

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



DISEÑO DE UN CONTROL PARA SISTEMAS CON
FLUJOS MAGNETICOS

POR

GUSTAVO PEREZ HERNANDEZ

T E S I S

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO
EN CIENCIAS DE LA INGENIERIA ELECTRICA
CON ESPECIALIDAD EN CONTROL

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L.

ABRIL 2000

LIANI
FIME

DISERVO DE UN CONTROL PARA SISTEMAS CON
FLUJOS MAGNETICOS

TM
Z5853
.M2
FIME
2000
P4



1020130079

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



DISEÑO DE UN CONTROL PARA SISTEMAS CON
FLUJOS MAGNETICOS

POR
GUSTAVO PEREZ HERNANDEZ

T E S I S

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO
EN CIENCIAS DE LA INGENIERIA ELECTRICA
CON ESPECIALIDAD EN CONTROL

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L. ABRIL 2000

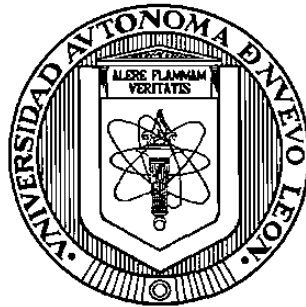
0185 - 27260

TM
25853
•H2
FINE
2000
P4



FONDO
TESIS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



**DISEÑO DE UN CONTROL PARA SISTEMAS CON FLUJOS
MAGNÉTICOS**

POR

GUSTAVO PÉREZ HERNÁNDEZ

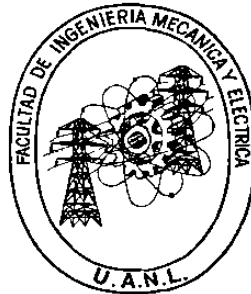
TESIS

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA ELÉCTRICA CON ESPECIALIDAD EN CONTROL

San Nicolás de los Garza, N. L.

Abril, 2000.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



**DISEÑO DE UN CONTROL PARA SISTEMAS CON FLUJOS
MAGNÉTICOS**

POR

GUSTAVO PÉREZ HERNÁNDEZ

TESIS

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA ELÉCTRICA CON ESPECIALIDAD EN CONTROL

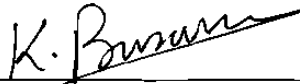
San Nicolás de los Garza, N. L.

Abril, 2000.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSTGRADO

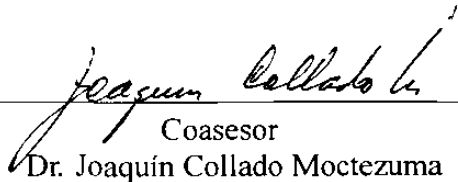
Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis **DISEÑO DE UN CONTROL PARA SISTEMAS CON FLUJOS MAGNÉTICOS** realizada por el Ing. Gustavo Pérez Hernández, matrícula 1005883 sea aceptada para su defensa en opción al Grado de Maestro en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica con especialidad en Control.

El comité de tesis:

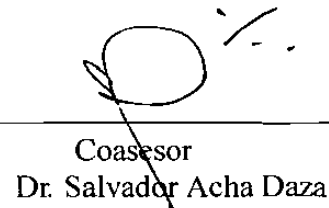


Asesor

Dr. Krishna Kumar Busawon



Coasesor
Dr. Joaquín Collado Moctezuma



Coasesor
Dr. Salvador Acha Daza



Vó. Bo.

M. C. Roberto Villarreal Garza
División de Estudios de Post-grado

San Nicolás de los Garza, N. L.

Abril, 2000.

© Copyright 2000
por Gustavo Pérez Hernández,
Reservados Todos los Derechos.

Dedicatoria

A mi madre Elena Hernández Ramírez.

Por haberme dado la vida, su amor y todo el apoyo en mis decisiones; por haber sido mi guía y amiga durante todos estos años y enseñarme que las experiencias en la vida son parte de una formación para salir triunfante. Por todo el apoyo económico y por ser una madre y un padre a la vez.

A mis hermanos Lucy, Angel, Hugo Amando, Elena del Socorro y Sergio Arturo quienes siempre me brindaron su cariño, apoyo y por haber creído en mis deseos de superación.

A dos seres importantes en mi vida, quienes fueron la motivación para subir un peldaño más en mi preparación, y enseñarles que todo se puede cuando se quiere. A Augusto Carlos y a Gustavo de Jesus.

A todos mis demás parientes que de alguna manera me apoyaron incondicionalmente y especialmente a mi abuelo Prócoro Hernández, a mis tías Pina y Silvia, a mi tío Pancho y a mi primo Alejandro Cadena.

Agradecimientos

Al Dr. Krishna K. Busawon por su orientación, apoyo y asesoría que me brindó para la elaboración y el nivel académico que hicieron posible la realización de la presente tesis.

Al Dr. Salvador Acha Daza por proporcionarme la información y comentarios que contribuyeron a la elaboración final de este trabajo.

A todos los profesores del Programa Doctoral por proporcionarme su valioso apoyo y su conocimiento abiertamente durante la realización de mis estudios y estadía en el programa, especialmente al Dr. Joaquín Collado Moctezuma, al Dr. Jesús de León Morales y al Dr. Ernesto V. Martínez.

A Maria Elena, por su apoyo y motivación que me brindó para la culminación de este trabajo en estos últimos meses.

A todos mis compañeros del Doctorado por brindarme incondicionalmente su amistad y comprensión durante todo este tiempo, especialmente a Josué R. Coutiño, Pedro Rubio, David A. Díaz Romero, Mario A. Villanueva Irma R. Valadez Guzmán, Ma. de los Angeles Carrera González, Oscar F. Huerta Guevara, Francisco H. Florenzano Lara y César Guerra.

Al CONACYT por su valioso apoyo económico y brindar la oportunidad de superación a profesionistas mexicanos.

Gracias.

Resumen

Diseño de un Control para Sistemas con Flujos Magnéticos

Publicación No. _____

Gustavo Pérez Hernández

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Profesor Asesor: Dr. Krishna Kumar. Busawon

Abril, 2000.

El contenido de la presente tesis consiste en resolver el problema de control de sistemas que están involucrados con flujos electromagnéticos en su dinámica. La importancia de éstos sistemas radica en que actualmente, es el medio de conversión de energía más utilizado en la industria.

En particular se emplea el diseño de una técnica de control llamada Control de Seguimiento, el cual consiste en aplicar una señal de referencia al control y que las "salidas" del sistema sigan dichas señales. En la actualidad existen controles que contienen variables que no son medibles, para esto, es necesario de estimar estas variables por medio de un observador o reconstructor de estados.

El algoritmo utilizado para el desarrollo del control se encuentra en el capítulo 3, en el que sólo se emplean técnicas lineales y operaciones matriciales que facilitan la obtención de un buen resultado. El diseño del control ya mencionado es aplicado al motor de inducción y a un actuador electromagnético. La aplicación al primero es para controlar los flujos en el estator, ya que, es sabido que en la actualidad es difícil el control de los mismos. En el actuador electromagnético el control es utilizado para estabilizar la corriente que pasa a través de la bobina, en la que por medio de un flujo magnético, impulsa el elemento móvil.

Se presentan simulaciones tanto en lazo abierto (con control conocido), como en lazo cerrado (utilizando el control diseñado).

Los resultados obtenidos en este trabajo, representan nuevas herramientas para el desarrollo de controles que cuentan con un procedimiento muy extenso para su diseño.

Notación

\in	Pertenece a
\exists	Existe
\forall	Para toda
\Rightarrow	Implica que
\rightarrow	Tiende a
$:$	Tal que
$\ \cdot\ $	Norma de
$ \cdot $	Valor absoluto de
\mathbb{R}	Campo de los números reales
\mathbb{R}^n	Espacio vectorial de dimensión n con componentes reales
$\mathbb{R}^{n \times n}$	Espacio vectorial de las matrices de dimensión $n \times n$ con elementos reales
F	Matriz
F^T	Matriz transpuesta de F
F^{-1}	Matriz inversa de F
\sup	Supremo
\max	Máximo
exp	Exponente
\mathbb{C}	Campo de los números complejos
$\frac{d}{dt}$	Derivada con respecto al tiempo
$f(\cdot)$	Función
\neq	Diferente
\leq	Menor o igual que
\geq	Mayor o igual que
ε	Epsilon
$V(\cdot)$	Derivada con Respecto al Tiempo de la Función $V(\cdot)$
\equiv	Equivalente a

Indice

1 Introducción	
1.1 Motivación	1
1.2 Antecedentes	2
1.3 Organización de la Tesis	3
2 Preliminares Matemáticos	
2.1 Introducción	5
2.2 Normas Vectoriales	5
2.3 Normas de Matrices	6
2.4 Estabilidad de Lyapunov	7
2.4.1 Propiedades Fundamentales	8
2.4.2 Definiciones de Estabilidad para Sistemas Autónomos	8
2.4.3 Función de Lyapunov	9
2.4.4 Estabilidad de Sistemas Lineales	10
2.5 Observadores	11
2.5.1 Observadores Lineales	13
2.5.2 Observadores No Lineales	14
2.6 El Principio de Separación	15
3 Diseño del control	
3.1 Introducción	18
3.2 Diseño de un Controlador para Sistemas Multi-Entrada	19
3.2.1 Algoritmo	20
3.3 Control de Seguimiento	24
3.3.1 Problemas de Seguimiento (Tracking)	24
3.3.1.1 Seguimiento Asintótico	24

Indice (continuación)

3.3.2 Diseño de un Control de Seguimiento	25
3.4 Resumen del Capítulo	27
4 Control de Seguimiento de Flujo Magnético para un Motor de Inducción	
4.1 Introducción	28
4.2 Modelado del Motor de Inducción	30
4.2.1 Simulación del Motor de Inducción	35
4.3 Aplicación del Algoritmo de Control al Sistema Dinámico del Motor de Inducción	40
4.3.1 Algoritmo	41
4.3.2 Simulación del Control de Seguimiento del Motor de Inducción	45
4.4 Cálculo de las Corrientes en Lazo Cerrado	49
4.4.1 Simulación de las Corrientes Deseadas	52
4.5 Control Indirecto de Velocidad	53
4.6 Observador del Motor de Inducción	54
4.6.1 Observador de Flujo del Rotor	55
4.6.2 Simulación del Observador	56
4.7 Control de Seguimiento a Través del Observador del Flujo	58
4.7.1 Simulación del Motor Controlado a Través del Observador de Flujo	58
4.8 Resumen del Capítulo	60
5 Control de Sistemas Electromecánicos	
5.1 Introducción	61
5.2 Ecuaciones de Lagrange	62
5.3 Teoría y Modelado de Sistemas Electromecánicos	65
5.4 Diseño de la Estrategia de Control	70
5.5 Observador para Sistemas Electromecánicos	72

Índice (continuación)

5.6 Modelado Matemático de un Actuador Electromecánico	72
5.6.1 Desarrollo del Modelo	73
5.6.2 Simulación del Actuador	76
5.7 Aplicación del Control al Actuador Electromecánico	78
5.7.1 Simulación del Control de Seguimiento para el Actuador Electromecánico	79
5.8 Resumen del Capítulo	81
6 Conclusiones	
6.1 Aportaciones del Presente Trabajo	82
6.2 Trabajos a Futuro y Recomendaciones	83
Apendice A	84
Apéndice B	87
Referencias	93

Indice de Figuras

Figura 2.1	Diagrama del Observador	12
Figura 2.2	Principio de Separación	16
Figura 4.1	Modelo del Motor de Inducción en Coordenadas α - β	31
Figura 4.2	Simulación de $\varphi_{r\alpha}$ (flujo del rotor)	36
Figura 4.3	Simulación de $\varphi_{r\beta}$ (flujo del rotor)	36
Figura 4.4	Simulación de $I_{s\alpha}$ (corriente en el estator)	37
Figura 4.5	Simulación de $I_{s\beta}$ (corriente en el estator)	37
Figura 4.6	Simulación de la Entrada $u_{s\alpha}$ (voltaje)	38
Figura 4.7	Simulación de la Entrada $u_{s\beta}$ (voltaje)	38
Figura 4.8	Simulación de la Velocidad ω	39
Figura 4.9	Diagrama de Control de Seguimiento	40
Figura 4.10	Simulación del Flujo $\varphi_{r\alpha}$ y $\varphi_{r\alpha,d}$	46
Figura 4.11	Simulación del Flujo $\varphi_{r\beta}$ y $\varphi_{r\beta,d}$	47
Figura 4.12	Simulación del Control de Seguimiento $u_{s\alpha}$	47
Figura 4.13	Simulación del Control de Seguimiento $u_{s\beta}$	48
Figura 4.14	Simulación de la Velocidad ω	48
Figura 4.15	Simulación de las Corrientes $I_{s\alpha}$ y $I_{s\alpha,d}$	52
Figura 4.16	Simulación de las Corrientes $I_{s\beta}$ y $I_{s\beta,d}$	52
Figura 4.17	Simulación de $\varphi_{r\alpha}$ y $\hat{\varphi}_{r\alpha}$	57
Figura 4.18	Simulación de $\varphi_{r\beta}$ y $\hat{\varphi}_{r\beta}$	57
Figura 4.19	Principio de Separación del Motor	58
Figura 4.20	Simulación de $\varphi_{r\alpha}$ y $\varphi_{r\alpha,d}$	59
Figura 4.21	Simulación de $\varphi_{r\beta}$ y $\varphi_{r\beta,d}$	60
Figura 5.1	Actuador Electromecánico	73
Figura 5.2	Simulación de la Corriente q_2	77
Figura 5.3	Simulación de la Distancia x	77
Figura 5.4	Simulación de la Velocidad r	78
Figura 5.5	Simulación de q_2, \dot{q}_{1ref}	80
Figura 5.6	Simulación de q_1, q_{1ref} (carga)	80
Figura A1	Curvas de Magnetización	85
Figura A2	Circuito Magnético	86

Indice de Tablas

Tabla 5.1	Coordenadas Básicas y sus Derivadas	65
Tabla 5.2	Simbolos de Elementos Concentrados	66

Capítulo 1

Introducción

1.1 Motivación

Hoy en día el desarrollo en las industrias de los componentes electrónicos y la disminución de sus costos se va haciendo cada día un factor importante de estudio, con la finalidad de obtener resultados mucho más eficaces para el buen funcionamiento de los mismos.

En este trabajo de investigación se presenta el diseño de un control de seguimiento para los sistemas que están descritos por variables como flujos electromagnéticos, corrientes y voltajes. Esta clase de sistemas a los que nos referimos son los motores, los generadores, los sistemas electromecánicos, etc.

Gran parte de la teoría clásica de control, está motivada por problemas físicos y está asociada con grandes matemáticos como: Gauss, Lagrange, Euler, Bernoulli, etc. Durante el desarrollo reciente del control y decisión de problemas, las técnicas clásicas están muy examinadas, extendidas, algunas veces redescubiertas y aplicadas a problemas con un origen muy diferente que aquellos que son responsables por el reciente desarrollo.

La motivación que se tuvo para realizar este trabajo es buscar un método nuevo de control para los tipos de sistemas que ya se mencionaron con anterioridad. En la actualidad existen varios tipos de controles que necesitan de un análisis matemático muy elaborado para su construcción y en esta investigación se presenta el diseño de un algoritmo de control en el que sólo se utilizan operaciones algebraicas matriciales, y con el que posteriormente, una vez que se encuentra la ley de control que deshecha las no-linealidades del sistema se le aplica un criterio de seguimiento con el fin de llevar el sistema a cualquier valor deseado. Se podrá observar que dicho control tiene un tratamiento casi lineal y que éste procedimiento simplifica mucho el desarrollo del mismo. El control está diseñado para ser aplicado al motor de inducción y sistemas afines. Otra de las motivaciones que influyeron para el desarrollo de esta investigación es la preocupación sobre el creciente consumo de energía eléctrica en todos los procesos industriales y que si se llegan a utilizar controles de una manera

óptima para las máquinas eléctricas, existiría un ahorro de energía considerable.

1.2 Antecedentes

El objetivo del control no-lineal es controlar de manera óptima los sistemas con no linealidades, esto es, de aquellos sistemas de control que contienen por lo menos un componente no-lineal.

El área de control no-lineal es una disciplina con una gran variedad de métodos robustos y una larga historia de aplicaciones industriales exitosas. Este tema es de una importancia relevante porque muchos investigadores y diseñadores de control de aviones y vehículos espaciales, en la robótica, en los procesos de control e ingeniería biomédica, han mostrado recientemente un interés creciente en el desarrollo y aplicaciones de metodologías de controles no-lineales.

Durante mucho tiempo se ha investigado sobre el desarrollo de controladores para resolver el problema de estabilización de sistemas. En la actualidad existen diferentes métodos para el desarrollo de un control, por ejemplo, los trabajos que se han estado desarrollando en estos últimos años son: control por pasividad que está basado sobre el concepto de la conservación y disipación de energía en los sistemas dinámicos. La noción de pasividad es motivada por la propiedad de energía almacenada que es utilizada para analizar la estabilidad de circuitos eléctricos RLC, esa energía es utilizada como una función de Lyapunov [34]. Otro método utilizado es el de perturbaciones singulares que consiste en analizar sistemas con dos o más escalas de tiempo. Este método permite reducir la dimensión del sistema y diseñar leyes de control simplificadas. De hecho, el motor de inducción es un sistema con dos escalas de tiempo. La parte eléctrica tiene una constante de tiempo más pequeña que la mecánica. Para más detalles se puede estudiar las referencias [12] y [22]. El método de modos deslizantes consiste en definir una superficie deslizante (Sliding Surface) que es atractiva por la acción de algunos controles (Switching Terms). La atractividad de ésta superficie deslizante implica que tenemos una convergencia asintótica del sistema hacia ésta superficie. Aún cuando este método es teóricamente interesante, tiene la desventaja de producir un control con componentes de frecuencia alta (Chattering effects). En la práctica, estos componentes de alta frecuencia producen la fatiga de los motores y reduce considerablemente el tiempo de

vida de los mismos (véase [41] y [40]). El control linealizante por retroalimentación consiste en transformar el sistema a controlar en un sistema lineal estable mediante una transformación y una retroalimentación. Generalmente las leyes de control linealizante por retroalimentación cancelan las no-linealidades que aparecen en el sistema transformado, para llevarlo a un sistema completamente lineal. Por lo consiguiente, si la no-linealidad no es conocida perfectamente (que es lo que ocurre en la realidad), la cancelación no es perfecta y el sistema puede hacerse inestable (ver [9] y [31]). El control adaptivo es un enfoque para diseñar controladores con incertidumbres paramétricas. Un control adaptivo es diferente de un control ordinario en el sentido que los parámetros del controlador son variables. Existe un mecanismo para ajustar estos parámetros en línea, el cual se realiza a través de una función que se llama "ley de adaptación", para mas detalles estudiar [37]. Y para finalizar se puede mencionar otro metodo que es "backstepping", esta técnica consiste en adicionar una integrador al sistema. Este diseño es recursivo y tiene la desventaja que no se puede aplicar a los sistemas de alta dimensión puesto que los cálculos son demasiados complejos (véase [19]).

En este trabajo se aborda una técnica de control de seguimiento para sistemas multivariables, el cual consiste en el diseño de un algoritmo para encontrar una matriz que nos transforma el sistema a una forma casi lineal y una vez que se tiene la transformación, es posible aplicar el control de seguimiento.

1.3 Organización de la Tesis

Este trabajo de investigación está organizado de la siguiente manera:

En el Capítulo 2 se presentan los fundamentos matemáticos y las definiciones que se manejan durante el desarrollo de este trabajo de investigación. El capítulo inicia con la definición de norma, las cuales se usan para garantizar que nuestras funciones están acotadas. También se da a conocer el concepto de estabilidad de Lyapunov, el tema de observadores y la teoría sobre el principio de separación, que son también parte del contenido de este capítulo.

En el Capítulo 3, se trata el desarrollo y el diseño del control que se presenta en este trabajo, el cual cuenta con un algoritmo sencillo de resolver, ya que sólo es necesario realizar manipulaciones

matriciales y algebraicas para encontrar la solución del problema planteado. Se anexa una sección que discute el "control de seguimiento" que consiste en fijar una señal o trayectoria deseada y hacer que el sistema ajuste su comportamiento para satisfacer tal criterio.

En el Capítulo 4, se desarrolla el modelado del motor de inducción en coordenadas α y β , así como la aplicación del control diseñado en el Capítulo 3. También fue necesaria la aplicación de un observador, ya que en el sistema dinámico del motor de inducción se encuentran variables que no son medibles, tales como, los flujos magnéticos. Se realizan simulaciones de la dinámica del motor tanto en lazo abierto como en lazo cerrado aplicando el objetivo del control de seguimiento. Con el fin de presentar un trabajo más completo se incluye la aplicación del algoritmo de control a los sistemas electromecánicos que se desarrolla en el Capítulo 5. En este capítulo se presenta la teoría de sistemas electromecánicos, preliminares sobre ecuaciones de Euler-Lagrange para obtener la representación de la dinámica de dichos sistemas, así, como el modelado de un actuador magnético para posteriormente aplicarle el control de seguimiento y por último observar el comportamiento de este sistema mediante simulaciones en computadora utilizando el software SIMNON.

En el Capítulo 6, se incluye las conclusiones de este trabajo, así, como las recomendaciones para los trabajos a futuro. Se finaliza la tesis con dos apéndices. El apéndice A, contiene el análisis del comportamiento de los flujos en función de las corrientes en forma de curvas. El apéndice B, contiene un artículo que fue aceptado por el IASTED y se titula "An Observer-Based Flux Tracking Control For Induction Motors" en el que fungen como autores el Dr. K. Busawon, G. Perez y el Dr. S. Acha-Daza.

Durante el tiempo que se estuvo desarrollando ésta investigación, fue necesario del conocimiento de varias definiciones para el tratamiento de sistemas no-lineales, las cuales fueron la base esencial para la comprensión del problema que se trataba de resolver. La experiencia que se adquiere durante el tiempo que se está investigando es el nivel de conocimiento debido a la constante búsqueda de respuestas a un problema. Pero es necesario mencionar que cuando se encuentra esa respuesta a la cual se le ha dedicado una cantidad de tiempo moderada, es gratificante y sobre todo satisfactorio.

Capítulo 2

Preliminares Matemáticos

2.1 Introducción

En este capítulo se presentan conceptos y definiciones sobre fundamentos matemáticos los cuales son útiles durante el desarrollo de este trabajo. El objetivo es establecer las herramientas necesarias para la obtención de los resultados y operaciones utilizadas.

Se considera importante incluir conceptos para el análisis de estabilidad de los sistemas no lineales con énfasis en el método de Lyapunov. Así mismo se tratan conceptos para el análisis de sistemas electromecánicos, así como el modelo matemático de dicho sistema y se establecen las condiciones para aplicar el algoritmo de control que permite estabilizarlo.

2.2 Normas Vectoriales

Sea \mathbf{X} un espacio vectorial lineal. El concepto de la norma de un vector $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ es una generalización de la definición de longitud. Cualquier función real $\|\cdot\| : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$ puede ser definida como una norma si satisface las siguientes propiedades para cualquier $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ y para cualquier constante $\alpha \in \mathbb{C}$

- i) $\|\mathbf{x}\| \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}$ y $\|\mathbf{x}\| = 0$, si y sólo si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$,
- ii) $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$,
- iii) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|; \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$.

El axioma *i)* establece que el vector cero $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene longitud cero y que cada uno de los otros vectores tienen una longitud positiva. El axioma *ii)*, declara que si el vector es escalado multiplicándolo por un escalar, entonces la longitud del vector es multiplicado por la magnitud del escalar. La condición *iii)* es conocida como la desigualdad del triángulo, y declara que la longitud de la suma de dos vectores es menor o igual a la suma de las longitudes de los vectores.

Se puede considerar las normas de clase p , definidas como:

$$\|\mathbf{x}\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

y

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_i |x_i|.$$

Las normas más utilizadas son $\|\mathbf{x}\|_1$, $\|\mathbf{x}\|_\infty$, y la norma Euclidiana establecida como

$$\|\mathbf{x}\|_2 = (|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2)^{1/2} = (\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{1/2}.$$

Si $\mathbf{X} = \mathbb{R}^n$ (espacio completo) todas las normas p son equivalentes en el sentido que, si $\|\cdot\|_\alpha$ y $\|\cdot\|_\beta$ son dos normas diferentes, entonces existen constantes positivas c_1 y c_2 tales que:

$$c_1 \|\mathbf{x}\|_\alpha \leq \|\mathbf{x}\|_\beta \leq c_2 \|\mathbf{x}\|_\alpha,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Existen normas Euclidianas generalizadas para los sistemas lineales, las cuales son frecuentemente utilizadas como funciones de Lyapunov y están representadas como:

$$\|\mathbf{x}\|_P^2 = \mathbf{x}^T P \mathbf{x},$$

donde P es una matriz positiva definida.

2.3 Normas de Matrices

En esta sección se presentan los conceptos de norma de una matriz. Estos conceptos son usados para acotar las soluciones de ecuaciones diferenciales no lineales [42].

Sea $\mathbb{C}^{n \times n}$ (respectivamente, $\mathbb{R}^{n \times n}$) el conjunto de todas las matrices de dimensión $n \times n$ con elementos complejos (respectivamente reales). Entonces $\mathbb{C}^{n \times n}$ es un espacio lineal vectorial complejo si la adición y multiplicación escalar están dadas componente a componente.

Definición 2.1 Para cada matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ existe un correspondiente mapeo lineal α en \mathbb{C}^n

dentro de él mismo, definido por:

$$\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n.$$

Definición 2.2 Sea $\|\cdot\|$ una norma dada sobre \mathbb{C}^n . Entonces para cada matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, la cantidad $\|\mathbf{A}\|_i$, está dada de la siguiente manera:

$$\|\mathbf{A}\|_i = \sup_{\mathbf{x} \neq 0, \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n} \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{Ax}\| = \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq 1} \|\mathbf{Ax}\|, \quad (2.1)$$

esta expresión es llamada la norma inducida (matricial) de \mathbf{A} correspondiente a la norma del vector $\|\cdot\|$.

Puede observarse que son dos funciones distintas envueltas en la definición 2.2; una es la función de la norma $\|\cdot\|$ mapeando \mathbb{C}^n dentro de \mathbb{R} , y la otra es la función de la norma inducida $\|\cdot\|_i$ mapeando $\mathbb{C}^{n \times n}$ dentro de \mathbb{R} .

La norma inducida de una matriz puede estar dada como una simple interpretación geométrica. Las ecuaciones (2.1) muestran que $\|\mathbf{A}\|_i$ es la mínima cota superior del radio $\frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|}$ cuando \mathbf{x} varia sobre \mathbb{C}^n . En este sentido, puede pensarse de $\|\mathbf{A}\|_i$ como la ganancia del correspondiente mapeo lineal para \mathbf{A} .

2.4 Estabilidad de Lyapunov

El objetivo de la teoría de estabilidad es dar criterios correctos a cerca del comportamiento dinámico de un sistema sin que sean calculadas las soluciones particulares de las trayectorias. Quizás el primer investigador que se enfoco al estudio de estabilidad en el sentido moderno fue Lagrange (1788), quién analizó sistemas mecánicos usando técnicas a las que ahora se les conoce por el nombre mecánica Lagrangiana. Uno de los postulados de Lagrange fue que, en la ausencia de fuerzas externas, el equilibrio de un sistema mecánico conservativo es estable con tal que éste corresponda a un mínimo de energía potencial.

El adelanto cuantitativo en teoría de estabilidad, el cual permite un análisis arbitrario de las

ecuaciones diferenciales, es debido a el matemático ruso A. M. Lyapunov (1892). Lyapunov introdujo las definiciones básicas de estabilidad que son usadas hoy en día, y también demostró muchos de los teoremas fundamentales para construir la teoría de estabilidad.

2.4.1 Propiedades Fundamentales

En esta sección se dan a conocer dos propiedades muy importantes que son esenciales para las definiciones de estabilidad, y son, las condiciones Lipschitz (véase [19]).

Definición 2.3 *Suponga una función $\dot{x} = f(t, x)$ con $x(t_0) = x_0$. Entonces se dice que la condición de Lipschitz de $f(t, x)$ satisface la siguiente desigualdad*

$$\| f(t, x) - f(t, y) \| \leq L \| x - y \|,$$

para toda (t, x) y (t, y) en cualquier vecindad de (t_0, x_0) , donde L es una constante de Lipschitz para la función f y $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Definición 2.4 *Una función $f(x)$ se dice que es localmente Lipschitz en el dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ si cada punto de D tiene una vecindad D_0 tal que f satisface la condición de Lipschitz para todos los puntos en D_0 con alguna constante de Lipschitz L_0 (donde D es un conjunto abierto y conectado que pertenece al espacio \mathbb{R}^n).*

2.4.2 Definiciones de Estabilidad para Sistemas Autónomos

Con el fin de analizar las definiciones de los diferentes tipos de estabilidad (véase [19]), puede considerarse la siguiente ecuación diferencial autónoma:

$$\dot{x} = f(x), \tag{2.2}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, y $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ es localmente Lipschitz que mapea del dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ dentro de \mathbb{R}^n . Un concepto importante a dar a conocer en esta sección es la definición de un punto de equilibrio.

