

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



OBSERVADORES NO LINEALES PARA
GENERADORES SINCRONOS

T E S I S

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO
EN CIENCIAS DE LA INGENIERIA ELECTRICA
CON ESPECIALIDAD EN CONTROL

POR

OSCAR FRANCISCO HUERTA GUEVARA

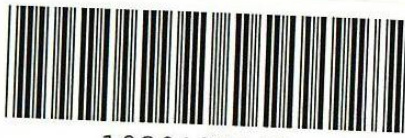
SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L. MAYO DE 2000

OBSERVADORES NO LINEALES PARA
SERIES DE DATOS
H8

LIJANTE
FINO

TM
Z5853
.M2
FINE
2000

W



1020130099

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



OBSERVADORES NO LINEALES PARA
GENERADORES SINCRONOS

T E S I S

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO
EN CIENCIAS DE LA INGENIERIA ELECTRICA
CON ESPECIALIDAD EN CONTROL

POR

OSCAR FRANCISCO HUERTA GUEVARA

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L. MAYO DE 2000

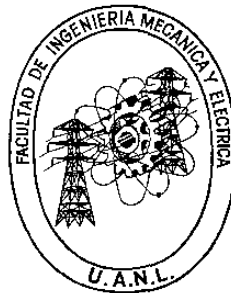
TM
Z5853
• M2
FINE
2000
H8

0136-84460



FONDO
TESIS

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



OBSERVADORES NO LINEALES PARA GENERADORES SINCRONOS

POR

OSCAR FRANCISCO HUERTA GUEVARA

TESIS

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA INGENIERIA
ELECTRICA CON ESPECIALIDAD EN CONTROL.

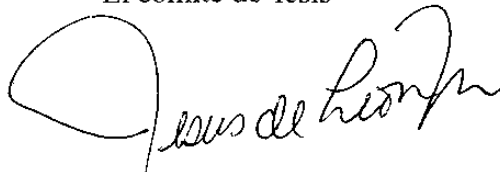
SAN NICOLAS DE LOS GARZA NUEVO LEON

MAYO DEL 2000


UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis **OBSERVADORES NO LINEALES PARA GENERADORES SINCRONOS**, realizada por el Ing. Oscar Francisco Huerta Guevara sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestro en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica con especialidad en Control.


El comité de Tesis




Asesor de Tesis
Dr. Jesús de León Morales



Coasesor
Dr. Joaquín Collado Moctezuma



Coasesor
Dr. José Antonio de la O Serna



vo. Bo.
Ing. Roberto Villareal Guerra
División de Estudios de Postgrado.



FONDO
TESIS/

Copyright 2000
por Oscar Francisco Huerta Guevara
Reservados Todos los Derechos

Dedicatoria:

A mis padres Francisco Huerta Quezada y Margarita Guevara Jiménez por todo el tiempo, energías y enseñanzas que me dedicaron y que contribuyeron en gran medida a la elaboración de este trabajo.

A mis hermanos Jorge, Juan y Sandra, quienes siempre han estado conmigo preocupándose y apoyándome en todos mis proyectos y decisiones.

Agradecimientos

A *Jehová Dios* por permitirme realizar este trabajo.

Al Dr. Jesús de León Morales por darme la guía, formación y apoyo necesarios para llevar a cabo este trabajo.

También deseo expresar un sincero agradecimiento a los profesores del programa doctoral que contribuyeron con sus cátedras a mi formación académica, especialmente al Dr. Joaquín Collado Moctezuma, Dr. José Antonio de la O Serna, Dr. Mikhail V. Basin, Dr. Krishna K. Busawon y al Dr. Juan M. Ramírez Arredondo.

A todos mis compañeros del programa, Ma. de los Angeles Carrera, Irma Valadez, Gustavo Pérez, Mario Villanueva, David Díaz, Francisco Florenzano y Cesar Guerra, por la amistad y cariño que siempre me brindaron.

A mis tíos Alfonso Huerta y Esther Hernández y a la familia Cuevas Martínez, Carlos, Neli-da y Daniel, que me abrieron gentilmente las puertas de sus casas. Igualmente deseo agradecer a Abigaíl Guerrero por la revisión ortográfica que hizo de esta tesis.

Al CONACyT y a la Universidad Autónoma de Nuevo León por su apoyo económico sin el cual no pudiera haber efectuado este trabajo.

Agradecimientos

Mención especial de agradecimiento quiero hacer al CONACyT ya que gracias al proyecto de Investigación CONACyT No. 26498-A, con título: "Control de Generadores Síncronos Mediante Técnicas de Control no Lineal" del cual es responsable el Dr. Jesús de León Morales, me fue posible dar por terminada esta investigación.

Resumen

Observadores No Lineales Para Generadores Síncronos.

Publicación No. _____

Oscar Francisco Huerta Guevara

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Profesor Asesor: Dr. Jesús de León Morales

Mayo, 2000

Los sistemas de potencia cada vez cobran más importancia en el desarrollo económico de un país. Por otra parte, el suministro ininterrumpido en el flujo de energía, aunado al constante aumento en la calidad y la demanda de la misma, hacen necesario la implementación de estrategias de control cada vez más eficientes y sofisticadas.

En esta tesis se presentó un estudio sobre el modelado de un generador síncrono conectado a un bus infinito. Un estudio basado en la técnica de la *variedad integral*, hizo posible encontrar y justificar el uso de un modelo reducido, el cual es utilizado para fines de diseño de controladores y observadores. El diseño de un algoritmo de control basado en técnicas de control no lineal, se aplicó para controlar el ángulo del rotor de una máquina síncrona, el cual está relacionado con el voltaje de terminales.

Sin embargo, no todas las variables de los diferentes procesos son medibles, y para poder implementar el algoritmo de control es necesario hacer una estimación de estas variables. Por lo tanto, en esta tesis se presentan técnicas ya desarrolladas basadas en alta ganancia y modos deslizantes, y de esta última se hizo una extensión tanto para el caso de una entrada y una salida como par el caso multivariable, la cual constituye el resultado principal de este trabajo. A partir, de estas técnicas de estimación de las variables que son necesarias para poder implementar el algoritmo de control, se presentó mediante simulación, un análisis comparativo del desempeño de estas cuando los algoritmos son aplicados al modelo matemático del generador síncrono.

Los temas antes mencionados han sido tratados para sistemas con una sola unidad generadora de energía por algunos investigadores. Sin embargo, en este estudio se extendieron estos resultados al caso multimáquinas, es decir, cuando muchas máquinas están interconectadas, y se desea que estas mantengan sincronía entre sí. Los algoritmos presentados en el desarrollo de esta tesis y aplicados ahora a este tipo de sistemas multivariable, mostraron un desempeño similar al caso de un solo generador.

Notación

\prod	Producto
\in	Pertenece a
\notin	No pertenece a
\forall	Para toda
\Rightarrow	Implica
\rightarrow	Tiende a
$\ \cdot\ _l$	Norma l de \cdot
$ \cdot $	Valor absoluto de \cdot
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Producto interno
A	Matriz
A^T	Traspuesta de la matriz A
A^{-1}	Inversa de la matriz A
\mathbb{R}	Conjunto de los números reales
\mathbb{R}^n	Espacio vectorial de dimensión n con componentes reales
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Espacio vectorial de las matrices de dimensión $n \times m$ con componentes reales
sup	supremo, máxima cota superior
max	máximo
C^∞	Conjunto de funciones continuamente diferenciables
$L_f h$	Derivada de Lie (ver apéndice C)
$[f, g]$	Corchete de Lie (ver apéndice C)
\dot{x}	Derivada completa de x con respecto al tiempo

Indice

1	INTRODUCCIÓN	1
1.1	Generalidades	1
1.2	Antecedentes	2
1.3	Organización de la Tesis	3
2	MODELADO MATEMÁTICO	4
2.1	Introducción	4
2.2	Descripción Matemática de una Máquina Síncrona	5
2.2.1	Ecuaciones en el Circuito del Estator	7
2.2.2	Ecuaciones del Circuito del Rotor	7
2.2.3	Transformación a los Ejes dq	8
2.2.4	Ecuaciones de Voltaje en el Estator en Componentes $dq0$	9
2.2.5	Potencia y Torque Eléctrico	10
2.2.6	Ecuación de Balanceo	12
2.3	Representación de la Máquina Síncrona para estudios de Estabilidad	13
2.4	Variedad Integral	16
2.4.1	Preliminares Matemáticos	17
2.5	Generador Síncrono	21
2.6	Resultados de Simulación	23
3	CONTROL MEDIANTE RETROALIMENTACIÓN DE ESTADO	27

3.1	Introducción	27
3.2	Control de Excitación	28
3.3	Esquema de Control por Retroalimentación Linealizante	30
3.4	Transformación de Coordenadas	32
3.5	Linealización Mediante Retroalimentación de Estado	35
3.6	Aplicación al Modelo del Generador Síncrono	40
3.6.1	Propiedades Estructurales	40
3.6.2	Ley de control.	41
3.7	Resultados de Simulación	42
4	ESTIMACIÓN DEL ESTADO	45
4.1	Introducción	45
4.2	Observador de Alta Ganancia	48
4.3	Observador Basado en Modos Deslizantes	52
4.3.1	Variedad Deslizante	52
4.3.2	Definición de Movimiento Deslizante	53
4.4	Resultados de simulación	66
5	SISTEMA MULTIMÁQUINA	71
5.1	Introducción	71
5.2	Modelo Matemático	73
5.3	Control	78

5.3.1	Transformación de Coordenadas	79
5.3.2	Diseño de la ley de Control	81
5.4	Estimación del Estado	83
5.5	Resultados de Simulación	87
6	CONCLUSIONES	93
6.1	Contribuciones de esta Tesis	93
6.2	Trabajos Futuros	95
APENDICE A	LEY DE FARADAY	96
APENDICE B	LISTA DE SÍMBOLOS PARA EL GENERADOR SÍNCRONO	98
APENDICE C	GEOMETRÍA DIFERENCIAL	100
APENDICE D	CONTROL EQUIVALENTE	103
APENDICE E	LISTA DE SÍMBOLOS PARA UN SISTEMA MULTIMÁQUINA	105
Referencias		107

Lista de Figuras

2.1	Circuitos del Rotor y Estator Para una Máquina Síncrona.	5
2.2	Dinámicas Fuera de la Variedad.	20
2.3	Generador Síncrono Conectado a un Bus Infinito.	21
2.4	Angulo del Rotor.	24
2.5	Velocidad Síncrona.	24
2.6	Voltaje Transitorio en el Eje de Cuadratura.	25
2.7	Flujo en el Eje Directo.	25
2.8	Flujo en el Eje de Cuadratura.	25
3.1	Unidad Generadora de Potencia.	29
3.2	Control Mediante Retroalimentación de Estado.	36
3.3	Angulo del Rotor.	43
3.4	Velocidad Síncrona.	43
3.5	Voltaje Transitorio en el Eje de Cuadratura.	43
3.6	Flujo en el Eje Directo.	44
3.7	Flujo en el Eje de Cuadratura.	44
3.8	Ley de Control Mediante Retroalimentación de Estado.	44
4.1	Esquema de Control Basado en un Observador.	47
4.2	Régimen Deslizante sobre una Superficie de Conmutación.	55
4.3	Angulo del Rotor y sus Estimados.	67

4.4	Velocidad Síncrona y sus Estimados.	67
4.5	Voltaje Transitorio en el Eje de Cuadratura y sus Estimados.	68
4.6	Angulo del Rotor y sus Estimados con Variación en los Parámetros.	68
4.7	Velocidad Síncrona y sus Estimados con Variación en los Parámetros.	68
4.8	Voltaje Transitorio en el Eje de Cuadratura y sus Estimados con Variación en los Parámetros.	69
4.9	Estimados del Angulo del Rotor con Ruido a la Salida.	69
4.10	Estimados de la Velocidad Síncrona con Ruido a la Salida.	69
4.11	Estimados del Voltaje Transitorio en el Eje de Cuadratura con Ruido a la Salida. . . .	70
5.1	Sistema de Potencia Multimáquinas.	90
5.2	Respuestas de los Angulos en Condiciones Normales de Operación.	91
5.3	Respuestas de los Angulos con Incertidumbre en los Parametros y sus Estimados.	91
5.4	Control de la Máquina # 1 con Incertidumbre en los Parámetros de la Misma Máquina.	91
5.5	Control de la Máquina # 2 con Incertidumbre en los Parámetros de la Máquina # 1.	92
A.1	Circuito Magnético Excitado.	97

Lista de Tablas

2.1	Parámetros del Generador Síncrono.	24
5.2	Parámetros Para el Sistema de Potencia Multimáquina.	90

Capítulo 1

Introducción

1.1 Generalidades

La energía eléctrica es de primordial importancia en el desarrollo de un país, y para ello se requiere la coordinación y optimización de todos los procesos involucrados en la generación, transmisión y distribución de la energía eléctrica. Sin embargo, es necesario considerar otras características o criterios que están relacionados con el desempeño de la red eléctrica así como de los elementos conectados a esta, por ejemplo: la calidad de la energía, la confiabilidad, los costos de producción y operación, la seguridad del sistema y del medio ambiente.

Por otra parte, tomando en cuenta la creciente demanda de energía eléctrica en nuestro país, y la necesidad de sistemas de generación eficientes y capaces de operar bajo diferentes tipos de perturbaciones, tales como: la presencia de fallas, o de las condiciones cambiantes de la red eléctrica, por mencionar algunas; es necesario diseñar estrategias de control que permitan la operación del sistema eléctrico bajo estas condiciones de manera adecuada.

La red eléctrica está compuesta de diversos elementos tales como los generadores, líneas de transmisión, transformadores, subestaciones, entre otros. Los generadores síncronos son los encargados de la producción de la energía, los cuales transforman la energía de una fuente primaria en energía eléctrica. Un adecuado control de los generadores permite, por un lado, optimizar las fuentes de energía primaria y por el otro proporcionar un suministro de energía eléctrica a la red bajo los criterios establecidos.

Por lo tanto, una estrategia de control adecuada para los generadores síncronos permitirá un mejor desempeño de su funcionamiento ante las diversas perturbaciones que actúen sobre el sistema, además de poder obtener una respuesta transitoria adecuada, lo cual se refleja en un ahorro sustancial de recursos y un incremento en la calidad del suministro eléctrico.

1.2 Antecedentes

Una de las estrategias frecuentemente utilizadas para el control de generadores es el control de excitación. Mediante esta técnica de control se mejora el rendimiento y la estabilidad ante grandes perturbaciones del generador. Además, esta técnica resulta ser eficiente y económica. Por otra parte, el control de excitación del tipo *PID* ha sido ampliamente utilizado en los sistemas de potencia y ha tenido buenos resultados en la práctica. Sin embargo, los avances tecnológicos efectuados recientemente han permitido el desarrollo y la implementación de esquemas de control de excitación basados en la teoría de control moderna, y estos han demostrado tener un excelente desempeño, con respecto a las técnicas de control convencionales.

Tradicionalmente, el diseño de los controladores *PID* para los sistemas de excitación se basa generalmente en una aproximación lineal del modelo del sistema alrededor de un punto de operación. Sin embargo, los modelos que representan el comportamiento dinámico de los sistemas de potencia resultan ser no lineales. Aunque, las estrategias de control basadas en modelos linealizados resultan eficientes, estos son solamente válidos en pequeñas regiones alrededor del punto de operación. Estas estrategias no resultan adecuadas debido a la presencia de grandes perturbaciones y a los efectos de las no linealidades del sistema que no han sido consideradas en el diseño del controlador. Debido a lo anterior, nuevas estrategias en el diseño de controladores de excitación han sido desarrolladas basadas en las técnicas de la teoría de sistemas no lineales, las cuales permiten superar estos inconvenientes.

La aplicación de leyes de control obtenidas a partir de diferentes enfoques resulta difícil de realizar, ya que para ello se requiere de la información de todas las variables involucradas en el control, las cuales no todas son medibles por diversas razones. Recientemente, se ha tratado de solucionar este problema mediante el desarrollo de algoritmos para la estimación de las variables no medibles. A estos algoritmos de estimación se les conoce como *observadores de estado*. Trabajos relacionados con estos algoritmos han sido tratados para sistemas de una sola máquina conectada a un bus infinito. Sin embargo, este tipo de trabajos son sólo un caso particular de estudio, en general, los sistemas de potencia están formados por la interconexión de muchas máquinas, siendo este un tópico de estudio que se pretende realizar en este trabajo.

1.3 Organización de la Tesis

El contenido de esta tesis está conformado de la siguiente manera. El modelado matemático que describe el comportamiento dinámico de un generador síncrono es presentado en el capítulo 2. Además, con el fin de diseñar una estrategia de control la cual está basada en las propiedades estructurales del sistema, y que a su vez combine simplicidad y un buen desempeño, se considera un estudio basado en la técnica de la *variedad integral* cuya finalidad es simplificar la estructura del modelo matemático. En el capítulo 3, se presenta una estrategia de control basada en retroalimentación estática del estado, obtenida a partir del modelo reducido del generador síncrono, la cual es aplicada al modelo original de 5^{to} orden. De esta forma se muestra que la técnica basada en el método de la variedad integral resulta adecuada en la simplificación de modelos y obtención de leyes de control.

Sin embargo, en muchos casos la ley de control diseñada no puede ser llevada a la práctica debido a la incapacidad de poder medir todas las componentes del vector de estado. Por tal motivo, en el capítulo 4 se presentan diferentes algoritmos para la estimación de las componentes del vector de estado, lo cual permitirá aplicar la ley de control diseñada. Los algoritmos de estimación que serán tratados en este capítulo están basados en las técnicas de alta ganancia y modos deslizantes.

En el capítulo 5, se hace una extensión al caso multivariable de los resultados obtenidos en los capítulos 3 y 4 para el caso SISO. Basándose en un modelo matemático que representa un sistema multimáquina, se diseñan algoritmos de control y estimación. Resultados en simulación son presentados para mostrar el desempeño de los algoritmos propuestos. Finalmente se presentan conclusiones del trabajo desarrollado y recomendaciones para trabajos futuros en base a los resultados obtenidos.

Capítulo 2

Modelado Matemático

2.1 Introducción

En los sistemas de potencia, los generadores síncronos desempeñan un papel muy importante, ya que son los responsables de suministrar la energía eléctrica requerida en función de la demanda, además de contribuir a mantener la estabilidad de la red eléctrica. Más aún, cuando varios generadores están conectados a la red, se desea que estos se mantengan en sincronía para garantizar la estabilidad de la misma. Por lo tanto, un conocimiento del comportamiento dinámico del generador síncrono, así como de la topología de la red eléctrica, permiten satisfacer los criterios para alcanzar la estabilidad de esta.

En este capítulo, se presenta la descripción del modelo matemático completo para un generador síncrono, el cual originalmente es descrito por 7 ecuaciones diferenciales, que representan los efectos mecánicos y eléctricos del mismo.

El modelado y análisis de máquinas síncronas ha sido siempre un desafío. El problema fue objeto de intenso trabajo durante las décadas de los años 20's y 30's, e investigaciones posteriores pueden encontrarse en [18, 39, 50]. El estudio y aplicación de máquinas síncronas ha sido tema de análisis en [1, 20]. Sin embargo, el diseño de controladores para este tipo de máquinas eléctricas resulta complejo y algunas veces difícil de obtener. En general, para diseñar una estrategia de control se hace uso de modelos matemáticos. Con el fin de simplificar el diseño del control, consideraciones teóricas y prácticas sobre la estructura de los modelos exactos, los cuales son más detallados y de orden superior, son realizadas.

En este trabajo, mediante la técnica de la *variedad integral* se obtendrá un modelo matemático reducido para el generador síncrono. A partir de este modelo reducido, el diseño de una ley de control más simple será obtenida y aplicada al modelo completo. Resultados en simulación serán presentados, donde se muestra la eficiencia de este tipo de reducción.

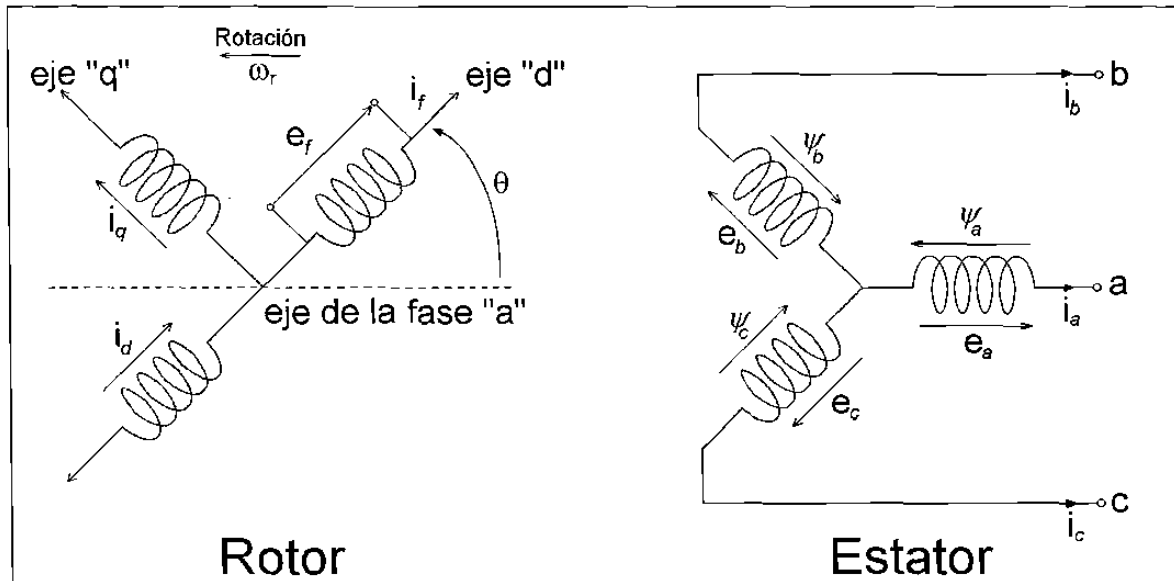


Figura 2.1 Circuitos del Rotor y Estator Para una Máquina Síncrona.

La notación utilizada en la Fig. 2.1 es como sigue: a, b, c : devanados de fase en el estator, f : devanado de campo, d : circuito de amortiguamiento en el eje directo, q : circuito de amortiguamiento en el eje de cuadratura, θ : ángulo por el cual el eje directo está adelante del devanado de la fase a , en $rad.$, ω_r : velocidad angular del rotor, en $rad/s.$.

2.2 Descripción Matemática de una Máquina Síncrona

Análisis Eléctrico

En esta sección se presenta el modelo que describe el comportamiento eléctrico de una máquina síncrona.

A continuación se introducen las consideraciones bajo las cuales se deduce el modelo

- 1) Los devanados del estator están senoidalmente distribuidos a lo largo del entrehierro, tal que los efectos mutuos de este con el rotor están relacionados.
- 2) Las ranuras en el estator no causan una variación apreciable en las inductancias del rotor con

relación a la posición de este último.

- 3) La histéresis magnética es despreciable.
- 4) Los efectos de saturación magnética son despreciables.

Se hace notar que las consideraciones 1, 2 y 3, permiten la simplificación de la modelización del proceso. Dicha modelización describe un comportamiento similar al del proceso, dentro de una región de funcionamiento. La consideración 4 se toma en cuenta para simplificar el estudio, ya que al considerarla, podemos efectuar el acoplamiento de los circuitos del rotor, estator o ambos, de manera lineal, lo cual hace posible la aplicación del principio de superposición. Sin embargo, para otros estudios, como el de las oscilaciones armónicas, los efectos de saturación magnética son importantes (ver [34]).

Por lo tanto, en este estudio se asume que las corrientes de flujo satisfacen relaciones lineales. Aunque, en general, el modelo que describe el comportamiento dinámico de la máquina síncrona será no lineal.

La Fig. 2.1 muestra los componentes involucrados en el análisis de la máquina síncrona. Los circuitos del estator están formados por los devanados de armadura para las tres fases que suministran la corriente alterna. Los circuitos del rotor se componen de los devanados de amortiguamiento y de campo. A su vez, el devanado de campo está conectado a una fuente de corriente directa. Puesto que los circuitos de amortiguamiento no son eléctricamente independientes, para estudiar los efectos de estos se pueden utilizar diferentes esquemas que representen dichos efectos. Sin embargo, si lo que se desea es analizar las características de la máquina síncrona, a partir del estator y las terminales del rotor, entonces el número de esquemas que se pueden utilizar se reduce.

Por otra parte, el tipo de rotor, su construcción y el rango de frecuencia influyen en la determinación del número de esquemas para el modelado del comportamiento del rotor.

En general, para realizar estudios de estabilidad, es suficiente representar con un esquema eléctrico cada eje del rotor. En base a lo anterior, en la Fig. 2.1, se muestra el esquema frecuentemente utilizado para el modelado de rotor.

De la Fig. 2.1, se define θ como el ángulo entre el eje directo en el rotor y el devanado de la fase a , medido en sentido contrario a las manecillas del reloj (dirección de rotación). Puesto que el rotor está girando con respecto al estator, el ángulo θ está relacionado con la velocidad angular del rotor ω_r y el tiempo t de la siguiente manera

$$\theta = \omega_r t. \quad (2.1)$$

2.2.1 Ecuaciones en el Circuito del Estator

De la Fig. 2.1 se pueden determinar las ecuaciones de voltaje en el circuito del estator para las fases a, b y c . Haciendo uso de la ley de Faraday para un voltaje inducido en una bobina (ver apéndice A), se tiene que ¹

$$e_a = \dot{\psi}_a - R_s i_a \quad (2.2)$$

$$e_b = \dot{\psi}_b - R_s i_b \quad (2.3)$$

$$e_c = \dot{\psi}_c - R_s i_c \quad (2.4)$$

cuyas unidades son: para el voltaje *volts*, *webers* para los flujos, *ohms* para la resistencia y *amperes* para las corrientes.

Observacion 2.1 Más adelante se utilizará la notación en por unidad (*p.u.*) para el estudio del modelo [34].

De acuerdo con la ley de Faraday, todas las inductancias asociadas con los flujos (ψ_a, ψ_b y ψ_c) están en función de la posición del rotor y por lo tanto, en función del tiempo.

2.2.2 Ecuaciones del Circuito del Rotor

De manera similar a la deducción de las ecuaciones de voltaje para el circuito del estator, es posible también obtener las ecuaciones que describen los voltajes para el circuito del rotor. Nuevamente, haciendo uso de la ley de Faraday, se obtiene

$$e_f = \dot{\psi}_f + R_f i_f \quad (2.5)$$

¹ R_s : Resistencia de armadura (*s* – estator).

$$0 = \dot{\psi}_D + R_D i_D \quad (2.6)$$

$$0 = \dot{\psi}_Q + R_Q i_Q. \quad (2.7)$$

Como se puede observar, los circuitos del rotor permanecen constantes debido a la estructura cilíndrica del estator. Por lo tanto, las inductancias propias de los circuitos del rotor y las inductancias mutuas entre cada uno de estos circuitos, no dependen de la posición del rotor. Sólo las inductancias mutuas entre el rotor y el estator varían periódicamente con respecto al ángulo θ .

2.2.3 Transformación a los Ejes dq

Las ecuaciones (2.2 – 2.4) asociadas a los circuitos del estator, junto con la ecuaciones (2.5 – 2.7) asociadas a los circuitos del rotor, describen en conjunto el desempeño eléctrico de una máquina síncrona. Sin embargo, estas ecuaciones contienen términos inductivos asociados a los flujos, los cuales varían con relación al ángulo θ , el cual a su vez varía con respecto al tiempo. Esto representa una dificultad para la solución de problemas en un sistema eléctrico de potencia. Una forma mucho más simple de analizar este problema, es mediante una transformación apropiada de las variables del estator.

De la Fig. 2.1 se puede observar, que podemos obtener expresiones para las corrientes en el eje directo y de cuadratura, i_d e i_q , respectivamente, en función del ángulo θ , el cual relaciona el desplazamiento entre el eje directo y el eje de la fase a . Recordando que las fases a , b y c están separadas 120° grados entre sí, se obtienen las siguientes expresiones.

$$i_d = \frac{2}{3} \left(i_a \cos \theta + i_b \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) + i_c \cos \left(\theta - \frac{4\pi}{3} \right) \right) \quad (2.8)$$

$$i_q = -\frac{2}{3} \left(i_a \text{sen} \theta + i_b \text{sen} \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) + i_c \text{sen} \left(\theta - \frac{4\pi}{3} \right) \right). \quad (2.9)$$

Puesto que se tienen solo dos ecuaciones que describen las corrientes en los ejes d y q , es necesario una tercera componente para completar la transformación, de modo que las corrientes de las fases (a , b y c) se transformen en tres nuevas variables que representan las corrientes d , q y 0 . Puesto que las corrientes i_d e i_q producen un campo magnético idéntico al

producido por las corrientes de fase (i_a, i_b e i_c), en consecuencia, la tercera componente no debe producir un campo magnético en el entrehierro. Por lo tanto, esta tercera componente será definida como la corriente cero i_0 , asociada con las componentes simétricas, la cual está definida como

$$i_0 = \frac{1}{3} (i_a + i_b + i_c).$$

Puesto que bajo condiciones de balance se tiene que $i_a + i_b + i_c = 0$, por lo tanto $i_0 = 0$.

La transformación que expresa las corrientes de las fases a, b y c en términos de las corrientes $dq0$ puede ser presentada de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \cos \theta & \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \left(\theta - \frac{4\pi}{3} \right) \\ -\text{sen} \theta & -\text{sen} \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) & -\text{sen} \left(\theta - \frac{4\pi}{3} \right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

La transformación anterior también puede ser utilizada para transformar los flujos y los voltajes en el estator en componentes $dq0$.

