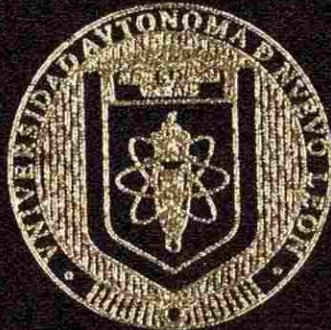


UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



DETERMINACION DE LAS CURVAS DE CALIBRACION
MEDIANTE SIMULACION NUMERICA DE
COMPRESION DE ANILLOS

TESIS

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO
EN CIENCIAS DE LA INGENIERIA MECANICA
CON ESPECIALIDAD EN MATERIALES

PRESENTA:

PALOMA RODRIGUEZ ARIZPE

CIUDAD UNIVERSITARIA

MARZO DEL 2004

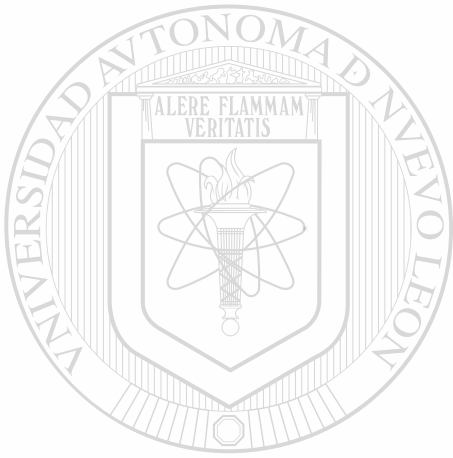
TM
Z5853
.M2
FIME
2004
.P6

P. R. A.

DETERMINAÇÃO DE LAS CURVAS DE CALIBRAÇÃO AERIANTE
DETERMINAÇÃO DE LAS CURVAS DE CALIBRAÇÃO DE AERIOS
SISTEMAÇÃO NUMERICA DE COMPENSAÇÃO DE AERIOS



1020131295



UANL

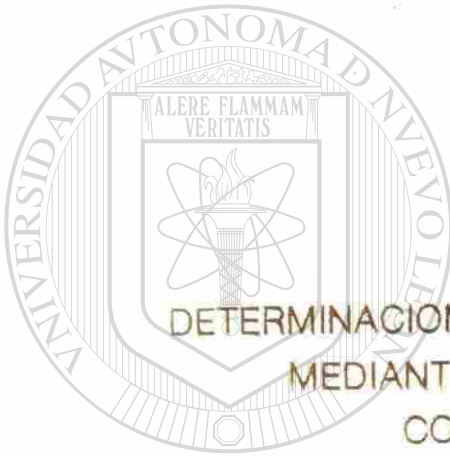
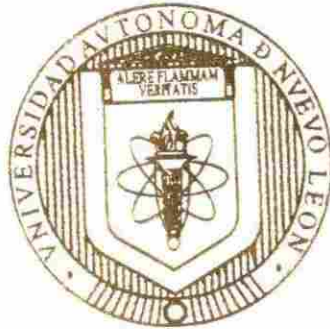
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



DETERMINACION DE LAS CURVAS DE CALIBRACION
MEDIANTE SIMULACION NUMERICA DE
COMPRESION DE ANILLOS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

TESIS

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO

EN CIENCIAS DE LA INGENIERIA MECANICA

CON ESPECIALIDAD EN MATERIALES

PRESENTA:

