero o un valor especificado solamente si tenemos tales expresiones en nuestras ecuaciones. Para obtener tales expresiones, debemos agregar la n -ésima ecuación del elemento Ω^e a la primera ecuación del elemento Ω^{e+1} esto es, agregamos:

$$\sum_{j=1}^n K_{nj}^e u_j^e = f_n^e + Q_n^e$$

y

$$\sum_{j=1}^n K_{j1}^{e+1} u_j^{e+1} = f_1^{e+1} + Q_1^{e+1}$$

para dar:

$$\sum_{j=1}^n (K_{nj}^e u_j^e + K_{1j}^{e+1} u_j^{e+1}) = f_n^e + f_1^{e+1} + (Q_n^e + Q_1^{e+1}) \quad (3.45)$$

$$= f_n^e + f_1^{e+1} + Q_0$$

Este proceso reduce el número de ecuaciones desde $2E$ hasta $E+1$. La primera ecuación del primer elemento y la última ecuación del último elemento permanecerán invariables, excepto para el renombre de las variables primarias. El lado izquierdo de (3.45) puede escribirse en términos de los valores nodales globales como:

$$\begin{aligned} & (K_{n1}^e u_1^e + K_{n2}^e u_2^e + \dots + K_{nm}^e u_m^e) + (K_{11}^{e+1} u_1^{e+1} + K_{12}^{e+1} u_2^{e+1} + \dots + K_{1n}^{e+1} u_n^{e+1}) \\ &= (K_{n1}^e U_N + K_{n2}^e U_{N+1} + \dots + K_{nm}^e U_{N+n-1}) \\ &+ (K_{11}^{e+1} U_{N+n-1} + K_{12}^{e+1} U_{N+n} + \dots + K_{1n}^{e+1} U_{N+2n-2}) \\ &= K_{n1}^e U_N + K_{n2}^e U_{N+1} + \dots + K_{n(n-1)}^e U_{N+n-2} \\ &+ (K_{nm}^e + K_{11}^{e+1}) U_{N+n-1} + K_{12}^{e+1} U_{N+n} + \dots + K_{1n}^{e+1} U_{N+2n-2} \end{aligned} \quad (3.46)$$

donde $N = (n-1)e + 1$. Para una malla de E elementos lineales ($n = 2$), tenemos:

$$K_{11}^1 U_1 + K_{12}^1 U_2 = f_1^1 + Q_1^1 \quad (\text{invariable})$$

$$K_{21}^1 U_1 + (K_{22}^1 + K_{11}^2) U_2 + K_{12}^2 U_3 = f_2^1 + f_1^2 + Q_2^1 + Q_1^2$$

$$K_{21}^2 U_2 + (K_{22}^2 + K_{11}^3) U_3 + K_{12}^3 U_4 = f_2^2 + f_1^3 + Q_2^2 + Q_1^3$$

(3.47a)

$$K_{21}^{E-1}U_{E-1} + (K_{22}^{E-1} + K_{11}^E)U_E + K_{12}^E U_{E+1} = f_2^{E-1} + f_1^E + Q_2^{E-1} + Q_1^E$$

$$K_{21}^E U_E + K_{22}^E U_{E+1} = f_2^E + Q_2^E$$

(invariable)

Estas son llamadas, las ecuaciones ensambladas. Contienen la suma de coeficientes y términos fuente, en nodos comunes a dos elementos. Notar que la numeración de las ecuaciones globales corresponden a la numeración de los grados de libertad primarios global, U_j . Esta correspondencia conduce a la simetría de las matrices del elemento a la matriz global. Las ecuaciones (3.47a) pueden expresarse en forma matricial como:

$$\left[\begin{array}{ccccccc} K_{11}^1 & K_{12}^1 & & & & & \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & & & & 0 \\ & K_{21}^1 & K_{22}^2 + K_{11}^3 & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & & K_{22}^{E-1} + K_{11}^E & K_{12}^E & & \\ & & & K_{21}^E & K_{22}^E & & \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_E \\ U_{E+1} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 + f_1^3 \\ \vdots \\ f_2^{E-1} + f_1^E \\ f_2^E \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} Q_1^1 \\ Q_2^1 + Q_1^2 \\ Q_2^2 + Q_1^3 \\ \vdots \\ Q_2^{E-1} + Q_1^E \\ Q_2^E \end{array} \right\} \quad (3.47b)$$

Recordar, que toda la discusión anterior de ensamble, está basada en la suposición de que los elementos están conectados en serie. En general, varios elementos pueden ser conectados en un nodo y los elementos no tienen que ser necesariamente numerados. En este caso, la idea de arriba se mantiene, con el cambio de que los coeficientes de todos los elementos conectados en un nodo se sumarán.

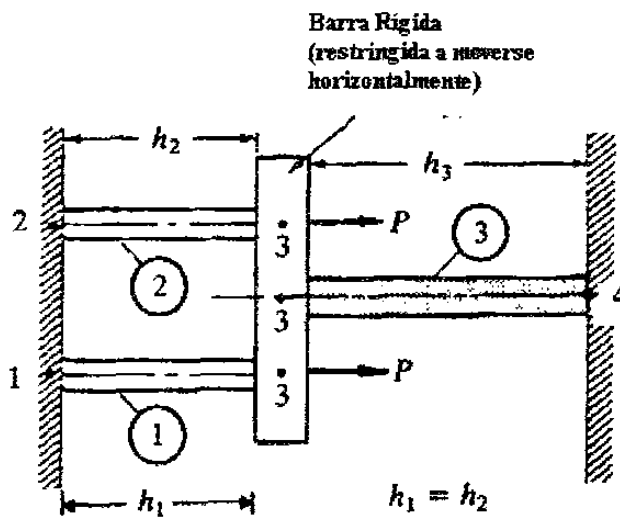


Figura 3.8

La geometría y malla del elemento finito de una estructura barra.

Por ejemplo, considere la estructura que consiste en tres elementos barra mostrados en la fig. 3.8. Considere que la barra de conexión es rígida (esto es, no deformable) y obligada a permanecer horizontal todo el tiempo. Entonces las condiciones de continuidad y balance

$$u_2^1 = u_1^3 = u_2^2 \equiv U_3, \quad Q_2^1 + Q_1^3 + Q_2^2 = 2P \quad (3.48)$$

Para conseguir estas condiciones, debemos sumar la segunda ecuación del elemento 1, la primera ecuación del elemento 3, y la segunda ecuación del elemento 2:

$$\begin{aligned} (K_{21}^1 u_1^1 + K_{22}^1 u_2^1) + (K_{11}^3 u_1^3 + K_{12}^3 u_2^3) + (K_{21}^2 u_1^2 + K_{22}^2 u_2^2) \\ = f_2^1 + f_1^3 + f_2^2 + Q_2^1 + Q_1^3 + Q_2^2 \end{aligned} \quad (3.49)$$

Anotamos la siguiente correspondencia de los valores nodales local y global (ver fig. 3.8)

$$u_1^1 = U_1, \quad u_1^2 = U_2, \quad u_2^1 = u_1^3 = u_2^2 = U^3, \quad u_2^3 = U_4$$

De aquí (3.49) llega a ser:

$$\begin{aligned} K_{21}^1 U_1 + K_{21}^2 U_1 + (K_{22}^1 + K_{11}^3 + K_{22}^2) U_3 + K_{12}^3 U_4 = f_2^1 + f_1^3 + f_2^2 + Q_2^1 + Q_1^3 + Q_2^2 \\ = f_2^1 + f_1^3 + f_2^2 + 2P \end{aligned}$$

Las otras ecuaciones permanecen invariables, excepto para el renombre de las variables primarias. Las ecuaciones ensambladas son:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & 0 & K_{12}^1 & 0 \\ 0 & K_{11}^2 & K_{12}^2 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{21}^2 & \hat{K} & K_{12}^3 \\ 0 & 0 & K_{21}^3 & K_{22}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_1^2 \\ f_2^1 + f_1^3 + f_2^2 \\ f_2^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1^1 \\ Q_1^2 \\ Q_2^1 + Q_1^3 + Q_2^2 \\ Q_2^3 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Donde: $\hat{K} = K_{22}^1 + K_{11}^3 + K_{22}^2$

Los coeficientes de la matriz ensamblada pueden obtenerse directamente. Notamos que el coeficiente global K_{IJ} , es una propiedad física del sistema, relacionando el nodo global I al nodo global J . Para deformación axial de barras, K_{IJ} representa la fuerza requerida en el nodo I para inducir un desplazamiento unitario en el nodo J , mientras los desplazamientos en los demás nodos son cero. Por lo tanto, K_{IJ} es igual a la suma de

todos los K_{ij}^e para los cuales i corresponde a I y j a J , e i y j son los nodos locales del elemento Ω^e . Por lo tanto, si tenemos una correspondencia entre los números de nodos del elemento y el número de nodos global entonces los coeficientes global ensamblados pueden escribirse en términos de los coeficientes del elemento. La correspondencia se puede expresar mediante una matriz $[B]$, llamada la matriz de conectividad, cuyo coeficiente b_{ij} tiene el siguiente significado:

b_{ij} es el número de nodo global correspondiente al j -ésimo nodo del elemento i .

Por ejemplo, para la estructura de la fig. 3.8, la matriz $[B]$ es de orden 3×2 (3 elementos y 2 nodos por elemento).

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Este arreglo puede usarse en una variedad de formas, no solo para ensamble, sino también en la implementación de la computadora en cálculos de elemento finito. La matriz $[B]$ se usa para ensamblar matrices coeficientes como sigue:

$$K_{11}^1 = K_{11}, \quad \text{Debido a que el nodo local 1 del elemento 1 corresponde al nodo global 1.}$$

$$K_{12}^1 = K_{13}, \quad \text{Debido a que los nodos locales 1 y 2 del elemento 1 corresponde a los nodos globales 1 y 3 respectivamente}$$

Y así sucesivamente. Cuando se conecta más de un elemento a un nodo global, los coeficientes del elemento son sumados. Por ejemplo, el nodo global 3 aparece en las tres hileras (elementos) de la matriz $[B]$, implicando que los tres elementos están conectados en el nodo 3. Más específicamente, esto indica que el nodo 2 del elemento 1, nodo 2 del elemento 2, y el nodo 1 del elemento 3 son los mismos que el nodo global 3. De aquí

$$K_{22}^1 + K_{22}^2 + K_{11}^3 = K_{33}$$

Para la malla de la figura 3.8 tenemos:

$$K_{23} = K_{12}^2,$$

Debido a que el nodo global 2 es el mismo que el nodo 1 y el nodo global 3 es el mismo que el nodo 2 del elemento 2.

$$K_{24} = 0,$$

Debido a que los nodos globales 2 y 4 no pertenecen al mismo elemento.

$$K_{33} = K_{22}^1 + K_{22}^2 + K_{11}^3$$

y así sucesivamente.

IMPOSICION DE CONDICIONES FRONTERA.

Hasta este punto, la naturaleza específica del problema no ha sido utilizada en el desarrollo del modelo del elemento finito o en el ensamble de elementos finitos. En otras palabras, las discusiones en las secciones anteriores, es válida para cualquier ecuación diferencial que sea un caso especial de la ecuación del modelo (3.1). Un problema particular difiere de otros, en la especificación de los datos y condiciones frontera. Aquí discutimos como imponer las condiciones frontera de un problema, sobre la serie ensamblada de ecuaciones algebraicas. Sobre esto último. Usamos el problema en la fig 3.8. Sus condiciones de frontera son evidentes en la estructura. Los grados de libertad primarios conocidos (desplazamientos) son:

$$u_1^1 = U_1 = 0, \quad u_1^2 = U_2 = 0, \quad u_2^3 = U_4 = 0, \quad (3.51a)$$

Los grados de libertad secundarios conocidos (fuerzas) son:

$$Q_2^1 = Q_2^2 = Q_1^3 = 2P \quad (3.51b)$$

Las fuerzas Q_2^1, Q_2^2 y Q_1^3 son desconocidas (fuerzas de reacción) y pueden determinarse en la postcomputación; es decir, después de que se determinen los grados de libertad primarios.

Imponiendo las condiciones frontera (3.51) sobre el sistema ensamblado de las ecuaciones (3.50), y para f_i^e :

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & 0 & K_{12}^1 & 0 \\ 0 & K_{11}^2 & K_{12}^2 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{21}^2 & K_{22}^1 + K_{22}^2 + K_{12}^3 & K_{12}^3 \\ 0 & 0 & K_{21}^3 & K_{22}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 = 0 \\ U_2 = 0 \\ U_3 \\ U_4 = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1^1 \\ Q_1^2 \\ 2P \\ Q_2^3 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

debido a que U_1, U_2 y U_4 son cero

Esto contiene cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas: U_3, Q_1^1, Q_1^2 y Q_2^3 .