2.2.4 Ecuaciones de Voltaje en el Estator en Componentes $dq0$

Aplicando la transformación $dq0$ (2.10) se pueden obtener expresiones equivalentes para los voltajes de fase, en términos de las componentes de la transformación. Consideremos para ello la ecuación (2.2)

$$e_a = \dot{\psi}_a - R_s i_a$$

A partir de (2.10) y las expresiones para voltajes y flujos en términos de las componentes $dq0$, se tiene que

$$\begin{aligned} e_a &= e_d \cos(\theta) - e_q \text{sen}(\theta) + e_0 \\ i_a &= i_d \cos(\theta) - i_q \text{sen}(\theta) + i_0 \\ \dot{\psi}_a &= \left(\dot{\psi}_d - \psi_q \dot{\theta} \right) \cos(\theta) - \left(\dot{\psi}_q + \psi_d \dot{\theta} \right) \text{sen}(\theta) + \dot{\psi}_0. \end{aligned}$$

Entonces, reemplazando las ecuaciones anteriores en (2.2), se tiene

$$e_d \cos(\theta) - e_q \operatorname{sen}(\theta) + e_0 = \left(\dot{\psi}_d - \psi_q \dot{\theta} \right) \cos(\theta) - \left(\dot{\psi}_q + \psi_d \dot{\theta} \right) \operatorname{sen}(\theta) + \dot{\psi}_0 - R_s (i_d \cos(\theta) - i_q \operatorname{sen}(\theta) + i_0).$$

Igualando términos asociados con la misma función trigonométrica, resulta que

$$e_d = \dot{\psi}_d - \psi_q \dot{\theta} - R_s i_d \quad (2.11)$$

$$e_q = \dot{\psi}_q + \psi_d \dot{\theta} - R_s i_q \quad (2.12)$$

$$e_0 = \dot{\psi}_0 - R_s i_0. \quad (2.13)$$

Este procedimiento se puede efectuar no importando que voltaje de fase se considere, las expresiones obtenidas serán las mismas (2.11 – 2.13).

Por otra parte, θ es el ángulo entre el eje de la fase a y el eje directo, como se muestra en la Fig. 2.1. Puesto que $\dot{\theta}$ en las ecuaciones (2.11 – 2.13) representa la velocidad angular ω_r del rotor (2.1), para un sistema trabajando a una frecuencia de 60 Hz bajo condiciones de estado estable, resulta que $\dot{\theta} = \omega_r = \omega = 2\pi 60 = 377 \text{ rad/s}$.

Además, bajo condiciones de estado estable, $\dot{\psi}_d$ y $\dot{\psi}_q$ son iguales a cero. Existen muchas condiciones de operación en estado transitorio, donde los términos anteriores pueden ser despreciados de las ecuaciones para los voltajes en el estator, sin causar errores significativos. Sin embargo, en otras situaciones podría ser importante considerar su efecto [34].

2.2.5 Potencia y Torque Eléctrico

La potencia de salida instantánea en las tres fases del estator está dada por

$$P = e_a i_a + e_b i_b + e_c i_c.$$

Expresando los voltajes y corrientes de fase en términos de la transformación $dq0$, se tiene

$$P = \frac{3}{2} (e_d i_d + e_q i_q + 2e_0 i_0).$$

Bajo las condiciones de operación balanceada, $e_0 = i_0 = 0$. Entonces la expresión para la potencia resulta de la forma

$$P = \frac{3}{2} (e_d i_d + e_q i_q).$$

El torque electromecánico, puede ser determinado a partir de las consideraciones básicas de las fuerzas que actúan sobre los conductores, como el producto de las corrientes y los flujos. De manera similar, una expresión para la potencia transferida a través del entrehierro se puede obtener.

Ahora, utilizando las ecuaciones (2.11 – 2.13) para expresar los voltajes en términos de los flujos y las corrientes, y reemplazando ω como la velocidad del rotor en vez de $\dot{\theta}$, se tiene

$$P = \frac{3}{2} \left(i_d \dot{\psi}_d + i_q \dot{\psi}_q + (\psi_d i_q - \psi_q i_d) \omega - (i_d^2 + i_q^2) R_s \right).$$

Por otra parte, el torque eléctrico en el entrehierro se obtiene dividiendo la potencia transferida a través del entrehierro por la velocidad síncrona de la máquina² en rad/s , esto es

$$T_e = \frac{3}{2} (\psi_d i_q - \psi_q i_d) \frac{\omega}{\omega_0}$$

y expresando la ecuación anterior en $p.u.$, se tiene

$$T_e = \psi_d i_q - \psi_q i_d. \quad (2.14)$$

Finalmente, el comportamiento dinámico de la parte eléctrica para la máquina síncrona está descrito por

$$\begin{aligned} e_d &= \dot{\psi}_d - \psi_q \omega - R_s i_d \\ e_q &= \dot{\psi}_q + \psi_d \omega - R_s i_q \\ e_f &= \dot{\psi}_f + R_f i_f \\ 0 &= \dot{\psi}_D + R_D i_D \\ 0 &= \dot{\psi}_Q + R_Q i_Q \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde [34] (ver apéndice B)

$$\begin{aligned} \psi_d &= -L_d i_d + L_{af} i_f + L_{aD} i_D \\ \psi_q &= -L_q i_q + L_{aQ} i_Q \\ \psi_f &= L_{ff} i_f + L_{aD} i_D - \frac{3}{2} L_{af} i_d \\ \psi_D &= L_{fD} i_f + L_{kD} i_D - \frac{3}{2} L_{aD} i_d \\ \psi_Q &= L_{kQ} i_Q - \frac{3}{2} L_{aQ} i_q \end{aligned} \quad (2.16)$$

² ω_0 : velocidad síncrona de la máquina.

Las ecuaciones que describen el desempeño dinámico de la parte eléctrica de la máquina síncrona, en términos de los componentes dq , que se resumen en (2.15) y la ecuación del torque (2.14), nos permitirán hacer un análisis de las propiedades dinámicas de la máquina síncrona. Estas ecuaciones son usualmente referidas como ecuaciones de Park, en honor de R. H. Park quien desarrolló los conceptos sobre los cuales están basadas [44]. La transformación $dq0$ dada por la ecuación (2.10) es conocida como la transformación de Park.

Análisis Mecánico

Las ecuaciones que permiten efectuar el análisis de estabilidad de un sistema de potencia, son las ecuaciones de inercia rotacional que describen el efecto de un desbalance entre el torque electromagnético y el torque mecánico de máquinas individuales. A fin de realizar el análisis de estabilidad, a continuación se presentan estas ecuaciones en por unidad (*p.u.*), y además, se definen los parámetros que son usados para representar las características mecánicas de la máquina síncrona.

2.2.6 Ecuación de Balanceo

Cuando existe un desbalance entre los torques mecánico T_m y eléctrico T_e que actúan sobre el rotor, el torque neto T_a que causa una aceleración (o desaceleración) está dado por

$$T_a = T_m - T_e$$

donde T_m y T_e son constantes positivas.

La inercia combinada del generador y el primo motor es acelerada por un desbalance en los torques. Por lo tanto, la ecuación de movimiento está representada por

$$J \frac{d\omega}{dt} = T_a = T_m - T_e \quad (2.17)$$

donde

J : momento de inercia combinado del generador y la turbina en $Kg \cdot m^2$.

ω : velocidad angular del rotor en rad/s .

La ecuación de movimiento (2.17) puede ser normalizada en términos de la constante de inercia H en por unidad (*p.u.*) y con esto obtenemos

$$2H \frac{d}{dt} (\bar{\omega}) = \bar{T}_m - \bar{T}_e$$

donde los términos con barra están en por unidad y $\bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0}$. Por lo tanto, de la ecuación anterior, finalmente se tiene

$$\frac{2H}{\omega_0} \dot{\bar{\omega}} = \bar{T}_m - \bar{T}_e. \quad (2.18)$$

Por otra parte, dado que δ es la posición angular del rotor en *rad/s.* con respecto a una referencia de rotación síncrona y definiendo $\delta_0 = \delta(0)$ como su valor en $t = 0$, entonces se tiene

$$\delta = \omega t - \omega_0 t + \delta_0,$$

cuya derivada con respecto al tiempo está dada por

$$\dot{\delta} = \omega - \omega_0 \quad (2.19)$$

Por lo tanto, el modelo matemático con el cual efectuaremos el análisis de estabilidad para la máquina síncrona está representado por las ecuaciones que describen el desempeño mecánico (2.18 – 2.19), así como por las ecuaciones para el rendimiento eléctrico (2.15).

2.3 Representación de la Máquina Síncrona para estudios de Estabilidad

En esta sección se realizará un estudio de estabilidad de la máquina síncrona a partir de las ecuaciones (2.15, 2.18 y 2.19) que describen su desempeño dinámico. Sin embargo, para redes eléctricas que contienen un número grande de generadores, estas ecuaciones no pueden utilizarse para el estudio de estabilidad de sistemas debido al alto grado de complejidad que estas presentan. Ahora, para superar esta dificultad, se utilizarán técnicas basadas en la *Variedad Integral*, para realizar las simplificaciones requeridas que permitan realizar dicho análisis.

La simplificación que se considerará en este trabajo, consiste en despreciar el efecto de los flujos de amortiguamiento, lo que a su vez permitirá obtener un modelo que contenga solo aquellas variables de interés, y que, a su vez, describa un comportamiento similar al del modelo completo. Además, esto reduce el esfuerzo de computo que se requiere cuando se consideran

modelos multimáquinas. Por lo tanto, al despreciar los flujos de amortiguamiento, los voltajes en el estator e_d y e_q permanecen sin cambios, mientras que el resto de las ecuaciones quedan de la siguiente forma , los flujos están dados por

$$\begin{aligned}\psi_d &= -L_d i_d + L_{ad} i_{fd} \\ \psi_q &= -L_q i_q \\ \psi_f &= -L_{ad} i_d + L_{ff} i_{ff}\end{aligned}\tag{2.20}$$

y el voltaje en el rotor

$$e_f = \dot{\psi}_f + R_f i_{ff}.\tag{2.21}$$

En las ecuaciones anteriores, todos los parámetros y las variables, con excepción del tiempo, están dados en por unidad.

Antes de efectuar la reducción del modelo para el generador síncrono, se introducen las siguientes variables expresadas en términos de las ecuaciones (2.20 – 2.21), y las cuales son frecuentemente utilizadas en la literatura

$$\begin{aligned}E'_q &= \frac{L_{ad}}{L_{ff}} \psi_f & E_f &= \frac{L_{ad}}{R_f} e_f & e_q &= V \cos \delta \\ T'_{do} &= \frac{L_{ff}}{R_f} & L_d - L'_d &= \frac{L_{ad}^2}{L_{ff}} & e_d &= V \sin \delta.\end{aligned}\tag{2.22}$$

A partir de la ecuación para el voltaje en el eje de cuadratura (2.12)

$$e_q = \dot{\psi}_q + \omega \psi_d - R_s i_q$$

y recordando que (2.20)

$$\psi_q = -L_q i_q$$

este queda expresado en términos de las nuevas variables (2.22) , como sigue

$$\dot{\psi}_q = -\omega \psi_d - R_s \left(\frac{\psi_q}{L_q} \right) + V \cos \delta.\tag{2.23}$$

Ahora, considerando la ecuación para el voltaje en el eje directo (2.11)

$$e_d = \dot{\psi}_d - \omega \psi_q - R_s i_d,$$

Utilizando la ecuación (2.20), para determinar i_d e i_f , resulta

$$i_d = \frac{L_{ad}\psi_f - \psi_d L_f}{L_d L_{ff} - L_{ad}^2}$$

$$i_f = \frac{L_d \psi_f - L_{ad} \psi_d}{L_d L_{ff} - L_{ad}^2}$$

expresando i_d en términos de las nuevas variables

$$i_d = \frac{E'_q - \psi_d}{L'_d}$$

donde se considero que $L_f \approx L_{ff}$. Entonces, remplazando la ecuación anterior en la ecuación para el voltaje en el eje directo (2.11), resulta que

$$\dot{\psi}_d = V \text{sen} \delta + \omega \psi_q + R_s \left(\frac{E'_q - \psi_d}{L'_d} \right). \quad (2.24)$$

De manera similar, para la ecuación de voltaje en el circuito del rotor (2.5) tenemos

$$e_f = \dot{\psi}_f + R_f i_f$$

donde i_f en términos de las nuevas variables está dado por

$$i_f = \frac{L_d \psi_f - L_{ad} \psi_d}{L_{ff} L'_d}$$

Remplazando la ecuación anterior en la ecuación del voltaje para el rotor, multiplicando por $\frac{L_{ad}}{L_{ff}}$, y expresando esta en términos de las nuevas variables (2.22), se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{L_{ad}}{L_{ff}} \dot{\psi}_f &= \frac{R_f L_{ad}}{L_{ff} R_f} e_f - \frac{R_f}{L_{ff}} L_{ad} i_f \\ \dot{E}'_q &= \frac{1}{T'_{do}} (E_f - L_{ad} i_f) \\ T'_{do} \dot{E}'_q &= E_f - L_{ad} \left(\frac{L_{ad} \psi_f - L_{ad} \psi_d}{L_{ff} L'_d} \right) \\ &= E_f - \frac{L_{ad}}{L_{ff}} \psi_f \frac{L_d}{L'_d} + \frac{L_{ad}^2}{L_{ff} L'_d} \psi_d. \end{aligned}$$

Finalmente, resulta

$$T'_{do} \dot{E}'_q = -\frac{L_d}{L'_d} E'_q + \frac{L_d - L'_d}{L'_d} \psi_d + E_f. \quad (2.25)$$

Por otro lado, para la ecuación mecánica que involucra tanto el torque mecánico como el torque eléctrico, tenemos (2.18)

$$M \dot{\omega}_r = \bar{T}_m - \bar{T}_e$$

donde

$$M = \frac{2H}{\omega_0}; \quad T_e = \psi_d i_q - \psi_q i_d$$

Además, para el torque eléctrico, se tiene

$$\begin{aligned} T_e &= \left(\frac{\psi_q}{-L_q} \right) - \psi_q \left(\frac{E'_q - \psi_d}{L'_d} \right) \\ &= -\frac{1}{L_q} \psi_d \psi_q - \frac{1}{L'_d} \psi_q E'_q + \frac{1}{L'_d} \psi_q \psi_d \\ &= -\left(\frac{1}{L_q} - \frac{1}{L'_d} \right) \psi_d \psi_q - \frac{1}{L'_d} \psi_q E'_q. \end{aligned}$$

Remplazando el torque eléctrico T_e en la ecuación mecánica, se obtiene

$$M \dot{\omega}_r = \bar{T}_m + \left(\frac{1}{L_q} - \frac{1}{L'_d} \right) \psi_d \psi_q + \frac{1}{L'_d} \psi_q E'_q. \quad (2.26)$$

Como la ecuación mecánica que describe la dinámica del ángulo del rotor no se modifica con estas consideraciones. Entonces, el sistema de ecuaciones que se empleará para el análisis de estabilidad de máquinas síncronas es³

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= \omega - \omega_0 \\ M \dot{\omega} &= \bar{T}_m + \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X'_d} \right) \psi_d \psi_q + \frac{1}{X'_d} \psi_q E'_q \\ T'_{do} \dot{E}'_q &= -\frac{X_d}{X'_d} E'_q + \frac{X_d - X'_d}{X'_d} \psi_d + E_f \\ \frac{1}{\omega_0} \dot{\psi}_q &= -\frac{\omega}{\omega_0} \psi_d - \frac{R_s}{X_q} \psi_q + V \cos \delta \\ \frac{1}{\omega_0} \dot{\psi}_d &= \frac{\omega}{\omega_0} \psi_q + \frac{R_s}{X'_d} E'_q - \frac{R_s}{X'_d} \psi_d + V \sin \delta \end{aligned} \quad (2.27)$$

En la siguiente sección, se presenta la metodología para obtener una reducción a partir del modelo anterior (2.27), la cual está basada en la técnica conocida como la *variedad integral*.

2.4 Variedad Integral

Los métodos que se utilizan para el análisis de sistemas no lineales pueden ser clasificados básicamente en dos grupos: geométricos [11, 25] y singularmente perturbados [27, 28]. Por otra

³ Aquí expresamos las inductancias por su correspondiente reactancia en p.u. [34]

parte, el concepto de *variedad integral*, el cual es definido a partir de la combinación de las dos metodologías anteriores, es una generalización de la noción de subespacios invariantes en sistemas lineales. En esta sección, se empleará el concepto de la variedad como una herramienta para reducir el orden de un modelo matemático y efectuar la separación de las dinámicas de un sistema no lineal.

El término *variedad* se refiere a una relación funcional entre las variables que definen la dinámica de un sistema. En otros casos, está definida como una superficie en un espacio multidimensional, la cual es una expresión que describe la relación de una variable, en términos de otras variables o de los parámetros propios del sistema [48].

Por otro lado, una *variedad integral* proporciona una solución a una o más ecuaciones diferenciales en términos de otras ecuaciones diferenciales acopladas. Por ejemplo, consideremos el caso de un sistema dinámico, del cual sólo nos interesan las respuestas de algunas variables en particular (no todos los estados). Si se logra encontrar una expresión que describa el comportamiento de las variables que no son de nuestro interés, en términos de aquellas que nos interesan, y se remplazan estas en las ecuaciones diferenciales, entonces se obtendrá un modelo de orden reducido.

Por lo tanto, como se puede observar, el objetivo básico del método de la *variedad integral*, es incluir los efectos de todas las variables del sistema en las ecuaciones que describen el comportamiento de las variables de interés.

Sin embargo, al efectuar esta simplificación o reducción de modelo, las condiciones iniciales de las variables eliminadas y expresadas ahora en términos de las variables de interés están restringidas a permanecer sobre la variedad [28, 49].

2.4.1 Preliminares Matemáticos

Ahora, se presentará la clase de sistemas no lineales conocida como sistemas singularmente perturbados [2], la cual está representada de la siguiente manera

$$\frac{dx}{dt} = f(x, z, u, t, \varepsilon) \quad x(0) = x_0 \quad (2.28)$$

$$\varepsilon \frac{dz}{dt} = g(x, z, u, t, \varepsilon) \quad z(0) = z_0 \quad (2.29)$$

donde ε es un parámetro positivo pequeño, $x \in \mathbb{R}^n$, representa la dinámica lenta del sistema, $z \in \mathbb{R}^m$, es la dinámica rápida y $u \in \mathbb{R}^r$ es el control.

A partir de (2.28) y (2.29), se desea analizar la dinámica de x independientemente de la dinámica de z . Sin embargo, es necesario determinar la dinámica de z en términos de x , de tal forma que permita, posteriormente ser remplazada en (2.28). Una *variedad integral* se puede obtener haciendo $\varepsilon = 0$ en la dinámica para z (2.29), la cual estará descrita por un conjunto de ecuaciones algebraicas de la forma

$$0 = g(\bar{x}, \bar{z}, \bar{u}, t, 0). \quad (2.30)$$

Aplicando el teorema de la función implícita [25], se puede obtener una solución para z en términos de x, u y t , como sigue (asumiendo que existe una solución aislada de (2.30))

$$\bar{z} = \phi(\bar{x}, \bar{u}, t) \quad (2.31)$$

Finalmente, remplazando esta solución algebraica en la ecuación para la dinámica de x (2.28) obtenemos una reducción en nuestro modelo, expresado por

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = f(\bar{x}, \phi(\bar{x}, \bar{u}, t), \bar{u}, t, 0) \quad \bar{x}(0) = x_0 \quad (2.32)$$

donde la barra indica que las cantidades asociadas pertenecen a un sistema singularmente perturbado tomando $\varepsilon = 0$.

Además, si a partir de la solución de la ecuación (2.30), \bar{z} es un punto de equilibrio asintóticamente estable de (2.29), y si la condición inicial z_0 pertenece al dominio de atracción [29], entonces existe un intervalo de tiempo inicial pequeño, durante el cual z se aproxima a \bar{z} . El hacer $\varepsilon = 0$, resulta equivalente a que la velocidad de z sea infinitamente grande, y el transitorio de z instantáneo. Por otro lado, si los valores propios de $\frac{\partial g}{\partial z}$ evaluados a lo largo de $\bar{x}(t), \bar{z}(t)$ y $\bar{u}(t)$, tienen parte real negativa, entonces la parte rápida de z denotada por \tilde{z} , la cual representa la desviación de z a \bar{z} , puede ser aproximada uniformemente por

$$\frac{d\tilde{z}}{dt} = f(\bar{x}_0, \bar{z}_0 + \tilde{z}(\tau), \bar{u}_0, t_0, 0) \quad \tilde{z}(0) = z_0 - \bar{z}_0 \quad (2.33)$$

donde $\bar{x}_0 = \bar{x}(t_0)$, $\bar{u}_0 = \bar{u}(t_0)$, y $\tau = \frac{t - t_0}{\varepsilon}$ es una variable que representa una nueva escala de tiempo, durante la cual el estado z exhibe variaciones rápidas.

Información adicional sobre los sistemas singularmente perturbados se pueden ver en [30], y casos especiales de esta técnica aplicada a sistemas eléctricos de potencia en [31, 54].

Finalmente, cabe mencionar que el método de perturbaciones singulares presenta dos importantes limitantes: *i*) se requiere un muy buen conocimiento de los parámetros del sistema, *ii*) es aplicable sólo si algunos de estos parámetros son suficientemente pequeños para determinar el valor de ε (ver [49]).

Por lo tanto, al utilizar el método de la *variedad integral* se obtiene un modelo reducido el cual resulta tener un comportamiento equivalente al original, sólo si las condiciones iniciales inician y permanecen dentro de esta. Si las condiciones iniciales no inician dentro de la variedad, se introducirá un error que provocará grandes diferencias en la dinámica del sistema reducido que no corresponden a la dinámica real. Para eliminar este error es necesario calcular las dinámicas fuera de la variedad, y esto se puede lograr introduciendo variables que forcen a las trayectorias a entrar y permanecer en esta, es decir, sea

$$\eta \triangleq z - \bar{z} \quad (2.34)$$

cuya dinámica está dada por

$$\varepsilon \frac{d\eta}{dt} = g(x, \eta + \bar{z}) - \varepsilon \frac{\partial \bar{z}}{\partial t} f(x, \eta + \bar{z}) \quad (2.35)$$

y su condición inicial por

$$\eta(0) = z_0 - \bar{z}(x_0, \varepsilon).$$

Puesto que la dinámica fuera de la variedad normalmente es difícil de calcular, debido a que requiere del conocimiento de la variable lenta x . En una primera aproximación, la dinámica de la nueva variable que obliga a las trayectorias del sistema a entrar y permanecer dentro de la variedad (2.35), se puede obtener utilizando x igual a su condición inicial, la cual se considera constante en este caso. Esta aproximación resulta ser razonablemente buena, puesto que las dinámicas fuera de la variedad decaerían (si son estables) antes que x cambie significativamente. En la Fig. 2.2 se muestran las dinámicas sobre la *variedad integral* y fuera de ella.

Si $z = \bar{z}(x, \varepsilon)$ inicia fuera de la superficie, entonces esta decaerá rápidamente hacia ella, si es estable, como se observa en la línea continua. La línea punteada representa la trayectoria

de z si las dinámicas fuera de la variedad son despreciadas y donde las condiciones iniciales de z son seleccionadas de tal forma que inicien dentro de la superficie.

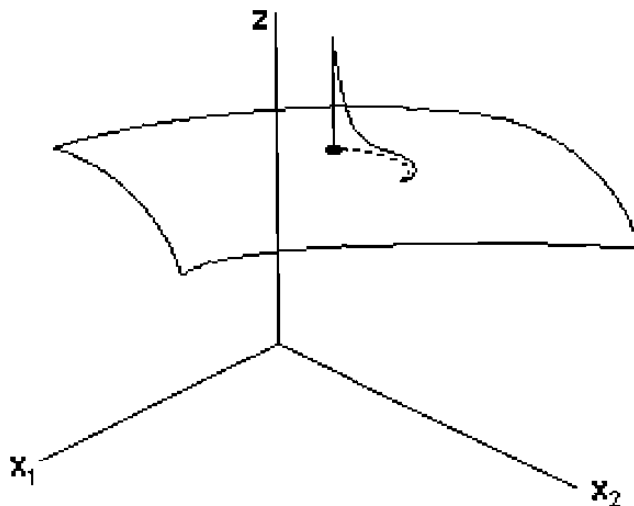


Figura 2.2 Dinámicas Fuera de la Variedad.

Además, se puede mostrar que se introduce un error de "orden ε " en la respuesta de la variable lenta x , si z es estable, donde \bar{z}_0 es una aproximación para \bar{z} , y se han despreciado las dinámicas fuera de la variedad. Si se desea más precisión, entonces una aproximación de \bar{z} es dada por $\bar{z}_0 + \varepsilon\bar{z}_1$, donde se mantendrá un error de "orden ε ", si las dinámicas fuera de la variedad son despreciadas.

Para reducir el error a un "orden ε^2 ", es necesario incluir \bar{z}_1 y aproximar la nueva variable η al orden ε^2 . Esto puede hacerse aproximando las dinámicas fuera de la variedad como

$$\varepsilon \frac{d\eta}{dt} \approx g(x_0, \eta + \bar{z}_0 + \varepsilon\bar{z}_1) - \varepsilon \frac{\partial \bar{z}_0}{\partial t} f(x_0, \eta + \bar{z}_0)$$

con

$$\eta(0) = z_0 - \bar{z}_0(x_0) - \varepsilon\bar{z}_1(x_0)$$

y $\bar{z}_0, \bar{z}_1, \frac{\partial \bar{z}_0}{\partial t}$ evaluados en $x = x_0$.

Aunque en general, es muy difícil encontrar una variedad integral, hay algunos casos especiales en los cuales \bar{z} en (2.31) puede encontrarse exacta o aproximadamente para cualquier

grado de precisión. Ilustraremos esto a continuación mediante la reducción del modelo de una máquina síncrona conectada a un bus infinito.

2.5 Generador Síncrono

Considere una máquina síncrona conectada a una representación Thevenin de un bus infinito a través de una línea de transmisión con una resistencia R_e y una reactancia X_e como se muestra en la Fig. 2.3.

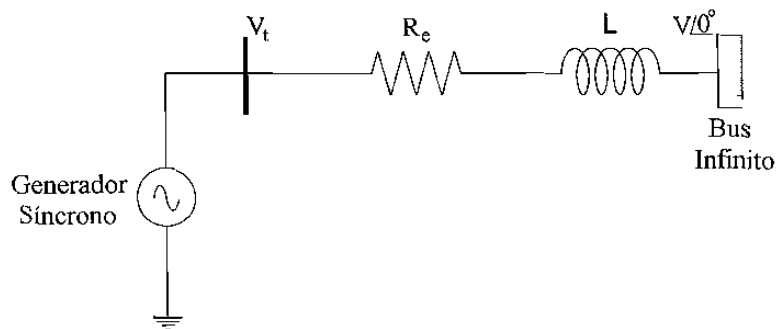


Figura 2.3 Generador Síncrono Conectado a un Bus Infinito.

El modelo matemático que describe la dinámica de la máquina síncrona conectada a un bus infinito (2.27) es el siguiente [3]

$$\dot{\delta} = \omega - \omega_0 \quad (2.36)$$

$$M \dot{\omega} = T_m + \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) \psi_d \psi_q + \frac{1}{X_d} E'_q \psi_q \quad (2.37)$$

$$T'_{do} \dot{E}'_q = -\frac{X_d}{X'_d} E'_q + \left(\frac{X_d - X'_d}{X'_d} \right) \psi_d + E_f \quad (2.38)$$

$$\frac{1}{\omega_0} \dot{\psi}_d = -\frac{R_s}{X'_d} \psi_d + \frac{\omega}{\omega_0} \psi_q + \frac{R_s}{X'_d} E'_q + V \sin(\delta) \quad (2.39)$$

$$\frac{1}{\omega_0} \dot{\psi}_q = -\frac{\omega}{\omega_0} \psi_d + \frac{R_s}{X_q} \psi_q + V \cos(\delta) \quad (2.40)$$

donde $\omega_0 = 2\pi 60 \text{ rad/seg.}$ es la velocidad síncrona y $M = 2H/\omega_0$, H es la constante de inercia. E_f es el voltaje de campo, y representa la variable de control, V es el voltaje en terminales el cual se mantiene constante, en este estudio $V = 1 \text{ p.u.}$. La resistencia de armadura R_s y las reactancias X_d , X'_d y X_q incluyen los efectos externos de R_e y X_e .

Las variables mecánicas que describen el ángulo del rotor y la velocidad síncrona son δ y ω , respectivamente.

E'_q , ψ_d y ψ_q representan las variables eléctricas que describen el voltaje transitorio en el eje de cuadratura, el flujo en el eje directo y el flujo en el eje de cuadratura, respectivamente.

Ahora, suponga que las variables de interés son δ , ω y E'_q . Entonces, el objetivo es reducir el orden del modelo, y encontrar expresiones apropiadas que describan el comportamiento de las variables que se deben eliminar (ψ_d y ψ_q) en función de las variables de interés (δ , ω y E'_q). En términos matemáticos, este problema puede ser formulado como la búsqueda de una variedad en la cual se pueda establecer la relación entre ψ_d , ψ_q y δ , ω , E'_q .

Así, podemos obtener un modelo de tercer orden (modelo reducido), despreciando los transitorios del estator en el modelo de quinto orden (2.36 – 2.40) (modelo original), es decir, haciendo la parte izquierda de las ecuaciones (2.39) y (2.40) iguales a cero y aproximando ω con la velocidad síncrona ω_0 , de todo esto obtenemos⁴

$$\psi_d = V \cos(\delta) \quad (2.41)$$

$$\psi_q = -V \sin(\delta) \quad (2.42)$$

Si las condiciones iniciales de δ , ω , y E'_q satisfacen (2.41) y (2.42), entonces la respuesta de ψ_d y ψ_q satisfará (2.41) y (2.42) para todo tiempo, y se pueden eliminar estos del resto de las ecuaciones. Si lo anterior se satisface, entonces las ecuaciones (2.41) y (2.42) son llamadas variedades integrales *exactas* para ψ_d y ψ_q .

Finalmente, si (2.41) y (2.42) se mantienen para todo tiempo, entonces el sistema de orden reducido queda expresado de la siguiente manera

⁴En este análisis consideramos $R_s = 0$

$$\dot{\delta} = \omega - \omega_0 \quad (2.43)$$

$$M \dot{\omega} = T_m - \frac{V}{X'_d} E'_q \sin(\delta) - \frac{V^2 (X'_d - X'_q)}{2X'_d X'_q} \sin 2\delta \quad (2.44)$$

$$T'_{do} \dot{E}'_q = -\frac{X_d}{X'_d} E'_q + \frac{V (X_d - X'_d)}{X'_d} \cos \delta + E_f \quad (2.45)$$

La existencia de variedades integrales exactas como tales son raras en los modelos dinámicos de sistemas no lineales. La variedad integral es un tipo de solución general de un subconjunto de ecuaciones diferenciales. No es la solución completa, puesto que la variedad integral depende de las condiciones iniciales de las variables de interés. Sin embargo, la estructura de la máquina síncrona permite encontrar una variedad integral [28].

2.6 Resultados de Simulación

En esta sección se presentan los resultados obtenidos mediante simulación para el modelo matemático del generador síncrono desarrollado en este capítulo. El objetivo que se pretende alcanzar es mostrar los resultados que se obtienen al aplicar la técnica de la *variedad integral* a la máquina síncrona y comparar el modelo original con el reducido.