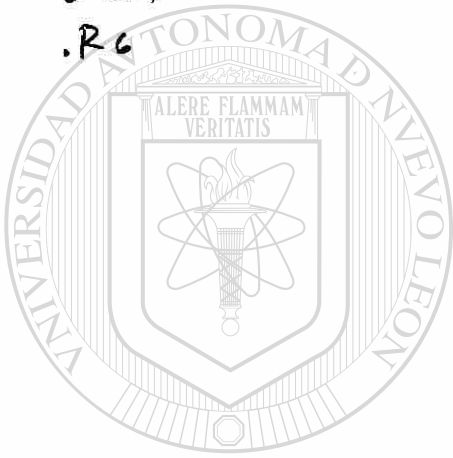
PALOMA RODRIGUEZ ARIZPE

CIUDAD UNIVERSITARIA

MARZO DEL 2004

979 927

TM
25853
.M2
FIME
2004
.R6



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

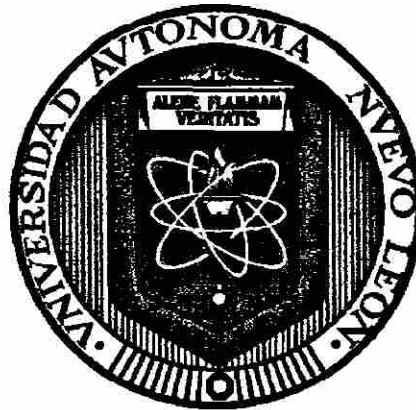


FONDO
TESIS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



**DETERMINACION DE LAS CURVAS DE CALIBRACIÓN
MEDIANTE SIMULACIÓN NUMÉRICA DE
COMPRESIÓN DE ANILLOS**

TESIS

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA MECÁNICA
CON ESPECIALIDAD EN MATERIALES**

PRESENTA

PALOMA RODRÍGUEZ ARIZPE

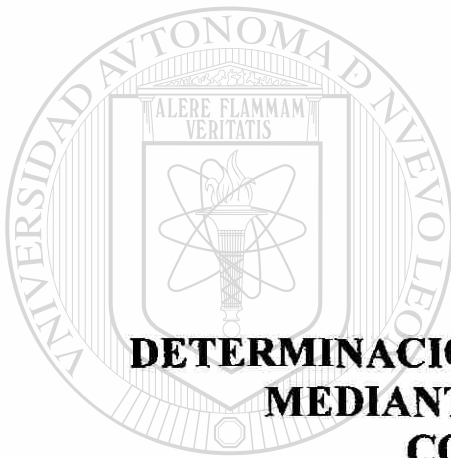
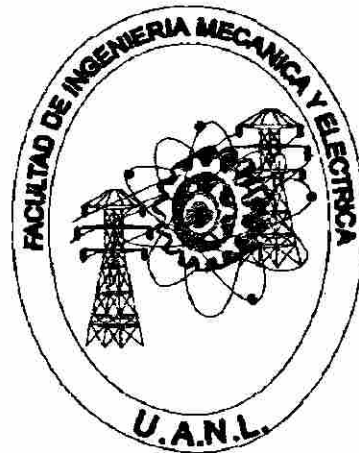
CIUDAD UNIVERSITARIA

MARZO DEL 2004

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



**DETERMINACION DE LAS CURVAS DE CALIBRACIÓN
MEDIANTE SIMULACIÓN NUMÉRICA DE
COMPRESIÓN DE ANILLOS**

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN **TESIS** DE NUEVO LEÓN

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
DE LA INGENIERÍA MECÁNICA CON ESPECIALIDAD EN
MATERIALES**

PRESENTA

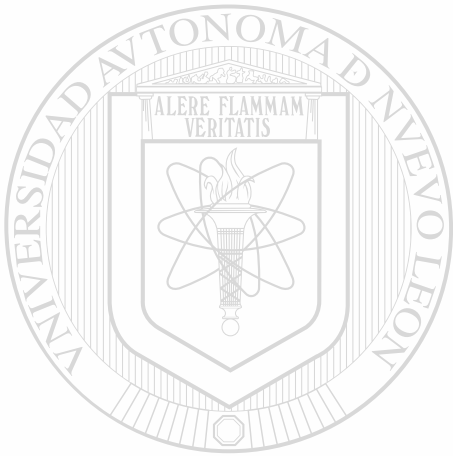
PALOMA RODRÍGUEZ ARIZPE

CIUDAD UNIVERSITARIA

MARZO DEL 2004

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSTGRADO

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis “Determinación de las curvas de calibración mediante simulación numérica de compresión de anillos”, realizada por la alumna Paloma Rodríguez Arizpe, matrícula 0848033, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestro en Ciencias de la Ingeniería Mecánica con Especialidad en Materiales.

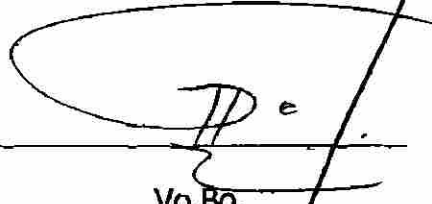


El Comité de Tesis


Asesor
Dr. Rafael Colás Ortiz.


Coasesor
Dra. Martha Patricia Guerrero Mata.