SOLUCION DE ECUACIONES

Como un procedimiento estándar en el análisis del elemento finito, los grados de libertad primarios desconocidos, son determinados considerando primero, que las ecuaciones algebraicas corresponden a las variables primarias desconocidas. Por lo tanto, en el caso presente, consideramos la tercera ecuación en (3.52) para resolver U_3 .

$$K_{21}^1 U_1 + K_{21}^2 U_2 + (K_{22}^1 + K_{22}^2 + K_{12}^3) U_3 + K_{12}^3 U_4 = 2P$$

ó

$$(K_{22}^1 + K_{22}^2 + K_{12}^3) U_3 = 2P - (K_{21}^1 U_1 + K_{21}^2 U_2)$$

Las variables secundarias desconocidas, se determinan considerando las ecuaciones restantes de (3.52), esto es, aquellas que contienen las variables secundarias desconocidas:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & 0 & K_{12}^1 & 0 \\ 0 & K_{11}^2 & K_{12}^2 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{21}^2 & K_{22}^1 + K_{22}^2 + K_{22}^3 & K_{12}^3 \\ 0 & 0 & K_{21}^3 & K_{22}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 = 0 \\ U_2 = 0 \\ U_3 \\ U_4 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_1^2 \\ 2P \\ Q_2^3 \end{Bmatrix} \quad (3.52)$$

debido a que U_1, U_2 y U_4 son cero

Es posible, aunque no común con programa de computadora, mover todas las incógnitas al lado izquierdo en (3.52) y resolver para toda a la vez. Sin embargo este proceso requiere mas tiempo computacional en problemas prácticos.

En general, las ecuaciones del elemento finito ensambladas se pueden repartir convenientemente en la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] \\ [K^{21}] & [K^{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U^1\} \\ \{U^2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F^1\} \\ \{F^2\} \end{Bmatrix} \quad (3.55)$$

donde $\{U^1\}$ es la columna de variables primarias conocidas, $\{U^2\}$ es la columna de variables primarias desconocidas, $\{F^1\}$ es la columna de variables secundarias desconocidas, y $\{F^2\}$ es la columna de variables secundarias conocidas. Escribiendo (3.55) como dos ecuaciones matriz obtenemos:

$$[K^{11}]\{U^1\} + [K^{12}]\{U^2\} = \{F^1\} \quad (3.56a)$$

$$[K^{21}]\{U^1\} + [K^{22}]\{U^2\} = \{F^2\} \quad (3.56b)$$

De (3.56b), tenemos:

$$\boxed{\{U^2\} = [K^{22}]^{-1}(\{F^2\} - [K^{21}]\{U^1\})} \quad (3.56c)$$

Una vez que $\{U^2\}$ se conoce, $\{F^1\}$ puede calcularse de (3.56a).

POSTPROCESAMIENTO DE LA SOLUCION

La solución de las ecuaciones del elemento finito da los valores nodales de las incógnitas primarias (esto es, desplazamiento, velocidad o temperatura). El postprocesamiento de los resultados incluye uno o más de lo siguiente:

1. El calculo de cualquier variable secundaria (el gradiente de la solución).
2. Interpretación de los resultados para checar si tiene sentido la solución (una comprensión de los procesos físicos y la experiencia son las guías cuando no hay disponibles otras soluciones para comparación).
3. Tabular y/o graficar la presentación de resultados. Para determinar la solución u como una función continua de posición x , regresamos a la aproximación (3.29) sobre cada elemento:

$$u(x) \approx \begin{cases} U^1(x) = \sum_{j=1}^n u_j^1 \psi_j^1(x) \\ U^2(x) = \sum_{j=1}^n u_j^2 \psi_j^2(x) \\ U^N(x) = \sum_{j=1}^n u_j^N \psi_j^N(x) \end{cases}$$

donde N es el número de elemento en la malla. Dependiendo del valor x , se usa la ecuación de elemento correspondiente de (3.57). La derivada de la solución se obtiene por diferenciación de (3.57)

$$\frac{du}{dx} \approx \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n u_j^1 \frac{d\psi_j^1}{dx} \\ \sum_{j=1}^n u_j^2 \frac{d\psi_j^2}{dx} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n u_j^N \frac{d\psi_j^N}{dx} \end{array} \right. \quad (3.58)$$

Notar que la derivada $\frac{dU^e}{dx}$ de la solución del elemento finito lineal U^e es constante dentro de cada elemento, y es discontinua en los nodos debido a que la continuidad de la derivada de la solución del elemento finito en los nodos de conexión no es impuesta:

$$\frac{dU^e}{dx} \neq \frac{dU^{e-1}}{dx}$$

La derivada calculada para diferentes elementos que se encuentran en un nodo es siempre discontinua en todas las aproximaciones C^0 (esto es aproximaciones en que solo los valores función son interpolados), a menos que la solución aproximada, coincida con la solución real.

Las variables secundarias Q_j^e pueden calcularse de dos formas diferentes. En (3.54b), determinamos las variables secundarias desconocidas, Q_1^1, Q_1^2 y Q_2^3 de las ecuaciones ensambladas del problema en la fig. 3.8 ya que las ecuaciones ensambladas a menudo representan las relaciones equilibrio de un sistema, las Q_i^e de ellas serán representadas por $(Q_i^e)_{equil}$

Las Q_i^e pueden determinarse también usando las definiciones en (3.7), reemplazando u con U . Representaríamos Q_i^e calculado de ésta forma por $(Q_i^e)_{def}$. Ya que $(Q_i^e)_{def}$ se calculan usando la aproximada U^e , no son tan exactas como $(Q_i^e)_{equil}$. Sin embargo, en códigos de computadora del elemento finito, $(Q_i^e)_{def}$ se calculan en vez de $(Q_i^e)_{equil}$. Esto se debe principalmente a aspectos computacionales.

Recordar que, al llegar a resultado (3.54b), usamos parte de la matriz coeficiente ensamblada. En la solución numérica de ecuaciones algebraicas simultáneas en una computadora, la matriz coeficiente ensamblada original se modifica con frecuencia, y por lo tanto los coeficientes requeridos para la determinación de las variables secundarias no están disponibles, a menos que sean asegurados en un arreglo adicional.

Para el problema en la fig. 3.8. Tenemos:

$$\begin{aligned}
 (Q_1^1)_{def} &= -\left(EA \frac{dU}{dx}\right)\Big|_{x=0} = -EA \frac{U_3 - U_1}{h_1} = -\frac{EA}{h_1} U_3 = K_{12}^1 U_3 \\
 (Q_1^2)_{def} &= -\left(EA \frac{dU}{dx}\right)\Big|_{x=0} = K_{12}^3 U_3 \\
 (Q_2^3)_{def} &= \left(EA \frac{dU}{dx}\right)\Big|_{x=h_1+h_3} = EA \frac{U_4 - U_3}{h_3} \\
 &= -\frac{EA U_3}{h_3} = K_{21}^3 U_3
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

donde h_1 y h_2 son las longitudes de los elementos 1 y 3, respectivamente. Las Q_i calculados usando las definiciones (3.7) son los mismos que los derivados de las ecuaciones ensambladas en general para el problema en la fig. 3.8. Esta igualdad no es esperada en general. De hecho, cuando el vector fuente q no es cero, las variables secundarias calculadas de las definiciones (3.7) estarán en error comparadas con las calculadas de las ecuaciones ensambladas. El error decrece conforme el número de elementos del grado de interpolación se incrementa.

Esto completa los pasos básicos involucrados en el análisis del elemento finito de la ecuación modelo (3.1).

COMENTARIOS SOBRE LOS PASOS DESCRITOS PARA EL MODELO DE ECUACION

Comentario 1. Aunque el método Rayleigh-Ritz se usó para obtener las ecuaciones del elemento, cualquier otro método podría usarse. Tal como el residuo ponderado, (cuadrado mínimo o Galerkin).

Comentario 2. Los pasos 1-6 (ver tabla 3.1) son comunes para cualquier problema. La derivación de las funciones interpolación dependen solamente de la geometría del elemento, y el número y posición de nodos en el elemento. El número de nodos en el elemento y el grado de aproximación usado están relacionados.

Comentario 3. Las ecuaciones del elemento finito (3.31) son derivadas para la ecuación lineal del operador:

$$A(u) = q, \quad \text{donde } A = -\frac{d}{dx} \left(a \frac{d}{dx} \right) + c$$

Son válidas para cualquier problema físico que se describe por la ecuación $A(u) = q$ o sus casos especiales. Uno necesita solamente interpretar las cantidades apropiadamente. En la tabla 3.2 se enlistan ejemplos de problemas descritos por este operador. Por tanto, un programa de computadora escrito para el análisis del elemento finito de (3.1) puede usarse para analizar cualquiera de los problemas de esta tabla.

Notar también que los datos $a = a(x), c = c(x), q = q(x)$ pueden ser diferentes en cada elemento.

Comentario 4. La integración de las matrices elemento en (3.31c) puede llevarse a cabo en una computadora, usando integración numérica. Cuando esas integrales son complicadas algebraicamente, no tiene una otra selección, más que la integración numérica.

Comentario 5. Como se notó en (3.48) y (3.51b), las fuentes punto en los nodos, están incluidas en el modelo del elemento finito vía el balance de fuentes en los nodos. Por tanto, en la construcción de las mallas de elemento finito, uno incluiría nodos en los lugares de las fuentes punto. Si una fuente punto no ocurre en un nodo, es posible distribuirla a los nodos elemento. Haga que Q_0 represente una fuente punto en el punto $x_0, x_A \leq x_0 \leq x_B$. La fuente punto Q_0 puede ser representada como una función mediante

$$q(x) = Q_0 \delta(x - x_0)$$

donde la función delta Dirac $\delta(\cdot)$ está definida por :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = F(x_0)$$

La contribución de la función $q(x)$ a los nodos del elemento $\Omega^e = (x_A, x_B)$ se calcula de [ver(3.31c)]

$$f_i^e = \int_{x_A}^{x_B} q(x) \psi_i^e(x) dx = \int_{x_A}^{x_B} Q_0 \delta(x - x_0) \psi_i^e(x) dx = Q_0 \psi_i^e(x_0) \quad (3.60)$$

donde ψ_i^e son las funciones interpolación del elemento Ω^e . Por tanto, la fuente punto Q_0 es distribuida al nodo i de elemento mediante el valor $Q_0 \psi_i^e(x_0)$. La ecuación (3.60) cumple para cualquier elemento sin tomar en cuenta el grado de la interpolación, la naturaleza de la interpolación (polinomios **Lagrange** o **Hermite**), o la dimensión (1-D, 2-D ó 3-D) del elemento. Para funciones interpolación **Lagrange** en 1-D, (3.60) produce

$$f_1^e = Q_0 \frac{x_B - x_0}{h_e} = \alpha Q_0, \quad f_2^e = Q_0 \frac{x_B - x_0}{h_e} = \alpha Q_0$$

donde $\alpha = (x_B - x_0)/h_e$ es la razón de la distancia entre el nodo 2 y la fuente, a la longitud del elemento.

Comentario 6 Hay tres fuentes de error que pueden contribuir a la inexactitud de la solución de elemento finito de un problema:

1. Error en la aproximación del dominio, el cual se debe a la aproximación del dominio.
2. Errores computacionales, los cuales deben a la evaluación inexacta de los coeficientes K_y^e y f_i^e ó se introducen obligadamente a la aritmética finita en una computadora.
3. Error de aproximación, debido a la aproximación de la solución mediante polinomios de piezas discretas.

Una vez que la geometría del problema es representada exactamente, la aproximación lineal es capaz de representar la solución exacta en los nodos (*para* $a=EA=constante, c=0, f=0$). El primero y tercer tipo de errores son cero en el problema de la figura 3.8. El único error que puede introducirse en el resultado numérico final es posible debido a la evaluación por computadora de los coeficientes K_y^e y f_i^e y la solución de ecuaciones algebraicas.