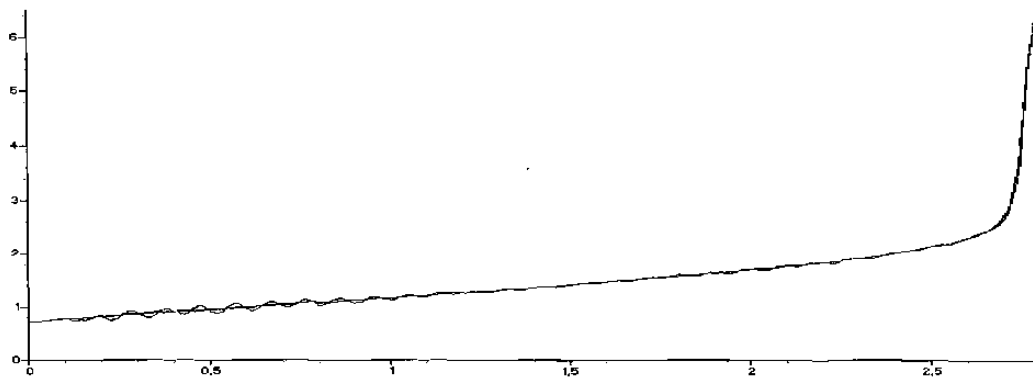
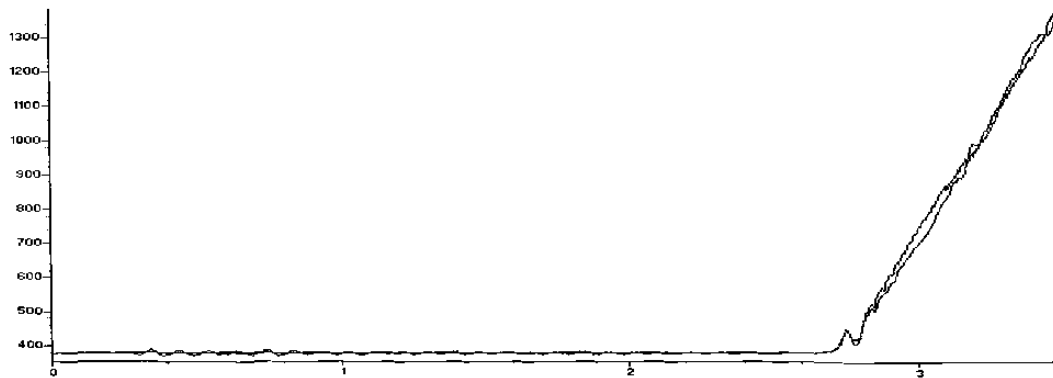
Las simulaciones presentadas muestran el comportamiento de las variables del generador síncrono para un sistema de quinto orden (2.36 – 2.40), contra las variables que se obtuvieron para el modelo reducido (2.43 – 2.45). De estas simulaciones podemos concluir, que la técnica de la *variedad integral* resulta adecuada en la reducción de modelos matemáticos para máquinas eléctricas, ya que el comportamiento dinámico de las variables en el modelo original y en el modelo reducido son muy similares (Figs. 2.4 - 2.8).

Hasta el momento no se ha diseñado ninguna ley de control, por lo que en las simulaciones efectuadas se ha introducido un control, el cual es E_f el voltaje de campo, igual a una constante.

Por otra parte, las condiciones iniciales utilizadas en las simulaciones, fueron las siguientes: $\delta(0) = 0.73$, $\omega(0) = 376.9$, $E'_q(0) = 0.8$, $\psi_d(0) = 0.7452$, $\psi_q(0) = 0.6669$ y los valores de los parámetros del generador síncrono se muestran en la tabla 2.1

Tabla 2.1 Parámetros del Generador Síncrono.

X_d	X'_d	X_q	T'_{do}	H	T_m	M	ω_s
p.u	p.u	p.u	seg	seg	p.u	rad/seg ²	rad/seg
1	0.2	0.6	2.653	0.1326	1	7.034×10^{-3}	377.9

**Figura 2.4** Angulo del Rotor.**Figura 2.5** Velocidad Síncrona.

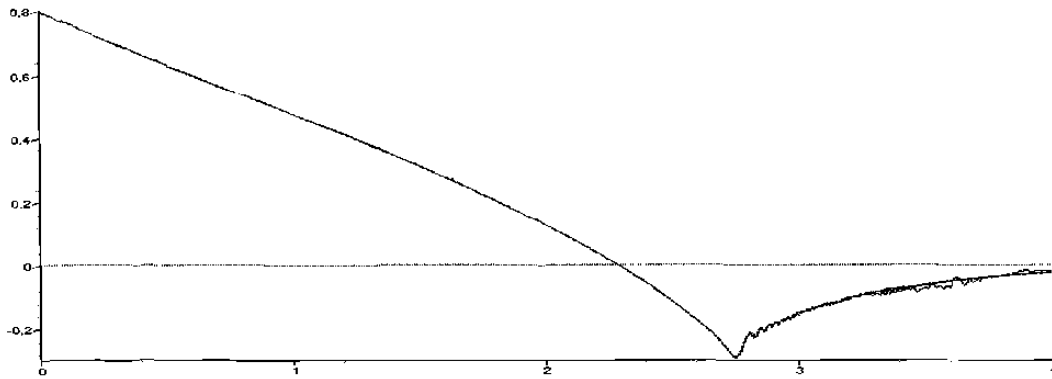


Figura 2.6 Voltaje Transitorio en el Eje de Cuadratura.

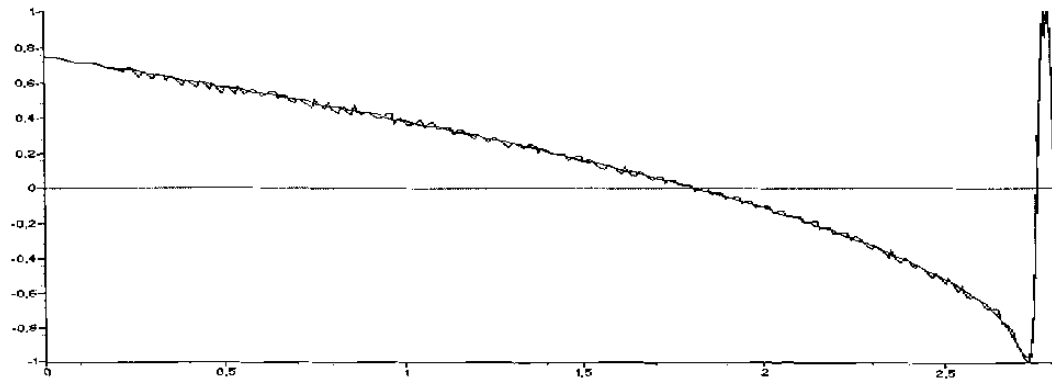


Figura 2.7 Flujo en el Eje Directo.

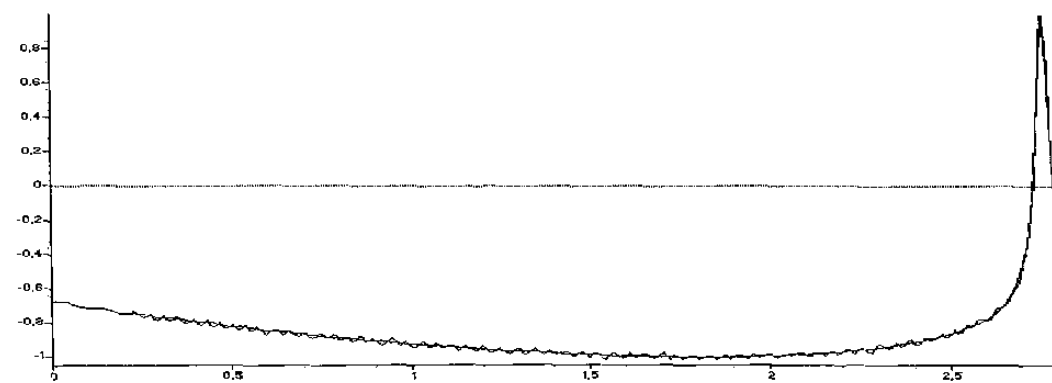


Figura 2.8 Flujo en el Eje de Cuadratura.

2.7 Conclusiones

En este capítulo se presentó la modelización de la máquina síncrona conectada a un bus infinito. Un modelo de quinto orden, que describe el comportamiento de esta, fue obtenido. Mediante el método de la *variedad integral*, un modelo reducido fue desarrollado, el cual permitirá sintetizar leyes de control más simples.

Capítulo 3

Control Mediante Retroalimentación de Estado

3.1 Introducción

Un sistema de potencia está compuesto de un conjunto de unidades generadoras de potencia interconectadas, líneas de transmisión y cargas. Este sistema necesita proporcionar un flujo de potencia ininterrumpido a partir de las unidades generadoras hacia las cargas. El flujo de potencia está constituido de dos componentes: la potencia activa y la potencia reactiva. La potencia activa está principalmente determinada por la frecuencia rotacional del generador, mientras que la potencia reactiva depende del voltaje en terminales.

Una unidad generadora de potencia está compuesta de una máquina síncrona configurada como un generador, una turbina que suministra la potencia mecánica de entrada al rotor y de un excitador que proporciona la corriente directa al devanado de campo. Una configuración más detallada para este tipo de sistemas se ilustra en la Fig. 3.1 [47].

Un sistema de control mecánico en la forma de un gobernador-turbina es usado para mantener la velocidad rotacional deseada y asegurar que el generador pueda proporcionar la potencia activa demandada. El tiempo de respuesta asociado con este sistema de control es nominalmente del orden de los 10 segundos [34].

El nivel de voltaje en terminales es típicamente regulado por la manipulación del voltaje de campo aplicado al generador por medio de un excitador. Controladores de excitación de alta ganancia son comunmente usados para proporcionar una regulación adecuada del voltaje de referencia en terminales, produciendo una respuesta rápida, la cual es de alrededor de 0.1 segundos o menos [34]. Este tipo de control asegura que el flujo de potencia reactiva sea el adecuado.

Debido a la diferencia en las constantes de tiempo de los subsistemas mecánico y eléctrico, resulta adecuado controlar cada subsistema por separado.

Existen en general dos tipos de control para el generador síncrono, uno para controlar el voltaje, mediante un control de excitación y el otro para controlar la frecuencia, y esto se logra con un sistema estabilizador de potencia (*PSS*).

En este trabajo sólo se considerará el control de voltaje mediante un sistema de excitación. Para ello se presenta el método de diseño de controladores basado en linealización por retroalimentación de estado, obtenido a partir del modelo de orden reducido presentado en el capítulo anterior, pero los cuales serán aplicados al modelo original el cual estará representado por un modelo de quinto orden.

Finalmente, resultados de simulación son presentados mostrando la efectividad de la ley de control implementada en el modelo matemático del generador síncrono.

3.2 Control de Excitación

La función del controlador de excitación, como se mencionó antes, es asegurar una adecuada regulación del voltaje de referencia. Sin embargo, otras características del sistema imponen restricciones adicionales a los requerimientos de su diseño. Por ejemplo, un sistema funcionando bajo condiciones normales de operación está sujeto a numerosas fluctuaciones en la demanda de potencia debido al desbalance en las cargas, resultado de la instalación de más cargas o al intercambio de las mismas. Estas perturbaciones son el resultado de la presencia de una componente de baja frecuencia (de 0.2 a 2.5 Hz) en la potencia producida por diferentes máquinas o grupos de máquinas que responden al efecto de estas perturbaciones en diferentes tiempos. Esto limita la capacidad de las líneas de transmisión para transferir la potencia activa, y estas perturbaciones pueden llevar a la inestabilidad [5]. Si una máquina síncrona controlada logra estabilizar al sistema bajo estas condiciones de operación, se dice que proporciona estabilidad dinámica (para profundizar en este tipo de estabilidad vease [34]).

Además de las perturbaciones que se presentan continuamente cuando las máquinas operan en sus respectivos puntos de operación, un sistema de potencia está sujeto a variaciones causadas por el mal funcionamiento del equipo, tales como pérdida de unidades generadoras

o fallas en las líneas de transmisión. Si una máquina síncrona controlada logra estabilizar al sistema después que la perturbación ha sido removida, se dice entonces que proporciona estabilidad transitoria.

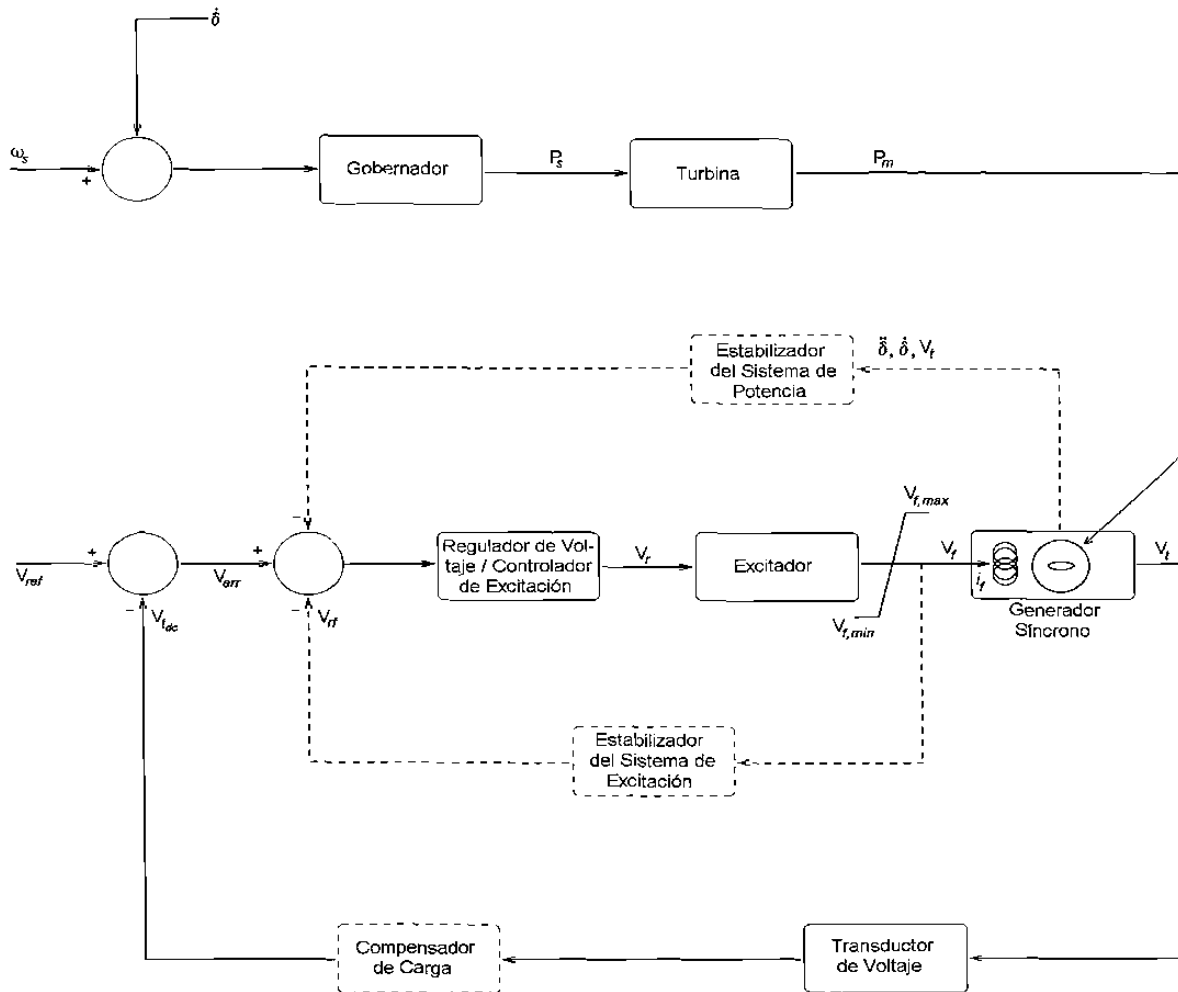


Figura 3.1 Unidad Generadora de Potencia.

Finalmente, hoy en día las redes eléctricas están creciendo estructuralmente y las interconexiones entre estas son cada vez más complejas, además de operar en muchos casos cerca de su capacidad máxima. Por otra parte, los sistemas de potencia no pueden conocer de antemano cuando ocurrirá un cambio en la demanda de potencia reactiva y/o pérdida de estabilidad en el voltaje, lo cual puede llevar a serios problemas como un colapso en el voltaje. Puesto que

la generación de potencia reactiva está esencialmente controlada a través del sistema de excitación del generador, tiene sentido pensar que el desarrollo de un mejor control de excitación podría jugar un papel muy importante y significativo en el manejo de los problemas de estabilidad y colapsos de voltaje.

En casos como los anteriores, el control de excitación de alta ganancia ha demostrado ser un medio efectivo de proporcionar estabilidad transitoria, debido a que puede incrementar rápidamente la excitación, suministrando así la falta de potencia adicional al sistema. Sin embargo, una acción de control rápida puede tener un efecto desestabilizador sobre el sistema. La respuesta rápida del controlador puede crear oscilaciones persistentes de baja frecuencia sobre el ángulo del rotor, las cuales pueden interactuar con otras máquinas del sistema de potencia produciendo inestabilidad dinámica.

La solución convencional consiste en diseñar por separado un sistema estabilizador que esté incorporado al control de excitación, el cual permitirá moderar la señal de control. El estabilizador es diseñado usando un modelo linealizado en un punto de operación nominal, y el compensador resultante proporciona un buen manejo de las oscilaciones del sistema que operan alrededor de dicho punto de operación. Como resultado de esto, tal técnica de diseño tiene límites en la aplicación para máquinas síncronas que se desempeñan en un amplio rango de condiciones de operación. Investigaciones recientes se han enfocado en el desarrollo de leyes de control compensatorias a través de la modulación del control de excitación, pero con un enfoque hacia el tratamiento de las no linealidades del sistema y bajo condiciones de operación cambiantes [8, 10, 56].

3.3 Esquema de Control por Retroalimentación Linealizante

Existen muchos objetivos de control los cuales requieren del uso de retroalimentación apropiada. Dependiendo del objetivo en el diseño del control, existen también muchas formulaciones del problema de control. Los objetivos de control comunmente considerados son: control de estabilización, seguimiento y rechazo o atenuación de perturbaciones (o combinaciones de estos). En cada problema podemos tener un diseño de control que depende del estado,

asumiendo que todas las variables del vector de estado pueden ser medidas, o un control dependiente exclusivamente del vector con componentes de salida. En un problema de control típico existen objetivos adicionales en el diseño, por ejemplo, ciertos requerimientos sobre la respuesta transitoria o restricciones sobre la acción de control. Estos aspectos pudieran estar en conflicto, y entonces el diseñador tiene que buscar un compromiso entre ellos.

La teoría de control basada en la geometría diferencial proporciona herramientas muy poderosas, las cuales han sido recientemente usadas para el diseño de controladores de excitación y estabilización. La técnica por retroalimentación de estado puede ser aplicada una vez que el modelo del sistema dinámico sea transformado en otra representación de espacio de estados (o forma canónica) por medio de una transformación de coordenadas no lineal [25]. Una entrada auxiliar de control es seleccionada de tal manera que el modelo del sistema se transforme en uno parcial o completamente lineal. Existen dos técnicas: linealización entrada-estado y linealización entrada-salida.

Si el valor del control al tiempo t depende sólo del estado x y de la referencia de entrada auxiliar v al mismo instante de tiempo, el control se denomina *control por retroalimentación estática del estado* (o sin memoria). Por otro lado, si el control es a su vez la salida de un sistema dinámico, dependiente de x y la entrada de referencia auxiliar v , decimos entonces que el control implementado está basado en *retroalimentación dinámica del estado*.

Definición 3.1 [41] *Una retroalimentación estática de estado para un sistema dinámico no lineal*

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad x \in M \subset \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

$$y = h(x) \quad y \in \mathbb{R} \quad (3.2)$$

es un mapeo

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \quad (3.3)$$

donde $\alpha, \beta : M \rightarrow \mathbb{R}$ son mapeos suaves, $\beta(x) \neq 0$,

y v representa un vector de las nuevas variables de control.

Si $v = 0$, entonces la ley de control se denomina *retroalimentación estrictamente estática de estado*.

Definición 3.2 [41] *Una retroalimentación estática de salida para el sistema (3.1) junto con la salida (3.2) es una relación definida como*

$$u = \tilde{\alpha}(y) + \tilde{\beta}(y)v \quad (3.4)$$

donde $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son mapeos suaves, $\tilde{\beta}(y) \neq 0$

y v representa como en el caso de la retroalimentación de estado, un vector de las nuevas variables de control.

Si $v = 0$, entonces la ley de control se denomina retroalimentación estrictamente estática de salida.

Nota 3.1 *Puesto que la salida medible está definida como $y = h(x)$ (3.2), se puede observar que la retroalimentación estática de salida (3.4) es un caso especial de la retroalimentación estática de estado (3.3), y por lo tanto, en este trabajo se considerará el caso más general, es decir la retroalimentación estática de estado.*

Nota 3.2 *Puesto que a veces no es posible disponer de todos los estados, una ley de control basada en retroalimentación estática del estado no será posible implementar, para ello se requiere un observador (este aspecto será tratado más en detalle en el capítulo siguiente). En estos casos una retroalimentación estática de salida resulta más apropiada, sin embargo, como ya se mencionó este no es el caso general. Lo mismo puede decirse en los casos de un control basado en retroalimentación dinámica [41].*

3.4 Transformación de Coordenadas

El punto de partida en el análisis de sistemas con una sola entrada y una sola salida (SISO), es la noción de grado relativo del sistema, el cual está descrito de la siguiente manera.

Definición 3.3 *El sistema no lineal con una entrada y una salida (3.1 – 3.2) se dice que tiene grado relativo r en el punto x^0 si¹ (vease apéndice C):*

$$i) L_g L_f^k h(x) = 0 \quad \forall x \text{ en una vecindad de } x^0 \text{ y } \forall k < r - 1$$

¹ x^0 representa el origen del sistema.

ii) $L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$.

Note que puede haber puntos donde el grado relativo puede no estar definido. Esto ocurre, cuando la primera función de la secuencia

$$L_g h(x), L_g L_f h(x), \dots, L_g L_f^k h(x), \dots$$

la cual no es idénticamente cero (en una vecindad de x°) tiene un cero exactamente en el punto $x = x^\circ$. Sin embargo, el conjunto de puntos donde el grado relativo puede ser definido es un subconjunto denso y abierto U donde el sistema (3.1) está bien definido.

Así, el grado relativo r es el número de veces que tenemos que derivar la salida $y(t)$ con respecto al tiempo evaluada en $t = t^\circ$ (tiempo inicial), así hasta que aparezca de manera explícita la entrada $u(t)$.

Note también que si

$$L_g L_f^k h(x) = 0 \quad \forall x \text{ en una vecindad de } x^\circ \text{ y } \forall k \geq 0$$

es decir en cuyo caso el grado relativo no puede ser definido para algún punto alrededor de x° , entonces la salida del sistema no se ve afectada por la entrada para todo tiempo t muy próximo a t° .

Estos cálculos sugieren que las funciones $h(x), L_f h(x), \dots, L_f^{r-1} h(x)$ tienen un significado especial. De hecho, es posible mostrar que estas pueden ser definidas al menos parcialmente, como una transformación local de coordenadas alrededor de x° , recordemos que x° es un punto donde $L_g L_f^{r-1} h(x^\circ) \neq 0$. En base a lo anterior, se tiene la siguiente propiedad.

Lema 3.1 *Los vectores fila*

$$dh(x^\circ), dL_f h(x^\circ), \dots, dL_f^{r-1} h(x^\circ)$$

son linealmente independientes.

Para probar este lema, se introducirá otra propiedad, la cual es utilizada posteriormente y que además permitirá demostrar el resultado del lema anterior.

Lema 3.2 *Sea ϕ una función real y f, g campos vectoriales, todos definidos en un conjunto abierto U de \mathbb{R}^n . Entonces, para alguna elección de $s, k, r \geq 0$,*

$$\langle dL_f^s \phi(x), ad_f^{k+r} g(x) \rangle = \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{r}{i} L_f^{r-i} \langle dL_f^{s+i} \phi(x), ad_f^k g(x) \rangle \quad (3.5)$$

Como consecuencia de lo anterior, las condiciones

$$i) L_g \phi(x) = L_g L_f \phi(x) = \dots = L_g L_f^k \phi(x) = 0 \quad \forall x \in U$$

$$ii) L_g \phi(x) = L_{ad_f g(x)} \phi(x) = \dots = L_{ad_f^k g(x)} \phi(x) = 0 \quad \forall x \in U$$

son equivalentes.

Prueba del lema 3.2

Procederemos por inducción sobre r

$$\langle dL_f^s \phi(x), ad_f^{k+r+1} g(x) \rangle = \langle dL_f^s \phi(x), [f, ad_f^{k+r} g(x)] \rangle$$

Recordando que

$$L_f \langle \omega, g \rangle = \langle L_f \omega, g \rangle + \langle \omega, [f, g] \rangle \quad \text{regla de Leibniz}$$

donde

f, g campos vectoriales

ω campo covectorial

entonces

$$\langle \omega, [f, g] \rangle = L_f \langle \omega, g \rangle - \langle L_f \omega, g \rangle.$$

Aplicando el resultado anterior se tiene

$$\langle dL_f^s \phi(x), ad_f^{k+r+1} g(x) \rangle = L_f \langle dL_f^s \phi(x), ad_f^{k+r} g(x) \rangle - \langle L_f dL_f^s \phi(x), ad_f^{k+r} g(x) \rangle.$$

Ahora, recordando que

$$L_f d\lambda(x) = dL_f \lambda(x)$$

lo cual en nuestro caso resulta

$$L_f dL_f^s \phi(x) = dL_f L_f^s \phi(x) = dL_f^{s+1} \phi(x).$$

Finalmente, reemplazando esta última expresión, obtenemos

$$\langle dL_f^s \phi(x), ad_f^{k+r+1} g(x) \rangle = L_f \langle dL_f^s \phi(x), ad_f^{k+r} g(x) \rangle - \langle dL_f^{s+1} \phi(x), ad_f^{k+r} g(x) \rangle$$

□.

Ahora procedemos a probar el lema 3.1

Prueba del lema 3.1

A partir de la definición de grado relativo y haciendo uso del lema 3.2 para todo i, j tal que $i + j \leq r - 2$, se tiene que

$$\langle dL_f^j h(x), ad_f^i g(x) \rangle = 0 \quad \forall x \text{ alrededor de } x^\circ$$

Además

$$\langle dL_f^j h(x^\circ), ad_f^i g(x^\circ) \rangle = (-1)^{r-1-j} L_g L_f^{r-1} h(x^\circ) \neq 0$$

para todo i, j tal que $i + j = r - 1$

Las condiciones anteriores muestran que la matriz

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} dh(x^\circ) \\ dL_f h(x^\circ) \\ \vdots \\ dL_f^{r-1} h(x^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(x^\circ) & ad_f g(x^\circ) & \cdots & ad_f^{r-1} g(x^\circ) \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \langle dh(x^\circ), ad_f^{r-1} g(x^\circ) \rangle \\ \vdots & \ddots & * \\ \langle dL_f^{r-1} h(x^\circ), g(x^\circ) \rangle & * & * \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.6)$$

tiene rango r , y por lo tanto, los vectores $dh(x^\circ), dL_f h(x^\circ), \dots, dL_f^{r-1} h(x^\circ)$ son linealmente independientes.

□.

3.5 Linealización Mediante Retroalimentación de Estado

En un sistema con una entrada y una salida, la estructura más conveniente para un control con retroalimentación de estado (vease def. 2.1) es una en la cual la variable de entrada u está dada por

$$u = \alpha(x) + \beta(x) v \quad (3.7)$$

donde v es una entrada auxiliar (ver Fig. 3.2). De hecho, aplicando este control al sistema no lineal (3.1), se obtiene un sistema en lazo cerrado caracterizado por la siguiente estructura

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x) \alpha(x) + g(x) \beta(x) v \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

Las funciones $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ que caracterizan el control (3.7) están definidas en un conjunto abierto apropiado de \mathbb{R}^n . Además, se asume que $\beta(x)$ es diferente de cero para toda x en este conjunto.

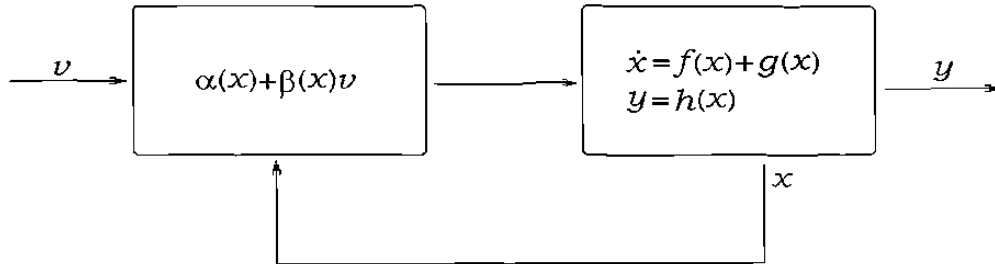


Figura 3.2 Control Mediante Retroalimentación de Estado.

Considere un sistema no lineal con grado relativo $r = n$, es decir exactamente igual al espacio de estados en el punto $x = x^o$. En este caso el cambio de coordenadas requerido está dado por

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_{n-1}(x) \\ \phi_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-2} h(x) \\ L_f^{n-1} h(x) \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

es decir, por la función $h(x)$ y sus $n - 1$ derivadas a lo largo del campo $f(x)$. Nótese que no se necesita de funciones adicionales para completar la transformación, ya que la transformación lleva al sistema original a uno completamente lineal. Entonces, el sistema en las nuevas coordenadas

$$z_i = \phi_i(x) = L_f^{i-1} h(x) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

será descrito ahora por las ecuaciones en la forma

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n \\ \dot{z}_n &= b(z) + a(z)u \end{aligned}$$

donde $z = \text{col}(z_1, z_2, \dots, z_n)$. Recordando que $z^\circ = \Phi(x^\circ)$, para todo z en una vecindad de z° , la función $a(z)$ es diferente de cero².