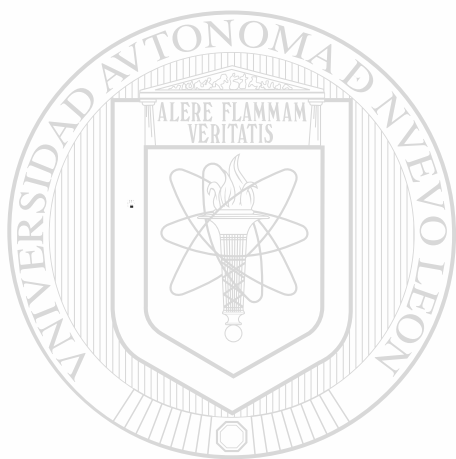

Coasesor
Dr. José Santiago Cruz Bañuelos.


Vo.Bo.
Dr. Guadalupe Alan Castillo Rodríguez.
División de Estudios de Post-grado.

San Nicolás de los Garza, N. L. a marzo del 2004

A Dios,

por permitirme vivir este momento



A mis padres y hermanos,

por todo el apoyo brindado

UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



A mi novio Eduardo,

por todo su apoyo y comprensión

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a la Universidad Autónoma de Nuevo León por el apoyo brindado en mis estudios de postgrado así mismo agradezco a la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica.

Se agradece los apoyos económicos brindados por el CONACYT para realizar el presente trabajo.

Al Dr. Rafael Colás Ortiz, por sus valiosos comentarios y por la atención prestada a este trabajo.

A la Dra. Martha Patricia Guerrero por el entusiasmo, paciencia y apoyo recibido durante la realización de este trabajo.

Al Dr. Dr. José Santiago Cruz Bañuelos por su apoyo la revisión de este trabajo y sus consejos valiosos para concluir este trabajo.

A los Profesores del PDIM.

A todos mis compañeros del PDIM.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es la determinación de las curvas de calibración del ensayo de compresión de anillos mediante su simulación numérica con el método de elementos finitos, bajo diferentes condiciones de fricción.

La justificación de esta investigación es que las curvas de calibración son necesarias para obtener los factores cortantes de fricción interfacial, a partir de las pruebas de compresión de anillos, esto es importante porque la fricción es una de las principales variables en los procesos de formado de metales y se debe mantener constante dentro de límites estrechos y aunque no se puede medir directamente, por lo cual es difícil conocerla y controlarla, el uso del método de elementos finitos ayuda a conocer con precisión estos valores y así poder simular los procesos de la industria de formado de metales con exactitud, actividad que se ha intentado realizar durante los últimos años, para así predecir mejor los parámetros de un proceso antes de realizarlo.

La hipótesis de la cual parte este trabajo es que por medio del método de elementos finitos es posible obtener aproximaciones más precisas en la simulación de sistemas de esfuerzos, obteniendo buena correlación con el proceso real, es por esto que el método de elementos finitos se utiliza como herramienta para la determinación de las curvas de calibración de fricción mediante modelos de pruebas de compresión de anillos.

El método de compresión de anillos ha sido utilizado extensamente para evaluar la fricción en procesos de formado de metales utilizando las curvas de calibración y obtener el valor de del factor cortante de fricción interfacial de las pruebas de compresión de anillos a diferentes condiciones de lubricación.

