

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



ALGORITMOS DE FILTRADO Y CONTROL OPTIMO EN SISTEMAS
DE TIPO VOLTERRA CON INCERTIDUMBRES DETERMINISTICAS

POR

ING. IRMA ROSARIO VALADEZ GUZMAN

T E S I S

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO
EN CIENCIAS DE LA INGENIERIA ELECTRICA
CON ESPECIALIDAD EN CONTROL

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L.

ABRIL 2000

ALGORITMOS DE FILTRADO Y CONTROL OPTIMO EN SISTEMAS
DE TIPO VOLTERRA CON INCERTIDUMBRES DETERMINISTICAS

LIANI
FIME

TM
25853
.M2
FIME
2000
V34



1020130081

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



ALGORITMOS DE FILTRADO Y CONTROL OPTIMO EN SISTEMAS
DE TIPO VOLTERRA CON INCERTIDUMBRES DETERMINISTICAS

POR

ING. IRMA ROSARIO VALADEZ GUZMAN

T E S I S

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO
EN CIENCIAS DE LA INGENIERIA ELECTRICA
CON ESPECIALIDAD EN CONTROL

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L. ABRIL 2000

0136-72460

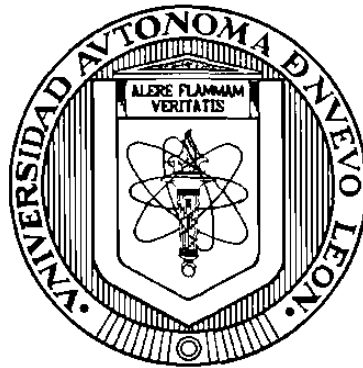
TH
Z5853
•H2
FIME
2000
V34



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERIA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



ALGORITMOS DE FILTRADO Y CONTROL ÓPTIMO EN SISTEMAS DE TIPO
VOLTIERRA CON INCERTIDUMBRES DETERMINÍSTICAS

POR

ING. IRMA ROSARIO VALADEZ GUZMÁN

TESIS

EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRA EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA ELÉCTRICA CON ESPECIALIDAD EN CONTROL

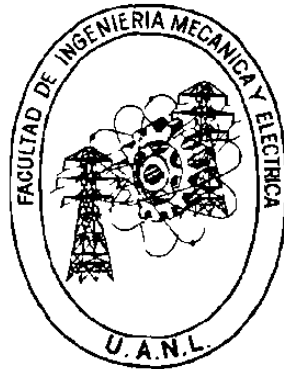
SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, N.L.

ABRIL, 2000

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERIA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



ALGORITMOS DE FILTRADO Y CONTROL ÓPTIMO EN SISTEMAS DE TIPO
VOLTERRA CON INCERTIDUMBRES DETERMINÍSTICAS

POR

ING. IRMA ROSARIO VALADEZ GUZMÁN

TESIS
EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRA EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA ELÉCTRICA CON ESPECIALIDAD EN CONTROL

San Nicolás de los Garza, N.L.

Abril, 2000


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERIA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

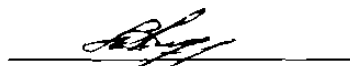
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSTGRADO

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis *Algoritmos de Filtrado y Control Óptimo en Sistemas de tipo Volterra con Incertidumbres Determinísticas* realizada por la alumna Ing. Irma Rosario Valadez Guzmán, matrícula 806147 sea aceptada para su defensa como opción al Grado de Maestra en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica con especialidad en Control.

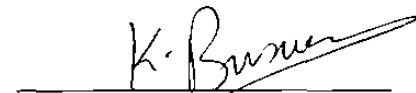
El comité de tesis:



Coasesor
Dr. Jesús De León Morales



Asesor
Dr. Mikhail V. Basin



Coasesor
Dr. Krishna Busawon



Vo. Bo.
M.C. Roberto Villarreal Garza
División de Estudios de Postgrado

San Nicolás de los Garza, N.L.

17 de Marzo de 2000.

Empieza por hacer lo necesario, luego lo que es posible y de pronto de encontrarás haciendo lo imposible

San Francisco de Asis

DEDICATORIA

A DIOS.

A mis padres Marciano Valadez Rodríguez y Rosario Guzmán de Valadez por su inmenso amor, apoyo y comprensión incondicional.

A mi hermano Efrén Valadez Guzmán por su fabuloso carácter que me ha animado siempre a seguir adelante

A mis primas María Begoña, María Estibaliz, María de Jesús y María Raquel Guzmán Solano, por escucharme aunque fuera desde lejos.

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Mikhail Basin por su guía, comprensión y sugerencias para el desarrollo de mi tesis.

Al Dr. Jesús De León Morales por haber creído en mi y aceptarme para estudiar en este Programa, así como por su revisión de esta tesis.

Al Dr. Krishna Busawon por sus sugerencias para hacer de esta tesis un trabajo mejor.

Al Dr. Joaquín Collado por sus consejos tanto para mi como para mi hermano.

A los Doctores del programa DIE por su paciencia al mostrarme nuevas ideas y brindarme sus enseñanzas, su estímulo para seguir aprendiendo.

A Martha Aguilera, César Elizondo, Guadalupe Acosta, por compartir sus experiencias como alumnos del programa doctoral con todos los nuevos estudiantes, incluyéndome a mí.

Al M.C. Roberto Villarreal por su orientación y paciencia al realizar todos los trámites para poder titularme.

Al CONACYT y a la UANL por la beca que me brindaron para poder realizar mis estudios.

A mis compañeros:

de control: Francisco Humberto Florenzano Lara, Mario Ariel Villanueva Llanes, María de los Angeles Carrera González, David Alejandro Díaz Romero, Gustavo Pérez Hernández, Oscar Francisco Huerta Guevara, César Guerra Torres, Ivan Ernesto Macías Cardoso, Anand Eleazar Sánchez Orta.

de potencia: Juan Carlos Ramírez Saucedo, Julio Alberto Hernández Galicia, Josué Rósemberg Coutiño Ozuna, Héctor Luis Narváez de la Luna, Salvador Chávez Negrete, Pedro Martín Rubio Orozco, Adán Alberto Lares Cardona, Oscar Alfonso Reyes Martínez, Rodolfo Castillo Martínez.

de comunicaciones: Laura Espinosa Camacho, Jesús Gabriel García Herrera, Mario Sánchez Monroy, Rubén Treviño Martínez.

por su ayuda siempre que la necesité.

A mis amigas Cecilia Natalia Caballero Ordoñez y Flor Serra González por darme ánimos, escucharme y estar para mí en los momentos difíciles.

A todas aquellas personas que de alguna u otra forma contribuyeron para que yo siguiera este camino y pudiera alcanzar este sueño.

Mil Gracias.

Algoritmos de filtrado y control óptimo en sistemas de tipo volterra con incertidumbres determinísticas

Publicación No. _____
Irma Rosario Valadez Guzmán
Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Profesor Asesor: Dr. Mikhail V. Basin
Enero, 2000

Resumen

El trabajo que se presenta consiste en obtener soluciones a problemas de filtrado óptimo minimáximo en sistemas determinísticos, los cuales están expresados por modelos integrales de tipo Volterra, por lo que de manera intrínseca se tienen sistemas con retardos. Esta aproximación determinística, a los problemas de filtrado modelados por ecuaciones integrales, ofrece la ventaja de no tener que trabajar con información probabilística del ruido, sino manejar las incertidumbres dentro de una cotas que se fijan dentro de las requisiciones del sistema. Para lo cual es posible referirse al capítulo 7.

Como parte del procedimiento para encontrar los resultados a dichos problemas se presenta la planteamiento del problema del regulador generado por el del filtrado en un caso de dualidad en sistemas integrales, con lo cual se obtiene de una misma manera un resultado válido tanto para filtrado como para el regulador bajo ciertas consideraciones de dualidad. Dicho lo anterior es claro que se establecen condiciones para la dualidad en sistemas integrales. Todo esto está expresado en el capítulo 4.

Posteriormente se presentan los resultados de problemas de filtrado y regulador óptimo minimaximo para sistemas en los cuales se tienen discontinuidades, (ver capítulo 5 y 6). Dentro de ambos casos, el continuo y el discontinuo, se manejan ejemplos que pretenden ilustrar la teoría antes desarrollada, y que dejan un panorama abierto para posteriores aplicaciones mas complejas con el uso de estos resultados.

Aun cuando los resultados que se manejan están ubicados a partir del capítulo 4, los principios sobre de los cuales se contruyeron quedan asentados en los capítulos 2 y 3.

INDICE

Capítulo	Página
1. Introducción	1
1.1 Introducción	1
1.2 Antecedentes	1
1.3 Motivación	3
1.4 Aportaciones	4
1.5 Organización de la Tesis	5
2. Marco Teórico	7
2.1 Cálculo de Variaciones	7
2.1.1 Cálculo de Variaciones	7
2.2.2 Aproximación por Cálculo de Variaciones al Control Óptimo	12
2.2.3 Principio Mínimo de Pontryagin	14
2.2 Programación Dinámica	19
2.2.1 Control Continuo y la Ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman	19
2.2.2 Relación entre Programación Dinámica y el Principio Mínimo	21
2.2.2.1 Principio Mínimo	21
2.2.2.2 Programación Dinámica	21
2.3 Ecuaciones Integrales	22
2.3.1 Integral de Lebesgue	22
2.3.2 Función de Variación Acotada	23
2.3.3 Ecuación de Volterra	24
2.3.3.1 Métodos para la Solución de una Ecuación de Volterra	25
2.3.4 Ecuaciones Integrales de Volterra y Ecuaciones Diferenciales Lineales	28
2.3.5 Ecuaciones del tipo Faltung (Tipo Ciclo Cerrado)	30
Resumen	30

INDICE

Capítulo	Página
3. Regulador y Filtro Óptimos en Sistemas Diferenciales	31
3.1 Regulador y Filtro Óptimos en Sistemas Diferenciales	31
3.2 Incertidumbres	33
3.3 Programación Dinámica y Conjuntos Geométricos	34
3.4 Conjuntos Compatibles con Incertidumbres	
3.4.1 Conjuntos Arbitrarios	34
3.4.2 Elipsoides	35
3.5 Filtro y Regulador Minimáximo	37
3.6 Regulador y Filtro con Incertidumbres	
Desconocidas pero Acotadas	38
3.6.1 Planteamiento del Problema de Filtrado	38
3.6.2 Planteamiento del Problema del Regulador	
Generado por el Problema de Filtrado	38
3.6.3 Solución del Problema de Filtrado	39
3.7 Ecuación de Riccati	40
Resumen	41
4. Filtrado y Regulador Óptimo en Sistemas Integrales Continuos	42
4.1 Función Hamiltoniana	42
4.2 Principio de Dualidad	43
4.3 Problema de Filtrado Óptimo	46
4.3.1 Planteamiento del Problema de Filtrado Óptimo	46
4.3.2 Planteamiento del Problema de Regulador Óptimo	
Generado por el Problema de Filtrado	46
4.3.3 Solución del Problema de Regulador Óptimo	47
4.3.4 Solución del Problema de Filtrado Óptimo	49

INDICE

Capítulo	Página
4.4 Regulador y Filtro Óptimo con Observaciones de Tipo Integral.....	52
4.4.1 Planteamiento del Problema de Filtrado Óptimo.....	52
4.4.2 Solución del Problema de Regulador Óptimo.....	52
4.4.3 Solución del Problema de Filtrado Óptimo.....	53
Resumen.....	53
5. Vibrosoluciones.....	55
5.1 Una Introducción a la Teoría de Funciones Generalizadas.....	55
5.1.1 Espacio Fundamental y Funciones Generalizadas.....	55
5.1.2 Operaciones sobre las Funciones Generalizadas.....	56
5.1.3 Ecuaciones Integrales en Distribuciones.....	58
5.2 Vibrosoluciones para Ecuaciones Integrales en Distribuciones con Funciones Regulares Discontinuas sobre el Lado Derecho.....	58
Resumen.....	58
6. Filtrado y Regulador Óptimo en Sistemas Integrales Discontinuos.....	63
6.1 Filtrado para Sistemas Integrales sobre Observaciones Discontinuas.....	63
6.1.1 Planteamiento del Problema del Filtrado Óptimo sobre Observaciones Discontinuas.....	63
6.1.2 Solución del Problema del Filtrado Óptimo sobre Observaciones Discontinuas.....	64
6.2 Regulador para Sistemas Integrales con Estados Discontinuos.....	66
6.2.1 Planteamiento del Problema del Regulador Óptimo con Estados Discontinuos.....	66
6.2.2 Solución del Problema del Regulador Óptimo con Estados Discontinuos.....	66

INDICE

Capitulo	Página
Resumen	66
7. Comparación de los Resultados para Sistemas Integrales Estocásticos y Determinísticos	72
7.1 Introducción	72
7.2 Modelo Estocástico vs. Modelo determinístico	74
7.3 Modelo Estocástico con ecuación de estado dinámica	77
Resumen	77
8. Conclusiones	80
8.1 Aportaciones	80
8.2 Trabajos Futuros	80
Apéndice A	81
Apéndice B	85
Apéndice C	92
Apéndice D	98
Apéndice E	104
Referencias	110

Capítulo 1

Introducción

1.1 Introducción

Los sistemas en general son representados para su estudio por modelos matemáticos, los cuales pueden ser muy variados dependiendo de la complejidad del sistema, sin embargo hay ocasiones en las cuales el modelo matemático no se conoce completamente, es decir es incierto. Además, las incertidumbres no solo provienen del modelado, sino también pueden presentarse como valores inciertos en las entradas del sistema. Es entonces cuando se presenta la duda de como trabajar con dichas incertidumbres, para lo cual se pueden tomar diferentes caminos, estocásticos (involucrando medidas probabilísticas) o bien determinísticos (manejando conjuntos geométricos).

Por otra parte, dentro de la teoría de sistemas de control, está el problema de control que consiste en encontrar la señal de control para llevar a la planta a seguir una señal de referencia, pero como dicho control utiliza los valores de los estados del sistema, si estos no son conocidos es necesario estimarlos. Como caso particular de la teoría de estimación está la del filtrado. Así el problema fundamental a resolver en la presente tesis consiste en encontrar los algoritmos de filtrado y control óptimo en sistemas de tipo Volterra con incertidumbres determinísticas. Los sistemas de tipo Volterra representan sistemas más generales que los expresados por medio de ecuaciones diferenciales.

1.2 Antecedentes

La retroalimentación ha sido usada desde tiempos antiguos para ejercer un control sobre los diversos sistemas. En 1931 V. Volterra explicó el balance entre dos poblaciones de peces en un ambiente cerrado usando la teoría de retroalimentación. El diseño de sistemas de control retroalimentados hasta antes de la Revolución Industrial se realizaba mediante prueba y error con gran intuición ingenieril. Por lo que se se llamaba mas un arte que una ciencia. A mediados de 1800, las

matemáticas fueron por primera vez usadas para analizar la estabilidad de los sistemas de control retroalimentados.

En 1840, G. B. Airy desarrolló el primer aparato para dirigir un telescopio, con lo que también se percató de la necesidad de discutir la inestabilidad en los sistemas de lazo cerrado y de utilizar las ecuaciones diferenciales en su análisis. La teoría de las ecuaciones diferenciales estaba bien desarrollada, debido al descubrimiento del cálculo infinitesimal por I. Newton (1642-1727) y G. W. Leibnitz (1646-1716) y el trabajo de los hermanos Bernoulli (a finales de los 1600's y principios de los 1700's), J. F. Riccati (1676-1754), entre otros. El uso de las ecuaciones diferenciales en el análisis del movimiento de los sistemas dinámicos fue establecido por J. L. Lagrange (1736-1813) y W. R. Hamilton (1805-1865).

El tema de filtrado en el sentido estocástico, ha sido tratado desde 1949 por Wiener [23] , quien trabajando en el dominio de la frecuencia, desarrolló un filtro estadísticamente óptimo para señales de tiempo continuo estacionarias, que mejoraba la relación señal a ruido en un sistema de comunicaciones. A. N. Kolmogorov (1941, [24]) propuso una teoría para procesos estocásticos discretos. Y en 1960, Kalman publicó 3 artículos importantes [7, 8, 9] . En uno de estos trabajos se discutió los problemas de control óptimo, dando las ecuaciones de diseño para el regulador cuadrático lineal (LQR). Mientras que en el otro de sus artículos de ese año discutió la teoría de estimación y filtrado óptimo, dando las ecuaciones de diseño para el filtro discreto de Kalman. Al año siguiente, el filtro de Kalman en tiempo continuo fue desarrollado por Kalman-Bucy [10] . Más tarde (1971, [37]) Frost y Kailath generalizaron este resultado al caso no lineal.

Johann Bernoulli fue el primero que mencionó el Principio de Optimalidad en 1696. Varios principios de optimalidad fueron investigados, así el trabajo de Euler en 1744 y el de Hamilton resultan en el hecho de que un sistema se mueve de tal forma que minimiza la integral con el tiempo de la diferencia entre las energías cinética y potencial. Todos estos principios son principios mínimos.

R. E. Bellman (1957, [25]) aplicó la programación dinámica al control óptimo de los sistemas discretos, demostrando que la dirección natural de resolver los problemas de control óptimo es en el sentido inverso en el tiempo. Para 1958, [14] , L. S. Pontryagin desarrolló su principio mínimo,

que resolvía problemas de control óptimo relacionados con el cálculo de variaciones desarrollado por L. Euler (1707-1783).

En cuanto al tema de filtrado determinístico, éste ha sido estudiado desde 1968 por Schweppe [3]. Más tarde, en 1971, [1], Bertsekas and Rhodes resolvieron el problema del filtrado, predicción y suavización mediante su relación con el problema estándar de seguimiento de trayectoria. Posteriormente se le conoció como filtro minimáximo, debido a un trabajo de A. B. Kurzhansky (1977, [26]). También fue usado el concepto de Programación Dinámica Difusa en 1975. El problema de filtrado elipsoidal para un sistema de estados continuos sobre observaciones continuas fue propuesto y resuelto por Ovseevich y Chernousko [14] en 1984. Y el filtrado minimáximo sobre observaciones discontinuas fue presentado en 1995 por Orlov y Basin [29].

Los principales fundadores de la teoría de ecuaciones integrales son Vito Volterra (1860-1940) e Ivar Fredholm (1866-1927) junto con David Hilbert (1862-1943) y Erhard Schmidt (1876-1958). Volterra fue el primero en reconocer la importancia de la teoría y considerarla sistemáticamente.

1.3 Motivación

Los algoritmos hasta ahora relacionados con el filtrado y control han sido resultado de modelos expresados en forma de ecuaciones diferenciales. Para el caso de modelos en ecuaciones integrales existen pocos trabajos a los cuales hacer referencia, como por ejemplo Kleptsina y Veretennikov (1984, [12]), Shaikhet (1987, [13]), y de estos aun menos lo son aquellos que se relacionan con modelos determinísticos. Por lo tanto, la presente tesis pretende aportar un poco en este sentido y expresar unos resultados de filtrado y control en forma análoga a los que hay para sistemas en ecuaciones diferenciales ahora para los sistemas en ecuaciones integrales, en el caso de modelos determinísticos con incertidumbres desconocidas pero acotadas. El método utilizado involucra los principios de la teoría del LQR, puesto que permite dar una solución única al problema de control una vez establecidas las matrices de peso. Esto garantiza también estabilidad del sistema controlado y que las señales de control esten acotadas.

1.4 Aportaciones

1.4.1 En sistemas determinísticos continuos

Se proponen los algoritmos de filtrado y regulador óptimo en el sentido minimáximo para sistemas integrales de tipo Volterra lineales en el caso continuo basados en el procedimiento seguido por Bertsekas y Rhodes [1], de tal forma que planteado el problema de filtrado se genera un problema de regulador (de seguimiento de trayectoria, en sentido inverso del tiempo) que se resuelven mediante la obtención de un elipsoide cuyo centro se traduce en el mejor estimado en el sentido minimáximo. Para lo cual se hubo de extender ciertos resultados, que son conocidos para el caso de sistemas expresados por ecuaciones diferenciales, en el sentido de sistemas integrales como lo son la función Hamiltoniana y el principio de Dualidad. Dichos resultados se presentaron en la Quinta Conferencia de Ingeniería Eléctrica 99 del CINVESTAV-IPN, [46], que se celebró en Septiembre los días 8, 9 y 10, en la Cd. de México y se sometieron a consideración para participar en la Conferencia Americana de Control 2000, con registro ACC-IEEE1238, [44].

1.4.2 Vibrosoluciones

La teoría de vibrosoluciones se presenta para ecuaciones integrales en distribuciones, y para el caso donde la función de variación acotada involucrada es escalar, de tal manera que permite hacer uso de esta teoría en la obtención de los resultados de la siguiente subsección.

1.4.3 En sistemas determinísticos discontinuos

también se proponen los algoritmos de filtrado y regulador óptimo para el caso discreto-continuo en ecuaciones lineales integrales de tipo Volterra, este resultado se basó en el trabajo desarrollado por Orlov y Basin [29] sobre filtrado minimáximo con observaciones discontinuas, y del trabajo expuesto en el párrafo anterior. Este resultado también se puso a consideración para participar en la Conferencia Americana de Control 2000 (ACC), con registro ACC-IFFE1239, [45].

1.4.4 Ejemplos

Se propuso un ejemplo técnico, el cual consiste en controlar el consumo de combustible de un misil

de tal suerte que se tenga un gran ahorro de combustible. donde el misil está modelado de tal forma que se considera tiene un motor continuo y otro que se comporta como uno impulsivo, por lo que se hace uso de las ecuaciones para el caso discreto-continuo que se propusieron anteriormente.

1.4.5 En sistemas estocásticos

Se colaboró en la propuesta hecha por Basin y Villanueva sobre algoritmos de filtrado para un sistema dinámico con observaciones discontinuas de tipo Volterra. dichos resultados se presentaron en la Conferencia sobre Decisión y Control, IEEE CDC '99 (Cd. de Phoenix, Arizona) [42] los días 7 al 10 de Diciembre de 1999.

1.5 Organización de la Tesis

En el capítulo 2 se tiene el Marco Teórico. el cual hace referencia a las herramientas necesarias para la posterior solución de los problemas de filtrado y regulador óptimo en el sentido minimáximo, como lo es el principio mínimo de Pontryagin, las funciones Hamiltonianas y los multiplicadores de Lagrange. Se presentan las ecuaciones integrales de tipo Volterra, mediante las cuales se representa el modelo del sistema sobre el cual se basa la presente tesis. También se hace una breve introducción a lo que es la programación dinámica como método alternativo a la solución de problemas de optimización, y además se presenta una comparación entre este y el principio del mínimo de Pontryagin.

El capítulo 3 está dedicado a la teoría de los reguladores y filtros óptimos para sistemas en ecuaciones diferenciales, pero con incertidumbres, para lo cual se establece una clasificación de las mismas. Dentro de dicha clasificación se hace mención a los modelos determinísticos con incertidumbres desconocidas pero acotadas en los cuales se hace uso de conjuntos geométricos sobre de los cuales se manejan los estados, el control y las incertidumbres así como las salidas del sistema. Como se explicará dentro de este capítulo, el conjunto más apropiado es el elipsoide. Como parte del tratamiento de los modelos con incertidumbres se hace referencia a un trabajo [1], sobre el cual se basa la presente para la obtención de los resultados. Como punto final de este capítulo se trata una breve introducción sobre ecuaciones de Riccati.

La solución a los problemas de filtrado y regulador óptimos minimáximo en sistemas integrales, en el caso continuo se expresan en el capítulo 4, mientras que para el caso discontinuo es necesario dirigirse al capítulo 6. Para obtener dichos resultados hubo de ser necesario presentar dos extensiones al caso integral de temas conocidos para los sistemas diferenciales como lo son la función Hamiltoniana y el Principio de Dualidad, los cuales están dentro del capítulo 4. Si bien es cierto que los resultados discontinuos se derivan en gran parte de los resultados continuos, también es cierto que es indispensable la teoría de vibrosoluciones para su obtención. La teoría de vibrosoluciones se maneja en el capítulo 5, donde se expresa para el caso integral.

En el capítulo 7 se plantea en una breve introducción la relación que puede existir entre las funciones características Gaussianas y los conjuntos elipsoidales, posteriormente se hace un resumen de los resultados encontrados en el caso de los modelos de sistemas estocásticos Gaussianos para su posterior comparación con los resultados presentados en esta tesis que corresponden a los modelos de sistemas determinísticos con incertidumbres desconocidas pero acotadas, ambos para sistemas integrales. Quedando claro el hecho de que si se tiene un modelado en forma estocástica, la solución del problema de filtrado estará sujeta a tres ecuaciones mientras que en el caso de sistemas modelados determinísticamente se puede encontrar la solución al problema de filtrado con tan solo resolver dos ecuaciones. Sin embargo, también se presenta un caso estocástico particular donde es posible obtener la solución al problema de filtrado usando solo dos variables (ecuaciones) que es cuando las ecuaciones de estado en los sistemas están dadas en forma de ecuaciones diferenciales.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1 Cálculo de Variaciones

2.1.1 Cálculo de Variaciones

Una rama de las matemáticas que es de utilidad para la solución de problemas de optimización es el cálculo de variaciones. En los problemas de control óptimo el objetivo es determinar una función que minimice una funcional específica, la medida de funcionamiento. El problema análogo en cálculo es determinar un punto que produce el valor mínimo de una función.

Definición 2.1 Una función f es una regla de correspondencia que asigna a cada elemento q en cierto conjunto D un único elemento en un conjunto \mathbb{R} . D es llamado el dominio de f y \mathbb{R} es el contradominio.

Definición 2.2 Una funcional J es una regla de correspondencia que asigna a cada función x en una cierta clase Ω un único número real. Ω es llamado el dominio de J y el conjunto de números reales asociado con las funciones en Ω es llamado el rango de J .

Definición 2.3 f es una función lineal de q si y sólo si esta satisface el principio de homogeneidad.

$$f(\alpha q) = \alpha f(q)$$

para toda $q \in D$ y para todo número real α tal que $\alpha q \in D$, y el principio de aditividad

$$f(q_1 + q_2) = f(q_1) + f(q_2)$$

para toda q_1, q_2 , y $q_1 + q_2$ en D

Definición 2.4 J es una funcional lineal de x si y sólo si esta satisface el principio de homogeneidad

$$J(\alpha q) = \alpha J(q)$$

para toda $x \in \Omega$ y para todo número real α tal que $\alpha x \in \Omega$, y el principio de aditividad

$$J(x_1 + x_2) = J(x_1) + J(x_2)$$

para toda x_1, x_2 , y $x_1 + x_2$ en Ω .

Definición 2.5 Si q y $q + \Delta q$ son elementos para los cuales la función f es definida, entonces el incremento de f , denotado por Δf es

$$\Delta f(q, \Delta q) \triangleq f(q + \Delta q) - f(q)$$

Definición 2.6 Si x y $x + \delta x$ son funciones para las cuales la funcional J es definida, entonces el incremento de J , denotado por ΔJ es

$$\Delta J(x, \delta x) \triangleq J(x + \delta x) - J(x)$$

Definición 2.7 El incremento de una función de n variables puede ser escrito como

$$\Delta f(q, \Delta q) \triangleq df(q, \Delta q) + g(q, \Delta q) \cdot \Delta q$$

donde df es una función lineal de Δq . Si

$$\lim_{\Delta q \rightarrow 0} \{g(q, \Delta q)\} = 0$$

entonces f se dice que es diferenciable en q y df es la diferencial de f en el punto q .

Definición 2.8 El incremento de una funcional puede ser escrito como

$$\Delta J(x, \delta x) \triangleq \delta J(x, \delta x) + g(x, \delta x) \cdot \delta x$$

donde δJ es una funcional lineal en δx . Si

$$\lim_{\delta x \rightarrow 0} \{g(x, \delta x)\} = 0$$

entonces J se dice que es diferenciable sobre x y δJ es la variación de J evaluada para la función x .

Ejemplo 2.1 Sea x una función continua escalar definida para $t \in [0, 1]$. Encuentre la variación

de la funcional

$$J(x) = \int_0^1 [x^2(t) + 2x(t)] dt.$$

Primero, se encuentra el incremento de J .

$$\begin{aligned} \Delta J(x, \delta x) &= J(x + \delta x) - J(x) \\ &= \int_0^1 \{ [x(t) + \delta x(t)]^2 + 2[x(t) + \delta x(t)] \} dt \\ &\quad - \int_0^1 [x^2(t) + 2x(t)] dt, \end{aligned}$$

después se expanden, y combinan estas integrales, con lo que se obtiene

$$\Delta J(x, \delta x) = \int_0^1 \{ [2x(t) + 2] \delta x(t) + [\delta x(t)]^2 \} dt,$$

se separan los términos que son lineales en δx , y se tiene

$$\Delta J(x, \delta x) = \int_0^1 [2x(t) + 2] \delta x(t) dt + \int_0^1 [\delta x(t)]^2 dt.$$

ahora se verifica que la segunda integral se pueda escribir como

$$\int_0^1 [\delta x(t)]^2 dt = g(x, \delta x) \cdot \delta x, \quad (2.1)$$

y que

$$\lim_{\delta x \rightarrow 0} \{ g(x, \delta x) \} = 0,$$

debido a que x es una función continua, sea

$$\delta x = \Delta \max_t \{ \delta x \}.$$

Se multiplica el lado izquierdo de (2.1) por $\frac{\delta x}{\delta x} = \frac{\delta x}{\delta x}$ que da

$$\frac{\delta x}{\delta x} \cdot \int_0^1 [\delta x(t)]^2 dt = \delta x \cdot \int_0^1 \frac{[\delta x(t)]^2}{\delta x} dt,$$

por lo que comparando se tiene que

$$g(x, \delta x) = \int_0^1 \frac{\delta x(t) \cdot \delta x(t)}{\delta x} dt < \int_0^1 \delta x(t) dt.$$

Si $\delta x \rightarrow 0$, $\delta x(t) \rightarrow 0$ para toda $t \in [0, 1]$, entonces

$$\lim_{\delta x \rightarrow 0} \left\{ \int_0^1 \delta x(t) dt \right\} = 0.$$

Por lo tanto, después de verificar que $g(x, \delta x) \rightarrow 0$ cuando $\delta x \rightarrow 0$, la variación de J es

$$\delta J(x, \delta x) = \int_0^1 [2x(t) + 2] \delta x(t) dt.$$

Esta expresión también puede ser encontrada expandiendo formalmente el integrando de ΔJ en series de Taylor alrededor de $x(t)$ y reteniendo solo los términos de primer orden en $\delta x(t)$.

Definición 2.9 Una función f con dominio D tiene un extremum relativo en el punto q^* si existe un $\epsilon > 0$ tal que para todos los puntos q en D que satisfagan $|q - q^*| < \epsilon$ el incremento de f tiene el mismo signo. Si

$$\Delta f = f(q) - f(q^*) > 0, \quad (2.2)$$

$f(q^*)$ es un mínimo relativo; si

$$\Delta f = f(q) - f(q^*) < 0, \quad (2.3)$$

$f(q^*)$ es un máximo relativo. Si (2.2) se satisface para un ϵ arbitrariamente grande, entonces $f(q^*)$ es un mínimo absoluto o global. Similarmente, si (2.3) se satisface para un ϵ arbitrariamente grande, entonces $f(q^*)$ es un máximo absoluto o global.

Definición 2.10 Una funcional J con dominio Ω tiene un extremum relativo en x^* si existe un $\epsilon > 0$ tal que para todas las funciones x en Ω que satisfagan $\|x - x^*\| < \epsilon$ el incremento de J tiene el mismo signo. Si

$$\Delta J = J(x) - J(x^*) > 0, \quad (2.4)$$

$J(x^*)$ es un mínimo relativo, si

$$\Delta J = J(x) - J(x^*) < 0, \quad (2.5)$$

$J(x^*)$ es un máximo relativo. Si (2.4) se satisface para un ϵ arbitrariamente grande, entonces $J(x^*)$ es un mínimo absoluto o global. Similarmente, si (2.5) se satisface para un ϵ arbitrariamente grande, entonces $J(x^*)$ es un máximo absoluto o global. x^* es llamado un extremo, y $J(x^*)$ es

referido como un extremum.

Teorema 2.1 (Teorema Fundamental) Sea x un vector función de t en la clase Ω , y $J(x)$ sea una funcional diferenciable en x . Asuma que las funciones en Ω no están limitadas por ningún restricción. Si x^* es un extremo, la variación de J debe desvanecerse en x^* ; esto es

$$\delta J(x^*, \delta x) = 0, \text{ para todas las } \delta x \text{ admisibles} \quad (2.6)$$

Ejemplo 2.2 Encuentre el extremo para la funcional del ejemplo previo (2.1) y especifique si es un mínimo o un máximo. En el ejemplo 2.1 ya se obtuvo la variación de J ,

$$\delta J(x^*, \delta x) = \int_0^1 [2x^*(t) + 2] \delta x(t) dt = 0,$$

de donde, debido al lema fundamental del Cálculo de Variaciones probado en [20] y [21], el cual establece que si una función h es continua y

$$\int_{t_0}^1 h(t) \delta x(t) dt = 0,$$

para cada función δx que es continua en el intervalo $[t_0, T]$ entonces h debe ser cero en cada punto en el intervalo $[t_0, T]$;

$$2x^*(t) + 2 = 0,$$

$$x^*(t) = -1,$$

el cual es un extremo. Puesto que $J(x^*) = \int_0^1 -1 dt = -t \Big|_0^1 = -1$,

$$\Delta J = J(x) - J(x^*) = J(x) + 1 > 0,$$

por lo tanto, $J(x^*)$ es un mínimo relativo y global.

2.1.2 Aproximación por Cálculo de Variaciones al Control Óptimo

Sea una planta descrita por la ecuación dinámica no-lineal variante en el tiempo

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t) \quad (2.7)$$

con el estado $x(t) \in R^n$ y la entrada de control $u(t) \in R^m$, las condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$ y el tiempo inicial t_0 son especificadas. La cual tiene asociado un índice de desempeño

$$J = \phi(x(T), T) + \int_{t_0}^T L(x(t), u(t), t) dt, \quad (2.8)$$

donde $[t_0, T]$ es el intervalo de tiempo de interés. El problema de control óptimo es encontrar la entrada $u^*(t)$ en el intervalo de tiempo $[t_0, T]$ que lleve a la planta (2.7) a lo largo de la trayectoria $x^*(t)$ tal que la función de costo (2.8) es minimizada, y tal que

$$\psi(x(T), T) = 0 \quad (2.9)$$

para una función dada $\psi \in R^p$, la cual es una función del estado final.

Hay que hacer hincapie en el hecho de que $\phi(x(T), T)$ es una función del estado final que queremos hacer pequeña, como por ejemplo la energía $[x^T(T)S(T)x(T)]/2$, donde $S(T)$ es una matriz de peso dada. Por otro lado, $\psi(x(T), T)$ es una función del estado final, la cual queremos fijar en cero exactamente.