Suponga ahora que se elige la siguiente ley de control con retroalimentación de estado

$$u = \frac{1}{a(z)} (-b(z) + v)$$

la cual existe y está bien definida en una vecindad de z° . El sistema resultante en lazo cerrado con esta ley de control está gobernado por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n \\ \dot{z}_n &= v \end{aligned} \tag{3.9}$$

es decir, el sistema resultante es lineal y controlable. Así concluimos que cualquier sistema no lineal con grado relativo n en algún punto x° , puede ser transformado a un sistema, el cual en una vecindad del punto $z^\circ = \Phi(x^\circ)$, es lineal y controlable. Es importante subrayar que la transformación considerada está basada en las siguientes etapas de diseño

- i) Un cambio de coordenadas, definido localmente alrededor del punto x° .
- ii) Una retroalimentación de estado, también definida localmente alrededor del punto x° .

Por otra parte, es fácil verificar que las dos etapas utilizadas para obtener el sistema en forma lineal pueden ser intercambiadas. Podemos primero usar una retroalimentación de estado, y entonces cambiar las coordenadas en el espacio de estados, y el resultado es el mismo [25]. La retroalimentación necesaria para este propósito es exactamente la misma retroalimentación ya mostrada anteriormente, pero ahora expresada en coordenadas originales (x) , es decir como

$$u = \frac{1}{a(\Phi(x))} (-b(\Phi(x)) + v)$$

Comparando esto con las expresiones $a(z)$ y $b(z)$ dadas anteriormente, una realización de esta retroalimentación, expresada en términos de las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ las cuales caracterizan el sistema original, tiene la forma

² z° representa el origen del sistema en las nuevas coordenadas

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(x)} (-L_f^n h(x) + v) \quad (3.10)$$

Un cálculo inmediato muestra que esta retroalimentación de estado, además del cambio de coordenadas utilizado, resulta ser el mismo sistema (3.9) lineal y controlable anteriormente obtenido.

Nota 3.3 Cuando el grado relativo no es igual a n , la dimensión del sistema, es necesario encontrar una función $\lambda(x)$ tal que las siguientes relaciones se satisfagan

$$L_g \lambda(x) = L_g L_f \lambda(x) = \dots = L_g L_f^{n-2} \lambda(x) = 0 \quad \forall x \quad (3.11)$$

$$L_g L_f^{n-1} \lambda(x^\circ) \neq 0 \quad (3.12)$$

de modo que sea posible encontrar un conjunto de funciones que sean linealmente independientes y califiquen como un cambio de coordenadas. La solución de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales (3.11), en la cual la incógnita $\lambda(x)$ es diferenciada $n - 1$ veces, junto con la condición (3.12) la cual se escoge como la solución trivial (i.e. $\lambda(x) = 0$) permiten encontrar estas funciones. Sin embargo, a partir del lema 3.2, este sistema es equivalente a un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden. De hecho, este lema muestra que las ecuaciones (3.11) son equivalentes a

$$L_g \lambda(x) = L_{ad_f g} \lambda(x) = \dots = L_{ad_f^{n-2} g} \lambda(x) = 0 \quad (3.13)$$

Además, la condición no trivial (3.12) es equivalente a

$$L_{ad_f^{n-1} g} \lambda(x^\circ) \neq 0 \quad (3.14)$$

La existencia de una función que satisface estas relaciones es una consecuencia del teorema de Frobenius [25], como se mostrará en la prueba del teorema siguiente.

Teorema 3.1 Considere el sistema no lineal (3.1). El problema de linealización exacta en el espacio de estados se puede solucionar alrededor del punto x° , es decir, existe una función de salida $\lambda(x)$ para la cual el sistema tiene grado relativo n en x° , si y sólo si las siguientes condiciones se satisfacen

- 1) La matriz $\begin{pmatrix} g(x^\circ) & ad_f g(x^\circ) & \dots & ad_f^{n-2} g(x^\circ) & ad_f^{n-1} g(x^\circ) \end{pmatrix}$ es de rango n .
- 2) La distribución $D = \mathbf{span} \{ g(x^\circ) \quad ad_f g(x^\circ) \quad \dots \quad ad_f^{n-2} g(x^\circ) \}$ es involutiva alrededor

de x° .

Prueba

Suponga que efectivamente existe una función $\lambda(x)$ que satisface las condiciones (3.13) y (3.14) mencionadas en la nota anterior. Entonces, de la prueba del Lema 3.1, y en particular de la no singularidad de la matriz (3.6), deducimos que los n vectores

$$g(x^\circ) \quad \text{ad}_f g(x^\circ) \quad \dots \quad \text{ad}_f^{n-2} g(x^\circ) \quad \text{ad}_f^{n-1} g(x^\circ)$$

son linealmente independientes. Esto prueba la necesidad de 1). Si 1) se satisface, entonces la distribución D es no singular y $(n - 1)$ dimensional alrededor de x° . Por lo tanto, la ecuación (3.13) puede ser reescrita como

$$d\lambda(x) \left(g(x^\circ) \quad \text{ad}_f g(x^\circ) \quad \dots \quad \text{ad}_f^{n-2} g(x^\circ) \right) = 0$$

Así decimos que la diferencial $d\lambda(x)$ es una base *1-dimensional* de la codistribución D^\perp alrededor de x° . Así, por el teorema de Frobenius, la distribución D es involutiva, y esto prueba la necesidad de 2).

Condición de suficiencia.

Si 1) se cumple, la distribución D es no singular y $(n - 1)$ dimensional alrededor de x° . Si también 2) se satisface, sabemos por el teorema de Frobenius, que existe una función real $\lambda(x)$, definida en una vecindad U de x° cuya diferencial $d\lambda(x)$ genera D^\perp , es decir resuelve la ecuación diferencial parcial (3.13). Más aún, $d\lambda(x)$ satisface también (3.14), puesto que de otra manera $d\lambda(x)$ sería aniquilado por un conjunto de n vectores linealmente independientes, lo cual nos lleva a una contradicción.

□.

3.6 Aplicación al Modelo del Generador Síncrono

3.6.1 Propiedades Estructurales

Ahora, a partir de la def. 3.3 se determinará el grado relativo para el modelo reducido del generador síncrono (2.43 – 2.45), considerando como la salida del sistema $h(x) = \delta$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} L_g h(x) &= 0 \\ L_f h(x) &= \omega - \omega_s \\ L_g L_f h(x) &= 0 \\ L_f^2 h(x) &= m_1 - m_2 E'_q \text{sen} \delta - m_3 \text{sen} 2\delta \\ L_g L_f^2 h(x) &= -m_2 m_6 \text{sen} \delta \end{aligned}$$

Por lo que el grado relativo r del sistema resulta ser 3.

Puesto que el grado relativo del sistema es 3, y a partir de la ecuación (3.8) la transformación de coordenadas que permite linealizar al sistema está dada por

$$z = T(x) = \begin{pmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ L_f^2 h(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta \\ \omega - \omega_s \\ m_1 - m_2 E'_q \text{sen} \delta - m_3 \text{sen} 2\delta \end{pmatrix}.$$

Ahora, se verificará si las condiciones del teorema 3.1 permiten la implementación de una ley de control basada en retroalimentación de estado para el modelo del generador síncrono, y la función $\lambda(x)$ es la salida del sistema $h(x) = \delta$.

Por lo tanto, para la condición 1) tenemos

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -m_2 m_6 \text{sen} \delta \\ 0 & m_2 m_6 \text{sen} \delta & m_2 m_6 [(\omega - \omega_s) (\cos \delta) + m_4 \text{sen} \delta] \\ m_6 & m_4 m_6 & m_4^2 m_6 \end{pmatrix} = 3$$

Nota 2.4 *El generador síncrono no tiene sus puntos de equilibrio en el origen, por lo tanto, es necesario efectuar un cambio de coordenadas y trasladar este punto de equilibrio al origen. Nótese, que existen ciertos puntos de operación para los cuales la matriz anterior pudiera perder rango, y en consecuencia el sistema no puede ser linealizado por retroalimentación de estado.*

Por otra parte, para la condición 2) resulta que

$$[g, ad_f g] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

entonces la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 m_6 \text{sen} \delta & 0 \\ m_6 & m_4 m_6 & 0 \end{pmatrix}$$

tiene rango 2. Por lo tanto, la distribución $D = \text{span}\{g, ad_f g\}$ es involutiva.

3.6.2 Ley de control.

En base a los resultados de la sección 3.5, la ley de control basada en retroalimentación de estado esta dada por

$$E_f = \frac{-L_f^3 h(x) + v}{L_g L_f^2 h(x)}$$

donde

$$L_f^3 h(x) = - (m_2 E'_q \cos \delta + 2m_3 \cos 2\delta) (\omega - \omega_s) + m_2 \text{sen} \delta (m_4 E'_q - m_5 \cos \delta)$$

Al remplazar las expresiones anteriores en la ley de control, tenemos

$$E_f = \frac{(m_2 E'_q \cos \delta + 2m_3 \cos 2\delta) (\omega - \omega_s) - m_2 \text{sen} \delta (m_4 E'_q - m_5 \cos \delta) + v}{-m_2 m_6 \text{sen} \delta} \quad (3.15)$$

donde v es un control auxiliar dado por

$$v = - \sum_{i=0}^{n-1} c_i \left(L_f^i h(x) - y_{ref}^{(i)} \right)$$

y los coeficientes c_i s se eligen tal que el polinomio

$$s^n + c_{n-1} s^{n-1} + c_{n-2} s^{n-2} + \dots + c_1 s + c_0$$

sea Hurwitz, y_{ref} es la salida de referencia deseada.

3.7 Resultados de Simulación

En esta sección, se presentan los resultados de simulación para el modelo matemático del generador síncrono presentado en el capítulo 2 (Fig. 2.3). Basados tanto en el modelo completo como el reducido, presentamos una comparación de estos modelos, la cual como se podrá observar en las simulaciones, son idénticas. Para ello una ley de control basada en retroalimentación estática del estado será aplicada a ambos. Además, se muestra también que efectivamente el diseño de la ley de control a partir del modelo reducido funciona satisfactoriamente para el sistema completo en lazo cerrado.

Se puede observar de las simulaciones presentadas, que la ley de control obtenida y aplicada al modelo completo del generador síncrono, efectivamente estabiliza al sistema y además lleva al ángulo del rotor a la referencia deseada, la cual para este análisis es $y_{ref} = 0.73$ rad. (elegida arbitrariamente). Las condiciones iniciales y los valores de los parámetros de la máquina síncrona empleados para estas simulaciones, son los mismos que se utilizaron para el análisis en lazo abierto efectuado en el capítulo 2 (vease sección 2.6), y las ganancias del controlador fueron las siguientes: $c_0 = 350$, $c_1 = 155$ y $c_2 = 22$.

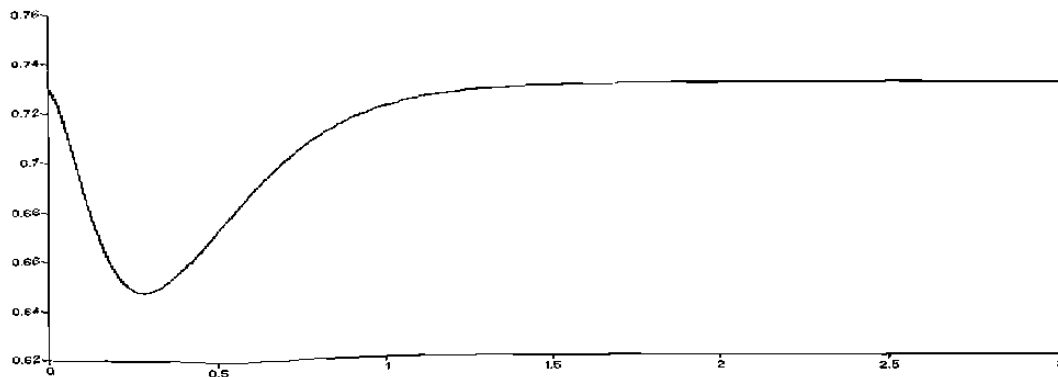


Figura 3.3 Angulo del Rotor.

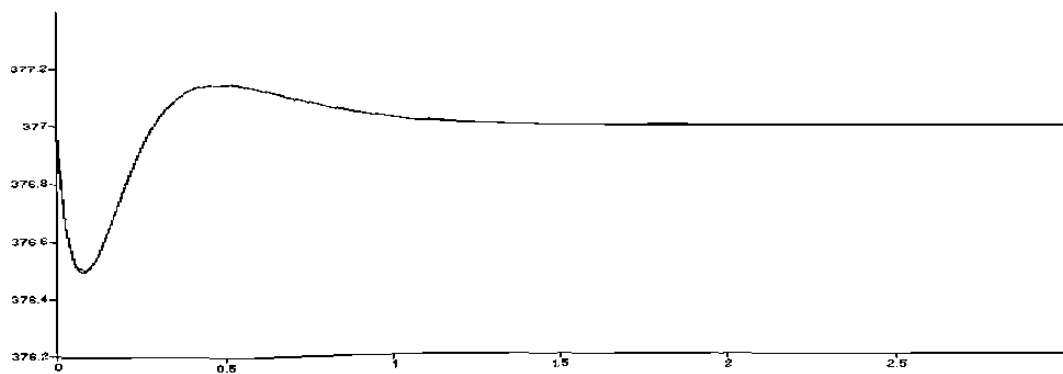


Figura 3.4 Velocidad Síncrona.

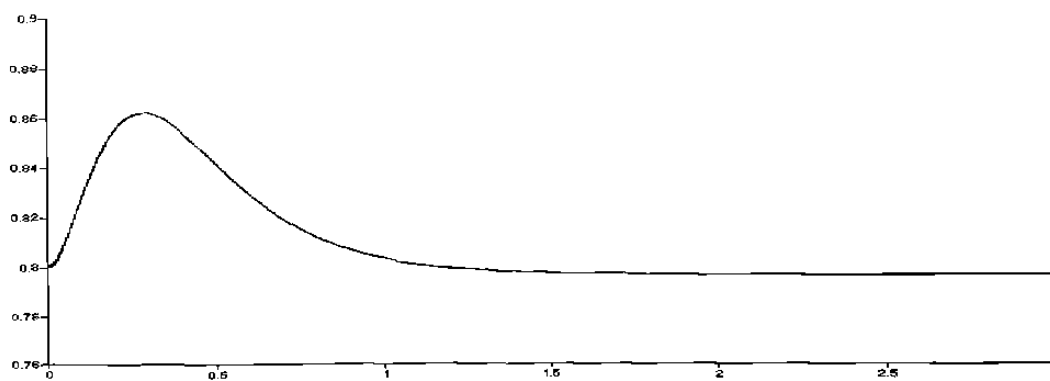


Figura 3.5 Voltaje Transitorio en el Eje de Cuadratura.

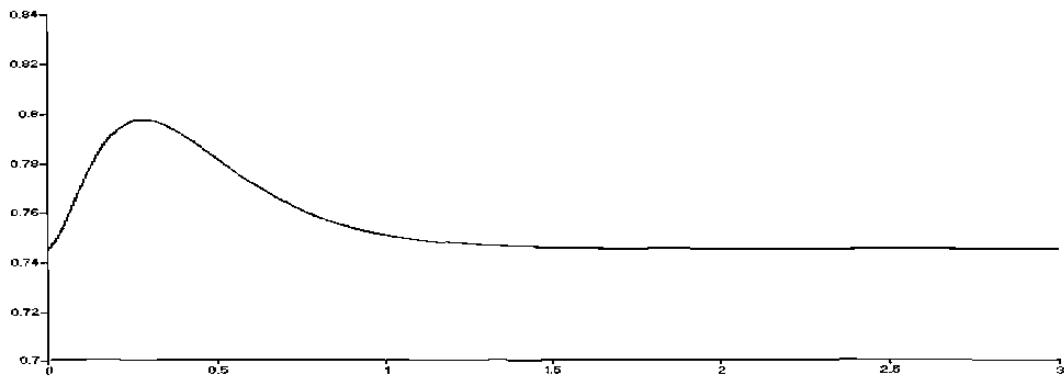


Figura 3.6 Flujo en el Eje Directo.

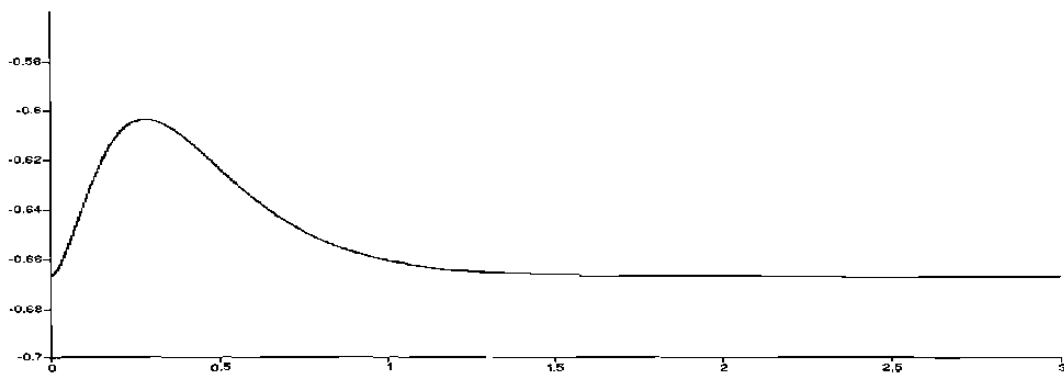


Figura 3.7 Flujo en el Eje de Cuadratura.

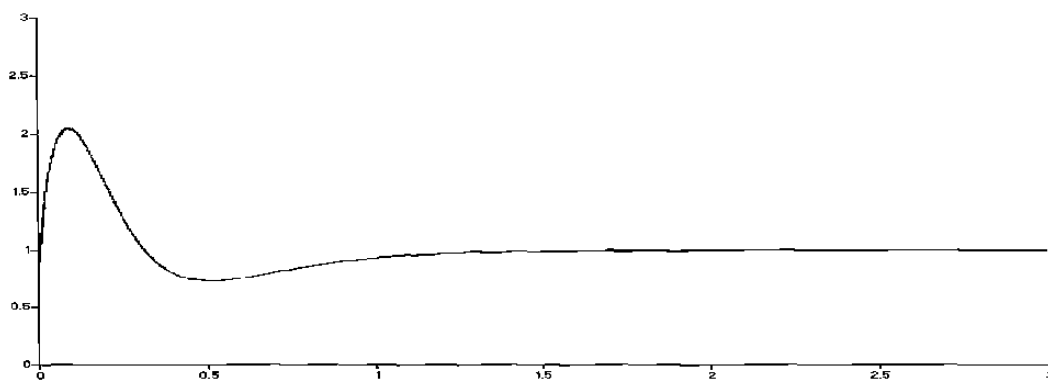


Figura 3.8 Ley de Control Mediante Retroalimentación de Estado.

Capítulo 4

Estimación del Estado

4.1 Introducción

Existen diferentes técnicas para el control de un sistema eléctrico, las cuales se basan principalmente en la Linealización y en Sistemas de Estructura Variable, y además resultan ser robustas. Sin embargo, para llevar a cabo la implementación de estos esquemas de control, frecuentemente se asume que el vector de estados es conocido, lo cual generalmente no es posible, debido a condiciones físicas y/o económicas. Por lo tanto, para poder implementar estas leyes de control resulta necesario estimar el vector de estado. La estimación de los estados se obtiene a partir de las mediciones de la salida y de la entrada del sistema original. El sistema que permite realizar tal estimación se llama *observador*.

El problema del diseño de observadores está completamente resuelto para los sistemas lineales invariantes en el tiempo, mientras que en el caso no lineal, no existe una teoría general. Para tratar este problema, se han empleado diferentes técnicas tales como: Lyapunov, linealización, diferenciación numérica, métodos algebraicos y geométricos [9, 14, 22, 33, 35, 36].

La teoría de sistemas de estructura variable (VSS) y su asociación con los regímenes deslizantes ha sido tema de estudios detallados durante los pasados 30 años, principalmente por investigadores rusos y/o relacionados con esta escuela. Una parte importante de interés reciente en este tipo de esquemas de control, es la posibilidad de usar la tecnología de los microprocesadores para el control en línea de los sistemas dinámicos, y un amplio rango de aplicaciones de la teoría ya desarrollada.

La técnica basada en modos deslizantes, consiste en conmutar la acción de control entre dos valores extremos, forzando a las trayectorias del sistema a mantenerse sobre la superficie deseada [4], la cual es llamada superficie deslizante. La elección de esta superficie está frecuentemente relacionada con algún problema de estabilidad. Entonces, en el régimen

deslizante, la dinámica del sistema es reducida por el número de componentes que definen la superficie deslizante. Note que los regímenes deslizantes no están afectados por las perturbaciones, si estas satisfacen las bien conocidas condiciones de "matching" (en el caso lineal, vease [17], para el caso no lineal, vease [51] mediante la técnica de geometría diferencial). Estas características de la técnica basada en modos deslizantes, hacen atractiva su utilización también, en el diseño de observadores para estimar los componentes del vector de estado, y entonces poder implementar alguna ley de control, la cual puede basarse también en esta técnica.

La principal razón para el uso de la técnica basada en modos deslizantes es la robustez, la cual permite reducir el efecto de las perturbaciones [16]. Estrategias discontinuas pueden ser aplicadas para el diseño tanto de un controlador como de un observador. Puesto que para los sistemas no lineales en general, el principio de separación no se cumple, es muy importante diseñar adecuadamente el controlador y el observador para un sistema, a fin de garantizar la estabilidad en lazo cerrado.

La clase de sistemas que se considerará en este trabajo, y en los cuales se aplica la técnica de modos deslizantes, son aquellos sistemas dinámicos gobernados por un número finito de ecuaciones diferenciales y lineales en el control.

El objetivo en este capítulo es presentar diferentes técnicas que puedan ser utilizadas para diseñar un observador. Además, un estudio de los diferentes observadores considerados será presentado, utilizando para esto el modelo completo del generador síncrono.

Para llevar a cabo esta comparación, se toma en cuenta su desempeño y la robustez ante perturbaciones, errores al modelar y la facilidad en la implementación del observador. Las técnicas utilizadas para la implementación de los observadores son: alta ganancia y modos deslizantes.

Basandose en la propiedad de *observabilidad* [25] de un sistema, es posible determinar relaciones explícitas que permitan determinar el vector de estado del sistema a partir del conocimiento de la salida y la entrada aplicada al mismo durante un intervalo de tiempo. Mediante un sistema dinámico auxiliar llamado *observador* es posible proporcionar esta estimación del vector de estado.

Así tenemos las siguientes definiciones

Definición 4.1 *El sistema dinámico*

$$\Sigma_{NL} : \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

se dice localmente **observable en una vecindad** $U_0 \subset \mathbb{R}^n$ del origen, si

$$\text{rango} \{dh, dL_f h, \dots, dL_f^{n-1} h\} = n, \quad \forall x \in U_0 \quad (4.1)$$

Además si (4.1) se mantiene para todo $x \in \mathbb{R}^n$ decimos que el sistema es **observable**.

Para la definición de $L_f h, L_f^2 h, \dots, L_f^{n-1} h$ vease el apéndice C.

Definición 4.2 *Se llama **observador** del sistema dinámico*

$$\Sigma_{NL} : \begin{cases} \dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u, y) \\ \hat{x} = h(u, y, \hat{z}) \end{cases} \quad \forall \hat{z} \in \mathbb{R}^n$$

a un sistema dinámico auxiliar cuyas entradas están constituidas por las entradas y salidas del sistema a observar y cuya salida es el estado estimado.

$$\Sigma_{obs} : \begin{cases} \dot{\hat{z}} = f(\hat{x}, u, y) \\ \hat{x} = h(u, y, \hat{z}) \end{cases} \quad \forall \hat{z} \in \mathbb{R}^n \quad (4.2)$$

tal que $\|e\| = \|x - \hat{x}\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

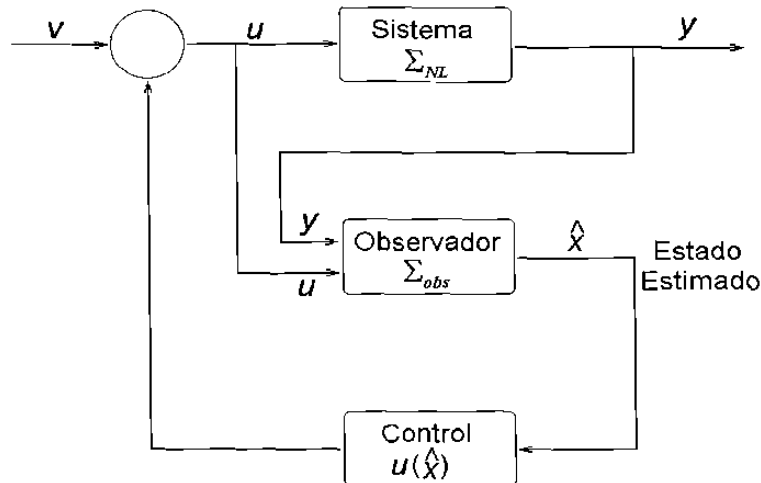


Figura 4.1 Esquema de Control Basado en un Observador.

4.2 Observador de Alta Ganancia

Considere el siguiente sistema no lineal con una sola salida

$$\Sigma_{NL} : \begin{cases} \dot{x} = F(y)x + G(x, u) \\ y = Cx \end{cases} \quad (4.3)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}$, y

$$F(y) = \begin{pmatrix} 0 & f_1(y) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_{n-1}(y) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad G(x, u) = \begin{pmatrix} g_1(x_1, u) \\ g_2(x_1, x_2, u) \\ \vdots \\ g_n(x, u) \end{pmatrix}$$

$$C = (1 \ 0 \ \cdots \ 0)$$

Hipótesis:

HG1).- Existe una clase de controles admisibles acotados $u \in U \subset \mathbb{R}^m$, un conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ que contiene al origen y dos constantes positivas α y β tales que para cada $u \in U$ y para cada salida y asociada a u y a un estado inicial $x(0) \in K$ se tiene

$$0 < \alpha \leq |f_i(s, y)| \leq \beta, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

HG2).- Las funciones f_i , $i = 1, 2, \dots, n-1$, son de clase C^r , con respecto a sus argumentos.

HG3).- Las funciones g_i , $i = 1, 2, \dots, n-1$, son globalmente Lipschitz con respecto a x y uniformemente en U .

Considere la siguiente matriz simétrica definida positiva S , la cual es solución única de la ecuación algebraica de Lyapunov

$$\theta S + A^T S + S A = C^T C \quad (4.4)$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \theta \in \mathbb{R}^+$$

Sea $\Gamma(y)$ la siguiente matriz diagonal definida como

$$\Gamma(y) = \text{diag} \left(1, f_1(y), \dots, \prod_{i=1}^{n-1} f_i(y) \right)$$

Ahora podemos establecer el siguiente resultado.

Teorema 4.1 *Suponga que el sistema (4.3) satisface las hipótesis **HG1**, **HG2** y **HG3**. Entonces existe un $\theta_0 > 0$ tal que $\forall \theta > \theta_0; \forall u \in U; \forall x(0) \in K$ y $\forall \hat{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ el siguiente sistema*

$$\sum_{NL} : \left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}} = F(y) \hat{x} + G(\hat{x}, u) - \bar{S}^{-1} C^T (C \hat{x} - y) \end{array} \right.$$

con $\bar{S} = \Gamma(y) S \Gamma(y)$, S solución de la ecuación algebraica de Lyapunov (4.4), es un observador exponencial para (4.3). Además, la dinámica de este observador puede hacerse arbitrariamente rápida.

Prueba

Sea y una salida asociada a la condición inicial $x(0) \in K$ y $u \in U$. Por la hipótesis **H1** $\Gamma(y)$ es invertible. Multiplicando ambos lados de (4.4) por $\Gamma(y)$, tenemos

$$\theta \Gamma(y) S \Gamma(y) + \Gamma(y) A^T S \Gamma(y) + \Gamma(y) S A \Gamma(y) = \Gamma(y) C^T C \Gamma(y)$$

Es fácil verificar que

$$\begin{aligned} C \Gamma(y) &= C \\ \Gamma(y)^{-1} A \Gamma(y) &= F(y) \end{aligned}$$

y por lo tanto se tiene

$$\theta \Gamma(y) S \Gamma(y) + F(y)^T \Gamma(y) S \Gamma(y) + \Gamma(y) S \Gamma(y) F(y) = C^T C$$

Recordando que $\bar{S} = \Gamma(y) S \Gamma(y)$, se obtiene

$$\theta \bar{S} + F(y)^T \bar{S} + \bar{S} F(y) = C^T C$$

Por otro lado, considere el error de estimación como $e = \hat{x} - x$, y su dinámica dada por

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{\hat{x}} - \dot{x} \\ &= F(y) \hat{x} + G(\hat{x}, u) - \bar{S}^{-1} C^T (C \hat{x} - y) - F(y) x - G(x, u) \\ &= F(y) (\hat{x} - x) + G(\hat{x}, u) - G(x, u) - \bar{S}^{-1} C^T C (\hat{x} - x) \end{aligned}$$

Entonces, resulta que

$$\dot{e} = \left(F(y) - \bar{S}^{-1} C^T C \right) e + \Xi$$

donde

$$\Xi = G(\hat{x}, u) - G(x, u).$$

Sea Δ la matriz diagonal

$$\Delta = \text{diag} \left(1, \frac{1}{\theta}, \frac{1}{\theta^2}, \dots, \frac{1}{\theta^{n-1}} \right) \quad n \text{ dimensión del sistema}$$

Un cálculo directo permite demostrar que

$$S = \frac{1}{\theta} \Delta S_1 \Delta$$

donde S_1 es solución de la ecuación (4.4) con $\theta = 1$.