ÍNDICE

AGRADECIMIENTOS _____ **i**

RESUMEN _____ **iii**

CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN _____ **1**

CAPÍTULO 2 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS _____ **4**

2.1 INTRODUCCIÓN _____ **4**

2.2 ANTECEDENTES HISTÓRICOS _____ **4**

**2.3 CONCEPTO BÁSICO DEL MÉTODO DE ELEMENTOS
FINITOS** _____ **5**

2.3.1 Aproximación de la circunferencia de un círculo _____ **6**

2.4 METODOLOGÍA _____ **9**

2.4.1 Procedimiento en el elemento finito _____ **10**

2.4.2 Método de aproximación directa _____ **13**

2.4.3 Método de aproximación variacional _____ **15**

2.4.4 Método de residuos ponderados. _____ **17**

**2.5 FORMULACIONES DEL MÉTODO DE ELEMENTOS
FINITOS** _____ **17**

CAPÍTULO 3 LA FRICCIÓN _____ 20

3.1 INTRODUCCIÓN _____ 20

3.2 FRICCIÓN ESTÁTICA Y POR DESLIZAMIENTO _____ 21

3.2.1 Amortiguamiento negativo _____ 22

3.2.2 Amortiguamiento positivo _____ 22

3.3 LEYES DE LA FRICCIÓN _____ 23

3.3.1 Coeficiente de fricción de Coulumb _____ 26

3.3.2 Factor de fricción _____ 27

3.3.3 Relación entre μ y m _____ 27

3.3.4 Comportamiento de la fricción con la rugosidad _____ 28

3.4 TIPOS DE LUBRICACIÓN _____ 29

3.4.1 Lubricación límite o grasosa _____ 30

3.4.2 Lubricación completa _____ 30

3.4.3 Lubricación incompleta o mixta _____ 31

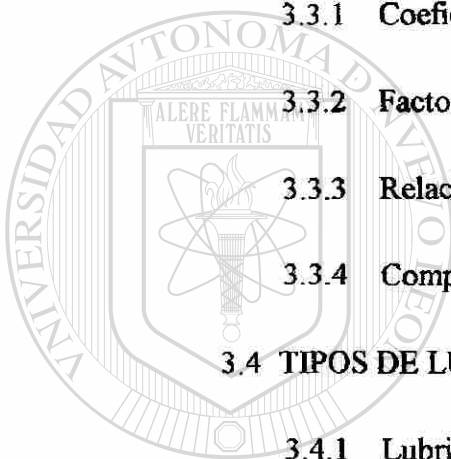
3.5 TIPOS DE LUBRICANTES _____ 31

3.5.1 Lubricantes líquidos _____ 32

3.5.2 Lubricantes sólidos _____ 32

3.5.3 Aceites _____ 34

3.5.4 Grasas _____ 34



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

®

CAPÍTULO 4 MÉTODOS DE MEDICIÓN DE LA FRICCIÓN 35

4.1 INTRODUCCIÓN	35
4.2 MÉTODOS BÁSICOS DE MEDICIÓN	35
4.3 MODELACIÓN DE UN SISTEMA DE FRICCIÓN	38
4.4 PARÁMETROS DE PRUEBA	41
4.5 MEDICIÓN DE FRICCIÓN PARA EL FORMADO DE METALES	41

CAPÍTULO 5 DESARROLLO DEL MODELO 47

5.1 INTRODUCCIÓN	47
5.2 METODOLOGÍA	47
5.2.1 Creación del modelo	47
5.2.2 Asignación de las propiedades del material	48

5.2.3 Relación de las propiedades de los elementos	54
--	----

5.2.4 Especificación de las condiciones de frontera	57
---	----

5.2.5 Mallado	58
---------------	----

5.2.6 Solución del problema	59
-----------------------------	----

CAPÍTULO 6 ANÁLISIS Y RESULTADOS 60

6.1 INTRODUCCIÓN	60
------------------	----

6.2 ANÁLISIS VISUAL	60
---------------------	----

6.3 OBTENCIÓN DE LAS CURVAS DE CALIBRACIÓN	63
6.4 ANALISIS NODAL	69
6.5 OBTENCIÓN DEL RADIO NEUTRO	76

CAPÍTULO 7 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES 82

7.1 CONCLUSIONES	82
7.2 RECOMENDACIONES	83

BIBLIOGRAFIA 84

ANEXO I 86

PRUEBAS DE COMPRESION DE ANILLOS A 5 MM/MIN 86

PRUEBAS DE COMPRESION DE ANILLOS A 50 MM/MIN 87

PRUEBAS DE COMPRESION DE ANILLOS A 500 MM/MIN 88

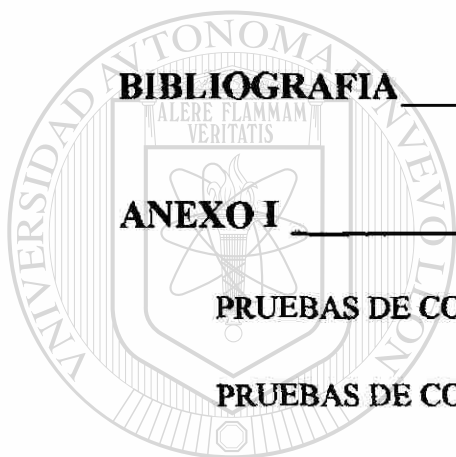
ANEXO II 89

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS
RESULTADOS DEL MATERIAL A POR MEF 89