De acuerdo con [6] los vectores $\lambda(t) \in R^n$ (que está en función del tiempo), y $v \in R^p$ (que es una constante), son llamados *multiplicadores de Lagrange*, los cuales permiten unir las restricciones (2.7) y (2.9) al índice de desempeño (2.8), de la manera siguiente:

$$J = \phi(x(T), T) + v^T \psi(x(T), T) + \int_{t_0}^T [L(x(t), u(t), t) + \lambda^T(t)(f(x, u, t) - \dot{x})] dt \quad (2.10)$$

Definición 2.11 Se define el Hamiltoniano H como

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) \triangleq L(x(t), u(t), t) + \lambda^T(t)f(x, u, t)$$

Entonces se puede escribir

$$J = \phi(x(T), T) + v^T \psi(x(T), T) + \int_{t_0}^T [H(x(t), u(t), t) - \lambda^T(t)\dot{x}] dt$$

Usando la regla de Leibnitz, el incremento de J como una función de incrementos de x, λ, v, u y t

es

$$\begin{aligned} \delta J = & (\phi_x + \psi_x^T v)^T dx \Big|_T - (\phi_t + \psi_t^T v)^T dt \Big|_T + \psi^T \Big|_T dv + (H - \lambda^T \dot{x}) dt \Big|_T \\ & - (H - \lambda^T \dot{x}) dt \Big|_{t_0} + \int_{t_0}^T \left[H_x^T \delta x + H_u^T \delta u - \lambda^T \delta \dot{x} + (H_\lambda - \dot{x})^T \delta \lambda \right] dt, \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde

$$H_x = \frac{\partial H}{\partial x}, \quad H_u = \frac{\partial H}{\partial u}, \quad H_\lambda = \frac{\partial H}{\partial \lambda}, \quad \phi_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \psi_t = \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Para eliminar la variación en \dot{x} , integrando por partes

$$\int_{t_0}^T \lambda^T \delta \dot{x} dt = -\lambda^T \delta x \Big|_T + \lambda^T \delta x \Big|_{t_0} + \int_{t_0}^T \dot{\lambda}^T \delta x dt,$$

se sustituye esto en (2.11) y se hace uso de

$$dx(T) = \delta x(T) + \dot{x}(T)dT,$$

entonces se tiene después de estas dos sustituciones lo siguiente

$$\begin{aligned} \delta J = & (\phi_x + \psi_x^T v - \lambda)^T dx \Big|_T + (\phi_t + \psi_t^T v + H - \lambda^T \dot{x} + \lambda^T \dot{x})^T dt \Big|_T + \psi^T \Big|_T dv \\ & - (H - \lambda^T \dot{x} + \lambda^T \dot{x}) dt \Big|_{t_0} + \lambda^T dx \Big|_{t_0} + \int_{t_0}^T \left[(H_x + \dot{\lambda})^T \delta x + H_u^T \delta u + (H_\lambda - \dot{x})^T \delta \lambda \right] dt. \end{aligned}$$

De acuerdo con [6], el mínimo de J con restricciones (2.8) es logrado en el mínimo de J sin restricciones (2.10). Esto se alcanza cuando $\delta J = 0$ (2.6) para todos los incrementos independientes en sus argumentos. Poniendo en cero los coeficientes de los incrementos independientes $dv, \delta x, \delta u, \delta \lambda$. Además puesto que t_0 y $x(t_0)$ son ambos fijos y conocidos, entonces dt_0 y $dx(t_0)$ son ambos cero. Los términos evaluados en $t = t_0$ son automáticamente cero. Por lo tanto tenemos las siguientes ecuaciones.

La ecuación de restricción del estado final

$$\psi(x(T), T) = 0,$$

la ecuación de co-estado

$$-\dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial f^T}{\partial x} \lambda + \frac{\partial L}{\partial x}.$$

la condición de estacionario

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} - \frac{\partial L}{\partial u} + \frac{\partial f^T}{\partial u} \lambda,$$

y la condición de restricción

$$(\phi_x + v_x^T v - \lambda)^T dx + (\phi_t + v_t^T v + H)^T dt = 0,$$

de la cual se derivan las llamadas condiciones de transversalidad.

2.1.3 Principio Mínimo de Pontryagin

La generalización del teorema fundamental conduce al principio mínimo de Pontryagin. Por definición, se sabe que el control u^* ocasiona que la funcional J tenga un mínimo relativo si $J(u) - J(u^*) - \Delta J > 0$ para todos los controles admisibles suficientemente cerca de u^* . Se entiende por controles admisibles aquellos que cumplen con las restricciones dadas, son continuos y tienen primeras derivadas continuas por pedazos.

Si $u = u^* + \delta u$, el incremento en J puede ser expresado como $\Delta J(u, \delta u) = \delta J(u^*, \delta u) + O(\delta u)$ donde $O(\delta u)$ representa a los términos de orden mayor. δJ es lineal en δu y $O(\delta u)$ se aproxima a cero mientras la norma de δu se aproxima a cero. Debido a que ya no se asume que los controles admisibles no son restringidos, δu es arbitraria solo si el control extremo está estrictamente dentro de sus límites para todo el intervalo de tiempo $[t_0, T]$. En este caso, la restricción no tiene efecto sobre la solución del problema. Si, por el contrario, un control extremo cae en el límite durante al menos un subintervalo $[t_1, t_2]$ del intervalo $[t_0, T]$, entonces las variaciones de control admisibles δu existen cuyos negativos ($-\delta u$) no son admisibles. Si solamente estas variaciones son consideradas, una condición necesaria para u^* tal que J sea minimizada, es que $\delta J(u^*, \delta u) \geq 0$. Por otra parte, para las variaciones $\delta \tilde{u}$ diferentes de cero solo para t afuera del intervalo $[t_1, t_2]$, es necesario que $\delta J(u^*, \delta \tilde{u}) = 0$.

Si las ecuaciones de estado son satisfechas, y $\lambda^*(t)$ es seleccionada de tal forma que los coeficientes de $\delta x(t)$ en la integral sean idénticamente cero, y la ecuación de condición de restricción es satisfecha, se tiene que

$$\delta J = \int_{t_0}^T H_u^1 \delta u dt.$$

Y puesto que el integrando es la aproximación de primer orden al cambio en H causado por el cambio en u

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x^*, u^*, \lambda^*, t) \delta u \triangleq H(x^*, u^* + \delta u, \lambda^*, t) - H(x^*, u^*, \lambda^*, t),$$

por lo tanto,

$$\delta J = \int_{t_0}^T [H(x^*, u^* + \delta u, \lambda^*, t) - H(x^*, u^*, \lambda^*, t)] dt.$$

Para que u^* sea un control minimizante es necesario que

$$\int_{t_0}^T [H(x^*, u^* + \delta u, \lambda^*, t) - H(x^*, u^*, \lambda^*, t)] dt \geq 0,$$

para toda δu admisible, tal que $|\delta u| \leq \beta$. Por lo tanto,

$$H(x^*, u^*, \lambda^*, t) < H(x^*, u^* + \delta u, \lambda^*, t),$$

para toda δu admisible y para toda $t \in [t_0, t_f]$.

Definición 2.12 *El requerimiento*

$$H(x^*, u^*, \lambda^*, t) < H(x^*, u, \lambda^*, t),$$

para toda u admisible es llamado el principio mínimo de Pontryagin el cual enuncia que el Hamiltoniano debe ser minimizado sobre toda u admisible para valores óptimos del estado y coestado.

Resumiendo Se busca un control $u^* \in U$, que hace que el sistema

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t),$$

siga una trayectoria admisible que minimize el índice de desempeño

$$J = \phi(x(T), T) + \int_{t_0}^T L(x(t), u(t), t) dt.$$

Para lo cual es necesario apoyarse en el Hamiltoniano

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) \triangleq L(x(t), u(t), t) + \lambda^T(t) f(x, u, t),$$

que permite señalar las condiciones necesarias para que u^* sea un control óptimo, las cuales son

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda}, \\ \dot{\lambda} &= \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial f^I}{\partial x} \lambda + \frac{\partial L}{\partial x}, \\ H(x^*, u^*, \lambda^*, t) &\leq H(x^*, u, \lambda^*, t) \end{aligned} \quad (2.12)$$

para toda $u(t)$ admisible,

para toda $t \in [t_0, t_f]$ y

$$(\phi_x + \psi_x^I v - \lambda)^I dx_T + (\phi_t + \psi_t^I v + H)^I dt_T = 0,$$

de la cual se derivan las llamadas condiciones de transversalidad.

Es necesario hacer notar que

1. $u^*(t)$ es un control que hace que $H(x^*(t), u(t), \lambda^*(t), t)$ asuma su mínimo global o absoluto.
2. Las ecuaciones (2.12) constituyen un conjunto de condiciones necesarias para la optimalidad; pero no suficientes en general.

En el caso de que los controles no estén restringidos, para que $u^*(t)$ minimice el Hamiltoniano es necesario (pero no suficiente) que

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) = 0. \quad (2.13)$$

Si la ecuación (2.13) se satisface y la matriz

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) > 0. \quad (2.14)$$

entonces, es suficiente para garantizar que $u^*(t)$ causa que H sea un mínimo local; si el Hamiltoniano puede ser expresado en la forma

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = a(x(t), \lambda(t), t) + [c(x(t), \lambda(t), t)]^I u(t) + \frac{1}{2} u^I(t) R(t) u(t), \quad (2.15)$$

donde, c es un vector que no tiene ningún término que contenga $u(t)$ y $R(t)$ es una matriz positiva definida, entonces si se satisfacen (2.13) y (2.14), estas son condiciones necesarias y suficientes para que $H(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t)$ sea un mínimo global.

Ejemplo 2.3 Considere el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + u(t),\end{aligned}$$

con condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$ y el índice de funcionamiento a ser minimizado es

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x_1^2(t) + u^2(t)] dt.$$

donde, t_f es especificado, y el estado final $x(t_f)$ es libre.

a) Encontrar las condiciones necesarias para un control sin restricciones para minimizar J . El Hamiltoniano es

$$H(x(t), u(t), \lambda(t)) = \frac{1}{2}x_1^2(t) + \frac{1}{2}u^2(t) + \lambda_1(t)x_2(t) - \lambda_2(t)x_2(t) + \lambda_2(t)u(t), \quad (2.16)$$

de donde las co-ecuaciones de estado son

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_1^*(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -x_1^*(t), \\ \dot{\lambda}_2^*(t) &= \frac{\partial H}{\partial x_2} = \lambda_1^*(t) - \lambda_2^*(t),\end{aligned}$$

debido a que el control no tiene restricciones, es necesario que

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u^*(t) + \lambda_2^*(t) = 0$$

y

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = 1;$$

por lo tanto

$$u^*(t) = -\lambda_2^*(t),$$

minimiza el Hamiltoniano. Las condiciones de restricción son

$$\lambda^*(t_f) = 0.$$

b) Encuentre las condiciones para un control óptimo si

$$-1 \leq u(t) \leq +1, \text{ para toda } t \in [t_0, t_f]. \quad (2.17)$$

Las ecuaciones de estado, co-estado y la condición de restricción para $\lambda^*(t_f)$ permanecen igual; sin embargo, ahora $u(t)$ debe ser seleccionada para minimizar (2.16) sujeto a la restricción (2.17). Para determinar el control que minimiza H , primero se separan todos los términos que contengan

$u(t)$.

$$\frac{1}{2}u^2(t) + \lambda_2(t)u(t)$$

del Hamiltoniano. Para cuando el control óptimo no se sature, se tiene que

$$u^*(t) = -\lambda_2^*(t).$$

como en la parte a); esto ocurre cuando $\lambda_2^*(t) < 1$. Sin embargo, si hay momentos cuando $\lambda_2^*(t) > 1$, entonces el control que minimiza es

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & \text{para } \lambda_2^*(t) > 1, \\ +1, & \text{para } \lambda_2^*(t) < -1. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} u^*(t) &= -1, \text{ para } 1 < \lambda_2^*(t) \\ &= -\lambda_2^*(t), \text{ para } -1 < \lambda_2^*(t) \leq 1 \\ &= +1, \text{ para } \lambda_2^*(t) < -1. \end{aligned}$$

2.2 Programación Dinámica

La programación dinámica fue desarrollada por R.E. Bellman a finales de los 1950's. El control óptimo es expresado como una retroalimentación variable de estado en una forma gráfica o tabular. La programación dinámica, está basada en el principio de optimalidad

Definición 2.13 *Una política óptima tiene la propiedad de que no importa cuales han sido las decisiones previas (por ejemplo, controles), las decisiones restantes deben constituir una política óptima con respecto a el estado resultante de esas decisiones previas.*

Se debe notar que el principio de optimalidad juega un papel similar al del Principio Mínimo de Pontryagin en la aproximación del cálculo variacional a los sistemas de control, sirve para limitar el número de estrategias de control óptimas potenciales que deben ser investigadas. Esto también implica que las estrategias de control óptimo deben ser determinadas trabajando en sentido inverso desde la etapa final.

2.2.1 Control Continuo y la Ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman

Sea la planta

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad (2.18)$$

la cual tiene un índice de funcionamiento de

$$J = \phi(x(T), T) + \int_{t_0}^T L(x(t), u(t), t) dt.$$

Se busca un control óptimo continuo $u^*(t)$ en un intervalo $[t_0, T]$ que minimize J y lleve un estado inicial $x(t_0)$ a un estado final que satisfaga $\psi(x(T), T) = 0$. Por el principio de Optimalidad, si se supone que t es el tiempo actual y que $t + \Delta t$ es un tiempo futuro cercano a t . Entonces el costo para ir del tiempo t al tiempo final T puede ser escrito como

$$J(x, t) = \phi(x(T), T) + \int_{t+\Delta t}^T L(x, u, \tau) d\tau + \int_t^{t+\Delta t} L(x, u, \tau) d\tau,$$

esto es,

$$J(x, t) = \int_t^{t+\Delta t} L(x, u, \tau) d\tau + J(x + \Delta x, t + \Delta t).$$

donde $x + \Delta x$ es el estado al tiempo $t + \Delta t$ que resulta cuando el estado actual $x(t)$ y $u(t)$ son usados en (2.18). Esta ecuación describe todos los posibles costos para ir del tiempo t al tiempo final T . De acuerdo al principio de optimalidad, sin embargo, los únicos candidatos $J^*(x, t)$ son los costos $J(x, t)$ que son óptimos desde $t + \Delta t$ a T . Si el costo óptimo $J^*(x + \Delta x, t + \Delta t)$ se conoce para todos los posibles $x + \Delta x$, y puesto que también se tiene calculado el control óptimo en el intervalo $[t + \Delta t, T]$ para cada $x + \Delta x$, entonces solo hay que seleccionar el control actual $u(t)$ en el intervalo $[t, t + \Delta t]$. Por lo tanto,

$$J^*(x, t) = \min_{u(\tau)} \left[\int_t^{t+\Delta t} L(x, u, \tau) d\tau + J^*(x + \Delta x, t + \Delta t) \right],$$

$$t \leq \tau < t + \Delta t$$

esto es el principio de optimalidad para los sistemas continuos en el tiempo.

Mediante una expansión por series de Taylor de $J^*(x + \Delta x, t + \Delta t)$ alrededor de (x, t) y tomando una aproximación de la integral se tiene que

$$J^*(x, t) = \min_{u(\tau)} \left[L\Delta t + J^*(x, t) + \left(\frac{\partial J^*}{\partial x} \right)^T \Delta x + \frac{\partial J^*}{\partial t} \Delta t \right],$$

$$t \leq \tau < t + \Delta t$$

Puesto que J^* , y $J_t^* \Delta t$ son independientes de $u(\tau)$, $t < \tau \leq t + \Delta t$ y $\Delta x = f(x, u, t) \Delta t$, y

$$J^*(x, t) = J^*(x, t) + J_t^* \Delta t + \min_{u(\tau)} \left[L\Delta t + (J_x^*)^T f \Delta t \right],$$

$$t < \tau < t + \Delta t$$

Además, como $\Delta t \rightarrow 0$,

$$-\frac{\partial J^*}{\partial t} = \min_{u(\tau)} \left[L + \left(\frac{\partial J^*}{\partial x} \right)^T f \right],$$

que es una ecuación en diferenciales parciales para el costo óptimo $J^*(x, t)$ y es llamada *la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HBJ)*. La cual puede ser escrita como

$$\frac{\partial J^*}{\partial t} = -\min_u [H(x, u, J_x^*, t)].$$

2.2.2 Relación entre Programación Dinámica y el Principio Mínimo

Principio Mínimo Al aplicar el principio mínimo, o el cálculo de variaciones, para determinar los controles óptimos generalmente se obtienen problemas de dos puntos de valores de frontera, que requieren el uso de técnicas numéricas iterativas para su solución. Si las ecuaciones de estado de un proceso son lineales (o han sido linealizadas) y el índice de funcionamiento es cuadrático, la ley de control óptimo puede ser determinada por la integración numérica de una ecuación diferencial matricial del tipo Riccati, sobre este caso (LQR) puede verse el capítulo siguiente. Una importante característica del cálculo variacional es que la forma de los controles óptimos pueden ser determinados; por lo que solo es necesario considerar el subconjunto de los controles que tienen la forma apropiada; esto es significativo conceptualmente y ventajoso en el sentido computacional.

Programación Dinámica La programación dinámica es una manera inteligente de examinar todos los posibles candidatos de la ley de control óptimo. Hacer esto directamente enumerando todas las posibilidades es una tarea exhaustiva, pero al usar el principio de optimalidad un proceso de decisión de multi-etapas puede ser reducido a una secuencia de procesos de decisión de una sola-etapa, y se obtiene un algoritmo computacional factible. El algoritmo consiste en resolver la ecuación de recurrencia funcional mediante una búsqueda directa entre los valores de control aceptables. La presencia de restricciones en el estado y el control generalmente complican la aplicación del cálculo de variaciones; sin embargo, en programación dinámica, las restricciones en el control y el estado reducen el rango de valores a ser buscado y por eso se simplifica la solución. Otra característica deseable de la programación dinámica es que el procedimiento computacional determina la ley de control. Mas aun, debido a que el algoritmo hace una comparación directa de los valores medidos del índice de funcionamiento asociado con todas las leyes de control óptimo candidatas, se asegura que la ley de control óptima sea global o absoluta. La limitación principal de la programación dinámica es la necesidad de una capacidad de almacenamiento grande en las computadoras cuando se resuelvan problemas de sistemas de orden superior, esto es la "maldición de la dimensión".

2.3 Ecuaciones Integrales

Una ecuación integral es aquella donde la función desconocida, esto es la cantidad a ser determinada, aparece bajo el signo de la integral. Una ecuación integral es clasificada por su clase y tipo.

2.3.1 Integral de Lebesgue

Definición 2.14 Sea f una función simple, es decir, una función contable μ -medible [30] tomando valores distintos

$$y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$$

Entonces por la integral de Lebesgue de f sobre un conjunto A , denotada como:

$$\int_A f(x) d\mu, \quad (2.19)$$

se entiende la cantidad:

$$\sum_n y_n \mu(A_n), \quad (2.20)$$

donde:

$$A_n = \{x : x \in A, f(x) = y_n\}$$

es tal que (2.20) es absolutamente convergente, es decir

$$\sum_n y_n \mu(A_n) < \infty.$$

Si la integral de Lebesgue de f existe, entonces f es una función integrable o sumable (con respecto a la medida μ), sobre el conjunto A .

Definición 2.15 Para una función medible f , no necesariamente simple, se dice que f es integrable o sumable, sobre un conjunto A si existe una secuencia $\{f_n\}$ de funciones integrables simples convergiendo uniformemente a f sobre A . El límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu,$$

es llamado la integral de Lebesgue de f sobre A , denotado de igual forma que en (2.19).

Sea f una función sumable definida sobre un espacio X , equipado con una medida σ -aditiva μ (ver la ref: [30]). Entonces, la integral (2.19) de Lebesgue existe $\forall A \subset X$ medible. Si X es la línea real, equipado con una medida ordinaria de Lebesgue μ , y si $A = [a, b]$, entonces es posible expresar a (2.19), como:

$$\int_a^b f(x) dx,$$

o equivalentemente

$$\int_a^b f(t) dt, \quad (2.21)$$

en términos de una nueva variable de integración t . Suponga ahora que fijamos el límite inferior a , pero dejamos el límite superior b variable, haciendo notar esto por la sustitución de b por la de x . Entonces, (2.21) se reduce a:

$$\int_a^x f(t) dt, \quad (2.22)$$

expresión a la que se le conoce como la *integral indefinida de Lebesgue*.

2.3.2 Función de Variación Acotada

Definición 2.16 Una función f definida sobre un intervalo $[a, b]$, se dice es de variación acotada, si existe una constante $C > 0$ tal que:

$$\sum_{k=1}^r |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq C$$

para cada partición

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad (2.23)$$

del intervalo $[a, b]$ por puntos de subdivisión x_0, x_1, \dots, x_n .

Definición 2.17 Sea f una función de variación acotada. Entonces por la variación total de f sobre $[a, b]$, denotada $V_a^b(f)$, se refiere a la cantidad

$$V_a^b(f) \equiv \sup \sum_{k=1}^r |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

donde la mínima cota superior es tomada sobre todas las particiones (finitas) (2.23) del intervalo $[a, b]$.

Las propiedades principales de las funciones de variación acotadas son:

- a) Si f y g son funciones de variación acotada sobre $[a, b]$, entonces también lo es $f + g$ y $V_a^b(f + g) \leq V_a^b(f) + V_a^b(g)$.
- b) Si $a < b < c$, entonces, $V_a^c(f) = V_a^b(f) + V_b^c(f)$.
- c) La función $v(x) = V_a^x(f)$, es no decreciente.
- d) Sea f una función de variación acotada sobre $[a, b]$, y sea v la función $V_a^x(f)$. Entonces si f es continua sobre la izquierda en un punto x^* , también lo es v .
- e) Si f es de variación acotada sobre $[a, b]$, entonces f puede ser representada como la diferencia de 2 funciones no decrecientes sobre $[a, b]$.
- f) Cada función f de variación acotada tiene una derivada finita en casi todos los puntos.
- g) Si f es sumable sobre $[a, b]$, entonces la integral indefinida $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, es una función de variación acotada sobre $[a, b]$.

2.3.3 Ecuación de Volterra

Definición 2.18 Se conoce como ecuación integral lineal de Volterra a la ecuación integral

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, \xi) y(\xi) d\xi, \quad (2.24)$$

donde el límite superior de integración es variable (similar a (2.22)), y corresponde a un problema de valor inicial, y es la variable desconocida, x y ξ son variables independientes, λ es un parámetro arbitrario, $K(x, \xi)$ es una función dada, llamada el Kernel o tasa de crecimiento, $f(x)$ es un término no homogéneo. En general $f(x)$, $K(x, \xi)$ y la solución $y(x)$ son funciones continuas en el intervalo asociado.

Ecuación de Fredholm

Definición 2.19 Se conoce como ecuación integral lineal de Fredholm, a la ecuación integral

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) y(\xi) d\xi, \quad (2.25)$$

donde la integral está definida sobre el intervalo $[a, b]$, y corresponde a un problema de valor en la frontera. En esta ecuación los términos se definen en la misma forma que los términos de (2.24).

Cada ecuación ((2.24) o (2.25)), puede ser clasificada dependiendo de que si aparece o no el término $y(x)$ fuera de la integral, es decir,

$$0 = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) y(\xi) d\xi,$$

es una ecuación de Fredholm de *primera clase*. En este caso, la función desconocida aparece únicamente bajo el signo de la integral. Si la función desconocida está presente afuera de la integral, tal y como en (2.25), se dice que la ecuación es de *segunda clase*.

2.3.3.1 Métodos para la Solución de una Ecuación de Volterra

La solución general de la ecuación de Fredholm se establece en [20], y es a partir de ésta que se puede conocer un método de solución para la ecuación de Volterra. Un método para conocer la solución de una ecuación de Volterra se presenta a continuación.

Considere la ecuación de Volterra de segunda clase (2.24), con kernel cuadráticamente integrable, tal que

$$\int_0^\infty \int_0^\infty K^2(x, y) dx dy \leq N^2$$

existe y es acotada. Tal kernel será llamado un kernel- L_2 . Asuma que existe algún tipo de solución para la serie

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \phi_n(x). \quad (2.26)$$

Substituyendo (2.26) dentro de (2.24), se obtiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \phi_n(x) = f(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \int_0^x K(x, \xi) \phi_n(\xi) d\xi. \quad (2.27)$$

Asociando términos del mismo orden, resulta que:

$$\begin{aligned} \lambda^0 & : \phi_0(x) = f(x), \\ \lambda^1 & : \phi_1(x) = \int_0^x K(x, \xi) \phi_0(\xi) d\xi \\ & = \int_0^x K_1(x, \xi) f(\xi) d\xi, \\ \lambda^2 & : \phi_2(x) = \int_0^x K(x, \xi_1) \phi_1(\xi_1) d\xi_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^x K_1(x, \xi_1) d\xi_1 \int_0^{\xi_1} K_1(\xi_1, \xi) f(\xi) d\xi \\
& - \int_{\xi_1}^x \int_0^{\xi_1} K_1(x, \xi_1) K_1(\xi_1, \xi) f(\xi) d\xi_1 d\xi \\
& = \int_0^x K_2(x, \xi) f(\xi) d\xi. \\
& \vdots \\
\lambda^n & : \phi_n(x) = \int_0^x K_n(x, \xi) f(\xi) d\xi,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
K_2(x, \xi) & = \int_{\xi_1}^x K_1(x, \xi_1) K_1(\xi_1, \xi) d\xi_1. \\
& \vdots \\
K_n(x, \xi) & = \int_{\xi_1}^x K_1(x, \xi_1) K_{n-1}(\xi_1, \xi) d\xi_1.
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$y(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_0^x K_n(x, \xi) f(\xi) d\xi.$$

Con

$$K_1(x, \xi) = K(x, \xi).$$

se puede definir un nuevo kernel $\Gamma(x, \xi; \lambda)$, llamado el Kernel Resolvente:

$$\Gamma(x, \xi; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x, \xi).$$

En términos del kernel resolvente, la solución se puede escribir como:

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_0^x \Gamma(x, \xi; \lambda) f(\xi) d\xi.$$

A esta solución se le conoce como la solución de series de *Neumann* para la ecuación de Volterra de segunda clase.

Para probar si es posible que la solución de Neumann válida para (2.24), también lo sea para el caso

de una ecuación de Volterra de primera clase, considere la ecuación

$$f(x) = \int_0^x K(x, \xi)y(\xi)d\xi, \quad (2.28)$$

la cual es una ecuación de Volterra de primera clase. Diferenciando (2.28) con respecto a x :

$$f'(x) = K(x, x)y(x) + \int_0^x \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial x} y(\xi)d\xi.$$

Si $K(x, x) \neq 0$, en el intervalo $(0, x)$, se puede definir:

$$F(x) = \frac{f'(x)}{K(x, x)}; \quad \bar{K}(x, \xi) = \frac{1}{K(x, x)} \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial x}.$$

Entonces, (2.28), se puede escribir como:

$$y(x) = F(x) + \int_0^x \bar{K}(x, \xi)y(\xi)d\xi,$$

la cual, es una ecuación de Volterra de segunda clase y puede ser resuelta por el método mencionado anteriormente. Véase [34].

Ejemplo 2.4 Considere la siguiente ecuación de Volterra

$$x(s) = \frac{1}{(s+2)^2} - 2 \int_0^s \frac{1}{(s-t+2)^2} x(t)dt,$$

suguiendo el método antes expuesto se tiene

$$\begin{aligned} (2)^0 & : \phi_0(s) = \frac{1}{(s+2)^2}, \\ (2)^1 & : \phi_1(s) = \int_0^s \frac{1}{(s-t+2)^2} \cdot \frac{1}{(t+2)^2} dt, \\ & \frac{s^2 - 4 \ln(2)s + 4s + 4 \ln(s+2)s - 8 \ln(2) + 8 \ln(s+2)}{(s+2)(16+s^2+8s)(s+4)} \\ (2)^2 & : \phi_2(s) = \int_0^s \frac{1}{(s-t+2)^2} \cdot \frac{t^2 - 4 \ln(2)t + 4t + 4 \ln(t+2)t - 8 \ln(2) + 8 \ln(t+2)}{(t+2)(16+t^2+8t)(t+4)} dt \\ & [18 \ln(s+4) \ln\left(\frac{s+2}{s+4}\right) s^2 + 384 \ln(s+2) \ln(s+4) s - 96 \ln(2) \ln(s+4) s^2 - 384 \ln(s+4) \ln\left(\frac{s+2}{s+4}\right) s \\ & + 432s + 252s^2 + 864 \ln(2) - 864 \ln(s+2) + 64\pi^2 + 1536 \ln(2)^2 \\ & + 768 \operatorname{dilog}\left(\frac{s+2}{s+4}\right) + 768 \operatorname{dilog}\left(\frac{1}{2}s+2\right) + 48s^3 + 3s^4 - 768 \operatorname{dilog}\left(\frac{s}{s+4}\right) + 18 \ln(s+2) \ln(s+4) s^2 + \\ & 384 \ln(s+4) \ln(-(s+2)(s+4)) s - 18 \ln(s+4) \ln\left(\frac{s+2}{s+4}\right) s^2 - 768 \ln(2) \ln(s+4) s \\ & 96 \ln(s+2) \ln(2) s - 768 \ln(s+2) \ln(2) s - 288 \ln(2) s + 288 \ln(s+2) s + 216 \ln(s+2) s^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 768\ln(s+2)\ln(s+4) + 48d\log\left(\frac{s+2}{s+4}\right)s^2 + 384d\log\left(\frac{s+2}{s+4}\right)s + 48d\log\left(\frac{1}{2}s+2\right)s^2 \\
& + 384d\log\left(\frac{1}{2}s+2\right)s + 96\ln(2)^2s^2 + 768\ln(2)^2s - 1536\ln(s+2)\ln(2) - 768\ln(s+4)\ln\left(\frac{1}{s+4}\right) - \\
& 24\ln(2)s^3 - 216\ln(2)s^2 + 24\ln(s+2)s^3 - 1536\ln(2)\ln(s+4) + 768\ln(s+4)\ln\left(\frac{s}{s+4}\right) \\
& 48d\log\left(\frac{2}{s+4}\right)s^2 - 384d\log\left(\frac{2}{s+4}\right)s + 4\pi^2s^2 + 32\pi^2s \quad [(12s+36+s^2)^2(16+s^2+8s)] \\
& x(s) = \phi_0(s) - 2\phi_1(s) + 4\phi_2(s) + \dots
\end{aligned}$$

donde

$$d\log = \int_1^x \frac{\ln(t)}{(1-t)} dt,$$

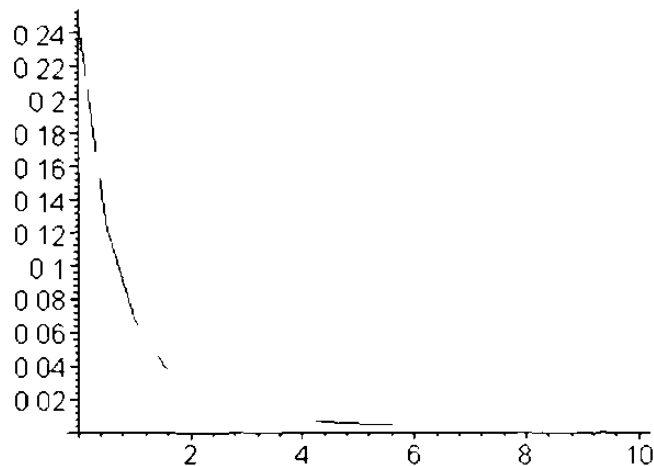


Fig.1 Ecuación de Volterra (ejemplo 2.4)

Otros métodos de solución de ecuaciones integrales de tipo Volterra de segunda clase, son los llamados métodos de cuadratura. Este procedimiento numérico consistiría en aproximar el término integral de la ecuación (2.24) mediante una regla de cuadratura que integre sobre la variable t para un valor fijo de s .

2.3.4 Ecuaciones Integrales de Volterra y Ecuaciones Diferenciales Lineales

Existe una relación fundamental entre las ecuaciones integrales de tipo Volterra y ecuaciones diferenciales lineales ordinarias. En realidad, la solución de cualquier ecuación diferencial del tipo

$$\frac{d^n u}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x) u = F(x) \quad (2.29)$$

con coeficientes continuos, y con condiciones iniciales

$$u(0) = c_0, u'(0) = c_1, \dots, u^{(n-1)}(0) = c_{n-1}. \quad (2.30)$$

puede ser reducida a la solución de una cierta ecuación integral de Volterra de segunda clase

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, \xi) f(\xi) d\xi. \quad (2.31)$$

Para lograr esto, sea

$$\mathcal{D}^n u - \frac{d^n u}{dx^n} = f(x),$$

y sucesivamente

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{-1} f &= \int_0^x f(\xi) d\xi, \\ \mathcal{D}^{-2} f &= \mathcal{D}^{-1}(\mathcal{D}^{-1} f) = \int_0^x (x - \xi) f(\xi) d\xi \\ &= x \int_0^x f(\xi) d\xi - \int_0^x \xi f(\xi) d\xi = x \int_0^x f(\xi) d\xi - x \int_0^x f(\xi) d\xi + \int_0^x \int_0^x f(\xi) d\xi d\xi \\ &\quad \int_0^x \int_0^x f(\xi) d\xi d\xi \\ &\quad \dots \\ \mathcal{D}^{-n} f &= \mathcal{D}^{-1}(\mathcal{D}^{-n+1} f) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x - \xi)^{n-1} f(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Tomando en cuenta las condiciones iniciales, se observa que

$$\frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} = c_{n-1} + \mathcal{D}^{-1} f, \quad (2.32)$$

$$\frac{d^{n-2} u}{dx^{n-2}} = c_{n-1} x + c_{n-2} + \mathcal{D}^{-2} f,$$

$$\dots$$

$$u = c_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + c_{n-2} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + c_1 x + c_0 + \mathcal{D}^{-n} f.$$

Regresando a la ecuación diferencial (2.29), se ve que puede ser escrita en la forma (2.31) donde

$$K(x, \xi) = \sum_{h=1}^n a_h(x) \frac{(x - \xi)^{h-1}}{(h-1)!}, \quad \lambda = 1, \quad (2.33)$$

y

$$y(x) = F(x) + c_{n-1} a_1(x) + (c_{n-1} x + c_{n-2}) a_2(x) + \dots \quad (2.34)$$

$$- \left(c_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + c_1 x + c_0 \right) a_n(x).$$

A la inversa, se resuelve (2.31) con K y F dadas por (2.33) y (2.34) y se sustituye el valor obtenido para $f(x)$ en la última ecuación de (2.32), se obtiene la solución (única) de (2.29) que satisface las condiciones iniciales (2.30).

2.3.5 Ecuaciones del tipo Faltung (Tipo Ciclo Cerrado)

Como caso particular de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes reducida a una ecuación integral de tipo Volterra es aquella cuyo kernel es un polinomio en $x - y$.

$$K(x, y) = k(x - y). \quad (2.35)$$

Tales ecuaciones

$$y(x) - f(x) = \lambda \int_0^x K(x - \xi) f(\xi) d\xi$$

y sus similares de la primera clase, son una importante clase de las ecuaciones integrales de tipo Volterra que Volterra llamó *ecuaciones de ciclo cerrado* debido a que el operador

$$V_x [f(\xi)] = \int_{-\infty}^x K(x, \xi) f(\xi) d\xi,$$

lleva a cualquier función periódica $f(\xi)$ con periodo arbitrario T a otra función periódica con el mismo periodo T , si y sólo si K es del tipo (2.35).

También se le conocen como *ecuaciones del tipo Faltung* debido a que la operación

$$f * \varphi = \int_{-\infty}^x f(x - \xi) \varphi(\xi) d\xi$$

es generalmente llamado *Faltung* (o *convolución*) de dos funciones f y φ .

Resumen

En este capítulo se dan las bases del cálculo variacional, su aplicación al control óptimo para su posterior utilización en el capítulo 4. También se menciona la programación dinámica y se hace una comparación con el principio mínimo de Pontryagin. Por otra parte se dan las definiciones de las ecuaciones integrales sobre de las cuales se trabaja a lo largo de la presente tesis, como lo son las ecuaciones integrales de tipo Volterra; se presenta un ejemplo de una ecuación de Volterra con su solución numérica y se mencionan otros métodos de solución numérica (métodos de cuadratura).