Definición 2.5 *Un punto $x = x^*$ en el espacio de estado se dice que es un punto de equilibrio de la ecuación diferencial*

$$\dot{x} = f(t, x),$$

si el sistema se encuentra inicialmente en un punto x^ , y éste permanece en x^* para todo tiempo futuro. Para los sistemas autónomos (2.2) los puntos de equilibrio son las raíces reales de la ecuación*

$$f(x) = 0.$$

Un punto de equilibrio puede ser aislado, esto es, que no existen otros puntos de equilibrio en su vecindad, o puede ser una continuidad de puntos de equilibrio. Si el punto de equilibrio bajo estudio no es el origen, uno puede siempre reescribir las coordenadas en \mathbb{R}^n (cambio de coordenadas) de tal manera que el equilibrio de interés se transforma en el nuevo origen.

Definición 2.6 *El punto de equilibrio $x = 0$ (en el origen) del sistema (2.2) es estable si, para cada $\varepsilon > 0$, existe una $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que*

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

Para demostrar que el origen es estable para cualquier valor de ε que se esté diseñando, se debe producir un valor de δ , posiblemente dependiente de ε , tal que la trayectoria del sistema que comience en el origen de la vecindad δ nunca pueda dejar la vecindad ε .

Definición 2.7 *El punto de equilibrio $x = 0$ de (2.2) es asintóticamente estable, si éste es estable y δ puede asignarse tal que*

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

2.4.3 Función de Lyapunov

Otra forma de determinar la estabilidad en un punto de equilibrio a lo largo de las trayectorias de un sistema es a través de una función de energía [19]. En 1892, Lyapunov mostró que ciertas

funciones pueden ser usadas en lugar de funciones de energía, para señalar la estabilidad en un punto de equilibrio. Estas funciones son llamadas funciones de Lyapunov y están definidas como sigue.

Sea $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable definida en el dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ que contiene el origen. La derivada de V a la largo de la trayectoria de un sistema depende de las ecuaciones del sistema. Por lo tanto, $\dot{V}(x)$ puede ser diferente para sistemas diferentes.

Teorema 2.1 *Sea $x = 0$ un punto de equilibrio del sistema (2.2) y $D \in \mathbb{R}^n$ un dominio que contiene a $x = 0$. Sea $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable, tal que*

$$V(0) = 0 \quad \text{y} \quad V(x) > 0 \quad \text{en } D - \{0\},$$

y si

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad \text{en } D, \quad \forall x \in B_r$$

entonces el punto de equilibrio $x = 0$ es estable. Además, si

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \text{en } D - \{0\},$$

entonces el punto de equilibrio $x = 0$ es asintóticamente estable. Donde $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r\} \subset D$.

2.4.4 Estabilidad de Sistemas Lineales

Sea el sistema lineal autónomo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t). \tag{2.3}$$

Definición 2.8 *El punto de equilibrio $x = 0$ de (2.3) es globalmente exponencialmente estable si y sólo si todos los valores característicos de \mathbf{A} tienen parte real negativa. El punto de equilibrio $x = 0$ de (2.3) es estable si y sólo si todos los valores característicos de \mathbf{A} tienen parte real no-positiva, y aquellos que tienen un cero en la parte real son raíces distintas del polinomio mínimo de \mathbf{A} .*

Así, en el caso de un sistema de la forma (2.3) lineal invariante en el tiempo, la estabilidad en el punto de equilibrio $x = 0$ puede ser comprobada haciendo el estudio de los valores característicos de la matriz \mathbf{A} . Sin embargo, es posible formular enteramente un enfoque diferente del problema, con base en el uso de funciones cuadráticas de Lyapunov. Esta teoría es de interés por sí misma y es también usual en el estudio de sistemas no lineales utilizando métodos de linealización.

Dado el sistema (2.3), la idea es seleccionar una función candidata de Lyapunov de la forma:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x},$$

donde \mathbf{P} es una matriz simétrica real. Entonces \dot{V} está dada por:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x},$$

donde

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}. \quad (2.4)$$

donde \mathbf{Q} es una matriz positiva definida.

La ecuación (2.4) es conocida como la ecuación de Lyapunov. Por medio de ésta ecuación, es posible estudiar las propiedades de estabilidad en el punto de equilibrio $x = 0$ del sistema (2.3). Por ejemplo, si un par de matrices (\mathbf{P} , \mathbf{Q}) satisfacen (2.4), puede encontrarse que \mathbf{P} y \mathbf{Q} son positivas definidas, entonces V y $-\dot{V}$ son funciones positivas definidas. Por lo tanto el punto de equilibrio $x = 0$ es globalmente exponencialmente estable.

2.5 Observadores

En primer lugar, se analiza en forma general el observador para sistemas lineales, ya que de éste se deriva el observador para los sistemas no-lineales.

La observabilidad y el diseño de los observadores son un tema fundamental en la teoría de control, ya que los estados de un sistema dinámico a menudo no son accesibles y susceptibles de medición. Si en un sistema existen estados que no son medibles es necesario su reconstrucción

para poder aplicar una ley de control, la cual depende de tal información sobretodo en la retroalimentación de estados.

Una forma posible de reconstruir estos estados es por retroalimentación de estados del sistema con respecto al tiempo. Esta técnica no siempre es factible o recomendable porque las medidas son en general burdas y una derivación amplificaría el ruido de las mediciones. Otra solución sería, la de diseñar otros tipos de sensores, pero en algunas ocasiones resulta ser muy costoso o técnicamente difícil de realizar. Un ejemplo típico en donde se tiene este tipo de problema es el caso del motor de inducción, de hecho, no es fácil el diseño de un sensor para medir los flujos en el rotor, ya que implicaría hacer un orificio en el estator e introducir una bobina exploradora para obtener la variación del flujo; pero en la práctica esto no es recomendable. Por las dificultades referidas, un medio alternativo para obtener una evaluación del estado de un sistema es utilizar un **observador**.

Un observador (o reconstructor de estados) es un sistema dinámico auxiliar que utiliza la entrada y la salida del sistema real, físicamente existente para proporcionar una estimación asintótica de la trayectoria de los estados.

Para visualizar la idea de lo ya mencionado se presenta a continuación una gráfica del diagrama de un observador.

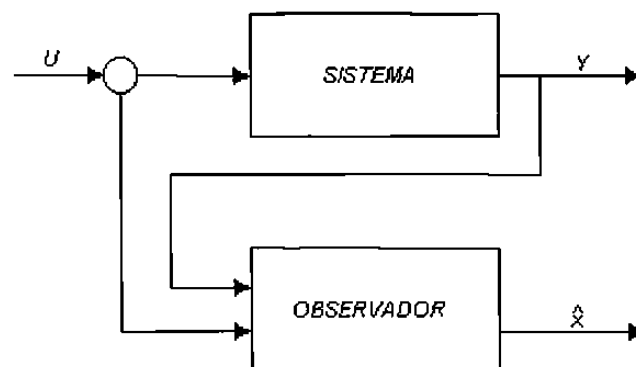


Fig. 2.1 Diagrama del Observador

Antes de obtener la evaluación de estos estados para un sistema dado, es necesario primero asegurar que dichos estados se pueden reconstruir. Esto requiere un estudio de observabilidad del sistema, ya que, un observador no siempre es factible. La observación de los estados es para

obtener la información de las salidas del sistema con el fin de aplicarlos al control. Hoy en día los observadores han sido una gran ayuda en las aplicaciones industriales, como ejemplo puede mencionarse su utilización para la identificación de parámetros en modelos que representan motores de combustión interna, ya que se tienen valores que no se pueden medir directamente por medio de sensores. Otra de las aplicaciones existentes es en la detección de fallas en los motores eléctricos, como también, en la estimación de los flujos magnéticos de los mismos; que es ya sabido que son estados no medibles.

2.5.1 Observadores Lineales

En esta sección se incluyen conceptos que permiten el estudio del observador para sistemas lineales. Considere el sistema lineal n -dimensional invariante en el tiempo como sigue:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx,\end{aligned}\tag{2.5}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$; A , B y C son matrices constantes $n \times n$, $n \times p$, y $q \times n$ respectivamente y se asume que son conocidas.

El problema planteado es, el de estimar o generar el estado $x(t)$ con la entrada u y la salida y , los cuales se consideran disponibles, además del conocimiento de las matrices A , B y C .

En este caso es bien conocido en [8] y se expresa que si el rango de la matriz

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix},$$

es igual a la dimensión del espacio de estado, esto es, n ; entonces el sistema es observable. Este criterio es llamado condición de rango. Se observa que la matriz \mathcal{O} no depende de u o de B . En otras palabras si el sistema (2.5) es observable, entonces, el sistema es observable para toda $u(t)$. Esta es una particularidad de los sistemas lineales.

Una representación del estimador de estado asintótico para la ecuación dinámica (2.5) puede ser

el conocido como el observador de Luenberger [29] y está dado como:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}). \quad (2.6)$$

donde L se elige de manera tal que la matriz $(A - LC)$ es estable. Mas aún el espectro de $(A - LC)$, es decir, sus valores característicos se pueden asignar arbitrariamente, si y solo si, el par (C, A) es observable.

De hecho, si se define $e \triangleq x - \hat{x}$, donde e es el error entre el estado actual y el estado estimado y restando las ecuaciones (2.5) y (2.6) se obtiene:

$$\dot{e} = (A - LC)e.$$

Por lo tanto, si, $(A - LC)$ es estable entonces:

$$\|e(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty$$

2.5.2 Observadores No Lineales

En el caso de sistemas no-lineales, el diseño de observadores es un problema difícil y hasta la actualidad no está resuelto completamente. Esta dificultad viene del hecho que la observabilidad de los sistemas no-lineales depende de las entradas del sistema.

Un ejemplo sencillo que ilustra lo que está mencionando es el siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ux_2, \\ \dot{x}_2 &= 0, \\ y &= x_1. \end{aligned}$$

Se puede ver que si $u \neq 0$ el sistema es observable, mientras que si $u = 0$ no es observable.

En el caso lineal no se tiene un problema con lo antes mencionado, por esta razón no existe un método general para diseñar un observador no-lineal.

Consecuentemente, para diseñar un observador de un sistema no-lineal, se debe primero caracterizar el tipo de sistemas no-lineales para los cuales es posible diseñar un observador. En particular, se pueden caracterizar los sistemas no-lineales cuya observabilidad no depende de las entradas, estos sistemas se llaman uniformemente observables. Para los sistemas uniformemente

observables, un observador fué propuesto por Gauthier, Hammouri y Othman [16], a éste observador se le conoce como un observador de alta ganancia. Otros autores como Isidori, Krener [21] y Zeitz [43], han diseñado observadores para una clase de sistemas no-lineales que pueden ser transformados en un sistema cuasilineal, en este tipo de sistemas la no linealidad depende solamente de la entrada y de la salida. Este último método de diseño es conocido como el "Diseño de un Observador en el punto de inyección de salida" (Observer Design up to output injection). Para otros tipos de diseño de observadores se tienen las referencias [15], [39], [10] y [13].

En el Capítulo 4 de éste trabajo, se usará un observador dado en [5] para estimar el flujo del rotor en un motor de inducción.

2.6 El Principio de Separación

La mayoría de las leyes de control se expresan en función de los estados del sistema. En consecuencia si no tenemos la medida de todas las variables de estado, no es posible aplicar la ley de control.

Una manera de resolver este problema es retroalimentar las variables del sistema a través de un observador. Es decir, una vez que se dispone de un control estabilizante para el sistema y que se ha obtenido un observador del mismo sistema, se reemplaza el estado real desconocido por el estado estimado a fin de ser usado en el cálculo de la ley de control.

Esta interpretación se ilustra en el siguiente diagrama de bloques:

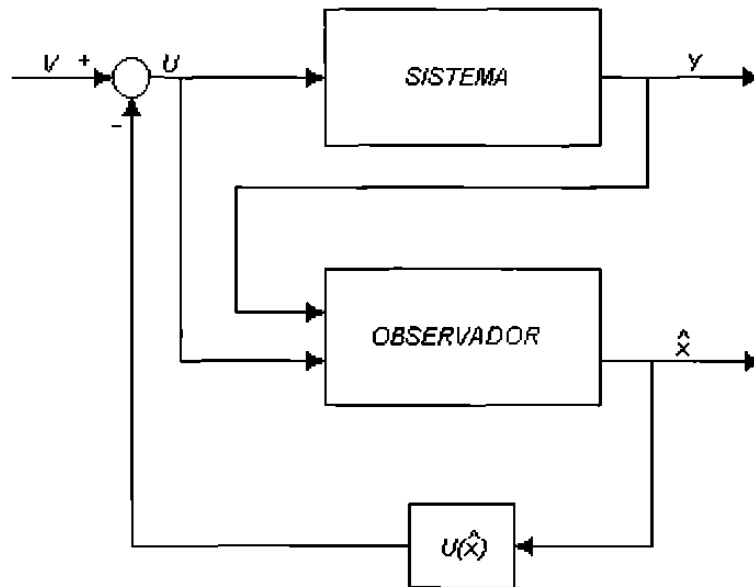


Fig. 2.2 Principio de Separación

La cuestión a resolver es si la estabilidad del sistema retroalimentado se conserva. Al estudio de la estabilidad del sistema en lazo cerrado se le da el nombre de Principio de Separación. El significado de la terminología de separación viene de que el análisis de la ley de control y del observador son efectuados por separado. El problema que existe entre el límite del control y la observación es muy delicado, pero en general, consiste en encontrar una relación entre la velocidad de la convergencia del observador y la velocidad en alcanzar la estabilización del proceso. Para los sistemas lineales el principio de separación se verifica en el momento en que el sistema es observable y controlable.

Produciendo una descomposición espectral del sistema retroalimentado con el estado estimado, el espectro del sistema del observador que permanece inalterable por la estabilidad del sistema en lazo abierto con el observador, depende de la estabilidad del observador y del sistema retroalimentado sin incluir el observador. En el contexto no lineal el principio de separación no se verifica siempre. Además, existen menos resultados acerca de este principio, por lo que éste sigue siendo un problema abierto.

Sin embargo el principio de separación es utilizado por Gauthier y Kupka [17] para trabajar con sistemas bilineales. Posteriormente Chabour y Hammouri [6], presentaron una extensión de estos resultados. Posteriormente Hammouri y Busawon (1993), demostraron el principio de separación para una clase de sistemas no lineales, a través de un observador de alta ganancia.

Capítulo 3

Diseño del control

3.1 Introducción

Durante las últimas décadas muchos métodos se han propuesto para tratar el problema de estabilización de sistemas lineales [8], [7], y sistemas no-lineales [1], [18], [25], [35]. Las técnicas clásicas que son utilizadas comúnmente en nuestros días, tienden a incrementarse con el uso de técnicas geométricas diferenciales y con herramientas algebraicas.

En la actualidad se han estado haciendo investigaciones con otros tipos de control como son los de Pasividad [19], Backstepping [19] y Feedback linealizante [31]. En estos métodos es necesario la búsqueda de una función de Lyapunov para la estabilidad del sistema, pero en realidad es difícil encontrar esta función. El método de backstepping es recursivo, además de ser de difícil aplicación a sistemas de alta dimensión y en el feedback linealizante se tiene la problemática de utilizar derivadas de Lie para el diseño del control; lo cual para el caso de un sistema de alta dimensión sería tedioso el desarrollo de dichas derivadas. En un artículo reciente publicado por Busawon [3] se ha dado un nuevo método para diseñar un control para una clase de sistemas no-lineales con una sola entrada. Este método utiliza solamente las técnicas lineales para el diseño del control y en consecuencia es sencillo ya que requiere únicamente de algunos cálculos matriciales.

En este capítulo, se realiza una extensión del diseño de un control dado por Busawon [3] para sistemas multi-entrada. La clave de la metodología del diseño del control consiste en encontrar una transformación que dependa de los estados para transformar el sistema en forma casi similar a la feedback linealizada.

La ventaja que existe en esta metodología, es que no requiere del uso de las derivadas de Lie para realizar la transformación del sistema. Además, este diseño puede formularse en forma de algoritmo.

En éste capítulo se presenta también el desarrollo del control de seguimiento, con el fin de que el sistema pueda seguir una trayectoria deseada.

3.2 Diseño de un Controlador para Sistemas Multi-Entrada

Considere un sistema descrito de la siguiente manera

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = F_{11}(x_1)x_1 + F_{12}(x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 = F_{21}(x_1, x_2)x_1 + F_{22}(x_1, x_2)x_2 + F_{23}(x_1, x_2)x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_i = \sum_{k=1}^{i+1} F_{ik}(x_1, \dots, x_i)x_k \\ \vdots \\ \dot{x}_{r-1} = \sum_{j=1}^r F_{i,j}(x_1, \dots, x_{r-1})x_j \\ \dot{x}_r = u, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

donde;

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{con} \quad x_i = \begin{bmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_d} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^d;$$

esto es $rd = n$ y $u \in \mathbb{R}^d$.

El sistema (3.1) puede ser escrito de una manera más compacta como:

$$\dot{x} = F(x)x + Bu, \quad (3.2)$$

donde

$$B = \begin{bmatrix} 0_{d \times d} \\ \vdots \\ 0_{d \times d} \\ I_{d \times d} \end{bmatrix}; \text{ y } F(x) = \begin{bmatrix} F_{11}(x_1) & F_{12}(x_1) & 0_{d \times d} & \cdots & 0_{d \times d} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \vdots & & \ddots & 0_{d \times d} \\ F_{r1}(x_1, \dots, x_{r-1}) & & & & F_{r-1}(x_1, \dots, x_{r-1}) \\ 0_{d \times d} & \cdots & \cdots & \cdots & 0_{d \times d} \end{bmatrix}.$$

Se supone que:

A1) Los componentes de F_{ij} son continuamente diferenciables y acotados.

A2) Para toda $i = n, \dots, r$;

$$F_{i,i+1}(x_1, \dots, x_i),$$

es no singular.

A3) 0 es un punto de equilibrio para el sistema autónomo.

La hipótesis **A2)** asegura que el sistema (3.1) es controlable.

El diseño de control que se propone consiste en diseñar una matriz de similaridad $M(x)$, tal que:

C1) $M(x)F(x)M^{-1}(x) = A + BL(x),$

donde la estructura de la matriz A tiene la forma

$$A = \begin{bmatrix} 0_{d \times d} & I_{d \times d} & 0_{d \times d} & \cdots & 0_{d \times d} \\ 0_{d \times d} & & I_{d \times d} & & 0_{d \times d} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ & & & & I_{d \times d} \\ 0_{d \times d} & \cdots & & \cdots & 0_{d \times d} \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

y $L(x)$ es una matriz de dimensión $d \times n$ que posiblemente depende de x .

C2) $M(x)B = B,$

C3) $\dot{M}(x)M^{-1}(x) = B\varphi(x),$

donde $\varphi(x)$ es una matriz de dimensión $d \times (r \times d)$.

La matriz $M(x)$ se calcula a través del algoritmo que se describe en la siguiente sección.

3.2.1 Algoritmo

Definimos las siguiente matrices para toda $x \in \mathbb{R}^n$ sucesivamente.

i) $U(x) = [B, F(x)B, \dots, F^{r-1}(x)B]$. Se puede verificar que $U(x)$ tiene rango completo para toda $x \in \mathbb{R}^n$. La matriz $F(x)$ está compuesta por bloques $F_{ij}(x)$ de dimensión $d \times d$. Además los elementos $F_{i,i+1}(x)$, $i = 1, \dots, n$, son no-singulares para toda $x \in \mathbb{R}^n$. Por lo tanto el par $(F(x), B)$ es controlable $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

ii) $V_0 = [B, AB, \dots, A^{r-1}B]$, donde A es una matriz propuesta la cual está formada por

bloques I_d arriba de la diagonal principal y ceros en los demás lugares. Esta matriz tiene una forma controlable con $B = \text{col}(0, \dots, 0, I_d)$.

iii) $M_o(x) = V_o U^{-1}(x)$, donde $M_o(x)$ es triangular inferior y los elementos bloques $M_{o_i, j}(x)$, $i = j$. son elementos no-singulares.

iv) $Q(x) = M_o(x) F(\omega) M_o^{-1}(x) - A$. Puede verificarse que las entradas de la matriz a bloques $Q(x)$ son matrices cero, excepto la primera columna, por lo tanto tiene la siguiente forma:

$$Q(x) = \begin{bmatrix} Q_1(x) & \mathbf{0}_{d \times d} & \cdots & \mathbf{0}_{d \times d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \mathbf{0}_{d \times d} & \ddots & \mathbf{0}_{d \times d} \\ Q_n(x) & \mathbf{0}_{d \times d} & \cdots & \mathbf{0}_{d \times d} \end{bmatrix}.$$

v) Se forma la matriz $L(x)$, la cual, tiene la siguiente forma:

$$L(x) = \begin{bmatrix} Q_n(x) & Q_{n-1}(x) & \cdots & Q_1(x) \end{bmatrix}.$$

vi) $\bar{A}(x) = A + BL(x)$, en donde $\bar{A}(x)$ tiene elementos bloques $Q_j(x)$ en el último renglón, y arriba de la diagonal principal tiene bloques de matrices I_d como se muestra a continuación

$$\bar{A}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{d \times d} & I_{d \times d} & \mathbf{0}_{d \times d} & \cdots & \mathbf{0}_{d \times d} \\ \mathbf{0}_{d \times d} & & I_{d \times d} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \mathbf{0}_{d \times d} \\ \mathbf{0}_{d \times d} & & & & I_{d \times d} \\ Q_n(x) & Q_{n-1}(x) & \cdots & \cdots & Q_1(x) \end{bmatrix}.$$

vii) $V(x) = [B, \bar{A}(x)B, \dots, \bar{A}(x)^{r-1}B]$.

viii) $M(x) = V(x)U^{-1}(x)$. Aquí, puede verificarse que $M(x)$ es triangular inferior y que los elementos en los bloques de la diagonal principal son no-singulares.

Se puede verificar rápidamente que las dos propiedades **C1)** y **C2)** se satisfacen debido a la estructura de la matriz $M(x)$.

Se considera la siguiente ley de control:

$$u(x) = -L(x)M(x)x - K\Delta_\theta M(x)x, \quad (3.4)$$

donde K es un vector renglón a bloques seleccionado y de manera tal que la matriz $(A - BK)$ es

estable. $L(x)$ está dada por \mathbf{v}) y Δ_θ tiene la siguiente forma:

$$\Delta_\theta = \begin{bmatrix} \theta_{d \times d}^r & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \theta_{d \times d}^{r-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & & \theta_{d \times d} \end{bmatrix} .$$

Teorema 1 *Asuma que el sistema (3.1) satisface las suposiciones A1), A2) y A3). Entonces, existe $\theta_0 > 0$, tal que, para toda $\theta > \theta_0$ el siguiente sistema de lazo cerrado:*

$$\dot{x} = F(x)x + Bu(x) ,$$

donde $u(x)$ está definida como en (3.4), es globalmente asintóticamente estable.

Prueba del teorema:

Considere el sistema (3.1)

$$\dot{x} = F(x)x + Bu(x) .$$

Sea $\bar{x} = \Delta_\theta M(x)x$, entonces:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \Delta_\theta M(x)\dot{x} + \Delta_\theta \dot{M}(x)x, \\ &= \Delta_\theta M(x) [F(x)M^{-1}(x)\Delta_\theta^{-1}\bar{x} + Bu(x)] + \Delta_\theta \dot{M}(x)M^{-1}(x)\Delta_\theta^{-1}\bar{x}, \\ &= \Delta_\theta M(x)F(x)M^{-1}(x)\Delta_\theta^{-1}\bar{x} + \Delta_\theta M(x)Bu + \Delta_\theta \dot{M}(x)M^{-1}(x)\Delta_\theta^{-1}\bar{x}, \end{aligned}$$

por la condición **C1)** y **C2)** se tiene:

$$\dot{\bar{x}} = \Delta_\theta [A + BL(x)] \Delta_\theta^{-1}\bar{x} + \Delta_\theta Bu(x) + \Delta_\theta \dot{M}M^{-1}\Delta_\theta^{-1}\bar{x}.$$

Usando el hecho que:

$$\Delta_\theta A \Delta_\theta^{-1} = \theta A \quad \text{y} \quad \Delta_\theta B = \theta B,$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \theta A \bar{x} + \theta BL(x)\Delta_\theta^{-1}\bar{x} + \theta Bu(x) + \Delta_\theta \dot{M}M^{-1}\Delta_\theta^{-1}\bar{x}, \\ &= \theta [A \bar{x} + BL(x)\Delta_\theta^{-1}\bar{x} + Bu(x)] + \Delta_\theta \dot{M}M^{-1}\Delta_\theta^{-1}\bar{x}, \end{aligned}$$

tomando $u(x) = -L(x)\Delta_\theta^{-1}\bar{x} - K\bar{x}$ resulta:

$$\dot{\bar{x}} = \theta(A - BK)x + \Delta_\theta \dot{M}M^{-1}\Delta_\theta^{-1}\bar{x}.$$

Ya que $(A - BK)$ es Hurwitz, existe una matriz simétrica positiva definida P tal que:

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) = -I_n,$$

donde I_n es la matriz identidad de $n \times n$. Sea $V(\bar{x}) = \bar{x}^T P \bar{x}$. Entonces:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{x}) &= 2\bar{x}^T P \dot{\bar{x}} \\ &= -\theta \|\bar{x}\|^2 + 2\bar{x}^T P \Delta_\theta \dot{M}M^{-1}\Delta_\theta^{-1}\bar{x} \\ &\leq -\theta \|\bar{x}\|^2 + 2 \|P\bar{x}\| \left\| \Delta_\theta \dot{M}M^{-1}\Delta_\theta^{-1} \right\| \|\bar{x}\|. \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{x}) &\leq -\theta \|\bar{x}\|^2 + 2 \|P\bar{x}\| \left\| \Delta_\theta \dot{M}M^{-1}\Delta_\theta^{-1} \right\| \|\bar{x}\|, \\ &\leq -\theta \|\bar{x}\|^2 + 2k_m \|P\bar{x}\| \|\bar{x}\|. \end{aligned}$$

donde k_m es la cota superior de $\dot{M}M^{-1}$.

Tomando en consideración el hecho que $\|P\bar{x}\| \leq \lambda_{\max}(P) \|\bar{x}\|$ tenemos que:

$$\dot{V}(\bar{x}) \leq -\theta \|\bar{x}\|^2 + 2k_m \lambda_{\max}(P) \|\bar{x}\|.$$

Eligiendo una $\theta > 2k_m \lambda_{\max}(P)$, se obtiene $\dot{V}(\bar{x}) < 0$. Con esto finaliza la prueba.

Nota.

A simple vista se puede pensar que la clase de sistema no-lineal descrito por (3.1) es restrictivo ya que no existe ninguna no-linealidad en el último renglón de (3.1). Pero este no es el caso, porque se puede cancelar la no-linealidad a través de un control auxiliar. En forma más precisa, si tenemos el siguiente sistema:

$$\dot{x} = F(x)x + B(\phi(x) + \psi(x)u(x)), \quad (3.5)$$

y si $\psi(x)$ es no-singular $\forall x \in \mathbb{R}^n$, entonces, reemplazando a $u(x)$ por $u(x) = \psi(x)^{-1} [v - \phi(x)]$, se obtiene

$$\dot{x} = F(x)x + Bv,$$

que es de la forma (3.2).

3.3 Control de Seguimiento

Si el diseño de un sistema de control comprende un rango amplio y/o grandes movimientos de velocidad, los efectos no lineales pueden ser significativos en la dinámica y una técnica de control no lineal podría ser necesaria para alcanzar la representación deseada.

Generalmente la tarea de control puede dividirse en dos categorías: estabilización o regulación y otra de seguimiento (servo). En problemas de estabilización un sistema de control, llamado estabilizador, tendrá que ser diseñado para que el estado del sistema, en lazo cerrado, sea estabilizado alrededor de un punto de equilibrio. Ejemplos de objetivos de estabilización son: el control de temperatura de un refrigerador, el control de altitud de aviones y el control de posición de brazos en los robots. En los problemas de control de seguimiento, el objetivo de diseño es la construcción de un controlador llamado "tracker", tal que la salida del sistema siga una trayectoria la cual es variante en el tiempo. Como ejemplos de seguimiento se pueden mencionar: una aeronave a lo largo de una trayectoria específica o el hacer que una mano robótica trace líneas o círculos, estas son tareas específicas del control de seguimiento.