ANEXO III 92

RESULTADOS DEL MATERIAL B POR MEF 92

ANEXO IV 95



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

RESULTADOS DE %D (DIAMETRO) Y %H (ALTURA) DEL
MATERIAL A PARA CADA VEOR DE M. _____ 95

ANEXO V _____ **98**

RESULTADOS DE %D (DIAMETRO) Y %H (ALTURA) DEL
MATERIAL B PARA CADA VEOR DE M. _____ 98

ANEXO VI _____ **101**

DATOS DEL ANALISIS NODAL _____ 101

LISTADO DE FIGURAS _____ **105**

LISTADO DE TABLAS _____ **110**



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Al estudiar la palabra fricción, desde el significado del verbo en latín *fricare* que significa frotar^[1] y al revisar en la literatura, se puede decir que la fricción es la resistencia de un cuerpo a moverse cuando está en contacto con otro cuerpo bajo una carga normal. Estos cuerpos pueden sólido y sólido, gas y sólido (fricción aerodinámica), líquido y sólido (fricción líquida), o por un proceso de disipación de energía interna dentro de un cuerpo (fricción interna)^[1].

La fricción juega un papel muy importante en un gran número de actividades diarias y en la mayoría de los procesos industriales. Comenzando por el movimiento de un cuerpo, el cambio de dirección al estar en movimiento y hasta el de llegar a detenerse.

Sin la fricción no sería posible trasladarse caminando, sostener objetos, encender un cerillo, o realizar una gran cantidad de actividades diarias. En un caso específico, sin la fricción, los molinos de laminación no podrían operar, y el desgaste por fricción obviamente no existiría.

En el movimiento de la maquinaria, la fricción es responsable de la disipación y pérdida de mucha energía, esta energía es primeramente disipada por calor, o en varios procesos de deformación, como resultado del desgaste de las superficies y su eventual degradación hasta el punto de tener que reemplazar algún componente de la maquinaria.

Es por esto la gran importancia de estudios más detallados sobre cada proceso en donde cambios en la fricción no sólo representan influencia sobre el movimiento del sistema, sino también ahorro de energía, y por lo tanto, un ahorro significativo económicamente hablando.

La fuerza de fricción no es directamente predecible ya que depende de muchos factores que serán vistos a lo largo de este trabajo. Existen diferentes métodos para el análisis de la fricción en procesos de laminado en frío. Sin embargo los métodos más aceptados hasta ahora han sido definiendo el coeficiente de fricción μ , específicamente por la ley de Coulumb, o por medio del factor de fricción m . Entre estos métodos de medición de fricción, las pruebas de compresión en anillos han alcanzado gran aceptación, originada por Kunogi^[2], después mejorada y presentada por Male y Cockroft^[2].

Dicha técnica utiliza los cambios de dimensiones en las muestras de los resultados de las pruebas de anillos para llegar a la magnitud del coeficiente de fricción. Por un porcentaje de reducción de altura durante la compresión de la muestra, la medición del diámetro interno de la muestra proporciona un conocimiento cuantitativo de la magnitud de fricción que prevalece en las superficies entre la lámina y el rodillo^[2].

Si el diámetro interno de la muestra se incrementa durante la deformación, la fricción es baja, pero si el diámetro interno disminuye durante la deformación, la fricción es alta y por lo tanto se puede decir que existe una pobre lubricación entre las superficies^[2].

Una de las herramientas más importantes para llevar a cabo este estudio, ha sido la utilización del método de elementos finitos. El método de elementos finitos es una herramienta que ha tenido un gran impacto en análisis de problemas complejos de deformaciones plásticas, para determinar la distribución de esfuerzos y deformaciones en un problema^[2]. Ya que en estos problemas se requiere el uso de incrementos muy pequeños de desplazamientos con cálculos en cada uno de ellos, una gran cantidad de capacidad computacional es requerida con el fin de obtener resultados más precisos y en un tiempo significativamente reducido.

Las curvas de calibración son una representación gráfica del cambio de probetas de anillos en porcentaje del diámetro interno y el cambio en porcentaje de la altura, a diferentes valores de fricción, expresados en función del factor m . El objetivo principal de este trabajo es la investigación del efecto de las propiedades de aceros de bajo carbono en el comportamiento de las curvas de calibración.