Comentario 7. La aproximación usada en métodos matriciales de análisis estructural para resolver el problema en la fig 3.8, no es muy diferente el presentado aquí. La diferencia consiste en la derivación de las ecuaciones elemento (3.37a). En los métodos matriciales de análisis estructural, las ecuaciones elemento se obtienen directamente de las definiciones de esfuerzo y deformación y sus relaciones. Por ejemplo, considere el diagrama de cuerpo libre de un elemento barra (ver fig 3.2b). De un curso de cuerpos deformables tenemos :

$$\begin{aligned} \text{fuerza} &= \text{esfuerzo} \times \text{área de la sección transversal} \\ \text{esfuerzo} &= \text{módulo de Young's} \times \text{deformación} \\ \text{deformación} &= \text{elongación} / \text{longitud original} \end{aligned}$$

La deformación, es la deformación promedio (o de Ingeniería). Matemáticamente, la deformación se define como $\varepsilon = du/dx$, siendo u el desplazamiento, que incluye movimiento de cuerpo rígido tal como la elongación en una barra. De aquí, la fuerza en el extremo izquierdo del elemento barra es:

$$P_1^e = A^e \sigma_1^e = A^e E^e \varepsilon_1^e = A^e E^e \frac{u_1^e - u_2^e}{h_e} = \frac{a_e}{h_e} (u_1^e - u_2^e)$$

donde σ es el esfuerzo y E es el módulo de **Young's**. Similarmente la fuerza en el extremo derecho es:

$$P_2^e = \frac{a_e}{h_e} (u_2^e - u_1^e)$$

En forma de matriz, esas relaciones pueden expresarse como:

$$\frac{a_e}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1^e \\ P_2^e \end{Bmatrix} \quad (3.61)$$

La cual es la misma que (3.37a) con $P_i^e = Q_i^e + f_i^e$. Note que en la derivación de las ecuaciones de elemento hemos usado el conocimiento de la mecánica de materiales y la suposición de que la deformación es constante (o el desplazamiento es lineal) sobre

la longitud del elemento. Las ecuaciones del tipo (3.61) pueden también obtenerse para un elemento resorte, un elemento flujo en un tubo, un elemento resistencia eléctrica y así sucesivamente. Si se requiere una representación de mayor orden de la deformación (o desplazamiento) no podemos escribir directamente las relaciones fuerza-desplazamiento (3.61). Debemos usar el principio de desplazamiento virtual, equivalente a la forma débil de la ecuación que rige.

Comentario 8 : Otra interpretación de (3.37) puede darse en términos de la aproximación de diferencia finita. En cualquier punto, x está dada por:

$P(x) = EA \frac{du}{dx}$. Usando la aproximación diferencia, aproximamos $\frac{du}{dx}$ y escribimos:

$$-P_1^e \equiv P(x)\Big|_{x_e} = E^e A^e \left[u(x_{e-1}) - u(x_e) \right] / h_e \quad (3.62^a)$$

$$P_2^e \equiv P(x)\Big|_{x_{e+1}} = E^e A^e \left[u(x_{e+1}) - u(x_e) \right] / h_e \quad (3.62^b)$$

Las cuales son las mismas como en (3.61), con $u_1^e = u(x_e)$ y $u_2^e = u(x_{e+1})$. A menudo se usa la interpolación lineal para obtener el valor de u en un punto diferente a los nodos (o puntos malla)

Comentario 9. Para el modelo del problema considerado las matrices de elemento $[K^e]$ en (3.31b) son simétricas: $K_{ij}^e = K_{ji}^e$. Esto le facilita a uno calcular $K_{ij}^e (i = 1, 2, \dots, n)$ para $j \leq i$ solamente. En otras palabras, uno necesita calcular solamente los términos diagonal y los términos diagonal superior o inferior. Debido a la simetría de las matrices elemento, la matriz global ensamblada también será simétrica. Por tanto, necesita uno almacenar solamente el triángulo superior, incluyendo la diagonal de la matriz ensamblada en un programa de elemento finito. Otra característica propia del método del elemento finito es el esparcimiento de la matriz ensamblada. Ya que $K_{ij} = 0$ si los nodos globales no pertenecen al mismo elemento, en la matriz coeficiente global todos los coeficientes mas allá de una cierta distancia de la diagonal son cero (matriz bandeada). el máximo distancia entre el elemento diagonal, incluyendo el mas reciente de una hilera y el último coeficiente no cero en esa hilera se llama el ancho medio de banda y se puede calcular con la ecuación

$$\text{ancho de banda medio} = \max(|b_{11} - b_{nn}| + 1) \times NDF$$

donde E es el número de elementos en la malla, NDF es el número de grados de libertad por nodo, n es el número de nodos por elemento y b_{ij} son los coeficiente de la matriz conectividad. Una matriz es bandeada y simétrica, necesita uno almacenar solamente las entradas en la banda superior o inferior de la matriz.

La simetría de la matriz coeficiente depende del tipo de ecuación diferencial, su forma variacional, y el número de ecuaciones del elemento finito. El esparcimiento de la matriz es el resultado de las funciones interpolación del elemento finito que tienen valores no cero solamente sobre un elemento del dominio.

Comentario 10. El balance (ó equilibrio) de las variables secundarias (o fuerzas) Q_i^e en las fronteras del inter elemeto se expresa por (3.41b). Estas sumatorias imponen la condición de que la variable secundaria $a \frac{du}{dx}$ en el nodo, donde u es la solución real, sea continua. Sin embargo, esto no implica continuidad de $a \frac{dU^e}{dx}$, donde U^e es la solución del elemento finito. Por tanto en general, tenemos:

$$Q_2^e + Q_1^{e+1} = 0 \text{ o } Q_0 \quad (3.63a)$$

pero :

$$\left(a \frac{dU^e}{dx} \right)_{x_e} + \left(-a \frac{dU^{e+1}}{dx} \right)_{x_e} \neq 0 \text{ o } Q_0 \quad (3.63b)$$

Nota: en la mayoría de los libros del método de elemento finito, este punto no está claro para el lector. Esos libros consideran la forma cuadrática (3.11) del problema total y omiten la suma de las contribuciones inter elemento (para elementos lineales)

$$\sum_{e=1}^N \left(\sum_{i=1}^2 Q_i^e u_i^e \right) \quad (i)$$

en la forma cuadrática del problema. Sin embargo estas sumatorias imponen condiciones de equilibrio de la forma (3.63a). Cuando se especifica que la variable secundaria no es cero (digamos Q_0) en una frontera inter elemento (digamos en el nodo global 2), tenemos

$$Q_2^1 + Q_1^2 = Q_0 \quad (ii)$$

En otros libros, Q_0 se incluye en la funcional como $Q_0 U_2$, donde U_2 es el valor de u en el nodo global 2.

La forma variacional de la ec. (3.1) sobre el dominio entero (cuando $c = 0$), está dada por:

$$0 = \int_0^L \left(a \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} - vq \right) dx - v(x_2) Q_0 \quad (iii)$$

Cuando u es aproximada mediante funciones que se definen para un intervalo local (que es el caso del método del elemento finito), el uso de la forma variacional implica la omisión de la suma de las contribuciones inter elemento de (i).

Ya que ψ_i^e ($R = 1, 2, 3$) es cero en cualquier elemento Ω^f , para $e \neq f$ (ver fig.3.3b), la solución de elemento finito (global), para el dominio entero está dada por:

$$U_e(x) = \sum_{e=1}^3 \left(\sum_{i=1}^2 u_i^e \psi_i^e \right) \equiv \sum_{I=1}^4 U_I \Phi_I(x) \quad (iv)$$

donde $\Phi_I(x)$ ($I = 1, 2, 3, 4$) son las funciones de interpolación global continuas:

$$\Phi_I(x) = \begin{cases} \psi_2^{(I-1)}(x) & \text{para } x_{I-1} \leq x \leq x_I \\ \psi_1^I(x) & \text{para } x_I \leq x \leq x_{I+1} \end{cases} \quad (v)$$

Sustituyendo (iv) para u y $v = \Phi_I$ en (iii), obtenemos:

$$0 = \int_0^L a \frac{d\Phi_I}{dx} \left(\sum_{j=1}^4 U_j \frac{d\Phi_j}{dx} - \Phi_I q \right) dx - \Phi_I(x_2) Q_0 \quad (\text{vi})$$

ya que ϕ_I es diferente de cero solo entre x_{I+1} y x_{I-1} , las integrales son:

$$0 = \int_{x_{I-1}}^{x_{I+1}} \left[a \frac{d\Phi_I}{dx} \left(U_{I-1} \frac{d\Phi_{I-1}}{dx} + U_I \frac{d\Phi_I}{dx} + U_{I+1} \frac{d\Phi_{I+1}}{dx} \right) - \Phi_I q \right] dx - \Phi_I(x_2) Q_0 \quad (\text{vii})$$

y tenemos (para una malla de tres elementos):

$$I=1 \quad 0 = \int_{x_1=0}^{x_2} \left[a \frac{d\Phi_1}{dx} \left(U_1 \frac{d\Phi_1}{dx} + U_2 \frac{d\Phi_2}{dx} \right) - \Phi_1 q \right] dx - \Phi_1(x_2) Q_0$$

$$I=2 \quad 0 = \int_{x_1=0}^{x_3} \left[a \frac{d\Phi_2}{dx} \left(U_1 \frac{d\Phi_1}{dx} + U_2 \frac{d\Phi_2}{dx} + U_3 \frac{d\Phi_3}{dx} \right) - \Phi_2 q \right] dx - \Phi_2(x_2) Q_0$$

$$I=3 \quad 0 = \int_{x_2}^{x_4=L} \left[a \frac{d\Phi_3}{dx} \left(U_2 \frac{d\Phi_2}{dx} + U_3 \frac{d\Phi_3}{dx} + U_4 \frac{d\Phi_4}{dx} \right) - \Phi_3 q \right] dx - \Phi_3(x_2) Q_0$$

(viii)

$$I=4 \quad 0 = \int_{x_3}^{x_4=L} \left[\alpha \frac{d\Phi_4}{dx} \left(U_3 \frac{d\Phi_3}{dx} + U_4 \frac{d\Phi_4}{dx} \right) - \Phi_4 q \right] dx - \Phi_4(x_2) Q_0$$

Esas ecuaciones, llevando a cabo las integraciones, dan la (3.47) con la última columna en la posición reemplazada por:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ Q_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{ix})$$

CAPITULO 4

ANALISIS DE ERROR DEL ELEMENTO FINITO

4.1. ERRORES DE APROXIMACIÓN

Los errores introducidos al interior de la solución de una ecuación diferencial dada pueden atribuirse a tres fuentes básicas.

1. Error de aproximación del dominio, debido a la aproximación del dominio.
2. Errores de cuadratura y aritmética finita, debidos a la evaluación numérica de integrales y al cálculo numérico en una computadora.
3. Error de aproximación, debido a la aproximación de la solución.

$$u \approx u_h \equiv \sum_{I=1}^N U_I \phi_I \quad (4.1)$$

donde U_I , representa el valor de u en el nodo global I , y ϕ_I representa la función interpolación global asociada con el nodo global I (ver Fig. 3.3b).

En los problemas de una dimensión discutidos, los dominios considerados han sido líneas rectas. Por lo tanto la aproximación del dominio no ha sido necesaria. En problemas de dos dimensiones que involucran dominios no rectangulares, errores de aproximación del dominio son introducidos en las soluciones del elemento finito. En general pueden interpretarse como errores en la especificación de los datos del problema debido a que resolvemos ahora la ecuación diferencial dada sobre un dominio

modificado. Como refinemos la malla, el dominio es representado más exactamente, y, por lo tanto, los errores de aproximación frontera se espera se aproximen a cero.

Cuando los cálculos del elemento finito se desarrollan en una computadora, errores redondeados en el cálculo de números y errores debido a la evaluación numérica de integrales son introducidos en la solución. En la mayoría de los problemas lineales con número pequeño razonablemente de grados de libertad totales en el sistema, esos errores se espera sean pequeños (o cero cuando solamente se desea exactitud en un punto decimal).

El error introducido en la solución del elemento finito U^e debido a la aproximación de la variable dependiente u en un elemento Ω^e es inherente a cualquier problema:

$$u \approx u_h = \sum_{e=1}^N \sum_{i=1}^n u_i^e \psi_i^e = \sum_{I=1}^M U_I \phi_I \quad (4.2)$$

Donde u_h es la solución de la solución del elemento finito sobre el dominio ($u_h = U^e$ en Ω^e), N es el número de elementos en la malla M es el número total de nodos globales, y n es el número de nodos en un elemento. Deseamos conocer como el error $E = u - u_h$ medido de manera significativa se comporta conforme se incremente el número de elementos en la malla. Se puede demostrar que el error aproximación es cero para ecuaciones simples de segundo orden y de cuarto orden con coeficientes constantes del elemento discreto [ver (4.30)-(4.35)]

4.2. DIVERSAS MEDIDAS DE ERRORES

Hay varias maneras de medir la “diferencia”(o distancia) entre dos funciones cualquiera u y u_h . El error de punto discreto es la diferencia de u y u_h en cada punto del dominio. Puede uno también definir la diferencia de u y u_h a ser el máximo de todos los valores absolutos de la s diferencias de u y u_h en el dominio $\Omega = (a, b)$:

$$\|u - u_h\|_{\infty} \equiv \max_{a \leq x \leq b}$$

La medida de la diferencia se llama *la supmétrica*. Notar que la supmétrica es un número real, de todas formas, el error de punto discreto es una función y no califica como distancia o norma en sentido matemático. La norma de una función es un número real no negativo.