Capítulo 3

Regulador y Filtro Óptimos en Sistemas Diferenciales

3.1 Regulador y Filtro Óptimos en Sistemas Diferenciales

Un problema que se presenta en el área de control es el del regulador, el cual consiste en encontrar el valor de la variable de control para llevar la salida de la planta y sus derivadas a cero, es decir llevar la planta de un estado no-cero a un estado cero. En el sentido práctico, es necesario tener en cuenta las restricciones que nos marca el funcionamiento de la planta, ya sea en cuanto a la magnitud del control, el tiempo de respuesta, picos de sobrepaso a la salida, márgenes de ganancia o de fase, ancho de banda, etc. Sin embargo, el diseño de un sistema de control del movimiento de una nave espacial, o de cualquier otro sistema de control complejo, multientrada-multisalida de tecnología moderna demanda de un enfoque de solución diferente, como lo es el que presenta la teoría del control óptimo. La formulación de un problema de control óptimo requiere:

1. Una descripción matemática (modelo) del proceso a controlar.
2. Una declaración de las restricciones físicas.
3. La especificación de un criterio del desempeño.

Este problema puede ocurrir cuando la planta está sujeta a disturbios no deseados que perturben su salida.

Un problema en el área de control es el de la estimación (identificación) de estados. Cuando el tiempo es la variable independiente, tres tipos de problemas de estimación se presentan

1. Filtrado: estimar el estado $x(T)$ de la salida $y(t)$, $0 < t < T$.
2. Predicción: estimar el estado $x(T + \tau)$ de la salida $y(t)$, $0 < t < T$, $\tau > 0$.
3. Suavización: estimar el estado $x(\tau)$ de la salida $y(t)$, $0 < t < T$, $0 < \tau < T$.

Este problema también puede presentarse en lugares donde la planta este afectada por disturbios no deseados.

Cuando se trata del diseño de un observador simple en el cual se usa el modelo lineal

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \quad x(t_0) = x_0 \\ y &= Cx,\end{aligned}$$

con el valor inicial x_0 desconocido, para estimar el estado actual del vector x dada la entrada u y la medición de la salida y . La ecuación de estado del observador estaría dada como:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + H(y - C\hat{x}),$$

por lo que el error de estimación $\tilde{x} = \hat{x} - x$ satisface

$$\dot{\tilde{x}} = (A - HC)\tilde{x}.$$

El observador es mostrado en el diagrama de la Fig. 2

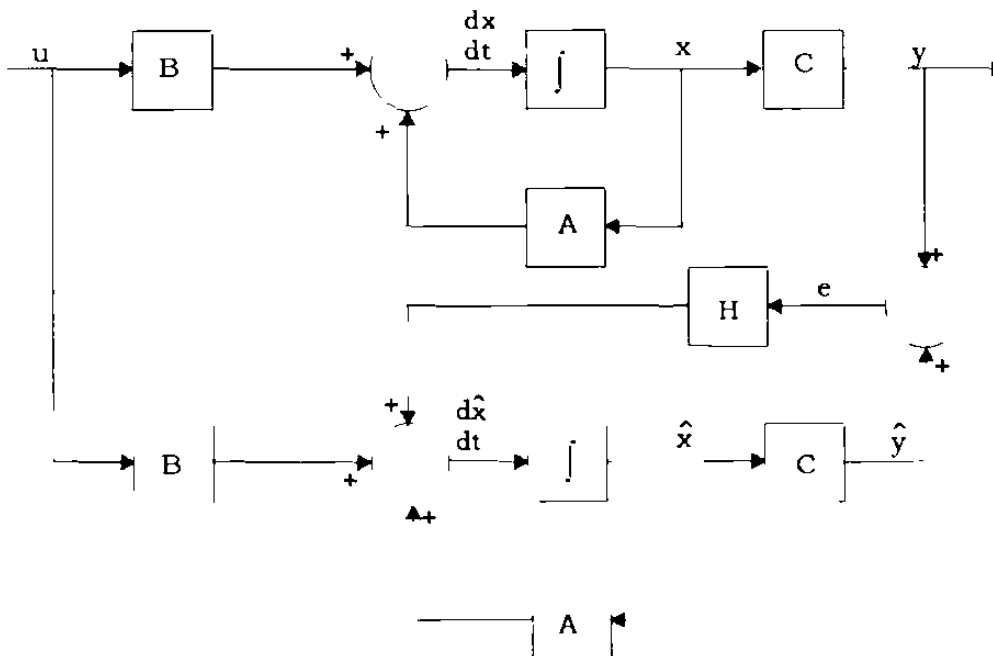


Fig. 2 Observador de estado en sistemas lineales

Entonces el diseño de un observador de estado óptimo se reduce sólo a la optimización de H basado en algún criterio. Si se añade ruido o algún disturbio al modelo, entonces hay una ganancia H para el estimador que debe ser la óptima para minimizar la influencia de dichas incertidumbres. Mas aun puede ser calculada resolviendo una clase especial de ecuación no lineal como la ecuación

de Riccati. Se pueden adoptar varios criterios para obtener dicha ganancia, uno es el de tomar el escenario del peor caso lo cual conduce a la optimización minimaxima [1] o H^∞ [22].

3.2 Incertidumbres

Como incertidumbre se entiende por lo general algo que no está bien definido. Ahora bien, cuando tratamos sistemas con incertidumbres, se usan modelos bien definidos y en los cuales se trata de representar lo que se considera incierto del sistema. Los modelos posibles para x escalar cuyo valor es incierto son:

1. x es una variable aleatoria con estructura probabilística específica.
2. x es una variable aleatoria cuya estructura probabilística contiene parámetros inciertos; por ejemplo, media y varianza.
3. x es una variable aleatoria cuya estructura probabilística es desconocida excepto para ciertos momentos; por ejemplo, media y varianza.
4. x es completamente desconocido.
5. x es acotada; por ejemplo, $|x| \leq 1$.
6. x puede tomar solo ciertos valores; por ejemplo, $x = 1, 2$, ó 3 .

Estos 6 modelos pueden ser combinados en dos tipos básicos como sigue:

- 1-3. x es una variable aleatoria cuya estructura probabilística puede ser incierta.
- 4-6. x pertenece a algún conjunto.

Los modelos posibles para un vector x K -dimensional cuyo valor es incierto son:

1. x es un vector aleatorio cuya estructura probabilística puede ser incierta.
2. x pertenece a algún conjunto en un espacio K -dimensional; por ejemplo, x pertenece a un conjunto cerrado, x puede tomar solo ciertos valores, o x está en alguna hipersuperficie.

Los modelos posibles para una función del tiempo escalar $x(t)$ en $0 < t < T$ cuyo valor es incierto son:

1. $x(t)$ es un proceso estocástico cuya estructura probabilística puede ser incierta.
2. $x(t)$ es acotada para toda t , $0 < t \leq T$; por ejemplo, $|x(t)| < 1$.
3. $x(t)$ debe satisfacer algunas restricciones integrales; por ejemplo,

$$\int_0^T x^2(t) dt < 1.$$

4. El espectro de $x(t)$ es limitado; por ejemplo,

$$|x(\omega)|^2 < \epsilon, \text{ para toda } \omega > \omega_0, \omega < \omega_0.$$

$$x(\omega) = \int_0^T x(t) e^{-i\omega t} dt.$$

5. $x(t)$ es parametrizada; por ejemplo,

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2,$$

donde los valores de a_0 , a_1 y a_2 son inciertos.

Los modelos 2, 3, 4 y 5 pueden ser vistos como métodos para restringir a $x(t)$ a algún conjunto en el espacio de todas las funciones del tiempo posibles en $0 < t < T$. Los ejemplos anteriores ilustran las dos clases principales de modelos con incertidumbres que se consideran:

1. Modelos probabilísticos con posibles incertidumbres en las distribuciones probabilísticas.
2. Modelos determinísticos con incertidumbres desconocidas pero acotadas.

3.3 Programación Dinámica y Conjuntos Geométricos

Aun cuando la solución a los problemas de control para modelos determinísticos con incertidumbres desconocidas pero acotadas ha sido abordada por los métodos de programación dinámica y el principio mínimo de Pontryagin con optimización sobre conjuntos geométricos, se presentan serias dificultades como:

- La existencia de una solución no está garantizada,
- La solución del problema de control es dada sin especificar una ley de control definida (lo que es necesario para su implementación práctica),
- Los requerimientos computacionales son enormes para obtener una solución.

Es por esto que el método para trabajar con modelos determinísticos con incertidumbres desconocidas pero acotadas, abordado en la presente tesis es el de conjuntos geométricos en la forma de los elipsoides.

3.4 Conjuntos Compatibles con Incertidumbres

3.4.1 Conjuntos Arbitrarios

Cuando se trata con modelos determinísticos con incertidumbres desconocidas pero acotadas, se puede considerar que estas incertidumbres pertenecen a conjuntos arbitrarios los cuales determinan

las cotas. Considérese un sistema lineal

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$x(0) = x_0$$

$$z(t) = C(t)x(t) + v(t)$$

$$x \in \Omega_x$$

$$v \in \Omega_v$$

donde Ω_x y Ω_v son conjuntos.

Para el caso del estimador donde se tienen restricciones instantáneas, debido a que v debe estar en un conjunto, se tiene que dada una observación $z = z_{actual}$ se combina con el conjunto Ω_v y con la ecuación de estado, para definir un nuevo conjunto que debe contener x . Por lo tanto la observación especifica un conjunto $\Omega_{x, z, t_{ua}}$ que debe contener a x . Considere los dos conjuntos Ω_x y $\Omega_{x, z}$. Cada conjunto contiene x . Por lo tanto, x debe estar en su intersección. Sea $\Omega_{x, st}$ que denote esta intersección. Entonces,

$$\Omega_{x, st} = \Omega_x \cap \Omega_{x, z}$$

en general resuelve el problema de estimación. El modelado de las incertidumbres implica que, dada la observación z , el valor de x debe estar dentro de $\Omega_{x, st}$. Además, es el conjunto más pequeño, que debe contener x y que puede ser calculado de la información disponible. Por lo tanto, el conjunto $\Omega_{x, st}$ es el mejor conjunto de estimados. Nótese que el estimado del vector x está definido como un conjunto. Un modelo con incertidumbres desconocidas pero acotadas no provee de información específica para determinar cual vector dentro de $\Omega_{x, st}$ es el mejor estimado de x . Sin embargo, una idea razonable es definir \hat{x} como el centro de $\Omega_{x, st}$, donde el centro puede ser definido de manera conveniente, por ejemplo, como el centro de Chebyshev definido como

$$\text{Chebyshev} = \arg \min_{\Omega_{x, st}} \max_{n \in \Omega_{x, st}} \|l - n\|.$$

3.4.2 Elipsoides

Dentro de los controles basados en la técnica de conjuntos teóricos, el conjunto cerrado convexo

llamado elipsoide es de particular interés, debido a que se puede definir su centro de manera relativamente sencilla.

Un elipsoide Ω con centro en m puede ser definido como

$$\Omega = \left\{ x : [x - m]^T \Gamma^{-1} [x - m] \leq 1 \right\},$$

donde Γ es una matriz positiva definida. El tamaño, la forma y localización del elipsoide son determinados por m y Γ . El centro es determinado por m . La orientación (dirección de los ejes) de Ω es determinada por los eigenvectores de Γ , y las longitudes de los ejes de Ω son determinados por los eigenvalores de Γ . Nótese que el centro de Chebyshev de un elipsoide coincide con su centro m .

Ejemplo 3.1 Elipsoide $\Omega = \left\{ x : [x - m]^T \Gamma^{-1} [x - m] < 1 \right\}$, donde

$$m = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \text{ los eigenvalores de } \Gamma \text{ son } \lambda = 9, 1.$$

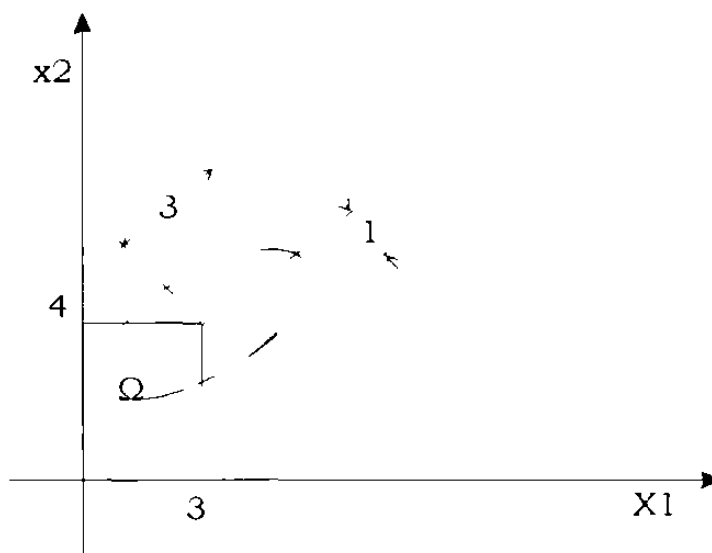


Fig. 3 Elipsoide Ω del ejemplo 3.1

3.5 Filtro y Regulador Minimáximo

Considerese un sistema lineal

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),$$

$$x(0) = x_0,$$

$$z(t) = C(t)x(t) + v(t),$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el estado, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ es el ruido en la entrada, $z(t) \in \mathbb{R}^q$ es la observaci3n y $v(t) \in \mathbb{R}^m$ representa el ruido en la salida.

El problema del filtrado es estimar $x(t)$, $t > 0$ dada $z(s)$, $0 < s < t$ y alguna informaci3n sobre x_0 , $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ pero no de sus valores específicos, es decir, se tratar un triple de "disturbios" $(x_0, u(\cdot), v(\cdot))$ el cual pertenecerá a un conjunto dado que será un elipsoide, en el espacio de *Hilbert* $\mathbb{H} = \mathbb{R}^n \times L_2^p[0, T] \times L_2^m[0, T]$ y está acotado por su norma. Por conveniencia, se asume que la cota sea 1.

El problema del filtrado minimáximo consiste en encontrar para cada $t \in [0, T]$, el estimado $\hat{x}(t)$ basado en las observaciones previas $z(s)$, $0 < s < t$; que minimiza la máxima de cualquier funcional lineal del error. El máximo es tomado como $(x_0, u(\cdot), v(\cdot))$ sobre el rango de triples de norma menor o igual a uno, y que dan lugar a las observaciones particulares $z(s)$, $0 < s \leq t$. En otras palabras, el estimador minimáximo $\hat{x}(t)$ minimiza

$$\max \{ \Psi(x(t) - \hat{x}(t)) : \|x_0, u(\cdot), v(\cdot)\| < 1 \text{ y que den lugar a } z(s), 0 < s < t \},$$

donde $\Psi(\cdot)$ es una funcional lineal del error.

El filtro minimáximo emplea una filosofía de diseño del peor de los casos y tiene un sabor de juego te3rico. Se asume que el oponente, la Naturaleza, es perversa y escoge las incertidumbres de tal forma que se oculte el verdadero estado. La Naturaleza está restringida en la energía total que puede usar. Entonces se busca el estimado que minimiza la máxima perdida que es medida por cualquier funcional lineal del error.

Para el caso del regulador, se asume que la naturaleza al igual que en el caso del filtrado, escoge las incertidumbres, cuya energía total esta restringida, para maximizar la funcional de costo que el

regulador está tratando de minimizar usando el control óptimo el cual logra el mejor funcionamiento garantizado.

3.6 Regulador y Filtro con Incertidumbres Desconocidas pero Acotadas

Una aproximación a la solución de problemas con incertidumbres desconocidas pero acotadas fue el dado en [1] por Bertsekas y Rhodes, para sistemas descritos por ecuaciones diferenciales, el cual trata la solución del problema del filtrado, predicción y suavización en virtud de la solución del problema del regulador con sentido inverso en el tiempo, esto es solucionar el problema dual.

3.6.1 Planteamiento del Problema de Filtrado

Se considera un sistema lineal continuo en el tiempo

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad (3.1)$$

$$z(t) = C(t)x(t) + v(t), \quad (3.2)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ es la incertidumbre en la entrada, y $v(t) \in \mathbb{R}^m$ es ruido en la salida. El estado inicial $x(t_0)$ y los disturbios $u(t)$, $v(t)$ se asume desconocidos pero satisfacen la restricción de energía

$$\frac{1}{2} [x(t_0) - x_0]^T \Psi^{-1} [x(t_0) - x_0] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t [u^T(s) Q^{-1}(s) u(s) + v^T(s) R^{-1}(s) v(s)] ds < 1 \quad (3.3)$$

donde x_0 es un vector conocido, Ψ , Q , R son matrices simétricas, positivas definidas. Encuentre el conjunto de todos los posibles estados del sistema $x(t)$, que son consistentes con la restricción (3.3) y la función de salida $z(t)$.

3.6.2 Planteamiento del Problema del Regulador Generado por el Problema de Filtrado

Se considera el sistema lineal continuo (3.1) y el criterio

$$J = \frac{1}{2} [x(t_0) \quad x_0]^T \Psi^{-1} [x(t_0) \quad x_0] + \frac{1}{2} \int_t^{t_0} u^T(s) Q^{-1}(s) u(s) ds \quad (3.4)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^t [z(s) \quad C(s)x(s)]^T R^{-1}(s) [z(s) \quad C(s)x(s)] ds,$$

donde x_0 es conocido y $z(\cdot)$ es una función valuada definida en $[t_0, t]$; Ψ, Q, R son matrices simétricas, positivas definidas. Encuentre el conjunto de todas las posibles trayectorias del estado $x(s)$, $t_0 < s < t$ para los cuales

$$J^* = \min_{u(\cdot), x(t_0)} J \leq 1.$$

Nota 3.1 Este es un problema estándar de seguimiento de trayectoria dentro de la teoría de control óptimo pero en el cual el tiempo opera en sentido inverso, que es equivalente al problema de filtrado enunciado en la sección 3.6.1.

3.6.3 Solución del Problema de Filtrado

La solución [1] es el elipsoide $X(t)$ dado para toda $t \in [t_0, t]$ por

$$X(t) = \left\{ x : [x - x(t)]^T K(t) [x - x(t)] < 1 - \delta^2(t) \right\},$$

donde la matriz $K(t)$ es la solución de la ecuación de Riccati

$$\dot{K}(s) = -A^T(s)K(s) - K(s)A(s) - K(s)B(s)Q(s)B^T(s)K(s) + C^T(s)R^{-1}(s)C(s),$$

con condición inicial

$$K(t_0) = \Psi^{-1},$$

y el número real positivo $\delta^2(t)$ está dado por

$$\delta^2(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t [z(s) - C(s)x(s)]^T R^{-1}(s) [z(s) - C(s)x(s)] ds.$$

El elipsoide $X(t)$ dado para toda $t \in [t_0, t]$ también puede ser expresado por

$$X(t) = \left\{ x : [x - x(t)]^T \Sigma^{-1}(t) [x - x(t)] < 1 - \delta^2(t) \right\},$$

donde la matriz $\Sigma(t)$ es la solución de la ecuación de Riccati

$$\dot{\Sigma}(s) = A(s)\Sigma(s) + \Sigma(s)A^T(s) - \Sigma(s)C^T(s)R^{-1}(s)C(s)\Sigma(s) + B(s)Q(s)B^T(s)$$

con condición inicial

$$\Sigma(t_0) = \Psi.$$

y el estimado óptimo de \hat{x} es la solución de la ecuación diferencial lineal

$$\dot{x}(s) = A(s)x(s) + \Sigma(s)C^T(s)R^{-1}(s)[z(s) - C(s)\hat{x}(s)], \quad x(t_0) = x_0.$$

La energía de las incertidumbres está restringida por un elipsoide en el espacio $\mathbb{R}^n \times \mathbb{L}_2^p[0, T] \times \mathbb{L}_2^n[0, T]$. Debido a que cualquier función de salida medida define una variedad lineal en el espacio $\mathbb{L}_2^n[0, T]$ y puesto que la intersección de un elipsoide con una variedad lineal es también un elipsoide, el conjunto de todos los posibles estados es también un elipsoide.

3.7 Ecuación de Riccati

Existe la siguiente relación entre la ecuación de Riccati y un sistema de ecuaciones lineales. Sea $P(t, T)$ la solución de la ecuación de Riccati (con coeficientes matriciales variantes en el tiempo)

$$\dot{P} = PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q, \quad (3.5)$$

con condición límite $P(T, T) = \Psi$, y sea la ecuación lineal

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BRB^T \\ Q & A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} X(T) \\ Y(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ \Psi \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Si $X(t)$ es no-singular sobre $[t_0, T]$, la solución de (3.5) existe en $[t_0, T]$ y, además,

$$P(t, T) = Y(t)X^{-1}(t).$$

Si la solución de (3.6) existe en $[t_0, T]$, y si $\Phi(t, s) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ es la matriz de transición asociada con (3.6) y es particionada en 4 submatrices $\Phi_{ij}(t, s) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, entonces

$$P(t, T) = \Phi_{2,1}(t, T) + \Phi_{2,2}(t, T)\Psi \Phi_{1,1}^{-1}(t, T) + \Phi_{1,2}(t, T)\Psi^{-1}.$$

Resumen

En este capítulo se presentan los diferentes tipos de incertidumbres que se manejan en el campo del control, las estocásticas y las determinísticas y se hace hincapie en el hecho de que son estas últimas, las determinísticas las que van a estar presentes en los modelos a lo largo de esta tesis, así también se presenta el problema de filtrado y regulador minimáximo para sistemas expresados en forma de ecuaciones diferenciales, que posteriormente se hará válido bajo ciertas condiciones para los sistemas expresados en forma de ecuaciones integrales del capítulo siguiente.

Capítulo 4

Filtrado y Regulador Óptimo en Sistemas Integrales Continuos

En las secciones anteriores se hizo referencia a los problemas de regulador y filtrado óptimos con incertidumbres desconocidas pero acotadas, esto para sistemas descritos por ecuaciones diferenciales. Sin embargo, existen ciertos modelos que por su naturaleza no pueden ser descritos por medio de ecuaciones diferenciales sino por el contrario son modelados por ecuaciones integrales. Para este tipo de sistemas se hace necesario el presentar soluciones a los problemas de regulador y filtrado en forma análoga a los sistemas diferenciales.

4.1 Función Hamiltoniana

Dado que ahora se trata con ecuaciones del tipo integral, hay que hacer ciertas modificaciones a la función Hamiltoniana. Considérese la siguiente ecuación integral lineal :

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t A(t,s)x(s)ds + \int_{t_0}^t B(t,s)u(t,s)ds,$$

esto también se puede expresar como:

$$\int_{t_0}^t [\dot{x}(s) - A(t,s)x(s) - B(t,s)u(t,s)] ds = 0.$$

Ya que si el integrando es cero entonces la integral es cero, se puede asumir que

$$\dot{x}(s) - A(t,s)x(s) - B(t,s)u(t,s) = 0. \tag{4.1}$$

Con este sistema se asociara un indice de funcionamiento

$$J = [x(t_1) - x_0]^T \Psi^{-1} [x(t_1) - x_0] + \int_{t_0}^{t_1} L(x(s), u(t,s), t,s) ds,$$

donde $[t_0, t_1]$ es el intervalo de tiempo de interés. Introduciendo un multiplicador $\lambda(t)$ asociado, el indice de funcionamiento aumentado es el siguiente:

$$J = [x(t_1) - x_0]^T \Psi^{-1} [x(t_1) - x_0]$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \{L(x(s), u(t, s), t, s) + \lambda^T(s) [\dot{x}(s) + A(t, s)x(s) + B(t, s)u(t, s)]\} ds.$$

Si definimos la función Hamiltoniana como

$$H(x, u, \lambda, t, s) = L(x, u, t, s) + \lambda^T(s) [A(t, s)x(s) + B(t, s)u(t, s)],$$

entonces, el índice de desempeño puede expresarse como:

$$J = [x(t_0) \quad x_0]^T \Psi^{-1} [x(t_0) \quad x_0] + \int_{t_0}^{t_1} [H(x, u, \lambda, t, s) - \lambda^T(s)\dot{x}(s)] ds.$$

Esto permite, de acuerdo con el principio mínimo de Pontryagin [6], establecer las relaciones siguientes:

$$\int_{t_0}^t \left[\frac{\partial H}{\partial \lambda} - \dot{x} \right] ds = 0, \quad \int_{t_0}^t \left[\frac{\partial H}{\partial x} - \dot{\lambda} \right] ds = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial u} = 0.$$

4.2 Principio de Dualidad

Puesto que una solución para el problema de filtrado en el caso de sistemas descritos por ecuaciones diferenciales se puede obtener del sistema dual (principio de dualidad [11]) del problema del regulador. Entonces, tomando la misma aproximación para la solución del problema del filtrado en sistemas integrales, se hace necesario introducir el principio de dualidad para esta clase de sistemas.

El teorema de dualidad se enunciará enseguida.

Sea el sistema dinámico

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad (4.2)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t).$$

y el sistema dinámico

$$\dot{z}(t) = A^T(t)z(t) + C^T(t)v(t), \quad (4.3)$$

$$\hat{v}(t) = B^T(t)z(t) + D^T(t)v(t),$$

donde A^T , B^T , C^T y D^T son la transpuestas de A , B , C y D . $\Phi_a(t_0, \cdot)$ y $\Phi_b(\cdot, t_0)$ son las matrices de transición de los sistemas (4.2) y (4.3) respectivamente. El sistema (4.2) es controlable (observable) en t_1 , si y sólo si, el sistema (4.3) es observable (controlable) en t_0 .

La prueba de dicho teorema se basa en dos teoremas [11] : el de controlabilidad y el de observabilidad, los cuales, enuncian que el sistema (4.2) es controlable (observable) en t_0 , si y sólo si, existe un $t_1 > t_0$ finito, tal que los n renglones (n columnas) de las funciones matriciales $\Phi_a(t_1, \cdot)B(\cdot)$ ($C(\cdot)\Phi_b(\cdot, t_0)$) son linealmente independientes en $[t_0, t_1]$. Es entonces claro que

$$\Phi_a(t_0, t) = \Phi_b^T(t, t_0).$$

Puesto que dichos teoremas basan sus pruebas en la solución general de la ecuación (4.2) y dado que la solución general de una ecuación como (4.2) se puede escribir de la forma siguiente:

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau,$$

se propone una fórmula semejante

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(t, \tau)u(t, \tau)d\tau, \quad (4.4)$$

para la solución de la ecuación integral de tipo Volterra

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t A(t, s)x(s)ds + \int_{t_0}^t B(t, s)u(t, s)ds. \quad (4.5)$$

El procedimiento que se sigue para llegar a asegurar que este resultado es correcto, es el siguiente.

Sea $v(t)$ una matriz fundamental de $x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t A(t, s)x(s)ds$, que satisface

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t A(t, s)v(s)ds,$$

entonces, $\Phi(t, t_0) = v(t)v^{-1}(t_0)$, para todo t, t_0 en $(-\infty, \infty)$, se dice que es la matriz de transición de $x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t A(t, s)x(s)ds$, de ahí que

$$\Phi(t, t_0) = I + \int_{t_0}^t A(t, s)\Phi(s, t_0)ds. \quad (4.6)$$

Tomando (4.6) y sustituyéndola en (4.4) se tiene que

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t A(t, s)\Phi(s, t_0)x_0 ds + \int_{t_0}^t B(t, \tau)u(t, \tau)d\tau \\ + \int_{t_0}^t \int_{\tau}^t A(t, s)\Phi(s, \tau)B(t, \tau)u(t, \tau)dsd\tau.$$

Dado que se trata de un sistema relajado [11] en t_0 , entonces la última integral es igual a cero para $\tau = t_0$, por lo cual se puede cambiar el límite inferior τ por t_0 , esto permite agrupar términos:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t B(t, \tau)u(t, \tau)d\tau \\ + \int_{t_0}^t A(t, s) \left[\Phi(s, t_0)x_0 + \int_{t_0}^s \Phi(s, \tau)B(t, \tau)u(t, \tau)d\tau \right] ds.$$

Ya que el sistema es causal entonces podemos poner en el límite superior s en lugar de t , en la integral que se encuentra dentro del paréntesis, de esta manera se obtiene la ecuación inicial (4.5). Por lo tanto, la fórmula (4.4) se puede considerar como solución general de la ecuación (4.5). Entonces también se puede introducir y usar la función de transición de estados para la ecuación en forma integral (4.5) como para la ecuación en forma diferencial (4.2). Dado este hecho por sentado se puede tomar el teorema de Dualidad (el cual se basa en los teoremas de controlabilidad y observabilidad) como válido también para los sistemas que están representados por ecuaciones de tipo Volterra, en la forma siguiente.

Considere los sistemas integrales de tipo Volterra:

$$x(t) = x(t_0) + \int_t^t A(t, s)x(s)ds + \int_t^t B(t, s)u(t, s)ds, \quad (4.7)$$

$$y(t) = \int_t^t C(t, s)x(s)ds + \int_t^t D(t, s)u(t, s)ds,$$

y

$$z(t) = z(t_0) + \int_t^t -A^T(t, s)z(s)ds + \int_t^t C^T(t, s)v(t, s)ds, \quad (4.8)$$

$$\gamma(t) = \int_t^t B^T(t, s)z(s)ds + \int_t^t D^T(t, s)v(t, s)ds.$$

El sistema (4.7) es controlable (observable) en t_0 , si y sólo si el sistema (4.8) es observable (controlable) en t_0 .

4.3 Problema de Filtrado Óptimo

4.3.1 Planteamiento del Problema de Filtrado Óptimo

Considere el sistema lineal :

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t A(t, s) x(s) ds + \int_{t_0}^t B(t, s) u(t, s) ds, \quad (4.9)$$

$$y(t) = C(t) x(t) + v(t), \quad (4.10)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema, $u(t, s) \in \mathbb{R}^p$ es la incertidumbre en la entrada, $v(t) \in \mathbb{R}^m$ es el ruido en la salida y las matrices $A(t, s)$, $B(t, s)$, $C(t)$ tienen las dimensiones apropiadas. Las incertidumbres se consideran desconocidas con la salvedad que satisfacen la restricción siguiente:

$$\frac{1}{2} [x(t_0) - x_0]^T \Psi^{-1} [x(t_0) - x_0] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t [u^T(t, s) R(t, s) u(t, s) + v^T(s) Q(s) v(s)] ds < 1, \quad (4.11)$$

donde x_0 es un vector de dimensión n dado, Ψ , R , Q son matrices positivas definidas.

El problema consiste en encontrar el conjunto de todos los posibles estados que son consistentes con la restricción (4.11) y la ecuación de salida del sistema.

4.3.2 Planteamiento del Problema de Regulador Óptimo Generado por el Problema de Filtrado

Considere el sistema lineal (4.9). Sustituyendo (4.10) en (4.11) nos da $x(t)$ si y solo si existe un vector $x(t_0)$ y una función $u(t, s)$ definida en $[t_0, t]$ tal que:

$$J[x, t; u, x(t_0)] < 1, \quad (4.12)$$

sujeto al sistema (4.9) y la restricción (4.11), donde $J[x, t; u, x(t_0)]$ está definido como

$$J[x, t; u, x(t_0)] \triangleq \frac{1}{2} [x(t_0) - x_0]^T \Psi^{-1} [x(t_0) - x_0] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t u^T(t, s) R(t, s) u(t, s) ds$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^t [y(s) \quad C(s)x(s)]^T Q(s) [y(s) \quad C(s)x(s)] ds. \quad (4.13)$$

El problema es encontrar el control $u(t, s)$ que satisface la restricción (4.12) y minimiza el criterio (4.13).

Es claro que existen los valores de $u(t, s)$ y $x(t_0)$ requeridos que satisfacen (4.12) si y sólo si:

$$J^* [x, t] \triangleq \min_{u(\cdot)} J [x, t; u, x(t_0)] \leq 1,$$

sujeto al sistema (4.9).

4.3.3 Solución del Problema de Regulador Óptimo

Tomando en consideración las ecuaciones de la sección 4.1, se puede enunciar lo siguiente:

$$\int_{t_0}^t \frac{\partial H(t)}{\partial x} dt \quad \lambda(t_0) \quad \lambda(t) \Rightarrow$$

$$\int_t^t [C^T(s)Q(s)y(s) + C^T(s)Q(s)C(s)x(s) + A^T(t, s)\lambda(s)] ds - \lambda(t_0) \quad \lambda(t), \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow R(t, s)u(t, s) + B^T(t, s)\lambda(s) = 0.$$

Por lo tanto la ley de control es

$$u^*(t, s) = -R^{-1}(t, s)B^T(t, s)\lambda(s). \quad (4.15)$$

Por linealidad del problema asuma que

$$\lambda(t) = -P(t)x(t), \quad (4.16)$$

dado que $\lambda(t_0) = -\Psi^{-1}x(t_0)$, entonces $P(t_0) = \Psi^{-1}$.

Sustituyendo (4.16) en (4.14), se obtiene

$$0 = \int_t^t [-C^T(s)Q(s)y(s) + C^T(s)Q(s)C(s)x(s) - A^T(t, s)P(s)x(s)] ds - P(t)x(t) + P(t_0)x(t_0).$$

Derivando con respecto al tiempo se tiene

$$0 = -C^T(t)Q(t)y(t) + C^T(t)Q(t)C(t)x(t) - \frac{d}{dt} \int_t^t A^T(t, s)P(s)x(s) ds$$

$$-\dot{P}(t)x(t) - P(t)\dot{x}(t).$$

Reescribiendo en forma integral

$$0 = \int_{t_0}^t [-C^T(s)Q(s)y(s) + C^T(s)Q(s)C(s)x(s)] ds - \int_{t_0}^t A^T(t,s)P(s)x(s)ds \\ - \int_{t_0}^t \dot{P}(s)x(s)ds - \int_{t_0}^t P(s)\dot{x}(s)ds.$$

y sustituyendo la relación (4.1) en la ecuación anterior, se obtiene:

$$0 = \int_{t_0}^t [-C^T(s)Q(s)y(s) + C^T(s)Q(s)C(s)x(s)] ds - \int_{t_0}^t A^T(t,s)P(s)x(s)ds \\ - \int_{t_0}^t \dot{P}(s)x(s)ds - \int_{t_0}^t P(s)[A(t,s)x(s) + B(t,s)u(t,s)] ds.$$

Sustituyendo el control u^* dado por (4.15)

$$0 = \int_{t_0}^t [-C^T(s)Q(s)y(s) + C^T(s)Q(s)C(s)x(s)] ds - \int_{t_0}^t A^T(t,s)P(s)x(s)ds \\ - \int_{t_0}^t \dot{P}(s)x(s)ds - \int_{t_0}^t P(s)[A(t,s)x(s) + B(t,s)R^{-1}(t,s)B^T(t,s)P(s)x(s)] ds,$$

derivando con respecto a x

$$0 = \int_{t_0}^t C^T(s)Q(s)C(s)ds - \int_{t_0}^t A^T(t,s)P(s)ds \\ - \int_{t_0}^t \dot{P}(s)ds - \int_{t_0}^t P(s)[A(t,s) + B(t,s)R^{-1}(t,s)B^T(t,s)P(s)] ds,$$

y agrupando, tenemos

$$0 = \int_{t_0}^t [C^T(s)Q(s)C(s) - A^T(t,s)P(s) - \dot{P}(s) - P(s)A(t,s)] ds \\ - \int_{t_0}^t P(s)B(t,s)R^{-1}(t,s)B^T(t,s)P(s)ds.$$

Por lo tanto,

$$P(t) = \Psi^{-1} + \int_t^T [C^T(s)Q(s)C(s) - A^T(t,s)P(s)] ds + \quad (4.17)$$

$$\int_t^t [-P(s)A(t, s) - P(s)B(t, s)R^{-1}(t, s)B^T(t, s)P(s)] ds,$$

con la condición límite $P(t_0) = \Psi^{-1}$.