En el caso de este trabajo de investigación se enfoca únicamente a problemas de control de seguimiento, para problemas de estabilización se puede consultar detalles en [38].

3.3.1 Problemas de Seguimiento (Tracking)

3.3.1.1 Seguimiento Asintótico

Dado un sistema dinámico no-lineal descrito como:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x), \end{cases}$$

y una trayectoria de salida deseada y_d , se desea encontrar una ley de control para la entrada u , tal que, partiendo de cualquier estado inicial en una región Ω , el error de seguimiento $y(t) - y_d(t)$ sea convergente a cero, mientras que el estado x permanezca acotado [38].

Desde un punto de vista práctico, se puede requerir que el estado x permanezca acotado y en particular dentro del rango de validez del modelo del sistema. Para conocer si lo anterior se cumple,

existen dos procedimientos que son: el método analítico y el método computacional (simulaciones).

Cuando el sistema en lazo cerrado es tal que la propiedad del estado inicial implica cero en el error de seguimiento para todo tiempo, esto es:

$$y(t) \equiv y_d(t) \quad \forall t \geq 0,$$

se dice que el sistema de control es capaz de realizar un seguimiento perfecto. El seguimiento asintótico, implica que el seguimiento perfecto es alcanzado asintóticamente, y el seguimiento exponencialmente convergente se puede definir de manera similar.

Por otra parte puede suponerse que la trayectoria deseada $y_d(t)$ y sus derivadas de alto orden son continuas y acotadas. Se considera también que $y_d(t)$ y estas derivadas están disponibles para un cálculo de control en tiempo real.

Estas suposiciones se satisfacen por el objetivo de control cuando la salida deseada $y_d(t)$ está determinada con antelación. En realidad los datos obtenidos son generados a través de un proceso de filtrado, del cual provienen automáticamente altas derivadas de la salida deseada. En algunas tareas de seguimiento, las condiciones establecidas no se satisfacen y en este caso se utiliza un sistema llamado modelo de referencia, a fin de proveer las derivadas requeridas de las señales en el algoritmo de control propuesto.

3.3.2 Diseño de un Control de Seguimiento

Considere el sistema (3.2). En este caso, si se aplica la transformación $z = M(x)x$, se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{z} &= M(x)\dot{x} + \dot{M}(x)x \\ \dot{z} &= M(x)F(x)M^{-1}(x)z + M(x)Bu + \dot{M}(x)M^{-1}(x)z. \end{aligned}$$

Tomando en consideración las propiedades de **C1**, **C2** y **C3** antes mencionadas se tiene:

$$\dot{z} = Az + BL(x)z + Bu + B\varphi(x)z.$$

y considerando la siguiente ley de control:

$$u(x) = -L(x)z - \varphi(x)z + v, \quad (3.6)$$

se tiene como resultado un sistema completamente lineal que tiene la siguiente forma:

$$\dot{z} = Az + Bv, \quad (3.7)$$

donde A tiene la forma mostrada en (3.3).

Ahora si se considera el siguiente error de seguimiento:

$$e_1 = y - y_d = x_1 - y_d,$$

donde y_d es la trayectoria deseada.

Sea

$$e_2 = \dot{x}_1 - \dot{y}_d = x_2 - \dot{y}_d,$$

$$e_3 = \dot{x}_2 - \ddot{y}_d = x_3 - \ddot{y}_d,$$

\vdots

$$e_r = \dot{x}_{r-1} - y_d^{r-1} = x_r - y_d^{r-1},$$

entonces,

$$\dot{e}_1 = e_2,$$

$$\dot{e}_2 = e_3,$$

\vdots

$$\dot{e}_r = \dot{x}_r - y_d^r = v - y_d^r.$$

Finalmente, se tiene que:

$$\dot{e} = Ae + B(v - y_d^r), \quad (3.8)$$

y proponiendo un nuevo control de la forma $v = y_d^r - Ke$ en (3.8), se obtiene el sistema de la forma:

$$\dot{e} = (A - BK)e,$$

donde K se escoge tal que la matriz $(A - BK)$ sea tipo Hurwitz.

Considerando $v = y_d^r - Ke$, se tiene que el control final de (3.6) que estabiliza el sistema está dado de la siguiente forma:

$$u(x) = -L(x)z - \varphi(x)z + y_d^r - Ke, \quad (3.9)$$

donde la matriz $L(x)$ está dada en el algoritmo antes mencionado en la sección 3.2.1.

Ahora, si se desea acelerar la convergencia del control, se puede incluir la matriz Δ_θ en el control, esto es:

$$u(x) = -L(x)z - \varphi(x)z + y_d^r - K\Delta_\theta e. \quad (3.10)$$

En este caso se obtiene $\dot{e} = (A - BK\Delta_\theta)e$, y proponiendo que $\bar{e} = \Delta_\theta e$, entonces

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}} &= \Delta_\theta \dot{e}, \\ &= \Delta_\theta (A - BK\Delta_\theta) \Delta_\theta^{-1} \bar{e}, \\ &= \theta (A - BK) \bar{e}. \end{aligned}$$

Si se propone que $(A - BK)$ sea estable, $\exists P > 0$, tal que

$$P(A - BK) + (A - BK)^T P = -I.$$

y proponiendo $V(\bar{e}) = \bar{e}^T P \bar{e}$, se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{e}) &= 2\bar{e}^T P \dot{\bar{e}} = 2\bar{e}^T P \theta (A - BK) \bar{e} \\ &= \theta [\bar{e}^T P (A - BK) \bar{e} + \bar{e}^T (A - BK)^T P \bar{e}] \end{aligned}$$

como $\bar{e}^T P (A - BK) \bar{e}$ es un escalar, entonces tenemos que:

$$\dot{V}(\bar{e}) = -\theta V(\bar{e}) < 0.$$

3.4 Resumen del Capítulo

En éste capítulo se observó, que en el diseño de control propuesto para los sistemas dinámicos que tienen la forma (3.1), únicamente se utilizaron operaciones algebraicas matriciales para su desarrollo. El diseño del algoritmo de control consiste en encontrar una matriz $M(x)$ capaz de transformar el sistema a una forma casi lineal, para posteriormente aplicar el control de seguimiento propuesto en la sección 3.3. En los siguientes capítulos se dan dos aplicaciones del diseño ya mencionado, el primero para los motores de inducción y el segundo para los sistemas electromecánicos.

Capítulo 4

Control de Seguimiento de Flujo Magnético para un Motor de Inducción

4.1 Introducción

La actualización de dispositivos electrónicos, así como la reducción de costos de los mismos, hace posible la consideración de sistemas de control más sofisticados, con el objeto de mejorar el desempeño de las máquinas eléctricas. En este capítulo se tratará con el problema del control de seguimiento de los flujos del rotor del motor de inducción.

Los motores de inducción son ampliamente utilizados en muchas aplicaciones prácticas debido a su relativo bajo costo y buena confiabilidad en su operación. Una de las principales desventajas del motor de corriente directa con respecto al motor de inducción, es que posee contactos deslizantes que aumentan los costos de mantenimiento y limitan su uso en ambientes explosivos. El motor de inducción hace uso de los devanados del estator para formar un campo magnético giratorio el cual es inducido hacia el rotor. Este campo inducido a los devanados del rotor, provocan una corriente inducida y ésta a la vez un torque.

La causa de este fenómeno es debido a la distribución del flujo y las corrientes de armadura que interactúan fuertemente y se mueven con respecto al estator y también al rotor. Esto hace difícil el control de los flujos y las corrientes de la armadura en el motor de inducción. En cambio en el motor de corriente directa es mucho más fácil controlar estas variantes. Algunas soluciones para el control del flujo en lazo abierto están dadas en [26] basadas sobre el estudio de las características del estado (ver también [2], [11], [27] y [28]).

En general las máquinas eléctricas son dispositivos electromecánicos que tienen como función la conversión de energía. Casi toda la potencia eléctrica usada en el mundo es generada por máquinas sincrónicas (operando como generador), y una gran parte de esa potencia eléctrica es consumida por las máquinas de inducción (operando como motor).

La primera máquina de corriente directa fue construida por Faraday alrededor de 1820, de la cual una versión práctica fue realizada por Henry en 1829, y fue hasta 1837 que se presentó la primera versión exitosa en forma comercial. Por otro lado el motor de inducción fue inventado por Tesla alrededor de 1887.

Aunque se han mejorado los métodos y materiales usados en la fabricación de las máquinas eléctricas, es importante notar que los fundamentos relacionados con la conversión de energía fueron presentados desde hace más de un siglo.

En este campo aparentemente bien establecido, el desarrollo de los componentes de electrónica de potencia han traído como consecuencia que en la actualidad se sigan realizando trabajos de investigación con el fin de mejorar el comportamiento y el rendimiento de estas máquinas.

El control de la velocidad del motor de inducción es un problema interesante desde el punto de vista teórico y muy importante en un sentido práctico. Este problema ha sido considerado recientemente como un ejemplo de referencia para el control de sistemas no-lineales [9].

La importancia del control de la máquina de inducción radica en que presenta interesantes retos como son:

- 1).- El conjunto de ecuaciones diferenciales que describen la dinámica de la máquina son no-lineales.
- 2).- Algunas de sus variables de estado son difíciles de medir, por lo que se debe usar un observador si la ley de control que utilizamos usa retroalimentación de estados.
- 3).- Los parámetros del sistema pueden variar con respecto a sus valores nominales.
- 4).- Para algunas aplicaciones el objetivo de control es una función algebraica no-lineal de todos los estados, incluyendo aquellos que no son medibles.

4.2 Modelado del Motor de Inducción

Por lo general, el modelo dinámico del motor de inducción está representado por ecuaciones diferenciales no-lineales con coeficientes variantes en el tiempo. A fin de evitar esto, y por lo tanto trabajar con modelos más sencillos que involucren coeficientes constantes, el modelo dinámico del motor se representa en coordenadas $dq0$, a partir de las coordenadas de fase. Pero para conveniencia de estudio en este trabajo, es necesario de hacer un cambio de coordenadas; ya que se requiere de un modelo adecuado en donde se tenga como variables las corrientes en el estator y los flujos en el rotor. Este cambio de coordenadas es llamado α - β .

Cuando se analiza el comportamiento dinámico de un motor de inducción trifásico (esto es, tres devanados en el estator y tres devanados en el rotor), es conocido que una transformación del sistema a dos fases equivalentes, simplifica grandemente el problema [20], [30]. Krause y Thomas [24] realizaron una representación equivalente de la máquina bifásica con dos devanados en el rotor y dos devanados en el estator.

Para la teoría general de máquinas eléctricas y motores de inducción se puede consultar [14] y [23], y para la implementación de control digital de velocidad se puede estudiar [44].

El modelo para el motor en las coordenadas $\alpha - \beta$ está representado en la Figura 4.1. La parte del circuito eléctrico equivalente de la barra del rotor no se muestra, pero el voltaje a través de la barra está indicada para cada fase del rotor por $v_{b\alpha}$ y $v_{b\beta}$.

La motivación para utilizar el modelo en coordenadas $\alpha - \beta$ se debe a que los voltajes y las corrientes son directamente medibles a lo largo de los ejes, y por lo tanto, es conveniente tener expresado el sistema en coordenadas estacionarias asociadas con el estator.

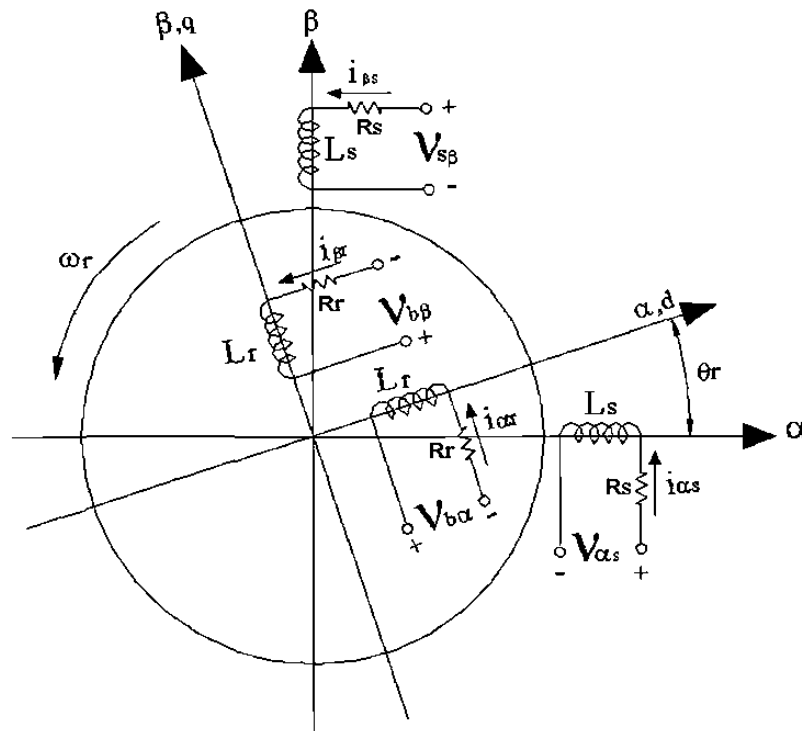


Fig. 4.1 Modelo del Motor de Inducción en Coordenadas $\alpha - \beta$

Las ecuaciones de los voltajes para este modelo son:

$$R_s i_{s\alpha} + \frac{d\varphi_{s\alpha}}{dt} = u_{s\alpha}, \quad (4.1)$$

$$R_s i_{s\beta} + \frac{d\varphi_{s\beta}}{dt} = u_{s\beta},$$

$$R_r i_{rd'} + \frac{d\varphi_{rd'}}{dt} = 0, \quad (4.2)$$

$$R_r i_{rq'} + \frac{d\varphi_{rq'}}{dt} = 0,$$

donde R , i , φ , u_s denotan la resistencia, la corriente, los enlaces de flujo y el voltaje de entrada en el estator, respectivamente. Los subíndices s y r indican el estator y el rotor, (α, β) denota las componentes de un vector con respecto al marco de referencia fijo en el estator, (d', q') denotan las componentes del vector con respecto a la velocidad rotacional $p\omega$; p denota el número de pares de

polos del motor de inducción y ω la velocidad del rotor. Sea $\delta = \theta_r$ el ángulo entre la fase del estator y la fase del rotor, medido en radianes en el sentido de rotación del rotor,. Entonces se tiene que:

$$\frac{d\delta}{dt} = p\omega, \quad \delta(0) = 0. \quad (4.3)$$

Ahora para transformar los vectores que se encuentran en el marco rotacional $(i_{rd'}, i_{rq'})$, $(\varphi_{rd'}, \varphi_{rq'})$ en los vectores $(i_{r\alpha}, i_{r\beta})$, $(\varphi_{r\alpha}, \varphi_{r\beta})$ en el marco estacionario se usa el siguiente cambio de coordenadas:

$$[x_{dq}] = [C] [x_{\alpha\beta}],$$

donde $[x]$ representa el vector de las variables en el estator y $[C]$ está dada de la siguiente manera:

$$C = \begin{bmatrix} \cos \delta & \sin \delta \\ -\sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix}.$$

Los ejes de la nueva referencia son llamados eje directo y eje de cuadratura. El eje d coincide con la fase α del rotor. Por lo tanto se tiene que:

$$[x_{\alpha\beta}] = [C]^{-1} [x_{dq}],$$

y

$$\begin{bmatrix} i_{r\alpha} \\ i_{r\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta & -\sin \delta \\ \sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} i_{rd'} \\ i_{rq'} \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

$$\begin{bmatrix} \varphi_{r\alpha} \\ \varphi_{r\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta & -\sin \delta \\ \sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{rd'} \\ \varphi_{rq'} \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Derivando la ecuación (4.5) y utilizando las ecuaciones (4.1), (4.2), (4.3) y (4.4) se tiene que:

$$\begin{aligned} R_s i_{s\alpha} + \frac{d\varphi_{s\alpha}}{dt} &= u_{s\alpha}, \\ R_s i_{s\beta} + \frac{d\varphi_{s\beta}}{dt} &= u_{s\beta}, \\ R_r i_{r\alpha} + \frac{d\varphi_{r\alpha}}{dt} + n_p \omega \varphi_{r\beta} &= 0, \\ R_r i_{r\beta} + \frac{d\varphi_{r\beta}}{dt} - n_p \omega \varphi_{r\alpha} &= 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Bajo las suposiciones de linealidad del circuito magnético y de las inductancias mutuas y despreciando las pérdidas en el entrehierro, las ecuaciones de enlaces de flujo magnético (ver [23]) son:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{s\alpha} &= L_s i_{s\alpha} + M i_{r\alpha}, \\
 \varphi_{s\beta} &= L_s i_{s\beta} + M i_{r\beta}, \\
 \varphi_{r\alpha} &= M i_{s\alpha} + L_r i_{r\alpha}, \\
 \varphi_{r\beta} &= M i_{s\beta} + L_r i_{r\beta},
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

donde L_s , L_r son inductancias propias y M es la inductancia mutua. Como se puede observar, la suposición de linealidad puede ser obligada por una acción de control que puede tener el valor absoluto de los flujos del rotor bajo el valor nominal.

El propósito de introducir las transformaciones (4.4) y (4.5) es para obtener (4.7), expresión que es independiente de δ ; ya que los flujos y las corrientes en (4.1) y (4.2) están relacionados con δ y las inductancias mutuas.

Eliminando $i_{r\alpha}$, $i_{r\beta}$ y $\varphi_{s\alpha}$, $\varphi_{s\beta}$ en (4.6) y utilizando (4.7) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 R_s i_{s\alpha} + \frac{M}{L_r} \frac{d\varphi_{r\alpha}}{dt} + \left(L_s - \frac{M^2}{L_r} \right) \frac{di_{s\alpha}}{dt} &= u_{s\alpha}, \\
 R_s i_{s\beta} + \frac{M}{L_r} \frac{d\varphi_{r\beta}}{dt} + \left(L_s - \frac{M^2}{L_r} \right) \frac{di_{s\beta}}{dt} &= u_{s\beta}, \\
 \frac{R_r}{L_r} \varphi_{r\alpha} - \frac{R_r}{L_r} M i_{s\alpha} + \frac{d\varphi_{r\alpha}}{dt} + p\omega \varphi_{r\beta} &= 0, \\
 \frac{R_r}{L_r} \varphi_{r\beta} - \frac{R_r}{L_r} M i_{s\beta} + \frac{d\varphi_{r\beta}}{dt} - p\omega \varphi_{r\alpha} &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

El par eléctrico producido por la máquina está expresado en términos de los flujos del rotor y corrientes en el estator como:

$$T_e = \frac{pM}{L_r} (\varphi_{r\alpha} i_{s\beta} - \varphi_{r\beta} i_{s\alpha}), \tag{4.9}$$

y la dinámica del rotor está dada por:

$$\begin{aligned}
 J \frac{d\omega}{dt} &= T_e - T_L \\
 \frac{d\omega}{dt} &= \frac{pM}{JL_r} (\varphi_{r\alpha} i_{s\beta} - \varphi_{r\beta} i_{s\alpha}) - \frac{T_L}{J},
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

donde J es el momento de inercia del rotor y T_L es el par de carga.

Combinando la dinámica del rotor (4.10) con las ecuaciones de la dinámica electromagnética (4.8) y arreglando las ecuaciones de la forma de espacio estado, la dinámica total de un motor de inducción bajo las suposiciones de inductancias mutuas iguales y circuito magnético lineal está dada por el siguiente modelo:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_{r\alpha} = \frac{M}{T_r} i_{s\alpha} - \frac{1}{T_r} \varphi_{r\alpha} - p\omega \varphi_{r\beta}, \\ \dot{\varphi}_{r\beta} = \frac{M}{T_r} i_{s\beta} + p\omega \varphi_{r\alpha} - \frac{1}{T_r} \varphi_{r\beta}, \\ \dot{i}_{s\alpha} = -\gamma i_{s\alpha} + \frac{k}{T_r} \varphi_{r\alpha} + kp\omega \varphi_{r\beta} + \frac{1}{\sigma L_s} u_{s\alpha}, \\ \dot{i}_{s\beta} = -\gamma i_{s\beta} - kp\omega \varphi_{r\alpha} + \frac{k}{T_r} \varphi_{r\beta} + \frac{1}{\sigma L_s} u_{s\beta}, \\ \dot{\omega} = \frac{pM}{JL_r} (\varphi_{r\alpha} I_{s\beta} - \varphi_{r\beta} I_{s\alpha}) - \frac{T_L}{J}, \end{cases} \quad (4.11)$$

donde $\varphi_{r\alpha}, \varphi_{r\beta}$ son los flujos del rotor, $i_{s\alpha}, i_{s\beta}$ las corrientes en el estator, $u_{s\alpha}, u_{s\beta}$ los voltajes en el estator y p el número de pares de polos, respectivamente.

Los parámetros T_r, σ, k y γ están definidos de la siguiente manera:

$$T_r = \frac{L_r}{R_r}; \quad \sigma = 1 - \frac{M^2}{L_s L_r}; \quad k = \frac{M}{\sigma L_s L_r}; \quad \gamma = \frac{R_s}{\sigma L_s} + \frac{R_r M^2}{\sigma L_s L_r^2},$$

donde:

R_s, R_r es la resistencia por fase del estator y rotor respectivamente;

L_s, L_r es la inductancia por fase del estator y rotor respectivamente;

M es la inductancia mutua;

ω la velocidad angular en rad/seg, J el momento de inercia en $Kg\cdot m^2$ del rotor y T_L es el par debido a la carga.

4.2.1 Simulación del Motor de Inducción

En esta subsección se presenta la simulación del motor de inducción en lazo abierto, esto con el fin de compararla más adelante con la simulación en lazo cerrado bajo un control de seguimiento que se presenta.

Para la simulación del motor de inducción se utilizaron los siguientes valores numéricos [5]:

$R_s = 1.374\Omega$; $R_r = 1.3398\Omega$; $M = 0.1286H$; $L_r = 0.1358H$; $L_s = 0.1358H$; $J = 0.04Kg\cdot m^2$, $T_L = 0$, $p = 3$, y los voltajes aplicados son $u_{s\alpha} = 380 * \cos(314t)$ Volts y $u_{s\beta} = 380 * \sin(314t)$ volts. La velocidad ω se obtiene simulando la ecuación dinámica del rotor $\dot{\omega}$. Como condiciones iniciales para ésta simulación se utilizaron las siguientes $\varphi_{r\alpha}(0) = 0.1$ Webers, $\varphi_{r\beta}(0) = 0.1$ Webers, $i_{s\alpha}(0) = 0.1$ Amperes, $i_{s\beta}(0) = 0.1$ Amperes, $\omega(0) = 0.1$ rad/seg.

En las Figuras 4.2 y 4.3 se observa el comportamiento de los flujos $\varphi_{r\alpha}$ y $\varphi_{r\beta}$ en el rotor; la amplitud de los flujos toman un valor de un ampere a partir de 0.085 segundos aproximadamente. En las Figuras 4.4 y 4.5 se tienen las simulaciones de las corrientes $i_{s\alpha}$ y $i_{s\beta}$ en el estator respectivamente, estas alcanzan su estado estable en 0.1 segundos aproximadamente. En las Figuras 4.6 y 4.7 se tienen las señales del control aplicado $u_{s\alpha}$ y $u_{s\beta}$ al sistema en lazo abierto. Las amplitudes que alcanzan estas simulaciones son de 370 volts aproximadamente, esto es debido a la señal de entrada al sistema. Y en la Figura 4.8 se muestra el comportamiento de la velocidad angular ω en donde se observa un transitorio hasta 0.16 segundos y después se obtiene un valor constante de 104.7 Volts.

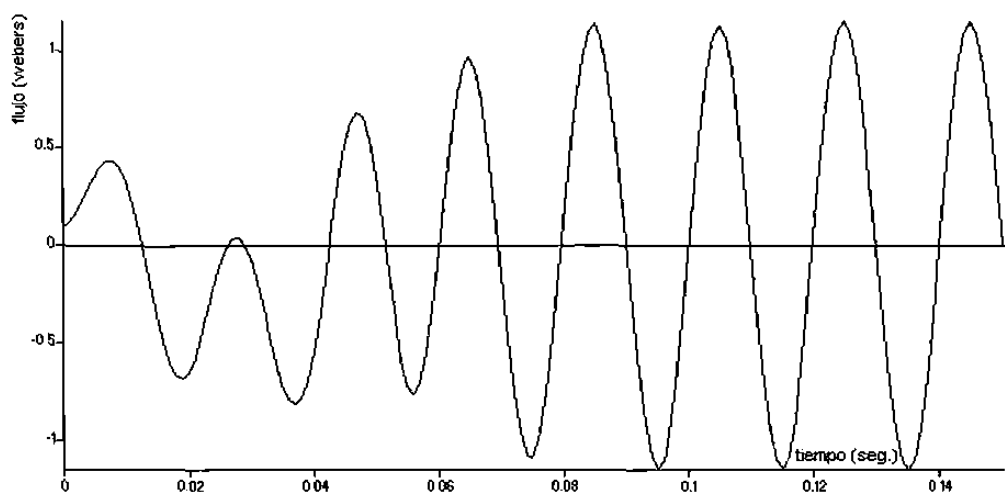


Fig. 4.2 Simulación de $\varphi_{r\alpha}$ (flujo del rotor)

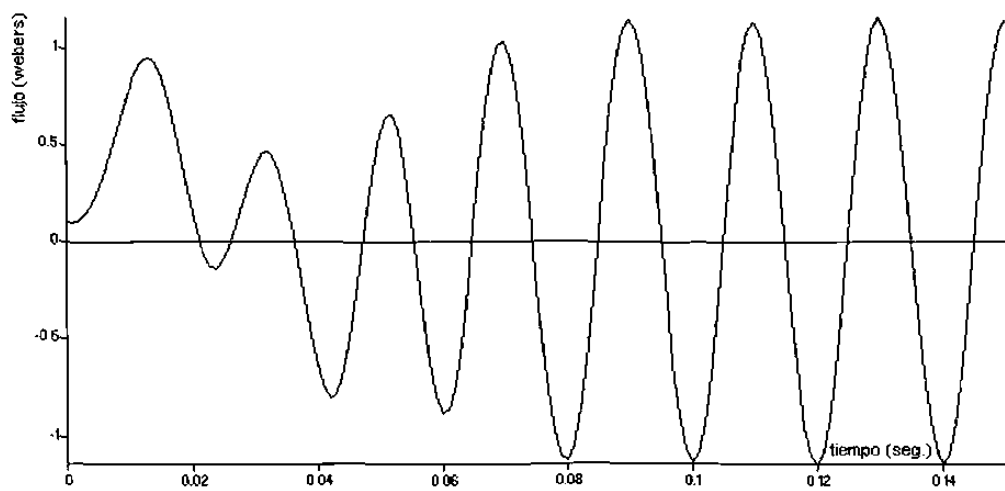


Fig.4.3 Simulación de $\varphi_{r\beta}$ (flujo del rotor)

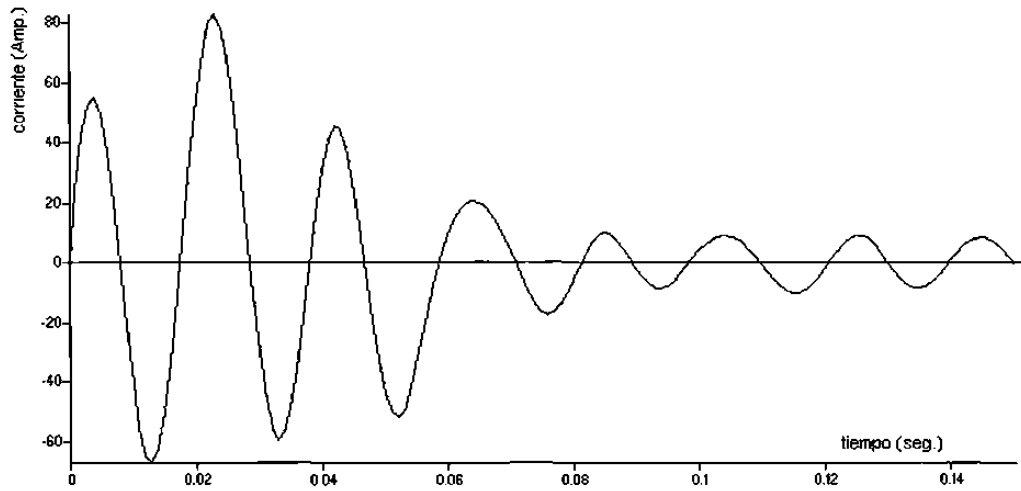


Fig. 4.4 Simulación de $I_{s\alpha}$ (corriente en el estator)