Las pruebas de compresión axial fueron utilizadas para obtener las propiedades mecánicas necesarias del material, para así crear una relación constitutiva para ser utilizada por el método de elementos finitos utilizando el paquete ABAQUSTM. Se creó un modelo tridimensional para simular la compresión del anillo y se analizaron diferentes variables, para obtener las curvas de calibración por medio de la relación del cambio del diámetro contra el cambio en la altura durante la compresión.

Los resultados obtenidos mediante las curvas de calibración se compararon con pruebas experimentales de compresión en anillos, evaluando el factor de fricción que existe en ese material específico al ser sometido a diferentes condiciones de trabajo. Con este método se logró analizar diferentes aceros utilizados en el proceso de laminación en frío, para obtener los coeficientes de fricción que se encuentran al comprimir con diferentes lubricantes.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



CAPÍTULO 2

MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

2.1 INTRODUCCIÓN

Cada fenómeno en la naturaleza sea biológico, geológico o mecánico, se puede describir con la ayuda de las leyes de la física en términos de ecuaciones algebraicas, diferenciales o integrales, relacionando diversas cantidades de interés.

La resolución de problemas complejos, usualmente proporciona un extenso número de variables y alternativas para resolver el problema. Una posibilidad para resolver este tipo de problemas es hacer simplificaciones de éstos, algunas veces el procedimiento funciona, pero cuando no, éste puede arrojar resultados inexactos o erróneos. Con la utilización de las computadoras, existe la alternativa de mantener la complejidad de un problema y obtener una solución numérica del problema con una aproximación aceptable.

2.2 ANTECEDENTES HISTÓRICOS

La idea de presentar un dominio dado, como un conjunto de partes discretas no ha originado solamente al elemento finito. El valor de π fue estimado por los antiguos matemáticos considerando que el perímetro de un polígono inscrito de un círculo se aproxima a la circunferencia del último. Ellos predijeron el valor de π con precisión de

casi 40 dígitos, representando el círculo como un polígono de un número finitamente grande de lados. En los tiempos modernos, la idea encontró aplicación en el análisis estructural de aeronaves, donde, alas y fuselajes son tratados como ensambles de largueros, revestimiento y paneles de corte. En 1941, Hrenikoff introdujo el llamado método armazón^[10], en el cual, un medio elástico plano se representó como un conjunto de barras y vigas. Courant en 1943 utilizó un ensamble de elementos triangulares y el principio de mínima energía potencial total para estudiar el problema de torsión de St. Venant^[10]. Aunque ciertas características del método de elementos finitos fueron encontradas en los trabajos de Hrenikoff en 1941 y Courant en 1943, su presentación formal se atribuye a Turner, Clough, Martín y Topp en 1956^[10]. El término *elemento finito* fue utilizado primero por Clough en 1960. Desde su comienzo, las aplicaciones del método de elementos finitos han crecido muy rápido, hoy en día existen muchos trabajos reportados en la literatura de teoría y aplicación del método.

2.3 CONCEPTO BÁSICO DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

La característica distintiva del método de elementos finitos que lo separa de los otros es la división de un dominio dado en una serie de subdominios simples, llamados elementos finitos^[10]. Cualquier forma geométrica que permita el cálculo de la solución o su aproximación, o prevea de relaciones necesarias entre los valores de la solución en puntos elegidos, llamados nodos, del subdominio se califican como un elemento finito. Otras características del método incluyen la búsqueda continua de aproximaciones (a menudo polinomios) de la solución sobre cada elemento en términos de valores nodales y ensamble del elemento imponiendo la continuidad de la solución en el inter-elemento y su balance de fuerzas. Ideas básicas del método de elementos finitos se pueden ver por medio de un ejemplo simple, la determinación de la circunferencia de un círculo usando números finitos de segmentos en línea. Este ejemplo es una expansión de un artículo escrito por el autor J.N. Reddy en 1978 por una revista estudiantil en la Universidad de Oklahoma^[10].

2.3.1 Aproximación de la circunferencia de un círculo

Los antiguos matemáticos estimaron el valor de la circunferencia por aproximación, mediante segmentos en línea cuyas longitudes eran medibles. El valor aproximado de la circunferencia es obtenido sumando las longitudes de los segmentos de línea usados para representarla. Aunque este es un ejemplo trivial, ilustra algunas ideas y pasos involucrados en la utilización del método de elementos finitos en un problema introduciendo ciertos términos que se utilizan en el análisis de elemento finito de cualquier problema.