Más medidas usadas generalmente (o normas) de la diferencia de dos funciones son la norma de energía y la norma L_2 (pronunciada norma L-dos).

Para cualquier función integrable cuadrada u y u_h definida sobre el dominio $\Omega = (a, b)$, las dos normas son definidas por::

$$\text{norma energía } |u - u_h|_m = \left(\int_a^b \sum_{i=0}^m \left| \frac{d^i u}{dx^i} - \frac{d^i u_h}{dx^i} \right|^2 dx \right)^{1/2} \quad (4.4)$$

$$\text{norma } L_2 \quad \|u - u_h\|_0 = \left(\int_a^b |u - u_h|^2 dx \right)^{1/2} \quad (4.5)$$

Donde $2m$ es el orden de la ecuación diferencial a resolver. El término “norma energía” se usa para indicar que esta norma contiene derivadas del mismo orden que la funcional cuadrática (la cual, para la mayoría de los problemas en mecánica de sólidos, representa a la energía) asociada con la ecuación. En la Fig. 4.1 se ilustran diversas medidas de la distancia entre dos funciones. Estas definiciones pueden modificarse fácilmente para dominios en dos dimensiones.

4.3 CONVERGENCIA DE LA SOLUCIÓN

La solución del elemento finito u_h en (4.1) se dice que converge en la norma energía a la solución verdadera u si:

$$|u - u_h| \leq ch^p \quad \text{para } p > 0$$

Donde c es una constante independiente de u y u_h , h es la longitud característica de un elemento. La constante p es llamada la razón de convergencia. Notar que la convergencia depende tanto de h como de p ; p depende del orden de la derivada de u [ver 4.15 abajo]. Por lo tanto, el error en la aproximación puede reducirse, ya sea

reduciendo el tamaño de los elementos, o incrementando el grado de aproximación. La convergencia de las soluciones del elemento finito con los refinamientos de la malla (esto es, se usan más de la misma clase de elementos) es el término convergencia $-h$. La convergencia con el incremento en el grado de polinomios es llamada convergencia $-p$.

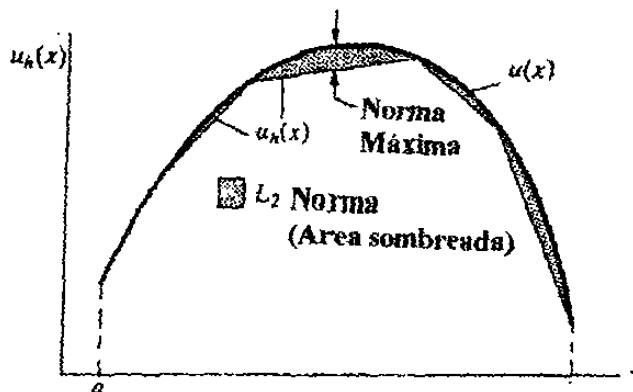


Figura 4.1 Diferentes medidas de error, $E = u - u_h$, entre la solución exacta u y la solución del elemento finito u_h , se ilustran la norma máxima y la norma L_2 .

4.4 EXACTITUD DE LA SOLUCIÓN

Regresando a la cuestión de estimar el error de aproximación, consideremos una ecuación diferencial del orden $2m$ éximo en una dimensión ($m = 1$, ecuaciones de segundo orden, $m = 2$ ecuaciones de cuarto orden):

$$\sum_{i=1}^m (-1)^i \frac{d^i u}{dx^i} \left(a_i \frac{d^i u}{dx^i} \right) = f \quad \text{for } 0 < x < L \quad (4.7)$$

Donde los coeficientes $a_1(x)$ y $a_2(x)$, se supone que son positivos. Suponga que las condiciones de frontera esencial del problema son:

$$u(0) = u(L) = 0 \quad (m = 1, 2) \quad (4.8)$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{du}{dx}\right)_{x=L} = 0 \quad (m = 2) \quad (4.9)$$

La formulación variacional de (4.7) y (2.9) esta dada por:

$$0 = \int_0^L \left(\sum_{i=1}^m a_i \frac{d^i v}{dx^i} \frac{d^i u}{dx^i} - vf \right) dx \quad (4.10)$$

La función cuadrática correspondiente a la forma variacional es:

$$I(u) = \int_0^L \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^m a_i \left(\frac{d^i u}{dx^i} \right)^2 \right] dx - \int_0^L uf dx \quad (4.11)$$

Ahora considere una discretización del dominio del elemento finito mediante N elementos de igual longitud h . Si u_h representa a la solución del elemento finito en (4.1) tenemos, de (4.11)

$$I(u_h) = \int_0^L \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^m a_i \left(\frac{d^i u_h}{dx^i} \right)^2 \right] dx - \int_0^L u_h f dx \quad (4.12)$$

En los párrafos siguientes, demostramos que en la energía I asociada con la solución del elemento finito se aproxima a la energía verdadera de arriba, y nosotros damos entonces un error estimado. Confinamos nuestra discusión, por razón de simplicidad a la ecuación de segundo orden ($m = 1$).

De (4.11) y (4.12) y

$$f = -\frac{d}{dx} \left(a_1 \frac{du}{dx} \right)$$

tenemos:

$$\begin{aligned}
I(u_h) - I(u) &= \int_0^L \frac{1}{2} \left[a_1 \left(\frac{du_h}{dx} \right)^2 - a_1 \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + 2f(u - u_h) \right] dx \\
&= \int_0^L \left[\frac{a_1}{2} \left(\frac{du_h}{dx} \right)^2 - \frac{a_1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - \frac{d}{dx} \left(a_1 \frac{du}{dx} \right) (u - u_h) \right] dx \\
&= \int_0^L \left\{ \frac{a_1}{2} \left[\left(\frac{du_h}{dx} \right)^2 - \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \right] + a_1 \frac{du}{dx} \frac{d}{dx} (u - u_h) \right\} dx \quad (4.13) \\
&= \int_0^L \frac{a_1}{2} \left[\left(\frac{du_h}{dx} \right)^2 + \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - 2 \frac{du}{dx} \frac{d}{dx} \right] dx \\
&= \int_0^L \frac{a_1}{2} \left(\frac{du_h}{dx} - \frac{du}{dx} \right)^2 dx \geq 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$I(u_h) \geq I(u) \quad (4.14)$$

La igualdad se mantiene solo para $u = u_h$. La ecuación (4.14) implica que la convergencia de la energía de la solución del elemento finito a la energía verdadera, es desde arriba. Ya que la relación en (4.14) se mantiene para cualquier u_h , la no igualdad también indica que la solución verdadera u minimiza la energía. Una relación similar se puede establecer para la ecuación de cuarto orden ($m = 2$).

Ahora, suponga que las funciones interpolación del elemento finito Φ_I ($I = 1, 2, \dots, M$) son polinomios completos de grado K . Entonces el error en la norma energía puede mostrarse para que satisfaga la no igualdad.

$$e_{1,m} \equiv |u - u_h|_m \leq ch^p, \quad p = k + 1 - m > 0 \quad (4.15)$$

Donde c es una constante. Esta estimación implica que el error tiende a cero como la p ésima potencia de h como h es disminuida (o el número de elementos es incrementado). En otras palabras, el logaritmo del error en la norma energía tiende a cero en la relación de $k + 1 - m$; el error en la norma L_2 disminuirá en consecuencia

mas rápidamente en la relación $k + 1$; esto es, las derivadas convergen mas lentamente que la relación por sí sola.

Errores estimados del tipo (4.15), son muy usados porque da una idea de la exactitud de la solución aproximada, conozcamos o no la solución verdadera. Mientras el estimado da una idea, de cómo rápidamente la solución del elemento finito converge a la solución verdadera m cuando se refine la malla.

Esta decisión corresponde a los analistas, porque sólo ellos saben la tolerancia razonable para los problemas que se estén resolviendo.

Como un ejemplo de estimación del error en la aproximación, (4.15), considere el elemento lineal (dos nodos) para una ecuación de segundo orden ($m = 1$).

Tenemos para un elemento:

$$u_h = u_1(1 - s) + u_2s \quad (4.16)$$

Donde $s = \frac{x}{h}$ y x es la coordenada local. Ya que u_2 puede verse como una función de u_1 vía (4.16) puede uno expandir u_2 en una serie de Taylor alrededor del nodo 1 para obtener.

$$u_2 = u_1 + u_1' + \frac{1}{2}u_1'' + \dots \quad (4.17)$$

Donde $u' = \frac{du}{ds}$. Sustituyendo esto en (4.16) obtenemos:

$$u_h = u_1 + u_1's + \frac{1}{2}u_1'' + \dots \quad (4.18)$$

Expandiendo la solución verdadera en una serie Taylor, alrededor del nodo 1, obtenemos

$$u = u_1 + u_1's + \frac{1}{2}u_1'' + \dots \quad (4.19)$$

Por lo tanto, tenemos de (4.18) y (4.19)

$$|u_h - u| \leq \frac{1}{2} (s - s^2) \max_{0 \leq s \leq 1} \left| \frac{d^2 u}{ds^2} \right| = \frac{1}{2} (s - s^2) h^2 \max_{0 \leq x \leq h} \left| \frac{d^2 u}{dx^2} \right| \quad (4.20)$$

$$\left| \frac{d}{dx} (u_h - u) \right| \leq \frac{1}{2} h \max_{0 \leq x \leq h} \left| \frac{d^2 u}{dx^2} \right| \quad (4.21)$$

Estas conducen a:

$$|u - u_h|_0 \leq c_1 h^2, \quad |u - u_h|_1 \leq c_2 h \quad (4.22)$$

Donde las constantes c_1 y c_2 dependen únicamente de la longitud L del dominio.

Ejemplo 4.1

Consideramos aquí, un ejemplo computacional para verificar el error estimado en (4.22). Considere la ecuación diferencial:

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} = 2 \quad \text{for } 0 < x < 1 \quad (4.23)$$

Con:

$$u(0) = u(1) = 0$$

la solución exacta es:

$$u(x) = x(1 - x) \quad (4.24)$$

Mientras las soluciones de elemento finito son para $N = 2$

$$u_h = \begin{cases} h^2(x/h) & \text{para } 0 \leq x \leq h \\ h^2(2-x/h) & \text{para } h \leq x \leq 2h \end{cases}$$

para $N = 3$

$$u_h = \begin{cases} 2h^2(x/h) & \text{para } 0 \leq x \leq h \\ 2h^2(2-x/h) + 2h^2(x/h-1) & \text{para } h \leq x \leq 2h \\ 2h^2(3-x/h) & \text{para } 2h \leq x \leq 3h \end{cases} \quad (4.25)$$

y para $N = 4$

$$u_h = \begin{cases} 3h^2(x/h) & \text{for } 0 \leq x \leq h \\ 3h^2(2-x/h) + 4h^2(x/h-1) & \text{for } h \leq x \leq 2h \\ 4h^2(3-x/h) + 3h^2(x/h-2) & \text{for } 2h \leq x \leq 3h \\ 3h^2(4-x/h) & \text{for } 3h \leq x \leq 4h \end{cases}$$

TABLA 4.1

El error L_2 y el error en la norma energía de la solución a (4.23) (Ejemplo 4.1)

h	$\log_{10} h$	$ e _0$	$\log_{10} e _0$	$ e _1$	$\log_{10} e _1$
$\frac{1}{2}$	-0.301	0.04564	-1.341	0.2887	-0.5396
$\frac{1}{3}$	-0.477	0.02028	-1.693	0.1925	-0.7157
$\frac{1}{4}$	-0.601	0.01141	-1.943	0.1443	-0.8406

Para el caso del elemento ($h = 0.5$) los errores están dados por:

$$\begin{aligned}
|u - u_h|_0^2 &= \int_0^h (x - x^2 - hx)^2 dx + \int_h^{2h} (x - x^2 - 2h^2 + xh)^2 dx \\
&= 0.002083 \\
\left| \frac{du}{dx} - \frac{du_h}{dx} \right|_0^2 &= \int_0^h (1 - 2x - h)^2 dx + \int_h^{2h} (1 - 2x + h)^2 dx \\
&= 0.08333
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Cálculos similares pueden ser llevados a cabo para $N = 3$ y $N = 4$. La tabla 4.1 da los errores para $N = 2, 3$ y 4 .

Las gráficas de $\log|e|_0$ y $\log|e|_1$ contra $\log h$ demuestran (ver Fig. 4.1) que:

$$\log|e|_0 = 2 \log h + \log c_1, \quad \log|e|_1 = \log h + \log c_2 \tag{4.27}$$

En otras palabras, la razón de convergencia de la solución del elemento finito es 2 en la norma L_2 y 1 en la norma energía, verificando los estimados en (4.22).