En la cual se puede reconocer la ecuación de Riccati bajo el signo de la integral. Por lo que podemos escribir que la solución explícita al problema del regulador óptimo es la siguiente: la ley de control $u^*(t, s) = R^{-1}(t, s)B^T(t, s)P(s)x(s)$, donde $P(s)$ es la solución de la ecuación integral de Riccati (4.17).

4.3.4 Solución del Problema de Filtrado Óptimo

Si tomamos las relaciones que se presentan en la sección 4.2 sobre la dualidad que existe entre los problemas de filtrado y reguladores, tenemos que el sistema dual del sistema (4.9) es

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t_0) + \int_{t_0}^t -A^T(t, s)x(s)ds + \int_{t_0}^t C^T(t, s)u(t, s)ds, \\ y(t) &= B^T(t)x(t) + v(t). \end{aligned}$$

y considerando el criterio

$$\begin{aligned} J[x, t; u, x(t_0)] &\triangleq \frac{1}{2} [x(t_0) - x_0]^T \Psi [x(t_0) - x_0] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t u^T(t, s)Q^{-1}(s)u(t, s)ds \\ &+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^t [y(s) - B^T(s)x(s)]^T R^{-1}(t, s) [y(s) - B^T(s)x(s)] ds, \end{aligned} \quad (4.18)$$

el control u^* está dado de la siguiente manera:

$$u^*(t, s) = Q(s)C(t, s)S(s)x(s). \quad (4.19)$$

Por lo tanto, referenciando a las ecuaciones (4.9),(4.10) y el criterio (4.11), la solución del problema de filtrado es el elipsoide $X(t)$, descrito como

$$X(t) = \left\{ x(t) : [x(t) - \hat{x}(t)]^T S^{-1}(t) [x(t) - \hat{x}(t)] < 1 - \beta^2(t) \right\},$$

donde $S(t)$ es la solución de la ecuación integral de Riccati

$$S(t) = \Psi + \int_t^t [B(t, s)R^{-1}(t, s)B^T(t, s) + A(t, s)S(s)] ds + \quad (4.20)$$

$$\int_{t_0}^t [S(s)A^T(t,s) - S(s)C^T(s)Q(s)C(s)S(s)] ds,$$

con la condición límite de $S(t_0) = \Psi$, y el número real positivo β^2 dado como

$$\beta^2(t) = \frac{1}{2} \int_t^T [y(s) - C(s)x(s)]^T Q(s) [y(s) - C(s)x(s)] ds.$$

De acuerdo con el principio de dualidad, de (4.19) la ganancia óptima del filtro es:

$$M^*(t,s) = S(s)C^T(s)Q(s)$$

y el estimado óptimo $x(t)$ es generado por el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t A(t,s)x(s)ds + \int_{t_0}^t B(t,s)u(s)ds + \\ + \int_{t_0}^t S(s)C^T(s)Q(s)[y(s) - C(s)\hat{x}(s)] ds. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Ejemplo 4.1 Considere el siguiente sistema

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{4}x(t) + \int_0^t \frac{2}{(t-s+2)^2}x(s)ds + \int_0^t \frac{2}{(s+2)^2}u(s)ds, \quad (4.22)$$

$$y(t) = x(t) + \sin(10t), \quad (4.23)$$

con la restricción siguiente:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ x_0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \int_0^t [u^T(s)u(s) + r^T(s)(3.5)r(s)] ds < 1, \quad (4.24)$$

encuentre el filtro óptimo. La solución de la ecuación (4.22) para una $u(s) = \frac{1}{s+2}$ es dada en la tabla siguiente (ver Fig. 1, pag. 28) la cual, nos muestra que conforme se incrementa t , $x(t)$ decae a cero. Así el estimado de $x(t)$ dada la observación (4.23) y la restricción (4.24) se puede obtener mediante las ecuaciones (4.21) y (4.20), quedando expresado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x(t) = \frac{1}{4} + \int_0^t \frac{2}{t-s+2)^2} \hat{x}(s) ds + \int_0^t \frac{2}{(s+2)^2} u(s) ds \\ + \int_0^t S(s) [y(s) - r(s)] ds, \end{aligned}$$

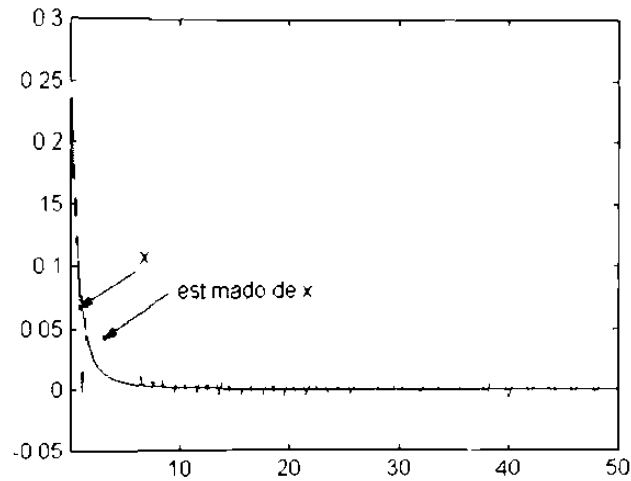


Fig. 4 Estimado óptimo \hat{x} (ejemplo 4.1)

$$S(t) = 1 + \int_0^t \left\{ \left[\frac{2}{(s+2)^2} \right]^2 + \frac{4}{(s+2)^2} S(s) - 3.5S^2(s) \right\} ds.$$

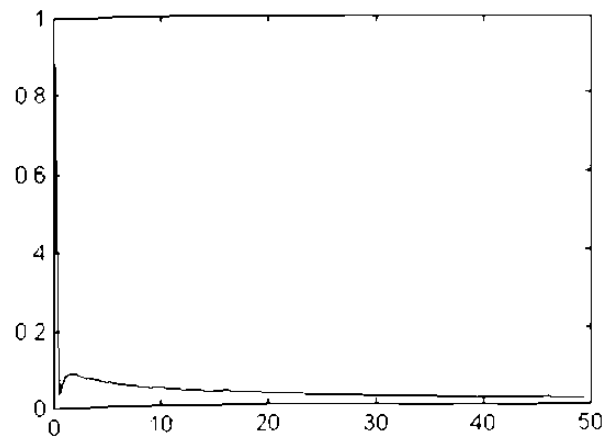


Fig. 5 $S(t)$ solución de la ecuación de 'Riccati' integral (ejemplo 4.1)

Nota 4.1 El procedimiento para obtener las gráficas anteriores se basa en los métodos de cuadratura que se mencionan en el Capítulo 2. además se presenta dicho procedimiento en MatLab 5.3 en el Apéndice A.

4.4 Regulador y Filtro Óptimo con Observaciones de Tipo Integral

4.4.1 Planteamiento del Problema de Filtrado Óptimo

Considere el sistema lineal:

$$\begin{aligned}x(t) &= x(t_0) + \int_{t_0}^t A(t, s) x(s) ds + \int_{t_0}^t B(t, s) u(t, s) ds, \\y(t) &= \int_{t_0}^t C(t, s) x(s) ds + \int_{t_0}^t G(t, s) v(t, s) ds,\end{aligned}\quad (4.25)$$

donde $x(t) \in R^n$ es el estado del sistema, $u(t, s) \in R^p$ es la incertidumbre en la entrada, $v(t, s) \in R^m$ es el ruido en la salida y las matrices $A(t, s)$, $B(t, s)$, $C(t, s)$, $G(t, s)$ tienen las dimensiones apropiadas. Las incertidumbres se consideran desconocidas con la salvedad que satisfacen la restricción siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} [x(t_0) \quad x_0]^T \Psi^{-1} [x(t_0) \quad x_0] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t u^T(t, s) R(t, s) u(t, s) ds \\+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^t v^T(t, s) G^T(t, s) Q(t, s) G(t, s) v(t, s) ds \leq 1,\end{aligned}\quad (4.26)$$

donde x_0 es un vector n dado, Ψ , R , Q son matrices positivas definidas.

El problema consiste en encontrar el conjunto de todos los posibles estados que son consistentes con la restricción (4.26) y la ecuación de salida del sistema.

4.4.2 Solución del Problema de Regulador Óptimo

Se hará la misma aproximación que para el caso anterior, para lo cual, se resolverá primero el problema del regulador generado por el problema de filtrado y después se solucionará el del filtrado de manera análoga.

Del mismo modo que en la subsección 4.1, la ecuación (4.25) resulta:

$$\dot{y}(s) - C(t, s)x(s) - G(t, s)v(t, s) = 0. \quad (4.27)$$

Despejando $G(t, s)v(t, s)$ de (4.27) y sustituyendo en (4.26), podemos reescribir la restricción de

la siguiente manera:

$$J[x, t; u, x(t_0)] \triangleq \frac{1}{2} [x(t_0) \quad x_0]^T \Psi^{-1} [x(t_0) - x_0] + \frac{1}{2} \int_t^t u^T(t, s) R(t, s) u(t, s) ds \\ + \frac{1}{2} \int_t^t [\dot{y}(s) - C(t, s)x(s)]^T Q(t, s) [\dot{y}(s) - C(t, s)x(s)] ds.$$

Utilizando las mismas relaciones que en la subsección 4.1, tenemos:

$$\int_t^t [C^T(t, s)Q(t, s)\dot{y}(s) + C^T(t, s)Q(t, s)C(t, s)x(s) + A^T(t, s)\lambda(s)] ds - \lambda_0 - \lambda(t).$$

Y siguiendo el mismo procedimiento ya visto se tiene que

$$u^*(t, s) = R^{-1}(t, s)B^T(t, s)P(s)x(s),$$

donde $P(t)$ es la solución de la ecuación de Riccati siguiente:

$$P(t) = \Psi^{-1} + \int_{t_0}^t [C^T(t, s)Q(t, s)C(t, s) - A^T(t, s)P(s)] ds + \quad (4.28) \\ \int_{t_0}^t [P(s)A(t, s) - P(s)B(t, s)R^{-1}(t, s)B^T(t, s)P(s)] ds.$$

4.4.3 Solución del Problema de Filtrado Óptimo

De la misma manera que se procedió en la sección anterior se tiene que el control para el sistema dual es :

$$u^*(t, s) = Q(t, s)C^T(t, s)S(s)x(s).$$

Por lo tanto la solución del problema de filtrado es el elipsoide $X(t)$ siguiente

$$X(t) = \left\{ x(t) : [x(t) - \hat{x}(t)]^T S^{-1}(t) [x(t) - \hat{x}(t)] < 1 - \beta^2(t) \right\},$$

donde $S(t)$ es la solución de la ecuación integral de Riccati

$$S(t) = \Psi + \int_t^t [B(t, s)R^{-1}(t, s)B^T(t, s) + A(t, s)S(s)] ds + \\ \int_t^t [S(s)A^T(t, s) - S(s)C^T(t, s)Q(t, s)C(t, s)S(s)] ds.$$

con la condición límite de $S(t_0) = \Psi$. y el número real positivo β^2 dado como

$$\beta^2(t) = \frac{1}{2} \int_t^t [\dot{y}(s) \quad C(t, s)x(s)]^T Q(t, s) [\dot{y}(s) \quad C(t, s)x(s)] ds.$$

Obsérvese que la ganancia óptima del filtro es

$$M^*(t, s) = S(s)C^T(t, s)Q(t, s),$$

y el estimado óptimo $x(t)$ es generado por el siguiente sistema:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t A(t, s)x(s)ds + \int_{t_1}^t B(t, s)u(t, s)ds + \int_{t_1}^t S(s)C^T(t, s)Q(t, s) [\dot{y}(s) \quad C(t, s)\hat{x}(s)] ds.$$

Resumen

Aquí en este capítulo se presentan los problemas de filtrado y regulador óptimo en sistemas integrales continuos, se plantea la función Hamiltoniana para sistemas integrales y se presenta la validez del principio de dualidad para los sistemas integrales, lo cual aunado con los conceptos de los capítulos anteriores permite encontrar la solución a dichos problemas. Primero se presenta la solución al problema de filtrado óptimo para un sistema en donde el estado está expresado en forma de ecuación integral del tipo Volterra mas no así la de salida y después se presenta la solución al problema de filtrado y regulador óptimo con observaciones integrales de tipo Volterra.

Capítulo 5

Vibrosoluciones

5.1 Una Introducción a la Teoría de Funciones Generalizadas

Un número considerable de problemas físicos requieren de un concepto más extendido de "función". Supóngase el caso cuando se quiere introducir la idea de cargas puntuales (en electrostática), se pretende que dado un cuerpo cargado caracterizado por su distribución de carga, dada por una función de densidad D , integrando sobre todo el volumen de la fuente se obtenga la carga total, por su parte la carga puntual corresponde a que mientras $V \rightarrow 0$ donde V es el volumen, la carga permanezca constante. Por lo tanto, mientras $V \rightarrow 0$, D se incrementa más como en un pico, es decir se va desvaneciendo en todos lados excepto en un punto. Tal definición no corresponde a lo que se conoce como "función", por lo que es necesario la idea de funciones generalizadas. Las funciones generalizadas nos permiten manipular una secuencia de funciones, tratando a esta secuencia como entidades matemáticas, y manejarlas en una manera similar a las funciones ordinarias.

5.1.1 Espacio Fundamental y Funciones Generalizadas

Sea \mathbb{K} el conjunto de todas las funciones finitas φ definidas sobre $(-\infty, \infty)$ con derivadas continuas de todos los ordenes, donde cada función $\varphi \in \mathbb{K}$ finita se desvanece al exterior de algún intervalo. Si \mathbb{K} está equipado con las operaciones adición y multiplicación escalar, entonces, \mathbb{K} forma un espacio lineal y la convergencia en este espacio está dada por la siguiente definición.

Definición 5.1 Una sucesión $\{\varphi_n\}$ de funciones en \mathbb{K} se dice que converge a una función $\varphi \in \mathbb{K}$ (denotado por $\varphi_n \rightarrow \varphi$), si:

- a) Existe un intervalo fuera del cual, todas las funciones φ_n se desvanecen.
- b) La secuencia $\{\varphi_n^{(k)}\}$ de derivadas de orden k convergen uniformemente a $\varphi^{(k)}$ sobre su intervalo para toda $k = 0, 1, 2, \dots$

Al espacio lineal \mathbb{K} equipado con esta clase de convergencia se le conoce como el *espacio*

fundamental, y a las funciones $\varphi \in \mathbb{K}$ se les llama *funciones fundamentales*.

Definición 5.2 Toda funcional lineal continua $T(\varphi)$ definida sobre el espacio fundamental \mathbb{K} es llamada una función generalizada sobre $(-\infty, \infty)$, donde la continuidad de $T(\varphi)$ establece que cuando $\varphi_n \rightarrow \varphi$ en \mathbb{K} implica que $T(\varphi_n) \rightarrow T(\varphi)$.

Sea $f(x)$ una función integrable sobre cada intervalo finito ($f(x)$ es *localmente integrable*). Entonces, $f(x)$ genera una función generalizada a través de expresión:

$$T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx. \quad (5.1)$$

Las funciones generalizadas de la forma de (5.1) son clasificadas como *regulares*, y aquellas de estructura diferente como *singulares*.

Ejemplo 5.1 La "función delta"

$$T(\varphi) = \varphi(0),$$

es una funcional lineal continua definida sobre \mathbb{K} con estructura singular. No obstante, se puede representar como

$$T(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx,$$

donde $\delta(x)$ es una función ficticia nula excepto cuando $x = 0$, tal que,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1,$$

por lo tanto, se puede expresar formalmente que

$$T(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = \varphi(0).$$

5.1.2 Operaciones sobre las Funciones Generalizadas

Las operaciones definidas para las funciones generalizadas son similares a las definidas en el análisis convencional.

- i) Adición de funciones generalizadas,
- ii) Multiplicación de una función generalizada por una función regular,
- iii) Diferenciación de una función generalizada,

Asuma que la derivada de f existe y que es localmente integrable. Entonces, la derivada de una función regular generalizada está dada por

$$\frac{dT}{dx}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{f}(x)\varphi(x)dx. \quad (5.2)$$

Integrando (5.2) por partes y usando el hecho de que cada función φ se desvanece al exterior de algún intervalo infinito, se obtiene que

$$\frac{dT}{dx}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \dot{\varphi}(x)dx, \quad (5.3)$$

la cual, es una expresión para $\frac{dT}{dx}$ que no involucra la derivada de f .

Extendiendo (5.3) al caso singular, resulta que derivada $\frac{dT}{dx}$ es la funcional definida por la fórmula:

$$\frac{dT}{dx}(\varphi) = T(\dot{\varphi}), \quad (5.4)$$

donde el lado derecho de (5.4) es una funcional lineal continua y es por si misma una función generalizada.

iv) Cambio Lineal de Argumento.

Definición 5.3 Una sucesión de funciones generalizadas $\{T_n\}$ se dice que converge a una función generalizada T si $T_n(\varphi) \rightarrow T(\varphi) \forall \varphi \in \mathbb{K}$. El espacio de funciones generalizadas con esta noción de convergencia se denota por \mathbb{K}^* . Este modo de convergencia es la convergencia estrella débil [30] de las funcionales lineales continuas sobre \mathbb{K} .

Ejemplo 5.2 Considere la función Heaviside o función escalón:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ 1, & \text{si } x > 0, \end{cases} \quad (5.5)$$

definiendo la funcional lineal

$$T(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x) dx = \int_0^{\infty} \varphi(x)dx,$$

de la definición de (5.4),

$$\frac{dT}{dx}(\varphi) = \int_0^{\infty} \dot{\varphi}(x)dx = -\varphi(0),$$

por lo tanto, la derivada de (5.5) es la función delta

5.1.3 Ecuaciones Integrales en Distribuciones

Considerando que φ es una función fundamental en \mathbb{K} , entonces, la ecuación

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(x, u, t, s) ds + b(x, u, t, s) du(s), \quad (5.6)$$

se satisface en el estricto sentido de que $\forall \varphi \in \mathcal{C}_{-\infty, \infty}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s) dx(s) - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{t_0}^t f(x, u, t, s) \varphi(s) ds dt + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{t_0}^t b(x, u, t, s) \varphi(s) du(s) dt, \quad (5.7)$$

donde $f(x, u, t)$ y $b(x, u, t)$ son funciones continuas por partes con respecto todos sus argumentos y $u(t)$ es una función de variación acotada. A la ecuación de la clase de (5.6) se le conoce como *ecuación integral en distribuciones*.

5.2 Vibrosoluciones para Ecuaciones Integrales en Distribuciones con Funciones Regulares Discontinuas sobre el Lado Derecho

Considere una ecuación integral de la forma

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(x, u, t, s) ds + b(x, u, t, s) du(s), \quad (5.8)$$

donde $f(x, u, t, s)$ y $b(x, u, t, s)$ son funciones continuas por partes en las variables abstractas (x, u, t, s) ; y $u(t) \in \mathbb{R}$ es una función de variación acotada escalar no decreciente. La solución de la ecuación es introducida como sigue.

Definición 5.4 La función continua por la izquierda $x(t)$ se dice que es una vibrosolución de la ecuación (5.8), si la convergencia *estrella-débil* de una secuencia arbitraria de funciones no decrecientes absolutamente continuas $u^k(t) \in R$ a una función no decreciente $u(t) \in R$ en el espacio de variación acotada

$$* \quad \lim_{k \rightarrow \infty} u^k(t) = u(t), t > t_0$$

implica la convergencia análoga

$$* \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x^k(t) = x(t), t > t_0$$

de las correspondientes soluciones $x^k(t)$ de la ecuación

$$x^k(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(x^k, u^k, t, s) ds + b(x^k, u^k, t, s) du^k(s).$$

y el único límite $x(t)$ es independiente de la secuencia de aproximación $\{u^k(t)\}$, $k = 1, 2, \dots$ que se seleccione.

Teorema 5.1 Si $w \in R$ y $z \in R^n$, condiciones iniciales arbitrarias, y $s \geq t_0$, satisfacen:

- i) Las funciones $f(x, u, t, s)$, $b(x, u, t, s)$, $\partial b(x, u, t, s) / \partial x$ y $\partial b(x, u, t, s) / \partial t$ son continuas por partes en (x, u, t, s) y sus dominios continuamente localmente conectados;
- ii) las funciones $f(x, u, t, s)$ y $b(x, u, t, s)$ satisfacen (excepto para sus conjuntos de límites con medida cero), un lado de la condición de Lipschitz en x ,

$$\begin{aligned} (x - y) \cdot (f(x, u, t, s) - f(y, u, t, s)) &< L_1(t, u)(x - y)^2, \\ (x - y)^T (b(x, u, t, s) - b(y, u, t, s)) &< L_2(t, u)(x - y)^2. \end{aligned}$$

entonces, la ecuación (5.8) tiene una vibrosolución.

Demostración: Por las condiciones del Teorema, la ecuación (5.8) tiene una única solución absolutamente continua sobre los intervalos continuos de la función $u(t)$. Más aun esta solución absolutamente continua es una vibrosolución, en vista del teorema de convergencia acotada de Lebesgue [30] que establece la existencia del límite requerido en la definición de una vibrosolución en los intervalos continuos de $u(t)$. Por lo tanto, solo queda probar la existencia de la vibrosolución (5.8) en las vecindades de los puntos de discontinuidad de la función $u(t)$.

Suponga que el teorema 5.1 se satisface, entonces, el sistema

$$\frac{d\xi}{du} = b(\xi, u, t, t), \quad \xi(\omega) = z, \quad (5.9)$$

tiene una solución $\xi(z, w, v, t)$ para $t > t_0$. Se busca una solución para (5.8) correspondiente a la función no decreciente $u(t)$ en la forma

$$x(t) = \xi(z(t), u_0, u(t), t), \quad (5.10)$$

donde $u_0 = u(t_0)$ y $u(t) \geq u_0$.

Acorde a la definición del sistema (5.9), la expresión (5.10) implica la existencia de

$$x(t) = z(t) + \int_{u_0}^{u(t)} b(\xi(v), v, t, t) dv.$$

o de

$$x(t) = z(t) + \int_0^T b(z(t) + y(r), u_0 + w(r), t, t) w(r) dr, \quad (5.11)$$

donde $T = t - t_0$ es el tiempo en el que la trayectoria del sistema (5.9) alcanza el punto $x(t)$. y $y(r)$ es la solución de (5.9) correspondiente a la función no decreciente $w(r) - u(r) = u_0$.

De la ecuación (5.11), tomando en cuenta que $u(t)$ es una función escalar, se tiene que

$$x(t) = z(t) - \int_T^0 b(z(t) + y(r), u_0 + w(r), t, t) w(r) dr. \quad (5.12)$$

Entonces, la ecuación (5.12) se puede escribir en la forma

$$z(t) = x(t) + \int_t^{u_0} b(z(t) + y(r), u_0 + w(r), t, t) w(r) dr,$$

esto es,

$$z(t) = x(t) + \int_{u(t)}^{u_0} b(\xi(r), r, t, t) dr. \quad (5.13)$$

De la representación (5.13), así como en [41], la fórmula de inversión

$$z(t) = \xi(x(t), u(t), u_0, t) \quad (5.14)$$

es válida si $u(t) > u_0$. En particular, de (5.14), $z(t_0) = x(t_0) = x_0$.

Basado en la existencia de las derivadas $\partial \xi / \partial z$, $\partial \xi / \partial t$, $\partial \xi / \partial u$, y la solución de (5.9), se mostrará que $z(t)$ satisface la siguiente ecuación con discontinuidades sobre el lado derecho:

$$z = \varphi(z(t), u_0, u(t), t), \quad z(t_0) = x_0, \quad (5.15)$$

donde,

$$\varphi(z, u_0, u, t) = \frac{\partial \xi(\xi(z, u), u, t), u, u_0, t)}{\partial z} f(\xi(z, u), u, t, t) + \frac{\partial \xi(\xi(z, u), u, t), u, u_0, t)}{\partial t}.$$

En vista de que $\partial \xi / \partial z$, f y $\partial \xi / \partial u$ son continuas, la función $\varphi(z, u_0, u, t)$ también es continua; consecuentemente (5.15) tiene solución.

Sea $u^k(t)$, $k = 1, 2, \dots; * \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(t) = u(t)$, cuando $k \rightarrow \infty$, $t > t_0$; una secuencia de funciones absolutamente continuas convergiendo a $u(t)$ en el sentido topológico estrella débil del espacio de las funciones de variación acotada. La ecuación (5.8) con funciones $u^k(t)$ sobre el lado derecho se

convierte en una ecuación integral sin integrar con respecto a una medida discontinua:

$$x^k(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(x^k, u^k, t, s) ds + b(x^k, u^k, t, s) du^k(s), \quad (5.16)$$

Por las condiciones *i)* y *ii)* de este Teorema resulta que existe una única solución para (5.16).

Además, de (5.14) se tiene que

$$\xi(x^k(t), u^k(t), u_0, t) = z^k(t)$$

es la única solución para la ecuación

$$z^k(t) = \varphi(z^k(t), u_0, u^k(t), t), \quad z^k(t_0) = x_0. \quad (5.17)$$

Sea $\ast \lim_{k \rightarrow \infty} u^k(t) = u(t)$, cuando $k \rightarrow \infty, t > t_0$. Entonces, del teorema de la dependencia continua de la solución sobre el lado derecho [40], el $\ast - \lim_{k \rightarrow \infty} z^k(t) = z^*(t)$, cuando $k \rightarrow \infty, t > t_0$, donde $z^*(t)$ es la solución de (5.15). También, esta solución es única, puesto que las soluciones $z^k(t)$ para (5.17) son únicas para las funciones $u^k(t)$. De este modo, $z^*(t)$ es una vibrosolución para la ecuación (5.15). Debido a que el mapeo (5.10) es continuo y uno a uno, entonces, $x^*(t) \triangleq \xi(z^*(t), u_0, u(t), t)$ es la vibrosolución deseada para (5.8). Aún más, $\sup_k V_{t_0}^t x^k(t) < \infty$, para $t > t_0$, ya que las variaciones de las funciones $z^k(t)$ y $u^k(t)$ son uniformemente acotadas en virtud de la convergencia

$$\ast \lim_{k \rightarrow \infty} u^k(t) = u(t), \quad \ast \lim_{k \rightarrow \infty} z^k(t) = z^*(t), \quad t \geq t_0,$$

en la topología estrella débil del espacio de las funciones de variación acotada. ■

tal y como se establece en [39, 41], sólo las funciones $x^k(t)$ que corresponden a las funciones $u^k(t)$ absolutamente continuas son las soluciones clásicas para las ecuaciones diferenciales en distribuciones de la forma (5.8). Además, no es claro cómo pueden interpretarse los saltos de la vibrosolución en los puntos de discontinuidad de la función no decreciente $u(t)$, dado que la integral

$$\int_{t_0}^t b(x(s), u(s), t, s) du(s)$$

no puede definirse en la forma ordinaria de la integral de Lebesgue-Stieltjes [30]. Por lo tanto, parece ser apropiado obtener una ecuación con medida equivalente a la vibrosolución de (5.8) como una solución ordinaria que permita el cálculo explícito de los saltos en los puntos de discontinuidad de $u(t)$.

Teorema 5.2 *Asuma que las condiciones de teorema 5.1 se satisfacen. Entonces, la solución de la ecuación integral con medida*

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(x, u, t, s) ds + b(x, u, t, s) du_c(s) + \sum_{t_i} G(x(t_i-), u(t_i-), \Delta u(t_i), t_i) d\chi(t-t_i),$$

$i = 0, 1, \dots$, coincide con la vibrosolución de (5.8), tal que,

$$G(z, w, u, s) = \xi(z, w, w + u, s) - z,$$

donde la función $\xi(z, w, u, s)$, $s \geq t_0$, es la solución del sistema (5.9); $u_c(t)$ es el componente continuo de la función no decreciente $u(t)$; y $\Delta u(t_i) = u(t_i+) - u(t_i-)$ son los saltos de $u(t)$ en sus puntos de discontinuidad t_i . $\mathcal{X}(t - t_i)$ es la función Heaviside.

Demostración: la demostración es similar a la prueba del teorema 3 de la referencia [41] para una vibrosolución de una ecuación diferencial ordinaria en distribuciones. La prueba puede ser seguida usando el Teorema de existencia y unicidad para la solución de una ecuación integral de tipo Volterra en vez de usar la solución de una ecuación diferencial ordinaria. ■

Resumen

En este capítulo se recuerda la teoría de vibrosoluciones para ecuaciones integrales en distribuciones, para su posterior aplicación en la solución de los problemas que se plantean en el capítulo siguiente.

Capítulo 6

Filtrado y Regulador Óptimo en Sistemas Integrales Discontinuos

En la práctica las observaciones discretas-continuas son útiles para unir en el procesamiento de señales aquellas que son continuas y las mediciones discretas independientes de las continuas. En el caso del regulador, las discontinuidades se pueden interpretar como un control discontinuo que introduce dichas discontinuidades en el sistema haciendo que los estados se también se hagan discontinuos como en un relevador, etc.

6.1 Filtrado para Sistemas Integrales sobre Observaciones Discontinuas

6.1.1 Planteamiento del Problema del Filtrado Óptimo sobre Observaciones Discontinuas

Considere el sistema lineal:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t A(t, s) x(s) ds + \int_{t_0}^t B(t, s) u(t, s) ds, \quad (6.1)$$

y observaciones discontinuas

$$y(t) = \int_{t_0}^t C(t, s) x(s) dw(s) + \int_{t_0}^t G(t, s) v(t, s) dw(s), \quad (6.2)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema, $u(t, s) \in \mathbb{R}^p$ es la incertidumbre en la entrada, $u(t)$ es una función escalar de variación acotada, $v(t, s) \in \mathbb{R}^m$ es el ruido en la salida, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ son las observaciones discontinuas en virtud de $u(t)$, las matrices $A(t, s)$, $B(t, s)$, $C(t, s)$, $G(t, s)$ tienen las dimensiones apropiadas. Las incertidumbres se consideran desconocidas con la salvedad que satisfacen la restricción siguiente:

$$\frac{1}{2} [x(t_0) \quad x_0]^T \Psi^{-1} [x(t_0) \quad x_0]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t u^T(t,s) R(t,s) u(t,s) ds \\
& + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t v^T(t,s) G^T(t,s) Q(t,s) G(t,s) v(t,s) dw(s) < 1, \quad (6.3)
\end{aligned}$$

donde x_0 es un vector dado, Ψ , R , Q son matrices positivas definidas y simétricas.

El problema es el de encontrar el conjunto de todos los posibles estados que son consistentes con la restricción (6.3) y la ecuación de salida (6.2) del sistema, la cual puede ser discontinua puesto que $w(t)$ es de variación acotada.

6.1.2 Solución del Problema del Filtrado Óptimo sobre Observaciones Discontinuas

Para obtener las ecuaciones del filtro óptimo sobre observaciones discontinuas se seguirán los pasos establecidos en [29] :

- Asíumase una función $w(t)$ escalar en (6.2), la cual es absolutamente continua, escriba las ecuaciones del filtro con estados continuos obtenidos en capítulo 4.
- En las ecuaciones obtenidas asuma una función $w(t)$ de variación acotada arbitraria, mientras una derivada $\dot{w}(t)$ se permite que sea una función generalizada (como, por ejemplo, la función δ).

Como resultado se obtienen las ecuaciones de filtrado en la forma de ecuaciones integrales en distribuciones

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t A(t,s)x(s)ds + \int_{t_0}^t B(t,s)u(t,s)ds + \\
& \int_{t_0}^t S(s)C^T(t,s)Q(t,s)[dy(s) - C(t,s)x(s)dw(s)] \\
S(t) &= \Psi + \int_t^T B(t,s)R^{-1}(t,s)B^T(t,s)ds + \int_{t_0}^t A(t,s)S(s)ds \\
& + \int_{t_0}^t S(s)A^T(t,s)ds - \int_t^T S(s)C^T(t,s)Q(t,s)C(t,s)S(s)dw(s).
\end{aligned} \quad (6.4)$$

Por el Teorema 1 del capítulo 5, se garantiza la existencia y unicidad de la vibrosolución del sistema de ecuaciones de filtrado.

Porque las ecuaciones de filtrado (6.4) en distribuciones no nos permiten calcular directamente los saltos de la matriz de elipsoide $S(t)$ y del estado $x(t)$ en los puntos de discontinuidad de las observaciones $y(t)$, para calcularlos es necesario resolver (de acuerdo del Teorema 2 del capítulo 5) las siguientes ecuaciones:

$$\frac{dx}{dw} = S(w)C^F(t, t)Q(t, t) \left[\frac{dy}{dw} - C(t, t)\hat{x}(w) \right],$$

$$x(w(s-)) = x(t^-),$$

$$\frac{dS}{dw} = S(w)C^I(t, t)Q(t, t)C(t, t)S(w),$$

$$S(w(s-)) = S(t^-).$$

De donde los saltos son

$$\Delta \hat{x}(t) = S(t^-) \{ I + C^F(t, t)Q(t, t)C(t, t) \times S(t^-) \Delta w(t) \}^{-1}$$

$$\times C^F(t, t)Q(t, t) [\Delta y(t) - C(t, t)\hat{x}(t^-)\Delta w(t)],$$

$$\Delta S(t) = S(t^-) \{ I + C^I(t, t)Q(t, t)C(t, t) \times S(t^-) \Delta w(t) \}^{-1} S(t^-).$$

Por el Teorema 2 del capítulo 5, las ecuaciones de medida equivalente, cuyas partes derechas ya se descompusieron en partes continua y discreta, quedan expresadas como

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t A(t, s)x(s)ds + \int_{t_0}^t B(t, s)u(t, s)ds$$

$$+ \int_{t_0}^t S(s^-) \{ I + C^I(t, s)Q(t, s)C(t, s)S(s^-) \times \Delta w(s) \}^{-1} C^I(t, s)Q(t, s) [dy(s) - C(t, s)x(s^-)dw(s)].$$

$$S(t) = \Psi + \int_t^t B(t, s)R^{-1}(t, s)B^I(t, s)ds + \int_t^t A(t, s)S(s)ds$$

$$+ \int_t^t S(s)A^I(t, s)ds - \int_t^t S(s^-) \{ I + C^I(t, s)Q(t, s) \times C(t, s)S(s^-) \Delta u(s) \}^{-1} C^I(t, s)Q(t, s)C(t, s)S(s^-)dw(s).$$

6.2 Regulador para Sistemas Integrales con Estados Discontinuos

6.2.1 Planteamiento del Problema del Regulador Óptimo con Estados Discontinuos

Considere el sistema lineal con estado discontinuo:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t A(t, s)x(s)ds + \int_{t_0}^t B(t, s)u(t, s)dw(s), \quad (6.5)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es un vector de estado discontinuo, $u(t, s) \in \mathbb{R}^p$ es el control a la entrada. $w(t)$ es una función escalar de variación acotada y las matrices $A(t, s)$, $B(t, s)$ son absolutamente continuas que tienen las dimensiones apropiadas.

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} [x(t_1) \quad x_1]^T \psi^{-1} [x(t_1) \quad x_1] \\ &+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} u^T(t, s)R(t, s)u(t, s)dw(s) \\ &+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} x^T(s)Q(t, s)x(s)ds, \end{aligned}$$

donde x_1 es un vector dado, ψ , R , Q son matrices simétricas y positivas definidas.

Este modelo permite tener estados discontinuos en vista de que $w(t)$ es una función de variación acotada, la cual puede ser discontinua.