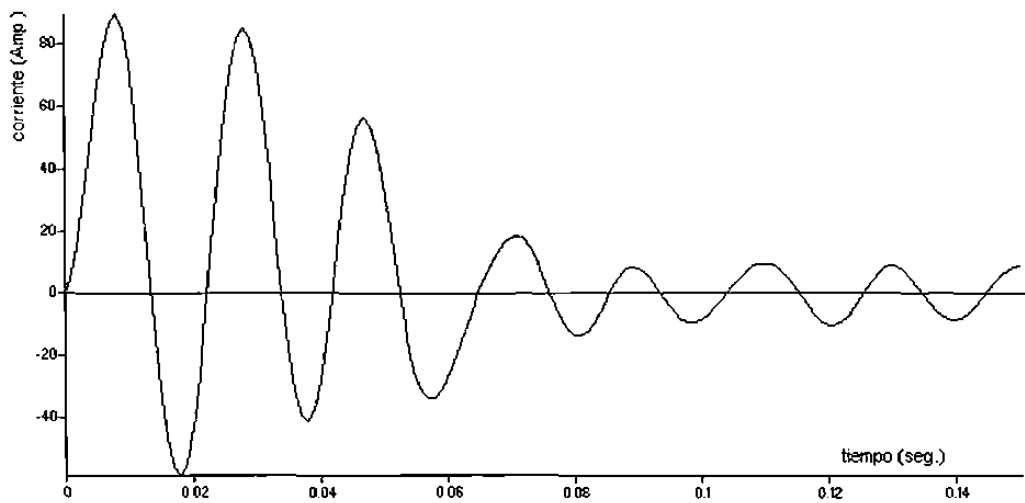


Fig. 4.5 Simulación de $I_{s\beta}$ (corriente en el estator)

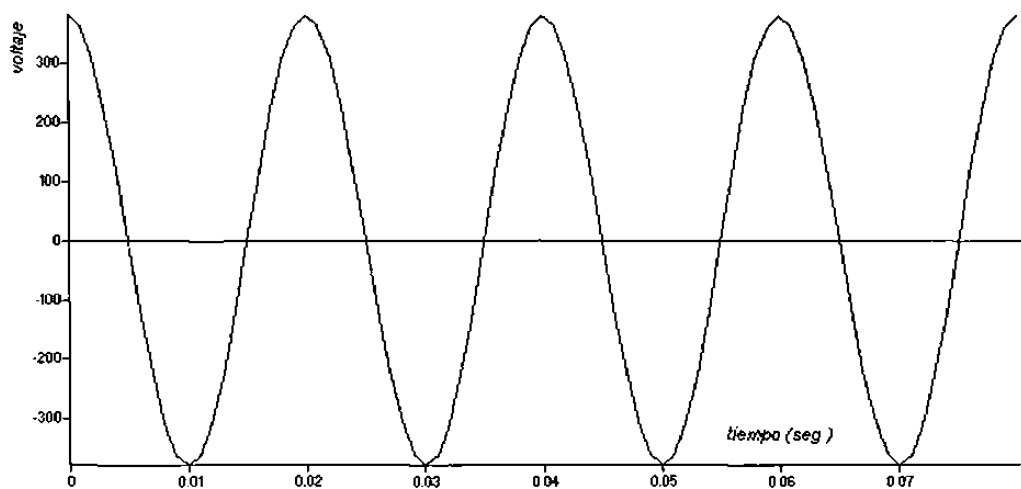


Fig. 4.6 Simulación de la entrada $u_{s\alpha}$ (voltaje)

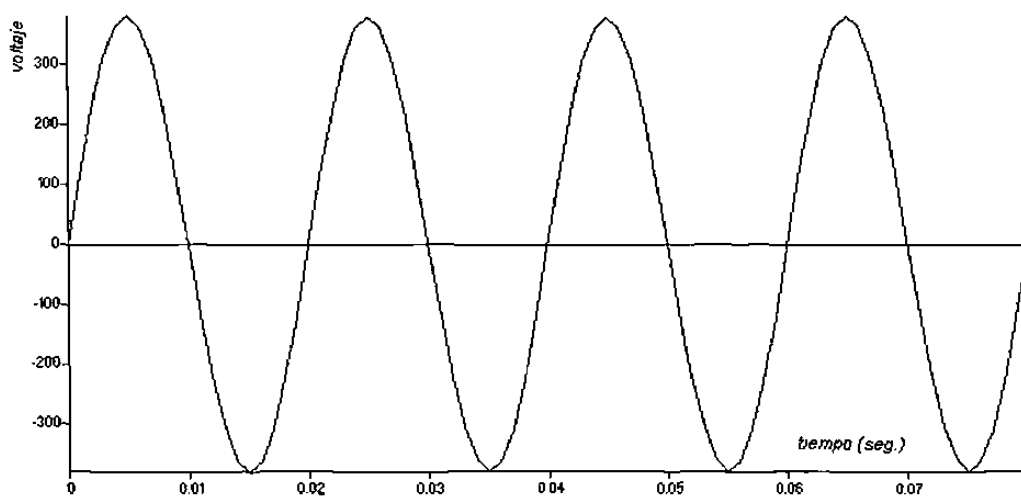


Fig. 4.7 Simulación de la entrada $u_{s\beta}$ (voltaje).

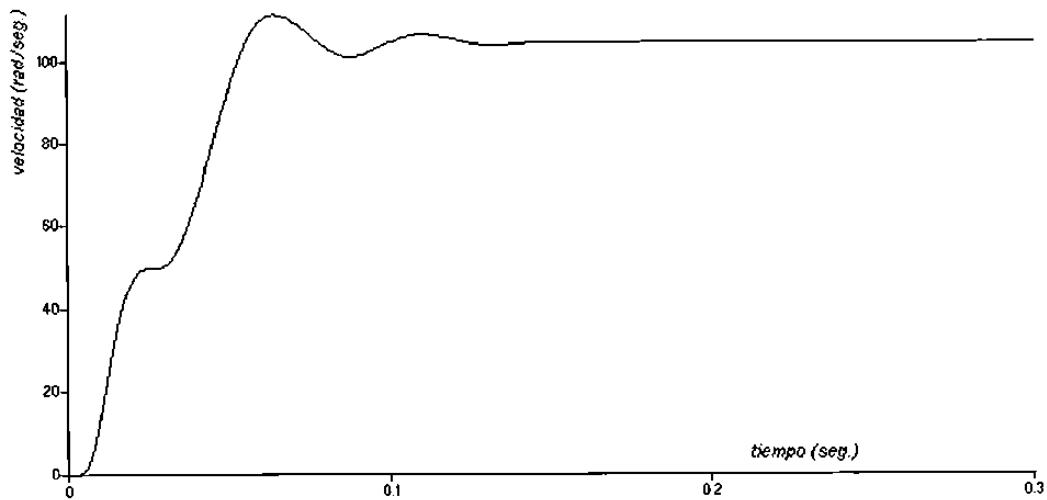


Fig. 4.8 Simulación de la velocidad ω

Como se pudo observar, en las simulaciones se presenta el comportamiento en lazo abierto de los flujos en el rotor, las corrientes en el estator, los voltajes aplicados al estator y la velocidad del rotor. Esto es con el fin de preparar el caso base que permitirá comparar estos resultados con las simulaciones aplicando el control de seguimiento en lazo cerrado en la siguiente sección.

4.3 Aplicación del Algoritmo de Control al Sistema Dinámico del Motor de Inducción

En esta sección se utilizan los resultados del Capítulo 3 para diseñar un control de seguimiento de flujo en el rotor. En la Figura. 4.9 se muestra el diagrama del sistema con el control de seguimiento.

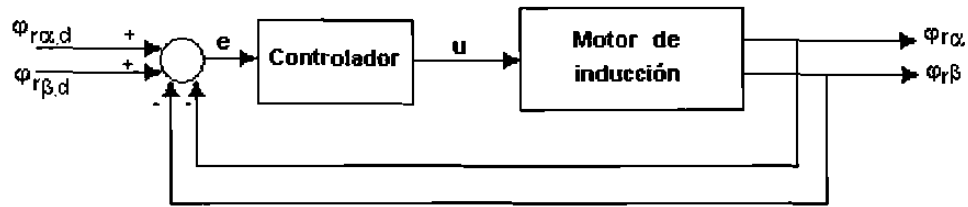


Fig. 4.9 Diagrama de control de seguimiento

El modelo del motor de inducción puede escribirse en la forma siguiente:

$$\dot{x} = F(\omega)x + Bu + BL_0x, \quad (4.12)$$

donde

$$F(\omega) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_r} & -p\omega & \frac{M}{T_r} & 0 \\ p\omega & -\frac{1}{T_r} & 0 & \frac{M}{T_r} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} \varphi_{r\alpha} \\ \varphi_{r\beta} \\ i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$L_0 = \begin{pmatrix} \frac{k}{T_r} & kp\omega & -\gamma & 0 \\ -kp\omega & \frac{k}{T_r} & 0 & -\gamma \end{pmatrix}; \quad u = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma L_s} u_{s\alpha} \\ \frac{1}{\sigma L_s} u_{s\beta} \end{pmatrix}; \quad x_1 = \begin{pmatrix} \varphi_{r\alpha} \\ \varphi_{r\beta} \end{pmatrix}; \quad x_2 = \begin{pmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{pmatrix}.$$

Aplicando el primer control propuesto en la sección 3.3.2

$$u = -L_0x + \bar{v} \quad (4.13)$$

se obtiene

$$\dot{x} = F(\omega)x + B\bar{v}. \quad (4.14)$$

El sistema (4.14) tiene la forma (3.2) con

$$F_{11} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_r} & -p\omega \\ p\omega & -\frac{1}{T_r} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad F_{12} = \begin{pmatrix} \frac{M}{T_r} & 0 \\ 0 & \frac{M}{T_r} \end{pmatrix}.$$

Se puede observar que la matriz F_{12} es no-singular. Entonces, la hipótesis A2) se cumple, y por consideración práctica las hipótesis A1 y A3 también se satisfacen. Por lo tanto, se puede aplicar la técnica dada en el capítulo 3 para diseñar un control de seguimiento de x_1 y x_2 ($\varphi_{r\alpha}, \varphi_{r\beta}$).

Primero se buscará la matriz de similaridad $M(x) = M(\omega)$, utilizando el algoritmo desarrollado en el capítulo 3.

4.3.1 Algoritmo

i) $U(x) = [B, F(\omega)B]$

$$U(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{M}{T_r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{M}{T_r} \\ 1 & 0 & -\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\gamma \end{bmatrix},$$

ii) $V_0 = [B, AB]$

$$V_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde la matriz A tiene la siguiente forma:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix},$$

$$\text{iii) } Mo(\omega) = VoU^{-1}(\omega)$$

$$Mo(\omega) = \begin{bmatrix} \frac{T_r}{M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{T_r}{M} & 0 & 0 \\ \frac{T_r}{M}\gamma & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{T_r}{M}\gamma & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{iv) } Q(\omega) = Mo(\omega)F(\omega)Mo^{-1}(\omega) - A$$

$$Q(\omega) = \begin{bmatrix} \frac{-1 - \gamma T_r}{T_r} & -p\omega & 0 & 0 \\ p\omega & \frac{-1 - \gamma T_r}{T_r} & 0 & 0 \\ \frac{-T_r\gamma + kM}{T_r^2} & pw\left(\frac{-T_r\gamma + kM}{T_r}\right) & 0 & 0 \\ -pw\left(\frac{-T_r\gamma + kM}{T_r}\right) & \frac{-T_r\gamma + kM}{T_r^2} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

v) La matriz $L(\omega)$ está dada de la siguiente forma:

$$L(\omega) = \begin{bmatrix} \frac{-T_r\gamma + kM}{T_r^2} & pw\left(\frac{-T_r\gamma + kM}{T_r}\right) & \frac{-1 - \gamma T_r}{T_r} & -p\omega \\ -pw\left(\frac{-T_r\gamma + kM}{T_r}\right) & \frac{-T_r\gamma + kM}{T_r^2} & p\omega & \frac{-1 - \gamma T_r}{T_r} \end{bmatrix},$$

$$\text{vi) } \bar{A}(\omega) = A + BL(\omega)$$

$$\bar{A}(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-T_r\gamma + kM}{T_r^2} & pw\left(\frac{-T_r\gamma + kM}{T_r}\right) & \frac{-1 - \gamma T_r}{T_r} & -p\omega \\ -pw\left(\frac{-T_r\gamma + kM}{T_r}\right) & \frac{-T_r\gamma + kM}{T_r^2} & p\omega & \frac{-1 - \gamma T_r}{T_r} \end{bmatrix},$$

$$\text{vii) } V(\omega) = [B, \bar{A}(\omega)B]$$

$$V(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{-1 - \gamma T_r}{T_r} & -p\omega \\ 0 & 1 & p\omega & \frac{-1 - \gamma T_r}{T_r} \end{bmatrix}.$$

Finalmente se tiene:

$$\text{viii) } M(\omega) = V(\omega)U^{-1}(\omega)$$

$$M(\omega) = \begin{bmatrix} \frac{T_r}{M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{T_r}{M} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{M} & -p\omega \frac{T_r}{M} & 1 & 0 \\ p\omega \frac{T_r}{M} & -\frac{1}{M} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz $M(x)$ es triangular inferior, y los bloques de la diagonal son no singulares. Además, se puede comprobar que la matriz $M(x)$ tiene las propiedades mencionadas en el capítulo anterior, es decir:

$$M(\omega)F(\omega)M^{-1}(\omega) = A + BL(\omega),$$

y

$$M(\omega)B = B.$$

Por lo tanto, se puede verificar que:

$$\dot{M}(x)M^{-1}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\omega}p & 0 & 0 \\ \dot{\omega}p & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B\varphi(\omega),$$

donde:

$$\varphi(x) = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\omega}p & 0 & 0 \\ \dot{\omega}p & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tomando $z = M(\omega)x$ como transformación, se efectúa un cambio de coordenadas al sistema (4.11), el cual toma la siguiente forma:

$$\dot{z} = Az + BL(\omega)z + B\bar{v} + B\varphi(\omega),$$

y considerando la siguiente ley de control:

$$\bar{v} = -\varphi(\omega) - L(\omega)z + v,$$

el sistema lineal resulta en la forma

$$\dot{z} = Az + Bv. \quad (4.15)$$

De manera más precisa:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I_{2 \times 2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ v \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

donde $z_1 = [z_{11} \ z_{12}]^T$ y $z_2 = [z_{21} \ z_{22}]^T$. Note que el sistema (4.16) es de la forma (3.6).

Recordando que de la transformación $z_{11}(t) = \frac{Tr}{M}\varphi_{r\alpha}$, $z_{12}(t) = \frac{Tr}{M}\varphi_{r\beta}$, $z_{21}(t) = -\frac{1}{M}\varphi_{r\alpha} - p\omega\frac{Tr}{M}\varphi_{r\beta} + I_{s\alpha}$, $z_{22}(t) = p\omega\frac{Tr}{M}\varphi_{r\alpha} - \frac{1}{M}\varphi_{r\beta} + I_{s\beta}$.

Ahora sea

$$z_d(t) = \begin{bmatrix} z_{1d}(t) \\ z_{2d}(t) \end{bmatrix},$$

una trayectoria deseada de z_1 , entonces $e_1 = z_1 - z_d$ y $e_2 = \dot{z}_1 - \dot{z}_d = z_2 - \dot{z}_d$.

Por lo tanto aplicando

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

se obtiene

$$\dot{e} = Ae + B(v - \dot{z}_d(t)). \quad (4.17)$$

Ahora se puede considerar:

$$v = \dot{z}_d(t) - K\Delta_\theta e, \quad (4.18a)$$

donde K se escoge tal que la matriz $(A - BK)$ sea Hurwitz y

$$\Delta_\theta = \begin{bmatrix} \theta^2 I_{2 \times 2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \theta I_{2 \times 2} \end{bmatrix}.$$

Substituyendo (4.18a) en (4.17), se obtiene que:

$$\dot{e} = (A - BK\Delta_\theta)e.$$

Por lo tanto, el error de seguimiento converge exponencialmente a cero. En otras palabras, $z_{11}(t)$ tiende a $z_{1d}(t)$, $z_{12}(t)$ tiende a $z_{2d}(t)$ y así sucesivamente cuando t tiende a infinito. Por extensión, esto significa que $\varphi_{r\alpha}(t)$ tiende a $\varphi_{r\alpha,d}(t)$ y $\varphi_{r\beta}(t)$ tiende a $\varphi_{r\beta,d}(t)$.

Finalmente la ley de control para el sistema (4.12) queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} u(t) &= -L_0x + \bar{v}, \\ &= -L_0x - \varphi(\omega) - L(\omega)z + v, \\ &= -L_0x - \varphi(\omega) - L(\omega)z + \ddot{z}_d(t) - K\Delta_\theta e. \end{aligned}$$

En las coordenadas originales, este control toma la siguiente forma:

$$u(t) = -L_0x - \varphi(\omega) - L(\omega)M(\omega)x + \ddot{z}_d(t) - K\Delta_\theta e, \quad (4.19)$$

donde

$$e = Mx - \begin{bmatrix} z_d \\ \dot{z}_d \end{bmatrix}.$$

4.3.2 Simulación del Control de Seguimiento del Motor de Inducción

La simulación del motor de inducción en lazo cerrado, utilizando el control de seguimiento desarrollado en la sección anterior, se presenta a continuación.

Se eligió la siguiente trayectoria deseada para este sistema:

$$\begin{aligned} \varphi_{r\alpha,d} &= \varphi^0 \text{Cos}(\omega_0 t), \\ \varphi_{r\beta,d} &= \varphi^0 \text{Sen}(\omega_0 t), \end{aligned}$$

donde $\varphi^0 = 0.6$ Webers y $\omega_0 = 50$ rad/seg, el vector K está dado por:

$$k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Nota

Los valores de φ^0 y ω_0 , no son arbitrarios, estos datos requieren de ciertas condiciones las cuales se presentan más adelante.

Los valores de los parámetros para la simulación del sistema fueron los siguientes: $R_s = 1.374\Omega$;

$R_r = 1.3398\Omega$; $M = 0.1286H$; $L_r = 0.1358H$; $L_s = 0.1358H$; $J = 0.04Kg\cdot m^2$, $T_L = 0$, $p = 3$, y un valor de $\theta = 15$. Como condiciones iniciales se utilizaron los siguientes valores $\varphi_{r\alpha}(0) = 0.1$ Webers, $\varphi_{r\beta}(0) = 0.1$ Webers, $i_{s\alpha}(0) = 0.1$ Amperes, $i_{s\beta}(0) = 0.1$ Amperes, $\omega(0) = 0.1$ rad/seg.

El análisis de las simulaciones es el siguiente. En las Figuras 4.10 y 4.11, se observa el comportamiento de los flujos en el rotor en las coordenadas α y β respectivamente, y se tiene el mismo comportamiento en los dos casos (α y β), en donde tienen una amplitud en estado estable de 0.6 Webers en un tiempo de 0.45 segundos aproximadamente. La diferencia que existe entre ambos flujos es en el estado transitorio, esto es debido a que las señales de referencia, son cosenoidales. En las Figuras 4.12 y 4.13 se observa el comportamiento del control en sus coordenadas α y β , siendo similares y alcanzan una amplitud de 33 Volts en estado estable en 0.4 segundos. La Figura 4.14 presenta la simulación de la velocidad mecánica en donde se le aplicó el control de seguimiento (lazo cerrado), ésta alcanza una amplitud de 16.7 rad./seg. en estado estable aproximadamente.

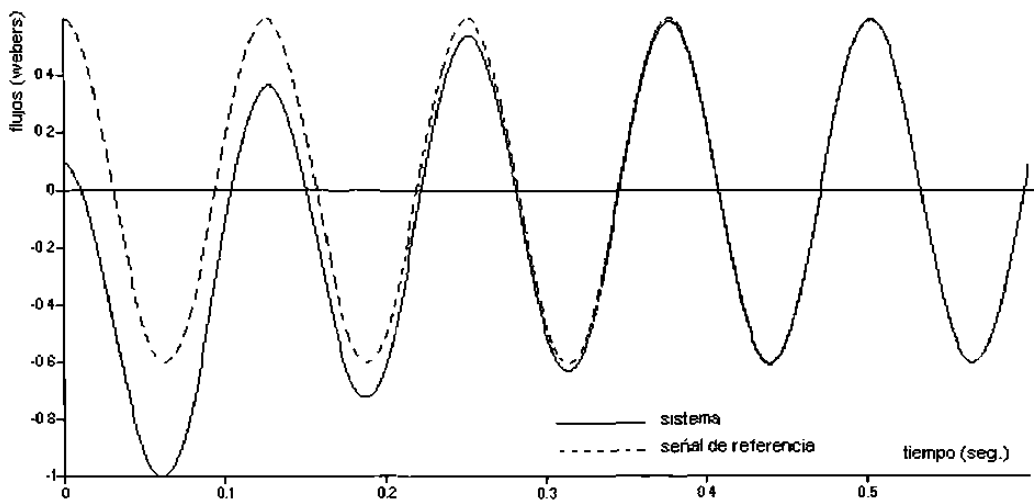


Fig.4.10 Simulación del flujo $\varphi_{r\alpha}$ y $\varphi_{r\alpha,d}$

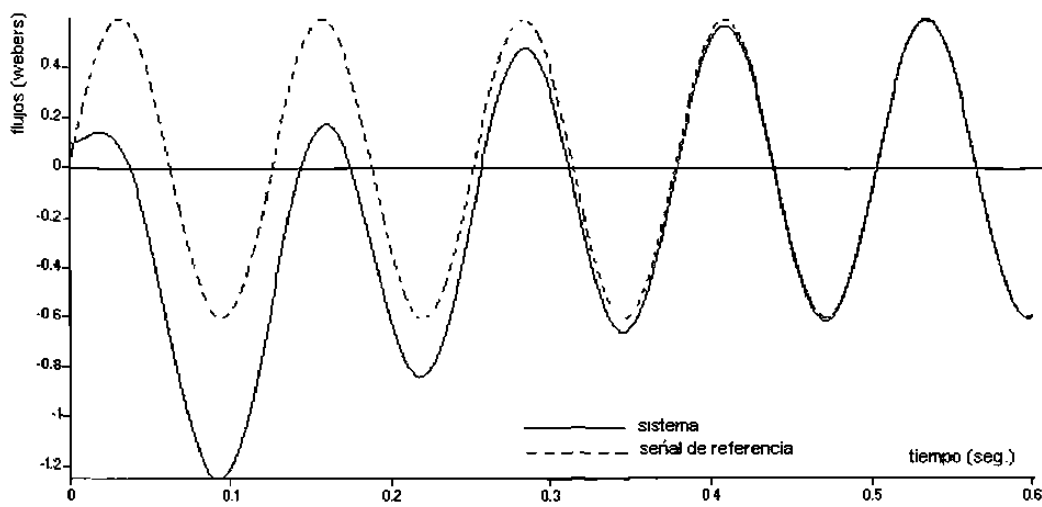


Fig. 4.11 Simulación del flujo $\varphi_{r\beta}$ y $\varphi_{r\beta,d}$

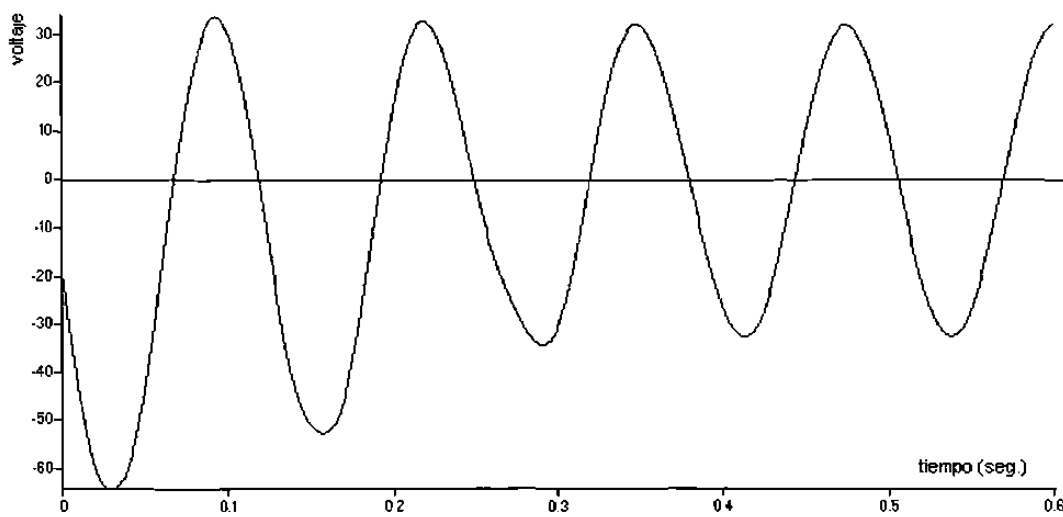


Fig. 4.12 Simulación del control de seguimiento $u_{s\alpha}$

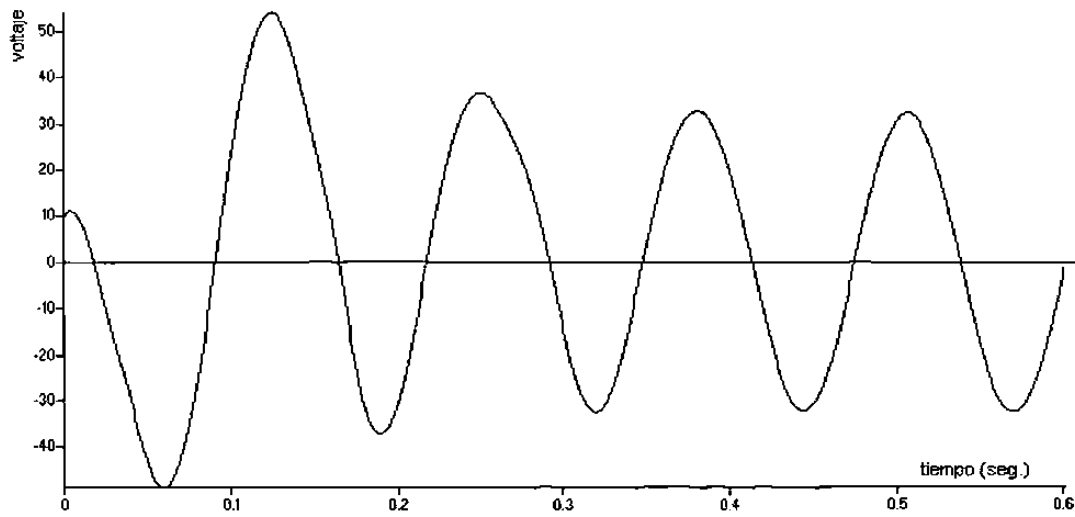


Fig. 4.13 Simulación del control de seguimiento $u_{s\beta}$

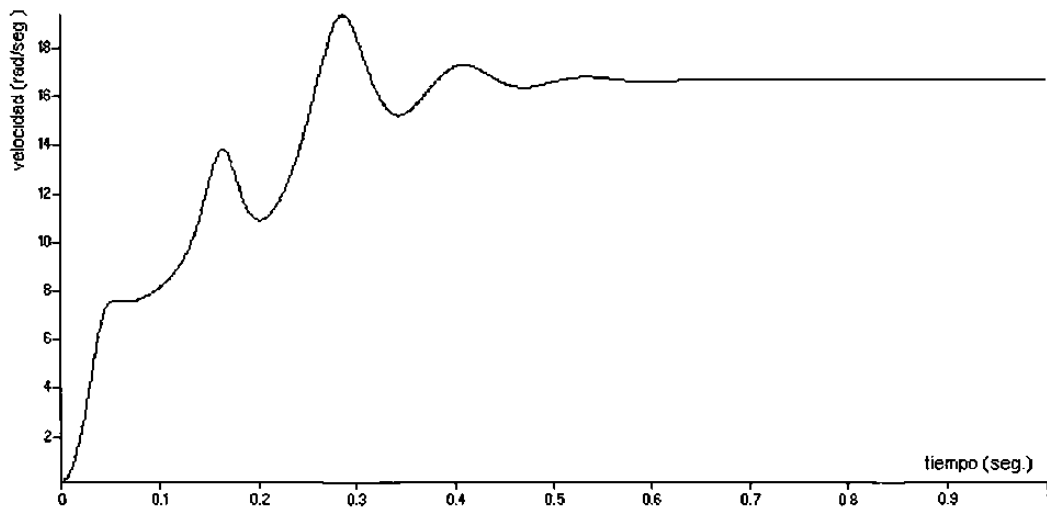


Fig. 4.14 Simulación de la velocidad ω

El objetivo de ésta simulación es de observar que se puede construir un control de seguimiento con el fin de llevar las variables a controlar a un valor deseado previamente establecido. Esto es, en la práctica muchas veces se requiere que el motor tenga cierto comportamiento, por lo tanto es posible hacer que la máquina funcione de acuerdo a ciertas características requeridas por medio de un control de seguimiento.