Mucha de la discusión aquí presentada, se puede aplicar a elementos curvados y a elemento en dos dimensiones.

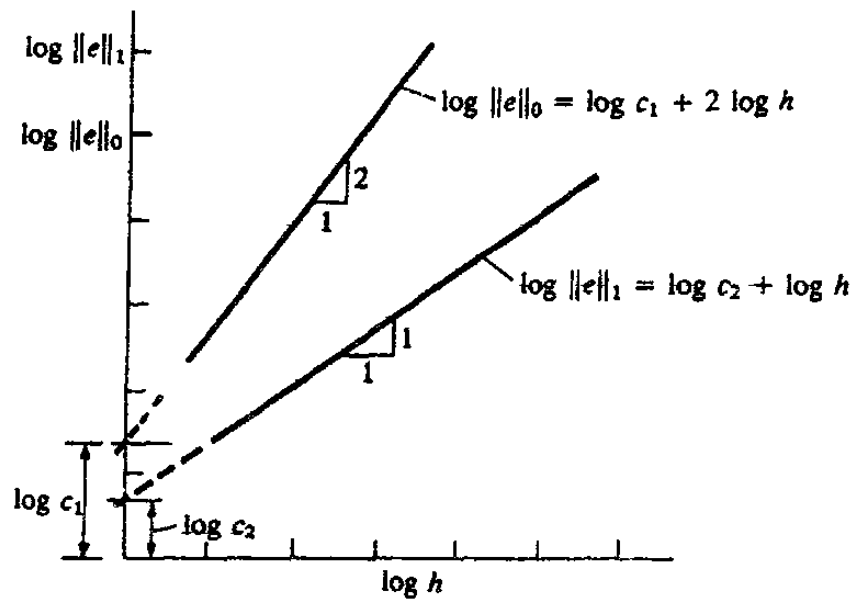


Fig. 4.2:

Gráficas de las normas energía y L_2 de errores contra el tamaño de la malla. La gráfica log-log da las razones de convergencia en las normas respectivas. Las razones de convergencia están dadas por las pendientes de las líneas. (las gráficas mostradas son para elemento lineales)

Cuando los elementos con lados no rectos, están involucrados, el error estimado también depende de la transformación Jacobiana. Debido a la naturaleza introductoria del estudio presente, estos tópicos no se discuten aquí.

Como se notó, en el caso de ecuaciones de segundo y cuarto orden con una simple incógnita y coeficientes constantes, el error entre la solución exacta y la solución de elemento finito en los nodos es cero. Esto no es accidental, podemos probar, que cuando los coeficientes a y b son constantes, las soluciones del elemento finito de las ecuaciones.

$$-\frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) = f(x) \quad (4.28)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(b \frac{d^2u}{dx^2} \right) = f(x) \quad (4.29)$$

Coincide con las soluciones exactas en los nodos La prueba es presentada abajo para la ecuación de segundo orden.

Considere la ecuación:

$$-a \frac{d^2 u}{dx^2} = f \quad \text{para } 0 < x < L \quad (4.30)$$

$$\text{con } u(0) = 0, \quad u(L) = 0 \quad (4.31)$$

La solución de elemento finito global esta dada por ($U_1 = U_N = 0$)

$$u_h = \sum_{I=2}^{N-1} U_I \Phi_I \quad (4.32)$$

donde Φ_I son las funciones interpolación lineal global mostrada en la Fig. 3.3(b).

De la definición del problema variacional , tenemos:

$$\int_0^L \left(\frac{d\Phi_I}{dx} \frac{du_h}{dx} - \Phi_I \hat{f} \right) dx = 0 \quad \text{por hecho } I = 2, \dots, N-1 \quad (4.33)$$

Donde $\hat{f} = f/a$. La solución exacta también satisface esta evaluación. Sustrayendo la ecuación. Sustrayendo la ecuación de elemento finito (4.33) de la solución, exacta obtenemos :

$$\int_0^L \left(\frac{du}{dx} - \frac{du_h}{dx} \right) \frac{d\Phi_I}{dx} dx = 0 \quad (I = 1, 2, \dots, N-1)$$

Ya que tenemos $\Phi_I = 0$ para $x \geq (I+1)h$ y $x \leq (I-1)h$, $d\Phi_I/dx = 1h$ por $(I-1)h \leq x \leq Ih$ y $d\Phi_I/dx = -1h$ por $Ih \leq x \leq (I+1)h-1$ para $Ih \leq x \leq (I+1)h$, se sigue que:

ó

$$\frac{1}{h}(-\epsilon_{I-1} + 2\epsilon_I - \epsilon_{I+1}) = 0 \quad (I = 2, 3, \dots, N-1) \quad (4.35)$$

Donde $\epsilon_I = \epsilon(Ih)$ (esto es el valor ϵ en $x = Ih$). Ya que $\epsilon_0 = \epsilon_N = 0$ (debido a que u y u_h ambas satisfacen condiciones de frontera iniciales). Se sigue de las ecuaciones homogéneas de arriba que la solución es trivial; $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \dots = \epsilon_{N-1} = 0$. Esto implica que la solución del elemento finito coincide con la solución exacta en los nodos.

CAPITULO 5

SOLUCION A PROBLEMAS DE TRANSFERENCIA DE CALOR EN UNA DIMENSION APLICANDO EL METODO DEL ELEMENTO FINITO CON AUXILIO DE UN PROGRAMA DE COMPUTADORA

Problema 1: Considere un cilindro sólido largo de radio R_0 en el cual la energía se genera a razón constante q_0 ($W m^{-3}$). La superficie de frontera en $r = R_0$ se mantiene a temperatura constante T_0 . Deseamos calcular la distribución de temperatura $T(r)$ y el flujo de calor $Q(r) = -K dT/dr$ (o calor $Q = -AK dT/dr$).

La ecuación que gobierna para este problema está dada por:

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (2\pi Kr dT/dr) = 2\pi K \quad \text{con } q = q_0$$

Las condiciones frontera son:

$$T(R_0) = T_0, \quad (2\pi Kr dT/dr)_{r=0} = 0$$

Las condiciones frontera de flujo cero en $r = 0$ es un resultado de la simetría radial en $r = 0$. Si el cilindro fuera hueco con radio interno R_i , entonces la condición de frontera en $r = R_i$ puede ser temperatura especificada, flujo de calor especificado, o condición de frontera convección, dependiendo de la situación.

El modelo del elemento finito de la ecuación que gobierna esta dado en: $[K^e] \{u^e\} = \{f^e\} + \{Q^e\}$; para una altura unitaria del cilindro y $\alpha = Kr$.

$$K_y = 2\pi \int_{r_A}^{r_B} a \frac{d\psi_i^e}{dr} \frac{d\psi_j^e}{dr} dr, \quad f_i^e = 2\pi \int_{r_A}^{r_B} \psi_i^e q_r dr$$

donde:

$$K_y = 2\pi \int_{r_A}^{r_B} Kr \frac{d\psi_i^e}{dr} \frac{d\psi_j^e}{dr} dr, \quad f_i^e = 2\pi \int_{r_A}^{r_B} \psi_i^e q_0 r dr$$

$$Q_1^e = -2\pi k \left(r \frac{dT}{dr} \right) \Big|_{r_A}, \quad Q_2^e = 2\pi k \left(r \frac{dT}{dr} \right) \Big|_{r_B}$$

y (r_A, r_B) son coordenadas del elemento $\Omega^e = (r_A, r_B)$. Para la selección de las funciones interpolación lineales ψ_i^e

$$\psi_1^e = (r_B - r)/h_e, \quad \psi_2^e = (r - r_A)/h_e$$

Las ecuaciones elemento para un elemento típico lineal son

$$\frac{2\pi k}{h_e} \frac{r_{e+1} + r_e}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^e \\ T_2^e \end{Bmatrix} = 2\pi q_0 \frac{h_e}{6} \begin{Bmatrix} 2r_e + r_{e+1} \\ r_e + 2r_{e+1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^e \\ Q_2^e \end{Bmatrix}$$

Las ecuaciones elemento para elementos individuales son obtenidas de estas dando la longitud del elemento h_e y las coordenadas global de los nodos del elemento, $r_e = r_A$ y $r_{e+1} = r_B$.

Para la malla de un elemento lineal, tenemos $r_1 = 0$, $r_2 = h_e = R_0$, μ

$$\pi k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \frac{\pi q_0 R_0}{3} \begin{Bmatrix} R_0 \\ 2R_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 \end{Bmatrix}$$

Las condiciones frontera en este problema, implica $U_2 = T_0$ y $Q_1^1 = 0$. De aquí la temperatura en el nodo 1 (global) es

$$U_1 = q_0 R_0^2 / 3k + T_0$$

y el calor en $r = R_0$ es

$$Q_2^1 = \pi k (U_2 - U_1) - \frac{2}{3} \pi q_0 R_0^2 = -\pi q_0 R_0^2$$

El signo negativo indica que el calor es removido del cuerpo (debido a que $dT/dr < 0$). La solución de un elemento en función de la coordenada radial r es

$$T^1(r) = U_1 \psi_1^1(r) + U_2 \psi_2^1(r) = \frac{q_0 R_0^2}{3k} \left(1 - \frac{r}{R_0} \right) + T_0$$

El flujo de calor es

$$q(r) \equiv -k \frac{dT^1}{dr} = \frac{1}{3} q_0 R_0$$

La solución exacta del problema puede obtenerse integrando

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(2\pi k r \frac{dT}{dr} \right) = 2\pi q$$

y evaluando las constantes de integración con la ayuda de las condiciones frontera del problema.

$$T(r) = \frac{q_0 R_0^2}{4k} \left[1 - \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 \right] + T_0$$

$$q(r) = \frac{1}{2} q_0 r \text{ (W m}^{-2}\text{)}, \quad Q(R_0) = - \left(2\pi k r \frac{dT}{dr} \right)_{R_0} = \pi q_0 R_0^2$$

Para una malla de dos elementos lineales, tomamos $h_1 = h_2 = \frac{1}{2} R_0$, $r_1 = 0$, $r_2 = h_1 = \frac{1}{2} R_0$, y $r_3 = h_1 + h_2 = R_0$. El ensamble de los dos elementos da

$$\pi k \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1+3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \frac{\pi q_0 R_0}{6} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} R_0 \\ R_0 + 2R_0 \\ \frac{1}{2} R_0 + 2R_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 + Q_1^2 \\ Q_2^2 \end{Bmatrix}$$

Imponiendo las condiciones frontera $U_3 = T_0$ y $Q_1^1 = 0$, las ecuaciones condensadas son

$$\pi k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \frac{\pi q_0 R_0^2}{12} \begin{Bmatrix} 1 \\ 6 \end{Bmatrix} + \pi k \begin{Bmatrix} 0 \\ 3T_0 \end{Bmatrix}$$

Su solución es:

$$U_1 = \frac{5}{18} \frac{q_0 R_0^2}{k} + T_0, \quad U_2 = \frac{7}{36} \frac{q_0 R_0^2}{k} + T_0$$

Del equilibrio, Q_2^2 se calcula como

$$Q_2^2 = -\frac{5}{12} \pi q_0 R_0^2 + 3\pi k (U_3 - U_2) = -\pi q_0 R_0^2$$

La solución del elemento finito llega a ser:

$$T_{fem}(r) = \begin{cases} U_1 \psi_1^1 + U_2 \psi_2^1 = \left(\frac{5}{8} \frac{q_0 R_0^2}{k} + T_0 \right) \frac{R_0 - 2r}{R_0} + \left(\frac{7}{36} \frac{q_0 R_0^2}{k} + T_0 \right) \frac{2\pi}{R_0} \\ U_2 \psi_1^2 + U_3 \psi_2^2 = \left(\frac{7}{36} \frac{q_0 R_0^2}{k} + T_0 \right) \frac{2(R_0 - r)}{R_0} + T_0 \frac{2\pi - R_0}{R_0} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{q_0 R_0^2}{18k} \left(r - \frac{3r}{R_0} \right) + T_0 & \text{para } 0 \leq r \leq \frac{1}{2} R_0 \\ \frac{7}{18} \frac{q_0 R_0^2}{k} \left(1 - \frac{r}{R_0} \right) + T_0 & \text{para } \frac{1}{2} R_0 \leq r \leq R_0 \end{cases}$$

Notar que el flujo de calor se predice aproximadamente para ambos modelos de uno y dos elementos. La temperatura en el centro del cilindro de acuerdo a la solución exacta es $T(0) = q_0 R_0^2 / 4k + T_0$, $q_0 R_0^2 / 3k + T_0$ y $q_0 R_0^2 / 18k + T_0$ de acuerdo a modelos de uno y dos elementos respectivamente. Las soluciones del elemento finito obtenidas usando malla de uno, dos, cuarto y ocho elementos comparada con la solución exacta se puede observar en la tabla 5.1. La convergencia de las soluciones de elemento finito a la solución exacta con un incremento en el número de elementos es clara.