El problema consiste en encontrar la entrada de control óptimo $u^*(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ tal que lleve a la planta a lo largo de la trayectoria $x^*(t)$ y minimize la función de costo J .

6.2.2 Solución del Problema del Regulador Óptimo con Estados Discontinuos

Se obtienen las ecuaciones para el regulador en distribuciones (aplicando el principio de dualidad a la solución del problema de filtrado óptimo):

$$\begin{aligned} u^*(t, s) &= -R^{-1}(t, s)B^T(t, s)P(s)x(s), \\ P(t) &= P(t_0) + \int_{t_0}^t [Q(t, s) - A^T(t, s)P(s) - P(s)A(t, s)] ds \\ &\quad - \int_{t_0}^t [P(s)B(t, s)R^{-1}(t, s)B^T(t, s)P(s)] dw(s). \end{aligned}$$

con la condición terminal $P(t_1) = \Psi^{-1}$,

y

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t A(t, s)x(s)ds + \int_{t_0}^t B(t, s)R^{-1}(t, s)B^T(t, s)P(s)x(s)dw(s).$$

Por las mismas razones que en la sección 4, para obtener las ecuaciones con medida equivalente, es necesario primero calcular los saltos de la matriz de elipsoide $P(t)$ y del estado $x(t)$.

De acuerdo con el Teorema 2 del capítulo 5, los saltos $\Delta P(t)$, $\Delta x(t)$ deben ser obtenidos como soluciones de las ecuaciones

$$\frac{dx}{dw} = B(t, t)R^{-1}(t, t)B^T(t, t)P(w)x(w),$$

con

$$x(w(s^+)) = x(t^-);$$

y

$$\frac{dP}{dw} = -P(w)B(t, t)R^{-1}(t, t)B^T(t, t)P(w),$$

con

$$P(w(s^+)) = P(t^-).$$

De donde los saltos son

$$\Delta x(t) = B(t, t)R^{-1}(t, t)B^T(t, t)P(t^-)x(t^-)\Delta w(t),$$

$$\Delta P(t) = P(t^-) \{I + B(t, t)R^{-1}(t, t)B^T(t, t)P(t^-)\Delta w(t)\}^{-1} - P(t^-).$$

Por lo tanto las ecuaciones de medida equivalente, cuyas partes derechas ya se descompusieron en partes continua y discreta, quedan expresadas como

$$x(t) = x(t_0) + \int_t^t A(t, s)x(s)ds + \int_t^t B(t, s)R^{-1}(t, s)B^T(t, s)P(s^-)x(s)dw(s),$$

$$\begin{aligned}
P(t) = & P(t_0) + \int_{t_0}^t [Q(s) - A^T(t, s)P(s)] ds - \int_t^t P(s)A(t, s)ds \\
& - \int_{t_0}^t P(s^-) \{I + B(t, s)R^{-1}(t, s)B^T(t, s)P(s^-)\Delta w(s)\}^{-1} \\
& \times B(t, s)R^{-1}(t, s)B^T(t, s)P(s^-)dw(s),
\end{aligned}$$

con la condición terminal $P(t_1) = \Psi^{-1}$.

Ejemplo 6.1 Considere un misil cuyo movimiento está descrito por las ecuaciones, compárese con [18]

$$\begin{aligned}
h(t) &= h_0 + \int_0^t v(s)ds \\
m(t) &= m_0 + \int_0^t \frac{P_p(s)}{C^*(t, s)} ds \\
v(t) &= \int_0^t \frac{P_p(s) - Q(h, v)}{m(s)} dw(s) - \int_0^t g ds
\end{aligned}$$

donde $t_0 = 0$, $v(t)$ es la velocidad, $v_0 = v(0) = 0$;

$h(t)$ es la altura; h_0 es lo que se denominará como la altura ajustada, $h_0 = h(0) > 0$ debido a que más adelante se establece que el control u^* depende de h_0 y si $h_0 = 0$ entonces $u^* = 0$ y no habría ningún movimiento del misil.

$m(s)$ es la masa del misil y del combustible, $m_0 \gg 0$;

$P_p(t)$ es la fuerza de propulsión;

$C^*(t, s) = 1$ es el factor de la diferencia de velocidades ideales del misil en tiempo t y del combustible expulsado al tiempo s , que varía con el cambio de altura y en consecuencia el cambio de presión, temperatura, aceleración de gravedad, etc.;

g es la aceleración de gravedad; y

$u(s)$ es una función de variación acotada la cual permite representar el comportamiento de los motores que impulsan al misil, es decir, se supone que son 2 motores y uno de ellos está expulsando combustible continuamente, mientras que el segundo motor lo hace solo a un tiempo específico y en gran cantidad, de tal forma que se tiene una componente continua y un salto en el momento t_1 .

$u(t) = w(t) + \chi(t - t_1)$, donde χ es una función Heaviside.

Suponemos que la fuerza de resistencia de la atmósfera es $Q(h, v) = 0$.

Si además se propone que $u(s) = \frac{\dot{m}(s)}{m(s)} = \frac{d}{ds} [\ln(m(s))]$ sea el control del combustible de tal forma que se alcance la mayor altura con el mínimo consumo de combustible, se tiene entonces

$$x(t) = x_0 + \int_0^t A x(s) ds + \int_0^t B(t, s) u(s) dw(s) + \int_0^t G ds,$$

donde

$$x(t) = \begin{bmatrix} h(s) \\ v(s) \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; B(t, s) = \begin{bmatrix} 0 \\ C(t, s) \end{bmatrix};$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix}; u(s) = \frac{\dot{m}(s)}{m(s)} = \frac{d}{ds} [\ln(m(s))].$$

El criterio a minimizar es

$$J = \frac{1}{2} \left[x(T) - \begin{bmatrix} h^* \\ 0 \end{bmatrix} \right]^T \psi \begin{bmatrix} x(T) \\ \begin{bmatrix} h^* \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \int_0^t u(s) R u(s) dw(s),$$

donde

$$\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; R = 1; h^* \gg h_0. T \text{ es un tiempo arbitrario fijo.}$$

De acuerdo a las secciones anteriores se tiene que el control

$$u(t, s) = \begin{bmatrix} 0 & C(t, s) \end{bmatrix} P(s) \begin{bmatrix} h(s) \\ v(s) \end{bmatrix}$$

y las ecuaciones para trayectoria óptima $x(t)$ y la matriz $P(t)$ tienen las formas

$$P(t) = P(t_0) - \int_t^{t_0} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} P(s) ds \tag{6.6}$$

$$\int_t^{t_0} P(s) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ds = \int_t^{t_0} P(s) ds$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ C(t, s) \end{bmatrix} \right. \\ & \times \left. \begin{bmatrix} 0 & C(t, s) \end{bmatrix} P(s-) \Delta w(s) \right\}^1 \\ & \times \begin{bmatrix} 0 \\ C(t, s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & C(t, s) \end{bmatrix} P(s-) dw(s), \end{aligned}$$

con condición terminal $P(T) = \psi$.

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{t_0}^t \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(s) + G \right\} ds + \\ & \int_{t_0}^t \begin{bmatrix} 0 \\ C(t, s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & C(t, s) \end{bmatrix} P(s-) x(s) dw(s) \end{aligned}$$

y con condición inicial $x(0) = \begin{bmatrix} h_0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Entonces, sus saltos en el punto t_1 , donde se aplica el motor impulsivo son

$$\begin{aligned} \Delta P(t_1) &= P(t_1-) \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ C(t_1, t_1) \end{bmatrix} \right. \\ & \times \left. \begin{bmatrix} 0 & C(t_1, t_1) \end{bmatrix} P(t_1-) \Delta w(t_1) \right\}^1 \\ & \times \begin{bmatrix} 0 \\ C(t_1, t_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & C(t_1, t_1) \end{bmatrix} P(t_1-) \Delta w(t_1), \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\Delta x(t_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ C(t_1, t_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & C(t_1, t_1) \end{bmatrix} P(t_1-) x(t_1) \Delta w(t_1).$$

Dado que la velocidad $v(0) = 0$ y puesto que $\dot{v}(0) = 0$,

$$0 = C(t_0, t_0) u(t_0, t_0) = g$$

$$0 = C(t_0, t_0) \begin{bmatrix} 0 & C(t_0, t_0) \end{bmatrix} P(t_0) \begin{bmatrix} h_0 \\ 0 \end{bmatrix} - g$$

entonces la altura ajustada h_0 es el valor que satisface

$$g - C(0, 0) \begin{bmatrix} 0 & C(0, 0) \end{bmatrix} P(0) \begin{bmatrix} h_0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

El algoritmo completo para resolver este problema de control óptimo es descrito de la siguiente manera.

Se resuelve la ecuación para $P(t)$ (6.6) con la condición terminal $P(T) = \psi$ y el salto $\Delta P(t_1)$ (6.7) en el punto t_1 . Se determina $P(0)$. Se calcula la altura ajustada h_0 . Después se sustituye $u^*(t, s)$ en las ecuaciones de movimiento y se resuelven estas ecuaciones con condiciones iniciales $h(0) = h_0$ y $v(0) = 0$ para obtener las trayectorias óptimas $[h(t), v(t)] = x(t)$, donde $v(t)$ tiene salto en t_1 , y $h(t)$ es continua. La altura máxima se determina como $h(T) = h_0$.

Resumen

Aquí se presentan las soluciones de los problemas de filtrado y regulador óptimo en sistemas integrales discontinuos, las cuales se obtuvieron a partir de la aplicación del procedimiento en [29] a los resultados obtenidos en el capítulo 4 y de los conceptos de la teoría del capítulo anterior. Es decir se tiene en el caso del filtrado observaciones discontinuas y en el caso del regulador estados discontinuos.

Capítulo 7

Comparación de los Resultados para Sistemas Integrales Estocásticos y Determinísticos

7.1 Introducción

Los modelos estocásticos y los modelos determinísticos son conceptualmente diferentes, sin embargo cuando en los modelos determinísticos con incertidumbres desconocidas pero acotadas se hace uso de elipsoides las ecuaciones de filtrado son muy similares en ambos casos. Esto se debe a que los conjuntos elipsoidales están relacionados en la estructura matemática con la densidad de probabilidad de un vector Gaussiano.

La función soporte provee una útil representación de un conjunto cerrado convexo. La función soporte $s(\eta)$ de un conjunto cerrado convexo Ω se define como

$$s(\eta) = \max_{x \in \Omega} x^T \eta,$$

tal que

$$\eta^T \eta = 1,$$

entonces Ω se define como

$$\Omega = \{x : x^T \eta < s(\eta), \forall \eta, \eta^T \eta = 1\}. \quad (7.1)$$

Sea $x_{\max}^T(\eta)$ el vector $x \in \Omega$ que maximiza $x^T(\eta)$, entonces

$$s(\eta) = x_{\max}^T(\eta)\eta. \quad (7.2)$$

Se denota $s(\eta)$ como la función soporte del elipsoide

$$\Omega = \{x : [x - m]^T \Gamma^{-1} [x - m] < 1\}.$$

Para encontrar $x_{\max}(\eta)$ de (7.2), se introduce un multiplicador de Lagrange λ y se resuelve el

conjunto de ecuaciones

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ x^T \eta + \frac{\lambda}{2} \left[(x - m)^T \Gamma^{-1} (x - m) - 1 \right] \right\} = 0,$$

para obtener

$$x_{\max}(\eta) = m - \frac{1}{\lambda} \Gamma \eta, \\ \lambda \quad \pm \sqrt{\eta^T \Gamma \eta}.$$

Por lo tanto, la función de soporte para Ω de (7.1) es

$$s(\eta) = \eta^T m + \sqrt{\eta^T \Gamma \eta}.$$

Por otro lado, la función característica $c(\eta)$ de un vector x Gaussiano está dada por

$$c(\eta) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \eta^T \Gamma \eta + i \eta^T m \right\}.$$

Considere un vector aleatorio K -dimensional con densidad de probabilidad $p(x)$. El conjunto

$$\Omega = \{x : p(x) = cte\},$$

es una superficie $K - 1$ -dimensional definida para toda x con el mismo valor de densidad de probabilidad. Para un vector aleatorio Gaussiano, se tiene que la superficie elipsoidal

$$\Omega = \left\{ x : [x - m]^T \Gamma^{-1} [x - m] = cte \right\}$$

representa un contorno de densidad de probabilidad constante.

Ahora, considere el elipsoide

$$\Omega_c = \left\{ x : [x - m]^T \Gamma^{-1} [x - m] \leq c^2 \right\},$$

de tal forma que Ω_c es el conjunto de todo x que cae dentro o en el contorno de densidad de probabilidad constante. La probabilidad de obtener x que cae dentro de Ω_c es de interés. Se puede decir que

$$P(c) = \text{probabilidad de que } x \text{ caiga dentro de } \Omega_c,$$

$$P(c) = \text{probabilidad de que la variable aleatoria } [x - m]^T \Gamma^{-1} [x - m]$$

con distribución chi-cuadrada tiene valores $< c^2$.

Por lo que $P(c)$ puede ser evaluada fácilmente. Cuando $c = 1$, Ω_c se llama el elipsoide *sigma uno*. Por otro lado mientras la dimensión de K crece, la probabilidad de que x caiga dentro de un elipsoide *sigma uno* se hace más pequeña.

7.2 Modelo Estocástico vs. Modelo determinístico

Aun cuando se trata de dos modelos diferentes en enfoques, se tienen semejanzas en su estructura, por lo que no causa sorpresa que la solución de los problemas de filtrado planteados por ambos modelos presenten formas similares. Así por ejemplo para el caso de un modelo estocástico con posibles incertidumbres probabilísticas.

Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad completo (donde Ω es el espacio muestra, F es un σ -álgebra, P es una función de probabilidad sobre F) con una familia de σ -álgebras $F_t, t \geq 0$, crecientes y continuas por la derecha; y sea $(W_t^1, F_t, t > 0)$ y $(W_t^2, F_t, t \geq 0)$ procesos de Wiener independientes. Sea (x_t, y_t) un proceso aleatorio, tal que la ecuación de estado:

$$x_t = \int_0^t (a_0(t, s) + a(t, s)x_s) ds + \int_0^t b(t, s) dW_s^2, \quad (7.3)$$

y la ecuación de observación

$$y_t = \int_0^t (A_0(t, s) + A(t, s)x_s) ds + \int_0^t B(t, s) dW_s^1, \quad (7.4)$$

donde $x_t \in \mathbb{R}^l$; $y_t \in \mathbb{R}^m$; $a_0(t, s), a(t, s), b(t, s)$ son suaves en t uniformemente en s y continuas en s ; y $A_0(t, s), A(t, s), B(t, s)$ son continuas en t y s . Sean $A(t, s)$ y $B(t, s)$ matrices no cero, tal que $B(t, s)B^T(t, s) > 0$. El problema de filtrado es el de encontrar el mejor estimado m_t de x_t al tiempo t basado en el proceso de observación $Y(t) = \{y_s, 0 < s < t\}$.

La solución a este problema está dado por las siguientes ecuaciones para esperanza condicional (mejor estimado) $m_t = E(x_t | F_t^1)$,

$$m_t = \int_0^t (a_0(t, s) + a(t, s)m_s) ds + \int_0^t f(t, s) A^T(t, s) (B(t, s)B^T(t, s))^{-1} \times dy_s - (A_0(t, s) + A(t, s)m_s) ds]. \quad (7.5)$$

función de correlación $P_t = [E(x_t - m_t)^2 - F_t^y]$.

$$P_t = \int_0^t [a(t, s) f^T(t, s) + f(t, s) a^T(t, s) + b(t, s) b^T(t, s)] ds \quad (7.6)$$

$$\int_0^t f(t, s) A^T(t, s) (B(t, s) B^T(t, s))^{-1} A(t, s) f^T(t, s) ds,$$

y función característica $f(t, s) = E[(x_t^t - m_t)(x_s - m_s) - F_t^y]$, donde

$$x_t^t = \int_0^t (a_0(t, r) + a(t, r) x_r) dr + \int_0^t b(t, r) dW_r^2. \quad (7.7)$$

F_t^y es el álgebra generada por el proceso estocástico

$$y_t^t = \int_0^t (A_0(t, r) + A(t, r) x_r) dr + \int_0^t B(t, r) dW_r^1. \quad (7.8)$$

y $m_t^t = E(x_t^t - F_t^y)$.

$$f(t, s) = \int_0^s \left[a(t, r) f^T(s, r) + f(t, r) a^T(s, r) + \frac{1}{2} (b(t, r) b^T(s, r) + b(s, r) b^T(t, r)) \right] dr \quad (7.9)$$

$$\int_0^s \left[f(t, r) A^T(s, r) (B(s, r) B^T(s, r))^{-1} A(s, r) f^T(s, r) + \right.$$

$$f(t, r) A^T(t, r) (B(t, r) B^T(t, r))^{-1} A(t, r) f^T(s, r)$$

$$\left. + \frac{1}{2} f(t, r) A^T(t, r) (B(t, r) B^T(s, r))^{-1} A(s, r) f^T(s, r) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} f(s, r) A^T(s, r) (B(s, r) B^T(t, r))^{-1} A(t, r) f^T(t, r) \right] dr.$$

Mientras que para el caso de un modelo determinístico con incertidumbres desconocidas pero acotadas, el problema de filtrado se puede expresar de la siguiente forma.

Considere el sistema lineal

$$\dot{x}(t) = x_t + \int_t^t A(t, s) x(s) ds + \int_t^t B(t, s) u(t, s) ds,$$

$$y(t) = \int_t^t C(t, s) x(s) ds + \int_t^t G(t, s) v(t, s) ds,$$

donde $x(t) \in R^n$ es el estado del sistema, $u(t, s) \in R^p$ es la incertidumbre en la entrada, $v(t, s) \in R^m$ es el ruido en la salida y las matrices $A(t, s)$, $B(t, s)$, $C(t, s)$, $G(t, s)$ tienen las

dimensiones apropiadas. Las incertidumbres se consideran desconocidas con la salvedad que satisfacen la restricción siguiente:

$$[x(t_0) \quad x_1]^T \Psi^{-1} [x(t_0) \quad x_0] + \frac{1}{2} \int_t^t u^T(t,s) R(t,s) u(t,s) ds \quad (7.10)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_t^t v^T(t,s) G^T(t,s) Q(t,s) G(t,s) v(t,s) ds < 1,$$

donde x_0 es un vector n dado, Ψ , R , Q son matrices positivas definidas.

El problema consiste en encontrar el conjunto de todos los posibles estados que son consistentes con la restricción (7.10) y la ecuación de salida del sistema.

La solución del problema de filtrado es el elipsoide $X(t)$ siguiente

$$X(t) = \left\{ x(t) : [x(t) \quad \hat{x}(t)]^T S^{-1}(t) [x(t) \quad \hat{x}(t)] < 1 - \beta^2(t) \right\},$$

donde $S(t)$ es la solución de la ecuación integral de Riccati

$$S(t) = \Psi + \int_{t_0}^t [B(t,s)R^{-1}(t,s)B^T(t,s) + A(t,s)S(s)] ds + \int_t^t [S(s)A^T(t,s) - S(s)C^T(t,s)Q(t,s)C^T(t,s)S(s)] ds, \quad (7.11)$$

con la condición límite de $S(t_0) = \Psi$, el número real positivo β^2 dado como

$$\beta^2(t) = \int_t^t [\hat{y}(s) - C(s)\hat{x}(s)]^T Q(t,s) [\hat{y}(s) - C(s)\hat{x}(s)] ds,$$

y el estimado óptimo $\hat{x}(t)$ es generado por el siguiente sistema:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + \int_{t_0}^t A(t,s)r(s)ds + \int_{t_0}^t B(t,s)u(t,s)ds + \int_t^t S(s)C^T(t,s)Q(t,s) [\hat{y}(s) - C(t,s)\hat{x}(s)] ds. \quad (7.12)$$

Se puede observar que la ecuación (7.5) tiene su análogo en la ecuación (7.12), mientras que la ecuación (7.6) lo tiene en (7.11), sin embargo no se tiene un análogo para la ecuación (7.9) en los modelos determinísticos, la cual corresponde a la función característica. Esto representa una ventaja en el sentido de tener que calcular tan solo dos ecuaciones.

7.3 Modelo Estocástico con ecuación de estado dinámica

Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad completo con una familia de σ -álgebras $\mathcal{F}_t, t \geq 0$, crecientes y continuas por la derecha; y sea $(W_t^1, \mathcal{F}_t, t \geq 0)$ y $(W_t^2, \mathcal{F}_t, t \geq 0)$ procesos de Wiener independientes. Sea (x_t, y_t) un proceso aleatorio, tal que la ecuación de estado

$$dx(t) = (a_0(t) + a(t)x(t))dt + b(t)dW^2(t), \quad (7.13)$$

y la ecuación de observación

$$y_t = \int_0^t (A_0(t,s) + A(t,s)x_s)ds + \int_0^t B(t,s)dW_s^1,$$

donde $x_t \in \mathbb{R}^n$; $y_t \in \mathbb{R}^m$; $a_0(t,s), a(t,s), b(t,s)$ son suaves en t uniformemente en s y continuas en s ; y $A_0(t,s), A(t,s), B(t,s)$ son continuas en t y s . Sean $A(t,s)$ y $B(t,s)$ matrices no cero, tal que $B(t,s)B^T(t,s) > 0$. El problema de filtrado es el de encontrar el mejor estimado m_t de x_t al tiempo t basado en el proceso de observación $Y(t) = \{y_s, 0 < s \leq t\}$.

La simplificación de la ecuación de estado produce el siguiente resultado basado en las ecuaciones de filtrado (7.5), (7.6) y (7.9). Debe notarse que la desigualdad $x^t = x(s)$ se satisface debido a que coinciden las ecuaciones (7.7) y (7.13). El σ -álgebra \mathcal{F}_t^Y coincide con el σ -álgebra \mathcal{F}_t^X , porque el σ -álgebra \mathcal{F}_t^X es especificado por las variables aleatorias $x(r), r < s$ hasta el momento s para cualquier t y, por lo tanto, $\mathcal{F}_t^Y = \mathcal{F}_t^X = \mathcal{F}_t^X$. Por lo que se puede concluir que

$$f(t,s) = E((x_s^t, m_s^t) | x(s), m(s))^T | \mathcal{F}_t^Y,$$

$$E((x_s^t, m_s^t) | x(s), m(s))^T | \mathcal{F}_s^Y = P(s)$$

y

$$m_s^t = E(x_s^t | \mathcal{F}_t^Y) = E(x_s | \mathcal{F}_s^Y) = m(s).$$

La solución a este problema está dado entonces por las siguientes ecuaciones:

$$m_t = \int_0^t (a_0(s) + a(s)m_s)ds + \int_t^t P(s)A^T(t,s)(B(t,s)B^T(t,s))^{-1} \\ \times [dy_s - (A(t,s) + A(t,s)m_s)ds].$$

$$P_t = \int_0^t [a(s) P^T(s) + P(s) a^T(s) + b(s) b^T(s)] ds - \int_0^t P(s) A^T(t, s) (B(t, s) B^T(t, s))^{-1} A(t, s) P^T(s) ds.$$

De manera análoga al método aplicado en la subsección 6.1.2. se pueden obtener las ecuaciones de medida equivalente, cuyas partes derechas ya se descomposieron en partes continua y discreta, las cuales son

$$m_t = \int_0^t (a_0(s) + a(s) m_s) ds + \int_0^t P(s) [I + A^T(t, s) \times (B(t, s) B^T(t, s))^{-1} A(t, s) P(s-) \Delta u(s)]^{-1} \times dy, \quad (A_0(t, s) + A(t, s) m_s) du(s),$$

$$P_t = \int_0^t [a(s) P^T(s) + P(s) a^T(s) + b(s) b^T(s)] ds - \int_0^t P(s) [I + A^T(t, s) (B(t, s) B^T(t, s))^{-1} \times A(t, s) P(s-) \Delta u(s)]^{-1} A^T(t, s) \times (B(t, s) B^T(t, s))^{-1} A(t, s) P(s-) du(s),$$

Obsérvese que cuando se tiene un modelo estocástico, para construir el filtro dadas las ecuaciones (7.3) y (7.4), es necesario introducir una tercera ecuación auxiliar (7.7)

$$x'_t = \int_0^t (a_0(t, r) + a(t, r) x_r) dr + \int_0^t b(t, r) dW_r^2,$$

la cual puede ser escrita en forma diferencial y permite calcular la tercera ecuación (7.9) que se presenta en la solución de dichos problemas. Sin embargo cuando se presenta un modelo en el cual la ecuación (7.3) está dada por una ecuación diferencial no es necesario introducir esta ecuación auxiliar (7.7) y entonces es posible obtener un filtro expresado por tan solo dos ecuaciones, ya que (7.6) y (7.9) son iguales, mientras que en el caso determinístico no cambia el número de ecuaciones si se cambia la forma de expresar la ecuación de estado (integral o diferencial).

En general se puede concluir que para obtener el filtro del modelo estocástico es necesario tener un

conocimiento excesivo de los disturbios, básicamente saber la densidad espectral o la covarianza del ruido, lo cual no suele ser muy fácil de obtener en la práctica. Por lo tanto, el trabajar con disturbios acotados determinísticamente, suele ser mucho más práctico de ahí que la propuesta que se hace para algoritmos de filtrado y regulador óptimo en el sentido minimáximo para modelos con incertidumbres desconocidas pero acotadas tenga mucho mayor peso cuando no se tenga acceso a información probabilística del ruido que está entrando en el sistema.

Resumen

En este capítulo se hace una comparación de los resultados obtenidos para el filtrado en sistemas integrales estocásticos y los obtenidos en la presente tesis para el filtrado en sistemas integrales determinísticos, es decir, los dos tipos generales de incertidumbres que podrían presentarse en los sistemas.

Capítulo 8

Conclusiones

8.1 Aportaciones

Se puede resumir las aportaciones en los siguientes puntos:

- Planteamiento del filtrado minimáximo óptimo en sistemas integrales de tipo Volterra,
- Principio de dualidad en sistemas integrales,
- Planteamiento del problema de regulador óptimo en sistemas integrales de tipo Volterra,
- Solución del problema de filtrado minimáximo óptimo en sistemas integrales de tipo Volterra,
- Solución del problema de regulador óptimo en sistemas integrales de tipo Volterra,
- Solución del problema del filtrado óptimo sobre observaciones discontinuas,
- Solución del problema del regulador óptimo con estados discontinuos.
- Ejemplo técnico de la optimización del movimiento de un misil con motores continuo e impulsivo, minimizando el consumo de combustible para alcanzar la mayor altura posible.
- Solución del problema del filtrado estocástico del sistema dinámico sobre observaciones de tipo Ito-Volterra y comparación de los filtros óptimos en modelos determinísticos y estocásticos.

8.2 Trabajos Futuros

Se puede continuar en esta línea de investigación con los siguientes trabajos:

- Problema del filtrado óptimo sobre observaciones discretas con retardos.
- Problema del regulador óptimo en sistemas con retardos.
- Problema del filtrado y regulador óptimo para sistemas Volterra no observables.
- Aplicación de los algoritmos obtenidos al procesamiento de señales en las redes de comunicaciones y los sistemas GPS.

Apéndice A

Procedimiento para obtener los valores para la ecuación del estado de tipo Volterra del ejemplo

4.1

```
clear all
format long
s(1) 0;
z(1) 0;
x(1) 0.25;
n input('tecleee el numero de puntos:')
for i 2:n
s(i) s(i-1)+0.5;
y(i) 1 ((s(i)+2)^2);
r(i) 0;
for k 2:i
z(k) 0;
if k 2,w 0.5;
else w 1;
end
z(k) w*(-2 ((s(i)-s(k-1)+2)^2))*x(k-1);
r(i) r(i)+z(k);
end
x(i) (y(i)+0.5*r(i)) 1.125;
end
```

Procedimiento para obtener los valores para la ecuación de Riccati (de tipo Volterra no lineal) del ejemplo 4.1

```
clear s z R y r n q
format long
s(1) 0;
z(1) 1;
```

```

R(1) = 1;
w = 1;
n = input('teclea el numero de puntos: ');
q = input('teclea el valor de q: ');
for i=2:n
    s(i) = s(i-1)+0.5;
    y(i) = 1.1666-4*(s(i)+2)^3;
    r(i) = 0;
    for k = 2:i
        z(k) = 0;
        if k == 2, w = 0.5;
        else w = 1;
        end
        z(k) = w*((-4*((s(i)-s(k-1))+2)^2))*R(k-1)-q*(R(k-1))^2;
    end
    r(i) = r(i)+z(k);
end
R(i) = (-1.25+sqrt(1.25*1.25+2*q*(y(i)+0.5*r(i))))/q;
end

```

Procedimiento para obtener los valores para el estimado óptimo de la ecuación de tipo Volterra del ejemplo 4.1

```

clear s z est y r n g f
format long
s(1) = 0;
z(1) = 0.25;
est(1) = 0.25;
n = input('teclea el numero de puntos: ');
f = input('teclea la frecuencia de la senoide: ');
% of 1;

```

```

for i=2:n
s(i)=s(i-1)+0.5;
y(i)=1/((s(i)+2)^2);
r(i)=0;
n(i)=0;
for k=2:i
z(k)=0;
if k==2,w=0.5;
else w=1;
end
z(k)=w*((-2/((s(i)-s(k-1)+2)^2))-R(k-1))*est(k-1);
r(i)=r(i)+z(k);
g(k)=0;
g(k)=R(k-1)*(x(k-1)+sin(f*(k-1)/pi));
n(i)=n(i)+g(k);
end
b=rem(s(i),1);
if b==0,n(i)=n(i)-0.5*(R(1)*(x(1)+sin(0))+R(s(i))*(x(s(i))+sin(f*s(i)/pi)));
else n(i)=n(i)-0.5*R(1)*(x(1)+sin(0));
end
est(i)=(y(i)+0.5*r(i)+n(i))/(1.125+0.25*R(i));
end

```

Apéndice B

Algoritmos de Filtrado Minimáximo en Sistemas Integrales de tipo Volterra

I. R. Valadez G. y M. V. Basin
 Universidad Autónoma de Nuevo León
 Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
 A. P. 144-F, C. P. 66450, San Nicolás de los Garza, N. L.,
 Tel. (8) 329 4020, Ext. 5773, Fax (8) 376 4514,
 e-mail: ivaladez@die.fime.uanl.mx

Resumen

En este artículo se investiga el problema de filtrado para sistemas de tipo integral y observaciones con incertidumbres ya sea de forma integral o no, cuya solución está basada en el principio mínimo de Pontryagin y el método de multiplicadores de Lagrange. Se obtienen como resultados: la forma del control óptimo (regulador), así como también la ecuación del estimado óptimo (filtro), y la ecuación de Riccati para la matriz de ganancia óptima en ambos casos. De la misma manera queda establecido que en sistemas integrales con incertidumbres determinísticas fue obtenido el sistema cerrado de las ecuaciones del filtrado óptimo para sólo dos variables, lo que no es posible lograr en sistemas estocásticos. Se discuten nuevos enfoques en la metodología de filtrado relacionados con el problema resuelto.

1 Introducción

En este trabajo se presenta la solución para una clase de problemas de filtrado con disturbios determinísticos. La teoría de filtrado hasta el presente se había enfocado solo en sistemas cuya representación estaba dada en forma de ecuaciones diferenciales [1,2]. Ahora se presenta otra perspectiva al ver este problema para sistemas con forma de ecuación integral, usando el método de multiplicadores de Lagrange y el principio mínimo de Pontryagin que forman parte de la teoría de control óptimo [3,4]. Las incertidumbres no son consideradas estocásticas, en vez de esto se asume que son desconocidas y que pertenecen a un conjunto dado, el cual representa un elipsoide funcional. En este caso, la información de los estados del sistema se obtiene de las observaciones a la salida del sistema, tomando en cuenta las restricciones para las incertidumbres de tipo energía

El concepto de Dualidad juega un papel importante en este artículo, debido a que los resultados en el diseño

de reguladores implican soluciones para los casos de filtrado como se establece por primera vez para sistemas estocásticos en [5,6].

Este trabajo está organizado de la siguiente manera: en la segunda sección se hace el planteamiento del problema; en la tercera sección se trata el principio de dualidad para sistemas de ecuaciones integrales lineales; en la sección 4 se plantea el problema del regulador y filtro óptimo, y se establecen los resultados correspondientes; en la sección 5 se generaliza el problema al tener ahora las observaciones escritas en forma integral, posteriormente se establecen los resultados del regulador y del filtro óptimo para este sistema; y por último se dan las conclusiones.

2 Problema de filtrado óptimo

Considere el sistema lineal :

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t A(t,s)x(s)ds + \int_{t_0}^t B(t,s)u(t,s)ds, \quad (1)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + v(t), \quad (2)$$

donde $x(t) \in R^n$ es el estado del sistema, $u(t,s) \in R^p$ es la incertidumbre a la entrada, $v(t) \in R^m$ es el ruido en la salida y las matrices $A(t,s)$, $B(t,s)$, $C(t)$ tienen las dimensiones apropiadas. Las incertidumbres se consideran desconocidas con la salvedad que satisfacen la restricción siguiente:

$$\frac{1}{2} [x(t_0) - x_0]^T \Psi^{-1} [x(t_0) - x_0] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t [u^T(t,s)R(t,s)u(t,s) + v^T(s)Q(s)v(s)] ds \leq 1, \quad (3)$$

donde x_0 es un vector n dado, Ψ , R , Q son matrices positivas definidas y simétricas.

El problema consiste en encontrar el conjunto de todos los posibles estados que son consistentes con la restricción 3) y son compatibles con las observaciones (2) desde el momento inicial t_0 hasta el momento actual t .

3 Principio de dualidad en sistemas integrales

Puesto que la solución para el problema de filtrado en el caso de sistemas descritos por ecuaciones diferenciales se obtiene del sistema dual (principio de dualidad [7] del problema del regulador. Entonces, tomando la misma aproximación para la solución del problema mencionado en la sección anterior, se hace necesario introducir el principio de dualidad para sistemas integrales. El teorema de dualidad se enunciará enseguida.

Sea el sistema dinámico

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad (4)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t),$$

y el sistema dinámico

$$\dot{z}(t) = -A^T(t)z(t) + C^T(t)v(t), \quad (5)$$

$$\gamma(t) = B^T(t)z(t) + D^T(t)v(t),$$

donde A^T , B^T , C^T y D^T son la transpuestas de A , B , C y D . $\Phi_a(t_0, \cdot)$ y $\Phi_b(\cdot, t_0)$ son las matrices de transición de los sistemas (4) y (5) respectivamente. El sistema (4) es controlable (observable) en t_0 si y sólo si el sistema (5) es observable (controlable) en t_0 .

La prueba de dicho teorema se basa en 2 teoremas [7]: el de controlabilidad y el de observabilidad, los cuales, enuncian que el sistema (4) es controlable (observable) en t_0 si y sólo si existe un $t_1 > t_0$ finito, tal que los n renglones (n columnas) de las funciones matriciales $\Phi_a(t_0, \cdot)$ ($C(\cdot)\Phi_b(\cdot, t_0)$) son linealmente independientes en $[t_0, t_1]$. Es entonces claro que

$$\Phi_a(t_0, t) = \Phi_b^T(t, t_0).$$

Puesto que dichos teoremas basan sus pruebas en la solución general de la ecuación (4) y dado que la solución general de una ecuación como (4) se puede escribir de la forma siguiente:

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau,$$

se propone una fórmula semejante

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau, s)u(\tau, s)d\tau, \quad (6)$$

para la solución de la ecuación (1) integral de tipo Volterra.