Discretización en elementos finitos. Primero, el dominio (en este caso la circunferencia del círculo) se representa como un conjunto de un número finito n de subdominios, denominados segmentos línea. Esto se llama discretización de dominio. Cada subdominio (segmento línea) se le llama *elemento*. El conjunto de elementos es llamado *la malla* de elementos finitos. Los elementos están conectados unos a otros en puntos llamados *nodos*. En el caso presente, se discretiza la circunferencia en una malla de 5 ($n=5$) segmentos línea (ver Figura 2.1). Los segmentos línea pueden ser de diferentes longitudes. Cuando todos los elementos (ej. segmentos línea) son de igual longitud se dice que la malla es uniforme (Figura 2.1b).

Ecuaciones elementales. Un elemento típico (ejemplo el segmento Ω^e) se aísla y se involucran sus propiedades, por ejemplo longitud, y se calculan por algún método apropiado. Haciendo h_e la longitud del elemento típico Ω^e en la malla para un elemento típico Ω^e , (ver Figura 2.1c) está dado por:

$$h_e = 2R \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_e}{2}\right), \quad (2.1)$$

donde R es el radio del círculo y $\theta_e < \pi$ es el ángulo subtendido por segmento línea. La ecuación anterior se llama ecuación de elemento.

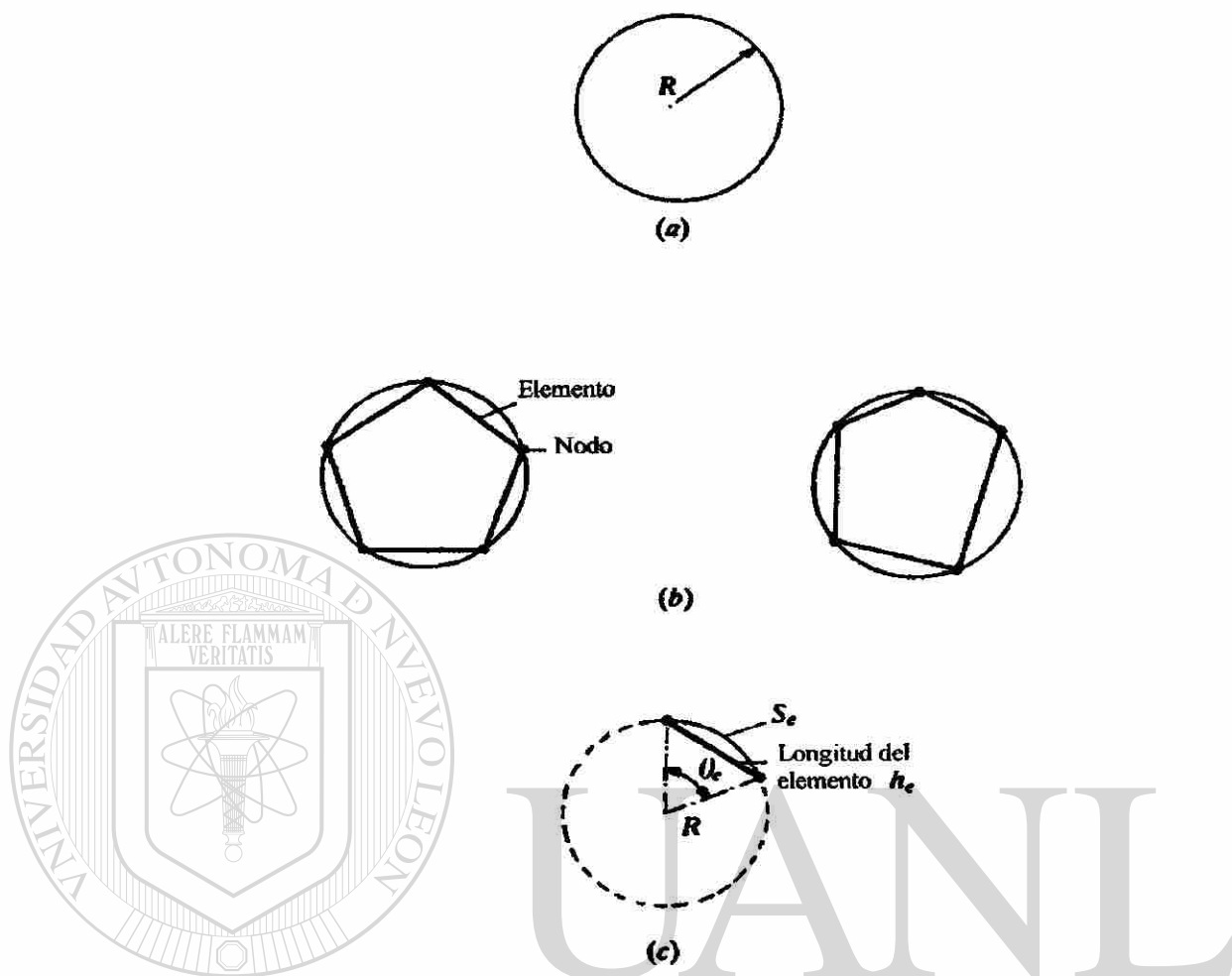


Figura 2.1 Aproximación de la circunferencia de un círculo mediante elementos línea. a) Círculo de radio R . b) Malla uniforme y no uniforme utilizadas para representar la circunferencia del círculo. c) Elemento típico.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Ensamble de las ecuaciones elementales. El valor aproximado de la circunferencia (o perímetro) del círculo se obtiene colocando las propiedades del elemento de manera significativa; este proceso se llama el ensamble de las ecuaciones elementales. Este esta basado en la idea simple de que el perímetro total de polígono (elementos ensamblados) es igual a la suma de las longitudes de los elementos individuales:

$$P_n = \sum_{e=1}^n h_e \quad (2.2)$$

donde P_n representa una aproximación del perímetro real P . Si la malla es uniforme, h_e es la misma para cada elemento de la malla, entonces:

$$\theta_e = \frac{2\pi}{n}, \quad (2.3)$$

sustituyendo (2.3) en (2.1) y en (2.2) se obtiene:

$$P_n = 2NR \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{N} \right). \quad (2.4)$$