Tabla 5.1

Comparación de las soluciones elemento finito y exacta para transferencia de calor en un cilindro radialmente simétrico. ($R_0 = 0.01m, q_0 = 2 \times 10^8 Wm^{-3}, k = 20Wm^{-1}C^{-1}, T_0 = 100^\circ C$)

Temperatura $u(r)$					
	Un	Dos	Cuatro	Ocho	
r/R_0	elemento	elementos	Elementos	elementos	Exacto
0.000	<u>433.33</u>	<u>377.78</u>	<u>358.73</u>	<u>352.63</u>	350.00
0.125	391.67	356.24	348.31	<u>347.42</u>	349.09
0.250	350.00	335.11	<u>337.90</u>	<u>335.27</u>	334.38
0.375	308.33	315.28	313.59	<u>315.48</u>	314.84
0.500	266.67	<u>294.44</u>	<u>289.29</u>	<u>287.95</u>	287.50
0.625	255.00	245.83	249.70	<u>252.65</u>	252.34
0.750	183.33	197.22	<u>210.12</u>	<u>209.56</u>	209.38
0.875	141.67	148.61	155.06	<u>158.68</u>	158.59
1.000	<u>100.00</u>	<u>100.00</u>	<u>100.00</u>	<u>100.00</u>	100.00

Solución del problema 1 con auxilio de un programa de computadora FEM1DV3.

TRASFERENCIA DE CALOR EN UN CILINDRO SOLIDO RADIALMENTE SIMETRICO. La ecuación que gobierna en el problema está dada por:

$$-\frac{d}{dr} \left(2\pi k r \frac{dT}{dr} \right) = 2\pi q_0 \quad \text{para } 0 < r < R_0$$

$$\left(2\pi k r \frac{dT}{dr} \right)_{r=0} = 0, T(R_0) = T_0$$

Con $k = 20Wm^{-1}C^{-1}, q_0 = 2 \times 10^8 Wm^{-3}, T_0 = 100^\circ C$, y $R_0 = 0.01m$ tenemos MODEL=1, NTYPE=0, ITEM=0 (para solución estado estable), y los datos son continuos (ICONT=1) en el dominio para una malla de dos elementos cuadráticos (IELEM=2, NEM=2).

El dato es

$$\begin{aligned} a = 2\pi k r \rightarrow a_0 = 0 \quad a_1 = 2\pi k \quad b = 0 \rightarrow b_0 = 0.0 \quad b_1 = 0.0 \\ c = 0 \rightarrow c_0 = 0.0 \quad c_1 = 0.0 \quad f = 2\pi q_0 \rightarrow f_0 = 0.0, f_1 = 2\pi q_0, f_2 = 0.0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos [Para valores $k = 20Wm^{-1}C^{-1}, q_0 = 2 \times 10^8 Wm^{-3}$

$$\begin{aligned} AX0=0.0 \quad AX1=125.6637 \quad BX0=0.0 \quad BX1=0.0 \quad CX0=0.0 \quad CX1=0.0 \\ FX0=0.0 \quad FX1=12.5664E8 \quad FX2=0.0 \end{aligned}$$

OUTPUT FROM PROGRAM FEM1DV2.1 BY J. N. REDDY

Problema 1: Transferencia de calor en cilindro solido radial simétrico

*** ANALYSIS OF MODEL 1, AND TYPE 0 PROBLEM ***
(see the code below)

MODEL=1,NTYPE=0: A problem described by MODEL EQ. 1
 MODEL=1,NTYPE=1: A circular DISK (PLANE STRESS)
 MODEL=1,NTYPE>1: A circular DISK (PLANE STRAIN)
 MODEL=2,NTYPE=0: A Timoshenko BEAM (RIE) problem
 MODEL=2,NTYPE=1: A Timoshenko PLATE (RIE) problem
 MODEL=2,NTYPE=2: A Timoshenko BEAM (CIE) problem
 MODEL=2,NTYPE>2: A Timoshenko PLATE (CIE) problem
 MODEL=3,NTYPE=0: A Euler-Bernoulli BEAM problem
 MODEL=3,NTYPE>0: A Euler-Bernoulli Circular plate
 MODEL=4,NTYPE=0: A plane TRUSS problem
 MODEL=4,NTYPE=1: A Euler-Bernoulli FRAME problem
 MODEL=4,NTYPE=2: A Timoshenko (CIE) FRAME problem

Element type (0, Hermite,>0, Lagrange)..= 2
 No. of deg. of freedom per node, NDF....= 1
 No. of elements in the mesh, NEM.....= 2
 No. of total DOF in the model, NEQ.....= 5
 No. of specified primary DOF, NSPV.....= 1
 No. of specified secondary DOF, NSSV....= 0
 No. of specified Newton B. C.: NNBC.....= 0

Boundary information on primary variables:

5 1 .10000E+03

Global coordinates of the nodes, {GLX}:

.00000E+00 .25000E-02 .50000E-02 .75000E-02 .10000E-01

Coefficients of the differential equation:

AX0 = .0000E+00 AX1 = .1257E+03
 BX0 = .0000E+00 BX1 = .0000E+00
 CX0 = .0000E+00 CX1 = .0000E+00
 FX0 = .0000E+00 FX1 = .1257E+10 FX2 = .0000E+00

Element coefficient matrix, [ELK]:

.62832E+02 -.83776E+02 .20944E+02
 -.83776E+02 .33510E+03 -.25133E+03
 .20944E+02 -.25133E+03 .23038E+03

Element source vector, {ELF}:

-.22315E-13 .10472E+05 .52360E+04

SOLUTION (values of PVs) at the NODES:

X	P. Variable	S. Variable
.35000E+03	.33437E+03	.28750E+03
.20937E+03	.10000E+03	
.00000E+00	.35000E+03	.00000E+00
.62500E-03	.34902E+03	-.24544E+03
.12500E-02	.34609E+03	-.98175E+03
.18750E-02	.34121E+03	-.22089E+04
.25000E-02	.33437E+03	-.39270E+04
.31250E-02	.32559E+03	-.61359E+04
.37500E-02	.31484E+03	-.88357E+04
.43750E-02	.30215E+03	-.12026E+05
.50000E-02	.28750E+03	-.15708E+05
.50000E-02	.28750E+03	-.15708E+05
.56250E-02	.27090E+03	-.19880E+05
.62500E-02	.25234E+03	-.24544E+05
.68750E-02	.23184E+03	-.29698E+05
.75000E-02	.20937E+03	-.35343E+05
.81250E-02	.18496E+03	-.41479E+05
.87500E-02	.15859E+03	-.48106E+05
.93750E-02	.13027E+03	-.55223E+05
.10000E-01	.10000E+03	-.62832E+05

$$= \frac{Aq_0h}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1+1 \\ 1+1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1+1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 + Q_1^2 \\ Q_2^2 + Q_1^3 \\ \cdot \\ \cdot \\ Q_2^{N-1} + Q_1^N \\ Q_2^N \end{Bmatrix}$$

Donde U_I ($I=1,2,\dots,N+1$) representa la temperatura en el nudo global I . La superficie en $x=0$ está sujeta a un flujo de calor uniforme g_0 (Wm^{-2}) (si está aislada, $g_0=0$), y el calor se disipa por convección a un fluido de temperatura T_∞ y la superficie frontera en $x=L$. Estas condiciones frontera implican que

$$Q_1^1 \equiv \left(-kA \frac{dT}{dx} \right)_{x=0} = Ag_0$$

$$Q_2^N = \left(kA \frac{dT}{dx} \right)_{x=L} = -A\beta(T - T_\infty)_{x=L} = -A\beta(U_{N+1} - T_\infty)$$

donde A es el área de la sección transversal normal al flujo de calor y β es el coeficiente de transferencia de calor en las ecuaciones

$$Q_2^{e-1} + Q_1^e = 0 \quad \text{para } e = 2,3,\dots,N$$

son válidas para este caso. Para una malla de un elemento ($N=1$, $h=L$), las ecuaciones de elemento finito son

$$\frac{kA}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \frac{Aq_0h}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Ag_0 \\ -A\beta U_2 + A\beta T_\infty \end{Bmatrix}$$

$$\frac{kA}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 + \beta h k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} Aq_0h + Ag_0h \\ \frac{1}{2} Ag_0h + A\beta T_\infty \end{Bmatrix}$$

su solución es

$$U_1 = -\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right) \frac{q_0h^2}{2k} - \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \frac{g_0h}{k} + T_\infty$$

$$U_2 = -\left(\frac{1}{1-\alpha} \right) \frac{q_0h^2}{k} - \left(\frac{1}{1-\alpha} \right) \frac{g_0h}{k} + T_\infty$$

donde $\alpha = 1 + \beta h k$, la solución exacta es

$$T(x) = \frac{q_0 L^2}{2k} \left(1 + \frac{2k}{\beta L} - \frac{x^2}{L^2} \right) + \frac{g_0 L}{k} \left(1 + \frac{k}{\beta L} - \frac{x}{L} \right) + T_\infty$$

ARCHIVO DE DATOS DE ENTRADA PROBLEMA 2 (P4-2.DAT)

Problema 2: Conducción de calor en una loza.

□

□

1 0 1 MODEL, NTYPE, ITEM

□

1 2 IELEM, NEM

□

1 1 ICONT, NPRNT

0.0 0.5 0.5 DX(I)

1.0 0.0 AX0, AX1

0.0 0.0 BX0, BX1

0.0 0.0 CX0, CX1

0.0 0.0 0.0 FX0, FX1, FX2

1 NSPV

1 1 0.0 ISPV(I,J), VSPV(I)

0 NSSV

0 NNBC

1.0 0.0 CT0, CT1

0.05 0.5 0.0 DT, ALFA, BETA

1 20 2 INCOND, NTIME, INTVL

0.0 1.0 1.0 GU0(I)

Con los datos de archivo de entrada se procede a correr el programa obteniendo los siguientes resultados.

*** ECHO OF THE INPUT DATA STARTS ***

□

□

Problema 2: Conducción de calor en una loza.

1 0 1 MODEL, NTYPE, ITEM

1 2 IELEM, NEM

1 1 ICONT, NPRNT

0.0 0.5 0.5 DX(I)

1.0 0.0 AX0, AX1

0.0 0.0 BX0, BX1

0.0 0.0 CX0, CX1

0.0 0.0 0.0 FX0, FX1, FX2

1 NSPV

1 1 0.0 ISPV(I,J), VSPV(I)

0 NSSV

0 NNBC


```

1.0 0.0          CT0, CT1
0.05 0.5 0.0    DT, ALFA, BETA
1 20 2          INCOND, NTIME, INTVL
0.0 1.0 1.0     GU0(I)

```

**** ECHO OF THE INPUT DATA ENDS ****

OUTPUT FROM PROGRAM FEM1DV2.1 BY J. N. REDDY

Problema 2: Conducción de calor en una loza.