El procedimiento que se sigue para llegar a asegurar que este resultado es correcto, es el siguiente. Sea $\psi(t)$ una matriz fundamental de $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t A(t, s)x(s)ds$, que satisface

$$\psi(t) = \psi(t_0) + \int_{t_0}^t A(t, s)\psi(s)ds,$$

entonces, $\Phi(t, t_0) \triangleq \psi(t)\psi^{-1}(t_0)$ para todo t, t_0 en $(-\infty, \infty)$ se dice que es la matriz de transición de $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t A(t, s)x(s)ds$, de ahí que

$$\Phi(t, t_0) = I + \int_{t_0}^t A(t, s)\Phi(s, t_0)ds. \quad (7)$$

Tomando (7) y sustituyéndola en (6) se tiene que

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t A(t, s)\Phi(s, t_0)x_0ds + \int_{t_0}^t B(t, \tau)u(t, \tau)d\tau + \int_{t_0}^t \int_{\tau}^t A(t, s)\Phi(s, \tau)B(t, \tau)u(t, \tau)dsd\tau.$$

Dado que se trata de un sistema relajado [7] en t_0 , entonces la última integral es igual a *cero* para $\tau < t_0$, por lo cual se puede cambiar el límite inferior τ por t_0 , esto permite agrupar términos:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t B(t, \tau)u(t, \tau)d\tau + \int_{t_0}^t A(t, s) \left[\Phi(s, t_0)x_0 + \int_{t_0}^s \Phi(s, \tau)B(t, \tau)u(t, \tau)d\tau \right] ds.$$

Ya que el sistema es causal entonces podemos poner en el límite superior s en lugar de t , en la integral que se encuentra dentro del paréntesis, de esta manera se obtiene la ecuación inicial (1).

Por lo tanto, la fórmula (6) se puede considerar como solución general de la ecuación (1). Entonces también se puede introducir y usar la función de transición de estados para la ecuación en forma integral (1) como para la ecuación en forma diferencial (4). Dado este hecho por sentado se puede tomar el teorema de Dualidad (el cual se basa en los teoremas de controlabilidad y observabilidad) como válido también para los sistemas que están representados por ecuaciones de tipo Volterra.

4 Regulador y filtro óptimo

4.1 Función Hamiltoniana en sistemas integrales

En esta sección se hace referencia al método para la solución de problemas de control óptimo que usa mul-



tiplicadores de Lagrange y el principio mínimo de Pontryagin [4] para unir la ecuación de estado al criterio de funcionamiento. Puesto que esta es la manera en que se propone solucionar el problema del regulador y posteriormente el del filtro, es necesario modificar este método adecuadamente, dado que ahora tratamos con ecuaciones del tipo integral. Considérese la siguiente ecuación lineal (1):

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t A(t,s)x(s)ds + \int_{t_0}^t B(t,s)u(t,s)ds,$$

esto también se puede expresar como:

$$\int_{t_0}^t [x(s) - A(t,s)x(s) - B(t,s)u(t,s)] ds = 0.$$

Ya que si el integrando es cero entonces la integral es cero, se puede asumir que

$$x(s) - A(t,s)x(s) - B(t,s)u(t,s) = 0. \quad (8)$$

Con este sistema se asociará un índice de funcionamiento

$$J = [x(t_0) - x_0]^T \Psi^{-1} [x(t_0) - x_0] + \int_{t_0}^{t_1} L(x(s), u(t,s), t,s) ds,$$

donde $[t_0, t_1]$ es el intervalo de tiempo de interés. Introduciendo un multiplicador $\lambda(t)$ asociado, el índice de funcionamiento aumentado es el siguiente:

$$J = [x(t_0) - x_0]^T \Psi^{-1} [x(t_0) - x_0] + \int_{t_0}^{t_1} \{L(x(s), u(t,s), t,s) + \lambda^T(s) [-\dot{x}(s) + A(t,s)x(s) + B(t,s)u(t,s)]\} ds.$$

Si definimos la función Hamiltoniana como

$$H(x, u, t, s) = L(x, u, t, s) + \lambda^T(s) [A(t, s)x(s) + B(t, s)u(t, s)],$$

entonces, el índice de desempeño puede expresarse como.

$$J = [x(t_0) - x_0]^T \Psi^{-1} [x(t_0) - x_0] + \int_{t_0}^{t_1} [H(x, u, t, s) - \lambda^T(s)\dot{x}(s)] ds.$$

Esto permite, de acuerdo con el principio mínimo de Pontryagin, establecer las relaciones siguientes:

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = x, \quad \frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{\lambda}, \quad \frac{\partial H}{\partial u} = 0.$$

4.2 Planteamiento del problema de regulador óptimo

Considere el sistema lineal (1). Sustituyendo (2) en (3) da $x(t)$, si y sólo si, existe un vector $x(t_0)$ y una función $u(t, s)$ definida en $[t_0, t]$ tal que:

$$J[x, t; u, x(t_0)] \leq 1. \quad (9)$$

sujeto al sistema (1) y la restricción (3), donde $J[x, t; u, x(t_0)]$ está definido como

$$J[x, t; u, x(t_0)] \triangleq \frac{1}{2} [x(t_0) - x_0]^T \Psi^{-1} [x(t_0) - x_0] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t u^T(t, s) R(t, s) u(t, s) ds$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^t [y(s) - C(s)x(s)]^T Q(s) [y(s) - C(s)x(s)] ds. \quad (10)$$

El problema es encontrar el control $u(t, s)$ que satisface la restricción (9) y minimiza el criterio (10).

Es claro que existen los valores de $u(t, s)$ y $x(t_0)$ requeridos que satisfacen (9) si y sólo si:

$$J^*[x, t] \triangleq \min_{u(\cdot)} J[x, t; u, x(t_0)] \leq 1,$$

sujeto al sistema (1).

4.3 Solución del problema de regulador óptimo

Tomando en consideración las ecuaciones finales de la subsección 4.1, se puede enunciar lo siguiente:

$$\int_{t_0}^t [-C^T(s)Q(s)y(s) + C^T(s)Q(s)C(s)x(s)] ds \quad (11)$$

$$+ \int_{t_0}^t A^T(t, s)\lambda(s)ds + \lambda_0 = -\lambda(t),$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow R(t, s)u(t, s) + B^T(t, s)\lambda(s) = 0.$$

Por lo tanto la ley de control es

$$u^*(t, s) = -R^{-1}(t, s)B^T(t, s)\lambda(s) \quad (12)$$

Por linealidad del problema asuma que

$$\lambda(t) = -P(t)x(t). \quad (13)$$

dado que $\lambda(t_0) = -\Psi^{-1}x(t_0)$, entonces $P(t_0) = \Psi^{-1}$.

Si se considera $x_0 = \lambda_0 = 0$ y se sustituye (13) en (11), se obtiene

$$0 = \int_{t_0}^t [-C^T(s)Q(s)y(s) + C^T(s)Q(s)C(s)x(s)] ds$$



$$-\int_{t_0}^t A^T(t,s)P(s)x(s)ds - P(t)x(t).$$

Derivando con respecto al tiempo

$$0 = -C^T(t)Q(t)y(t) + C^T(t)Q(t)C(t)x(t)$$

$$-\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t A^T(t,s)P(s)x(s)ds - P(t)x(t) - P(t)\dot{x}(t).$$

Reescribiendo en forma integral

$$0 = \int_{t_0}^t [-C^T(s)Q(s)y(s) + C^T(s)Q(s)C(s)x(s)] ds \\ - \int_{t_0}^t A^T(t,s)P(s)x(s)ds - \int_{t_0}^t \dot{P}(s)x(s)ds \\ - \int_{t_0}^t P(s)\dot{x}(s)ds.$$

y sustituyendo la relación (8) en la ecuación anterior, se tiene que:

$$0 = \int_{t_0}^t [-C^T(s)Q(s)y(s) + C^T(s)Q(s)C(s)x(s)] ds \\ - \int_{t_0}^t A^T(t,s)P(s)x(s)ds - \int_{t_0}^t P(s)x(s)ds \\ - \int_{t_0}^t P(s)[A(t,s)x(s) + B(t,s)u(t,s)] ds.$$

Sustituyendo el control u^* dado por (12)

$$0 = \int_{t_0}^t [-C^T(s)Q(s)y(s) + C^T(s)Q(s)C(s)x(s)] ds \\ - \int_{t_0}^t A^T(t,s)P(s)x(s)ds - \int_{t_0}^t \dot{P}(s)x(s)ds \\ - \int_{t_0}^t P(s)A(t,s)x(s)ds \\ + \int_{t_0}^t P(s)[B(t,s)R^{-1}(t,s)B^T(t,s)P(s)x(s)] ds,$$

derivando con respecto a x

$$0 = \int_{t_0}^t C^T(s)Q(s)C(s)ds - \int_{t_0}^t A^T(t,s)P(s)ds \\ - \int_{t_0}^t P(s)ds - \int_{t_0}^t P(s)A(t,s)ds \\ - \int_{t_0}^t P(s)B(t,s)R^{-1}(t,s)B^T(t,s)P(s)ds,$$

y agrupando, se obtiene

$$0 = \int_{t_0}^t [C^T(s)Q(s)C(s) - A^T(t,s)P(s)] ds$$

$$-\int_{t_0}^t [\dot{P}(s) + P(s)A(t,s)] ds$$

$$-\int_{t_0}^t P(s)B(t,s)R^{-1}(t,s)B^T(t,s)P(s)ds.$$

Por lo tanto,

$$P(t) = \Psi^{-1} + \int_{t_0}^t [C^T(s)Q(s)C(s) - A^T(t,s)P(s)] ds \\ - \int_{t_0}^t P(s)A(t,s)ds \\ + \int_{t_0}^t P(s)B(t,s)R^{-1}(t,s)B^T(t,s)P(s)ds, \quad (14)$$

con la condición límite $P(t_0) = \Psi^{-1}$.

En la cual se puede reconocer la ecuación de Riccati debajo del signo de la integral. Por lo que se puede escribir que la solución explícita al problema del regulador óptimo es la siguiente: la ley de control $u^*(t,s) = R^{-1}(t,s)B^T(t,s)P(s)x(s)$, donde $P(s)$ es la solución de la ecuación integral de Riccati (14).

4.4 Solución del problema de filtrado óptimo

Si tomamos las relaciones que se presentan en la sección 3 sobre la dualidad que existe entre los problemas de filtrado y reguladores, tenemos que el sistema dual del sistema (1) es

$$\dot{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t -A^T(t,s)x(s)ds + \int_{t_0}^t C^T(t,s)u(t,s)ds, \\ y(t) = B^T(t)x(t) + v(t),$$

y considerando el criterio

$$J[x,t;u,x(t_0)] \triangleq \frac{1}{2} [x(t_0) - x_0]^T \Psi^{-1} [x(t_0) - x_0] \\ + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t u^T(t,s)Q^{-1}(s)u(t,s)ds \\ + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \{ [y(s) - B^T(s)x(s)]^T R^{-1}(t,s) \\ [y(s) - B^T(s)x(s)] \} ds, \quad (15)$$

el control u^* está dado de la siguiente manera:

$$u^*(t,s) = Q(s)C^T(t,s)S(s)x(s). \quad (16)$$

Por lo tanto, considerando [1], el principio de dualidad implica la solución del problema de filtrado minimaximo para el sistema con estado (1), sobre las observaciones (2) y el criterio (3); la solución del problema de filtrado es el elipsoide $X(t)$, descrito como

$$X(t) = \{x(t) : [x(t) - x(t)]^T S^{-1}(t) [x(t) - x(t)]\}$$



$$\leq 1 - \beta^2(t) \},$$

donde $S(t)$ es la solución de la ecuación integral de Riccati

$$S(t) = \Psi + \int_{t_0}^t [B(s)R^{-1}(t,s)B^T(s) + A(t,s)S(s)] ds + \int_{t_0}^t [S(s)A^T(t,s) - S(s)C^T(t,s)Q(s)C(t,s)S(s)] ds,$$

con la condición límite de $S(t_0) = \Psi$, y el número real positivo β^2 dado como $\beta^2(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t [y(s) - C(s)x(s)]^T Q(s) [y(s) - C(s)x(s)] ds$.

De acuerdo con el principio de dualidad, de (16) la ganancia óptima del filtro es :

$$M^*(t,s) = S(s)C^T(t,s)Q(s)$$

y el estimado óptimo $x(t)$ es generado por el siguiente sistema:

$$x(t) = \int_{t_0}^t A(t,s)x(s)ds + \int_{t_0}^t B(t,s)u(t,s)ds + \int_{t_0}^t S(s)C^T(t,s)Q(s)[y(s) - C(t,s)x(s)] ds.$$

5 Regulador y filtro óptimo con observaciones de tipo integral

5.1 Planteamiento del problema de filtrado óptimo

Considere el sistema lineal :

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t A(t,s)x(s)ds + \int_{t_0}^t B(t,s)u(t,s)ds, \\ y(t) = \int_{t_0}^t C(t,s)x(s)ds + \int_{t_0}^t G(t,s)v(t,s)ds. \quad (17)$$

donde $x(t) \in R^n$ es el estado del sistema, $u(t,s) \in R^p$ es la incertidumbre en la entrada, $v(t,s) \in R^m$ es el ruido en la salida y las matrices $A(t,s)$, $B(t,s)$, $C(t,s)$, $G(t,s)$ tienen las dimensiones apropiadas. Las incertidumbres se consideran desconocidas con la salvedad que satisfacen la restricción siguiente:

$$\frac{1}{2} [x(t_0) - x_0]^T \Psi^{-1} [x(t_0) - x_0] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t u^T(t,s)R(t,s)u(t,s)ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t v^T(t,s)G^T(t,s)Q(t,s)G(t,s)v(t,s)ds \leq 1. \quad (18)$$

donde x_0 es un vector n dado, Ψ , R , Q son matrices positivas definidas y simétricas.

El problema es el de encontrar el conjunto de todos los posibles estados que son consistentes con la restricción (18) y la ecuación de salida del sistema.

5.2 Solución del problema de regulador óptimo

Se hará la misma aproximación que para el caso anterior, para lo cual, se resolverá primero el problema del regulador y después se solucionará el del filtrado de manera análoga.

Del mismo modo que en (8), la ecuación (17) resulta:

$$\dot{y}(s) - C(t,s)x(s) - G(t,s)v(t,s) = 0. \quad (19)$$

Despejando $G(t,s)v(t,s)$ de (19) y sustituyendo en (18), podemos reescribir la restricción de la siguiente manera:

$$J[x,t,u,x(t_0)] \triangleq \frac{1}{2} [x(t_0) - x_0]^T \Psi^{-1} [x(t_0) - x_0] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t u^T(t,s)R(t,s)u(t,s)ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \{ [y(s) - C(t,s)x(s)]^T Q(t,s) [y(s) - C(t,s)x(s)] \} ds.$$

Utilizando las mismas relaciones que en la subsección 4.1, se tiene que:

$$\int_{t_0}^t [-C^T(t,s)Q(t,s)\dot{y}(s) + C^T(t,s)Q(t,s)C(t,s)x(s)] ds + \int_{t_0}^t A^T(t,s)\lambda(s)ds + \lambda_0 = -\lambda(t).$$

Y siguiendo el mismo procedimiento ya visto se tiene que

$$u^*(t,s) = R^{-1}(t,s)B^T(t,s)P(s)x(s),$$

donde $P(t)$ es la solución de la ecuación de Riccati siguiente:

$$P(t) = \Psi^{-1} + \int_{t_0}^t C^T(t,s)Q(t,s)C(t,s)ds - \int_{t_0}^t [A^T(t,s)P(s) + P(s)A(t,s)] ds - \int_{t_0}^t P(s)B(t,s)R^{-1}(t,s)B^T(t,s)P(s)ds.$$



5.3 Solución del problema de filtrado óptimo

De la misma manera que se procedió en la sección anterior se tiene que el control para el sistema dual es:

$$u^*(t, s) = Q(t, s)C(t, s)S(s)x(s).$$

Por lo tanto la solución del problema de filtrado es el elipsoide $X(t)$ siguiente

$$X(t) = \left\{ x(t) : [x(t) - \hat{x}(t)]^T S^{-1}(t) [x(t) - \hat{x}(t)] \leq 1 - \beta^2(t) \right\},$$

donde $S(t)$ es la solución de la ecuación integral de Riccati

$$S(t) = \Psi + \int_{t_0}^t [B(t, s)R^{-1}(t, s)B^T(t, s) + A(t, s)S(s)] ds + \int_{t_0}^t [S(s)A^T(t, s) - S(s)C^T(t, s)Q(t, s)C(t, s)S(s)] ds,$$

con la condición límite de $S(t_0) = \Psi$, y el número real positivo β^2 dado como $\beta^2(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t [y(s) - C(s)x(s)]^T Q(t, s) [y(s) - C(s)x(s)] ds$.

Obsérvese que la ganancia óptima del filtro es

$$M^*(t, s) = S(s)C^T(t, s)Q(t, s),$$

y el estimado óptimo $\hat{x}(t)$ es generado por el siguiente sistema:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \int_{t_0}^t A(t, s)\hat{x}(s)ds + \int_{t_0}^t B(t, s)u(t, s)ds + \int_{t_0}^t S(s)C^T(t, s)Q(t, s) [y(s) - C(t, s)\hat{x}(s)] ds.$$

6 Conclusiones

Se puede concluir que la estructura de los filtros para sistemas lineales determinísticos que obedecen a restricciones del tipo energía, es similar al modelo de los filtros lineales estocásticos. Debido a la inclusión de ecuaciones del tipo Volterra, es posible pasar posteriormente a los problemas de filtrado en sistemas con retardos.

El valor teórico de los resultados obtenidos radica en que es posible obtener el sistema cerrado de las ecuaciones de filtrado para sólo dos variables, el estimado

óptimo $\hat{x}(t)$ y la matriz de elipsoide $S(t)$. Por el contrario a los sistemas estocásticos del tipo Volterra [8,9], en donde es necesario introducir una variable característica más para concluir el diseño de filtros.

Se propuso también una forma de control para el regulador óptimo con ecuaciones del tipo integral y con disturbios cuya característica era la pertenencia a un conjunto definido por un elipsoide, el cual se puede definir completamente.

References

- [1] Dimitri P. Bertsekas and Ian B. Rhodes, "Recursive State Estimation for a Set-Membership Description of Uncertainty," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-16, No. 2, April 1971, pp. 117-128.
- [2] Arthur J. Krener, "Kalman-Bucy and Minmax Filtering," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-25, No. 2, April 1980, pp. 291-292.
- [3] Brian D. O. Anderson and John B. Moore, "Optimal Control," Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1990.
- [4] Frank L. Lewis, "Optimal Control," New York: John Wiley & Sons, 1986.
- [5] R. E. Kalman, "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems," Trans. ASME, Journal of Basic Engineering, series D., vol. 82, 1960, pp. 35-44.
- [6] R. E. Kalman and R. S. Bucy, "New Results in Linear Filtering and Prediction Theory," Trans. ASME, Journal of Basic Engineering, series D., vol. 83, 1961, pp. 95-108.
- [7] Chi-Tsong Chen, "Linear System Theory and Design," Holt, Rinehart and Winston Series in Electrical and Computer Engineering, 1984.
- [8] M. L. Kleptsina and A. Yu. Veretennikov, "On Filtering and Properties of Conditional Laws of Ito-Volterra Processes," Statistics and Control of Stochastic Processes. Steklov Seminar. 1984. New York: Optimization Software Inc., Publication Division, pp. 179-196, 1985.
- [9] L. E. Shaikhet, "On an Optimal Control Problem of Partly Observable Stochastic Volterra's Process," Problems of Control and Information Theory, vol. 16, No. 6, pp. 439-448, 1987.



Apéndice C

ACC00-IEEE1238

MINMAX FILTERING IN VOLTERRA SYSTEMS

Michael V. Basin and Irma R. Valadez Guzman

Department of Electrical and Mechanical Engineering
Autonomous University of Nuevo Leon
Apdo postal 30-F, C.P. 66450, San Nicolas de los Garza
Nuevo Leon, Mexico
Phone: (52 8) 329 4020, ext. 5773
Fax: (52 8) 376 4514
E-mail: mbasin@gama.fime.uanl.mx

Abstract. This paper examines the minmax filtering problem for linear integral Volterra systems with deterministic uncertainties over observations given by either a differential equation or an integral Volterra equation as well. The solution is based on the Pontryagin minimum (maximum) principle, the Lagrange multipliers method, and the duality principle in Volterra systems. First, the optimal control (regulator) problem is solved and the Riccati equation for the optimal gain matrix is obtained for integral Volterra systems, and, second, the minmax filtering equation for the optimal estimate of a Volterra system state and the Riccati equation for its ellipsoid matrix are obtained over both differential and integral observations. Thus, in the case of deterministic uncertainties, it is possible to form a closed system of the minmax filtering equations for an integral system state over integral observations, using only two filtering variables, the optimal estimate and its ellipsoid matrix, although the analogous result cannot be reached in stochastic systems.

1. Introduction

This paper presents solutions of the minmax filtering and optimal control problems for linear integral Volterra systems with deterministic uncertainties. There are a number of papers investigating these problems for system state and observations given by differential equations [1, 2] or bivariate Volterra ones [3], however, the problems have not been solved yet in the general case of integral governing equations. The solution presented in the paper is based on applying the Pontryagin minimum (maximum) principle, the Lagrange multipliers method, and the duality principle [4] to integral Volterra systems. The duality principle enables one to use the optimal gain matrix structure in the control problem for the optimal matrix in the filtering one, as it was done for differential stochastic systems [5, 6]. As a result, it is possible to form a closed system of the minmax filtering equations for an integral system state over integral observations, using only two filtering variables, the optimal estimate and its ellipsoid matrix, although the analogous result cannot

be reached in stochastic systems (see [7, 8]). This encouraging result may be explained by the fact that deterministic uncertainties in the minmax filtering problem satisfy energy-type integral restrictions, i.e., belong to certain ellipsoids with fixed boundaries in functional spaces, and cannot take any possible values as stochastic Gaussian disturbances can.

The paper is organized as follows. The Section 2 presents the minmax filtering problem statement. The duality principle for integral Volterra systems is substantiated in Section 3. The optimal control (regulator) problem for integral Volterra systems is stated and solved in Section 4. Then, the minmax filtering problem for integral Volterra system states is solved using the duality principle (Section 3) and the solution to the optimal control problem (Section 4). In Section 5, the minmax filtering problem is also solved over observations governed by an integral Volterra equation.

2. Minmax Filtering Problem

Let us consider the linear system

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t A(t,s)x(s)ds + \int_{t_0}^t B(t,s)u(t,s)ds, \quad (1)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + v(t), \quad (2)$$

where $x(t) \in R^n$ is the system state, $y(t) \in R^m$ is the observation vector, $u(t,s) \in R^p$ is the input uncertainty, and $v(t) \in R^m$ is the observation disturbance. Both uncertainties are considered unknown deterministic ones and satisfy the following energy-type restriction:

$$\frac{1}{2} [x(t_0) \quad x_0]^T \Psi^{-1} [x(t_0) - x_0] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t [u^T(t,s)R(t,s)u(t,s) + v^T(s)Q(s)v(s)] ds < 1 \quad (3)$$

where x_0 is a given vector, and Ψ , R , Q are positive definite symmetric matrices.

The problem is to find the set of all possible system states $x(t)$ that satisfy the restriction (3) and are

compatible with the observations (2) from the initial moment t_0 up to the current moment t .

3. Duality Principle in Integral Systems

For dynamic systems governed by differential equations, solution of the optimal filtering problem can be obtained using the solution of the optimal control problem and the duality principle [9]. Thus, it would be helpful to introduce the duality principle for integral systems, as done below.

Let us first consider a dynamic system governed by a differential equation

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t), \end{aligned} \quad (4)$$

and the dual one

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= -A^T(t)z(t) + C^T(t)v(t), \\ \gamma(t) &= B^T(t)z(t) + D^T(t)v(t), \end{aligned} \quad (5)$$

where A^T , B^T , C^T , and D^T are transposes of matrices A , B , C , and D ; $\Phi_a(t_0, \cdot)$ and $\Phi_b(\cdot, t_0)$ are the state transition matrices for the systems (4) and (5), respectively. The system (4) is controllable (observable) at t_0 , if and only if the system (5) is observable (controllable) at t_0 .

The proof of the duality principle is based on the fact [9] that the system (4) is controllable (observable) at t_0 , if and only if there exists a finite time $t_1 > t_0$, such that n rows (n columns) of the matrix functions $\Phi_a(t_0, \cdot)B(\cdot)$ ($C(\cdot)\Phi_b(\cdot, t_0)$) are linearly independent in $[t_0, t_1]$, and the following equality [9] holds

$$\Phi_a(t_0, t) - \Phi_b^T(t, t_0).$$

Thus, the key point for substantiating the duality principle is existence of the state transition matrix $\Phi(t_0, \cdot)$ for a linear dynamic system (4) and representation of the general solution of an equation (4) in the form:

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau.$$

Let us propose the following similar form for the general solution of the integral Volterra equation (1)

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(t, \tau)u(t, \tau)d\tau. \quad (6)$$

This result can be proved as follows. Let $\psi(t)$ be the fundamental matrix of the homogeneous equation $\dot{x} = A(t)x$, $x(t) = \psi(t)x(t_0) + \int_{t_0}^t A(t, s)x(s)ds$, which thereby satisfies the equation

$$\dot{\psi}(t) = \psi(t)A(t), \quad \psi(t_0) = I.$$

The matrix $\Phi(t, t_0)$ defined as $\Phi(t, t_0) \triangleq \psi(t)\psi^{-1}(t_0)$ for all $t, t_0 \in (-\infty, \infty)$ is called the state transition matrix of the system (1) and satisfies the similar equation

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0). \quad (7)$$

Substituting (7) into (6), we obtain

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + \int_{t_0}^t A(t, s)\Phi(s, t_0)x(t_0)ds + \int_{t_0}^t B(t, \tau)u(t, \tau)d\tau \\ &+ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t A(t, s)\Phi(s, \tau)B(t, \tau)u(t, \tau)dsd\tau. \end{aligned}$$

Since the system [9] should be relaxed at t_0 , the last integral is equal to 0 for $\tau < t_0$, and the lower integration limit τ can be replaced by t_0 . This leads to the following form

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + \int_{t_0}^t A(t, s)\Phi(s, t_0)x(t_0) \\ &+ \int_{t_0}^t \Phi(s, \tau)B(t, \tau)u(t, \tau)d\tau ds + \int_{t_0}^t B(t, \tau)u(t, \tau)d\tau. \end{aligned}$$

Taking into account that the system should be causal, the upper limit t can be replaced by s in the integral in brackets. This finally yields the initial equation (1).

Hence, the expression (6) can be considered the general solution of the equation (1). This enables one to correctly introduce and use the state transition matrix for the system (1) governed by an integral equation, as well as for the system (1) governed by a differential one. Thus, taking into account the above-mentioned observability and controllability properties, the duality principle becomes also valid for integral Volterra systems in the form (1).

4. Optimal Control and Filtering

4.1. Hamiltonian function in integral systems

This section presents the method for solving the optimal control problems in the linear-quadratic case, that is based on the Pontryagin minimum (maximum) principle and the Lagrange multipliers method [4], and which enables one to unite the state equation and the cost criterion into one function. This method, which is well known and developed for systems governed by differential equations, can be appropriately modified for systems governed by integral Volterra equations as follows.

Let us consider the linear equation (1)

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),$$

and rewrite it in the form

$$\dot{x}(t) - A(t)x(t) - B(t)u(t) = 0.$$

The integral is equal to zero, if the subintegral function is equal to zero. Hence, to obtain the last equality, it may be assumed that

$$\dot{x}(s) - A(t, s)x(s) - B(t, s)u(t, s) = 0. \quad (8)$$

Consider the following quadratic cost function associated with the system (1)

$$J = [x(t_0) - x_0]^T \Psi^{-1} [x(t_0) - x_0] + \int_{t_0}^t L(x(s), u(t, s), t, s) ds,$$

where $[t_0, t_1]$ is the interval in question. Upon introducing an associated Lagrange multiplier $\lambda(t)$, the new cost criterion can be written as follows

$$J = [x(t_0) - x_0]^T \Psi^{-1} [x(t_0) - x_0] + \int_{t_0}^{t_1} L(x(s), u(t, s), t, s) ds + \lambda^T(s) [\dot{x}(s) + A(t, s)x(s) + B(t, s)u(t, s)] ds.$$

Then, upon defining the Hamiltonian function as

$$H(x, u, t, s) = L(x, u, t, s) + \lambda^T(s) [A(t, s)x(s) + B(t, s)u(t, s)],$$

the cost function takes the form:

$$J = [x(t_0) - x_0]^T \Psi^{-1} [x(t_0) - x_0] + \int_{t_0}^t [H(x, u, t, s) - \lambda^T(s)\dot{x}(s)] ds.$$

Because this criterion should reach its minimum, application of the Pontryagin minimum (maximum) principle [4] yields the following relations

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{x}, \quad \frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{\lambda}, \quad \frac{\partial H}{\partial u} = 0.$$

4.2. Optimal control problem statement

Consider the linear system (1). Substituting (2) into (3) determines a state vector $x(t)$, if and only if there exist a vector $x(t_0)$ and a function $u(t, s)$ defined in $[t_0, t]$, that are compatible with the system equation (1) and satisfy the restriction (3), and such that

$$J[x, t; u, x(t_0)] \leq 1, \quad (9)$$

where $J[x, t; u, x(t_0)]$ is defined as

$$J[x, t; u, x(t_0)] \triangleq \frac{1}{2} [x(t_0) - x_0]^T \Psi^{-1} [x(t_0) - x_0] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t u^T(t, s) R(t, s) u(t, s) ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t [y(s) - C(s)x(s)]^T Q(s) [y(s) - C(s)x(s)] ds. \quad (10)$$

The optimal control problem is to find the control $u(t, s)$ which satisfies the restriction (9) and minimizes the criterion (10).

Obviously, the desirable values $u(t, s)$ and $x(t_0)$ satisfying (9) and compatible with (1) exist, if and only if

$$J^*[x, t] \triangleq \min_{u(\cdot)} J[x, t; u, x(t_0)] \leq 1.$$

4.3. Optimal control problem solution

Substituting (10) into the last equations of Subsection 4.1, we obtain

$$\int_{t_0}^t [-C^T(s)Q(s)y(s) + C^T(s)Q(s)C(s)x(s) + A^T(t, s)\lambda(s)] ds + \lambda_0 = -\lambda(t) \quad (11)$$

and

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow R(t, s)u(t, s) + B^T(t, s)\lambda(s) = 0,$$

which yields the optimal control in the form

$$u^*(t, s) = -R^{-1}(t, s)B^T(t, s)\lambda(s). \quad (12)$$

Taking lineality of the problem into account, let us seek $\lambda(t)$ as a linear function

$$\lambda(t) = -P(t)x(t), \quad (13)$$

where $P(t_0) = \Psi^{-1}$, because $\lambda(t_0) = -\Psi^{-1}x(t_0)$.

Substituting (13) into (11) yields

$$0 = \int_{t_0}^t [C^T(s)Q(s)y(s) + C^T(s)Q(s)C(s)x(s) - A^T(t, s)P(s)x(s)] ds - P(t)x(t),$$

and, upon differentiating in time, we obtain

$$0 = -C^T(t)Q(t)y(t) + C^T(t)Q(t)C(t)x(t) - \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t A^T(t, s)P(s)x(s) ds - \dot{P}(t)x(t) - P(t)\dot{x}(t).$$

Rewriting this equality in the integral form

$$0 = \int_{t_0}^t [C^T(s)Q(s)y(s) + C^T(s)Q(s)C(s)x(s)] ds - \int_{t_0}^t A^T(t, s)P(s)x(s) ds - \int_{t_0}^t \dot{P}(s)x(s) ds - \int_{t_0}^t P(s)\dot{x}(s) ds$$

and substituting the relation (8) into it, we have

$$0 = \int_{t_0}^t [C^T(s)Q(s)y(s) + C^T(s)Q(s)C(s)x(s)] ds - \int_{t_0}^t A^T(t, s)P(s)x(s) ds - \int_{t_0}^t \dot{P}(s)x(s) ds + \int_{t_0}^t P(s) [A(t, s)x(s) + B(t, s)u(t, s)] ds.$$

Finally, substituting the control u^* given by (12)

$$0 = \int_{t_0}^t [-C^T(s)Q(s)y(s) + C^T(s)Q(s)C(s)x(s)] ds + \int_{t_0}^t [A^T(t, s)P(s)x(s) - \dot{P}(s)x(s) + P(s) [A(t, s)x(s) + B(t, s)R^{-1}(t, s)B^T(t, s)P(s)x(s)]] ds.$$

differentiating the obtained expression in x

$$0 = \int_{t_0}^t C^T(s)Q(s)C(s)ds - \int_{t_0}^t A^T(t,s)P(s)ds - \int_{t_0}^t \dot{P}(s)ds - \int_{t_0}^t P(s) [A(t,s) + B(t,s)R^{-1}(t,s)B^T(t,s)P(s)] ds,$$

and rearranging the terms, we obtain

$$0 - \int_{t_0}^t [C^T(s)Q(s)C(s) - A^T(t,s)P(s)ds - \dot{P}(s) - P(s)A(t,s) - P(s)B(t,s)R^{-1}(t,s)B^T(t,s)P(s)]ds.$$

Hence, a Riccati equation in the integral form

$$P(t) - \Psi^{-1} + \int_{t_0}^t [C^T(s)Q(s)C(s) - A^T(t,s)P(s) - P(s)A(t,s) - P(s)B(t,s)R^{-1}(t,s)B^T(t,s)P(s)]ds, \quad (14)$$

with the initial condition $P(t_0) = \Psi^{-1}$, is valid in the considered case. Thus, it can be concluded that the control law $u^*(t,s) = R^{-1}(t,s)B^T(t,s)P(s)x(s)$, where $P(s)$ satisfies the integral Riccati equation (14), solves the stated optimal control problem for integral Volterra systems.

4.4. Minmax filtering problem solution

Applying the duality principle established in Section 3 to the optimal control and filtering problems, the system dual to the system (1) should be represented as

$$x(t) - x(t_0) - \int_{t_0}^t A^T(t,s)x(s)ds + \int_{t_0}^t C^T(t,s)u(t,s)ds, \\ y(t) - B^T(t)x(t) + v(t),$$

and, considering the criterion,

$$J(x,t;u,x(t_0)) \triangleq \frac{1}{2} [x(t_0) - x_0]^T \Psi^{-1} [x(t_0) - x_0] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t (u^T(t,s)Q^{-1}(s)u(t,s) + [y(s) - B^T(s)x(s)]^T R^{-1}(t,s) [y(s) - B^T(s)x(s)])ds, \quad (15)$$

the control u^* should be given by

$$u^*(t,s) = Q(s)C(t,s)S(s)x(s). \quad (16)$$

Hence, following [1], the duality principle implies that the solution of the initial minmax filtering problem for the system state (1) over the observations (2) with the restriction (3) is given by the ellipsoid $X(t)$:

$$X(t) = \left\{ x(t) : [x(t) - \hat{x}(t)]^T S^{-1}(t) [x(t) - \hat{x}(t)] \leq 1 - \beta^2(t) \right\},$$

where $S(t)$ is the solution of the following integral Riccati equation

$$S(t) = \Psi + \int_{t_0}^t [B(s)R^{-1}(t,s)B^T(s) + A(t,s)S(s)] ds$$

$$+ \int_{t_0}^t [S(s)A^T(t,s) - S(s)C^T(t,s)Q(s)C(t,s)S(s)] ds,$$

with the initial condition $S(t_0) = \Psi$, and the positive real number β^2 is determined as follows

$$\beta^2(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t [y(s) - C(s)x(s)]^T Q(s) [y(s) - C(s)x(s)] ds$$

Moreover, the relation (16) implies that the optimal gain matrix in this filtering problem is

$$M^*(t,s) = S(s)C^T(t,s)Q(s),$$

and, therefore, the optimal estimate $\hat{x}(t)$ is the solution of the following equation

$$\hat{x}(t) - x_0 + \int_{t_0}^t A(t,s)\hat{x}(s)ds + \int_{t_0}^t B(t,s)u(t,s)ds + \int_{t_0}^t S(s)C^T(t,s)Q(s) [y(s) - C(t,s)\hat{x}(s)]ds.$$

5. Optimal Control and Filtering in Integral Systems

5.1. Minmax filtering problem statement

Consider the linear integral system

$$x(t) - x(t_0) + \int_{t_0}^t A(t,s)x(s)ds + \int_{t_0}^t B(t,s)u(t,s)ds, \\ y(t) = \int_{t_0}^t C(t,s)x(s)ds + \int_{t_0}^t G(t,s)v(t,s)ds, \quad (17)$$

where both state and observation equations are integral equations of the Volterra type, $x(t) \in R^n$ is the system state, $y(t) \in R^m$ is the observation vector, $u(t,s) \in R^p$ is the input uncertainty, and $v(t,s) \in R^m$ is the observation disturbance. Both uncertainties are considered unknown deterministic ones and satisfy the following energy-type restriction:

$$\frac{1}{2} [x(t_0) - x_0]^T \Psi^{-1} [x(t_0) - x_0] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t u^T(t,s)R(t,s)u(t,s)ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t v^T(t,s)G^T(t,s)Q(t,s)G(t,s)v(t,s)ds \leq 1, \quad (18)$$

where x_0 is a given vector, and Ψ , R , Q are positive definite symmetric matrices.