Definiendo el siguiente cambio de variable

$$\varepsilon = \Gamma(y) \Delta e,$$

la dinámica de ε está dada por

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \Gamma(y) \Delta \dot{e} + \dot{\Gamma}(y) \Delta e \\ &= \Gamma(y) \Delta \left(\left(F(y) - \bar{S}^{-1} C^T C \right) e + \Xi \right) + \dot{\Gamma}(y) \Delta e \\ &= \left[\Gamma(y) \Delta \Gamma(y)^{-1} A \Gamma(y) - \Gamma(y) \Delta \Gamma(y)^{-1} S^{-1} \Gamma(y)^{-1} C^T C \right] \Delta^{-1} \Gamma(y)^{-1} \varepsilon \\ &\quad + \Gamma(y) \Delta \Xi + \dot{\Gamma}(y) \Delta \Delta^{-1} \Gamma(y)^{-1} \varepsilon \\ &= \left(\Delta A \Delta^{-1} - \Delta \theta S_1^{-1} \Delta^{-1} \Gamma(y)^{-1} C^T C \Delta^{-1} \Gamma(y)^{-1} \right) \varepsilon \\ &\quad + \Gamma(y) \Delta \Xi + \dot{\Gamma}(y) \Gamma(y)^{-1} \varepsilon \end{aligned}$$

Ademas, se puede verificar que

$$\Delta A \Delta^{-1} = \theta A$$

entonces, al remplazar la expresión anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \left(\Delta A \Delta^{-1} - \theta S_1^{-1} \Delta^{-1} \Gamma(y)^{-1} C^T C \Delta^{-1} \Gamma(y)^{-1} \right) \varepsilon \\ &\quad + \Gamma(y) \Delta \Xi + \dot{\Gamma}(y) \Gamma(y)^{-1} \varepsilon \end{aligned}$$

También es posible verificar que las siguientes relaciones se satisfacen

$$\Delta^{-1}\Gamma(y)^{-1}C^T = C^T \quad C\Delta^{-1}\Gamma(y)^{-1} = C$$

Por lo tanto

$$\dot{\varepsilon} = (\theta A - \theta S_1^{-1}C^TC)\varepsilon + \Gamma(y)\Delta\Xi + \dot{\Gamma}(y)\Gamma(y)^{-1}\varepsilon$$

obteniendose que

$$\dot{\varepsilon} = \theta(A - S_1^{-1}C^TC)\varepsilon + \Gamma(y)\Delta\Xi + \dot{\Gamma}(y)\Gamma(y)^{-1}\varepsilon$$

Considere ahora la siguiente función de Lyapunov

$$V(\varepsilon) = \varepsilon^T S_1 \varepsilon.$$

Entonces, derivando con respecto al tiempo

$$\begin{aligned} \dot{V}(\varepsilon) &= \dot{\varepsilon}^T S_1 \varepsilon + \varepsilon^T S_1 \dot{\varepsilon} = 2\varepsilon^T S_1 \dot{\varepsilon} \\ &= [\theta(A - S_1^{-1}C^TC)\varepsilon]^T S_1 \varepsilon + \varepsilon^T S_1 [\theta(A - S_1^{-1}C^TC)\varepsilon] \\ &\quad + 2\varepsilon^T S_1 [\Gamma(y)\Delta\Xi + \dot{\Gamma}(y)\Gamma^{-1}(y)\varepsilon] \\ &= \theta\varepsilon^T (A^T - C^TC S_1^{-T}) S_1 \varepsilon + \theta\varepsilon^T S_1 (A - S_1^{-1}C^TC)\varepsilon \\ &\quad + 2\varepsilon^T S_1 [\Gamma(y)\Delta\Xi + \dot{\Gamma}(y)\Gamma^{-1}(y)\varepsilon] \\ &= \theta\varepsilon^T (A^T S_1 - C^TC + S_1 A - C^TC)\varepsilon + 2\varepsilon^T S_1 [\Gamma(y)\Delta\Xi + \dot{\Gamma}(y)\Gamma^{-1}(y)\varepsilon] \\ &= -\theta\varepsilon^T S_1 \varepsilon - \theta\varepsilon^T C^TC\varepsilon + 2\varepsilon^T S_1 [\Gamma(y)\Delta\Xi + \dot{\Gamma}(y)\Gamma^{-1}(y)\varepsilon] \end{aligned}$$

Tomando la norma de los términos apropiados

$$\dot{V}(\varepsilon) = -\theta V(\varepsilon) - \theta \|C\varepsilon\| + 2 \|S_1 \varepsilon\| \|\Gamma(y)\| \|\Delta\Xi\| + 2 \|S_1 \varepsilon\| \left\| \dot{\Gamma}(y)\Gamma^{-1}(y) \right\| \|\varepsilon\|$$

Teniendo presente además que

$$\begin{aligned} \|\Delta\Xi\| &= \|\Delta\{G(\hat{x}, u) - G(x, u)\}\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{\theta^{i-1}} \{g_i(\hat{x}, u) - g_i(x, u)\} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{\theta^{i-1}} |e_i| \\ &\leq N k_G \|\Delta e\| \end{aligned}$$

donde k_G es la constante de Lipschitz más grande de G y $e_i = (e_1, \dots, e_i, 0, \dots, 0)$

Entonces

$$\begin{aligned}\|\Delta \Xi\| &\leq Nk_G \|\Delta e\| = Nk_G \|\Gamma^{-1}(y) \Gamma(y) \Delta e\| \\ &\leq Nk_G \|\Gamma^{-1}(y)\| \|\varepsilon\| \\ &\leq Nk_G \delta \|\varepsilon\|\end{aligned}$$

donde

$$\delta = \sup_{t \geq 0, z \in K} \{\Gamma^{-1}(y)\}$$

y definiendo

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \sup_{t \geq 0, z \in K} \{\Gamma(y)\} \\ \lambda_2 &= \sup_{t \geq 0, z \in K} \{\dot{\Gamma}(y) \Gamma^{-1}(y)\}\end{aligned}$$

como consecuencia se tiene

$$\dot{V}(\varepsilon) \leq -\theta V(\varepsilon) + 2\lambda_1 Nk_G \delta \|S_1 \varepsilon\| \|\varepsilon\| + 2\lambda_2 \|S_1 \varepsilon\| \|\varepsilon\|$$

o en forma más compacta

$$\begin{aligned}\dot{V}(\varepsilon) &\leq -\theta V(\varepsilon) + (2\lambda_1 Nk_G \delta + 2\lambda_2) \|S_1 \varepsilon\| \|\varepsilon\| \\ &\leq -[\theta - (2\lambda_1 Nk_G \delta + 2\lambda_2)] V(\varepsilon)\end{aligned}$$

Seleccionando

$$\theta - (2\lambda_1 Nk_G \delta + 2\lambda_2) \geq \mu > 0$$

se obtiene

$$V(\varepsilon) = V(\varepsilon_0) e^{-\mu(t-t_0)}$$

lo cual expresado en términos de ε resulta

$$\|\varepsilon\| = M e^{-\mu(t-t_0)}$$

siendo M una constante que depende $\|\varepsilon_0\|$.

□.

4.3 Observador Basado en Modos Deslizantes

4.3.1 Variedad Deslizante

Una superficie o variedad, en el espacio de estados de un sistema dinámico, representa las relaciones entre las variables de estado que describen el comportamiento de un sistema.

Si un sistema es forzado a restringir su evolución sobre una superficie dada, estas relaciones determinan un comportamiento dinámico que está definido por los parámetros de diseño y las ecuaciones que definen dicha superficie. Como consecuencia de esto, se obtienen nuevas propiedades para las trayectorias controladas, las cuales no están presentes en el sistema original. Para llevar estas trayectorias a un punto sobre la variedad, y más aún, para mantener la evolución de las trayectorias restringidas a la variedad, una técnica de control que lleva cualquier trayectoria hacia la variedad y la mantiene sobre de ella para todo tiempo posterior es la basada en modos deslizantes. Más precisamente, mediante una acción de control que conmuta y que depende de la posición con respecto a la superficie se dirige a las trayectorias hacia la misma. Esta acción de control origina que la trayectoria sufra de transitorios de alta frecuencia alrededor de la superficie definidos como "chattering", o comportamiento de modos deslizantes.

Entonces, la superficie sobre la cual evoluciona el sistema es referida como variedad deslizante o superficie de conmutación. Por regla general, la dinámica controlada puede ser idealmente restringida a la superficie mientras se adopten todos los aspectos geométricos necesarios [51].

4.3.2 Definición de Movimiento Deslizante

Considere un sistema dinámico no lineal

$$\dot{\xi} = f(\xi) + g(\xi)u \quad (4.5)$$

donde $\xi \in \Omega$, un conjunto abierto de \mathbb{R}^n ; la función de control $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y es posiblemente de carácter discontinuo; y f, g son campos vectoriales suaves definidos sobre Ω con $g(\xi) \neq 0, \forall \xi \in \Omega$. Sea s una función suave $s : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, con su gradiente sobre Ω diferente de cero. Entonces, el conjunto

$$S = \{\xi \in \mathbb{R}^n; s(\xi) = 0\}$$

define localmente una sub-variedad regular $(n - 1)$ dimensional en Ω , llamada por lo tanto variedad deslizante o superficie de conmutación.

A partir del signo de la superficie de conmutación $s(\xi)$, una ley de control del tipo modos deslizantes se define de la siguiente forma

$$u = \begin{cases} u^+(\xi) & \text{for } s(\xi) > 0 \\ u^-(\xi) & \text{for } s(\xi) < 0 \end{cases} \quad u^+(\xi) \neq u^-(\xi) \quad (4.6)$$

Las leyes de control por retroalimentación $u^+(\xi)$ y $u^-(\xi)$ son funciones suaves de ξ , y sin pérdida de generalidad, se asume que satisfacen $u^+(\xi) > u^-(\xi)$ sobre Ω que representa el conjunto controles admisibles.

Suponga que al aplicar la ley de control (4.6), las trayectorias del sistema (4.5) alcanzan localmente la superficie conmutación S , y una vez que están en ella, su movimiento queda restringido a la vecindad de S . Podemos decir que el régimen deslizante existe sobre S cuando

$$\lim_{s \rightarrow +0} L_{(f+gu^+)} s < 0 \quad \lim_{s \rightarrow -0} L_{(f+gu^-)} s > 0$$

es decir la razón de cambio de $s(\xi)$ medida a lo largo del campo controlado, es tal que la trayectoria del sistema no permanece sobre la superficie sino que cruza de un lado a otro de esta, dependiendo de la acción de la ley de control (4.6).

Ahora, sea ds la correspondiente forma uno para el gradiente de $s(\xi)$, y recordando la relación funcional entre el producto escalar de vectores $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y la derivada de Lie. La condición anterior se puede escribir de manera equivalente a

$$\lim_{s \rightarrow +0} \langle ds, f + gu^+ \rangle < 0 \quad \lim_{s \rightarrow -0} \langle ds, f + gu^- \rangle > 0$$

lo cual muestra que sobre S , las proyecciones de los campos vectoriales controlados $f + gu^+$ y $f + gu^-$ sobre el gradiente a s son opuestos en signo, y por lo tanto, los campos controlados apuntan hacia la superficie S (Fig. 4.2).

Esta idea es aplicada al diseño de observadores, donde nuestra superficie de conmutación estará determinada por el error de estimación. El objetivo de este diseño es restringir las trayectorias del error de estimación a la variedad y mantenerlas ahí para todo tiempo posterior, lo cual contribuirá a una adecuada estimación del vector de estado.

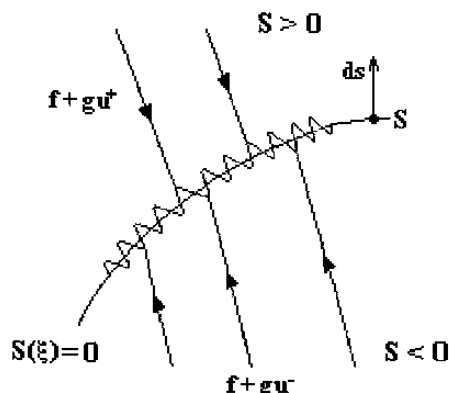


Figura 4.2 Régimen Deslizante sobre una Superficie de Conmutación.

Ahora consideremos la clase general de sistemas no lineales descritos con anterioridad (4.5), y suponga que existe una transformación de coordenadas tal que al sistema (4.5) es posible llevarlo a la siguiente forma triangular

$$\sum_{NL} : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + g_1(x_1) \\ \vdots \\ \dot{x}_i = x_{i+1} + g_i(x_1, \dots, x_i) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f(x) + g(x)u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (4.7)$$

donde f , g y g_i $i = 1, \dots, n-1$, son funciones C^∞ , Además, considere las siguientes hipótesis

L1).- Sea $i \in 1, \dots, n-1$. Existe un conjunto $\Omega^i \subset \mathbb{R}^i$ y una constante estrictamente positiva λ_1^i tal que

$$|g_i(x_1, \dots, x_i) - g_i(y_1, \dots, y_i)| \leq \lambda_1^i \|x_1 - y_1, \dots, x_i - y_i\| \\ \forall (x_1, \dots, x_i, y_1, \dots, y_i) \in \Omega^i \times \Omega^i$$

donde

$$\Omega = \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i \quad A_i = \Omega^i \times \mathbb{R}^{n-1-i} \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

L2).- Sea $(x, \hat{x}) \in \Omega \times \Omega$. Existe un $\lambda_0 \in \mathbb{R}^+$ y un $\gamma_1 \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$\|f(x) - f(\hat{x}) + (g(x) - g(\hat{x}))u\| \leq \lambda_0 + \gamma_1 \|x - \hat{x}\| \quad \forall t \geq 0.$$

Teorema 4.2 *Considere el sistema en forma triangular (4.7) y que las hipótesis L1 y L2 se satisfacen. Entonces el siguiente sistema [4]*

$$\sum_{obs} : \begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + g_1(x_1) - k_1 \text{sign}(\hat{x}_1 - x_1) \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_i = \hat{x}_{i+1} + g_i(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_i) - k_i \text{sign}(\hat{x}_1 - x_1) \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_n = f(\hat{x}) + g(\hat{x})u - k_n \text{sign}(\hat{x}_1 - x_1) \end{cases} \quad (4.8)$$

es un observador de estado para (4.7). Además, definiendo el error de estimación como

$$e = \hat{x} - x$$

obtenemos el siguiente sistema dinámico

$$\sum_{error} : \begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - k_1 \text{sign}(e_1) \\ \vdots \\ \dot{e}_i = e_{i+1} + g_i(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_i) - g_i(x_1, \dots, x_i) - k_1 \text{sign}(e_1) \\ \vdots \\ \dot{e}_n = f(\hat{x}) - f(x) + [g(\hat{x}) - g(x)]u - k_n \text{sign}(e_1) \end{cases} \quad (4.9)$$

el cual es asintóticamente estable.

Prueba

Nuestra meta primeramente es mostrar que $\hat{x}_1 - x_1 = 0, t \geq 0$. Con este propósito se selecciona la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V_1 = \frac{1}{2}e_1^2$$

cuya derivada con respecto al tiempo está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= e_1 \dot{e}_1 \\ &= e_1 (e_2 - k_1 \text{sign}(e_1)) \\ &= e_1 e_2 - k_1 e_1 \text{sign}(e_1) \\ &= e_1 e_2 - k_1 |e_1|. \end{aligned}$$

Recordando además la siguiente desigualdad

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

se obtiene como resultado

$$\dot{V}_1 \leq |e_1| (-k_1 + |e_2|)$$

Ahora, si seleccionamos k_1 de tal forma que la siguiente desigualdad se cumpla

$$k_1 \geq |e_2|_{\max} \quad t \geq 0$$

y tal que $x_1(0) = \hat{x}_1(0)$, entonces se tendrá

$$\dot{e}_1 = e_1 = 0 \quad t \geq 0$$

obteniéndose finalmente (para una explicación más detallada de $\text{sign}(e)_{eq}$ vease apéndice D)

$$\text{sign}(e_1)_{eq} = \frac{e_2}{k_1}$$

Por lo tanto, reescribiendo el sistema (4.9) se tiene

$$\sum_{error} : \begin{cases} \dot{e}_1 = 0 \\ \dot{e}_2 = e_3 + g_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2) - g_2(x_1, x_2) - \frac{k_2}{k_1} e_2 \\ \vdots \\ \dot{e}_i = e_{i+1} + g_i(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_i) - g_i(x_1, \dots, x_i) - \frac{k_i}{k_1} e_2 \\ \vdots \\ \dot{e}_n = f(\hat{x}) - f(x) + [g(\hat{x}) - g(x)]u - \frac{k_n}{k_1} e_2 \end{cases}$$

es decir

$$\sum_{error} : \begin{cases} \dot{e}_1 = 0 \\ \dot{\tilde{e}} = A\tilde{e} + \begin{pmatrix} \hat{g}_2 - g_2 \\ \vdots \\ \hat{g}_i - g_i \\ \vdots \\ \Delta f + \Delta g u \end{pmatrix} \end{cases}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{k_2}{k_1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{k_3}{k_1} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{k_{n-1}}{k_1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\frac{k_n}{k_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \hat{g}_i &= g_i(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_i), & g_i &= g_i(x_1, \dots, x_i) \\ \Delta f &= f(\hat{x}) - f(x), & \Delta g &= [g(\hat{x}) - g(x)] \end{aligned}$$

donde las $k_i, i = 2, \dots, n$ representan las ganancias del observador, y se seleccionan de tal forma que el polinomio

$$p^{n-1} + \frac{k_2}{k_1} p^{n-2} + \dots + \frac{k_{n-1}}{k_1} p + \frac{k_n}{k_1} \quad (4.10)$$

sea *Hurwitz*, y de modo que todas sus raíces sean distintas. En este caso A puede ser diagonalizada usando una matriz B , tal que $\eta = B\tilde{e}$ y $\tilde{A} = BAB^{-1}$. Ahora considere la función candidata de Lyapunov $V = \eta^T P \eta$ donde P es solución de la ecuación de Lyapunov

$$P\tilde{A} + \tilde{A}^T P = -Q \quad (4.11)$$

para alguna matriz $Q > 0$.

Por lo tanto

$$\dot{V} = -\eta^T Q \eta + 2\eta^T P B \begin{pmatrix} \hat{g}_2 - g_2 \\ \vdots \\ \hat{g}_i - g_i \\ \vdots \\ \Delta f + \Delta g u \end{pmatrix}$$

Aplicando la norma de manera apropiada obtenemos la siguiente desigualdad

$$\dot{V} = -\eta^T Q \eta + 2 \|\eta\| \lambda_{\max}(P) \|B\| \left\| \begin{pmatrix} \hat{g}_2 - g_2 & \dots & \hat{g}_i - g_i & \dots & \Delta f + \Delta g u \end{pmatrix}^T \right\|$$

Sea el conjunto

$$\lambda_1 = \max(\lambda_0, \gamma_1) \|B\| \cdot \|B^{-1}\|$$

esto nos lleva a

$$\dot{V} = -(\lambda_{\min}(Q) - 2\sqrt{n-1}\lambda_{\max}(P)\lambda_1) \|\eta\|^2 + 2\lambda_{\max}(P) \|B\| \lambda_0$$

y a partir de esta desigualdad se debe garantizar que

$$\lambda_{\min}(Q) - 2\sqrt{n-1}\lambda_{\max}(P)\lambda_1 \geq 0$$

es decir

$$\lambda_1 \leq \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\sqrt{n-1}\lambda_{\max}(P)}$$

Por otra parte, de [26], es conocido que la relación $\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}$ es máxima cuando $Q = I$. Por lo tanto, de aquí en adelante, consideraremos $Q = I$. Más aún, para asegurar que

$$\lambda_1 \leq \frac{1}{2\sqrt{n-1}\lambda_{\max}(P)}$$

seleccionaremos las ganancias k_i , $i = 2, 3, \dots, n$ tales que

$$\lambda_1 \leq \frac{\min\{|\alpha_j|\}}{\sqrt{n-1}}$$

donde α_j $j = 1, 2, \dots, n-1$ denota las raíces del polinomio (4.10).

En realidad cuando todas estas raíces son distintas, se sabe que

$$\lambda_{\max}(P) \leq \frac{1}{2 \min \{|\alpha_j|\}}.$$

Luego, bajo estos argumentos se deduce que $\dot{V} \leq 0$ cuando

$$\|\tilde{e}\| \geq \zeta$$

donde

$$\zeta = \frac{2\lambda_{\max}(P)\lambda_0}{1 - 2\sqrt{n-1}\lambda_{\max}(P)\lambda_1}$$

Esto significa que \tilde{e} converge a la esfera

$$\|\tilde{e}\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \zeta$$

Por lo tanto, dado cualquier $\zeta^* > \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \zeta$, existe un tiempo finito T tal que para todo $t > T$, se tiene

$$\|\tilde{e}\| < \zeta^*$$

Note ahora que podemos obtener también la siguiente desigualdad

$$\|\tilde{e}\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \|\tilde{e}(0)\|, \quad \forall t \geq 0.$$

Entonces, las condiciones iniciales $\tilde{e}_2(0), \tilde{e}_3(0), \dots, \tilde{e}_n(0)$ se podrán seleccionar de tal manera que la siguiente desigualdad se cumpla

$$|e_2| \leq \|\tilde{e}\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \|\tilde{e}(0)\| \leq 2r(\Omega) \quad (4.12)$$

donde $r(\Omega)$ denota el radio de la esfera más grande contenida en Ω .

Finalmente, a manera de resumen, si las hipótesis **L1** y **L2** se satisfacen, y seleccionando

i) Las ganancias $k_i, i = 2, 3, \dots, n-1$ tal que:

$$\lambda_1 \leq \frac{\min \{|\alpha_j|\}}{\sqrt{n-1}}$$

donde $\alpha_j, j = 1, 2, \dots, n-1$ son todas reales y distintas.

ii) Las condiciones iniciales $\tilde{e}(0)$ tal que (4.12) sea satisfecha.

iii) La ganancia k_1 tal que

$$k_1 \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \|\tilde{e}(0)\|$$

Entonces $e(t)$ tiende a 0, $\forall t > 0$ y $\tilde{e}(t)$ converge a la esfera

$$\|\tilde{e}\| < \zeta^* \quad \forall \zeta^* > \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \zeta$$

después de un tiempo finito T .

□.

Ahora, considere el caso especial cuando para la clase de sistemas no lineales descritos por (4.5) existe una transformación de coordenadas tal que este sistema puede ser llevado a la siguiente forma triangular

$$\sum_{NL} : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_i = x_{i+1} \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f(x, u) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (4.13)$$

Entonces, el siguiente sistema es un observador basado en modos deslizantes para (4.13)

$$\sum_{obs} : \begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 - k_1 \text{sign}(\hat{x}_1 - x_1) \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_i = \hat{x}_{i+1} - k_i \text{sign}(\hat{x}_1 - x_1) \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_n = f(\hat{x}, u) - k_n \text{sign}(\hat{x}_1 - x_1) \end{cases} \quad (4.14)$$

La dinámica del error de estimación ($e = \hat{x} - x$) está dada por

$$\sum_{error} : \begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - k_1 \text{sign}(e_1) \\ \vdots \\ \dot{e}_i = e_{i+1} - k_i \text{sign}(e_1) \\ \vdots \\ \dot{e}_n = \Delta f(\cdot) - k_n \text{sign}(e_1) \end{cases} \quad (4.15)$$

donde

$$\Delta f(\cdot) = f(\hat{x}, u) - f(x, u)$$

Ahora, consideremos las siguientes hipótesis.

L3).- En lugar de la hipótesis **L2** dada para el teorema anterior, ahora asumimos que $g(\cdot) = \Delta f(\cdot)|_{e_1=0}$ es globalmente Lipschitz en su primer argumento, i. e. $|g(x)| \leq k \|x\|$.

L4).- Sea P_n la n^{th} columna de la matriz P solución de la ecuación de Lyapunov (4.11), entonces la siguiente desigualdad se cumple

$$\frac{1}{2k} > \|P_n\|.$$

Teorema 4.3 Considere el sistema (4.13) y asumiendo que **L3** y **L4** se satisfacen. Entonces, para las condiciones iniciales $(x(0), \hat{x}(0))$, el sistema (4.14) es un observador para (4.13), y el estado estimado \hat{x} converge hacia el estado x asintóticamente.

Prueba (bosquejo). Considere la siguiente función de Lyapunov

$$V_1 = \frac{1}{2} e_1^2$$

cuya derivada con respecto al tiempo está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= e_1 \dot{e}_1 \\ &= e_1 (e_2 - k_1 \text{sign}(e_1)) \\ &= e_1 e_2 - k_1 |e_1| \\ &\leq |e_1| (|e_2| - k_1) \end{aligned}$$

Si seleccionamos k_1 de tal forma que¹

$$k_1 \geq |e_2|_{\max} \quad t \geq t_{c1} \quad (4.16)$$

Si (4.16) se satisface y del hecho de que $x_1(0) = \hat{x}_1(0)$ entonces se asegura la convergencia en tiempo finito (t_{c1}), es decir

$$\dot{e}_1 = e_1 = 0 \quad t \geq t_{c1}$$

¹ t_{c1} denota un tiempo de convergencia inicial

lo cual implica que

$$\text{sign}(e_1)_{eq} = \frac{e_2}{k_1} \quad t \geq t_{c1}$$

Así para $t \geq t_{c1}$, la dinámica del error (4.15) adquiere la forma

$$\sum_{error} : \begin{cases} \dot{e}_1 = 0 \\ \vdots \\ \dot{e}_i = e_{i+1} - \frac{k_i}{k_1} e_2 \\ \vdots \\ \dot{e}_n = \Delta f(\cdot) - \frac{k_n}{k_1} e_2 \end{cases} \quad i = 2, \dots, n-1$$

Esto es, de modo equivalente

$$\frac{d\tilde{e}}{dt} = A\tilde{e} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Delta f(\cdot) \end{pmatrix}$$

donde $\tilde{e} = (e_2, \dots, e_n)^T$. Sea $V = \tilde{e}^T P \tilde{e}$, donde P es solución de (4.11), cuya derivada está dada por

$$\dot{V} = \tilde{e}^T A^T P \tilde{e} + \tilde{e}^T P A \tilde{e} + 2\tilde{e}^T P \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Delta f(\cdot) \end{pmatrix} = -\|\tilde{e}\|^2 + 2\tilde{e}^T P \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(\tilde{e}) \end{pmatrix}$$

Entonces, a partir de la hipótesis **L3**, resulta que

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\|\tilde{e}\|^2 + 2\|\tilde{e}\| \|P_n\| (|\Delta f(\cdot)|) \\ &\leq -\|\tilde{e}\|^2 + 2k \|\tilde{e}\|^2 \|P_n\| \\ &\leq -(1 - 2k \|P_n\|) \|\tilde{e}\|^2 \end{aligned}$$

donde $g(\tilde{e}) \leq k \|\tilde{e}\|$, y P_n es la n^{th} columna de la matriz P . Finalmente, de **L4**, se tiene que

$$\dot{V} < 0$$

Esto asegura que \tilde{e} decrece hacia cero.

□.

Ahora presentamos una variante de la técnica basada en modos deslizantes, la cual constituye el resultado principal de este capítulo.

Teorema 4.4 *Considere el siguiente sistema no lineal*

$$\sum_{NL} : \begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} + g_i(x_1, x_2, \dots, x_i, u) & i = 1, \dots, n-1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = g_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (4.17)$$

donde $g_i(x_1, x_2, \dots, x_i, u)$ es continuamente diferenciable con respecto a x_i y Lipschitz, y tal que $g_i(x_1, x_2, \dots, x_i, 0) = 0$, para cualquier $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. La entrada u está acotada. Entonces, el siguiente sistema es un observador basado en modos deslizantes para (4.17)

$$\Omega_{SM} : \begin{cases} \dot{\hat{x}}_i = \hat{x}_{i+1} + g_i(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_i, u) + k_i \text{sign}(\tilde{x}_i - \hat{x}_i) & i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{\hat{x}}_n = g_n(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n, u) + k_n \text{sign}(\tilde{x}_n - \hat{x}_n) \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= x_1 \\ \tilde{x}_i &= \hat{x}_i + k_{i-1} \text{sign}(\tilde{x}_{i-1} - \hat{x}_{i-1}), \quad 2 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Sea el error de estimación definido como $e = x - \hat{x}$, cuya dinámica está dada por

$$e_{SM} : \begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 + g_1(x_1, u) - g_1(\hat{x}_1, u) - k_1 \text{sign}(\tilde{x}_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{e}_2 = e_3 + g_2(x_1, x_2, u) - g_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2, u) - k_2 \text{sign}(\tilde{x}_2 - \hat{x}_2) \\ \vdots \\ \dot{e}_{n-1} = e_n + g_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, u) - g_{n-1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{n-1}, u) \\ \quad - k_{n-1} \text{sign}(\tilde{x}_{n-1} - \hat{x}_{n-1}) \\ \dot{e}_n = g_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) - g_n(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n, u) - k_n \text{sign}(\tilde{x}_n - \hat{x}_n) \end{cases} \quad (4.18)$$

En particular, la convergencia del error de observación puede ser arbitrariamente pequeña, con una selección adecuada de la matriz K [7].

Prueba

Puesto que la entrada u está acotada, el estado x no escapa a infinito en tiempo finito. Como consecuencia de esto, también el error de estimación de estado permanece acotado en tiempo finito.

Considere la primera ecuación del sistema del error de estimación (5.17) (cuando $i = 1$)

$$\dot{e}_1 = e_2 + g_1(x_1, u) - g_1(\hat{x}_1, u) - k_1 \text{sign}(\tilde{x}_1 - \hat{x}_1)$$

Por otro lado, sea

$$V_1 = \frac{1}{2} e_1^2$$

Entonces, derivando con respecto al tiempo y al remplazar las expresiones adecuadas, tenemos

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= e_1 (e_2 + g_1(x_1, u) - g_1(\hat{x}_1, u) - k_1 \text{sign}(\tilde{x}_1 - \hat{x}_1)) \\ &= e_1 (e_2 + L_1 |e_1| - k_1 \text{sign}(e_1)) \\ &\leq |e_1| (|e_2| + L_1 |e_1| - |k_1|). \end{aligned}$$

Si seleccionamos k_1 de tal forma que la siguiente desigualdad se satisfaga

$$|k_1| > |e_2|_{\max} + L_1 |e_1|_{\max}$$

entonces, resulta que

$$\dot{V}_1 < 0.$$

Más aún, si después de un tiempo t_1 , el error de estimación permanece igual a cero (es decir $e_1 = 0$ ($\dot{e}_1 = 0$)), se tiene que

$$k_1 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1)_{eq} = e_2$$

y por consecuencia

$$\begin{aligned} \tilde{x}_2 &= \hat{x}_2 + k_1 \text{sign}(e_1) = \hat{x}_2 + e_2 = \hat{x}_2 + x_2 - \hat{x}_2 \\ &= x_2. \end{aligned}$$

De modo que ahora la dinámica del error de estimación es igual a

$$\mathbf{e}_{SM} : \begin{cases} \dot{e}_1 = 0 \\ \dot{e}_2 = e_3 + g_2(x_1, x_2, u) - g_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2, u) - k_2 \text{sign}(\tilde{x}_2 - \hat{x}_2) \\ \vdots \\ \dot{e}_{n-1} = e_n + g_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, u) - g_{n-1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{n-1}, u) \\ \quad - k_{n-1} \text{sign}(\tilde{x}_{n-1} - \hat{x}_{n-1}) \\ \dot{e}_n = g_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) - g_n(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n, u) - k_n \text{sign}(\tilde{x}_n - \hat{x}_n). \end{cases}$$

Ahora, consideremos el caso cuando $i = 2$, con la función de Lyapunov

$$V_2 = \frac{1}{2} e_1^2 + \frac{1}{2} e_2^2.$$

Si la condición $k_1 > |e_2|_{\max} + L_1 |e_1|_{\max}$ se mantiene para $t > t_1$, tenemos que $e_1 = 0$ y $e_2 - k_1 \text{sign}(e_1) = 0$, por lo tanto obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= e_2 (e_3 + g_1(x_1, x_2, u) - g_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2, u) - k_2 \text{sign}(\tilde{x}_2 - \hat{x}_2)) \\ &= e_2 (e_3 + L_1 |e_1| + L_2 |e_2| - k_2 \text{sign}(e_2)) \\ &= e_2 (e_3 + L_2 |e_2| - k_2 \text{sign}(e_2)) \\ &\leq |e_2| (|e_3| + L_2 |e_2| - |k_2|). \end{aligned}$$

Consecuentemente e_2 tiende hacia cero en tiempo finito $t_2 > t_1$ si

$$|k_2| > |e_3|_{\max} + L_2 |e_2|_{\max}$$

Entonces, se obtiene

$$\dot{V}_2 < 0.$$

Más aún, si después de un tiempo t_2 , el error de estimación permanece igual a cero, es decir, ahora $e_2 = 0$ ($\dot{e}_2 = 0$), se tiene que

$$k_2 \text{sign}(x_2 - \hat{x}_2)_{eq} = e_3.$$

Entonces, resulta

$$\begin{aligned} \tilde{x}_3 &= \hat{x}_3 + k_2 \text{sign}(e_2) = \hat{x}_3 + e_3 = \hat{x}_3 + x_3 - \hat{x}_3 \\ &= x_3. \end{aligned}$$

Además, de \dot{V}_2 se nota que el error de estimación es estrictamente decreciente durante el período de tiempo $[t_1, t_2]$. Esto implica que la condición sobre k_1 se cumple después de t_1 si se cumple antes de t_1 . Más aún, como la entrada permanece acotada durante el período de tiempo $[0, t_2]$, y de la estructura de la dinámica del error de estimación e también permanece acotado, como consecuencia \hat{x} también permanece acotado.