4.4 Cálculo de las Corrientes en Lazo Cerrado

Con el control anterior, se propuso el objetivo de seguir un flujo de referencia del rotor. Siguiendo con el mismo procedimiento, se puede verificar que las corrientes también siguen una función bien definida $I_{s\alpha,d}$ y $I_{s\beta,d}$. Más adelante, se verifica esta teoría con base en las simulaciones. De la misma manera la velocidad sigue una señal ω_d bien definida.

En ésta sección se calculan las funciones $I_{s\alpha,d}$ y $I_{s\beta,d}$. Después se realiza un análisis que el autor considera importante sobre el control de velocidad del motor.

Suponiendo las siguientes señales de referencia o deseadas:

$$\begin{aligned}\varphi_{r\alpha,d} &= \varphi^0 \cos(\omega_0 t), \\ \varphi_{r\beta,d} &= \varphi^0 \sin(\omega_0 t).\end{aligned}\tag{4.20}$$

Derivando estas ecuaciones se tiene que:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_{r\alpha,d} &= -\omega_0 \varphi^0 \sin(\omega_0 t), \\ \dot{\varphi}_{r\beta,d} &= \omega_0 \varphi^0 \cos(\omega_0 t),\end{aligned}\tag{4.21}$$

tomando las ecuaciones (4.11) y transformándolas a un sistema de referencia se tiene que:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_{r\alpha,d} &= \frac{M}{T_r} I_{s\alpha,d} - \frac{1}{T_r} \varphi_{r\alpha,d} - p\omega_d \varphi_{r\beta,d}, \\ \dot{\varphi}_{r\beta,d} &= \frac{M}{T_r} I_{s\beta,d} + p\omega_d \varphi_{r\alpha,d} - \frac{1}{T_r} \varphi_{r\beta,d},\end{aligned}\tag{4.22}$$

con

$$\dot{\omega}_d = \frac{pM}{JL_r} (\varphi_{r\alpha,d} I_{s\beta,d} - \varphi_{r\beta,d} I_{s\alpha,d}) - \frac{T_L}{J};\tag{4.23}$$

substituyendo (4.20) y (4.21) en (4.22), se obtiene como resultado:

$$I_{s\alpha,d} = \frac{T_r}{M} \left[\frac{1}{T_r} \varphi^0 \cos \omega_0 t + p\omega \varphi^0 \sin \omega_0 t - \omega_0 \varphi^0 \sin \omega_0 t \right],$$

$$I_{s\beta,d} = \frac{T_r}{M} \left[\frac{1}{T_r} \varphi^0 \sin \omega_0 t - p\omega \varphi^0 \cos \omega_0 t + \omega_0 \varphi^0 \cos \omega_0 t \right],$$

y arreglando algebraicamente estas dos ecuaciones:

$$I_{s\alpha,d} = \frac{T_r}{M} \left[\frac{1}{T_r} \varphi^0 \cos \omega_0 t - (\omega_0 - p\omega) \varphi^0 \sin \omega_0 t \right], \quad (4.24)$$

$$I_{s\beta,d} = \frac{T_r}{M} \left[\frac{1}{T_r} \varphi^0 \sin \omega_0 t + (\omega_0 - p\omega) \varphi^0 \cos \omega_0 t \right], \quad (4.25)$$

que son las corrientes en lazo cerrado.

Con el desarrollo de las ecuaciones diferenciales se logró obtener las señales de referencia. Para verificar que las corrientes del sistema siguen estas señales de referencia, se hizo una comparación entre ambas y en las Figuras 4.15 y 4.16 se confirma este seguimiento.

Note que las ecuaciones (4.24) y (4.25) se pueden representar como $\rho \cos(\omega_0 t + \delta)$ y $\rho \sin(\omega_0 t + \delta)$ respectivamente. Para esto, se presenta el siguiente desarrollo:

Primeramente se trabaja con (4.24), como sigue:

$$I_{s\alpha,d} = \frac{1}{M} \varphi^0 \cos \omega_0 t - \frac{T_r}{M} (\omega_0 - p\omega) \varphi^0 \sin \omega_0 t, \quad (4.26)$$

donde

$$k_0 = \frac{1}{M} \varphi^0; \quad k_1 = \frac{T_r}{M} (\omega_0 - p\omega) \varphi^0; \quad x = \omega_0 t,$$

por lo tanto (4.26) queda representada como:

$$I_{s\alpha,d} = k_0 \cos \omega_0 t - k_1 \sin \omega_0 t.$$

Entonces se quiere representar (4.26) en la forma $\rho \cos(\omega_0 t + \delta)$. Para obtener esta representación es necesario tener el conocimiento de los valores de ρ y δ .

Por identidad se tiene que:

$$\rho \cos(x + \delta) = \rho \cos x \cos \delta - \rho \sin x \sin \delta,$$

si $k_0 = \rho \cos \delta$, y $k_1 = \rho \sin \delta$, y sumando estas dos igualdades y elevando al cuadrado cada

uno de los componentes se obtiene:

$$\rho^2 \cos^2 \delta + \rho^2 \sin^2 \delta = k_0^2 + k_1^2,$$

y

$$\rho = \sqrt{k_0^2 + k_1^2},$$

que es la magnitud.

Para determinar el ángulo δ , dividimos k_1/k_0 , y esta expresión queda de la siguiente manera:

$$\frac{\rho \sin \delta}{\rho \cos \delta} = \frac{k_1}{k_0} = \tan \delta,$$

y el ángulo se determina por medio de:

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{k_1}{k_0}\right),$$

substituyendo los valores de k_0 y k_1 en ρ y δ :

$$\rho = \frac{Tr}{M} \varphi^0 \sqrt{\frac{1}{Tr^2} + (\omega_0 - p\omega)^2}, \quad (4.27)$$

y

$$\delta = \arctan((\omega_0 - p\omega)Tr), \quad (4.28)$$

por lo que se tiene como representación final de:

$$I_{s\alpha,d} = \rho \cos(\omega_0 t + \delta)$$

a la expresión

$$I_{s\alpha,d} = \frac{Tr}{M} \varphi^0 \sqrt{\frac{1}{Tr^2} + (\omega_0 - p\omega)^2} \cos(\omega_0 t + \arctan(Tr\omega_0 - Trp\omega)).$$

Para (4.25) se efectúa el mismo procedimiento como en (4.24), y se llega a los mismos resultados tanto de ρ como de δ , esto es, transformándola en una representación de la forma:

$$\rho \sin(\omega_0 t + \delta).$$

4.4.1 Simulación de las Corrientes Deseadas

En las Figuras 4.15 y 4.16 se observa claramente como las corrientes $I_{s\alpha}$, $I_{s\beta}$ del sistema, siguen las corrientes de referencia $I_{s\alpha,d}$ y $I_{s\beta,d}$ respectivamente. La simulación permite comprobar el análisis teórico que se presentó en la sección anterior.

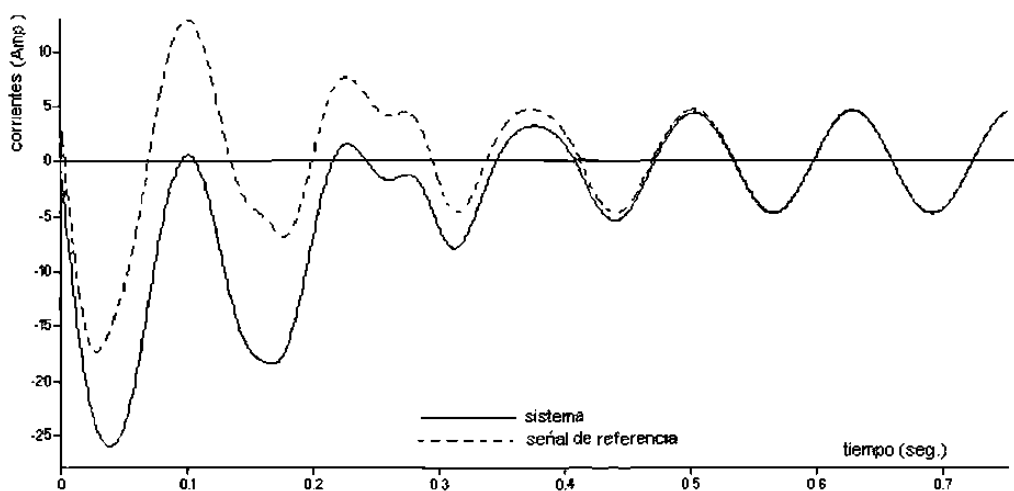


Fig. 4.15 Simulación de las corrientes $I_{s\alpha}$ y $I_{s\alpha,d}$

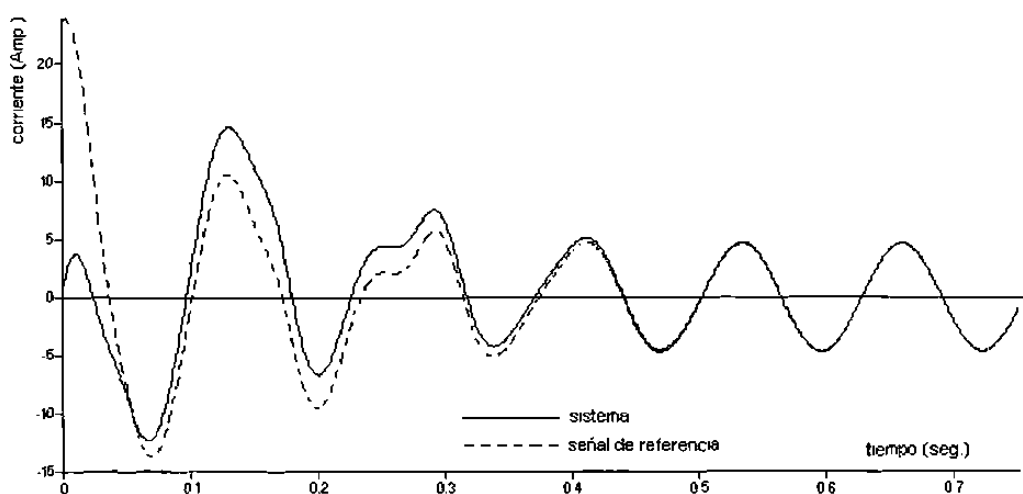


Fig. 4.16 Simulación de las corrientes $I_{s\beta}$ y $I_{s\beta,d}$

4.5 Control Indirecto de Velocidad

Considerando los resultados de las secciones anteriores, se tratará de demostrar que se puede controlar la velocidad del motor a través de la ley de control de seguimiento de la forma (4.19).

Partiendo de las señales que sigue el sistema del motor

$$\varphi_{r\alpha,d} = \varphi^0 \cos(\omega_0 t),$$

$$\varphi_{r\beta,d} = \varphi^0 \sin(\omega_0 t),$$

$$I_{s\alpha,d} = \rho \cos(\omega_0 t + \delta),$$

$$I_{s\beta,d} = \rho \sin(\omega_0 t + \delta),$$

donde $\rho = \frac{T_r}{M} \varphi^0 \sqrt{\frac{1}{T_r^2} + (\omega_0 - p\omega)^2}$ y $\delta = \arctan((\omega_0 - p\omega)T_r)$.

Considerando las igualdades vistas con anterioridad se puede decir que:

$$\varphi_{r\alpha,d} I_{s\beta,d} - \varphi_{r\beta,d} I_{s\alpha,d} = \rho \varphi^0 \sin(\delta),$$

y substituyendo este resultado en (4.23) se tiene:

$$\dot{\omega}_d = \frac{pM}{JL_r} \rho \varphi^0 \sin(\delta) - \frac{T_L}{J}.$$

Aplicando las ecuaciones (4.27) y (4.28) se tiene lo siguiente:

$$\dot{\omega}_d = \frac{pT_r}{JL_r} \varphi_0^2 \sqrt{\frac{1}{T_r^2} + (\omega_0 - p\omega_d)^2} \left(\sin(\arctan((\omega_0 - p\omega_d)T_r)) - \frac{T_L}{J} \right),$$

de donde se puede demostrar que:

$$\sin(\arctan \theta) = \frac{\theta}{\sqrt{1 + \theta^2}}.$$

Entonces, la ecuación de velocidad tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_d &= \frac{pT_r}{JL_r} \varphi_0^2 \sqrt{\frac{1}{T_r^2} + (\omega_0 - p\omega_d)^2} \frac{(\omega_0 - p\omega_d)T_r}{\sqrt{1 + (\omega_0 - p\omega_d)^2 T_r^2}} - \frac{T_L}{J}, \\ &= \frac{p\varphi_0^2}{JL_r} (\omega_0 - p\omega_d)T_r - \frac{T_L}{J}. \end{aligned}$$

Ahora, considerando la velocidad en régimen permanente ω_{df} , se tiene que:

$$T_L = \frac{p\varphi_0^2}{L_r} (\omega_0 - p\omega_{df})T_r.$$

En otras palabras:

$$\omega_{df} = \frac{\omega_0}{p} - \frac{T_L L_r}{p^2 \varphi_0^2 T_r}. \quad (4.29)$$

Desde que $\omega_{df} \geq 0$, vemos que ω_0 puede satisfacer la siguiente ecuación

$$\omega_0 \geq \frac{L_r T_L}{p^2 \varphi_0^2 T_r}. \quad (4.30)$$

Esto significa que una vez que se tiene un valor fijo de φ_0 se debe elegir un valor de ω_0 tal que la condición (4.30) se satisface. Esto demuestra que φ_0 y ω_0 no pueden elegirse arbitrariamente. Es muy importante tomar en consideración el conocimiento del par T_L antes de realizar dicha elección de parámetros. Esto puede constituir una desventaja en la ley de control antes mencionada, ya que el par de carga T_L , en general no es conocido.

Por lo tanto, si el par de carga es conocido entonces la ley de control permite alcanzar un control de velocidad indirecto. Es importante notar que si se usa la ley de control (4.19), se puede también controlar la velocidad de deslizamiento indirectamente. De hecho, en condiciones de estado permanente, la velocidad de deslizamiento ω_s está dada por:

$$\omega_s = \omega_0 - p\omega_{df} = \frac{L_r T_L}{p \varphi_0^2 T_r}$$

De nuevo, esto implica que si el par de carga es bien conocido y que si se elige adecuadamente un valor de φ_0 , la velocidad de deslizamiento puede ser controlada.

4.6 Observador del Motor de Inducción

En el diseño del control discutido en la sección 4.3 se supone que las variables del flujo $\varphi_{r\alpha}$ y $\varphi_{r\beta}$ son susceptibles a ser medidas. En la práctica es difícil medir los flujos magnéticos del rotor tal como se ha mencionado en el Capítulo 2, sección 2.5.

Esto significa que no se puede implementar el control en la práctica. De hecho, únicamente las corrientes y los voltajes del estator son medibles. Por esta razón, se justifica el estudiar y presentar el diseño de un observador de flujos para el motor de inducción; para lograr el objetivo se utiliza la

medición de $I_{s\alpha}$, $I_{s\beta}$, $u_{s\alpha}$ y $u_{s\beta}$. El observador que se utiliza fue desarrollado en [5], y la metodología del diseño del observador de flujo es casi similar al diseño del control, pero éste procedimiento se lleva a cabo de una manera dual. A continuación se presenta un resumen del diseño dado en [5] para que este documento sea autocontenido.

4.6.1 Observador de Flujo del Rotor

Considerando un modelo del motor de inducción como sigue y suponiendo que $I_{s\alpha}$ y $I_{s\beta}$ son medibles.

$$\begin{cases} \dot{i}_{s\alpha} = -\gamma i_{s\alpha} + \frac{k}{T_r} \varphi_{r\alpha} + kp\omega \varphi_{r\beta} + \frac{1}{\sigma L_s} u_{s\alpha}, \\ \dot{i}_{s\beta} = -\gamma i_{s\beta} - kp\omega \varphi_{r\alpha} + \frac{k}{T_r} \varphi_{r\beta} + \frac{1}{\sigma L_s} u_{s\beta}, \\ \dot{\varphi}_{r\alpha} = \frac{M}{T_r} i_{s\alpha} - \frac{1}{T_r} \varphi_{r\alpha} - p\omega \varphi_{r\beta}, \\ \dot{\varphi}_{r\beta} = \frac{M}{T_r} i_{s\beta} + p\omega \varphi_{r\alpha} - \frac{1}{T_r} \varphi_{r\beta}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = i_{s\alpha}, \\ y_2 = i_{s\beta}. \end{cases}$$

En la referencia [5] Busawon at al. Presentan un observador del flujo que está dado como:

$$\begin{cases} \dot{\hat{i}}_{s\alpha} = -\gamma \hat{i}_{s\alpha} + \frac{k}{T_r} \hat{\varphi}_{r\alpha} + kp\omega \hat{\varphi}_{r\beta} + \frac{1}{\sigma L_s} u_{s\alpha} + \Gamma_1 \\ \dot{\hat{i}}_{s\beta} = -\gamma \hat{i}_{s\beta} - kp\omega \hat{\varphi}_{r\alpha} + \frac{k}{T_r} \hat{\varphi}_{r\beta} + \frac{1}{\sigma L_s} u_{s\beta} + \Gamma_2 \\ \dot{\hat{\varphi}}_{r\alpha} = \frac{M}{T_r} \hat{i}_{s\alpha} - \frac{1}{T_r} \hat{\varphi}_{r\alpha} - p\omega \hat{\varphi}_{r\beta} + \Gamma_3 \\ \dot{\hat{\varphi}}_{r\beta} = \frac{M}{T_r} \hat{i}_{s\beta} + p\omega \hat{\varphi}_{r\alpha} - \frac{1}{T_r} \hat{\varphi}_{r\beta} + \Gamma_4 \end{cases}$$

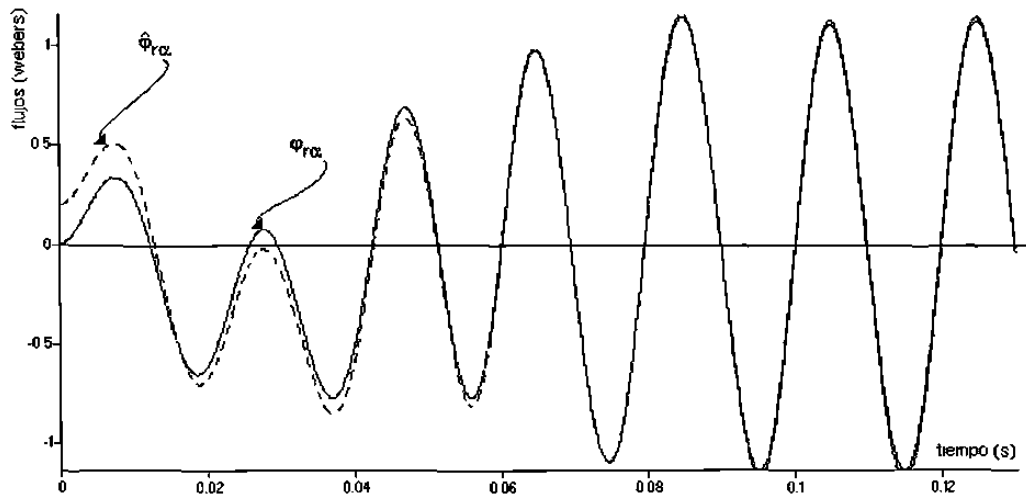
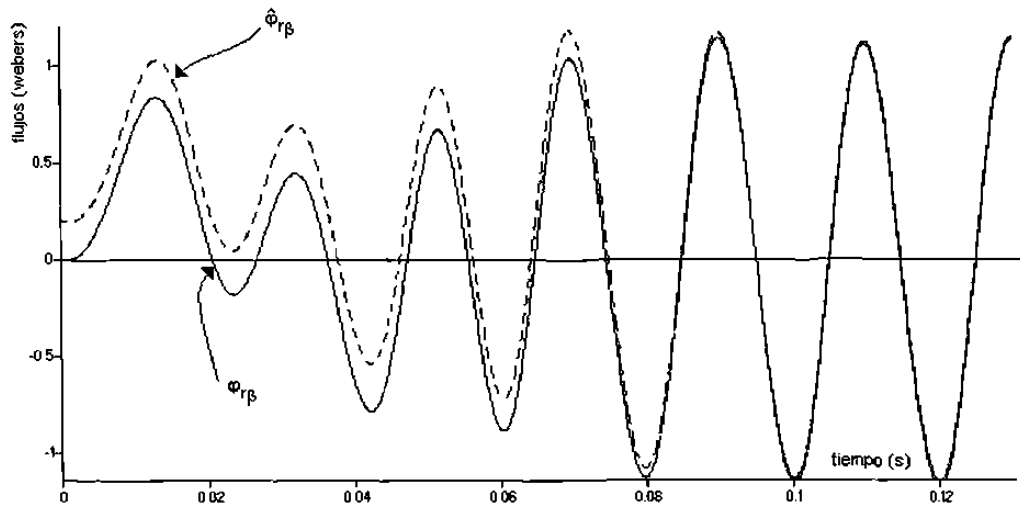
donde:

$$\begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \\ \Gamma_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_L} + 2\bar{\theta} & -p\omega \\ p\omega & -\frac{1}{T_L} + 2\bar{\theta} \\ \frac{1}{k}\left(\frac{1}{T_r} - 2\bar{\theta}\right) + \frac{T_r\bar{\theta}^2}{k(1+p^2\omega^2T_r^2)} & \frac{p\omega}{k} - \frac{p\omega T_r\bar{\theta}^2}{k(1+p^2\omega^2T_r^2)} \\ -\frac{p\omega}{k} + \frac{p\omega T_r\bar{\theta}^2}{k(1+p^2\omega^2T_r^2)} & \frac{1}{k}\left(\frac{1}{T_r} - 2\bar{\theta}\right) + \frac{T_r\bar{\theta}^2}{k(1+p^2\omega^2T_r^2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{s\alpha} - \hat{I}_{s\alpha} \\ I_{s\beta} - \hat{I}_{s\beta} \end{pmatrix}$$

Se hará uso del resultado a fin de implementar una solución que incluya tanto el control como el observador descrito.

4.6.2 Simulación del Observador

A fin de valorar el comportamiento dinámico y la convergencia del algoritmo descrito, se usan como valores de parámetros los mismos que se utilizaron para simular el control y $\bar{\theta} = 10$. Por lo tanto los valores son: $R_s = 1.374\Omega$; $R_r = 1.3398\Omega$; $M = 0.1286H$; $L_r = 0.1358H$; $L_s = 0.1358H$; $J = 0.04Kg\cdot m^2$, $T_L = 0$, $p = 3$, y un valor de $\theta = 15$. Y como condiciones iniciales se utilizaron los siguientes valores $\varphi_{r\alpha}(0) = 0.1$ Webers, $\varphi_{r\beta}(0) = 0.1$ Webers, $i_{s\alpha}(0) = 0.1$ Amperes, $i_{s\beta}(0) = 0.1$ Amperes, $\omega(0) = 0.1$ rad/seg, $\hat{\varphi}_{r\alpha}(0) = 0.2$ Webers, $\hat{\varphi}_{r\beta}(0) = 0.2$ Webers, $\hat{i}_{s\alpha}(0) = 0.2$ Amperes, $\hat{i}_{s\beta}(0) = 0.2$ Amperes, $\hat{\omega}(0) = 0.2$ rad/seg. En la Figura 4.17 se muestra el comportamiento dinámico del flujo del sistema con respecto al flujo del observador en la coordenada α . Se aprecia una convergencia del observador en un tiempo aproximado de 0.065 segundos. Así mismo, en la Figura 4.18 se muestra el flujo en la coordenada β , el cual tiene una convergencia en un tiempo de 0.85 segundos aproximadamente.

Fig. 4.17 Simulación de $\varphi_{r\alpha}$ y $\hat{\varphi}_{r\alpha}$ Fig. 4.18 Simulación de $\varphi_{r\beta}$ y $\hat{\varphi}_{r\beta}$

4.7 Control de Seguimiento a Través del Observador del Flujo

Usando el observador presentado en la sección 4.6, se puede aplicar el control de seguimiento (4.19) dado en la sección 4.3.1. El control de seguimiento está en función de los estados estimados, y su representación es la siguiente:

$$u(\hat{x}) = -L_0\hat{x} - \varphi(\omega) - L(\omega)M(\omega)\hat{x} + \ddot{z}_d(t) - K\Delta_{\theta}e. \quad (4.31)$$

En la Figura 4.19 se muestra la estructura del control con los estados que se estimaron por medio del observador, los cuales son retroalimentados para obtener un error en función del cual se alimenta a las acciones del bloque de control.

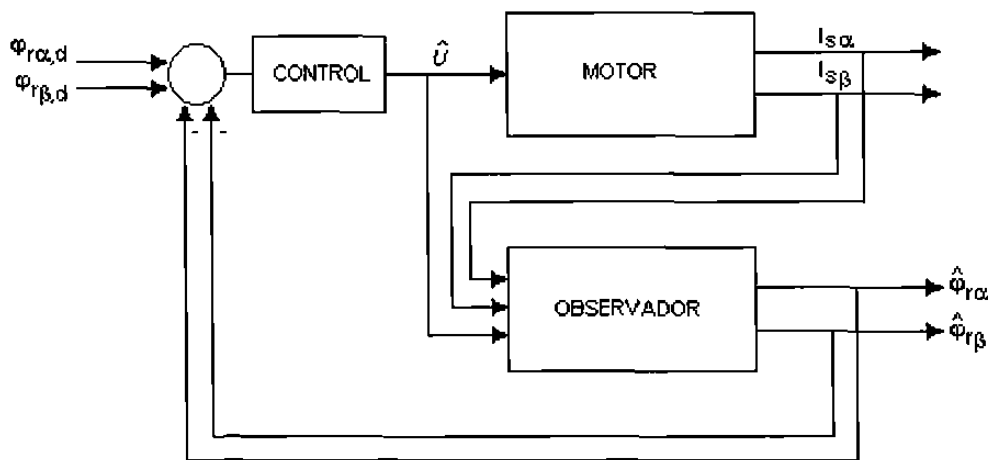


Fig. 4.19 Principio de Separación del Motor

4.7.1 Simulación del Motor Controlado a Través del Observador de Flujo

Los parámetros para simular el comportamiento del sistema son los mismos que se utilizaron con anterioridad. Para obtener resultados se utilizó un valor de $\bar{\theta} = 10$ y $\theta = 15$. Por lo tanto los parámetros son: $R_s = 1.374\Omega$; $R_r = 1.3398\Omega$; $M = 0.1286H$; $L_r = 0.1358H$; $L_s = 0.1358H$; $J = 0.04Kgm^2$, $T_L = 0$, $p = 3$. Y como condiciones iniciales se utilizaron los siguientes valores $\varphi_{r\alpha}(0) = 0.1$ Webers, $\varphi_{r\beta}(0) = 0.1$ Webers, $i_{s\alpha}(0) = 0.1$ Amperes, $i_{s\beta}(0) = 0.1$

Amperes, $\omega(0) = 0.1$ rad/seg, $\hat{\varphi}_{r\alpha}(0) = 0.2$ Webers, $\hat{\varphi}_{r\beta}(0) = 0.2$ Webers, $\hat{i}_{s\alpha}(0) = 0.1$ Amperes, $\hat{i}_{s\beta}(0) = 0.1$ Amperes, $\hat{\omega}(0) = 0.1$ rad/seg. En las Figuras 4.20 y 4.21 se simularon los flujos del sistema con respecto a los flujos de referencia en coordenadas α y β aplicando el principio de separación. En la Figura 4.20 se observa cómo el flujo del sistema en la coordenada α alcanza al flujo de referencia en un tiempo aproximado de 0.63 segundos. En la Figura 4.21 se tiene que el flujo del sistema en la coordenada β requiere del mismo tiempo que en la coordenada α para alcanzar la señal de referencia. Note que la estabilidad del sistema no es afectada tanto del observador para el control, como la estabilidad del control para el observador. Esto se puede verificar comparando las Figuras 4.20 y 4.21 con las Figuras 4.10 y 4.11.