The problem is to find the set of all possible system states $x(t)$ that satisfy the restriction (18) and are compatible with the observations (17) from the initial moment t_0 up to the current moment t .

5.2. Optimal control problem solution

The approach of Section 4 is applied again to the optimal control and filtering problems for the system (17) with the restriction (18), i.e., first, the optimal control problem is solved, and, then, the optimal filtering problem is treated using the duality principle of Section 3.

In this case, the equation (17) takes the form

$$\int_{t_0}^t [\dot{y}(s) - C(t, s)x(s) - G(t, s)v(t, s)] ds = 0,$$

and, using the last equality, the criterion (18) can be represented as follows

$$\begin{aligned} J[x, t; u, x(t_0)] &\triangleq \frac{1}{2} [x(t_0) - x_0]^T \Psi^{-1} [x(t_0) - x_0] \\ &+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^t u^T(t, s) R(t, s) u(t, s) ds \\ &+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^t [\dot{y}(s) - C(t, s)x(s)]^T Q(t, s) [\dot{y}(s) - C(t, s)x(s)] ds. \end{aligned}$$

Following the procedure of Section 4, the equation (11) takes the form

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t [-C^T(t, s)Q(t, s)\dot{y}(s) + C^T(t, s)Q(t, s)C(t, s)x(s) \\ + A^T(t, s)\lambda(s)] ds + \lambda_0 = -\lambda(t), \end{aligned}$$

and the optimal control is given by

$$u^*(t, s) = R^{-1}(t, s)B^T(t, s)P(s)x(s),$$

where $P(t)$ is the solution of the following integral Riccati equation

$$\begin{aligned} P(t) &= \Psi^{-1} + \int_t^t [C^T(t, s)Q(t, s)C(t, s) - A^T(t, s)P(s) \\ &+ P(s)A(t, s) - P(s)B(t, s)R^{-1}(t, s)B^T(t, s)P(s)] ds. \end{aligned}$$

5.3. Minmax filtering problem solution

Following the procedure of Subsection 4.4, the optimal control for the dual system state is

$$u^*(t, s) = Q(t, s)C(t, s)S(s)x(s),$$

and the solution of the minmax filtering problem is given by ellipsoid $X(t)$:

$$X(t) =$$

$$\left\{ x(t) : x(t) - \hat{x}(t) \right\}^T S^{-1}(t) [x(t) - \hat{x}(t)] \leq 1 - \beta^2(t),$$

where $S(t)$ is the solution of the following integral Riccati equation

$$\begin{aligned} S(t) &= \Psi + \int_t^t [B(t, s)R^{-1}(t, s)B^T(t, s) + A(t, s)S(s)] ds \\ &+ \int_t^t [S(s)A^T(t, s) - S(s)C^T(t, s)Q(t, s)C(t, s)S(s)] ds. \end{aligned}$$

with the initial condition $S(t_0) = \Psi$, and the positive real number β^2 is determined as follows

$$\beta^2(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t [\dot{y}(s) - C(s)x(s)]^T Q(t, s) [\dot{y}(s) - C(s)x(s)] ds$$

The optimal gain matrix in this filtering problem is

$$M^*(t, s) = S(s)C^T(t, s)Q(t, s),$$

and, therefore, the optimal estimate $\hat{x}(t)$ is the solution of the following equation

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t A(t, s)\hat{x}(s) ds + \int_{t_0}^t B(t, s)u(t, s) ds \\ &+ \int_{t_0}^t S(s)C^T(t, s)Q(t, s) [\dot{y}(s) - C(t, s)\hat{x}(s)] ds. \end{aligned}$$

The obtained results show that the structure of the minmax filtering equations for linear deterministic Volterra system states under energy-type restrictions is similar to the structure of filtering equations for stochastic Ito-Volterra systems. As in the stochastic case, the results can be generalized for system states and observations with delays, due to Volterra kernels in state and observation equations.

References

- [1] D. P. Bertsekas and I. B. Rhodes, "Recursive state estimation for a setmembership description of uncertainty," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC 16, no. 2, pp. 117-128, 1971.
- [2] A. J. Krener, "Kalman-Bucy and minmax filtering," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC 25, no. 2, pp. 291-292, 1980.
- [3] E. B. Lee and Y. C. You, "Optimal control of bivariate linear Volterra integral type systems," *Proc. 26th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 721-726, 1987.
- [4] F. L. Lewis, *Optimal Control*, New York: Wiley, 1986.
- [5] R. E. Kalman, "A new approach to linear filtering and prediction problems," *Trans. ASME, J. of Basic Engineering, ser. D*, vol. 82, pp. 35-44, 1960.
- [6] R. E. Kalman and R. S. Bucy, "New results in linear filtering and prediction theory," *Trans. ASME, J. of Basic Engineering, ser. D*, vol. 83, pp. 95-108, 1961.
- [7] M. L. Kleptsina and A. Yu. Veretennikov, "On filtering and properties of conditional laws of Ito-Volterra processes," *Statistics and Control of Stochastic Processes. Steklov Seminar. 1984*, New York: Optimization Software Inc., Publication Division, pp. 179-196, 1985.
- [8] L. E. Shaikhet, "On an optimal control problem of partly observable stochastic Volterra's process," *Problems of Contr. and Inform. Theory*, vol. 16, no. 6, pp. 439-448, 1987.
- [9] C. T. Chen, *Linear System Theory and Design*, New York: Holt, Rinehart, and Winston, 1984.

Apéndice D

ACC00-IEEE1239

OPTIMAL MINMAX FILTERING AND CONTROL IN DISCONTINUOUS VOLTERRA SYSTEMS

Michael V. Basin and Irma R. Valadez Guzman

Department of Electrical and Mechanical Engineering
Autonomous University of Nuevo Leon
Apdo postal 30-F, C.P. 66450, San Nicolas de los Garza
Nuevo Leon, Mexico
Phone: (52 8) 329 4020, ext. 5773
Fax: (52 8) 376 4514
E-mail: mbasin@gama.fime.uanl.mx

Abstract. This paper presents solutions of the optimal minmax filtering problem for integral Volterra systems with deterministic uncertainties over discontinuous observations and the optimal linear-quadratic control problem for deterministic integral Volterra systems with discontinuous states. The equation for the optimal estimate in the filtering problem and the equation for the optimal gain matrix in both cases are obtained using the filtering procedure for deriving the filtering equations over discontinuous observations proceeding from the known filtering equations over continuous ones and the duality principle for integral systems. The technical example illustrating application of the obtained results is finally given.

1. Introduction

The optimal control and filtering problems for dynamic systems with delays, which represent a particular case of discontinuous integral systems, have been studied in a number of publications from various viewpoints (see, for example, [1], [2], [3] for dynamic systems and [4] for a particular case of integral Volterra ones). This attention is directly related to common use of dynamic systems with delays in global economy concepts [5], marketing models [6], technical systems [7], and others. Since the class of integral Volterra systems with discontinuous states includes the class of retarded dynamic systems, the study of discontinuous integral systems becomes a significant part of the control theory. Nevertheless, the integral Volterra systems have been of independent interest in the deterministic environment, as well as in the stochastic one (see [8]).

The optimal minmax filtering problem for dynamic systems over continuous observations was first stated and solved in [9]. The solution of this filtering problem for integral Volterra systems over continuous observations has been recently obtained in [10]. (Those results are briefly given here for reference). This paper presents solutions of the optimal minmax filtering problem for integral Volterra systems with deterministic uncertainties over discontinuous observations and the optimal

linear-quadratic control problem for deterministic integral Volterra systems with discontinuous states. In particular, the obtained results enable one to compute jumps of the optimal filtering and control parameters that can appear due to discontinuities in observations and states, respectively.

The minmax filtering equations over discontinuous observations are obtained using the filtering procedure ([11, 12]) for deriving the filtering equations over discontinuous observations proceeding from the known filtering equations over continuous ones, which have been obtained in [10]. The optimal control problem solution is based on the duality principle for integral systems, which has been also substantiated in [10] and is given here for reference.

The paper is organized as follows. The minmax filtering and optimal control problem in discontinuous integral Volterra systems are stated in Section 2. The solutions of these problems for continuous Volterra systems are briefly given in Section 3. Section 4 presents solution of the minmax filtering problem in the case of discontinuous observations. The duality principle for integral systems is stated in Section 5. Section 6 presents solution of the optimal control problem in integral Volterra systems with discontinuous states. The technical example illustrating application of the obtained results is given in Section 7.

2. Problem Statements

2.1. Minmax filtering problem for integral system states over discontinuous observations

Consider the linear integral system state

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t A(t, s)x(s)ds + \int_{t_0}^t B(t, s)u(t, s)ds, \quad (1)$$

and the discontinuous observations

$$y(t) = \int_{t_0}^t C(t, s)x(s)dw(s) + \int_{t_0}^t G(t, s)v(t, s)dw(s), \quad (2)$$

where both state and observation equations are integral equations of the Volterra type, $x(t) \in R^n$ is the nonobserved system state, $y(t) \in R^m$ is the observation vector, $u(t, s) \in R^p$ is the input uncertainty, $v(t, s) \in R^m$ is the observation disturbance, and $w(t)$ is a scalar bounded variation function. Both uncertainties are considered unknown deterministic ones and satisfy the following energy-type restriction

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [x(t_0) - x_0]^T \Psi^{-1} [x(t_0) - x_0] \\ & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t u^T(t, s) R(t, s) u(t, s) ds \\ & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t v^T(t, s) G^T(t, s) Q(t, s) G(t, s) v(t, s) dw(s) \leq 1, \end{aligned} \quad (3)$$

where x_0 is a given vector, and Ψ , R , Q are positive (nonnegative) definite symmetric matrices. The symbol a^T denotes transpose of a vector (matrix) a .

The problem is to find the set of all possible system states $x(t)$ governed by the state equation (1) that satisfy the restriction (3) and are compatible with the observations (2) from the initial moment t_0 up to the current moment t . The observation function $y(t)$ may be discontinuous due to discontinuity of the integral with discontinuous function $w(t)$ in the right-hand side of (2). This model of observations enables one to consider continuous and discrete observations in the common form: continuous observations correspond to the continuous component of a bounded variation function $w(t)$, and discrete observations correspond to its function of jumps.

2.2. Optimal control problem in integral system with discontinuous states

Let us consider the linear integral system with discontinuous state

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t A(t, s)x(s)ds + \int_{t_0}^t B(t, s)u(t, s)dw(s), \quad (4)$$

where $x(t) \in R^n$ is the discontinuous state vector, $u(t, s) \in R^p$ is the input uncertainty, and $w(t)$ is a scalar bounded variation function. The quadratic cost function J is defined as follows

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} [x(t_0) - x_0]^T \Psi^{-1} [x(t_0) - x_0] \\ &+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^t u^T(t, s) R(t, s) u(t, s) dw(s) \\ &+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^t x^T(s) Q(t, s) x(s) ds, \end{aligned}$$

where x_0 is a given vector, and Ψ , R , Q are positive (nonnegative) definite symmetric matrices.

The optimal control problem is to find the control $u^*(t)$, $t \in t_0, T$, that minimizes the criterion J along with the trajectory $x^*(t)$, $t \in t_0, T$, generated upon substituting $u^*(t)$ into the state equation (4). The state trajectory $x(t)$ may be discontinuous due to discontinuity of the integral with discontinuous function $w(t)$ in

the right-hand side of (4). This model of system states enables one to consider sharp changes (jumps) in system position, as well as its gradual continuous movement.

3. Optimal Minmax Filtering and Control in Continuous Integral Systems

This section presents the optimal minmax filter and control law for continuous integral Volterra systems, which have been obtained in [10]. The problem statements are considered the same as given in the preceding section, with the only difference that $w(s) = s$, i.e., only continuous components of the observation process (2) and the state vector (4) are considered.

3.1. Optimal minmax filtering

The solution of the minmax filtering problem is given by ellipsoid $X(t)$ -

$$\{x(t) : [x(t) \quad \hat{x}(t)]^T S^{-1}(t) [x(t) - \hat{x}(t)] < 1 - \beta^2(t)\},$$

where $S(t)$ is the solution of the following integral Riccati equation

$$\begin{aligned} S(t) &= \Psi + \int_{t_0}^t B(t, s) R^{-1}(t, s) B^T(t, s) ds \\ &+ \int_{t_0}^t A(t, s) S(s) ds + \int_{t_0}^t S(s) A^T(t, s) ds \\ &- \int_{t_0}^t S(s) C^T(t, s) Q(t, s) C(t, s) S(s) ds, \end{aligned} \quad (5)$$

with the initial condition $S(t_0) = \Psi$, and the positive real number β^2 is determined as follows $\beta^2(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t [\dot{y}(s) \quad C(s)x(s)]^T Q(t, s) [\dot{y}(s) - C(s)x(s)] ds$.

The optimal gain matrix in the filtering problem is

$$M^*(t, s) = S(s) C^T(t, s) Q(t, s),$$

and, therefore, the optimal estimate $\hat{x}(t)$ is the solution of the following equation:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t A(t, s) \hat{x}(s) ds + \int_{t_0}^t B(t, s) u(t, s) ds \\ &+ \int_{t_0}^t S(s) C^T(t, s) Q(t, s) [\dot{y}(s) - C(t, s) \hat{x}(s)] ds. \end{aligned} \quad (6)$$

3.2. Optimal control

The optimal control is given by:

$$u^*(t, s) = R^{-1}(t, s) B^T(t, s) P(s) x(s),$$

where $P(t)$ is the solution of the following Riccati equation

$$\begin{aligned} P(t) &= \Psi^{-1} + \int_t^T C^T(t, s) Q(t, s) C(t, s) ds \\ &+ \int_t^T [A^T(t, s) P(s) + P(s) A(t, s)] ds \\ &- \int_t^T P(s) B(t, s) R^{-1}(t, s) B^T(t, s) P(s) ds. \end{aligned} \quad (7)$$

4. Optimal Minmax Filtering over Discontinuous Observations

In [11], the filtering procedure is suggested to obtain filtering equations over discontinuous observations proceeding from the known filtering equations over continuous ones. To apply that filtering procedure to the examined problem, let us perform the following actions substantiated in [11]:

- assuming a function $w(t)$ in an observation equation (2) to be absolutely continuous, write the minmax filtering equations over continuous observations obtained in [10] (see the equations (5) (6) in Subsection 3.1);

- in thus obtained equations, assume the function $w(t)$ to be an arbitrary bounded variation one again, keeping in mind that the derivative $\dot{w}(t)$ can be a generalized function of zero singularity order (for example, δ -function).

As a result, the following system of the minmax filtering equations for a Volterra system state (1) over Volterra discontinuous observations (2) is obtained

$$\hat{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t A(t, s)\hat{x}(s)ds + \int_{t_0}^t B(t, s)u(t, s)ds \quad (8)$$

$$+ \int_{t_0}^t S(s)C^T(t, s)Q(t, s)[dy(s) - C(t, s)\hat{x}(s)dw(s)],$$

$$S(t) = \Psi + \int_{t_0}^t B(t, s)R^{-1}(t, s)B^T(t, s)ds \quad (9)$$

$$+ \int_{t_0}^t A(t, s)S(s)ds + \int_{t_0}^t S(s)A^T(t, s)ds$$

$$- \int_{t_0}^t S(s)C^T(t, s)Q(t, s)C(t, s)S(s)dw(s).$$

The obtained equations (8) (9) are integral equations with integration w.r.t. a vector discontinuous measure generated by a bounded variation function $w(t)$, which do not tell us how to compute jumps of the filtering variables (the estimate $\hat{x}(t)$ and its variance $S(t)$) at the discontinuity points of the function $w(t)$ and, therefore, the observation process $y(t)$. Nevertheless, in accordance with Theorem 3 in [12], the jumps can be computed solving the following system of differential equations

$$\frac{dx}{dw} = S(w)C^T(t, s)Q(t, s) \left[\frac{dy}{dw} - C(t, s)\hat{x}(w) \right],$$

$$\frac{dS}{dw} = S(w)C^T(t, s)Q(t, s)C(t, s)S(w),$$

$$x(w(t^-)) - x(t^-), \quad S(w(t^-)) = S(t^-),$$

which yields the following jump expressions

$$\Delta x(t) = S(t^-) \{ I + C^T(t, t)Q(t, t)C(t, t)S(t^-)\Delta w(t) \}^{-1}$$

$$\times C^T(t, t)Q(t, t)[\Delta y(t) - C(t, t)x(t^-)\Delta w(t)],$$

$$\Delta S(t) = S(t^-) \{ I + C^T(t, t)Q(t, t)C(t, t)$$

$$\times S(t^-)\Delta w(t) \}^{-1} - S(t^-).$$

Following [12], the obtained jump expressions can be incorporated into the filtering equations (8) (9), using the form of the equivalent equations with a measure

$$\hat{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t A(t, s)\hat{x}(s)ds + \int_{t_0}^t B(t, s)u(t, s)ds$$

$$+ \int_{t_0}^t S(s^-) \{ I + C^T(t, s)Q(t, s)C(t, s)S(s^-)\Delta w(s) \}^{-1}$$

$$\times C^T(t, s)Q(t, s)[dy(s) - C(t, s)\hat{x}(s^-)dw(s)], \quad (10)$$

$$S(t) = \Psi + \int_{t_0}^t B(t, s)R^{-1}(t, s)B^T(t, s)ds$$

$$+ \int_{t_0}^t A(t, s)S(s)ds + \int_{t_0}^t S(s)A^T(t, s)ds$$

$$- \int_{t_0}^t S(s^-) \{ I + C^T(t, s)Q(t, s)C(t, s)S(s^-)\Delta w(s) \}^{-1}$$

$$\times C^T(t, s)Q(t, s)C(t, s)S(s^-)dw(s), \quad (11)$$

where $\Delta w(t)$ and $\Delta y(t)$ are the jumps of the bounded variation function $w(t)$ and the observation process $y(t)$ at a point t , and $\hat{x}(t^-)$ and $S(t^-)$ are the values of the discontinuous filtering parameters (the estimate $\hat{x}(t)$ and its variance $S(t)$) at a point t from the left.

5. Duality Principle in Integral Systems

This section presents the duality principle for integral Volterra systems, which has been obtained in [10].

Consider the integral Volterra systems:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t A(t, s)x(s)ds + \int_{t_0}^t B(t, s)u(t, s)ds, \quad (12)$$

$$y(t) = \int_{t_0}^t C(t, s)x(s)ds + \int_{t_0}^t D(t, s)u(t, s)ds,$$

and

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t -A^T(t, s)z(s)ds + \int_{t_0}^t C^T(t, s)v(t, s)ds, \quad (13)$$

$$\gamma(t) = \int_{t_0}^t B^T(t, s)z(s)ds + \int_{t_0}^t D^T(t, s)v(t, s)ds.$$

The system (12) is controllable (observable) at t_0 , if and only if the system (13) is observable (controllable) at t_0 .

The proof of the duality principle [10] is based on the fact that there exists the transition matrix $\Phi(t, t_0)$; $t, t_0 \in (-\infty, \infty)$, such that

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(t, \tau)u(t, \tau)d\tau,$$

is the general solution of the integral Volterra equation (12).

6. Optimal Control in Integral System with Discontinuous States

Applying the duality principle to the solution of the optimal minmax filtering problem in the form of the equations (8) (9), the following dual results for the optimal control problem are obtained. The optimal control for the discontinuous linear integral system state (4) under the quadratic cost criterion is given by

$$u^*(t, s) = R^{-1}(t, s)B^T(t, s)P(s)x(s), \quad (14)$$

where the matrix $P(t)$ is the solution of the integral Riccati equation

$$P(t) - \Psi^{-1} + \int_0^t [Q(t, s) - A^T(t, s)P(s) - P(s)A(t, s)] ds + \int_0^t [P(s)B(t, s)R^{-1}(t, s)B^T(t, s)P(s)] dw(s), \quad (15)$$

and, upon substituting the optimal control $u^*(t, s)$ into the state equation (4), the latter takes the form

$$x(t) = x_0 + \int_t^t A(t, s)x(s)ds + \int_{t_i}^t B(t, s)R^{-1}(t, s)B^T(t, s)P(s)x(s)dw(s). \quad (16)$$

As the minmax filtering equations (8) (9), the obtained equations (15) (16) are integral equations with integration w.r.t. a vector discontinuous measure generated by a bounded variation function $w(t)$. In accordance with Theorem 3 in [12], the jumps of the state vector $x(t)$ and the matrix $P(t)$ at the discontinuity points of the function $w(t)$ can be computed solving the following system of differential equations

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dw} &= B(t, t)R^{-1}(t, t)B^T(t, t)P(w)x(w), \\ \frac{dP}{dw} &= P(w)B(t, t)R^{-1}(t, t)B^T(t, t)P(w), \\ x(w(t^+)) - x(t^-), & P(w(t^+)) - P(t^-), \end{aligned}$$

which yields the following jump expressions

$$\begin{aligned} \Delta x(t) &= B(t, t)R^{-1}(t, t)B^T(t, t) \\ &\quad \times P(t^-)x(t^-)\Delta w(t), \\ \Delta P(t) &= P(t^-)\{I + B(t, t)R^{-1}(t, t)B^T(t, t) \\ &\quad \times P(t^-)\Delta w(t)\}^{-1} - P(t^-), \end{aligned}$$

and the corresponding equivalent equations with a measure take the form

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_i}^t A(t, s)x(s)ds + \int_{t_i}^t B(t, s) \\ &\quad \times R^{-1}(t, s)B^T(t, s)P(s^-)x(s^-)dw(s), \quad (17) \\ P(t) &= \Psi^{-1} + \int_t^t [Q(t, s) - A^T(t, s)P(s)] ds \\ &\quad + \int_t^t P(s)A(t, s)ds - \int_t^t P(s^-) \\ &\quad \times \{I + B(t, s)R^{-1}(t, s)B^T(t, s)P(s^-)\Delta w(s)\}^{-1} \\ &\quad \times B(t, s)R^{-1}(t, s)B^T(t, s)P(s^-)dw(s). \quad (18) \end{aligned}$$

7. Movement of Missile with Impulsive and Jet Motors

Let us consider the optimal control problem for movement of a missile with two motors, impulsive and jet (continuous), whose task is to reach the maximal possible altitude at a certain time moment $T > 0$ with the minimal possible fuel consumption. The missile movement is considered governed by the following equations (cf. [7])

$$\begin{aligned} h(t) &= h_0 + \int_0^t v(s)ds, \\ m(t) &= m_0 + \int_0^t \frac{P_p(s)}{C(t, s)} ds, \\ v(t) &= \int_0^t \frac{P_p(s) - Q(h, v)}{m(s)} dw(s) - \int_0^t g ds, \end{aligned}$$

where $t_0 = 0$, $v(t)$ is the missile velocity, $v_0 = v(0) = 0$; $h_0 = h(0) > 0$ is the initial adjusted altitude corresponding the missile position on the earth surface, $h(t)$ is the current adjusted altitude;

$m(s)$ is the missile and fuel mass, $m_0 \gg 0$;

$P_p(t)$ is the propulsion force;

$C(t, s) < 0$ is the difference factor of the ideal velocities of the missile at time t and the outflowed fuel at time s , which is varying with change of altitude and, consequently, temperature, pressure, gravity acceleration, etc.;

g is the gravity acceleration; and

$w(s)$ is a bounded variation function which represents functioning of two missile motors, impulsive and jet (continuous): the jet motor expels fuel gradually and the impulsive one does this instantaneously at a certain time moment t_1 , $0 \leq t_1 \leq T$. Thus, the motors functioning is described using decomposition of $w(t)$ into its continuous component $w^c(t)$ (continuous jet) and the Heaviside function $\chi(t - t_1)$ with jump at the moment t_1 (impulsive motor), i.e., $w(t) = w^c(t) + \chi(t - t_1)$.

It is assumed that the atmosphere resistance force is absent: $Q(h, v) = 0$.

Upon selecting the mass outflow function $u(s) = \frac{\dot{m}(s)}{m(s)} = \frac{d}{ds} [\ln(m(s))]$ as control, the optimal control problem is completely stated for the system state $x(t) = [h(t), v(t)]$ governed by the equation

$$x(t) = x_0 + \int_0^t Ax(s)ds + \int_0^t B(t, s)u(s)dw(s) + \int_0^t Gds,$$

where

$$x(t) = \begin{bmatrix} h(s) \\ v(s) \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B(t, s) = \begin{bmatrix} 0 \\ C(t, s) \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}, u(s) = \frac{\dot{m}(s)}{m(s)} = \frac{d}{ds} [\ln(m(s))],$$

$x_0 = [h_0, 0]$, and the cost function to be minimized

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \left[x(T) - \begin{bmatrix} h^* \\ 0 \end{bmatrix} \right]^T \psi \left[x(T) - \begin{bmatrix} h^* \\ 0 \end{bmatrix} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t u(s)R^{-1}u(s)dw(s) \rightarrow \min_{u(t)} \end{aligned}$$

where

$\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $R = 1$; $h^* \gg h_0$, and $T > 0$ is a certain time moment.

In accordance with (14), the optimal control is given by

$$u^*(t, s) = \begin{bmatrix} 0 & C(t, s) \end{bmatrix} P(s) \begin{bmatrix} h(s) \\ v(s) \end{bmatrix}.$$

Note that the initial adjusted altitude $h_0 > 0$ is determined from the conditions $v(t_0) = 0$ and $\dot{v}(0) = 0$ (there is equilibrium of the missile on the earth surface at the initial time moment), which, upon substituting the optimal control $u^*(t, s)$ into the velocity equation, yield $0 = C(t_0, t_0)u^*(t_0, t_0) - g - C(0, 0)u^*(0, 0) - g$. Thus, the initial adjusted altitude $h_0 > 0$ is determined from the equation

$$g = C(0, 0) \begin{bmatrix} 0 & C(0, 0) \end{bmatrix} P(0) \begin{bmatrix} h_0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

In accordance with (17)–(18), the equations for an optimal trajectory $x(t)$ and the matrix $P(t)$ take the forms

$$\begin{aligned} P(t) &= P(t_0) - \int_t^{t_0} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} P(s) ds \\ &= \int_{t_0}^t P(s) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ds - \int_{t_0}^t P(s) \times \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right. \\ &+ \left. \begin{bmatrix} 0 \\ C(t, s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & C(t, s) \end{bmatrix} P(s) \Delta w(s) \right\}^{-1} \\ &\times \left[\begin{bmatrix} 0 \\ C(t, s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & C(t, s) \end{bmatrix} P(s) \right] dw(s), \end{aligned}$$

with the terminal condition $P(T) = \psi$, and

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(s) + G \right\} ds + \int_{t_0}^t \begin{bmatrix} 0 \\ C(t, s) \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} 0 & C(t, s) \end{bmatrix} P(s) x(s) dw(s), \end{aligned}$$

with the initial condition $x(0) = \begin{bmatrix} h_0 \\ 0 \end{bmatrix}$, and their jumps at the point t_1 , where the impulsive motor is applied, are equal to

$$\begin{aligned} \Delta P(t_1) &= P(t_1-) \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ C(t_1, t_1) \end{bmatrix} \right. \\ &\times \left. \begin{bmatrix} 0 & C(t_1, t_1) \end{bmatrix} P(t_1-) \Delta w(t_1) \right\}^{-1} \\ &\times \left[\begin{bmatrix} 0 \\ C(t_1, t_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & C(t_1, t_1) \end{bmatrix} P(t_1-) \Delta w(t_1), \right. \\ \Delta x(t_1) &= \left. \begin{bmatrix} 0 \\ C(t_1, t_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & C(t_1, t_1) \end{bmatrix} \right. \\ &\times \left. P(t_1-) x(t_1-) \Delta w(t_1). \right. \end{aligned}$$

Thus, the complete algorithm for solving this optimal control problem is described as follows:

- the equation for the matrix $P(t)$ with the terminal condition $P(T) = \psi$ and the jump $\Delta P(t_1)$ at the point t_1 is solved;
- the initial condition $P(0)$ is thus determined;

- the initial adjusted altitude h_0 is calculated;

- substituting $u^*(t, s)$ into the state equations and solving them with initial conditions $h(0) = h_0$ and $v(0) = 0$ yields the optimal trajectories $[h(t), v(t)] = x(t)$, where the velocity $v(t)$ has a jump at the point t_1 , and the adjusted altitude $h(t)$ is continuous;

- the desirable maximal altitude is determined as $h(T) - h_0$.

References

- [1] D. Chyung and E. B. Lee, "Linear optimal systems with time delays," *SIAM J. Contr.*, vol. 3, pp. 548–575, 1966.
- [2] M. C. Delfour, "The linear-quadratic optimal control problem with delays in state and control variables: a state space approach," *SIAM J. Contr.*, vol. 24, pp. 835–883, 1986.
- [3] R. L. Alford and E. B. Lee, "Sampled data hereditary systems: linear quadratic theory," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, pp. 60–65, 1986.
- [4] E. B. Lee and Y. C. You, "Optimal control of bivariate linear Volterra integral type systems," *Proc. 26th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 721–726, 1987.
- [5] G. L. Fonseca, *Keynesian Business Cycle Theory*, Department of Economics, Baltimore University, 1998.
- [6] R. F. Hartl, "Optimal dynamic advertising policies for hereditary processes," *J. Optim. Theory Appl.*, vol. 43, pp. 51–72, 1984.
- [7] A. E. Bryson and Y. C. Ho, *Applied Optimal Control*, New York: Hemisphere Publishing Company, 1979.
- [8] A. V. Balakrishnan, "On stochastic bang-bang control," *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, vol. 25, New York: Springer-Verlag, pp. 221–238, 1980.
- [9] D. P. Bertsekas and I. B. Rhodes, "Recursive state estimation for a setmembership description of uncertainty," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC 16, no. 2, pp. 117–128, 1971.
- [10] M. V. Basin and I. R. Valadez G., "Minmax filtering in Volterra systems," submitted to *American Control Conference 2000 (Chicago, IL, June 2000)*.
- [11] Yu. V. Orlov and M. V. Basin, "On minmax filtering over discrete-continuous observations," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-40, no. 9, pp. 1623–1626, 1995.
- [12] M. V. Basin and M. A. Villanueva L., "On filtering problems over Ito-Volterra observations," *Proc. American Control Conference 1999 (San Diego, CA, June 1999)*, pp. 3407–3412, 1999.

Apéndice E

ON FILTERING PROBLEMS OVER OBSERVATIONS WITH DELAYS

Michael V. Basin, Mario A. Villanueva Llanes, and Irma R. Valadez Guzman

Department of Electrical and Mechanical Engineering
Autonomous University of Nuevo Leon
Apdo postal 30-F, C P. 66450, San Nicolas de los Garza
Nuevo Leon, Mexico
E-mail: mbasin@gama.fime.uanl.mx

Abstract. In this paper, the optimal filtering equations over observations with delays are obtained for an Ito-Volterra process, proceeding from discontinuous observations of the Ito-Volterra type. It is shown that the designed filter can be significantly simplified for a dynamic system state governed by a differential equation. The filtering problems are considered over observations with single time delay, multiple delays, and a set of delays of the continuum power.

Keywords. Kalman-Bucy filtering, observations with delays, Ito-Volterra process

1. Introduction

A number of papers devoted to the Kalman filtering problem over observations with delays have been recently published (see [1-3] and bibliography there). In those papers, the authors suggested various direct or recurrent algorithms based on the classical Kalman model of observations [4] or the equation for the conditional probability density of a system state function with respect to observations [5]. However, analytic closed-form solution of the filtering problem over delayed observations readily follows, as shown in this paper, from the filtering equations over discontinuous observations of the Ito-Volterra type, which have been obtained in [6].

Following [6], the filtering problem for an Ito-Volterra process over observations with delays is first considered. As in the previous works [6-8] devoted to the Ito-Volterra filtering, it is impossible to obtain a closed system of filtering equations with respect to only two variables, the optimal estimate and its variance, and is necessary to introduce an additional cross-correlation function. Using these three variables, the filtering equations are obtained over observations with single time delay, as well as with multiple time delays allowing data fusion (see, for example, [9,10]). Then, it is shown that one can obtain more simplified filtering equations over delayed observations for a dynamic system state, if a system is governed by a differential equation. Using only two variables, the optimal estimate and its variance, the filtering equations for a dynamic system state are obtained over observations with multiple delays and a set of delays of the continuum power. This simplification enables one to use conventional numerical methods

applicable to differential equations for solving the obtained filtering ones.

The paper is organized as follows. The optimal filter over observations with delays for an Ito-Volterra process is designed in Section 2. Section 3 presents the optimal filter for a dynamic system state governed by a differential equation. Subsections correspond to various configurations of the set of observation delays: single delay, multiple delays, and a set of delays of the continuum power.

2. Filtering for Ito-Volterra process

2.1. Problem Statement

The following statement of the Kalman-Bucy filtering problem over discrete observations with delays is considered. Let (Ω, F, P) be a complete probability space with an increasing right-continuous family of σ -algebras $F_t, t \geq 0$, and let $(W^1(t), F_t, t \geq 0)$ be a Wiener process. The nonobserved F_t -measurable random process $x(t)$ satisfies the Ito-Volterra equation

$$x(t) = \int_0^t (a_0(t,s) + a(t,s)x(s))ds + \int_0^t b(t,s)dW^1(s), \quad (1)$$

and the F_t -measurable discrete observations with delays are given by

$$y(t_j) = A_0(t_j, t_i) + A(t_j, t_i)x(t_i) + B(t_j, t_i)\psi(t_i). \quad (2)$$

Here, $y(t_j) \in R^m$ are discrete observations at time moments $t_j, j = 0, 1, \dots$, and $x(t_i)$ is the value of the system state at a moment t_i available for measurement at the observation moment t_j . $A(t_j, t_i) \in R^{m \times n}$ are observation matrices, $\psi(t_i)$ are Gaussian noises independent of $W^1(t)$ and acting at the moments t_i . Let $A(t_j, t_i)$ be nonzero matrices, and $B(t_j, t_i)B^T(t_j, t_i)$ be positive definite ones.