Ahora, analicemos el caso para $i = n$.

Al tiempo t_{n-1} y durante este tiempo $e_j = 0, j < n$. Así la dinámica del error de estimación está dada por

$$e_{SM} : \begin{cases} \dot{e}_1 = 0 \\ \dot{e}_2 = 0 \\ \vdots \\ \dot{e}_{n-1} = 0 \\ \dot{e}_n = g_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) - g_n(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n, u) - k_n \text{sign}(\tilde{x}_n - \hat{x}_n). \end{cases}$$

Usando la siguiente función de Lyapunov

$$V_n = \sum_{i=1}^n \frac{(e_i)^2}{2}$$

puesto que $e_j = 0$, para toda $j < n$, se obtiene que

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &= e_n \dot{e}_n \\ &= e_n (L_n |e_n| - k_n \text{sign}(e_n)) \\ &\leq |e_n| [L_n |e_n| - |k_n|]. \end{aligned}$$

Finalmente, si seleccionamos k_n de tal forma que la siguiente desigualdad se cumpla

$$|e_n| < \frac{|k_n|}{L_n} \quad (4.19)$$

entonces, se tiene

$$\dot{V}_n < 0.$$

Por lo tanto e_n tiende a cero en tiempo finito $t_n > t_{n-1}$, para cualquier k_n tal que (4.19) se satisfaga, si todas las condiciones sobre k_j para $j < n$ son satisfechas después de t_{n-1} , donde las k'_j s están dadas por

$$s^n + k_n s^{n-1} + \dots + k_2 s + k_1 \quad (4.20)$$

de tal forma que (4.20) sea Hurwitz.

Por lo tanto, la dinámica del error de estimación permanece acotada

□.

4.4 Resultados de simulación

En esta sección, se presentan los resultados de simulación para el modelo reducido del generador síncrono (2.43 – 2.45) mostrado en el capítulo 2. La ley de control utilizada para efec-

tuar estas simulaciones, está basada en la técnica de linealización por retroalimentación de estado (3.15), desarrollada en el capítulo 3 y obtenida a partir del modelo reducido pero aplicada al modelo completo. Esta ley de control es implementada en base a los estimados de los diferentes esquemas de observadores considerados en esta parte, primeramente bajo condiciones normales de operación (Figs. 4.3 – 4.5). Posteriormente, una perturbación es introducida modificando el par mecánico T_m , para mostrar la robustez de los algoritmos aquí implementados (Figs. 4.6 – 4.8). Finalmente, se presenta el desempeño obtenido cuando existe ruido a la salida (Figs. 4.9 – 4.11)². Un cálculo directo permite verificar, de acuerdo con la Def. 4.1, que el modelo reducido del generador síncrono satisface la propiedad de observabilidad.

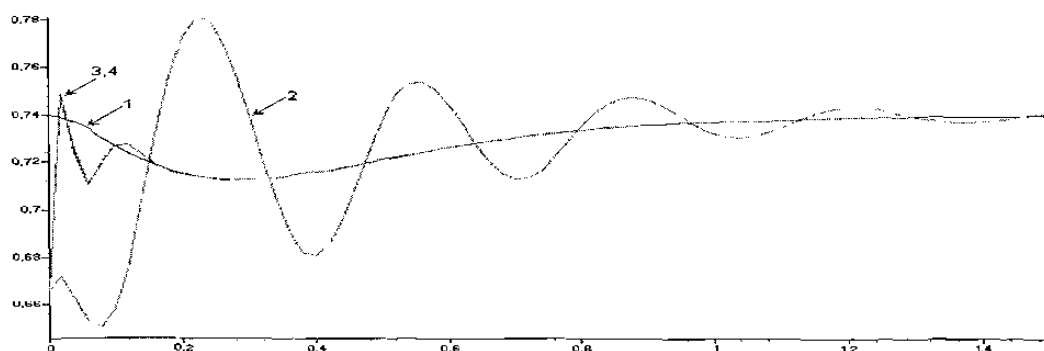


Figura 4.3 Angulo del Rotor y sus Estimados.

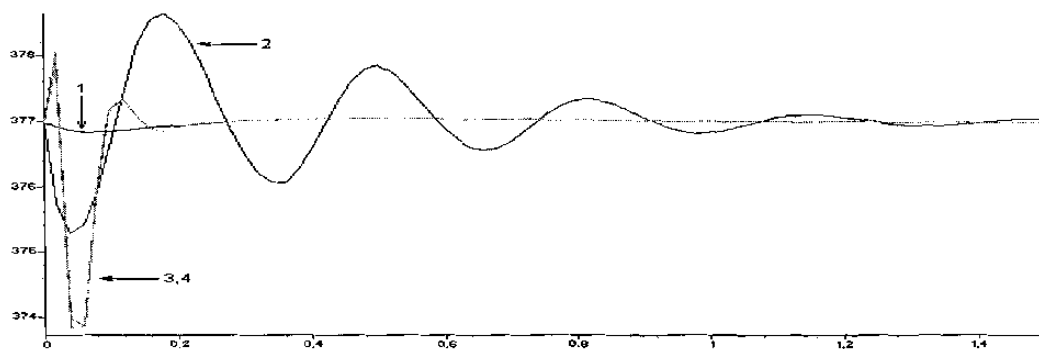


Figura 4.4 Velocidad Síncrona y sus Estimados.

²

- 1 - Señal Real.
- 2 - Observador Alta Ganancia.
- 3 - Observador Modos Deslizantes.
- 4 - Observador Propuesto.

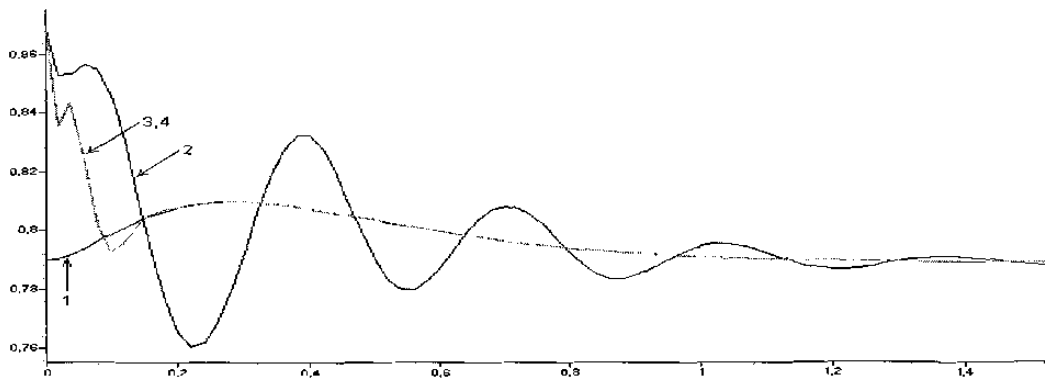


Figura 4.5 Voltaje Transitorio en el Eje de Cuadratura y sus Estimados.

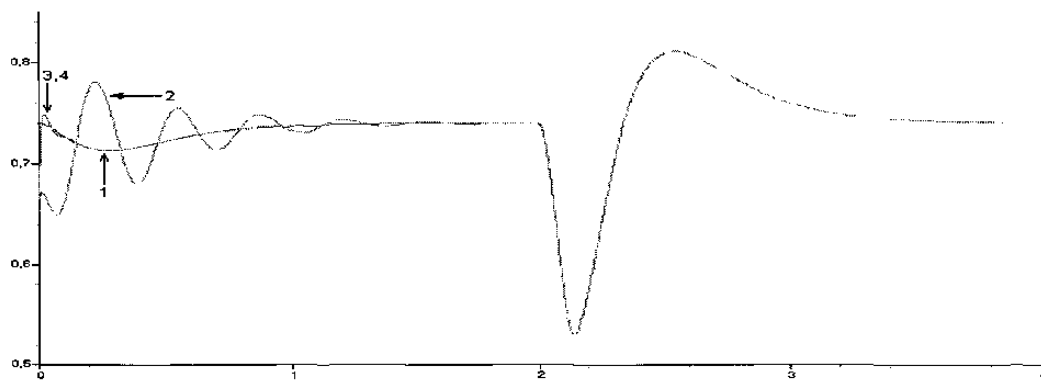


Figura 4.6 Angulo del Rotor y sus Estimados con Variación en los Parámetros.

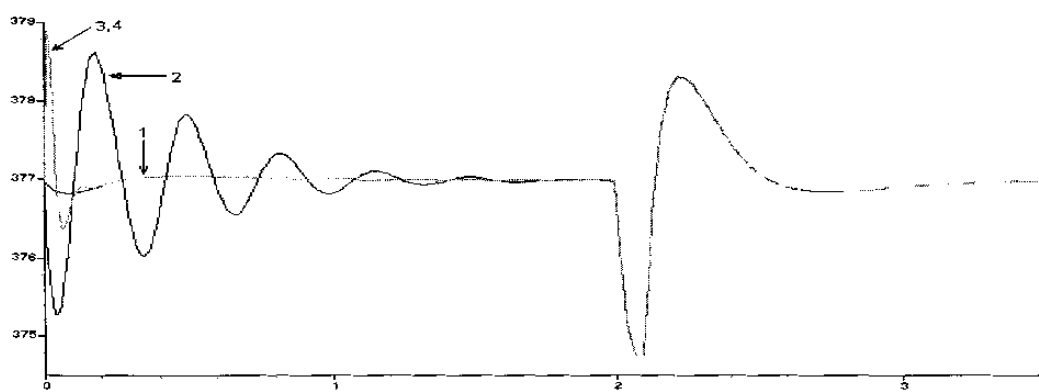


Figura 4.7 Velocidad Síncrona y sus Estimados con Variación en los Parámetros.

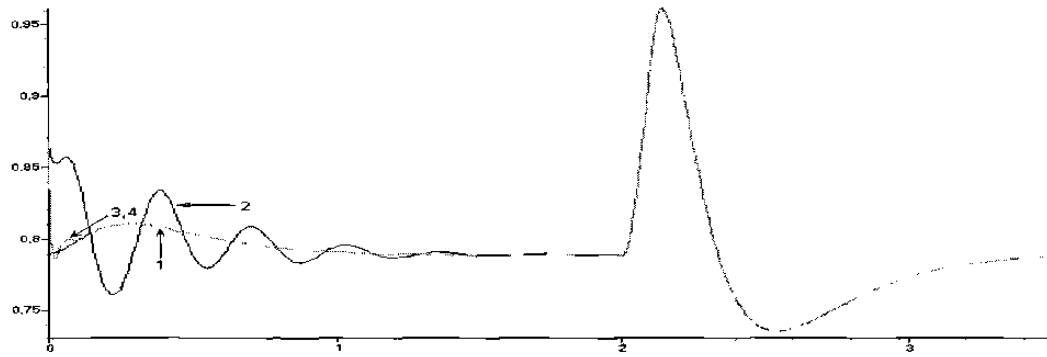


Figura 4.8 Voltaje Transitorio en el Eje de Cuadratura y sus Estimados con Variación en los Parámetros.

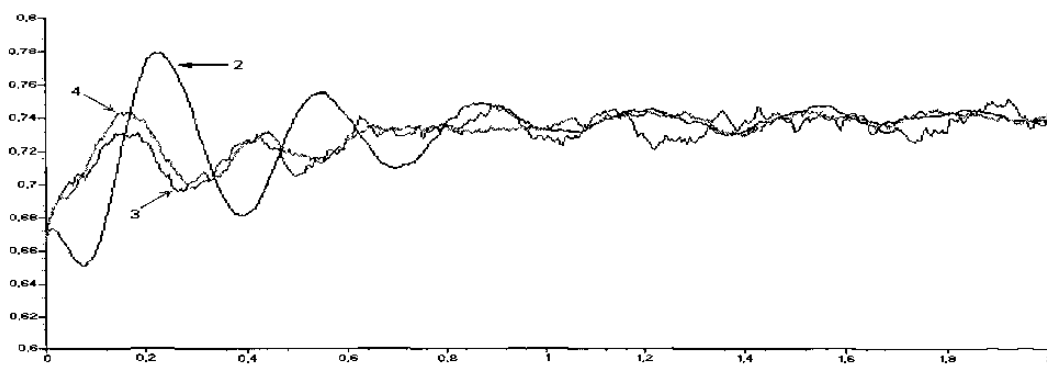


Figura 4.9 Estimados del Angulo del Rotor con Ruido a la Salida.

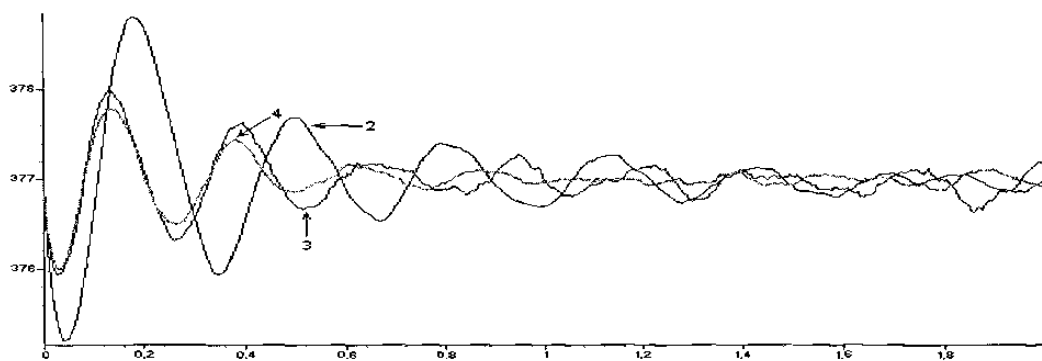


Figura 4.10 Estimados de la Velocidad Síncrona con Ruido a la Salida.

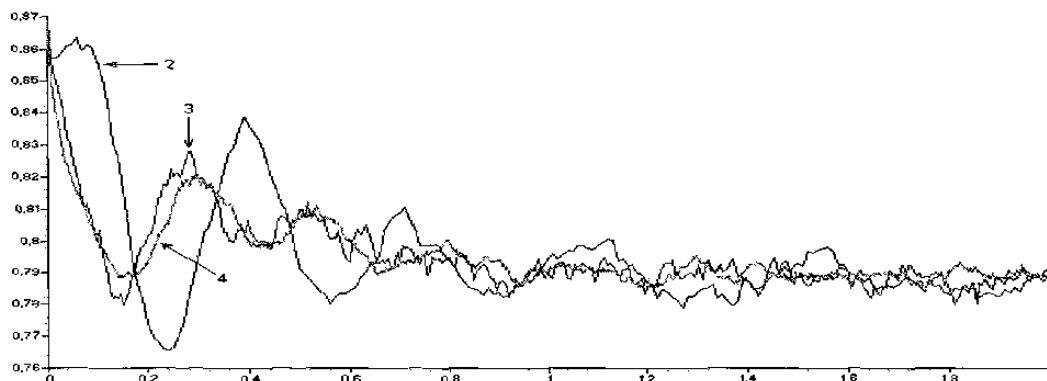


Figura 4.11 Estimados del Voltaje Transitorio en el Eje de Cuadratura con Ruido a la Salida.

En las Figs. 4.3 – 4.5 se muestra la respuesta del sistema, bajo la acción de la ley de control (3.15) obtenida en el capítulo 3, e implementada en base a los estimados de los diferentes observadores, bajo condiciones normales de operación. Como se puede observar de estas, el comportamiento de los observadores basados en la técnicas de modos deslizantes son muy similares.

En las Figs. 4.6 – 4.8 una perturbación ha sido introducida al sistema, donde el par mecánico T_m ha sido modificado de un valor inicial de $T_m = 1$ a $T_m = 0.9$ durante el intervalo de tiempo de 2-2.1 segundos.

Cuando al sistema se le introduce una señal de ruido a la salida, una diferencia notable se observa (Figs. 4.9 – 4.11). En particular, el observador de alta ganancia presenta una amplificación del ruido en los diferentes estimados. El observador propuesto en el Teorema 4.4 presenta un rendimiento ligeramente mejor al efectuado por el observador basado también en modos deslizantes del Teorema 4.2.

Capítulo 5

Sistema Multimáquina

5.1 Introducción

El estudio de estabilidad de generadores síncronos en sistemas de potencia puede ser dividido en dos partes: estabilidad transitoria y estabilidad dinámica, las cuales en ambos casos son afectadas por las perturbaciones que actúan sobre el sistema, y las cuales además pueden ser clasificadas en grandes o pequeñas (ver [42]). La estabilidad dinámica tiene que ver con el comportamiento dinámico del sistema en respuesta a perturbaciones pequeñas, mientras que la estabilidad transitoria está relacionada con la capacidad del sistema para responder a grandes perturbaciones y que se presentan repentinamente. El diseño de controladores de excitación es una de las principales técnicas para mejorar el desempeño dinámico y la estabilidad del sistema ante grandes perturbaciones. Como resultado de esto, un gran número de investigadores han conducido sus esfuerzos en esta dirección durante la década pasada.

En los últimos años, muchas investigaciones se han enfocado al mejoramiento de la estabilidad dinámica de los sistemas de potencia. Y si bien actualmente reguladores de alta ganancia en el voltaje y sistemas de excitación de alta velocidad pueden ser utilizados para mejorar la estabilidad transitoria, mediante el incremento del torque de la máquina, los efectos de estos sobre el amortiguamiento en el torque son muy pequeños o incluso perjudiciales, provocando inestabilidad dinámica [15, 43]. Entonces, el estabilizador del sistema de potencia es utilizado para proporcionar un amortiguamiento al torque de la máquina síncrona mediante una señal de estabilización adicional al controlador de excitación.

Además, las redes eléctricas están siendo incrementadas en gran manera, es decir, sus líneas de transmisión están siendo forzadas a operar a altos niveles de transmisión, debido a razones económicas y/o ambientales. Por lo que estrategias de control que interactúen con todas estas características cada vez son más difíciles de implementar.

Anteriormente, diferentes teorías de control, tales como la teoría de control clásica [15], control óptimo [6], el control de estructura variable [12, 23, 24] y la teoría de control adaptable [13, 21, 55], han sido utilizadas para diseñar estabilizadores de sistemas de potencia con alto rendimiento. Los estabilizadores basados en las técnicas anteriores, han desempeñado y continúan desempeñando un papel muy importante en el incremento de la estabilidad dinámica de los sistemas de potencia. Un aspecto muy común de estos estabilizadores es el uso de modelos matemáticos linealizados para el diseño del control. Sin embargo, los sistemas de potencia actuales son siempre no lineales.

La linealización alrededor de un punto de equilibrio es un procedimiento frecuentemente utilizado en sistemas de potencia para poder tener un modelo matemático adecuado. Pero, puesto que, el modelo lineal es solo un aproximado del modelo real, este tipo de controladores tiene un desempeño limitado cuando las condiciones de operación cambian. Aunque el control adaptable tiene la capacidad de efectuar un cambio en las condiciones de operación del sistema, el uso apropiado de la técnica de identificación es otro problema difícil de resolver [40].

Por lo anterior, los resultados que se pueden obtener con modelos linealizados no resultan adecuados cuando las condiciones de operación cambian repentinamente. Por lo tanto, si la estabilidad transitoria o el rendimiento del sistema son una cuestión importante para el análisis, es necesario considerar entonces un modelo de sistema no lineal. Así, una ley de control basada en un modelo no lineal del sistema de potencia, resultará más efectiva para un amplio rango de pequeñas perturbaciones presentes en el sistema.

Trabajos sobre estabilización mediante control no lineal para sistemas de potencia han sido realizados (ver por ejemplo [37, 46]). En [37], se diseñó un control utilizando la técnica de linealización por retroalimentación, sin embargo, esta ley de control requiere de una información global del vector de estados y un conocimiento exacto del sistema de potencia. Por otra parte, en [46] el estudio se enfocó en el desarrollo de un control robusto descentralizado que estabilice al sistema de potencia ante perturbaciones presentes en algún lugar, mediante la introducción de un diseño no lineal.

En este capítulo, retomamos la estrategia de control desarrollada en [37], para el caso multivariable. El problema de estimación del vector de estado, que permitirá implementar la ley de control multivariable propuesta, será una extensión al caso multivariable del observador propuesto en el capítulo anterior mediante la técnica de modos deslizantes. Finalmente, resultados de simulación son presentados cuando el esquema de control basado en el observador modos deslizantes es aplicado a un modelo matemático de un sistema multimáquina.

5.2 Modelo Matemático

Iniciemos la descripción del modelo matemático de un sistema multimáquinas con la ecuación que describe el comportamiento de la dinámica del rotor para una máquina (2.19)

$$\delta = \theta_r - \omega_0 t.$$

Derivando con respecto al tiempo, tenemos

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= \dot{\theta}_r - \omega_0 \\ &= \omega - \omega_0. \end{aligned}$$

Entonces, para n máquinas resulta que la dinámica del ángulo del rotor está dada por

$$\dot{\delta}_i = \omega_i - \omega_0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.1)$$

Por otra parte, del análisis para una sola máquina la ecuación de balanceo (2.18) está dada por

$$\frac{2H}{\omega_0} \ddot{\delta} = P_m - P_e.$$

Sin embargo, para compensar el efecto de amortiguamiento, se introduce un término adicional $\frac{D}{\omega_0} \dot{\delta}$ en la ecuación de balanceo, obteniéndose

$$\frac{2H}{\omega_0} \ddot{\delta} + \frac{D}{\omega_0} \dot{\delta} = P_m - P_e.$$

Expresando la ecuación anterior en términos de la velocidad síncrona, resulta

$$\begin{aligned} \frac{2H}{\omega_0} \dot{\omega} + \frac{D}{\omega_0} (\omega - \omega_0) &= P_m - P_e \\ \dot{\omega} &= \frac{\omega_0}{2H} \left(P_m - P_e - \frac{D}{\omega_0} (\omega - \omega_0) \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2H} (-D(\omega - \omega_0) + \omega_0(P_m - P_e)),$$

donde

P_m representa la potencia mecánica.

P_e es la potencia eléctrica producida por la máquina.

Finalmente, para n máquinas resulta que

$$\dot{\omega}_i = \frac{1}{2H_i} (-D_i(\omega_i - \omega_0) + \omega_0(P_{m_i} - P_{e_i})) \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.2)$$

Ahora, para obtener la ecuación que describe el comportamiento eléctrico del sistema multimáquinas, recordemos las siguientes definiciones dadas también para el análisis de una sola máquina (2.22)

$$E'_q = \frac{L_{ad}}{L_{ff}} \psi_f \quad E_q = L_{ad} i_f \quad E_f = \frac{L_{ad}}{R_f} e_f \quad T'_{d0} = \frac{L_{ff}}{R_f}. \quad (5.3)$$

Entonces, derivando la primera de las definiciones anteriores, se tiene

$$\dot{E}'_q = \frac{L_{ad}}{L_{ff}} \dot{\psi}_f.$$

Recordando además que

$$\dot{\psi}_f = e_f - R_f i_f,$$

la ecuación dinámica para el voltaje transitorio en el eje de cuadratura resulta de la forma

$$\dot{E}'_q = \frac{L_{ad}}{L_{ff}} (e_f - R_f i_f).$$

Ahora, multiplicando ambos lados de la ecuación anterior por $\frac{L_{ff}}{R_f}$, se tiene que

$$\frac{L_{ff}}{R_f} \dot{E}'_q = \frac{L_{ad}}{R_f} e_f - L_{ad} i_f,$$

de donde resulta

$$T'_{d0} \dot{E}'_q = E_f - E_q.$$

Finalmente, la ecuación eléctrica para el sistema multimáquinas está dada por

$$\dot{E}'_{q_i} = \frac{1}{T'_{d0_i}} (E_{f_i} - E_{q_i}) \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.4)$$

A partir de las relaciones de voltajes y flujos para una sola máquina (2.15, 2.20)

$$\begin{aligned} e_d &= \dot{\psi}_d - \psi_q \omega - R_s i_d \\ e_q &= \dot{\psi}_q + \psi_d \omega - R_s i_q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_d &= -L_d i_d + L_{ad} i_f \\ \psi_q &= -L_q i_q \quad \psi_f = -L_{ad} i_d + L_{ff} i_f,\end{aligned}$$

se desea encontrar la relación entre el voltaje en el eje de cuadratura y su transitorio.

Si en estado estable los flujos permanecen constantes, es decir $\dot{\psi}_d = \dot{\psi}_q = 0$. Además, al considerar que $R_s = 0$, entonces el voltaje e_q será dado por

$$\begin{aligned}e_q &= \dot{\psi}_d \omega \\ &= -L_d \omega i_d + L_{ad} \omega i_f,\end{aligned}$$

lo cual, de acuerdo con las definiciones anteriores (5.3), resulta que

$$e_q = -X_d i_d + E_q. \quad (5.5)$$

Por otro lado se tiene

$$\begin{aligned}e_q &= \dot{\psi}_d \omega \\ &= -L_d \omega i_d + L_{ad} \omega i_f \\ &= -L_d \omega i_d + L_{ad} \omega \left(\frac{\psi_f + L_{ad} i_d}{L_{ff}} \right) \\ &= -\omega i_d \left(L_d - \frac{L_{ad}^2}{L_{ff}} \right) + \frac{L_{ad} \omega \psi_f}{L_{ff}} \\ &= -X'_d i_d + E'_q,\end{aligned}$$

por lo que e_q ahora está expresado como

$$e_q = -X'_d i_d + E'_q. \quad (5.6)$$

Igualando las ecuaciones (5.5) y (5.6) para el voltaje e_q , se tiene

$$e_q = -X_d i_d + E_q = -X'_d i_d + E'_q.$$

Finalmente, E_q está dado por

$$E_q = (X_d - X'_d) i_d + E'_q. \quad (5.7)$$

Ahora, se procede a determinar las expresiones para la potencia eléctrica P_e y el voltaje en el eje de cuadratura E_q .

Por definición, la potencia eléctrica está dada por

$$P_e = \text{Re} [(E'_q \angle \delta) I^*]$$

donde

$$I^* = Y^* E_q'^*, \quad I^* \text{ es el conjugado de la corriente.}$$

$$Y^* = G - jB, \quad Y^* \text{ es la admitancia compleja conjugada, } G \text{ la conductancia y } B \text{ la susceptancia.}$$

$$E_q'^* = |E_q'| \angle -\delta, \quad E_q'^* \text{ es el conjugado del voltaje interno transitorio en el eje de cuadratura.}$$

Al remplazar las expresiones anteriores, la potencia eléctrica para un sistema multimáquinas queda determinada por

$$\begin{aligned} P_{e_i} &= \operatorname{Re} [E_{q_i}' \angle \delta_i I_i^*] \\ &= \operatorname{Re} [E_{q_i}' \angle \delta_i Y_i^* E_{q_i}'^*] \\ &= \operatorname{Re} \left[E_{q_i}' \sum_{j=1}^n (G_{ij} - jB_{ij}) E_{q_j}' \angle \delta_i - \delta_j \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[E_{q_i}' \left\{ (G_{ii} - jB_{ii}) E_{q_i}' + \sum_{j=1, i \neq j}^n (G_{ij} - jB_{ij}) E_{q_j}' \angle \delta_i - \delta_j \right\} \right] \\ &= E_{q_i}'^2 G_{ii} + \operatorname{Re} \left[\sum_{j=1, i \neq j}^n E_{q_i}' E_{q_j}' (G_{ij} - jB_{ij}) \angle \delta_i - \delta_j \right], \end{aligned}$$

de la bien conocida relación

$$E_{q_i}' E_{q_j}' \angle \delta_i - \delta_j = E_{q_i}' E_{q_j}' (\cos(\delta_i - \delta_j) + j \operatorname{sen}(\delta_i - \delta_j)).$$

Para la potencia eléctrica, resulta que

$$\begin{aligned} P_{e_i} &= E_{q_i}'^2 G_{ii} + \operatorname{Re} \left[\sum_{j=1, i \neq j}^n E_{q_i}' E_{q_j}' (G_{ij} - jB_{ij}) (\cos(\delta_i - \delta_j) + j \operatorname{sen}(\delta_i - \delta_j)) \right] \\ &= E_{q_i}'^2 G_{ii} + \sum_{j=1, i \neq j}^n E_{q_i}' E_{q_j}' (G_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j) + B_{ij} \operatorname{sen}(\delta_i - \delta_j)). \end{aligned}$$

Sin embargo, debido a que en general las reactancias en las redes eléctricas son inductivas, es común en la práctica considerar las conductancias iguales a cero, *i.e.* $G_{ij} = 0$ para todo i, j .