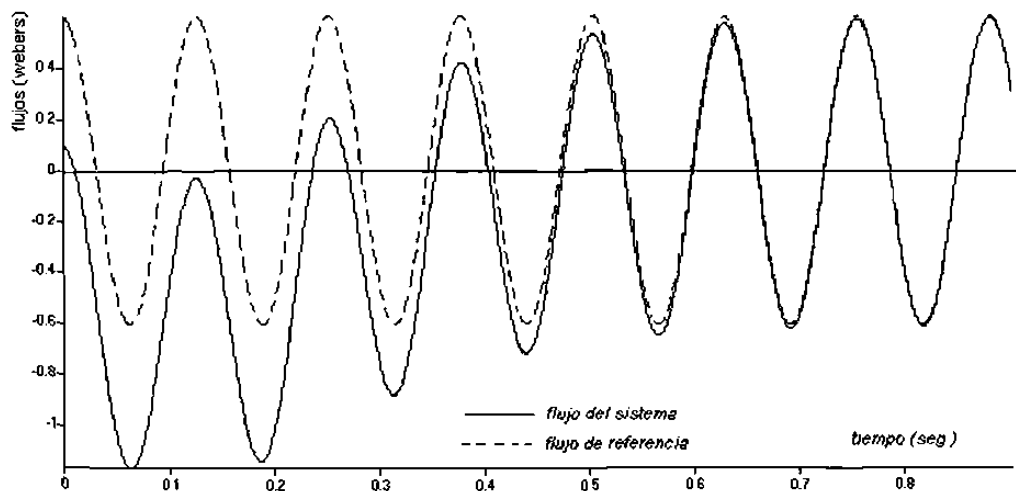


Fig. 4.20 simulación de $\varphi_{r\alpha}$ y $\varphi_{r\alpha,d}$

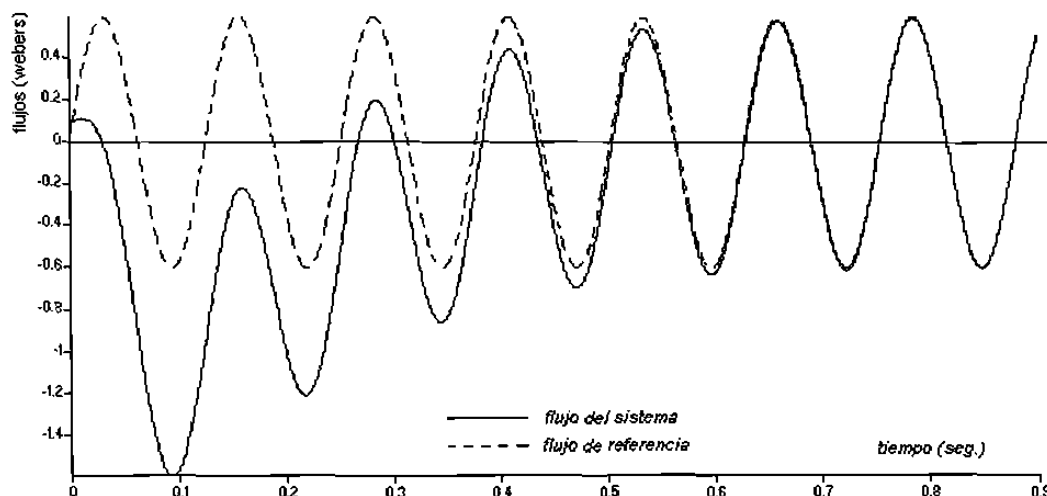


Fig. 4.21 Simulación de $\varphi_{r\beta}$ y $\varphi_{r\beta,d}$

4.8 Resumen del Capítulo

En este Capítulo se modeló el sistema dinámico del motor de inducción para aplicarle el diseño del algoritmo de control que se desarrolló en el Capítulo 3. Así mismo, se realizó el control de seguimiento de los flujos en el rotor.

Se hicieron extensas simulaciones, unas en lazo cerrado las cuales proporcionaron el comportamiento de los flujos en el rotor, corrientes en el estator y velocidad del rotor; en donde los flujos del rotor se consideraron medibles. Los valores del control que se aplicaron a dicha simulación fueron tomados de un trabajo reciente realizado por K. Busawon [5]. La segunda simulación se realizó con el control de seguimiento en lazo cerrado y se comprobó que es posible aplicar una señal deseada al sistema y que éste siga satisfactoriamente dicha señal. Como es difícil obtener las medidas de los flujos, se implementó un observador, el cual estimó los (flujos) estados que no son medibles en el sistema del motor para aplicar el control de seguimiento y obtener los resultados ilustrados en este trabajo. Cabe hacer mención que el observador y el control se desarrollaron por separado y al fucionarlos no se afectó la estabilidad del sistema.

Capítulo 5

Control de Sistemas Electromecánicos

5.1 Introducción

Muchos de los dispositivos industriales son construidos con dos partes, una mecánica y otra eléctrica. Como ejemplo de estos dispositivos se puede mencionar los micrófonos, los altavoces, los relevadores, los actuadores selenoidales e instrumentación para la medición de posición, la velocidad y la aceleración todo dentro de una gran variedad de mecanismos electromecánicos.

Los sistemas electromecánicos pueden ser considerados como dispositivos que transforman la energía eléctrica en mecánica y viceversa. Estos dispositivos representan una clase de componentes muy importante en la industria, y se encuentran a menudo en aplicaciones prácticas [33]. Desde el punto de vista del control, esta estructura es bastante interesante, ya que pertenece a la clase de sistemas llamados de baja acción, en el sentido que solamente los componentes eléctricos son directamente accionados; además, en algunos casos la parte eléctrica es también de baja acción, esto se presenta en la situación en que los acoplamientos inductivos están presentes en el sistema. Los modelos matemáticos que presentan este comportamiento dinámico son, en general, no lineales cuando el efecto del entrehierro no es dominante y en muchos casos, el estado no es completamente medible [32].

Es interesante remarcar que la estructura de esta clase de sistemas es similar a la clase de sistemas mecánicos de baja acción, ya que en los sistemas que se analizan por medio de coordenadas generalizadas, éstas están disponibles para ser medibles; mientras que en éste trabajo se analizan los sistemas que por su naturaleza contienen variables que no son medibles como son los flujos magnéticos y las cargas eléctricas.

En este capítulo se presentan fundamentos sobre ecuaciones de Lagrange, las cuales, sirven para el modelado de los sistemas electromecánicos, y en especial, para el modelo de un actuador. Posteriormente se presenta la aplicación del control de seguimiento diseñado en el Capítulo 3, para ésta clase de sistemas.

5.2 Ecuaciones de Lagrange

En esta sección se mencionan algunos conceptos sobre ecuaciones de Lagrange, con el fin de poder desarrollar más adelante el modelo matemático para los sistemas electromecánicos. Las funciones de Lagrange son usadas para la obtención de ecuaciones de equilibrio para sistemas eléctricos o mecánicos [32]. Los sistemas que serán analizados están compuestos de elementos concentrados con determinadas coordenadas terminales, y los estados de estos sistemas pueden ser expresados en términos de funciones de energía y o bien de co-energía, involucrando dichas coordenadas terminales. La forma completa de la ecuación de Lagrange, incluyendo la función de disipación de Rayleigh [32] y las fuerzas externas no conservativas están dadas de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\dot{\xi}, \xi, t)}{\partial \dot{\xi}_k} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(\dot{\xi}, \xi, t)}{\partial \xi_k} + \frac{\partial F(\dot{\xi})}{\partial \dot{\xi}_k} = Q_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (5.1)$$

donde el símbolo ξ representa un conjunto de coordenadas generalizadas, tanto eléctricas como mecánicas. El Lagrangiano $\mathcal{L}(\dot{\xi}, \xi, t)$ es una función de todas las coordenadas, de sus primeras derivadas en el tiempo, y aún en algunos casos del tiempo t explícitamente. La función de disipación de Rayleigh $F(\dot{\xi})$ es solamente una función de todas las primeras derivadas respecto al tiempo de las coordenadas. Q_k representa la suma de las fuerzas externas actuando en el k -ésimo nodo, o lazo, del sistema.

El Lagrangiano está definido como la diferencia entre dos funciones de estado generales conocidas como el sistema total de co-energía y el sistema total de funciones de energía. El sistema total de la función co-energía consiste de la suma de las co-energías cinéticas mecánicas y ciertas funciones de co-energía de estado eléctricas, como sigue:

$$J'(\dot{x}, x, \dot{q}, t) = T'(\dot{x}, x, t) + W'_m(\dot{q}, x) \quad \text{lazo} \quad (5.2)$$

$$J'(\dot{x}, x, \dot{\lambda}, t) = T'(\dot{x}, x, t) + W'_e(\dot{\lambda}, x) \quad \text{nodos.} \quad (5.3)$$

Cuando se desea efectuar el análisis en lazo de la parte eléctrica del sistema, se utiliza la ecuación (5.2) con $W'_m(\dot{q}, x)$, y cuando se lleva a cabo en forma de nodos se emplea (5.3) con $W'_e(\dot{\lambda}, x)$. El sistema total de la función de co-energía de estado es designada por J' ; la función de co-energía

mecánica es T' ; y las funciones de co-energía de estado del circuito magnético y de los circuitos eléctricos están dadas por W'_m y W'_e respectivamente. Las ecuaciones (5.2) y (5.3) están en función de la posición mecánica x , de la carga eléctrica q y de los enlaces de flujo magnético λ .

La formulación de análisis del sistema con las ecuaciones (5.2) y (5.3) es idéntica, ya sea para sistemas eléctricos o para sistemas mecánicos, además se incluye la posibilidad de que las funciones de co-energía eléctrica $W'_m(\dot{q}, x)$ y $W'_e(\dot{\lambda}, x)$ puedan involucrar ambas coordenadas, tanto eléctricas como mecánicas. En otras palabras, se incluyen en la formulación de la co-energía total los elementos concentrados electromecánicos.

El segundo sistema de función de estado total involucrado en la formulación del Lagrangiano es el total de la función de energía del sistema. El total de la función de energía del sistema contiene las funciones de energía potencial mecánica más la propia función de energía eléctrica de estado como sigue:

$$\begin{aligned}\nu(x, q, t) &= V(x, t) + W_e(q, x) \\ \nu(x, \lambda, t) &= V(x, t) + W_m(\lambda, x).\end{aligned}\tag{5.4}$$

En (5.4) se observa que también se puede analizar el sistema ya sea por mallas tomando la ecuación con $W_e(q, x)$ y por nodos considerando $W_m(\lambda, x)$ como en (5.2) y (5.3). El símbolo ν representa la función de energía total del sistema; V es la energía potencial mecánica; y W_e , y W_m son las funciones de energía eléctrica y energía magnética de estado, respectivamente. La ecuación (5.4) es aplicada a sistemas compuestos únicamente por elementos concentrados mecánicos y eléctricos. La extensión importante, nace en el hecho que la ecuación (5.4) incluye elementos electromecánicos concentrados, ya que las funciones de energía eléctrica de estado dependen de las coordenadas eléctricas y la posición de coordenadas mecánicas.

Por definición, la función de Lagrange está formulada como sigue:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\dot{x}, x, \dot{q}, t) &= J'(\dot{x}, x, \dot{q}, t) - \nu(x, q, t) && \text{lazo,} \\ \mathcal{L}(\dot{x}, x, \dot{\lambda}, t) &= J'(\dot{x}, x, \dot{\lambda}, t) - \nu(x, \lambda, t) && \text{nodos,}\end{aligned}$$

donde J' y ν están definidas en (5.2) (5.3) y (5.4).

Todos los sistemas físicos contienen alguna disipación de energía y por consiguiente, cualquier análisis práctico utilizando solamente las ecuaciones de Lagrange no permiten hacer el análisis

completo, por lo que es necesario incluir las funciones de energía disipativa que es ocasionada por el conjunto de elementos disipativos. A este efecto se usa la función de disipación de Rayleigh y la función de disipación co-Rayleigh.

La primera, se refiere al área sobre la curva característica de la función de disipación de energía y está representada como:

$$F_e(\dot{q}) = \int_0^{\dot{q}} \dot{\lambda}'(\dot{q}') d\dot{q}'.$$

La segunda, se refiere al área bajo la curva característica de dicha función y está representada como:

$$F_e(\dot{\lambda}) = \int_0^{\dot{\lambda}} \dot{q}'(\dot{\lambda}') d\dot{\lambda}'$$

donde la prima denota la co-función..

Más adelante vamos a usar estos conceptos para el modelado de sistemas electromecánicos y en particular para el sistema de un actuador electromagnético.

5.3 Teoría y Modelado de Sistemas Electromecánicos

De acuerdo con la sección 5.2 de éste capítulo todos los sistemas dinámicos requieren de una representación en ecuaciones diferenciales para poder analizar el comportamiento del sistema. En esta sección se presenta el análisis de los sistemas electromecánicos para obtener su representación dinámica.

La Tabla 5.1 muestra las coordenadas generalizadas que se utilizarán más adelante para el análisis del sistema electromecánico que se considera en este capítulo. De las seis coordenadas que se presentan en estos tres tipos de sistemas, solamente la posición mecánica x y la eléctrica son utilizadas en este trabajo. Las variables más frecuentemente usadas como voltaje y corriente son utilizadas como variables fundamentales. El voltaje siempre es más fácil de medir que los enlaces de flujo, y la corriente puede ser mucho más rápida de medir que la potencia eléctrica (carga eléctrica). Similarmente los argumentos aplicados a la fuerza y al par electromecánico son comparados con éstas coordenadas generalizadas para su análisis.

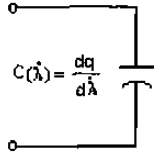
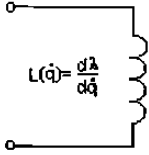
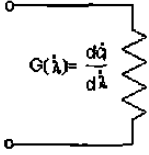
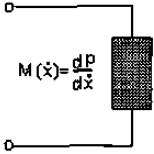
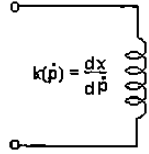
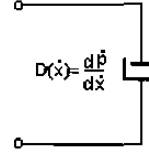

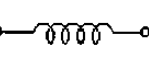
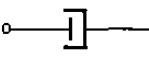
En la siguiente tabla se muestran las coordenadas básicas más comunes y sus primeras derivadas para los sistemas electromecánicos.

Tabla 5.1 Coordenadas Básicas y sus Derivadas

Sistema	Coordenadas			Primera derivada en el tiempo		
	Símbolo	Descripción	Unidades	Símbolo	Descripción	Unidades
Eléctrico	q	Carga	Culombio	$\dot{q}=i$	Corriente	Amperes
	λ	Enlaces de Flujo	Ampere vuelta	$\dot{\lambda}=v$	Voltaje	Volts
Mecánico (Trayectoria)	p	Momento	Newton-seg.	$\dot{p}=f$	Fuerza	Newtons
	x	Posición	Metros	$\dot{x}=v$	Velocidad	m/seg.
Mecánico (Rotacional)	l	Momento angular	New-metro-seg	$\dot{l}=T$	Torque	Newtons-metro
	θ	Posición angular	Radianes	$\dot{\theta}=\omega$	Velocidad angular	rad/seg.

En la Tabla 5.2 se presentan símbolos esquemáticos individuales de los elementos concentrados y sus relaciones. Por ejemplo, el elemento capacitancia está definido por la carga q sobre la placa del capacitor como una función del voltaje terminal aplicado λ .

Tabla 5.2 Símbolos de Elementos Concentrados

Eléctrica	Capacitancia  $C(\lambda) = \frac{dq}{d\lambda}$	Inductancia  $L(\dot{\lambda}) = \frac{d\lambda}{d\dot{\lambda}}$	Conductancia  $G(\lambda) = \frac{d\dot{q}}{d\lambda}$
Mecánica (traslacional)	Masa  $M(\dot{x}) = \frac{d\dot{p}}{d\dot{x}}$	Resorte  $k(\dot{p}) = \frac{d\dot{x}}{d\dot{p}}$	Amortiguamiento  $D(\dot{x}) = \frac{d\dot{p}}{d\dot{x}}$
Mecánica (rotacional)	Inercia  $\mathcal{J}(\dot{\theta}) = \frac{d\dot{l}}{d\dot{\theta}}$	Resorte torsional  $k_{\theta}(\dot{l}) = \frac{d\dot{\theta}}{d\dot{l}}$	Amortiguamiento rotacional  $D_{\theta}(\dot{\theta}) = \frac{d\dot{l}}{d\dot{\theta}}$

El modelo dinámico para los sistemas electromecánicos se puede representar por medio de ecuaciones de Lagrange [32], como se mencionó en la sección 5.2. La suposición principal es que cada sistema que pertenece a esta clase, puede ser descompuesta en un subsistema eléctrico y otro mecánico y que estos pueden ser vistos como la interconexión del conjunto de elementos eléctricos y elementos mecánicos. Para el subsistema eléctrico estos elementos son inductancias, capacitancias y resistencias, mientras que para los subsistemas mecánicos son resortes, masas y elementos amortiguadores.

Respecto a los elementos involucrados en la estructura de esta clase de sistemas, está considerado

que cada uno de los sistemas está definido por una relación constitutiva y por tanto por una función de energía almacenada y por una función de energía disipada, respectivamente. Específicamente para el conjunto de inductancias la energía magnética almacenada y la función de co-energía (ver [13]) están dadas por:

$$\begin{aligned} W_m(\dot{\lambda}, x) &= \frac{1}{2} \dot{\lambda}^T \overline{D}_e(x) \dot{\lambda}, \\ W'_m(\dot{q}_e, x) &= \frac{1}{2} \dot{q}_e^T D_e(x) \dot{q}_e. \end{aligned}$$

La energía eléctrica almacenada y la función de co-energía son:

$$\begin{aligned} W_e(q_e, x) &= \frac{1}{2} q_e^T C_e(x) q_e, \\ W'_e(\dot{\lambda}, x) &= \frac{1}{2} \dot{\lambda}^T \overline{C}_e(x) \dot{\lambda}, \end{aligned}$$

y las funciones de disipación Rayleigh y co-Rayleigh son:

$$F_e(\dot{q}_e) = \frac{1}{2} \dot{q}_e^T R_e \dot{q}_e; \quad F'_e(\dot{\lambda}) = \frac{1}{2} \dot{\lambda}^T \overline{R}_e \dot{\lambda},$$

donde, $\lambda \in \mathbb{R}^n$ es el vector de flujos, $q_e \in \mathbb{R}^n$ son las cargas eléctricas, $x \in \mathbb{R}$ es la posición mecánica, $\overline{D}_e(x), D_e(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices de inductancias, $C_e(x), \overline{C}_e(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices de capacitancias y $R_e, \overline{R}_e \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices de resistencias. La dependencia de algunas de estas matrices con respecto a la posición mecánica $x \in \mathbb{R}$, es una consecuencia de la interacción entre los subsistemas eléctricos y los subsistemas mecánicos [32]. Como se puede notar en las expresiones anteriores todos los elementos eléctricos son lineales con respecto a sus argumentos.

Como el sistema mecánico es de dimensión uno, la co-energía cinética asociada y la función de disipación de Rayleigh están dadas por:

$$T'(\dot{x}) = \frac{1}{2} D_m \dot{x}^2, \quad F_m(\dot{x}) = \frac{1}{2} R_m \dot{x}^2,$$

donde $D_m \in \mathbb{R}$ es la masa y $R_m \in \mathbb{R}$ es el coeficiente de amortiguamiento. La función de energía potencial $V(x) \in \mathbb{R}$ es propuesta para tener una forma general, dependiendo sólo de la posición mecánica.

Con respecto a las fuerzas externas, éstas están consideradas que sólo cuando se cumple que las dimensiones del sistema de éstas fuerzas es $m \leq n$, las variables eléctricas intervienen directamente, mientras que el subsistema mecánico está perturbado por una fuerza f_L ; esto es, las

fuerzas externas toman la forma:

$$Q_e = Mu, \quad Q_m = -f_L,$$

donde $M = [I_m, 0]^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$, con I_m como matriz identidad.

La estructura propuesta para la matriz M implica que el vector de coordenadas eléctricas puede ser dividido como $q_e = [q_{e1}^T, q_{e2}^T]^T$ y $\lambda_e = [\lambda_{e1}^T, \lambda_{e2}^T]^T$ donde las variables $q_{e1}, \lambda_{e1} \in \mathbb{R}^m$ son las actuadoras, mientras que $q_{e2}, \lambda_{e2} \in \mathbb{R}^{n-m}$ son las variables pasivas. Debido a la característica intrínseca de las cargas eléctricas y flujos magnéticos se asume que las derivadas con respecto al tiempo de las coordenadas que actúan, corrientes y voltajes, están disponibles para ser medibles.

El modelo matemático de los sistemas electromecánicos puede obtenerse por el análisis en lazo, uno para el subsistema eléctrico y otro, el de fuerza, para el mecánico. En este caso, la función Lagrangiana toma la forma:

$$\mathcal{L}(q_e, \dot{q}_e, x, \dot{x}) = W'_m(\dot{q}_e, x) + T'(\dot{x}) - W_e(q_e, x) - V(x),$$

así mismo, en este contexto la función total de disipación Rayleigh está dada por:

$$F(\dot{q}_e, \dot{x}) = F_e(\dot{q}_e) + F_m(\dot{x}).$$

Ahora podemos aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(z, \dot{z})}{\partial \dot{z}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} + \frac{\partial F(\dot{z})}{\partial \dot{z}} = Q_z, \quad (5.5)$$

donde, z es el vector de coordenadas generalizadas, dadas en este caso por $z = [q_e^T, x^T]^T$. Para la parte eléctrica se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(z, \dot{z})}{\partial \dot{z}} \right] &= D_e(x) \ddot{q}_e + \dot{D}_e(x) \dot{q}_e, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} &= -C_e(x) q_e, \\ \frac{\partial F(\dot{z})}{\partial \dot{z}} &= R_e \dot{q}_e, \\ Q_z &= Mu, \end{aligned}$$

y para la parte mecánica se tiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(z, \dot{z})}{\partial \dot{z}} \right] &= D_m \ddot{x}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= g(x), \\ \frac{\partial F(\dot{z})}{\partial \dot{z}} &= R_m \dot{x}, \\ Q_m &= -f_L,\end{aligned}$$

por lo tanto, el modelo electromecánico está representado por:

$$\begin{aligned}D_e(x)\ddot{q}_e + \dot{D}_e(x)\dot{q}_e + C_e(x)q_e + R_e\dot{q}_e &= Mu, \\ D_m\ddot{x} + g(x) + R_m\dot{x} &= f(q_e, \dot{q}_e, x) - f_L,\end{aligned}\tag{5.6}$$

con $g(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x}$ y la fuerza mecánica del origen eléctrico $f(q_e, \dot{q}_e, x)$, dada como:

$$f(q_e, \dot{q}_e, x) = \frac{1}{2} \dot{q}_e^T \frac{\partial D_e(x)}{\partial x} \dot{q}_e - \frac{1}{2} q_e^T \frac{\partial C_e(x)}{\partial x} q_e.$$

En cambio si el desarrollo anterior es llevado a un análisis nodal los resultados Lagrangianos son:

$$\mathcal{L}(\lambda, \dot{\lambda}, x, \dot{x}) = W_e'(\dot{\lambda}, x) + T'(\dot{x}) - W_m(\lambda, x) - V(x),$$

con una función de disipación co-Rayleigh

$$F(\dot{\lambda}, \dot{x}) = F_e'(\dot{q}_e) + F_m(\dot{x}),$$

produciendo un modelo para el subsistema eléctrico dado por:

$$\overline{C}_e(x)\ddot{\lambda} + \dot{\overline{C}}_e(x)\dot{\lambda} + \overline{D}_e(x)\lambda + \overline{R}_e\dot{\lambda} = Mu,\tag{5.7}$$

con un subsistema mecánico con la misma estructura como en (5.6) con:

$$f(\lambda, \dot{\lambda}, x) = \frac{1}{2} \dot{\lambda}^T \frac{\partial \overline{C}_e(x)}{\partial x} \dot{\lambda} - \frac{1}{2} \lambda^T \frac{\partial \overline{D}_e(x)}{\partial x} \lambda.$$

En el caso del análisis en lazo, el control de entrada u puede obtenerse de las fuentes de voltaje, mientras que para el análisis nodal es conveniente expresarlo por las fuentes de corrientes.

Es importante observar que la estructura general de los modelos (5.6) y (5.7) son similares sin importar el tipo de referencia que se usó para su representación. En este sentido, se puede concluir que si una estrategia de control es desarrollada para un sistema electromecánico utilizando

el análisis de mallas, entonces el mismo controlador puede ser utilizado haciendo una adecuada sustitución de variables para un sistema electromecánico obtenido por un análisis nodal. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad en este trabajo se considera el análisis en malla para los sistemas electromecánicos.

En este caso es necesario introducir una suposición sobre el modelo general (5.6) con respecto a los estados corrientes de éste tipo de sistemas. La interacción entre el subsistema eléctrico y el subsistema mecánico se lleva a cabo por medio de los campos magnéticos y/o eléctricos. Esta suposición implica que la clase de sistemas electromecánicos considerados en este trabajo pueden estar representados como:

$$\begin{aligned} D_e(x)\ddot{q}_e + \dot{D}_e(x)\dot{q}_e + C_e q_e + R_e \dot{q}_e &= Mu, \\ D_m \ddot{x} + g(x) + R_m \dot{x} &= f(\dot{q}_e, x) - f_L, \end{aligned} \quad (5.8)$$

con $g(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x}$ y donde la fuerza mecánica del origen eléctrico depende sólo de las corrientes \dot{q}_e teniendo la estructura siguiente:

$$f(\dot{q}_e, x) = \frac{1}{2} \dot{q}_e^T \frac{\partial D_e(x)}{\partial x} \dot{q}_e.$$

Aunque este modelo es un caso particular de un sistema general electromecánico es necesario señalar que cubre una clase amplia de dispositivos electromecánicos prácticos.

5.4 Diseño de la Estrategia de Control

El objetivo en éste capítulo es utilizar los resultados del Capítulo 3 para diseñar un control de seguimiento para el modelo (5.8).

De hecho, sea $z_1 = q_e \in R^p$, $z_2 = \dot{q}_e \in R^p$ tal que:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = -D_e^{-1}(x)\dot{D}_e(x)z_2 - D_e^{-1}(x)C_e(x)z_1 - D_e^{-1}(x)R_e(x)z_2 + D_e^{-1}(x)Mu, \end{cases} \quad (5.9)$$

por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I_{p \times p} \\ -D_e^{-1}(x)C_e(x) & -D_e^{-1}(x)\dot{D}_e(x) - D_e^{-1}(x)R_e(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_p \\ D_e^{-1}(x)M \end{bmatrix} u. \quad (5.10)$$

Entonces, el sistema puede ser escrito de la siguiente forma:

$$\dot{z} = F(x)z + G(x)u \quad (5.11)$$

donde $z = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix}^T$,

$$F(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I_{p \times p} \\ -D_e^{-1}(x)C_e(x) & -D_e^{-1}(x)\dot{D}_e(x) - D_e^{-1}(x)R_e(x) \end{bmatrix} \text{ y } G(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_p \\ D_e^{-1}(x)M \end{bmatrix}.$$

Note que $D_e^{-1}M$ es no-singular $\forall x \in \mathbb{R}$.

Aplicando, entonces el control preliminar siguiente:

$$u = M^{-1}D_e(x)[-(-D_e^{-1}(x)C_e(x) - D_e^{-1}(x)\dot{D}_e(x) - D_e^{-1}(x)R_e(x)) + v], \quad (5.12)$$

se obtiene que:

$$\dot{z} = Az + Bv,$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I_p \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ I_p \end{bmatrix}$$

que tiene la forma como en (3.6) en el Capítulo 3.

Ahora sea q_d la señal de referencia deseada y aplicando la técnica que se utilizó en el Capítulo 4, se puede ver que el control de seguimiento de q_d está dado por:

$$u = M^{-1}D_e(x)[D_e^{-1}(x)C_e(x)z_1 + D_e^{-1}(x)\dot{D}_e(x)z_2 + D_e^{-1}(x)R_e(x)z_2 + \ddot{q}_{1d} - K\Delta_\theta e] \quad (5.13)$$

donde:

$$\Delta_\theta = \begin{bmatrix} \theta^2 I_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \theta I_p \end{bmatrix}.$$

5.5 Observador para Sistemas Electromecánicos

El control de seguimiento presentado en la sección anterior está en función de todas las variables de estado. En realidad en muchos casos se puede medir solamente la variable $z_1 = \dot{q}$ (corriente). Entonces, es necesario diseñar un observador para estimar $z_1 = q$ (carga). A continuación se presenta un observador para ésta clase de sistemas.