The estimation problem is to find the best estimate for the Ito-Volterra process $x(t)$ at time t based on the observations $Y(t) = \{y(t_j), 0 \leq t_j \leq t\}$, that is the conditional expectation $m(t) = E(x(t) | F_t^Y)$. Let $P(t) = E((x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y)$ be the correlation function, where the symbol a^T means transposition of a vector (matrix) a , and F_t^Y be the σ -algebra generated by the observations $Y(t)$.

The solution of this filtering problem over discrete observations with delays is based on the solution of the filtering problem over Ito-Volterra discontinuous observations obtained in [6]. The model of Ito-Volterra discontinuous observations in [6] was defined as

$$y_i(t) = \int_0^t (A_{0i}(t, s) + (A_i(t, s), x(s))) du_i(s) + \int_0^t B_i(t, s) dW_i^2(u_i(s)), \quad i = 1, \dots, m, \quad (3)$$

where $A(t, s) = (A_1(t, s), \dots, A_m(t, s))^T$, $A_i(t, s) \in R^n$, $i = 1, \dots, m$; $B(t, s) = (B_1(t, s), \dots, B_m(t, s))^T$, $B_i(t, s) \in R^k$ is the i th row of the matrix $B(t, s)$; $A(t, s)$ is a nonzero matrix and $B(t, s)B^T(t, s)$ is a positive definite one; $\{W^2(t), F_t, t \geq 0\}$ is a Wiener process independent of $W^1(t)$; (a, b) is the scalar product in R^n .

The observation process $y(t)$ in (3) is characterized by a vector bounded variation function $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t)) \in R^m$, which is nondecreasing in the following sense: $u(t_2) \geq u(t_1)$ as $t_2 \geq t_1$ if $u_i(t_2) \geq u_i(t_1)$ for $i = 1, \dots, m$. This model of observations enables one to consider continuous and discrete observations in the common form: continuous observations correspond to the continuous component of a bounded variation function $u(t)$, and discrete observations correspond to its function of jumps.

Let us note that if the observation distribution function $u(t)$ is assumed to be piecewise constant with unit jump at the time moment t_i when information on the system state $x(t)$ is available, then the model of discontinuous observations (3) turns to the discrete observations with delays (2), considering $y(t_j) \in R^m$ as a vector of m components: $y(t_j) = (y_1(t_j), \dots, y_m(t_j))^T$. Thus, the desired filtering equations over observations with delays should follow from the results obtained in [6].

As well as in [6] and the previous works [7,8], in this problem it is impossible to obtain a closed system of filtering equations for variables $m(t)$ and $P(t)$ due to the Volterra nature of the observation equation (3), which cannot be reduced to a differential equation. Designing a closed filter requires introducing the additional function $f(t)$ characterizing a deviation of the best estimate $m(t)$ from the real state $x(t)$:

$$f(t, s) = E((x_s^t - m_s^t)(x(s) - m(s))^T | F_{t,s}^Y), \quad (4)$$

where

$$x_s^t = \int_0^s (a_0(t, \tau) + a(t, \tau)x(\tau)) d\tau + \int_0^s b(t, \tau) dW^1(\tau), \quad (5)$$

$F_{t,s}^Y$ is the σ -algebra generated by the random variables $Y(t, s) = \{y(t_j, s_i), 0 \leq t_j \leq t, 0 \leq s_i \leq s\}$

$$y(t_j, s_i) = A_0(t_j, s_i) + A(t_j, s_i)x(s_i) + B(t_j, s_i)\psi(s_i), \quad (6)$$

$$\text{and } m_s^t = E(x_s^t | F_{t,s}^Y).$$

Let us note that a closed system of filtering equations can be obtained for only two variables, $m(t)$ and $P(t)$, if a system state (1) is governed by a differential equation, in other words, in the case of a dynamic system. This important particular case is considered in Section 3.

2.2. Optimal Filter

As it was mentioned, the filtering equations for an Ito-Volterra process over discrete observations with delays follow from the filtering equations over Ito-Volterra discontinuous observations obtained in [6], if the observation distribution function $u(t)$ in (3) is the Heaviside function $\chi(t - t_i)$ with unit jump at the time moment t_i when information on the system state $x(t)$ is available (see the observation equation (2)). This yields the following result.

Proposition. The optimal estimate $m(t)$ for the state vector (1) over the discrete observations with delays (2), its correlation function $P(t)$, and its correlation characteristic (4) $f(t, s)$ satisfy the following equations between the observation moments t_j

$$m(t) = m(t_j, +) + \int_{t_j, +}^t (a_0(t, s) + a(t, s)m(s)) ds. \quad (7)$$

$$P(t) = P(t_j, +) + \int_{t_j, +}^t [a(t, s)f^T(t, s) + f(t, s)a^T(t, s) + b(t, s)b^T(t, s)] ds, \quad (8)$$

$$f(t, s) = f(t, t_j, +) + \int_{t_j, +}^s [a(t, r)f^T(s, r) + f(t, r)a^T(s, r) + (1/2)(b(t, r)b^T(s, r) + b(s, r)b^T(t, r))] dr, \quad (9)$$

and their jumps at the moments t_j of discrete observations are equal to

$$\Delta m(t_j) = f(t_j, t_i, -)[I + \quad (10)$$

$$A^T(t_j, t_i)(B(t_j, t_i)B^T(t_j, t_i))^{-1} \times A(t_j, t_i)f(t_j, t_i, -)^{-1} A^T(t_j, t_i)(B(t_j, t_i)B^T(t_j, t_i))^{-1} \times [y(t_j) - (A_0(t_j, t_i) + A(t_j, t_i)m(t_i, -))],$$

$$\Delta P(t_j) = -f(t_j, t_i, -)[I + A^T(t_j, t_i) \times (11)$$

$$(B(t_j, t_i)B^T(t_j, t_i))^{-1} A(t_j, t_i)f(t_j, t_i, -)^{-1} \times A^T(t_j, t_i)(B(t_j, t_i)B^T(t_j, t_i))^{-1} A(t_j, t_i)f^T(t_j, t_i, -),$$

$$\Delta f(t, t_j) = -[f(t, t_i, -)[I + (12)$$

$$(A^T(t, t_i)(B(t, t_i)B^T(t, t_i))^{-1} A(t, t_i)f(t, t_i, -) + A^T(t, t_i)(B(t, t_i)B^T(t, t_i))^{-1} A(t, t_i)f(t, t_i, -) -$$

$$(1/2)A^T(t_j, t_i)(B(t_j, t_i)B^T(t, t_i))^{-1} A(t, t_i)f(t, t_i, -) - (1/2)A^T(t, t_i)(B(t, t_i)B^T(t_j, t_i))^{-1} \times$$

$$A(t_j, t_i)f(t_j, t_i, -)]^{-1} \times$$

$$A^T(t_j, t_i)(B(t_j, t_i)B^T(t_j, t_i))^{-1} A(t_j, t_i)f^T(t_j, t_i, -) + f(t_j, t_i, -)[I + (A^T(t_j, t_i)(B(t_j, t_i)B^T(t_j, t_i))^{-1}$$

$$A(t_j, t_i)f(t_j, t_i, -) +$$

$$A^T(t, t_i)(B(t, t_i)B^T(t, t_i))^{-1} A(t, t_i)f(t, t_i, -) -$$

$$(1/2)A^T(t, t_i)(B(t, t_i)B^T(t, t_i))^{-1} A(t, t_i)f(t, t_i, -) - (1/2)A^T(t, t_i)(B(t, t_i)B^T(t_j, t_i))^{-1} \times$$

$$A(t_j, t_i)f(t_j, t_i, -)]^{-1} \times$$

$$A^T(t, t_i)(B(t, t_i)B^T(t, t_i))^{-1} A(t, t_i)f^T(t, t_i, -) -$$

$$\begin{aligned}
& (1/2)f(t_j, t_i-)[I + (A^T(t_j, t_i) \times \\
& (B(t_j, t_i)B^T(t_j, t_i))^{-1}A(t_j, t_i)f(t_j, t_i-)- \\
& A^T(t, t_i)(B(t, t_i)B^T(t, t_i))^{-1}A(t, t_i)f(t, t_i-)- \\
(1/2)A^T(t_j, t_i)(B(t_j, t_i)B^T(t, t_i))^{-1}A(t, t_i)f(t, t_i-)- \\
& (1/2)A^T(t, t_i)(B(t, t_i)B^T(t_j, t_i))^{-1} \times \\
& A(t_j, t_i)f(t_j, t_i-)]^{-1} \times \\
& A^T(t_j, t_i)(B(t_j, t_i)B^T(t, t_i))^{-1}A(t, t_i)f^T(t, t_i-)- \\
& (1/2)f(t, t_i-)[I + (A^T(t_j, t_i) \times \\
& (B(t_j, t_i)B^T(t_j, t_i))^{-1}A(t_j, t_i)f(t_j, t_i-)+ \\
& A^T(t, t_i)(B(t, t_i)B^T(t, t_i))^{-1}A(t, t_i)f(t, t_i-)- \\
(1/2)A^T(t_j, t_i)(B(t_j, t_i)B^T(t, t_i))^{-1}A(t, t_i)f(t, t_i-)- \\
& (1/2)A^T(t, t_i)(B(t, t_i)B^T(t_j, t_i))^{-1} \times \\
& A(t_j, t_i)f(t_j, t_i-)]^{-1} \times \\
& A^T(t, t_i)(B(t, t_i)B^T(t_j, t_i))^{-1}A(t_j, t_i)f^T(t_j, t_i-)],
\end{aligned}$$

where $m(s-)$, $P(s-)$ and $f(t, s-)$ are values from the left of $m(s)$, $P(s)$ and $f(t, s)$, considered as functions of s , at points s and (t, s) , respectively. Note that the function $f(t, s)$ is continuous in its first argument t . A number of numerical and approximate analytical methods for solving Volterra equations (7)–(9) can be found in [11].

2.3. Observations with Multiple Delays

The filtering equations over Ito-Volterra observations obtained in [6] enable us to consider multiple observation delays in the equation (2), thus allowing data fusion [9,10]. The corresponding observation process is given by

$$\begin{aligned}
y(t_j) &= \sum_{t_i} A_0(t_j, t_i) + \\
& A(t_j, t_i)x(t_i) + B(t_j, t_i)v(t_i). \quad (13)
\end{aligned}$$

Here, $y(t_j) \in R^m$ are discrete observations at time moments t_j , $j = 0, 1, \dots$ and $x(t_{j_1}), t_{j_1} = t_{j_1}, t_{j_2}, \dots$, is a set of the values of the system state at moments t_{j_1} available for measurement at the observation moment t_j , $A(t_j, t_{j_1}) \in R^{m \times n}$ are observation matrices, $\psi(t_{j_1})$ are Gaussian noises independent of $W^1(t)$ and acting at the moments t_{j_1} . Let $A(t_j, t_{j_1})$ be nonzero matrices, and $B(t_j, t_{j_1})B^T(t_j, t_{j_1})$ be positive definite ones.

The key point (based on the results of [6]) to obtain the optimal filter in this case is to assume that the observation distribution function $u(t)$ in (3) is a linear combination of the Heaviside functions $\sum_{t_{j_1}} \chi(t-t_{j_1})$ with unit jumps at the time moments t_{j_1} when information on system states $x(t)$ is available (see the observation equation (13)). This implies that the filtering equations (7)–(9) between the observation moments t_j remain the same and the equations (10)–(12) for jumps of the filtering variables at t_j take the form

$$\Delta m(t_j) = \sum_{t_i} \{f(t_j, t_i-)\} I \tau \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
& A^T(t_j, t_{j_1})(B(t_j, t_{j_1})B^T(t_j, t_{j_1}))^{-1} \times \\
& A(t_j, t_{j_1})f(t_j, t_{j_1}-)]^{-1} A^T(t_j, t_{j_1})(B(t_j, t_{j_1})B^T(t_j, t_{j_1}))^{-1} \times \\
& [y(t_j) - (A_0(t_j, t_{j_1}) + A(t_j, t_{j_1})m(t_{j_1}-))].
\end{aligned}$$

$$\Delta P(t_j) = - \sum_{t_{j_1}} \{f(t_j, t_{j_1}-)\} [I + A^T(t_j, t_{j_1}) \times \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
& (B(t_j, t_{j_1})B^T(t_j, t_{j_1}))^{-1}A(t_j, t_{j_1})f(t_j, t_{j_1}-)]^{-1} \times \\
& A^T(t_j, t_{j_1})(B(t_j, t_{j_1})B^T(t_j, t_{j_1}))^{-1}A(t_j, t_{j_1})f^T(t_j, t_{j_1}-), \\
& \Delta f(t, t_j) = - \sum_{t_{j_1}} \{f(t, t_{j_1}-)\} [I + \quad (16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (A^T(t_j, t_{j_1})(B(t_j, t_{j_1})B^T(t_j, t_{j_1}))^{-1}A(t_j, t_{j_1})f(t_j, t_{j_1}-)+ \\
& A^T(t, t_{j_1})(B(t, t_{j_1})B^T(t, t_{j_1}))^{-1}A(t, t_{j_1})f(t, t_{j_1}-)- \\
(1/2)A^T(t_j, t_{j_1})(B(t_j, t_{j_1})B^T(t, t_{j_1}))^{-1}A(t, t_{j_1})f(t, t_{j_1}-)- \\
& (1/2)A^T(t, t_{j_1})(B(t, t_{j_1})B^T(t_j, t_{j_1}))^{-1} \times \\
& A(t_j, t_{j_1})f(t_j, t_{j_1}-)]^{-1} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A^T(t_j, t_{j_1})(B(t_j, t_{j_1})B^T(t_j, t_{j_1}))^{-1}A(t_j, t_{j_1})f^T(t_j, t_{j_1}-)+ \\
& f(t_j, t_{j_1}-)[I + (A^T(t_j, t_{j_1})(B(t_j, t_{j_1})B^T(t_j, t_{j_1}))^{-1} \\
& A(t_j, t_{j_1})f(t_j, t_{j_1}-)+
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A^T(t, t_{j_1})(B(t, t_{j_1})B^T(t, t_{j_1}))^{-1}A(t, t_{j_1})f(t, t_{j_1}-)- \\
(1/2)A^T(t_j, t_{j_1})(B(t_j, t_{j_1})B^T(t, t_{j_1}))^{-1}A(t, t_{j_1})f(t, t_{j_1}-)- \\
& (1/2)A^T(t, t_{j_1})(B(t, t_{j_1})B^T(t_j, t_{j_1}))^{-1} \times \\
& A(t_j, t_{j_1})f(t_j, t_{j_1}-)]^{-1} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A^T(t, t_{j_1})(B(t, t_{j_1})B^T(t, t_{j_1}))^{-1}A(t, t_{j_1})f^T(t, t_{j_1}-)- \\
& (1/2)f(t_j, t_{j_1}-)[I + (A^T(t_j, t_{j_1}) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (B(t_j, t_{j_1})B^T(t_j, t_{j_1}))^{-1}A(t_j, t_{j_1})f(t_j, t_{j_1}-)+ \\
& A^T(t, t_{j_1})(B(t, t_{j_1})B^T(t, t_{j_1}))^{-1}A(t, t_{j_1})f(t, t_{j_1}-)- \\
(1/2)A^T(t_j, t_{j_1})(B(t_j, t_{j_1})B^T(t, t_{j_1}))^{-1}A(t, t_{j_1})f(t, t_{j_1}-)- \\
& (1/2)A^T(t, t_{j_1})(B(t, t_{j_1})B^T(t_j, t_{j_1}))^{-1} \times \\
& A(t_j, t_{j_1})f(t_j, t_{j_1}-)]^{-1} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A^T(t_j, t_{j_1})(B(t_j, t_{j_1})B^T(t, t_{j_1}))^{-1}A(t, t_{j_1})f^T(t, t_{j_1}-)- \\
& (1/2)f(t, t_{j_1}-)[I + (A^T(t_j, t_{j_1}) \times \\
& (B(t_j, t_{j_1})B^T(t_j, t_{j_1}))^{-1}A(t_j, t_{j_1})f(t_j, t_{j_1}-)+ \\
& A^T(t, t_{j_1})(B(t, t_{j_1})B^T(t, t_{j_1}))^{-1}A(t, t_{j_1})f(t, t_{j_1}-)- \\
(1/2)A^T(t_j, t_{j_1})(B(t_j, t_{j_1})B^T(t, t_{j_1}))^{-1}A(t, t_{j_1})f(t, t_{j_1}-)- \\
& (1/2)A^T(t, t_{j_1})(B(t, t_{j_1})B^T(t_j, t_{j_1}))^{-1} \times \\
& A(t_j, t_{j_1})f(t_j, t_{j_1}-)]^{-1} \times
\end{aligned}$$

$$A^T(t, t_{j_1})(B(t, t_{j_1})B^T(t_j, t_{j_1}))^{-1}A(t_j, t_{j_1})f^T(t_j, t_{j_1}-)].$$

Note that it is also possible to consider a set of observation delays (data fusion) of the continuum power, i.e., the system states are available for observation at every previous time moment. However, this problem completely coincides the filtering problem over Volterra observations, which has been considered in the general form in [6].

The next section presents the results for observations with delays in the important particular case of a dynamic system, if the state equation is a differential one.

3. Filtering for Dynamic System State

3.1. Observations with Multiple Delays

Let the general assumptions of Section 2 for a probability space and a Wiener process be satisfied. Let the nonobserved F_t -measurable random process $x(t)$ satisfy the state differential equation

$$dx(t) = (a_0(t) + a(t)x(t))dt + b(t)dW^1(t), \quad (17)$$

and the F_t -measurable discrete observations with multiple delays be given by the observation equation (13).

This simplification of the state equation (in comparison to the Ito-Volterra equation (1)) yields the following result based on the filtering equations (7)-(9) and (14)-(16). Let us note that the equality $x_s^t = x(s)$ holds due to coincidence of the equations (17) and (5) in this case. The σ -algebra $F_{t,s}^Y$ coincides with the σ -algebra F_s^Y , because, in view of (6), the σ -algebra $F_{t,s}^Y$ is actually specified by the random variables $x(t_{j_1}), t_{j_1} = t_{j_1}, t_{j_2}, \dots \leq s$, up to the moment s for any t and, therefore, $F_{t,s}^Y = F_{s,s}^Y = F_s^Y$. Thus, we can conclude that

$$f(t, s) = E((x_s^t - m_s^t)(x(s) - m(s))^T | F_{t,s}^Y) =$$

$$E((x(s) - m(s))(x(s) - m(s))^T | F_s^Y) = P(s) \quad (18)$$

$$\text{and } m_s^t = E(x_s^t | F_{t,s}^Y) = E(x(s) | F_s^Y) = m(s). \quad (19)$$

Two last equalities imply that it is possible to obtain a closed system of filtering equations with respect to only two variables, the optimal estimate $m(t)$ and its variance $P(t)$, as it was done in the standard Kalman-Bucy problem, although we still assume that observations are given with delays. Namely, the optimal estimate $m(t)$ for the state vector (17) over the discrete observations with multiple delays (13) and its correlation function $P(t)$ satisfy the following equations between the observation moments t_j ,

$$m(t) = m(t_j +) + \int_{t_j, +}^t (a_0(s) + a(s)m(s))ds, \quad (20)$$

$$P(t) = P(t_j +) + \int_{t_j, +}^t [a(s)P(s) + P(s)a^T(s) + b(s)b^T(s)]ds, \quad (21)$$

and their jumps at the moments t_j of discrete observations are equal to

$$\Delta m(t_j) = \sum_{t_j} \{P(t_j, -) [I +$$

$$A^T(t_j, t_{j_1})(B(t_j, t_{j_1})B^T(t_j, t_{j_1}))^{-1} \times \\ A(t_j, t_{j_1})P(t_{j_1}, -)^{-1} A^T(t_j, t_{j_1})(B(t_j, t_{j_1})B^T(t_j, t_{j_1}))^{-1} \times \\ [y(t_j) - (A_0(t_j, t_{j_1}) + A(t_j, t_{j_1})m(t_{j_1}, -))]\}. \quad (22)$$

$$\Delta P(t_j) = - \sum_{t_j} \{P(t_{j_1}, -) [I + A^T(t_j, t_{j_1}) \times$$

$$(B(t_j, t_{j_1})B^T(t_j, t_{j_1}))^{-1} A(t_j, t_{j_1})P(t_{j_1}, -)^{-1} \times$$

$$A^T(t_j, t_{j_1})(B(t_j, t_{j_1})B^T(t_j, t_{j_1}))^{-1} A(t_j, t_{j_1})P(t_{j_1}, -)\}.$$

Thus, the filtering equations (20)-(23) over discrete observations with delays have the same structure, up to necessary generalizations, as the standard Kalman-Bucy filtering equations for a continuous system state over discrete observations. Indeed, the systems (20)-(21) and (22)-(23) are closed with respect to only two filtering variables $m(t)$ and $P(t)$ and do not contain $f(t, s)$, unlike the equations (7)-(9) and (14)-(16). This significantly simplifies solution of these equations: it is possible to use conventional numerical methods for solving the equations (20)-(21) and to analytically compute jumps of the filtering variables at observation points, using the direct formulas (22)-(23).

The next subsection presents the optimal filter for the dynamic system state (17) over observations allowing a set of delays of the continuum power, i.e., the observation equation is assumed to be an integral equation of the Ito-Volterra type in the general form.

3.2. Observations with Continuum Delays

The following problem statement is considered. Let (Ω, F, P) be a complete probability space with an increasing right-continuous family of σ -algebras $F_t, t \geq 0$, and let $\{W^1(t), F_t, t \geq 0\}$ and $\{W^2(t), F_t, t \geq 0\}$ be independent Wiener processes. The partly observed F_t -measurable random process $(x(t), y(t))$ satisfies the equations

$$dx(t) = (a_0(t) + a(t)x(t))dt - b(t)dW^1(t), \quad (24)$$

$$y_i(t) = \int_0^t (A_{0i}(t, s) + (A_i(t, s), x(s)))du_i(s) + \\ + \int_0^t B_i(t, s)dW_i^2(u_i(s)), \quad i = 1, \dots, m. \quad (25)$$

Here, $x(t) \in R^n$ is a nonobserved component, and $y(t) \in R^m$ is an observed one for the process $(x(t), y(t))$. Functions $a_0(t), a(t), b(t)$ and functions $A_{0i}(t, s), A_i(t, s), B_i(t, s)$ are continuous in t and s . Let $A(t, s)$ be a nonzero matrix and $B_i(t, s)B_i^T(t, s)$ be a positive definite matrix. The function $u(t) = \{u_1(t), \dots, u_m(t)\} \in R^m$ is a vector nondecreasing function of bounded variation. The rest of the notation is the same as for the equation (3).

The estimation problem is to find the best estimate for the system state (24) $x(t)$ at time t based on the observation process $Y(t) = \{y(s), 0 \leq s \leq t\}$, that is the conditional expectation $m(t) = E(x(t) | F_t^Y)$. Let $P(t) = E((x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y)$ be the correlation function and F_t^Y be the σ -algebra generated by the observations $Y(t)$.

Let us note that the observation equation (25) actually gives us observations with a set of delays of the continuum power, because the observation process $y(t)$ at a point t depend on all values of the state vector $x(s)$: from $x(0)$ to $x(t)$. Thus, the allowed set of delays includes all time shifts from 0 to t , i.e., coincides with all the interval $[0, t]$, which has the power of continuum.

Since all the previous subsection propositions concerning validity of the equalities (18) (19) are also satisfied for the continuous Ito-Volterra observations (25),

the desired filtering equations readily follow from the filtering equations for an Ito-Volterra process over Ito-Volterra observations obtained in [6]. As a result, the following system of filtering equations for the dynamic system state (24) over the Ito-Volterra observations (25) is obtained.

$$m(t) = \int_0^t (a_0(s) + a(s)m(s))ds + \quad (26)$$

$$\int_0^t P(s-)[I + A^T(t,s)(B(t,s)B^T(t,s))^{-1} \times \\ A(t,s)P(s-)\Delta u(s)]^{-1} A^T(t,s)(B(t,s)B^T(t,s))^{-1} \times \\ [dy(s) - (A_0(t,s) + A(t,s)m(s-))du(s)], \\ \dot{P}(t) = \int_0^t [a(s)P(s) + P(s)a^T(s) + \quad (27) \\ b(s)b^T(s)]ds - \int_0^t P(s-)[I + A^T(t,s) \times \\ (B(t,s)B^T(t,s))^{-1} A(t,s)P(s-)\Delta u(s)]^{-1} \times \\ A^T(t,s)(B(t,s)B^T(t,s))^{-1} A(t,s)P(s-)du(s),$$

where $\Delta u(s)$ is a jump of the function $u(s)$ at s , $P(s-)$ and $m(s-)$ are values from the left of the functions $P(s)$ and $m(s)$ at s , I is the $n \times n$ -dimensional identity matrix. Note that multiplication by an m -dimensional measure $du(t)$ should be understood in the component-wise sense, as in the observation equation (25).

If, in the equation (25), $u(t) = t$ and the measure $du(t)$ is equal to the Lebesgue measure dt , we obtain the case of pure continuous observations with continuum delays. Therefore, the filtering equations (26)–(27) are valid with $\Delta u(s) = 0$, $du(t) = t$, and the continuous functions $m(s-) = m(s)$ and $P(s-) = P(s)$.

If the bounded variation function $du(t)$ and, therefore, the observation process $y(t)$ have both continuous and discrete components, we examine the case of discontinuous observations with continuum delays. The corresponding jumps of the filtering variables $m(t)$ and $P(t)$ at a discontinuity point t_i of $u(t)$ (and $y(t)$) are equal to the expressions under the integral signs in the right-hand sides of (26)–(27), upon substituting the jumps $\Delta u(t_i)$ and $\Delta y(t_i)$ for differentials $du(t)$ and $dy(t)$, respectively.

Since the system of filtering equations (26)–(27) is also closed with respect to only two filtering variables $m(t)$ and $P(t)$ and do not contain $f(t,s)$, unlike the filtering equations for an Ito-Volterra process obtained in [6], all the remarks concerning simplification of numerical solution of these equations remain valid as well as in the previous subsection.

4. References

1. T.D. Larsen, N.A. Andersen, O. Ravn, and N.K. Poulsen, "Incorporation of the time-delayed measurements in a discrete-time Kalman filter," *Proc. 37th Conference on Decision and Control 1998, (Tampa, FL, December 1998)*, pp. 3972–3977, 1998.

2. F.H. Hsiao and S.T. Pan, "Robust Kalman filter synthesis for uncertain multiple time-delay stochastic systems," *J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1996.
3. H.L. Alexander, "State estimation for distributed systems with sensing delay," *SPIE. Data Structures and Target Classification*, vol. 1470, 1991.
4. R.E. Kalman, "A new approach to linear filtering and prediction problems," *ASME Trans., Part D (J. of Basic Engineering)*, vol. 82, pp. 35–45, 1960.
5. P. Frost and T. Kailath, "An innovations approach to least squares estimation — Part III: Nonlinear estimation in white Gaussian noise," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-16, no. 6, pp. 217–226, 1971.
6. M.V. Basin and M.A. Villanueva Llanes, "On filtering problems over Ito-Volterra observations," *Proc. American Control Conference 1999 (San Diego, CA, June 1999)*, pp. 3407–3412, 1999.
7. M.L. Kleptsina and A.Yu. Veretennikov, "On filtering and properties of conditional laws of Ito-Volterra processes," *Statistics and Control of Stochastic Processes. Steklov Seminar. 1984*, New York: Optimization Software Inc., Publication Division, pp. 179–196, 1985.
8. L.E. Shaikhet, "On an optimal control problem of partly observable stochastic Volterra processes," *Problems of Control and Inform. Theory*, vol. 16, no. 6, pp. 439–448, 1987.
9. Y. Bar-Shalom and X.R. Li, *Estimation and Tracking: Principles, Techniques, and Software*. Artech House, 1993.
10. C.K. Chui and G. Chen, *Kalman Filtering with Real-Time Applications*, Berlin et al.: Springer-Verlag, 1991.
11. A.S. Cakmak, J.F. Botha, and W.G. Gray, *Computational and Applied Mathematics for Engineering Analysis*. Southampton: Springer-Verlag, Computational Mechanics Publications, 1987.

Referencias

- [1] D. P. Bertsekas and I. B. Rhodes, "Recursive State Estimation for a Set-Membership Description of Uncertainty," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-16, No. 2, April 1971, pp. 117-128.
- [2] F. Schweppe, "*Uncertain Dynamic Systems*," Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1973.
- [3] F. Schweppe, "Recursive State Estimation: Unknown but Bounded Errors and System Inputs," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-13, Feb. 1968, pp. 22-28.
- [4] A. J. Krener, "Kalman-Bucy and Minmax Filtering," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-25, No. 2, April 1980, pp. 291-292.
- [5] B. D. O. Anderson and J. B. Moore, "*Optimal Control*," Linear Quadratic Methods, Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, Information and Systems Science Series, 1990.
- [6] F. L. Lewis, "*Optimal Control*," New York: John Wiley & Sons, 1986.
- [7] R. E. Kalman, "Contributions to the Theory of Optimal Control," *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, vol. 5, 1960, pp. 102-119.
- [8] R. E. Kalman, "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems," *Trans. ASME, Journal of Basic Engineering*, series D, vol. 82, 1960, pp. 35-44.
- [9] R. E. Kalman and J. E. Bertram, "Control System Analysis and Design via the 'Second Method' of Lyapunov-I. Continuous-time Systems," *Trans. ASME, Journal of Basic Engineering*, June 1960, pp. 371-393.
- [10] R. E. Kalman and R. S. Bucy, "New Results in Linear Filtering and Prediction Theory," *Trans. ASME, Journal of Basic Engineering*, series D., vol. 83, 1961, pp. 95-108.
- [11] C.-T. Chen, "*Linear System Theory and Design*," Holt, Rinehart and Winston Series in Electrical and Computer Engineering, 1984.
- [12] M. L. Kleptsina and A. Yu. Veretennikov, "On Filtering and Properties of Conditional Laws of Ito-Volterra Processes," *Statistics and Control of Stochastics Processes. Steklov Seminar*. 1984, New York: Optimization Software Inc., Publication Division, 1985, pp. 179-196.
- [13] L. E. Shaikhet, "On an Optimal Control Problem of Partly Observable Stochastic Volterra's Process,"

Problems of Control and Information Theory, vol. 16, No. 6, 1987, pp. 439-448.

- [14] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko, *"The Mathematical Theory of Optimal Processes,"* Moscow, 1961, translated by K. N. Trilogoff, edited by L. W. Neustadt, Interscience, N.Y., 1962.
- [15] F. L. Chernousko, *"State Estimation for Dynamic Systems,"* CRC Press, 1994.
- [16] E. B. Lee and Y. C. You, "Optimal Control of Bivariate Linear Volterra Integral Type Systems," in Proc. 26th IEEE Conference on Decision and Control, 1987, pp. 721-726.
- [17] M. V. Basin and M. A. Villanueva L., "On Filtering Problems over Ito-Volterra Observations," Proc. American Control Conference 1999 (San Diego, CA, June 1999), 1999, pp. 3407-3412.
- [18] A. E. Bryson and Y. C. Ho, *"Applied Optimal Control,"* New York: Hemisphere Publishing Company, 1969 (first edition), 1979 (second edition).
- [19] A. V. Balakrishnan, "On Stochastic Bang Bang Control," Lectures Notes in Control and Information Sciences, vol. 25, New York: Spriger-Verlag, 1980, pp. 221-238.
- [20] Elsgolc, L. E., *"Calculus of Variations,"* Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1962.
- [21] I. M. Gelfand and S. V. Fomin, *"Calculus of Variations,"* Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1963.
- [22] K. M. Nagpal and P. Khargonekar, "Filtering and Smoothing in an H^∞ Setting," IEEE Trans. Automat. Control, vol. 36, No. 2, February 1991, pp. 152-166.
- [23] N. Wiener, *"The Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series,"* John Wiley and Sons Inc., New York, 1949.
- [24] A. N. Kolmogorov, "Interpolation and Extrapolation," Bull. Acad. Sci. USSR, Ser. Math, vol. 5, 1941, pp. 3-14.
- [25] R. Bellman, *"Dynamic Programming,"* Princeton, New Jersey: Princeton University Press., 1957.
- [26] A. B. Kurzhansky, "Control and Observation under Uncertainty Conditions," Nauka, Moscow, 1977.
- [27] K. Ito, "On the Existence and Uniqueness of Solutions of Stochastic Integral Equations of the Volterra Type," Kodai Math. Journal, No. 2, 1979, pp. 158-170.

- [28] M. V. Basin, "On Filtering of Ito-Volterra Processes over Discrete-Continuous Observations," *Automation and Remote Control*, vol.53, No. 8, Part 1, 1992, pp. 1183-1192.
- [29] Y. V. Orlov and M. V. Basin, "On Minimax Filtering over Discrete-Continuous Observations," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. AC-40, No. 9, 1995, pp. 1623-1626.
- [30] A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, "*Introductory Real Analysis*," New York: Dover, 1975.
- [31] R. S. Liptser and A. N. Shiriyayev, "*Statistics of Random Processes I: General Theory*," New York, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics, 1977.
- [32] A. N. Shiriyayev, "*Probability*," New York, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics, 1984.
- [33] J. M. Amillo y F. de Arriaga, "*Análisis Matemático con Aplicaciones a la Computación*," Editorial Mc Graw-Hill, 1987.
- [34] A. S. Cakmak, J. F. Botha, and W. G. Gray, "*Computational and Applied Mathematics for Engineering Analysis*," New York, Springer-Verlag, Computational Mechanics Publications Southampton Boston, 1987.
- [35] A. C. Antoulas, "*Mathematical System Theory: the Influence of R. E. Kalman*," New York, Springer-Verlag, 1991.
- [36] S. K. Mitter, "Filtering and Stochastic Control: A Historical Perspective," *Control Systems*, 16 (3), 1996, pp. 67-76.
- [37] P. Frost and T. Kailath, "An Innovations Approach to Least Squares Estimation-Part III: Nonlinear Estimation in White Gaussian Noise," *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-16, June 1971, pp.217-226.
- [38] S. Bittanti, A. J. Laub, and J. C. Willems, Eds., "*The Riccati Equation*," Springer-Verlag, New York, 1991.
- [39] Y. V. Orlov, "*Theory of Optimal Systems with Generalized Controls*," Nauka, Moscow, 1988.
- [40] A. F. Filippov, "*Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side*," Kluwer Academic Publishers, New York, 1988.
- [41] Y. V. Orlov, "Vibrocorrect Differential Equations With Measure," *Mathematical Notes*, 38, No. 1, 1985, pp. 110-119.
- [42] M. V. Basin, M. A. Villanueva L., and Irma R. Valadez G., "On Filtering Problems over Observations

- with Delays," IEEE Conference on Decision and Control (CDC), Diciembre 1999, pp. 4572-4577.
- [43] L. Schwartz, "Théorie des Distributions," I, II, Hermann, Paris, 1950,1951.
- [44] M. V. Basin and Irma R. Valadez G., "Minmax Filtering in Volterra Systems," Proc. ACC 2000, pp. id. ACC-IEEE1238, 2000.
- [45] M. V. Basin and Irma R. Valadez G., "Optimal Minmax Filtering and Control in Discontinuous Volterra Systems," Proc. ACC 2000, pp. id. ACC-IEEE1239, 2000.
- [46] Irma R. Valadez G. y M. V. Basin, "Algoritmos de Filtrado Minimáximo en Sistemas Integrales de tipo Volterra," Quinta Conferencia de Ingeniería Eléctrica CIE-99, CINVESTAV-IPN, Septiembre 1999, pp.152-157.