Finalmente, en base a la consideración anterior se obtiene

$$P_{e_i} = E_{q_i}' \sum_{j=1, i \neq j}^n E_{q_j}' B_{ij} \operatorname{sen}(\delta_i - \delta_j). \quad (5.8)$$

Ahora, se procede al desarrollo de la expresión para describir el voltaje en el eje de cuadratura, que como se mostró anteriormente, está determinado por (5.7)

$$E_q = (X_d - X'_d) I_d + E'_q$$

donde

$$I_d = Y E'_q, \quad I_d \text{ es la corriente en el eje directo,}$$

$$E'_q = |E'_q| \angle \delta.$$

Por lo tanto, para la corriente en el eje directo, se tiene

$$I_{d_i} = \text{Im} \left[\sum_{j=1}^n Y_{ij} E'_{q_j} \angle \delta_j \right]$$

y puesto que

$$Y_{ij} = -Y_{ji}, \quad i \neq j;$$

$$\begin{aligned} I_{d_i} &= \text{Im} \left[E'_{q_i} (G_{ii} + jB_{ii}) \angle \delta_{ii} - \sum_{j=1, i \neq j}^n (G_{ij} + jB_{ij}) E'_{q_j} \angle \delta_{ij} \right] \\ &= \text{Im} \left[E'_{q_i} (G_{ii} + jB_{ii}) - \sum_{j=1, i \neq j}^n E'_{q_j} (G_{ij} + jB_{ij}) (\cos(\delta_{ij}) + j \text{sen}(\delta_{ij})) \right] \\ &= E'_{q_i} B_{ii} - \sum_{j=1, i \neq j}^n E'_{q_j} (G_{ij} \text{sen}(\delta_{ij}) + B_{ij} \cos(\delta_{ij})), \end{aligned}$$

donde $\delta_{ij} = \delta_i - \delta_j$.

Partiendo de la consideración de que todas las conductancias son iguales a cero ($G_{ij} = 0$), se tiene que

$$I_{d_i} = E'_{q_i} B_{ii} - \sum_{j=1, i \neq j}^n E'_{q_j} B_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j).$$

Por lo que el voltaje en el eje de cuadratura para un sistema multimáquinas está dado por

$$E_q = E'_{q_i} + (X_{d_i} - X'_{d_i}) \left(E'_{q_i} B_{ii} - \sum_{j=1, i \neq j}^n E'_{q_j} B_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j) \right). \quad (5.9)$$

Además

$$Q_{ei} = -E'_{q_i} \sum_{j=1, i \neq j}^n E'_{q_j} B_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j) \quad (5.10)$$

$$I_{qi} = \sum_{j=1, i \neq j}^n E'_{q_j} B_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j),$$

las cuales pueden ser deducidas como se hizo para P_{ei} e I_{di} .

A manera de resumen el modelo matemático para un sistema multimáquinas está descrito por (5.1, 5.2 y 5.4) [53]

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_i &= \omega_i - \omega_0 \\ \dot{\omega}_i &= \frac{1}{2H_i} (-D_i(\omega_i - \omega_0) + \omega_0(P_{m_i} - P_{e_i})) \\ \dot{E}'_{qi} &= \frac{1}{T'_{d0i}} (E_{f_i} - E_{q_i}),\end{aligned}$$

donde (5.8, 5.9 y 5.10)

$$\begin{aligned}P_{ei} &= E'_{qi} \sum_{j=1, i \neq j}^n E'_{qj} B_{ij} \text{sen}(\delta_i - \delta_j) \\ E_{qi} &= E'_{qi} - (x_{di} - x'_{di}) \sum_{j=1, i \neq j}^n E'_{qj} B_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j) \\ Q_{ei} &= -E'_{qi} \sum_{j=1, i \neq j}^n E'_{qj} B_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j) \\ I_{qi} &= \sum_{j=1, i \neq j}^n E'_{qj} B_{ij} \text{sen}(\delta_i - \delta_j).\end{aligned}$$

5.3 Control

Considere la siguiente clase de sistemas no lineales, la cual está compuesta de la interconexión de m subsistemas descrita por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{5.11}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ representa el vector de control, $y \in \mathbb{R}^m$ es el vector de salida, y los elementos del vector f y la matriz g son funciones suaves en todos sus argumentos.

Ahora, para el diseño de la ley de control basada en retroalimentación de estado, introduciremos primero algunas definiciones y resultados los cuales nos permitirán el diseño de esta ley de control multivariable [25].

Definición 5.1: Un sistema no lineal multivariable de la forma (5.11) tiene grado relativo $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ en el punto x^0 si:

i)

$$L_{g_j} L_f^k h_i(x) = 0$$

$\forall i \leq j \leq m$, para $k \leq r_i - 1$, $\forall 1 \leq i \leq m$, y $\forall x$ en una vecindad de x^0 .

ii) La matriz

$$a(x) = \begin{pmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x) \\ L_{g_1} L_f^{r_2-1} h_2(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_2-1} h_2(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(x) \end{pmatrix}, \quad a(x) \in \mathbb{R}^{m \times m}; \quad (5.12)$$

llamada matriz desacoplante, es no singular en $x = x^0$.

Nota 5.1 Normalmente, el grado relativo total (rd) del sistema (5.11) está dado por

$$rd = r_1 + r_2 + \dots + r_m.$$

Sin embargo, como en este trabajo solo consideramos subsistemas de iguales dimensiones (*i.e.* $r = r_1 = r_2 = \dots = r_m$). Por lo tanto, el grado relativo en este caso está dado por

$$rd = r \cdot m$$

5.3.1 Transformación de Coordenadas

Ahora, para el diseño tanto de la ley de control como para el observador, que se desarrollará más adelante, considere el siguiente cambio de coordenadas para el sistema (5.11) dado por

$$\Phi(x) = z = \text{col}(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_r) \quad z \in \mathbb{R}^n, \bar{z}_i \in \mathbb{R}^m$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 &= \text{col}(h_1, h_2, \dots, h_m) \\ \bar{z}_2 &= \text{col}(L_f h_1, L_f h_2, \dots, L_f h_m) \\ &\vdots \\ \bar{z}_r &= \text{col}(L_f^{r-1} h_1, L_f^{r-1} h_2, \dots, L_f^{r-1} h_m) \end{aligned}$$

Usando, el cambio de coordenadas antes descrito, obtenemos el siguiente sistema transformado en términos de las nuevas coordenadas y con una representación de r bloques en la forma

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az + B(z, u) \\ y &= \bar{z}_1\end{aligned}\quad (5.13)$$

donde

$$z = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \\ \vdots \\ \bar{z}_r \end{pmatrix} \quad \bar{z}_j = \begin{pmatrix} z_{jm-(m-1)} \\ z_{jm-(m-2)} \\ \vdots \\ z_{jm} \end{pmatrix} \quad j = 1, 2, \dots, r$$

$$A = \begin{pmatrix} O_{m \times m} & I_{m \times m} & O_{m \times m} & \dots & O_{m \times m} \\ O_{m \times m} & O_{m \times m} & I_{m \times m} & \dots & O_{m \times m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{m \times m} & O_{m \times m} & O_{m \times m} & \dots & I_{m \times m} \\ O_{m \times m} & O_{m \times m} & O_{m \times m} & \dots & O_{m \times m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

$$O_{m \times m} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad I_{m \times m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$B(z, u) = \begin{pmatrix} O_{m \times 1} \\ O_{m \times 1} \\ \vdots \\ O_{m \times 1} \\ b_r(z, u) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \quad O_{m \times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$b_r(z, u) = b(z) + a(z)u \quad b(x) = \text{col}(L_f^{r_1} h_1(x), L_f^{r_2} h_2(x), \dots, L_f^{r_m} h_m(x)) \quad (5.14)$$

Nota 5.2 A partir de la transformación de coordenadas $z = \Phi(x)$ y de $a(x)$ y $b(x)$, es posible obtener las expresiones para $a(z)$ y $b(z)$.

Para la clase de sistemas no lineales descritos en la forma (5.13), se desea construir una ley de control desacoplante linealizante. Sin embargo, en muchas situaciones debido a que, como se mencionó antes, el vector de estado no está completamente disponible, se hace difícil la implementación de la ley de control diseñada. Por lo tanto, para resolver este problema se propone el diseño de un observador basado en la técnica de modos deslizantes, para estimar los estados no medibles del sistema, e implementar la ley de control diseñada en base a estos estimados. Este tema será tratado en la siguiente sección.

5.3.2 Diseño de la ley de Control

Ahora introduciremos el siguiente resultado que permite el diseño de la ley de control.

Lema 5.1 *Suponga que la matriz $g(x)$ evaluada en x^0 descrita por el sistema multivariable (5.11), es de rango m . Entonces, el problema de linealización exacta en el espacio de estados se puede resolver si y sólo si existe una vecindad U de x^0 y m funciones reales $h_1(x), \dots, h_m(x)$, definidas sobre U , tales que el sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

tenga grado relativo $\{r_1, \dots, r_m\}$ en x^0 y $r_1 + r_2 + \dots + r_m = n$.

△.

A partir del lema anterior que permite el diseño de un controlador, se tiene el siguiente teorema el cual determina la estructura de este.

Teorema 5.1 (Linealización por retroalimentación para sistemas multivariable). *Si la matriz desacoplante $a(x)$ (5.12) es no singular, entonces la siguiente ley de control por retroalimentación de estado*

$$b(x) + a(x)u = v \quad (5.15)$$

hace que el sistema en lazo cerrado sea entrada-salida desacoplado y estable.

Por otra parte, la entrada de control auxiliar v puede ser seleccionada como

$$v = -F\Omega_\beta(\bar{z}_1 - y_{ref}) \quad (5.16)$$

donde y_{ref} es un vector de referencia deseado, y la matriz de ganancias para el controlador está dada por

$$\Omega_\beta = \text{diag}(\beta^m I_{m \times m}, \beta^{m-1} I_{m \times m}, \dots, \beta I_{m \times m})$$

con β como una constante positiva y F un vector fila tal que la matriz $(A - BF)$ sea Hurwitz.

Prueba

Combinando el sistema (5.13) con la siguiente ley de control (vease 5.15)

$$u = a^{-1}(x) \{b(x) - F\Omega_\beta(\bar{z}_1 - y_{ref})\}$$

el sistema en lazo cerrado resultante, en las nuevas coordenadas $z = \Phi(x)$, está dado por

$$\dot{z} = (A - BF\Omega_\beta) (\bar{z}_1 - y_{ref})$$

Ahora, definiendo el error de seguimiento como $\varepsilon = (\bar{z}_1 - y_{ref})$, su dinámica está dada por

$$\dot{\varepsilon} = (A - BF\Omega_\beta)\varepsilon.$$

Tomando el siguiente cambio de coordenadas $\varsigma = \Omega_\beta \varepsilon$, el sistema anterior para el error de seguimiento puede ser reescrito como

$$\begin{aligned} \dot{\varsigma} &= \Omega_\beta (A - BF\Omega_\beta) \Omega_\beta^{-1} \varsigma \\ &= (\Omega_\beta A \Omega_\beta^{-1} - \Omega_\beta BF) \varsigma \\ &= \beta (A - BF) \varsigma \end{aligned}$$

donde $\Omega_\beta A \Omega_\beta^{-1} = \beta A$ y $\Omega_\beta B = \beta B$.

Ahora, para el análisis de estabilidad, considere la siguiente función de Lyapunov

$$V(\varsigma) = \varsigma^T P \varsigma = \|\varsigma\|_P^2$$

donde P es solución de la ecuación de Lyapunov

$$(A - BF)^T P + P (A - BF) = -Q$$

entonces

$$\begin{aligned} \dot{V}(\varsigma) &= \beta \varsigma^T \left\{ (A - BF)^T P + P (A - BF) \right\} \varsigma \\ &= -\beta \varsigma^T Q \varsigma \leq -\beta \sigma \varsigma^T P \varsigma \\ &\leq -\beta \sigma V(\varsigma) < 0, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} V(\varsigma(t)) &\leq V(\varsigma(0)) e^{-\beta \sigma t} \\ \|\varsigma(t)\|_P^2 &\leq \|\varsigma(0)\|_P^2 e^{-\beta \sigma t} \\ \|\varsigma(t)\|_P &\leq \|\varsigma(0)\|_P e^{-\frac{\beta \sigma}{2} t} \\ &\leq \|\varsigma(0)\|_P e^{-\alpha t}, \end{aligned}$$

donde

$$\sigma = \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} > 0 \quad \alpha = \frac{\beta \sigma}{2}.$$

Esto termina la demostración

□.

5.4 Estimación del Estado

Como se mencionó en el capítulo 4, la principal razón para el uso de la técnica basada en modos deslizantes es la robustez, la cual permite reducir los efectos de las perturbaciones sobre el sistema [45]. Por esta razón, aplicaremos tal técnica al caso multivariable.

Teorema 5.2. *Considere la clase de sistemas no lineales descritos por (5.13). Asumiendo que la última componente del vector $b_r(z, u)$ es continuamente diferenciable con respecto a z , y $b_r(z, 0) = 0$, para toda entrada u acotada. Entonces, el siguiente sistema*

$$\Omega_{SM} : \begin{cases} \dot{\hat{z}}_j = \hat{z}_{j+1} + K_j \text{SIGN}(\tilde{z}_j - \hat{z}_j) & j = 1, 2, \dots, r-1 \\ \dot{\hat{z}}_r = b_r(\hat{z}, u) + K_r \text{SIGN}(\tilde{z}_r - \hat{z}_r) \end{cases}$$

es un observador basado en modos deslizantes para (5.13), donde

$$\begin{aligned} \tilde{z}_1 &= \bar{z}_1; \\ \tilde{z}_i &= \hat{z}_i + K_{i-1} \text{SIGN}(\tilde{z}_{i-1} - \hat{z}_{i-1}), \quad 2 \leq i \leq r; \end{aligned}$$

$$K_j \in \mathbb{R}^+ \quad j = 1, 2, \dots, r;$$

$$\text{SIGN}(\tilde{z}_j) = \begin{pmatrix} \text{sign}(z_{jm-(m-1)}) \\ \text{sign}(z_{jm-(m-2)}) \\ \vdots \\ \text{sign}(z_{jm}) \end{pmatrix}.$$

Más aún, el error de estimación definido como $\bar{e} = \bar{z} - \hat{z}$, cuya dinámica está dada por

$$e_{SM} : \begin{cases} \dot{\bar{e}}_1 = \bar{e}_2 - K_1 \text{SIGN}(\tilde{z}_1 - \hat{z}_1) \\ \dot{\bar{e}}_2 = \bar{e}_3 - K_2 \text{SIGN}(\tilde{z}_2 - \hat{z}_2) \\ \vdots \\ \dot{\bar{e}}_{r-1} = \bar{e}_r - K_{r-1} \text{SIGN}(\tilde{z}_{r-1} - \hat{z}_{r-1}) \\ \dot{\bar{e}}_r = b_r(z, u) - b_r(\hat{z}, u) - K_r \text{SIGN}(\tilde{z}_r - \hat{z}_r) \end{cases} \quad (5.17)$$

permanece acotado, con una elección apropiada de las ganancias K_j 's (vease [7]).

Prueba

Puesto que la entrada u está acotada, el estado z no escapa a infinito en tiempo finito. Por lo tanto, el error de estimación permanece acotado.

Iniciemos el análisis con la primera ecuación del sistema del error de estimación (5.17). Para $i = 1$, se tiene que

$$\dot{\bar{e}}_1 = \bar{e}_2 - K_1 \text{SIGN}(\bar{z}_1 - \hat{\bar{z}}_1)$$

donde $\bar{e}_1, \bar{e}_2 \in \mathbb{R}^{m \times 1}$

Considere la siguiente función de Lyapunov

$$V_1 = \frac{1}{2} \bar{e}_1^T \bar{e}_1$$

Derivando con respecto al tiempo, y reemplazando las expresiones adecuadas se sigue que

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \bar{e}_1^T \dot{\bar{e}}_1 \\ &= \bar{e}_1^T (\bar{e}_2 - K_1 \text{SIGN}(\bar{e}_1)). \end{aligned} \quad (5.18)$$

De la definición de norma 1 para vectores [32]

$$\|x\| = \sum_{k=1}^n |x_k| = \sum_{k=1}^n x_k \text{sign}(x_k)$$

entonces, \dot{V}_1 resulta ser

$$\dot{V}_1 = \bar{e}_1^T \bar{e}_2 - K_1 \|\bar{e}_1\|$$

Por otro lado, recordando una de las definiciones de producto interno

$$\langle x, y \rangle = y^T x, \quad (5.19)$$

lo cual es nuestro caso resulta ser

$$\bar{e}_1^T \bar{e}_2 = \langle \bar{e}_2, \bar{e}_1 \rangle.$$

Además, de la desigualdad de Cauchy-Schwartz que relaciona el producto interno y la norma [38]

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|. \quad (5.20)$$

Entonces, aplicando los resultados anteriores, se tiene que

$$\langle \bar{e}_2, \bar{e}_1 \rangle \leq \|\bar{e}_2\| \cdot \|\bar{e}_1\|.$$

En base a lo anterior y recordando que las normas son equivalentes en espacios de dimensión finita [26, 32]. Entonces, tenemos

$$\dot{V}_1 \leq \|\bar{e}_2\| \cdot \|\bar{e}_1\| - K_1 \|\bar{e}_1\|$$

$$\leq (\|\bar{e}_2\| - K_1) \|\bar{e}_1\|.$$

Por lo tanto, si seleccionamos K_1 tal que la siguiente desigualdad se satisfaga

$$K_1 > \|\bar{e}_2\|.$$

Finalmente, se obtiene

$$\dot{V}_1 < 0.$$

Entonces, si después de un tiempo t_1 , el error de estimación permanece igual a cero (*i. e.* $\bar{e}_1 = 0$ ($\dot{\bar{e}}_1 = 0$)), se tiene que

$$K_1 \text{SIGN}(\bar{z}_1 - \hat{\bar{z}}_1)_{eq} = \bar{e}_2,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \tilde{z}_2 &= \hat{\bar{z}}_2 + K_1 \text{SIGN}(\bar{e}_1) = \hat{\bar{z}}_2 + \bar{e}_2 = \hat{\bar{z}}_2 + \bar{z}_2 - \hat{\bar{z}}_2 \\ &= \bar{z}_2. \end{aligned}$$

Finalmente, el error de estimación hasta este punto está dado por

$$e_{SM} : \begin{cases} \dot{\bar{e}}_1 = 0 \\ \dot{\bar{e}}_2 = \bar{e}_3 - K_2 \text{SIGN}(\bar{z}_2 - \hat{\bar{z}}_2) \\ \vdots \\ \dot{\bar{e}}_{r-1} = \bar{e}_r - K_{r-1} \text{SIGN}(\tilde{z}_{r-1} - \hat{\bar{z}}_{r-1}) \\ \dot{\bar{e}}_r = b_r(\bar{z}, u) - b_r(\hat{\bar{z}}, u) - K_r \text{SIGN}(\tilde{z}_r - \hat{\bar{z}}_r). \end{cases}$$

Ahora considere el caso para $i = 2$, con la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V_2 = \frac{1}{2} \bar{e}_1^T \bar{e}_1 + \frac{1}{2} \bar{e}_2^T \bar{e}_2.$$

Si la condición $K_1 > \|\bar{e}_2\|$ se satisface para todo $t > t_1$, entonces se tiene que $\bar{e}_1 = 0$ y $\bar{e}_2 - K_1 \text{sign}(\bar{e}_1) = 0$. Por lo tanto, derivando la anterior función de Lyapunov con respecto al tiempo, se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \bar{e}_2^T \dot{\bar{e}}_2 \\ &= \bar{e}_2^T (\bar{e}_3 - K_2 \text{SIGN}(\bar{e}_2)). \end{aligned}$$

Nuevamente haciendo uso de las propiedades de la norma (5.19 y 5.20), tenemos que

$$\dot{V}_2 \leq (\|\bar{e}_3\| - K_2) \|\bar{e}_2\|.$$

Consecuentemente, \bar{e}_2 se irá a cero en un tiempo finito $t_2 > t_1$ si $K_2 > \|\bar{e}_3\|$, lo que a su vez resulta en

$$\dot{V}_2 < 0.$$

Más aún, si después del tiempo t_2 , el error de estimación permanece igual a cero (*i. e.* ahora $\bar{e}_2 = 0$ ($\dot{\bar{e}}_2 = 0$)), se obtiene que

$$K_2 \text{SIGN} \left(\bar{z}_2 - \widehat{\bar{z}}_2 \right)_{eq} = \bar{e}_3.$$

Entonces, usando la expresión anterior resulta

$$\begin{aligned} \widetilde{\bar{z}}_3 &= \widehat{\bar{z}}_3 + K_2 \text{SIGN}(\bar{e}_2) = \widehat{\bar{z}}_3 + \bar{e}_3 = \widehat{\bar{z}}_3 + \bar{z}_3 - \widehat{\bar{z}}_3 \\ &= \bar{z}_3. \end{aligned}$$

A partir de \dot{V}_2 , se puede apreciar que el error de estimación es estrictamente decreciente durante el periodo de tiempo $[t_1, t_2]$. Esto implica que la condición sobre K_1 se satisface después de t_1 si se satisface antes de t_1 . Más aún, puesto que la entrada permanece acotada durante el periodo de tiempo $[0, t_2]$, y de la estructura de la dinámica del error de estimación, \bar{e} permanece acotado, y como consecuencia $\widehat{\bar{z}}$ también.

Ahora analicemos el caso para $i = r$.

Al tiempo t_{n-1} y durante este tiempo $\bar{e}_j = 0$, $j = 1, 2, \dots, r-1$. Así la dinámica del error de estimación está dada por

$$e_{SM} : \begin{cases} \dot{\bar{e}}_1 = 0 \\ \dot{\bar{e}}_2 = 0 \\ \vdots \\ \dot{\bar{e}}_{r-1} = 0 \\ \dot{\bar{e}}_r = b_r(\bar{z}, u) - b_r(\widehat{\bar{z}}, u) - K_r \text{SIGN}(\widetilde{\bar{z}}_r - \widehat{\bar{z}}_r). \end{cases}$$

Usando la siguiente función de Lyapunov

$$V_r = \sum_{i=1}^r \frac{\bar{e}_i^T \bar{e}_i}{2}$$

y puesto que $\bar{e}_j = 0$, $\forall j = 1, 2, \dots, r-1$, se tiene que

$$\dot{V}_r = \bar{e}_r^T \dot{\bar{e}}_r$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{e}_r^T \left(b_r(\bar{z}, u) - b_r(\widehat{\bar{z}}, u) - K_r \text{SIGN}(\bar{e}_r) \right) \\
&= \bar{e}_r^T (L\bar{e}_r - K_r \text{SIGN}(\bar{e}_r)) \\
&= L\bar{e}_r^T \bar{e}_r - K_r \bar{e}_r^T \text{SIGN}(\bar{e}_r) \\
&\leq L \|\bar{e}_r\|^2 - K_r \|\bar{e}_r\| \\
&\leq (L \|\bar{e}_r\| - K_r) \|\bar{e}_r\|.
\end{aligned}$$

Finalmente, seleccionando K_r tal que la siguiente desigualdad se satisfaga

$$\|\bar{e}_r\| < \frac{K_r}{L} \quad (5.21)$$

Entonces, se tiene que

$$\dot{V}_r < 0$$

Por lo tanto, \bar{e}_r tenderá hacia cero en tiempo finito $t_n > t_{n-1}$, para cualquier K_r tal que (5.21) sea satisfecha y si todas las condiciones sobre K_j para $j < r$ son satisfechas despues de t_{n-1} .

Las K'_j s son seleccionadas de tal forma que las condiciones impuestas sobre ellas se satisfagan y tal el siguiente polinomio

$$s^r + K_r s^{r-1} + \dots + K_2 s + K_1$$

sea Hurwitz

Por lo tanto, la dinámica del error de estimación permanece acotada. □

Nota 5.3 *La estabilidad del sistema en lazo cerrado usando el esquema de un controlador basado en un observador de estado no es considerado en este trabajo. Es un problema abierto.*

5.5 Resultados de Simulación

En un modelo matemático para un sistema de potencia multimáquinas clásico, la red eléctrica es reducida a una representación de bus interno. Los generadores son representados como voltajes conectados a las reactancias transitorias del eje directo. Los ángulos de los voltajes cuando estos están expresados en notación fasorial, coinciden con los ángulos mecánicos de

rotación síncrona. El sistema de potencia multimáquinas considerado en este estudio está formado por 3 generadores conectados como se muestra en la Fig. 5.1, donde el generador # 3 es usado como una referencia de bus infinito (*i.e.* $E'_q = const = 1\angle 0^\circ$) (para más detalles sobre esta configuración vease [53]). Las ecuaciones matemáticas que describen el desempeño dinámico de este sistema de potencia para cada máquina con su respectivo control de excitación $E_{fi}, i = 1, 2$; están dadas por (ver sección 5.2)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{2H_1} [-D_1 x_3 + \omega_0 (P_{m1} - P_{e1})] \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{2H_2} [-D_2 x_4 + \omega_0 (P_{m2} - P_{e2})] \\ \dot{x}_5 &= \frac{1}{T'_{d1}} (E_{f1} - E_{q1}) \\ \dot{x}_6 &= \frac{1}{T'_{d2}} (E_{f2} - E_{q2})\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}x_1 &= \delta_1, \quad x_2 = \delta_2, \quad x_3 = \omega_1, \quad x_4 = \omega_2, \quad x_5 = E'_{q1}, \quad x_6 = E'_{q2} \\ P_{e1} &= x_5 [x_6 B_{12} \text{sen}(x_1 - x_2) + B_{13} \text{sen}(x_1)] \\ P_{e2} &= x_6 [x_5 B_{21} \text{sen}(x_2 - x_1) + B_{23} \text{sen}(x_2)] \\ E_{q1} &= x_5 - (X_{d1} - X'_{d1}) (x_6 B_{12} \cos(x_1 - x_2) + B_{13} \cos(x_1)) \\ E_{q2} &= x_6 - (X_{d2} - X'_{d2}) [x_5 B_{21} \cos(x_2 - x_1) + B_{23} \cos(x_2)] \\ Q_{e1} &= -x_5 [x_6 B_{12} \cos(x_1 - x_2) + B_{13} \cos(x_1)] \\ Q_{e2} &= -x_6 [x_5 B_{21} \cos(x_2 - x_1) + B_{23} \cos(x_2)] \\ I_{q1} &= x_6 B_{12} \text{sen}(x_1 - x_2) + B_{13} \text{sen}(x_1) \\ I_{q2} &= x_5 B_{21} \text{sen}(x_2 - x_1) + B_{23} \text{sen}(x_2)\end{aligned}$$

Nota 5.4. Las susceptancias son obtenidas a partir de las reactancias entre líneas, *i.e.*, $B_{ij} = \frac{1}{X_{ij}}$. Además, $B_{ij} = B_{ji}$.

Un cálculo sencillo muestra que el sistema multimáquinas anterior, el cual está compuesto de tres máquinas, satisface las condiciones *i*) y *ii*) de la def. 5.1, donde $y_1 = x_1$ y $y_2 = x_2$

representan las salidas medibles del sistema y los grados relativos asociados a estas salidas son $r_1 = 3$ y $r_2 = 3$. Por la tanto, el grado relativo total del sistema es $n = 6$. Entonces, la transformación de coordenadas para el sistema está definida por

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{pmatrix} = \Phi(x) = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ L_f h_1 \\ L_f h_2 \\ L_f^2 h_1 \\ L_f^2 h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 - \omega_0 \\ x_4 - \omega_0 \\ \frac{-D_1 x_5 + \omega_0 (P_{m_1} - P_{e_1})}{2H_1} \\ \frac{-D_2 x_6 + \omega_0 (P_{m_2} - P_{e_2})}{2H_2} \end{pmatrix}.$$

Ahora, a partir del lema 5.1 y el teorema 5.1, la ley de control por retroalimentación de estado está dada por

$$E_f = u = \psi(x) + \varphi(x)v$$

donde $\psi(x)$ y $\varphi(x)$ están descritos como

$$\psi(x) = -a^{-1}(x)b(x) \quad \varphi(x) = a^{-1}(x)$$

$a(x)$ y $b(x)$ están definidos como en (5.12 y 5.14), lo cual para el sistema multimáquinas que estamos estudiando resultan ser de la forma

$$a(x) = \begin{pmatrix} L_{g_1} L_f^2 h_1 & L_{g_2} L_f^2 h_1 \\ L_{g_1} L_f^2 h_2 & L_{g_2} L_f^2 h_2 \end{pmatrix} \quad b(x) = \begin{pmatrix} L_f^3 h_1 \\ L_f^3 h_2 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, el controlador en las nuevas coordenadas está dado por

$$v = -F\Omega_\beta(\Phi(x) - y_{ref}),$$

donde

$$\Omega_\beta = \text{diag}(\beta^3 I_{2 \times 2}, \beta^2 I_{2 \times 2}, \beta I_{2 \times 2}),$$

y_{ref} es un vector de las salidas de referencia deseadas y los términos del vector $b(x)$ están dados por

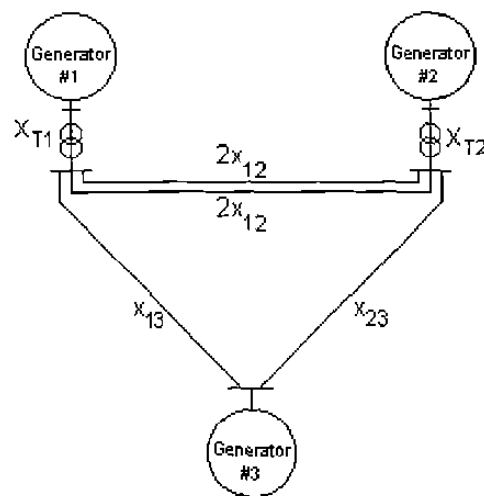
$$L_f^3 h_1 = \left\{ \omega_0 x_3 Q_{e_1} + \omega_0 x_4 x_5 x_6 B_{12} \cos(x_1 - x_2) + \frac{-D_1(-D_1 x_3 + \omega_0(P_{m_1} - P_{e_1}))}{2H_1} \right. \\ \left. + \frac{\omega_0 I_{q_1} E_{q_1}}{T'_{d1}} + \frac{\omega_0 x_5 B_{12} E_{q_2} \sin(x_1 - x_2)}{T'_{d2}} \right\} / 2H_1$$

$$L_f^3 h_2 = \left\{ \omega_0 x_3 x_5 x_6 B_{21} \cos(x_1 - x_2) + \omega_0 x_4 Q_{e_2} + \frac{-D_2(-D_2 x_4 + \omega_0(P_{m_2} - P_{e_2}))}{2H_2} \right. \\ \left. - \frac{\omega_0 x_6 E_{q_1} B_{21} \sin(x_1 - x_2)}{T'_{d1}} + \frac{\omega_0 I_{q_2} E_{q_2}}{T'_{d2}} \right\} / 2H_2.$$

Tabla 5.2 Parámetros Para el Sistema de Potencia Multimáquina.