*** ANALYSIS OF MODEL 1, AND TYPE 0 PROBLEM ***
 (see the code below)

```

MODEL=1,NTYPE=0: A problem described by MODEL EQ. 1
MODEL=1,NTYPE=1: A circular DISK (PLANE STRESS)
MODEL=1,NTYPE>1: A circular DISK (PLANE STRAIN)
MODEL=2,NTYPE=0: A Timoshenko BEAM (RIE) problem
MODEL=2,NTYPE=1: A Timoshenko PLATE (RIE) problem
MODEL=2,NTYPE=2: A Timoshenko BEAM (CIE) problem
MODEL=2,NTYPE>2: A Timoshenko PLATE (CIE) problem
MODEL=3,NTYPE=0: A Euler-Bernoulli BEAM problem
MODEL=3,NTYPE>0: A Euler-Bernoulli Circular plate
MODEL=4,NTYPE=0: A plane TRUSS problem
MODEL=4,NTYPE=1: A Euler-Bernoulli FRAME problem
MODEL=4,NTYPE=2: A Timoshenko (CIE) FRAME problem

```

```

Element type (0, Hermite,>0, Lagrange)..= 1
No. of deg. of freedom per node, NDF....= 1
No. of elements in the mesh, NEM.....= 2
No. of total DOF in the model, NEQ.....= 3
No. of specified primary DOF, NSPV.....= 1
No. of specified secondary DOF, NSSV....= 0
No. of specified Newton B. C.: NNBC.....= 0

```

TIME-DEPENDENT (TRANSIENT) ANALYSIS

```

Coefficient, CT0.....= .1000E+01
Coefficient, CT1.....= .0000E+00
Parameter, ALFA.....= .5000E+00
Parameter, GAMA.....= .0000E+00
Time increment, DT.....= .5000E-01
No. of time steps, NTIME.....= 20
Time-step interval to print soln., INTVL= 2

```

Initial conditions on the primary variables:

```
.00000E+00 .10000E+01 .10000E+01
```

Boundary information on primary variables:

1 1 .00000E+00

Global coordinates of the nodes, {GLX}:

.00000E+00 .50000E+00 .10000E+01

Coefficients of the differential equation:

AX0 = .1000E+01 AX1 = .0000E+00
 BX0 = .0000E+00 BX1 = .0000E+00
 CX0 = .0000E+00 CX1 = .0000E+00
 FX0 = .0000E+00 FX1 = .0000E+00 FX2 = .0000E+00

Element coefficient matrix, {ELK}:

.21667E+00 .33333E-01
 .33333E-01 .21667E+00

Element source vector, {ELF}:

.13333E+00 .11667E+00

TIME = .1000E+00 Time step number = 2

SOLUTION (values of PVs) at the NODES:

.00000E+00 .66008E+00 .92793E+00

X	P. Variable	S. Variable
.00000E+00	.00000E+00	.13202E+01
.62500E-01	.82510E-01	.13202E+01
.12500E+00	.16502E+00	.13202E+01
.18750E+00	.24753E+00	.13202E+01
.25000E+00	.33004E+00	.13202E+01
.31250E+00	.41255E+00	.13202E+01
.37500E+00	.49506E+00	.13202E+01
.43750E+00	.57757E+00	.13202E+01
.50000E+00	.66008E+00	.13202E+01
.50000E+00	.66008E+00	.53570E+00
.56250E+00	.69356E+00	.53570E+00
.62500E+00	.72704E+00	.53570E+00
.68750E+00	.76052E+00	.53570E+00
.75000E+00	.79400E+00	.53570E+00
.81250E+00	.82749E+00	.53570E+00
.87500E+00	.86097E+00	.53570E+00
.93750E+00	.89445E+00	.53570E+00
.10000E+01	.92793E+00	.53570E+00

TIME = .2000E+00 Time step number = 4

SOLUTION (values of PVs) at the NODES:

.00000E+00 .50745E+00 .71757E+00

X	P. Variable	S. Variable
.00000E+00	.00000E+00	.10149E+01
.62500E-01	.63431E-01	.10149E+01
.12500E+00	.12686E+00	.10149E+01
.18750E+00	.19029E+00	.10149E+01
.25000E+00	.25372E+00	.10149E+01
.31250E+00	.31716E+00	.10149E+01
.37500E+00	.38059E+00	.10149E+01
.43750E+00	.44402E+00	.10149E+01
.50000E+00	.50745E+00	.10149E+01
.50000E+00	.50745E+00	.42024E+00
.56250E+00	.53371E+00	.42024E+00
.62500E+00	.55998E+00	.42024E+00
.68750E+00	.58624E+00	.42024E+00
.75000E+00	.61251E+00	.42024E+00
.81250E+00	.63877E+00	.42024E+00
.87500E+00	.66504E+00	.42024E+00
.93750E+00	.69130E+00	.42024E+00
.10000E+01	.71757E+00	.42024E+00

TIME = .3000E+00 Time step number = 6

SOLUTION (values of PVs) at the NODES:

.00000E+00 .39124E+00 .55329E+00

X	P. Variable	S. Variable
.00000E+00	.00000E+00	.78247E+00
.62500E-01	.48905E-01	.78247E+00
.12500E+00	.97809E-01	.78247E+00
.18750E+00	.14671E+00	.78247E+00
.25000E+00	.19562E+00	.78247E+00
.31250E+00	.24452E+00	.78247E+00
.37500E+00	.29343E+00	.78247E+00
.43750E+00	.34233E+00	.78247E+00
.50000E+00	.39124E+00	.78247E+00
.50000E+00	.39124E+00	.32411E+00
.56250E+00	.41149E+00	.32411E+00
.62500E+00	.43175E+00	.32411E+00
.68750E+00	.45201E+00	.32411E+00
.75000E+00	.47226E+00	.32411E+00
.81250E+00	.49252E+00	.32411E+00
.87500E+00	.51278E+00	.32411E+00

```
.93750E+00 .53303E+00 .32411E+00
.10000E+01 .55329E+00 .32411E+00
```

TIME = .4000E+00 Time step number = 8

SOLUTION (values of PVs) at the NODES:

```
.00000E+00 .30165E+00 .42660E+00
```

X	P. Variable	S. Variable
.00000E+00	.00000E+00	.60331E+00
.62500E-01	.37707E-01	.60331E+00
.12500E+00	.75414E-01	.60331E+00
.18750E+00	.11312E+00	.60331E+00
.25000E+00	.15083E+00	.60331E+00
.31250E+00	.18853E+00	.60331E+00
.37500E+00	.22624E+00	.60331E+00
.43750E+00	.26395E+00	.60331E+00
.50000E+00	.30165E+00	.60331E+00
.50000E+00	.30165E+00	.24990E+00
.56250E+00	.31727E+00	.24990E+00
.62500E+00	.33289E+00	.24990E+00
.68750E+00	.34851E+00	.24990E+00
.75000E+00	.36413E+00	.24990E+00
.81250E+00	.37975E+00	.24990E+00
.87500E+00	.39537E+00	.24990E+00
.93750E+00	.41098E+00	.24990E+00
.10000E+01	.42660E+00	.24990E+00

TIME = .5000E+00 Time step number = 10

SOLUTION (values of PVs) at the NODES:

```
.00000E+00 .23258E+00 .32892E+00
```

X	P. Variable	S. Variable
.00000E+00	.00000E+00	.46517E+00
.62500E-01	.29073E-01	.46517E+00
.12500E+00	.58146E-01	.46517E+00
.18750E+00	.87219E-01	.46517E+00
.25000E+00	.11629E+00	.46517E+00
.31250E+00	.14536E+00	.46517E+00
.37500E+00	.17444E+00	.46517E+00
.43750E+00	.20351E+00	.46517E+00
.50000E+00	.23258E+00	.46517E+00

.50000E+00	.23258E+00	.19268E+00
.56250E+00	.24463E+00	.19268E+00
.62500E+00	.25667E+00	.19268E+00
.68750E+00	.26871E+00	.19268E+00
.75000E+00	.28075E+00	.19268E+00
.81250E+00	.29280E+00	.19268E+00
.87500E+00	.30484E+00	.19268E+00
.93750E+00	.31688E+00	.19268E+00
.10000E+01	.32892E+00	.19268E+00

TIME = .6000E+00 Time step number = 12

SOLUTION (values of PVs) at the NODES:

.00000E+00	.17933E+00	.25361E+00
------------	------------	------------

X	P. Variable	S. Variable
---	-------------	-------------

.00000E+00	.00000E+00	.35866E+00
.62500E-01	.22416E-01	.35866E+00
.12500E+00	.44832E-01	.35866E+00
.18750E+00	.67248E-01	.35866E+00
.25000E+00	.89664E-01	.35866E+00
.31250E+00	.11208E+00	.35866E+00
.37500E+00	.13450E+00	.35866E+00
.43750E+00	.15691E+00	.35866E+00
.50000E+00	.17933E+00	.35866E+00
.50000E+00	.17933E+00	.14856E+00
.56250E+00	.18861E+00	.14856E+00
.62500E+00	.19790E+00	.14856E+00
.68750E+00	.20718E+00	.14856E+00
.75000E+00	.21647E+00	.14856E+00
.81250E+00	.22575E+00	.14856E+00
.87500E+00	.23504E+00	.14856E+00
.93750E+00	.24432E+00	.14856E+00
.10000E+01	.25361E+00	.14856E+00

TIME = .7000E+00 Time step number = 14

SOLUTION (values of PVs) at the NODES:

.00000E+00	.13827E+00	.19554E+00
------------	------------	------------

X	P. Variable	S. Variable
---	-------------	-------------

.00000E+00	.00000E+00	.27653E+00
.62500E-01	.17283E-01	.27653E+00

.12500E+00	.34567E-01	.27653E+00
.18750E+00	.51850E-01	.27653E+00
.25000E+00	.69133E-01	.27653E+00
.31250E+00	.86417E-01	.27653E+00
.37500E+00	.10370E+00	.27653E+00
.43750E+00	.12098E+00	.27653E+00
.50000E+00	.13827E+00	.27653E+00
.50000E+00	.13827E+00	.11454E+00
.56250E+00	.14543E+00	.11454E+00
.62500E+00	.15258E+00	.11454E+00
.68750E+00	.15974E+00	.11454E+00
.75000E+00	.16690E+00	.11454E+00
.81250E+00	.17406E+00	.11454E+00
.87500E+00	.18122E+00	.11454E+00
.93750E+00	.18838E+00	.11454E+00
.10000E+01	.19554E+00	.11454E+00

TIME = .8000E+00 Time step number = 16

SOLUTION (values of PVs) at the NODES:

.00000E+00	.10661E+00	.15077E+00
------------	------------	------------

X	P. Variable	S. Variable
---	-------------	-------------

.00000E+00	.00000E+00	.21322E+00
.62500E-01	.13326E-01	.21322E+00
.12500E+00	.26652E-01	.21322E+00
.18750E+00	.39978E-01	.21322E+00
.25000E+00	.53304E-01	.21322E+00
.31250E+00	.66630E-01	.21322E+00
.37500E+00	.79956E-01	.21322E+00
.43750E+00	.93282E-01	.21322E+00
.50000E+00	.10661E+00	.21322E+00
.50000E+00	.10661E+00	.88317E-01
.56250E+00	.11213E+00	.88317E-01
.62500E+00	.11765E+00	.88317E-01
.68750E+00	.12317E+00	.88317E-01
.75000E+00	.12869E+00	.88317E-01
.81250E+00	.13421E+00	.88317E-01
.87500E+00	.13973E+00	.88317E-01
.93750E+00	.14525E+00	.88317E-01
.10000E+01	.15077E+00	.88317E-01

TIME = .9000E+00 Time step number = 18

SOLUTION (values of PVs) at the NODES:

.00000E+00	.82197E-01	.11624E+00
------------	------------	------------

X	P. Variable	S. Variable
.00000E+00	.00000E+00	.16439E+00
.62500E-01	.10275E-01	.16439E+00
.12500E+00	.20549E-01	.16439E+00
.18750E+00	.30824E-01	.16439E+00
.25000E+00	.41099E-01	.16439E+00
.31250E+00	.51373E-01	.16439E+00
.37500E+00	.61648E-01	.16439E+00
.43750E+00	.71923E-01	.16439E+00
.50000E+00	.82197E-01	.16439E+00
.50000E+00	.82197E-01	.68094E-01
.56250E+00	.86453E-01	.68094E-01
.62500E+00	.90709E-01	.68094E-01
.68750E+00	.94965E-01	.68094E-01
.75000E+00	.99221E-01	.68094E-01
.81250E+00	.10348E+00	.68094E-01
.87500E+00	.10773E+00	.68094E-01
.93750E+00	.11199E+00	.68094E-01
.10000E+01	.11624E+00	.68094E-01

TIME = .1000E+01 Time step number = 20

SOLUTION (values of PVs) at the NODES:

.00000E+00 .63376E-01 .89628E-01

X	P. Variable	S. Variable
.00000E+00	.00000E+00	.12675E+00
.62500E-01	.79220E-02	.12675E+00
.12500E+00	.15844E-01	.12675E+00
.18750E+00	.23766E-01	.12675E+00
.25000E+00	.31688E-01	.12675E+00
.31250E+00	.39610E-01	.12675E+00
.37500E+00	.47532E-01	.12675E+00
.43750E+00	.55454E-01	.12675E+00
.50000E+00	.63376E-01	.12675E+00
.50000E+00	.63376E-01	.52503E-01
.56250E+00	.66658E-01	.52503E-01
.62500E+00	.69939E-01	.52503E-01
.68750E+00	.73221E-01	.52503E-01
.75000E+00	.76502E-01	.52503E-01
.81250E+00	.79783E-01	.52503E-01
.87500E+00	.83065E-01	.52503E-01
.93750E+00	.86346E-01	.52503E-01
.10000E+01	.89628E-01	.52503E-01

***** Number of time steps exceeded NTIME *****

CAPITULO 6

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En una simulación numérica de un proceso físico, empleamos un método numérico y una computadora para evaluar un modelo matemático del proceso. El método del elemento finito es una técnica numérica efectiva diseñada para evaluar procesos físicos complejos.

Para resolver un problema, como se ha visto, se debe representar el dominio del problema con un conjunto de subdominios (elementos finitos), formando el conjunto de ellos una malla .