Considere el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 &= f_1(x)\xi_2 + g_1(x, \xi_1, u), \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_1, \\ y &= \xi_1, \end{cases}$$

donde la corriente $z_2 = \xi_1$, la carga $z_1 = \xi_2$ y

$$f_1(x) = -D_e^{-1}(x)C_e(x), \quad g_1(x, \xi_1, u) = -D_e^{-1}(x)\dot{D}_e(x)\xi_1 - D_e^{-1}(x)R_e(x)\xi_1 + D_e^{-1}(x)Mu$$

donde $f_1(x)$ es no-singular.

Ahora, considerando el observador en [4], se tiene que para los sistemas electromecánicos, el estimador de estados tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\xi}}_1 &= f_1(x)\hat{\xi}_2 + g_1(x, \xi_1, u) - 2\theta I_p(\hat{\xi}_1 - \xi_1) \\ \dot{\hat{\xi}}_2 &= \hat{\xi}_1 - f_1^{-1}(x)\theta^2 I_p(\hat{\xi}_1 - \xi_1) \end{aligned}$$

donde $2\theta I_p$ y $\theta^2 I_p$ son matrices de ganancia.

5.6 Modelado Matemático de un Actuador Electromecánico

En esta sección se utilizan las ecuaciones de Lagrange para obtener el modelo matemático del sistema electromecánico (actuador) que se presenta en la Figura 5.1. Posteriormente en la siguiente sección se aplica el algoritmo de control y el observador propuesto en las secciones 5.4 y 5.5.

En nuestros días un actuador electromecánico tiene muchas aplicaciones en la industria y se puede considerar, por ejemplo, un motor eléctrico controlado por un microprocesador el cual maneja

un disco floppy. El desempeño del motor en este ejemplo es muy específico dentro de los límites finos de la información precisa que debe ser transferida del disco a la memoria de la computadora. Se puede mencionar otras aplicaciones de los actuadores, tales como, la aplicación a los relevadores magnéticos que son utilizados en los sistemas de potencia como protección respecto a las altas corrientes, también para cerraduras magnéticas de puertas de seguridad, etc.

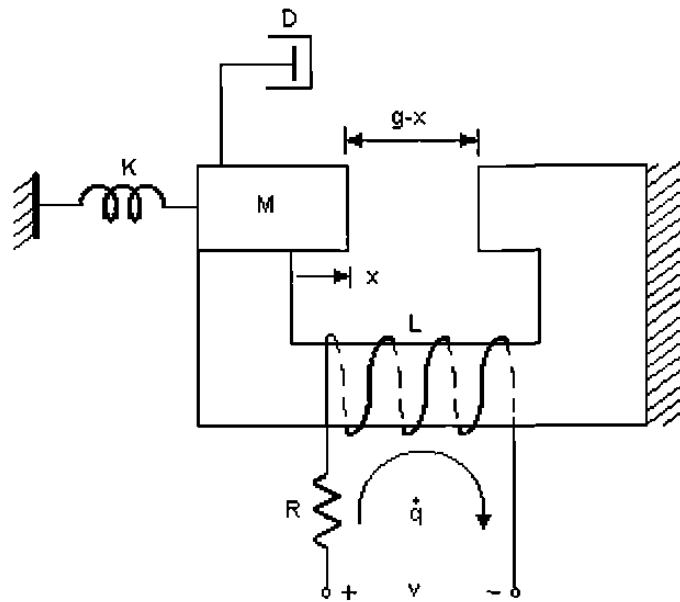


Fig. 5.1 Actuador electromecánico

5.6.1 Desarrollo del Modelo

Formulando el análisis en lazo para la parte eléctrica del sistema, la función total de co-energía del sistema, de acuerdo con la ecuación (5.2), puede escribirse como sigue:

$$J'(\dot{x}, x, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + W'_m(\dot{q}, x).$$

La función de co-energía magnética de estado $W'_m(\dot{q}, x)$ para este dispositivo está desarrollada en el Apéndice A, la cual tiene la siguiente forma:

$$W'_m(\dot{q}, x) = \frac{a}{g-x} \dot{q}^2,$$

donde $a = \frac{\mu_0 N^2 A}{2}$.

El sistema de la función de energía total de acuerdo a (5.4), está dada por la constante del resorte y queda de la siguiente manera:

$$\nu(x, q) = \frac{1}{2} k_r x^2.$$

La función de energía eléctrica de estado $W_e(q, x) = 0$ porque no existe el elemento capacitivo en este sistema. Así, el Lagrangiano para el sistema queda como:

$$\mathcal{L}(\dot{x}, x, \dot{q}) = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{a}{(g-x)} \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k_r x^2,$$

uniendo los términos de las expresiones de J' y ν .

Y para la función de disipación de Rayleigh:

$$F(\dot{x}, \dot{q}) = \frac{1}{2} D \dot{x}^2 + \frac{1}{2} R \dot{q}^2.$$

Las fuerzas externas completan los datos para la formulación de las ecuaciones de Lagrange, estas están dadas por:

$$Q_x = M_g,$$

que son las fuerzas gravitacionales actuando en el sistema. Como que el actuador del sistema tiene un desplazamiento x horizontal, no existe fuerza gravitacional y por lo tanto $Q_x = 0$. Para la excitación de voltaje actuando sobre la coordenada q

$$Q_q = v(t).$$

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange (5.5) en el sistema electromagnético se determina el subsistema mecánico, estas derivadas parciales están evaluadas como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\dot{x}, x, \dot{q})}{\partial \dot{x}} \right] &= \frac{d}{dt} (M \dot{x}) = M \ddot{x}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}(\dot{x}, x, \dot{q})}{\partial x} &= \frac{a \dot{q}^2}{(g-x)^2} - k_r x, \\ \frac{\partial F(\dot{x}, \dot{q})}{\partial \dot{x}} &= D \dot{x}. \end{aligned}$$

Entonces, la ecuación de equilibrio mecánico está dada de la siguiente manera:

$$M\ddot{x} + D\dot{x} - \frac{a\dot{q}^2}{(g-x)^2} + k_r x = 0. \quad (5.14)$$

Se observa que en esta ecuación la fuerza del origen eléctrico está dentro de la ecuación de equilibrio y la ecuación de equilibrio eléctrico se obtiene de una manera similar y sus derivadas parciales se evalúan como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\dot{x}, x, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] &= \frac{d}{dt} \left(\frac{2a\dot{q}}{g-x} \right) = \frac{2a}{g-x} \ddot{q} + \frac{2a\dot{q}\dot{x}}{(g-x)^2}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}(\dot{x}, x, \dot{q})}{\partial q} &= 0, \\ \frac{\partial F(\dot{x}, \dot{q})}{\partial \dot{q}} &= R\dot{q}. \end{aligned}$$

La ecuación de equilibrio eléctrico con la excitación de voltaje Q_q es:

$$\frac{2a}{g-x} \ddot{q} + R\dot{q} + \frac{2a\dot{x}}{(g-x)^2} \dot{q} = v(t). \quad (5.15)$$

Cada uno de los términos de la ecuación (5.15) están dados de la siguiente manera: el primer término representa la caída del voltaje en el devanado del selenoide debido a la corriente de malla cambiando con respecto tiempo, el segundo término es el voltaje a través de la resistencia en la malla y el tercer término es formalmente conocido como un voltaje de origen mecánico. El voltaje es inducido en el devanado debido al movimiento o velocidad \dot{x} del elemento móvil de hierro. Note que cada uno de los tres términos de voltaje dependen de la corriente $\dot{q} = i$ y la suma de estos tres términos de voltaje es igual al voltaje aplicado.

Considerando que las ecuaciones (5.14) y (5.15) dependen del término a y tomando el análisis de [36] resulta que $L = \frac{\mu_0 N^2 A}{(g-x)}$, y $\frac{dL}{dx} = \frac{\mu_0 N^2 A}{(g-x)^2}$, donde $a = \frac{\mu_0 N^2 A}{2}$. Por lo tanto, substituyendo a en (5.14) y (5.15) se tienen las ecuaciones dinámicas finales

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + D\dot{x} + k_r x &= \frac{1}{2} \frac{dL}{dx} \dot{q}^2, \\ L\ddot{q} + R\dot{q} + \dot{x} \frac{dL}{dx} \dot{q} &= v(t), \end{aligned} \quad (5.16)$$

y haciendo $\dot{x} = r$, $q_1 = q$ y $q_2 = \dot{q}$, en (5.16) el sistema dinámico tiene la siguiente forma:

$$\text{Sistema mecánico} \quad \begin{cases} \dot{x} = r, \\ \dot{r} = \frac{1}{M} \left[-Dr - k_r x + \frac{1}{2} \frac{dL}{dx} q_2^2 \right], \end{cases} \quad (5.17)$$

$$\text{Sistema eléctrico} \quad \begin{cases} \dot{q}_1 = q_2, \\ \dot{q}_2 = \frac{1}{L} \left[u(t) - Rq_2 - r \frac{dL}{dx} q_2 \right], \end{cases} \quad (5.18)$$

donde $u(t) = v(t)$ es el control, el cual representa el voltaje aplicado al sistema. Nótese que como el control es parte de las ecuaciones eléctricas, únicamente se utilizarán dichas ecuaciones y las ecuaciones mecánicas sólo servirán para cuestiones de simulación más adelante.

5.6.2 Simulación del Actuador

En esta sección se presentan los resultados de simulación en lazo abierto del sistema del actuador electromecánico con los siguientes parámetros. La masa del elemento móvil del sistema es $M = 0.04 \text{ kg}$, la resistencia del circuito $R = 10 \Omega$, el coeficiente del resorte $k_r = 250 \text{ N/m}$, el coeficiente del amortiguador $D = 1 \text{ Ns/m}$, la inductancia $L = \frac{1}{(2 \times 10^{-2-x})} \text{ mH}$, el control (voltaje) en lazo abierto es de $u = 5$ voltios.

En las siguientes figuras se muestra el comportamiento del actuador en lazo abierto. En la Figura 5.2 se observa la corriente, la cual, después de un tiempo menor a 0.1 segundo toma un valor constante. La Figura 5.3 representa el desplazamiento del elemento móvil del actuador, el elemento móvil alcanza su estado estable en un tiempo de 0.15 segundos aproximadamente. En la Figura 5.4 se tiene resultados de la simulación de la velocidad del elemento móvil del actuador y se observa que ésta converge en 0.22 segundos. La dinámica del control no está mostrada ya que ésta es una constante con un valor de 5 volts.

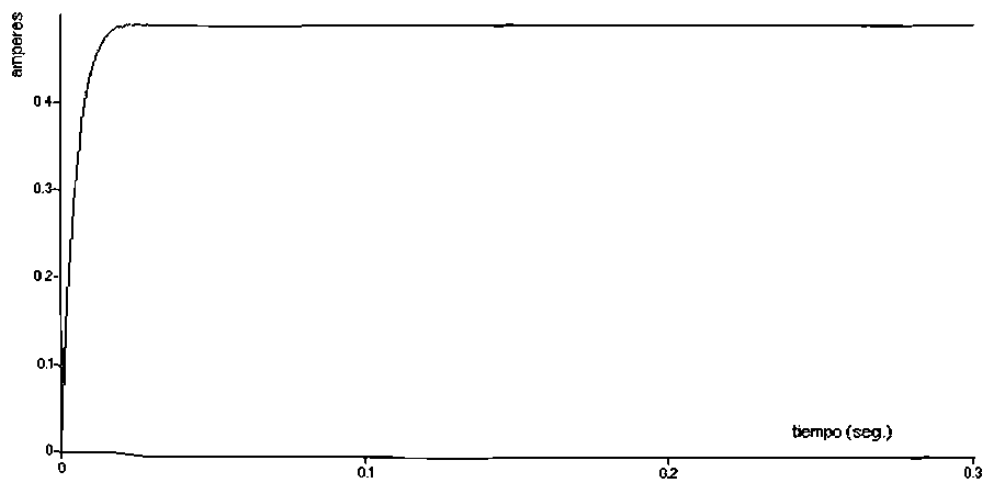


Fig. 5.2 Simulación de la corriente q_2

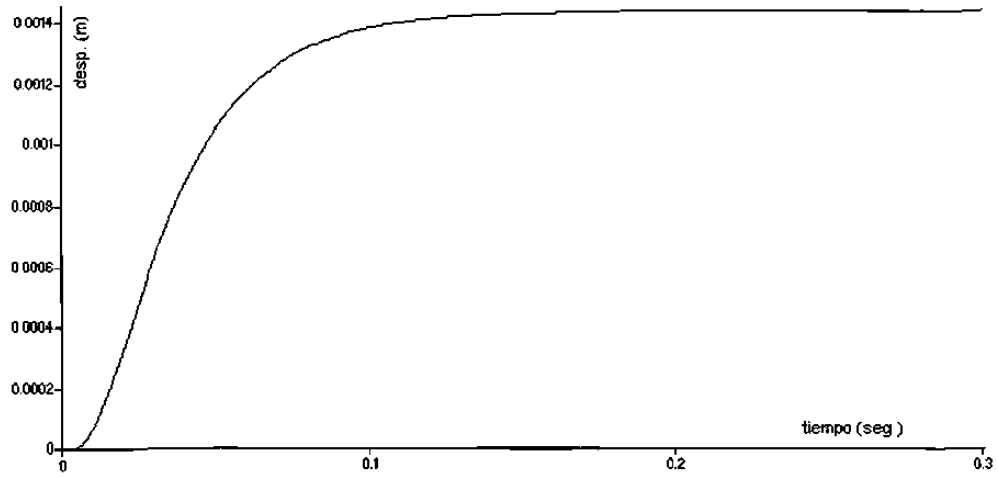
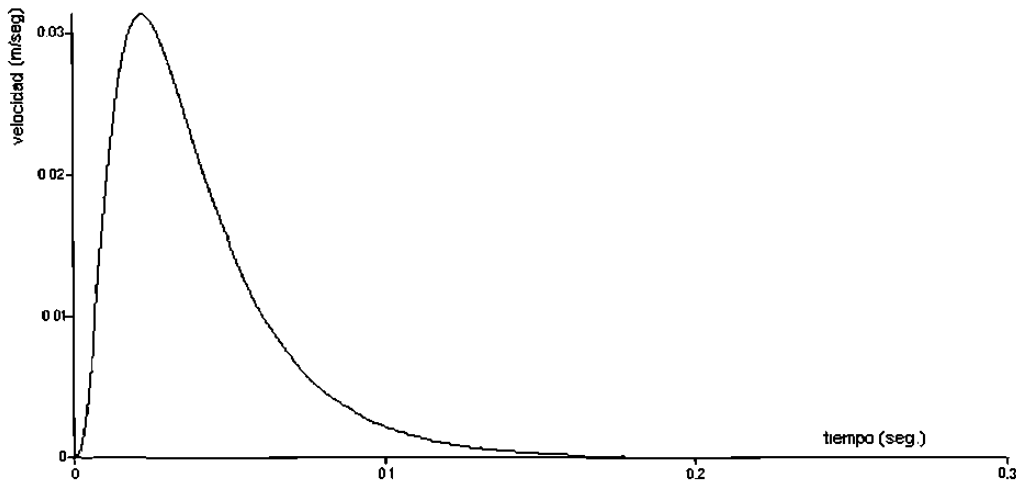


Fig. 5.3 Simulación de la distancia x

Fig. 5.4 Simulación de la velocidad r

5.7 Aplicación del Control al Actuador Electromagnético

Considerando el modelo del sistema eléctrico en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{R}{L}q_2 - \frac{r}{L} \frac{dL}{dx} q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u(t). \quad (5.19)$$

Note que el sistema tiene la forma de (5.11) y se supone que q_2 es medible y aplicando la técnica anterior, el control está dado por:

$$u(t) = L \left(\frac{R}{L} q_2 + \frac{r}{L} \frac{dL}{dx} q_2 + V \right).$$

A continuación se prosigue a desarrollar las ecuaciones del error de seguimiento.

Considere el error como: $e_1 = q_1 - q_{1d}$ y $e_2 = q_2 - \dot{q}_{1d}$ y derivando estas ecuaciones se tiene como resultado el siguiente sistema dinámico del error:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \dot{q}_1 - \dot{q}_{1d} = q_2 - \dot{q}_{1d} = e_2, \\ \dot{e}_2 &= \dot{q}_2 - \ddot{q}_{1d} = V - \ddot{q}_{1d}. \end{aligned}$$

Proponiendo un control de la forma $V = -Ke + \ddot{q}_{1d}$, el sistema de seguimiento tiene la estructura siguiente:

$$\dot{e} = Ae - BKe,$$

y si se escoge una K , tal que la matriz $(A - BK)$ sea Hurwitz, se tiene que el control de seguimiento que estabiliza el sistema está dado por:

$$u(t) = L\left(\frac{R}{L}q_2 + \frac{r}{L}\frac{dL}{dx}q_2 + \ddot{q}_{1d} - K\Delta_\theta e\right)$$

donde Δ_θ tiene la siguiente forma

$$\Delta_\theta = \begin{bmatrix} \theta^2 & 0 \\ 0 & \theta \end{bmatrix},$$

y q_{1d} es una señal de referencia.

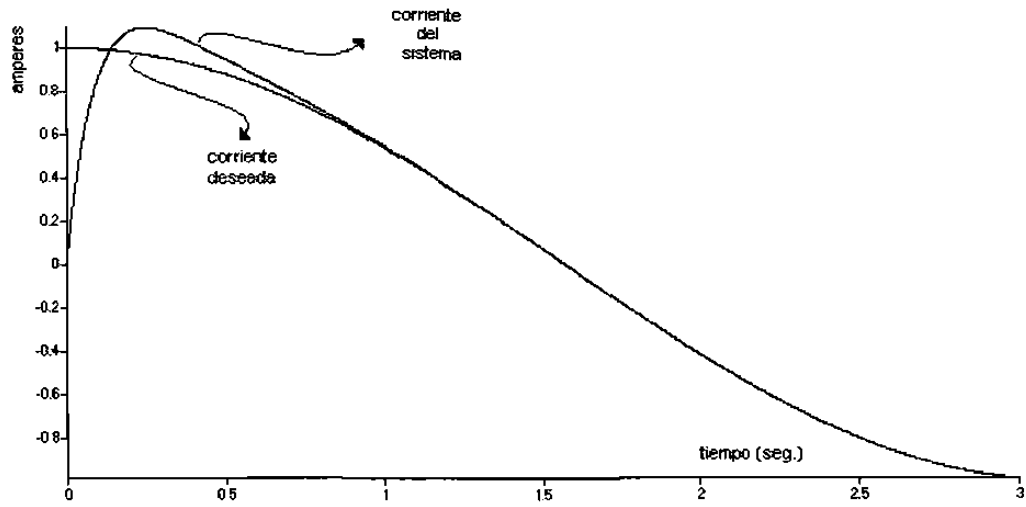
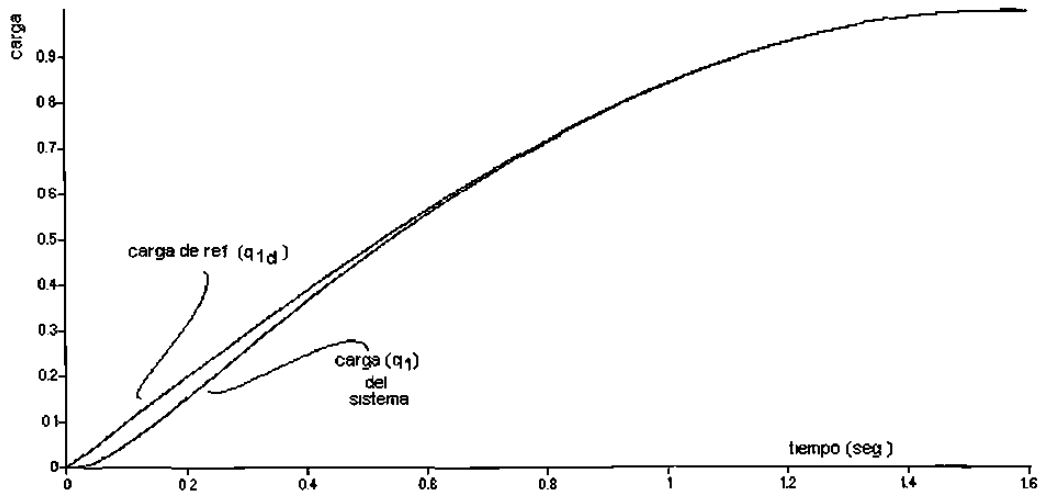
En este caso de aplicación del actuador electromagnético, no se emplea el observador debido a que las variables para este sistema se consideran todas medibles.

5.7.1 Simulación del Control de Seguimiento para el Actuador Electromagnético

Ahora se presentan las siguientes simulaciones del control de seguimiento, considerando en este caso los mismos valores de parámetros como en las simulaciones anteriores los cuales son: la masa del elemento móvil del sistema es $M = 0.04kg$, la resistencia del circuito $R = 10\Omega$, el coeficiente del resorte $k_r = 250 N/m$, el coeficiente del amortiguador $D = 1 Ns/m$, la inductancia $L = \frac{1}{(2 \times 10^{-2} - x)} mH$, el control (voltaje) en lazo abierto es de $u = 5$ voltios. Con condiciones iniciales $q_1(0) = 0$ y $q_2(0) = 0$.

En esta sección se toma como señal deseada $q_{1d} = \text{sen}(t)$, el valor del parámetro de diseño $\theta = 1$ y el vector que estabiliza el sistema dado por: $K = [2, 3]$.

En la Figura 5.6 se observan las curvas de la corriente del sistema y la corriente de referencia, éstas convergen a un mismo valor en un tiempo menor que un segundo. Se efectuó la simulación de las cargas, tanto del sistema, como la carga de referencia y se observa cómo el sistema sigue la señal de referencia, esto se muestra en la Figura 5.7.

Fig. 5.5 Simulación de q_2, \dot{q}_{1ref} Fig. 5.6 Simulación de q_1, q_{1ref} (carga)

5.8 Resumen del Capítulo

En este capítulo se aplicó el diseño del control de seguimiento para los sistemas electromagnéticos.

Primeramente se hizo el análisis de las ecuaciones dinámicas para los sistemas electromecánicos utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange y posteriormente se desarrolló el control de seguimiento directamente, ya que éste tipo de sistemas tiene la forma controlable.

Se realizó una segunda aplicación de este control de seguimiento a un actuador electromagnético, con el fin de comprobar si el sistema sigue la señal de referencia deseada.

Las simulaciones se dividen en dos partes: las primeras consisten en la descripción del comportamiento de la corriente de la corriente q_2 , la distancia a la que se desplaza el selenoide y la velocidad del desplazamiento. Todas estas simulaciones son en lazo abierto con un control constante (voltaje). Las segundas simulaciones describen el comportamiento de la corriente y la carga eléctrica del sistema en lazo cerrado, aplicando el control de seguimiento.

Se concluye que la teoría del diseño de control propuesto para esta clase de sistemas satisface la trayectoria de seguimiento.

Capítulo 6

Conclusiones

6.1 Aportaciones del Presente Trabajo

A continuación se presentan las conclusiones y aportaciones generales que conforman este trabajo de investigación.

En esta tesis se presenta el diseño de un algoritmo de control en forma multivariable, en donde sólo fueron necesarias operaciones lineales y matriciales para llegar a una forma linealizada del sistema y posteriormente aplicar un control de seguimiento. En la actualidad existen diferentes tipos de controles en los que se necesitan de operaciones derivativas para la obtención de una forma linealizada del sistema, pero estas operaciones son muy extensas y en algunos casos no son posibles de desarrollar.

El algoritmo que se presenta en éste trabajo de investigación consiste en manejar al sistema en forma linealizada, y una vez que se linealiza, se aplica una ley de control de seguimiento y con esto se comprueba la estabilidad asintótica. A fin de mostrar las bondades y beneficios de la teoría desarrollada se presenta la aplicación de dicho control a un motor de inducción y a un actuador electromecánico.

En la aplicación al motor de inducción, fue necesario modelar el sistema en coordenadas $\alpha - \beta$, ya que el modelo del motor en estas coordenadas simplifica el desarrollo del control debido a que esta transformación está referida al estator y se puede tener la medición de las variables directamente. Se planteó como variables de interés para controlar los flujos magnéticos en el rotor, ya que con éstos es posible controlar su velocidad. Pero como los flujos magnéticos en el rotor son difícil de acceder y por tanto no son medibles fue necesario la presencia de un observador para estimar estas variables y poder controlarlas. Este observador fue construido (por dualidad) aplicando el mismo criterio de diseño que se utilizó para formular la ley de control. Una vez que se estimaron los flujos magnéticos del motor, se aplicó el control de seguimiento utilizando el principio de separación.

Se presentó una segunda aplicación de la teoría desarrollada a un actuador electromagnético, para esto, fue necesario plantear el modelado del sistema dinámico en forma lineal y se utilizaron ecuaciones de Euler-Lagrange manejando como variable de estado la corriente a través de la bobina. A este sistema se le aplicó el mismo procedimiento que al motor de inducción para el cálculo del control de seguimiento. En ambos casos se efectuaron simulaciones digitales en SIMNON que corroboran lo adecuado de los modelos y del algoritmo de control, así como del observador propuesto en el presente trabajo de investigación.

6.2 Trabajos a Futuro y Recomendaciones

Como trabajos a futuro para la extensión de este tema se tiene lo siguiente:

Extender el diseño del algoritmo de control de seguimiento y del observador (por dualidad) para sistemas en tiempo discreto. Así mismo, otra extensión será el diseño del control para sistemas multivariables en donde se tenga diferente dimensión de las entradas del sistema que la dimensión de los subsistemas que conforman el sistema completo; y para el observador la dimensión de las salidas del sistema diferente a la dimensión de los subsistemas que conforman el sistema completo.

Para el caso de aplicación del control de seguimiento al motor de inducción se consideró que la velocidad del rotor era accesible para ser medible, por lo que se puede considerar una hipótesis en donde la velocidad del motor no es medible y trabajar con esa condición para la obtención de resultados. Como recomendación particular, el autor considera muy importante la implementación en procesos prácticos el trabajo realizado en esta investigación con el motor de inducción.

A futuro se debe considerar también la aplicación del diseño de control de seguimiento del motor de inducción para autos eléctricos, en tal aplicación es necesario suavizar el arranque del motor para tener un control más adecuado de la velocidad y el par de carga. Otra posible aplicación se tiene para un sistema de generación de energía eléctrica aprovechando la energía cinética del oleaje marino. En esta última aplicación, es indispensable el conocimiento perfecto de los flujos magnéticos en el estator para poder efectuar el control de la velocidad del rotor y obtener un voltaje adecuado con las bajas revoluciones que se tienen debido al comportamiento dinámico de las olas.

APENDICE A

En Figura A1 se muestra la gráfica de los enlaces de flujo λ como una función de \dot{q} para varios valores fijos de la posición x . Note que λ es una función lineal de \dot{q} para el caso de una magnetización lineal; sobre todo cuando existen entrehierros, por lo tanto, la característica del flujo son las líneas rectas de dicha gráfica.

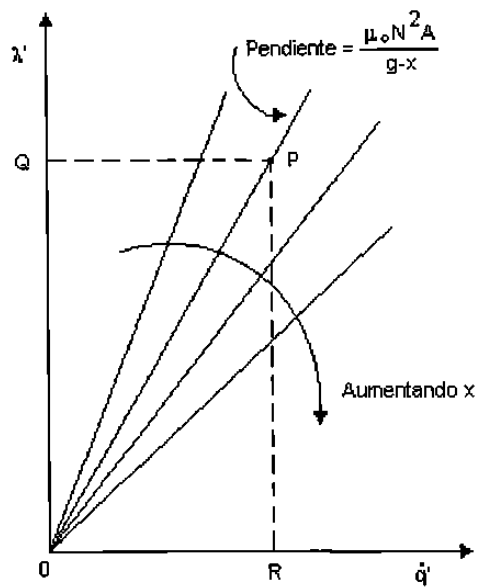


Fig. A1 Curvas de magnetización

De la ecuación:

$$W'_m(\dot{q}, x) = \int_0^{\dot{q}} \lambda'(\dot{q}', x) d\dot{q}',$$

y considerando que $\lambda(\dot{q}, x) = -N\Psi$ y que $\Psi = -\frac{\mu_0 N A \dot{q}}{g-x}$, para más detalles véase [32], se tiene

que $\lambda(\dot{q}, x) = \frac{\mu_0 N^2 A \dot{q}}{g-x}$, por lo tanto, la función de co-energía está dada por:

$$W'_m(\dot{q}, x) = \int_0^{\dot{q}} \frac{\mu_0 N^2 A}{g-x} \dot{q}' d\dot{q}',$$

$$W'_m(\dot{q}, x) = \frac{\mu_0 N^2 A \dot{q}^2}{2(g - x)},$$

donde μ_0 es la permeabilidad del aire y del elemento móvil, N es el número de vueltas de la bobina, A es el área del elemento móvil, y $g - x$ es el entrehierro.