X_{d1}	X_{d2}	X'_{d1}	X'_{d2}	X_{T1}	X_{T2}	X_{12}	X_{13}	X_{23}
p.u	p.u	p.u	p.u	p.u	p.u	p.u	p.u	p.u
1.863	2.36	0.257	0.319	0.129	0.11	0.55	0.53	0.6
P_{m1}	P_{m2}	T'_{d1}	T'_{d2}	H_1	H_2	D_1	D_2	ω_s
p.u	p.u	seg	seg	seg	seg	p.u	p.u	rad/seg
1	1	6.9	7.96	4	5.1	5	3	376.99

Finalmente, las condiciones iniciales utilizadas para esta simulación fueron las siguientes $\delta_1(0) = 1.0608$, $\delta_2(0) = 1.0583$, $\omega_1(0) = 376.9$, $\omega_2(0) = 376.9$, $E'_{q1}(0) = 1$ y $E'_{q2}(0) = 1$. Las ganancias para el controlador fueron $k_1 = 22$, $k_2 = 155$, $k_3 = 350$ y $\beta = 2$. Las ganancias del observador fueron del doble del valor que las del controlador. Las referencias a seguir fueron las condiciones iniciales originales, *i. e.*, $y_{ref1} = \delta_1(0)$ y $y_{ref2} = \delta_2(0)$.

**Figura 5.1** Sistema de Potencia Multimáquinas.

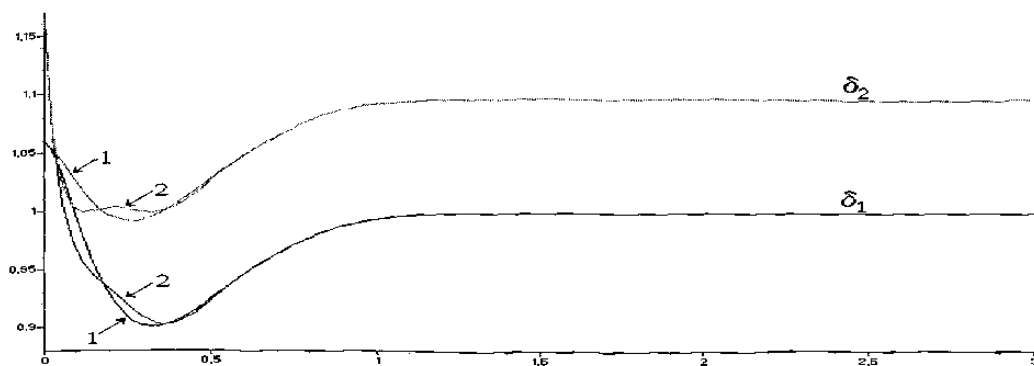


Figura 5.2 Respuestas de los Angulos en Condiciones Normales de Operación.

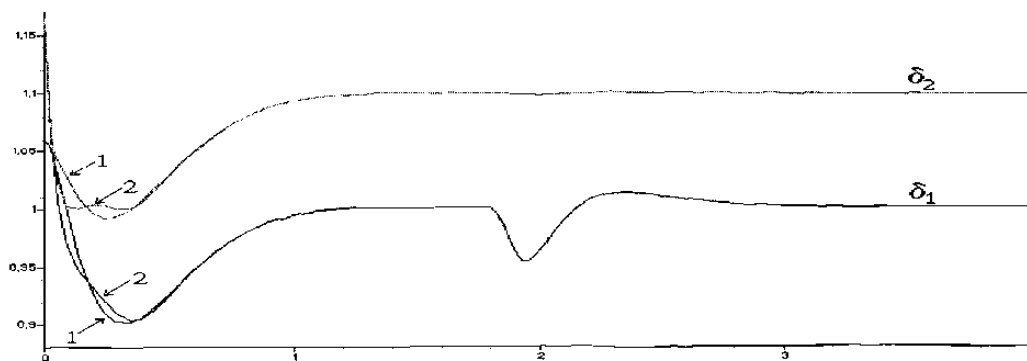


Figura 5.3 Respuestas de los Angulos con Incertidumbre en los Parametros y sus Estimados.



Figura 5.4 Control de la Máquina # 1 con Incertidumbre en los Parámetros de la Misma Máquina.

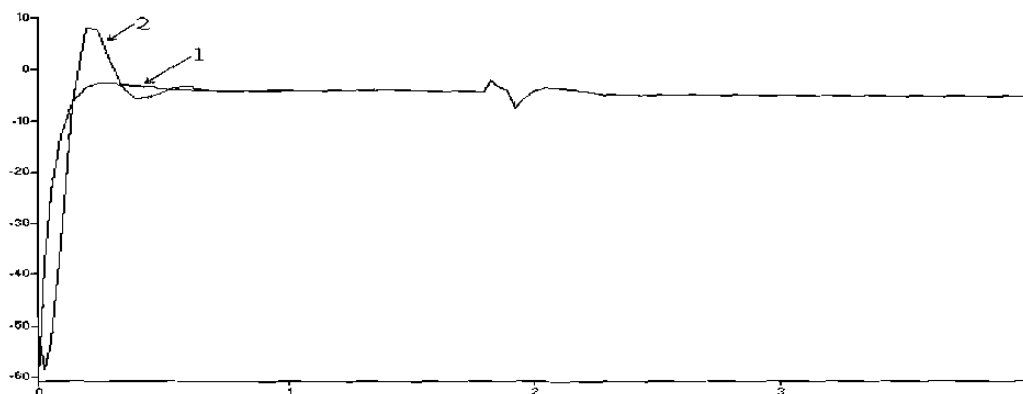


Figura 5.5 Control de la Máquina # 2 con Incertidumbre en los Parámetros de la Máquina # 1.

En las Figs¹. (5.2 y 5.3) se muestran las respuestas de los ángulos del rotor siguiendo una referencia deseada cuando la ley de control obtenida para el sistema multimáquinas, es implementada en base a los estimados obtenidos a partir del observador. De las mismas Figs. se puede observar que los transitorios no presentan grandes sobrepasos. Aunque estos se pueden atenuar, disminuyendo las ganancias que se utilizan para el controlador, esto es consecuencia del tipo de controlador utilizado.

Por otro lado, se presentan las respuestas para el ángulo del rotor, cuando varían los parámetros del sistema. En este caso variamos el par mecánico de la máquina # 1 P_{m_1} de 1 a 0.6 p.u. durante el tiempo de 1.8 a 1.9 segs. (Figs. (5.4 y 5.5)). Un hecho interesante fue, que al modificar el par mecánico de la máquina # 1, su efecto influye principalmente sobre sí misma. Sin embargo, también se apreció la influencia de este cambio en la máquina # 2, lo cual es debido a la interconexión que existe entre las máquinas, pero este cambio se reflejó de manera menos significativa (Fig. 5.5).

Resultados similares a los que se presentan para el ángulo del rotor se obtienen para las otras dos variables del sistema, la velocidad síncrona ω_i y el voltaje transitorio en el eje de cuadratura E'_{qi} ($i = 1, 2$).

¹ Señal real.
2 Estimado.

Capítulo 6

Conclusiones

6.1 Contribuciones de esta Tesis

En esta tesis, se presentó un estudio sobre el comportamiento dinámico de un generador síncrono. Un modelo de quinto orden fue obtenido y utilizado para representar las características de la máquina síncrona. Mediante la técnica de la *variedad integral* un modelo reducido de orden 3 fue deducido para fines de diseño de controladores y observadores.

Las simulaciones presentadas en el capítulo 2 (sin la implementación de alguna ley de control) mostraron que esta técnica de reducción de modelos, aplicadas en este estudio al generador síncrono, resultó eficiente, pues el comportamiento del sistema original y el reducido fue muy similar. Lo mismo puede decirse cuando una ley de control es aplicada a ambos sistemas, como se puede observar de las simulaciones presentadas en el capítulo 3.

Con el fin de estabilizar al sistema de potencia en presencia de perturbaciones y efectuar el seguimiento de una señal de referencia deseada, una ley de control basada en retroalimentación de estado fue desarrollada a partir del modelo reducido del generador síncrono. Sin embargo, para poder implementar este algoritmo se requiere de toda la información del vector de estado. Con el propósito de resolver este inconveniente, se desarrollaron en esta tesis, diferentes algoritmos para la estimación del estado, los cuales proveen un estimado de las variables no medibles que permite la implementación de la ley de control. Las técnicas utilizadas en este estudio fueron alta ganancia y la basada en modos deslizantes. Además, se demostró la convergencia de dichos observadores dándose condiciones suficientes para ello. Utilizando estos estimados, la ley de control diseñada fue aplicada al modelo matemático del generador síncrono, obteniéndose resultados satisfactorios.

El análisis efectuado mediante estas técnicas de estimación del estado, reflejó que la técnica de alta ganancia resulta adecuada cuando lo que se quiere es un tiempo de convergencia

rápido, aunque los sobrepasos que se presentan en estado transitorio debido a esto son mayores a medida que el tiempo de convergencia se acorta. Además cuando se presentan ruidos y/o incertidumbres en los parámetros, estos se ven amplificados en proporción a la ganancia seleccionada, por lo que una ganancia grande amplificará los ruidos y/o incertidumbres y puede ocasionar la pérdida de estabilidad.

Por otro lado, los observadores basados en la técnica de modos deslizantes resultaron más robustos ante el tipo de fenómenos antes mencionados, y las ganancias requeridas para una convergencia adecuada de los estimados no son tan grandes, lo que resulta atractivo al tiempo de su implementación. Sin embargo, un inconveniente asociado a este tipo de esquemas es el fenómeno denominado chattering (comportamiento de modos deslizantes) [51].

Finalmente, se hizo una extensión de las técnicas de control y estimación desarrolladas para sistemas con una entrada y una salida al caso multivariable de sistemas no lineales en forma triangular. Por otra parte, se consideró el modelo matemático de un sistema multimáquinas con una representación de bus infinito. Además, se presentó una breve explicación del modelo matemático para esta clase de sistemas y los parámetros involucrados en la descripción de estos. Resultados en simulación fueron presentados cuando el esquema de control y observación propuesto es aplicado al modelo multimáquina, y estos mostraron un comportamiento muy similar al obtenido para el caso de una sola máquina, tanto en el control, la estimación del estado y la estabilidad del sistema.

6.2 Trabajos Futuros

El problema de control y estimación para el caso de un solo generador es un problema que ya ha sido tratado por algunos investigadores y para el cual se tienen importantes resultados. Resultaría más adecuado estudiar el caso multivariable, al cual pertenecen los sistemas eléctricos de potencia. Sin embargo, los modelos resultantes no son fáciles de clasificar ya que no tiene una estructura definida. Otro tipo de estrategias, como por ejemplo, aquellas que están basadas en funciones de energía, pueden ser consideradas para el diseño de controladores y observadores, siendo este un tema de reciente estudio.

Aunque en esta tesis se hizo una extensión para esta clase de sistemas, el análisis para sistemas no lineales multivariables generales requiere de un estudio detallado de las propiedades estructurales como la controlabilidad y la observabilidad. Además, en estos sistemas es frecuente encontrar diferentes tipos de perturbaciones las cuales pueden alterar la estabilidad del sistema completo. Por lo tanto, se requiere del desarrollo de algoritmos de control y estimación más robustos que puedan implementarse en esta clase sistemas. Este es un tema abierto, que ciertamente constituye un reto a resolver, y en el cual ya están trabajando algunos investigadores alrededor del mundo.

APENDICE A

Ley de Faraday

Apéndice A

Ley de Faraday

Considere el circuito de la Fig. A.1, compuesto de una bobina conectada a una fuente de voltaje. La bobina tiene N vueltas y una resistencia r . Se asume además que se satisface una relación lineal entre el flujo magnético y el voltaje. De acuerdo a la ley de Faraday, el voltaje inducido e_i está dado por

$$e_i = \frac{d\psi}{dt}$$

donde ψ es el valor instantáneo del flujo en el instante de tiempo t . El voltaje en terminales e_1 está entonces determinado por la expresión

$$e_1 = \frac{d\psi}{dt} + ri$$

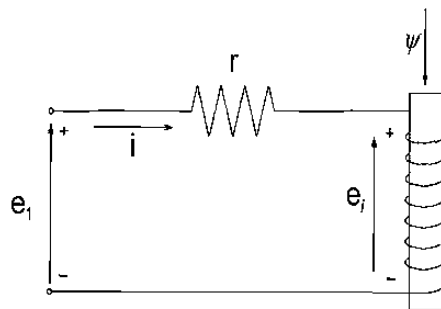


Figura A.1 Circuito Magnético Excitado.

Además, el flujo puede ser expresado en términos de la inductancia L del circuito como sigue

$$\psi = Li$$

Finalmente, el voltaje en terminales a través del inductor, en términos de la corriente que fluye en el circuito en lugar del flujo magnético, queda expresado por

$$e_i = L \frac{di}{dt}$$

APENDICE B

Lista de Símbolos para el Generador Síncrono

Apéndice B

Lista de Símbolos para el Generador Síncrono

δ : Angulo del generador en *rad*.

ω : Velocidad del generador en *rad/seg*.

E'_q : Voltaje transitorio en el eje de cuadratura en *p.u.*

ψ_d : Flujo en el eje directo en *p.u.*

ψ_q : Flujo en el eje de cuadratura en *p.u.*

ω_s : Velocidad síncrona $2\pi 60$ *rad/seg*.

H : Constante de inercia en *seg*.

T'_{d0} : Constante de tiempo transitoria en el eje de cuadratura en *seg*.

R : Resistencia de armadura en *p.u.*

X_d : Reactancia del eje directo en *p.u.*

X_q : Reactancia del eje de cuadratura en *p.u.*

X'_d : Reactancia transitoria en el eje directo en *p.u.*

V : Voltaje en terminales en *p.u.*

E_f : Voltaje de campo en *p.u.*

T_m : Par mecánico en *p.u.*

V : Voltaje en terminales en *p.u.*

L_{fD} : Inductancia entre el devanado de campo y el devanado del eje directo en *henrios*.

l_{af}, l_{aD}, L_{aQ} : Inductancias mutuas entre los devanados del rotor y el estator en *henrios*.

$$l_{af} = L_{af} \cos \theta, l_{aD} = L_{aD} \cos \theta, l_{aQ} = L_{aQ} \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) = -L_{aQ} \sin \theta.$$

L_{ff}, L_{kD}, L_{kQ} : Inductancias propias de los circuitos del rotor en *henrios*.

APENDICE C
Geometría Diferencial

Apéndice C

Geometría Diferencial

Sea \mathcal{X} un conjunto abierto de \mathbb{R}^n .

Una función vectorial $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es llamada un **campo vectorial** sobre \mathbb{R}^n . Suponga además que f tiene derivadas parciales continuas de cualquier orden, es decir $f \in C^\infty(\mathcal{X})$, entonces se dice que f es un **campo vectorial suave sobre \mathcal{X}** .

El campo vectorial f puede ser representado por el vector n -dimensional

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$$

El **Jacobiano de f** lo denotaremos como ∇f y está representado por la matriz de $n \times n$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Sean $f, g : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ campos vectoriales suaves y $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar suave. El **gradiente de h** está representado por el vector fila de dimensión $1 \times n$

$$\nabla h(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x} = \left[\frac{\partial h}{\partial x_1} \quad \frac{\partial h}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial h}{\partial x_n} \right] = dh$$

La **derivada de Lie de h con respecto a f** es una función escalar definida por

$$\begin{aligned} L_f h(x) &= \nabla h(x) \cdot f(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x) \\ &= \left[\frac{\partial h(x)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial h(x)}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial h(x)}{\partial x_n} \right] \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Es posible también tener la misma operación en forma repetida

$$L_g L_f h(x) = \frac{\partial (L_f h(x))}{\partial x} g(x)$$

y $h(x)$ derivada k veces a lo largo del campo f , resulta en $L_f^k h(x)$ donde

$$L_f^k h(x) = \frac{\partial (L_f^{k-1} h(x))}{\partial x} f(x) \quad k = 1, 2, \dots$$

con $L_f^0 h(x) = h(x)$

El corchete de Lie de f y g es un campo vectorial denotado por $ad_f g$ y definido por

$$[f, g] = ad_f g = \nabla g \cdot f - \nabla f \cdot g$$

en el caso de operación repetida k veces de g con el mismo campo vectorial f , es decir

$$[f, [f, \dots, [f, g]]]$$

podemos definir

$$ad_f^k g(x) = [f, ad_f^{k-1} g(x)]$$

con $ad_f^0 g(x) = g(x)$

Sean $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ un conjunto de campos vectoriales suaves sobre \mathcal{X} . Se dice que estos son **linealmente independientes** si para $x \in \mathcal{X}$, $\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)\}$ son linealmente independientes. Este conjunto se dice **involutivo** si existen funciones escalares $\alpha_{i,j,k} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$ad_f g = \sum_{k=1}^m \alpha_{i,j,k} f_k \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Este conjunto se dice **completamente integrable** si para cada $x \in \mathcal{X}$, existe una vecindad U de x y funciones escalares suaves h_1, h_2, \dots, h_{n-m} definidas sobre U las cuales satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales parciales

$$\nabla h_i \cdot f_j = 0 \quad 1 \leq i \leq n - m, 1 \leq j \leq m$$

sobre U y para el cual

$$\{\nabla h_1, \nabla h_2, \dots, \nabla h_{n-m}\}$$

son linealmente independientes en U .

Un campo vectorial suave $\phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ cuya inversa existe y es suave es llamado un **difeomorfismo**.

APENDICE D
Control Equivalente

Apéndice D

Control Equivalente

Sin pérdida de generalidad, cuando las trayectorias del sistema se encuentran por encima de la variedad podemos decir que una acción de control u^+ es requerida para forzar a las trayectorias a regresar a la variedad (y el valor de la función signo en este caso en $+1$). Por el contrario, cuando las trayectorias se encuentran por debajo de la variedad, el control necesario es u^- (y el valor de la función signo en este caso es -1) (ver Fig. 4.2).

Sin embargo, cuando las trayectorias del sistema están sobre la variedad la función signo es igual a cero, lo que a simple vista nos indicaría que no se requiere de alguna acción de control, si no más bien, que la dinámica propia del sistema haría que las trayectorias permanecieran sobre la variedad. Lo cual no es cierto, pues lo más seguro es que la dinámica misma del sistema haga que las trayectorias salgan de la variedad, aquí es donde entra el concepto de *control equivalente*, el cual bajo ciertas condiciones de control continuo restringe la dinámica de las trayectorias a permanecer en la variedad [52].

Desde el punto de vista geométrico, el método del control equivalente implica remplazar el control discontinuo (4.6) definido sobre la variedad deslizante, por un control continuo, el cual mantiene las trayectorias del sistema sobre la variedad.

Está característica del control equivalente (el ser de naturaleza continua) hace que el análisis de estabilidad basado en funciones de Lyapunov sea más sencillo que si se trabajara con funciones discontinuas [19].

APENDICE E

Lista de Símbolos para un Sistema Multimáquina

Apéndice E

Lista de Símbolos para un Sistema Multimáquina

δ_i : Angulo del i -ésimo generador, en *rad*.

ω_i : Velocidad del i -ésimo generador, en *rad/seg*.

P_{m_i} : Potencia mecánica de entrada para el i -ésimo generador en *p.u.*

ω_0 : Velocidad síncrona del i -ésimo generador en *rad/seg* $\omega_0 = 2\pi f_0$

D_i : Constante de amortiguamiento para el i -ésimo generador en *p.u.*

H_i : Constante de inercia para el i -ésimo generador en *seg*.

E'_{qi} : Voltaje transitorio en el eje de cuadratura para el i -ésimo generador en *p.u.*

E_{qi} : Voltaje en el eje de cuadratura para el i -ésimo generador en *p.u.*

E_{fi} : Voltaje en el devanado de excitación para el i -ésimo generador en *p.u.*

x_{di} : Reactancia del eje directo para el i -ésimo generador en *p.u.*

x'_{di} : Reactancia transitoria del eje directo para el i -ésimo generador en *p.u.*

Q_{ei} : Potencia reactiva para el i -ésimo generador en *p.u.*

I_{qi} : Corriente en el eje de cuadratura para el i -ésimo generador en *p.u.*

x_{Ti} : Reactancia del transformador para el i -ésimo generador en *p.u.*

x_{ij} : Reactancia en la línea de transmisión entre el generador i y el generador j en *p.u.*

G_{ij} : Conductancia entre el generador i y el generador j en *p.u.*

B_{ij} : Susceptancia entre el generador i y el generador j en *p.u.*

T'_{di} : Constante de tiempo transitoria de corto circuito en el eje directo para el i -ésimo generador en *seg*.

REFERENCIAS

- [1] Adkins B., *The General Theory of Electrical Machines*, Chapman and Hall, 1964.
- [2] Ahmed-Zaid S., Sauer P. W., Pai M. A., Sariougly M. K., "Reduced Order Modeling of Synchronous Machines Using Singular Perturbation", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. CAS-29, No. 11, 1982.
- [3] Ahmed-Zaid S., Xu L., Jang S. S., "Effects of Stator Transients on Steady-State Stability Regions of Electric Power Systems", *Electric Machines and Power Systems*, No 25, pp. 153-167, 1997.
- [4] Ahmed-Ali T., Lamnabhi-Lagarrigue F., "Sliding observer-controller design for uncertain triangular nonlinear systems", in *Proc. of the 36th IEEE CDC* San Diego, Cal., USA.
- [5] Anderson P. M., Fouad A., *Power System Control and Stability*, Iowa State University Press, Iowa, 1977.
- [6] Anderson J. H., "The control of Synchronous Machine Using Optimal Control Theory" *Proc. IEEE Vol. 59*, pp. 25-35, 1971.
- [7] Barbot J. P., Boukhobza T., Djemai M., "Sliding Mode Observer for Triangular Input Form", in *Proc. of the 35th IEEE CDC*, Kobe, Japan, 1996.
- [8] Bazanella A. S., Silva A. S., Kokotovic P. V., "Lyapunov Design of Excitation Control for Synchronous Machines", in *Proc. of 36th IEEE CDC* San Diego, 1996.
- [9] Birk J., Zeitz M., "Extended Luenberger observer for nonlinear multivariable systems", *Int. J. Control*, 47, 1823-1836, 1988.
- [10] Cai H., Qu Z., Gan D., Dorsey J. F., "A comparison and simulation study of nonlinearity design robust controllers for power system transient stability", *Electrical Power & Energy Systems*, (2000).
- [11] Carr J., *Applications of Center Manifold Theory*, New York, Springer-Verlag, 1981.
- [12] Chan W. C., Hsu Y. Y., "An Optimal Variable Structure Stabilizer for Power System Stabilization", *IEEE Trans. Vol. PAS-102*, No. 6, pp. 1738-1746, 1983.

- [13] Cheng S., *A Self-tuning Power System Stabilizer*, Ph. D. Dissertation, Department of Electrical Engineering, The University of Calgary, Canada, 1986.
- [14] Diop S., Grizzle J. W., Moraal P. E., Stefanopoulou A., "Interpolation and numerical differentiation for observer design", in *Proc. of IEEE ACC*, Evanston, Illinois, 1329-1333, 1994.
- [15] Domello F. P., Concordia C., "Concepts of Synchronous Machine Stability as Affected by Excitation Control", *IEEE Trans. Vol. PAS-88*, pp.316-329, 1969.
- [16] Drakunov S., Utkin V., "Sliding Mode Observers. Tutorial", in *Proc. of the 36th IEEE CDC*, New Orleans, LA, 1995.
- [17] Drazenovic B., "The invariance conditions in Variable Structure Systems", *Automatica*, Vol. 5, No. 3, pp. 287-295, (1969).
- [18] EPRI Report EL- 1424, *Determination of Synchronous Machine Stability Constants*, Vol. 2, prepared by Ontario Hydro, 1980.
- [19] Filipov A. G., "Differential Equations With Second Members Discontinuous On Intersecting Surfaces", *Automation and Remote Control*, Vol. 15, No. 10, pp.1292-1299, 1980.
- [20] Fitzgerald A. E., Kingsley C., *Electric Machinery*, Second Edition, McGraw-Hill, 1961.
- [21] Ghosh A., Malik O. P., Hope G. S., "Power System Stabilizer Based On Adaptive Control Techniques", *IEEE Trans. Vol. PAS-103*, pp. 1983-1989, 1983.
- [22] Hammouri H., Gauthier J. P., "Bilinearization up to output injection", *Syst. Control Letters*, 11, 139-149, 1988.
- [23] Hsu Y. Y., Chan W. C., "Stabilization of Power Systems Using Variable Structure Stabilizer", *Electrical Power System Research*, Vol. 6, No. 2, 1983.
- [24] Hsu Y. Y., Chan W. C., "Stabilization of Power Systems Using Variable Structure", *J. of Electrical Engineering*, Vol. 24, pp.31-41, 1981.
- [25] Isidori A., *Nonlinear Control Systems*, Communications and Control Engineering Series, Springer-Verlag, London, Third Edition, 1995.

- [26] Khalil H. K., *Nonlinear Systems*, Second Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 07458, 1996.
- [27] Kokotovic P. V., Khalil H. K., Eds., *Singular Perturbations in Systems and Control*, New York, IEEE press, 1986.
- [28] Kokotovic P. V., Sauer P. W., "An Integral Manifold as a Tool For Reduced-Order Modeling of Nonlinear Systems: A Synchronous Machine Case Study", *IEEE Transactions on Circuit and Systems*, Vol 36, No.3, 1989.
- [29] Kokotovic P. V., Khalil H. K., O'Reilly J., *Singular Perturbations Methods in Control: Analysis and Design*, New York, Academic, 1986.
- [30] Kokotovic P. V., O'Malley Jr. R. E., Sannuti P., "Singular Perturbations and Order Reduction in Control Theory—An Overview", *Automatica*, Vol 12, pp. 123-132, Pergamon Press, 1976.
- [31] Kokotovic P. V., Allemong J. J., Winkelman J. R., Chow J. H., "Singular Perturbations and Iterative Separation of Time Scales", *Automatica*, Vol. 16, pp. 23-33, Pergamon Press, 1980.
- [32] Kolmogorov A. N., Fomin S. V., *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*, Editotial Mir, URSS, Traducción al español por C. Vega, 1975.
- [33] Krener A. J., Respondek W., "Nonlinear observers with linearizable error dynamics", *SIAM J. Control. Optim.*, 23, 197-216, 1985.
- [34] Kundur P., *Power System Stability and Control*, McGraw-Hill, pp.45-136, United States, 1994.
- [35] Lévine J., Marino R., "Nonlinear systems immersion, observers and finite dimensional filters", *Syst. Control Letters*, 133-142, (1986).
- [36] López-M. V., Plestan F., Glumineau A., "Linearization by completely generalized input-output injection", in *Proc. of 6th IEEE MCCA*, Alghero, Italy, 1998.
- [37] Lu Q., Sun Y. Z., "Nonlinear stabilizing control of multimachines systems", *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol 31, pp. 1159-1163, 1986.

- [38] Luenberger D. G., *Optimization by Vector Space Methods*, John Wiley and Sons, Inc., New York, USA, 1969.
- [39] Macdonald D. C., Reece A. B. J., Turner P. J., "Turbine-Generator Steady-State Reactances", *Proc IEE* (London), Vol. 132, No. 3, pp. 101-108, 1985.
- [40] Malik O. P., Hope G. S., Cheng S. J., "Some issues on the Practical Use of the Recursive Least Squares Identification in the Self-tuning Control", *Int. J. Control*, Vol 53, No. 5, pp. 1021-1033, 1991.
- [41] Nijmeijer H., Van der Schaft A., *Nonlinear dynamical control systems*, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [42] Pai M. A., *Energy Function Analysis for Power System Stability*, Kluwer Publishers, 1989.
- [43] Pandeno P. L., Karas A.N., "Effect of High-speed Rectifier Excitation system on Generator Stability Limits", *IEEE Trans. Vol. PAS-88*, pp. 190-201, 1969.
- [44] Park R. H., "Two-Reaction Theory of Synchronous Machines - Generalized Methods of Analysis - Part I", *AIEE Trans.*, Vol. 48, pp. 716-727, 1929; Part II, Vol 52, pp. 352-355, 1933.
- [45] Perruquetti W., Floquet T., Borne P., "A note on sliding observer and controller for generalized canonical forms", in *Proc. of the 37th IEEE CDC*, Tampa, Florida USA, 1998.
- [46] Qu Z., Dorsey J. F., Bond J., McCalley J. D., "Application of robust control to sustained oscillations in power systems", *IEEE Transactions on Circuits and System*, Vol 39, No. 6, pp. 470-476, 1992.
- [47] Quintana V. H., *Course Notes, E&CE-783: Power System control and Modelling*, University of Waterloo, Department of Electrical and Computer Engineering, 1993.
- [48] Sauer P. W., Ahmed-Zaid S., Kokotovic P. V., "An Integral Manifold Approach to Reduced Order Dynamic Modeling of Synchronous Machines", *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 3, No. 1, 1988.

- [49] Sauer P. W., Pai M. A., *Power System Dynamics and Stability*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 07458, 1998.
- [50] Shackshatf G., Henser P. B., " Model of Generator Saturation for Use on Power Systems Studies", *Proc IEE* (London), Vol. 126, No. 8, pp. 759-763,1979.
- [51] Sira-Ramirez H., "Differential Geometric Methods in Variable-Structure Control", *Int. J. Control*, Vol 48, No. 4, pp. 1359-1390, (1989)
- [52] Utkin V., *Sliding Modes in Control Optimization*, Springer-Verlag, 1992.
- [53] Wang Y., Guo G., Hill D. J., "Robust Decentralized Control of a Class of Nonlinear Systems and Applications to Multimachine Power System Stabilization, in *Proc. of the 36th IEEE CDC*, San Diego, USA.
- [54] Winkelman J. R., Chow J. H., Allemong J. J., Kokotovic P. V., "Multi-Time-Scale Analysis of a Power System", *Automatica*, Vol. 16, pp. 35-43, Pergamon Press, 1980.
- [55] Xia D., Heydt G. T., "Self-tuning Controller for Generator Excitation Control", *IEEE Trans. Vol. PAS-102*, No. 6, pp 1877-1885, 1983.
- [56] Zhu C., Zhou R., Wang Y., "A new nonlinear voltage controller for power systems", *Electrical Power & Energy Systems*, Vol. 19, No. 1 pp. 19-27, 1997.