El proceso físico sobre cada elemento finito se aproxima con funciones polinomiales y ecuaciones algebraicas que relacionan cantidades físicas en nodos del elemento que se analiza.

De aquí, se procede a ensamblar las ecuaciones usando la continuidad y / o el balance de las cantidades físicas.

Se debe buscar una solución aproximada u de la forma:

$$u \approx \sum_{j=1}^n u_j \psi_j + \sum_{j=1}^m c_j \phi_j$$

Donde u_j representa a los valores de u en los nodos del elemento, ψ_j son las funciones interpolación, c_j son los coeficientes sin nodo, y ϕ_j son las funciones aproximación asociadas.

Se requiere de un número suficiente de ecuaciones para obtener los coeficientes no determinados c_j y u_j .

Por esta razón es necesario un procedimiento como el de la integral pesada de la ecuación diferencial que rige.

Pueden ser más de un elemento finito u en un mismo problema, el tipo de modelo depende de las ecuaciones diferenciales y métodos usados para obtener los coeficientes no determinados sobre un elemento.

La integral pesada se requiere para generar las ecuaciones algebraicas para resolver los parámetros c_i en la solución aproximada. Esto equivale a minimizar el error en la aproximación de la ecuación diferencial en sentido de integral pesada.

Es necesario seguir el procedimiento de los tres pasos para obtener la forma débil de una ecuación diferencial y para obtener las ecuaciones algebraicas en función de los parámetros desconocidos de la solución aproximada, lo que se trató en el capítulo dos se considera como el corazón del método del elemento finito.

Los métodos variacionales presentados son un medio sencillo para encontrar soluciones aproximadas continuas en problemas físicos, las cuales son funciones continuas de posición en el dominio.

Encuentro una desventaja de los métodos variacionales con respecto a los métodos de diferencia finita tradicionales, la dificultad para seleccionar las funciones aproximación no existe un procedimiento único para construirlas sobre todo cuando el dominio es geoméricamente complejo y / o las condiciones frontera son complicadas.

Los métodos variacionales proveen un medio potente para encontrar soluciones aproximadas para la construcción de las funciones aproximación que dependen de la ecuación diferencial a ser resuelta y no de las condiciones frontera del problema. Un problema difiere de otro solo en los datos y por ésta razón se puede usar un programa de propósito general.

Una vez construida la región, las funciones se pueden representar con formas geométricas simples, de modo que sea más sencilla la construcción de las funciones aproximación.

En el método del elemento finito, se debe discretizar un dominio mediante representaciones geométricas simples en cada elemento, para formular la ecuación que rige usando cualquier método variacional. Se generan las funciones aproximación sistemáticamente usando las condiciones de frontera esencial, se conectan los elementos

imponiendo la continuidad de las variables dependientes a través de los límites del inter elemento.

El modelo del elemento finito, se desarrolla siguiendo tres pasos:

1. Formulación débil de la ecuación diferencial en un elemento.
2. Interpolación de las variables primarias de la forma débil.
3. Formular el elemento finito sobre un elemento típico.

Las variables primarias deben ser continuas en el dominio, incluyendo los nodos de conexión de los elementos. Se identifican con la forma débil.

Las funciones de interpolación requieren continuidad e independencia lineal. Con el método del elemento finito, se sustituye la interpolación de la variable primaria en la forma débil de la ecuación diferencial.

Las variables secundarias se pueden calcular usando las ecuaciones algebraicas de la malla del elemento finito (ecuaciones condensadas) o por interpolación del elemento finito.

Las variables secundarias calculadas, usando elementos lineales **Lagrange** son elementos constantes, y son elementos lineales para elementos cuadráticos **Lagrange**.

Después de haber hecho un análisis detallado en cuanto a los tipos de errores de aproximación del elemento finito, de ecuaciones diferenciales y sus mediciones para ecuación diferencial de segundo orden simple, se llega a la conclusión de que las ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes son exactas en los nodos. Sin embargo, esto no se mantiene para ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas con coeficientes constantes.

Del capítulo 5 se deduce que, el uso de un programa de computadora como el descrito, es una herramienta computacional importante dada la simplicidad en su implementación para la solución de problemas de transferencia de calor en una dimensión y la rapidez con que se lleva a cabo el proceso de solución aproximada.

CAPITULO 7

BIBLIOGRAFIA

Reddy, J.N.

ISBN 0-07-051355-4

An Introduction to the Finite Element Method

Mc. Graw Hill

Second Edition 1993

Seegerlind, Larry J.

ISBN 0-471-80662-5

Applied Finite Element Analysis

John Wiley and Sons. Inc.

Second Edition 1984

CAPITULO 8

LISTADO DE TABLAS

TABLA	CONTENIDO	PAGINA
2.1	Comparación de la solución Rayleigh – Ritz con la exacta . $u(0) = u(1) = 0$	55
2.2	Comparación de la solución Rayleigh-Ritz con la exacta $u(0) = 0, \frac{du}{dx} \Big _{x=1} = 1$	56
3.1	Pasos involucrados en el análisis del elemento finito en un problema.	68
3.2	Ejemplos de ecuaciones de segundo orden en una dimensión.	72
4.1	El error L_2 y el error en la norma de energía.	131
5.1	Comparación de las soluciones elemento finito y exacta .	140
5.2	Archivo de datos de entrada para el problema 1 .	141
5.3	Archivo de datos de entrada para el problema 2 .	146

CAPITULO 9

LISTA DE FIGURAS

Figura	Nombre	Pagina
1.1	Aproximación de la circunferencia de un círculo mediante elementos línea.	5
1.2	Determinación aproximada del centroide de masa.	10
2.1	Frontera y dominio.	24
2.2	Comparación de las soluciones Rayleigh-Ritz y exacta $u(0) = u(1) = 0$	56
3.1	Discretización del elemento finito de un dominio en una dimensión.	71
3.2	Discretización del elemento, coordenadas local y global , elemento típico, variables primarias y secundarias en los nodos del elemento.	79
3.3	Funciones de interpolación global y local para los nodos del elemento.	84
3.4	Refinamiento de soluciones del elemento finito.	86
3.5	Elemento cuadrático Lagrange en una dimensión y sus funciones de interpolación.	88
3.6	Aproximación de un elemento con sección transversal variable linealmente mediante un elemento con sección transversal constante.	97
3.7	Ensamble de dos elementos lineales de Lagrange.	101

3.8	La geometría y malla del elemento finito de una estructura Barra.	105
4.1	Diversas medidas de error $E = u - uh$ entre la solución exacta u y la solución del elemento finito uh	126
4.2	Gráficas de las normas energía y L_2 de errores contra el tamaño de la malla.	133

CAPITULO 10

APENDICE

GLOSARIO DE TERMINOS USADOS EN EL METODO DEL ELEMENTO FINITO

Convergencia.- Exactitud conforme se incrementa el número de elementos en la malla.

Componente de rigidez.- Fuerza causada por un desplazamiento unitario aplicado.

Condición de frontera esencial (EBC).- Especificación de la variable primaria en la frontera.

Condición de frontera natural (NBC).- Especificación de las variables secundarias en la frontera.

Condiciones de frontera homogéneas.- Cuando los valores especificados son cero $u_0 = 0$ ó $Q_0 = 0$

Condiciones de frontera no homogéneas.- Cuando los valores especificados son diferentes de cero $u_0 \neq 0$, $Q_0 \neq 0$

Conectividad del elemento.- Número de nodos que limitan al elemento.

DEM.- Método del elemento discreto donde los elementos individuales pueden tener movimientos finitos.

Discretización.- El dominio del problema es dividido en regiones mas pequeñas. Es la preparación de un archivo de entrada que contenga:

- (1).- Coordenadas de todos los puntos nodales.

- (2).- Tipos de elementos.
- (3).- Conectividad de elementos.
- (4).- Elementos constantes aplicables.
- (5).- Propiedades del material.

Dominio (Ω) .- Conjunto de puntos en el espacio, con la propiedad de que si P es un punto en el dominio, entonces todos los puntos cierran hacia P, perteneciendo al dominio.

Dominio convexo .- Cuando dos puntos cualesquiera del dominio se pueden unir con una línea tendida completamente dentro de él.

Ecuaciones consistentes .- Son las que no tienen solución.

Elemento finito .- Dominio en miniatura (subdominio), desde el cual se pueden obtener una serie de ecuaciones algebraicas para las incógnitas nodales.

Ensamble de matriz de rigidez global. Se refiere a la suma de las rigideces de los elementos individuales, cuando se calculan en el sistema de coordenadas global.

Exactitud de la solución .- Diferencia entre la solución exacta y la solución del elemento finito

Forma débil de una ecuación diferencial .- Es una exposición de integral pesada de una ecuación diferencial en la que la diferenciación se distribuye entre las variables dependientes y la función peso e incluye las condiciones frontera naturales del problema. Se conoce también como “ forma variacional”.

Frontera de un dominio (Γ) .- Serie de puntos tal que, en cualquier cercanía de esos puntos, hay puntos que pertenecen al dominio y puntos que no. Los puntos en la frontera no corresponden al dominio.

Funcional .- Expresión integral de la forma $I(u) = \int_a^b F(x, u, u') dx$

$$u = u(x), \quad u' = \frac{du}{dx}$$

Donde el integrando $F(x, u, u')$ es una función dada de los argumentos :

$$x, u, \quad y \quad \frac{du}{dx}$$

Funcional bilineal .- Funcional lineal en cada uno de sus argumentos u y v

Forma bilineal simétrica. - Cuando $B(u, v) = B(v, u)$

Grado de libertad (DOF). - Se refiere a las incógnitas a resolver para un problema, las cuales dependen de la manera de modelar el problema.

Integral pesada. - Procedimiento para dar lugar a un número necesario y suficiente de ecuaciones para los coeficientes no determinados, c_j y u_j .

Malla del elemento finito. Conjunto de elementos finitos.

Malla uniforme. - Todos los elementos son de igual longitud.

Malla no uniforme. - Los elementos son de diferente longitud.

Matriz bandedada. - Todos los términos de la matriz están colocados alrededor de la diagonal principal.

Matriz de elasticidad $[D]$. - Es una propiedad del material del elemento.

Matriz de rigidez $[B]$. - Es una propiedad de la forma del elemento. En mecánica de materiales expresa ecuaciones esfuerzo- deformación. Es la matriz de las derivadas de las funciones interpolación, por lo cual recibe el nombre de matriz gradiente.

Matriz simétrica. - Implica que la matriz es cuadrada, significa que $K_{i,j} = K_{j,i}$

Método variacional de aproximación. - Método que sirve para obtener una solución aproximada en la forma de una combinación lineal de funciones aproximación ϕ_j , conveniente y parámetros c_j no determinados.

$$\sum_j c_j \phi_j .$$

Nodos. - Puntos de conexión de unos elementos con otros.

RIE. - Elemento de integración reducida.

Símbolo variacional. - Operador δ en el cambio αv , donde α es una constante y v es una función : $\delta u = \alpha v$

Singularidad de $[K]$. - Significa que la ecuación $[K]\{u\} = \{f\}$ no se resuelve como tal ya que la matriz $[K]$ tiene un determinante cero.

Variable primaria PV .- Es la variable dependiente de un problema, expresada en la misma forma que la función peso que aparece en el término frontera

Variables secundarias SV. - Son los coeficientes de la función peso y sus derivadas en las expresiones frontera. Siempre tienen significado físico.

CAPITULO 11

AUTOBIOGRAFIA

Nombre: Adrián Salazar Vargas

Candidato a obtener el grado de: Maestro en Ciencias de la Ingeniería Mecánica
con especialidad en Térmica y Fluidos.

Tesis que presenta: “ EL METODO DEL ELEMENTO FINITO APLICADO EN LA
SOLUCION DE PROBLEMAS DE TRANSFERENCIA DE
CALOR EN UNA DIMENSION”

Título Profesional: Ingeniero Mecánico Electricista

Fecha de nacimiento: 8 de Septiembre de 1950

Lugar de nacimiento: Tampico, Tamps.

Nombre de los Padres: Sr. José Guadalupe Salazar Torres⁽⁺⁾ y Sra. Ma. De la Paz
Vargas de Salazar

Grado obtenido en estudios Profesionales : Ingeniero Mecánico Electricista

Egresado de la Institución : Universidad Autónoma de Nuevo León

Dependencia: Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Fecha: 15 Diciembre de 1972

Actividades Profesionales: Maestro en la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de
la Universidad Autónoma de Nuevo León desde el 1 de
Octubre de 1971 a la fecha.

Areas: Coordinación de Ciencias y Coordinación de Ingeniería Térmica y Fluidos

Actividades Profesionales: Grupo LALA Monterrey S.A. de C.V. desde Julio 1985 a la fecha.

Areas: Gerencia de Logística y Distribución.
Gerencia de Operaciones.