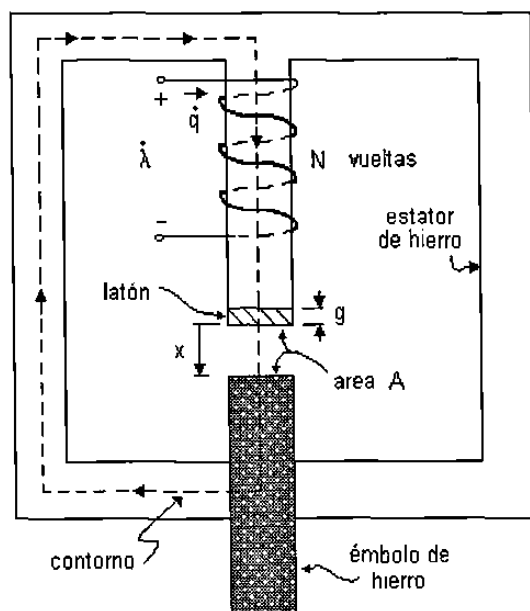


Fig. A2 Circuito magnético

Del circuito magnético presentado en la Figura A2 se toma la idea para el desarrollo de la función de co-energía.

APENDICE B

AN OBSERVER-BASED FLUX TRACKING CONTROL FOR INDUCTION MOTORS

K. BUSAWON, G. PEREZ & S. ACHA-DAZA

*University of Nuevo Leon,
Department of Electrical Engineering, P.O. Box 7F
66450 San Nicolas de Los Garza, N.L., Mexico
email : kbusawon@gama.fime.uanl.mx*

Abstract

In this paper, we propose an observer-based flux tracking control for an induction motor based on the α - β Park's model. The control design strategy used is based on linear design techniques and is consequently very easy to update. The flux observer used for implementation purpose is the one proposed by Busawon *et al.* (1999). Simulations are also carried out to show the performance of the controller.

Key words. Power systems, flux tracking, observer.

1 Introduction

It is well-known that the induction motor makes use of the alternative supply of the stator windings to set up a rotating magnetic field as opposed to the dc motor which is separately excited via mechanical contacts between the rotor and stator. This in turn induces a current in the rotor windings, hence producing a torque. On account of this, the flux and the armature current distribution of an induction motor are quantities which are strongly interrelated and slip with respect to the stator as well as the rotor. Consequently, it is not easy to control the flux and the armature current independently, as in a dc motor. Some solutions to open loop flux control is given in [10] based on steady state characteristics (see also list of references herein). Flux based control is motivated by the fact that it is directly related to the performance of the machine.

In this paper, we propose a rotor flux tracking control for an induction motor based on the well-known α - β Park's model. The choice for the α - β Park's model is usually motivated by the fact that the voltages and the currents along the axes are directly measurable. The control design strategy used is based on linear design techniques and is consequently very easy to update. More specifically, the model is transformed into a controllable canonical form via a linear

speed dependent transformation which simplifies the synthesis of the controller. On the other hand, since the control is state dependent, the flux observer design proposed in [3] is used for implementation purposes. The stability of the control through the observer is shown via simulations.

The paper is organized as follows: In the next section the considered model is presented. In Section 3, the flux tracking control design is given. In Section 4, the flux observer design given in [3] is recalled. Simulations are also carried out to show the performance of the controller and the observer-based controller respectively. Finally, some conclusions are drawn regarding the control design and its implementation.

2 The considered model

Throughout this work, we consider the α - β Park's model for the induction motor; *i.e.* the model in a stationary coordinate system associated with the stator. The choice for the α - β Park's model is usually motivated by the fact that the voltages and the currents along the axes are directly measurable. Such a model is given by

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\varphi}_{r\alpha} = \frac{M}{T_r} I_{s\alpha} - \frac{1}{T_r} \varphi_{r\alpha} - p\omega \varphi_{r\beta} \\ \dot{\varphi}_{r\beta} = \frac{M}{T_r} I_{s\beta} + p\omega \varphi_{r\alpha} - \frac{1}{T_r} \varphi_{r\beta} \\ \dot{I}_{s\alpha} = -\gamma I_{s\alpha} + \frac{k}{T_r} \varphi_{r\alpha} + kp\omega \varphi_{r\beta} + \frac{1}{\sigma L_s} u_{s\alpha} \\ \dot{I}_{s\beta} = -\gamma I_{s\beta} - kp\omega \varphi_{r\alpha} + \frac{k}{T_r} \varphi_{r\beta} + \frac{1}{\sigma L_s} u_{s\beta} \\ \dot{\omega} = \frac{pM}{JL_r} (\varphi_{r\alpha} I_{s\beta} - \varphi_{r\beta} I_{s\alpha}) - \frac{T_L}{J} \end{array} \right. \quad (1)$$

where $I_{s\alpha}$, $I_{s\beta}$ are the stator currents; $u_{s\alpha}$, $u_{s\beta}$ are the stator voltages; $\varphi_{r\alpha}$, $\varphi_{r\beta}$ are the rotor flux; ω is the angular speed; J the rotor moment of inertia; T_L is the load torque and p the number of pair of poles. The parameters T_r , σ , K and γ are defined

as follows

$$Tr = \frac{Lr}{Rr}, \quad \sigma = 1 - \frac{M^2}{LsLr}, \quad K = \frac{M}{\sigma LsLr},$$

$$\gamma = \frac{Rs}{\sigma Ls} + \frac{RrM^2}{\sigma LsLr^2}$$

where Rs , Rr are the stator and rotor per-phase resistance; Ls , Lr are stator and rotor per-phase inductance.

It should be emphasized that, due to singularly perturbation arguments the model (1) is usually divided into two parts - the mechanical dynamics (*i.e.* the slow part) and the electromagnetic dynamics (*i.e.* the fast part).

3 Main result

In this section, we are going to derive a flux tracking control for the above induction motor model. First of all, we rewrite the electromagnetic dynamics in a compact form as

$$\dot{x} = F(\omega)x + \frac{1}{\sigma Ls}Bu \quad (2)$$

where $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$; with $x_1 = \varphi_{r\alpha}$, $x_2 = \varphi_{r\beta}$, $x_3 = I_{s\alpha}$, and $x_4 = I_{s\beta}$ and $u = \begin{bmatrix} u_{s\alpha} \\ u_{s\beta} \end{bmatrix}$.

The matrices $F(\omega)$ and B are given by

$$F(\omega) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{Tr} & -p\omega & \frac{M}{Tr} & 0 \\ p\omega & -\frac{1}{Tr} & 0 & \frac{M}{Tr} \\ \frac{k}{Tr} & kp\omega & -\gamma & 0 \\ -kp\omega & \frac{k}{Tr} & 0 & -\gamma \end{bmatrix}; \quad (3)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

The speed ω is fed back into (2) via the mechanical dynamics described in equation (1).

Now, consider the following change of coordinates $z = P(\omega)x$ where

$$P(\omega) = \begin{bmatrix} \frac{Tr}{M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Tr}{M} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{pTr\omega} & -\frac{M}{pTr\omega} & 1 & 0 \\ -\frac{M}{pTr\omega} & -\frac{1}{M} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

We then have

$$\begin{aligned} \dot{z} &= P(\omega)\dot{x} + \dot{P}(\omega)x \\ &= P(\omega)F(\omega)P^{-1}(\omega)z + \frac{1}{\sigma Ls}P(\omega)Bu \\ &\quad + \dot{P}(\omega)P^{-1}(\omega)z \end{aligned}$$

It can be checked that

$$P(\omega)F(\omega)P^{-1}(\omega) = A + BL_1(\omega)$$

and

$$P(\omega)B = B$$

where

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$L_1(\omega) = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & -\gamma & 0 \\ -l_2 & l_1 & 0 & -\gamma \end{bmatrix}$$

$$l_1 = \frac{KM}{Tr^2} - \frac{\gamma}{Tr} \quad (4)$$

and

$$l_2 = \frac{kp\omega M}{Tr} - \gamma p\omega \quad (5)$$

Furthermore,

$$\dot{P}(\omega)P^{-1}(\omega) = BL_2(\omega, \dot{\omega})$$

where

$$L_2(\omega, \dot{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 & -p\dot{\omega} & 0 & 0 \\ p\dot{\omega} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hence,

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + BL_1(\omega)z + \frac{1}{\sigma Ls}Bu + BL_2(\omega, \dot{\omega})z \\ &= Az + BL(\omega, \dot{\omega})z + \frac{1}{\sigma Ls}Bu \end{aligned}$$

where $L(\omega, \dot{\omega}) = L_1(\omega) + L_2(\omega, \dot{\omega})$.

Therefore, setting

$$u = \sigma Ls(-L(\omega, \dot{\omega})z + v)$$

we get a completely linear system

$$\dot{z} = Az + Bv. \quad (6)$$

Recall that $z_1(t) = \frac{Tr}{M}\varphi_{r\alpha}$ and $z_2(t) = \frac{Tr}{M}\varphi_{r\beta}$. Our objective is now to design a control vector v so that $y(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}$ asymptotically tracks a desired reference trajectory

$$z_d(t) = \begin{bmatrix} z_{1d}(t) \\ z_{2d}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Tr}{M}\varphi_{r\alpha,d}(t) \\ \frac{Tr}{M}\varphi_{r\beta,d}(t) \end{bmatrix}.$$

For this, we set $e_1(t) = z_1(t) - z_{1d}(t)$, $e_2(t) = z_2(t) - z_{2d}(t)$, $e_3(t) = z_3(t) - \dot{z}_{1d}(t)$, $e_4(t) = z_4(t) - \dot{z}_{2d}(t)$. We then have,

$$\dot{e} = Ae + B(v - \ddot{z}_d) \quad (7)$$

Hence, setting

$$v = \ddot{z}_d - Ke$$

into equation (7), where K is chosen such that the matrix $(A - BK)$ is Hurwitz, we finally get,

$$\dot{e} = (A - BK)e. \quad (8)$$

Hence, the tracking error converges exponentially to 0. In other words, $z_1(t)$ tends to $z_{1d}(t)$ and $z_2(t)$ tends to $z_{2d}(t)$ as t goes to infinity. More precisely, this means that $\varphi_{r\alpha}(t)$ tends to $\varphi_{r\alpha,d}(t)$ and $\varphi_{r\beta}(t)$ tends to $\varphi_{r\beta,d}(t)$.

In summary the flux tracking control is given by

$$u = \sigma Ls (-L(\omega, \dot{\omega})z + \ddot{z}_d - Ke) \quad (9)$$

where K is chosen such that the matrix $(A - BK)$ is stable and

$$L(\omega, \dot{\omega}) = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 - p\dot{\omega} & -\gamma & 0 \\ -l_2 + p\dot{\omega} & l_1 & 0 & -\gamma \end{bmatrix}$$

with l_1 and l_2 are as in (4) and (5) respectively.

3.1 Simulation results

A simulation is carried out to show the performance of the above tracking control (9).

The desired trajectory was chosen as:

$$\begin{aligned} \varphi_{r\alpha,d}(t) &= \varphi_0 \sin \omega_0 t \\ \varphi_{r\alpha,d}(t) &= \varphi_0 \cos \omega_0 t \end{aligned}$$

where $\varphi_0 = 0.6$ and $\omega_0 = 50$.

The vector K was chosen as

$$K = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

The parameter values are as follows : $R_s = 1.374 \Omega$, $R_r = 1.3398 \Omega$, $M = 0.1286 H$, $L_r = 0.1358 H$, $L_s = 0.1358 H$, $J = 0.04 \text{ kgm}^2$, $T_L = 0$ and $p = 3$.

The figures 1 and 2 shows the tracking performance of the controller. It can be seen that the rotor flux converges quickly to the desired reference trajectory (in dotted lines). Figure 3 and 4 show the profile of the tracking control.

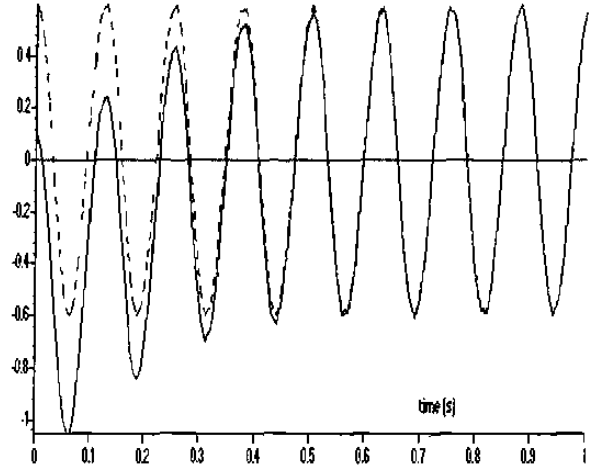


Figure 1: $\varphi_{r\alpha}(t)$ and $\varphi_{r\alpha,d}(t)$

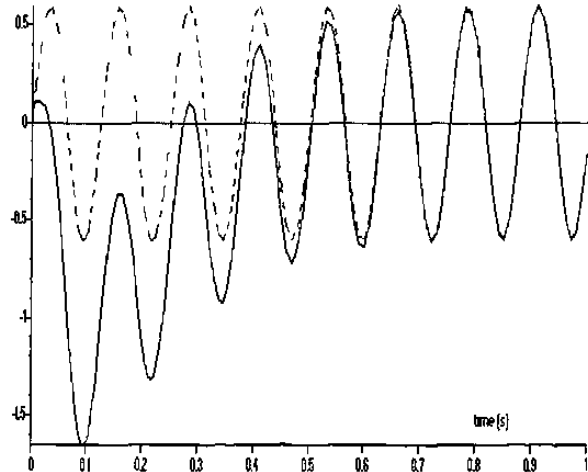


Figure 2: $\varphi_{r\beta}(t)$ and $\varphi_{r\beta,d}(t)$

4 Control via an observer

The previous control design assumes that all the states variables are accessible for measurement. However, in practice, only the stator currents, voltages and the angular speed are measurable. Therefore, the previous control law cannot be implemented directly and there is a real incentive to obtain estimates of the rotor flux. In a recent paper [3], a flux observer was proposed which has satisfactory robustness performance with respect to noise. In this section, we shall first recall the observer design given in [3]. Then, we shall apply the previous control via the observer.

Consider again system (2)

$$\dot{x} = F(\omega)x + \frac{1}{\sigma L_s}Bu \quad (10)$$

Now consider the system defined by

$$\dot{\hat{x}} = F(\omega)\hat{x} + \frac{1}{\sigma L_s}Bu + K_\theta(y - C\hat{x}) \quad (11)$$

where

$$K_\theta = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_r} + 2\theta & -p\omega \\ p\omega & -\frac{1}{T_r} + 2\theta \\ \eta_2 & \eta_1 \\ -\eta_1 & \eta_2 \end{bmatrix}$$

with

$$\eta_1 = \frac{p\omega}{k} - \frac{p\omega T_r \theta^2}{k(1 + p^2 \omega^2 T_r^2)}$$

and

$$\eta_2 = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{T_r} - 2\theta \right) + \frac{T_r \theta^2}{k(1 + p^2 \omega^2 T_r^2)}$$

and in which $\theta > 0$ is a design parameter. Then, it is shown in [3] that system (11) is an exponential observer for system (10) for sufficiently, large values of θ .

We shall apply the previous control through the above observer, so that the expression of the control applied to system (2) is now given by

$$u = \sigma L_s (-L(\omega, \dot{\omega})z + \ddot{z}_d - K\hat{e}) \quad (12)$$

where $\hat{e} = \hat{z} - z_d(t)$ with $\hat{z} = P(\omega)\hat{x}$. In other words, the non measurable states variables are replaced by their estimates in the control law (9).

Simulations results

A simulation was done for the numerical values as before. The value of θ was chosen as $\theta = 10$. Figure 5, 6 shows the performance of the motor when it is controlled via the observer. It can be seen that the convergence to the reference state is still satisfactory.

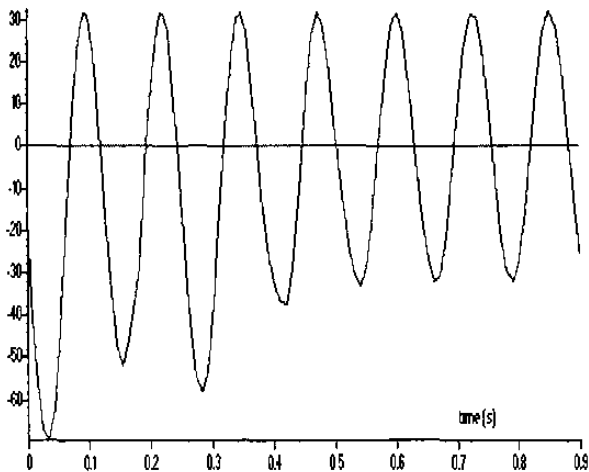


Figure 3: $u_{s\alpha}$

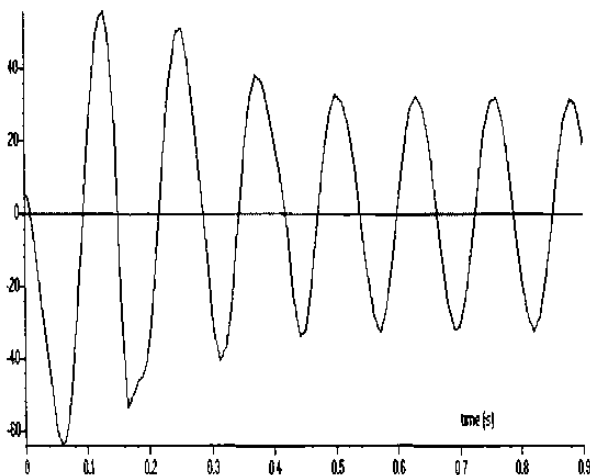


Figure 4: $u_{s\beta}$

5 Conclusions

In this paper, we have proposed a rotor flux tracking control for an induction motor model. The design of the control is simple in the sense that it uses only linear design techniques and require only some matrix manipulations. The performance of the controller is shown via simulation. For practical application purposes the motor is controlled via a flux observer. The stability properties of the system when controlled via the observer is also shown through simulation.

Acknowledgement: This work was supported by the PAICYT under grant CA220-99.

References

- [1] F. Blaschke, The principle of field orientation applied to the new transvector closedloop system for rotating field machines, *Siemens Rev.*, 39,1972.
- [2] K. Busawon and M. Saif : Stabilization and Control of Nonlinear Systems in Strict Feedback Form, *IFAC World Congress*, Beijing, 1999.
- [3] K. Busawon, J. De Leon-Morales, J.P. Barbot and M. de los Angeles, Robust flux observer design for induction motors, to appear in *IEEE CDC*, Dec. 1999.
- [4] K. Busawon and J.De Leon-Morales: An improved high gain observer for single output uniformly observable systems, *European Control Conf.*, 1999.
- [5] J. Chiasson, Dynamic feedback linearisation of the induction motor, *IEEE Transactions on Aut. Control*, vol. 38, 10, 1993.
- [6] M. Depenbrock, Direct selfcontrol DSC of inverter fed induction machine, *IEEE Transaction on Power Electronics*, 3, 1988.
- [7] F.J. Lin and C.M. Liaw, Reference model selection and adaptive control for induction motor drives, *IEEE Transactions on Aut. Control*, vol. 38, 10, 1993.
- [8] A. De Luca and G. Ulivi, Design of an exact controller for induction motors, *IEEE Transactions on Aut. Control*, vol. 34, 12, 1989.
- [9] Marino, R. and Tomei, P., "Nonlinear control design", Prentice Hall, U.K., 1995.
- [10] W. Leonhard, *Control of Electrical Drives*, Springer Verlag, Berlin, 1985.
- [11] V. Utkin, Sliding mode control design principles and applications to electric drives, *IEEE Trans. on Indus. Electronics*, vol. 40, 1, 1993.

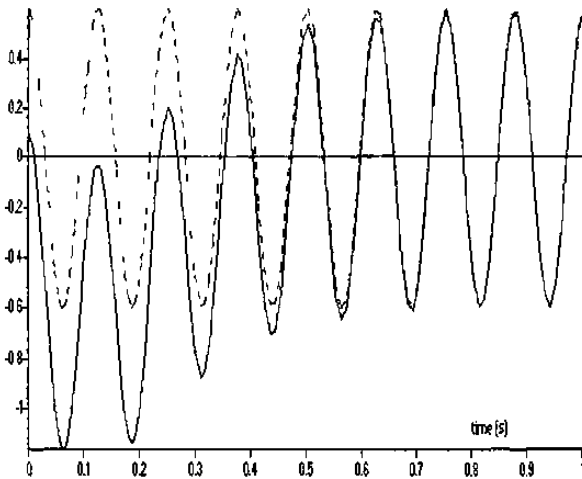


Figure 5: $\varphi_{r\alpha}(t)$ and $\varphi_{r\alpha,d}(t)$

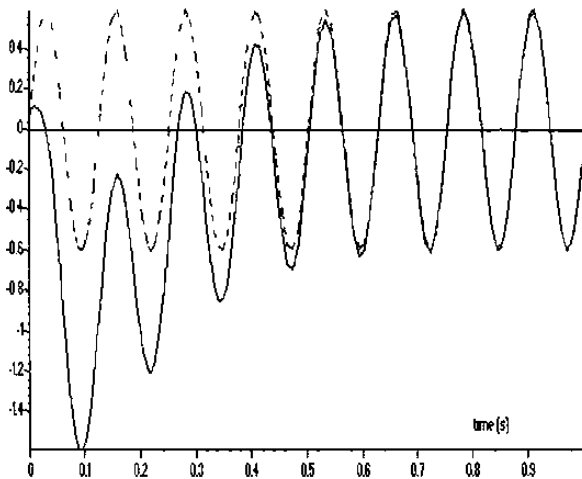


Figure 6: $\varphi_{r\beta}(t)$ and $\varphi_{r\beta,d}(t)$

Referencias

- [1] Baumann W. T. and Rugh W. J., "Feedback Control of Nonlinear Systems by Extended Linearization," IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 31, No. 1, pp. 40-46, 1986.
- [2] Blaschke F., "The Principle of Field Orientation Applied to the New Transvector Closed Loop Systems for Rotating Field Machines," Siemens Rev., 1972.
- [3] Busawon K. and Saif M., "Stabilization and Control of nonlinear Systems in Stric Feedback Form," IFAC World Congress, Beijing, China, 1999.
- [4] Busawon K., Farza M. and Hammouri H., "Observer Design for a Special Class of Nonlinear System," Int. Journal Control, Vol. 71, No. 3, pp. 405-418, 1998.
- [5] Busawon K., Morales J. L., Barbot J. P. and Carrera C. M. A., "Robust Flux Observer Design for Induction Motors," in proc. of the 38th, IEEE CDC, Phoenix Arizona USA, December 1999.
- [6] Chabour R. and Hammouri H., "Stabilization of Planar Bilinear Systems Using an Observer Configuration," Applied Mathematics Letters, Vol. 6, No. 1, pp. 7-10, 1993.
- [7] Chen C. T., "Introduction to Linear System Theory," HRW Series in Electrical Engineering, Electronics and Systems, 1970.
- [8] Chen C. T., "Linear System Theory and Design," Holt Rinehart and Winston Inc., United States of América, 1970.
- [9] Chiasson J., "Dynamic Feedback Linearization of the Induction Motor," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 38, No. 10, October 1993.
- [10] Ciccarella G., Dalla M. and Germani A., "A Luemberger-Like Observer for Nonlinear Systems," Int. J. Control, Vol. 57, No. 3, pp. 537-556, 1993.
- [11] Depenbrock M., "Direct Selfcontrol DSC of Inverter Fed Induction Machine," IEEE Transactions on Power Electronics, Vol. 3, 1988.
- [12] Djémai M. and Barbot J. P., "Singulary Perturbet Methods for Digital Control of a Synchronous motor", Proc. of IEEE-Systems, Man and Cybernetics Conference, SMC'93, Le Touquet, France, pp. 90-95, 1995.
- [13] Espinoza P. G., Velasco V. M. and Arteaga M. A., "Observer-Based Control of a Class of Electro-

- mechanical Systems," ECC, Alemania, 1999.
- [14] Fitzgerald A. E., Kingsley C. Jr. and Umans S. D., "Electric Machinery," Mc Graw-Hill, New York, 1983.
- [15] Friedland B., "Observers," The Control Handbook, IEEE Press, New Jersey, pp. 613, 1996.
- [16] Gauthier J. P., Hammouri h. and Othman S., "A Simple Observer for Non-Linear Systems. Application to Bireactors," IEEE Transactions Automatic Control, Vol. 37, No. 6, pp. 875-880, 1992.
- [17] Gauthier J. P. and Kupka I., "A Separation Principle for Bilinear Systems whit Dissipative Drift," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 37, No. 6, pp. 875-880,1992.
- [18] Isidori A., "Nonlinear Control Systems," Springer Verlag, London, 1995.
- [19] Khalil H. K., "Nonlinear Systems," Prentice Hall, New Jersey, 1996.
- [20] Klingshirn E. A. and Jordan H. E., "Simulation of Polyphase Induction Machines with Deep Rotor Bars," IEEE Transactions on Power Aparatus and Systems, Vol. PAS-89, No. 6, July/August 1970.
- [21] Krener A. J. and Isidori A., "Linearization by Output Injection and Nonlinear Observers," Syst. and Control Letters, Vol. 3, pp. 47-52, 1983.
- [22] Kokotovic P. V., Khalil H. K. and O'Reilly J., "Singular Perturbation Methods in Control, Analysis and Design," Academic Press, New York, 1986.
- [23] Krause P. C., "Analysis of Electric Machinery," Mc Graw-Hill, New York, 1986.
- [24] Krause P. C. and Thomas C. H., "Simulation of Symmetrical Induction Machinery," IEEE Transactions Power Apparatus Systems, Vol. PAS-84, No. 11, pp. 1038-1053, 1965.
- [25] Krstic M., Kanellakopoulos I. and Kokotovic P. V., "Nonlinear and Adaptive Control Design," Wiley-Interscience Publication, New York, 1995.
- [26] Leonhard W., "Control of Electrical Drives," Springer Verlag, Berlin, 1985.
- [27] Lin F. J. and Liaw C. M., "Reference Model Selection and Adaptive Control for Induction Motor Drives," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 38, No. 10, 1993.
- [28] Luca A. and Uliui G., "Design od an Exact Controller for Induction Motors," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 34, No. 12, 1989.
- [29] Luenberger D. G., "Observing the State of a Linear System," IEEE Transactions Mil Electron, Mil-8, pp. 74-80, 1964.

- [30] Marino R., Peresada S. and Valigi P., "Adaptive Input-Output Linearizing Control of Induction Motors," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 38, No. 2, February 1993.
- [31] Marino R., Tomei P., "Nonlinear Control Design," Prentice Hall, Gran Bretaña, pp. 23, 1995.
- [32] Meisel J., "Principles of Electromechanical-Energy Conversion," McGraw-Hill, New York, 1966.
- [33] Miu D., "Mechatronics: Electromechanics and Contromechanics," Springer Verlag, 1993.
- [34] Ortega R. and Espinosa G., "Torque Regulaci3n of Induction Motor," Automática, Vol. 29, No. 3, pp. 621-633, 1993.
- [35] Praly L., D'Andrea N. B. and Coron J. M., "Lyapunov Design of Stabilizing Controllers for Cascaded Systems," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 36, No. 10, pp. 1177-1181, 1991.
- [36] Ramshaw R. and Van Heeswijk R. G., "Energy Conversion," Saunders College Publishing, United States of América, 1990.
- [37] Shankar S. S. and Isidori A., "Adaptive Control of Linearizable Systems," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 34, No. 11, November 1989.
- [38] Slotine J. J. E., "Applied Nonlinear Control," Prentice Hall, New Jersey, 1991.
- [39] Thau F. E., "Observing the State of Nonlinear Dynamic Systems," Int. J. Control, Vol. 17, pp. 471-479, 1973.
- [40] Utkin V. I., "Sliding Mode Control Design Principles and Applications to Electric Drives," IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 40, No. 1, 1993.
- [41] Utkin V. I., "Sliding Modes and Their Application in Variable-Structure Systems," Mir Publisher, Moscu USSR, 1978.
- [42] Vidyasagar M., "Nonlinear systems analysis," Prentice Hall, New Jersey, 1993.
- [43] Zeitz M., "Observability Canonical Form for Non-Linear Time-Variable Systems," Int. Journal Systems SCI, Vol. 15, No. 9, pp. 949-958, 1984.
- [44] _____, "Servo Motor and Motion Control Using Digital Signal Processors," Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall, 1990.