Convergencia y error estimado. Para este problema, se conoce la solución exacta: $P = 2\pi R$. Se puede estimar el error en la aproximación y mostrar que la solución aproximada P_n converge a P exacta en el límite cuando $n \rightarrow \infty$. Considerando el elemento típico Ω^e . El error en la aproximación es igual a la diferencia entre la longitud del sector y la del segmento línea (Figura 2.1c).

$$E_e = |S_e - h_e|, \quad (2.5)$$

donde:

$$S_e = R\theta_e, \quad (2.6)$$

Y (2.6) es la longitud del sector. Por lo tanto, el error estimado para un elemento en la malla está dado por:

$$E_e = R \left| \frac{2\pi}{n} - 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \right| \quad (2.7)$$

El error total (llamado error global) está dado por la multiplicación de E_e por n :

$$E = 2R \left(\pi - n \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \right) = 2\pi R - P_n \quad (2.8)$$

Se muestra ahora que E tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$. De (2.4):

$$P_n = 2Rn \operatorname{Sen} \frac{\pi}{n} = 2R \frac{\operatorname{Sen} \pi x}{x}, \quad x = \frac{1}{N} \quad (2.9)$$

tomando el limite cuando $N \rightarrow \infty$

$$y \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2R \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2\pi R \frac{\cos \pi x}{1} \right) = 2\pi R \quad (2.10)$$

Partiendo de un estudio simple con el ejemplo que se acaba de analizar, se puede entender el principio básico del método de elementos finitos y partiendo de esto, realizar problemas donde se requiera un análisis más detallado en análisis térmicos, mecánicos, de fluidos, etc.

2.4 METODOLOGÍA

Las principales características del método de elementos finitos son:

1.- La capacidad de obtener soluciones detalladas en un cuerpo deformado, como pueden ser velocidades, esfuerzos, deformaciones, formas, temperaturas o distribuciones de presiones de contacto.

2.- El hecho de que el programa computacional, una vez escrito puede ser utilizado para mayores adicionales del problema con simplemente cambiar algunos datos.

Las aplicaciones del método de elemento finito (MEF) son divididas en 3 categorías, dependiendo de la naturaleza del problema a resolver. En la primer categoría existen los problemas conocidos como *problemas de equilibrio* o independientes del tiempo. La mayoría de las aplicaciones del MEF está dentro de esta categoría, ya que para la solución de problemas de equilibrio en el área de la mecánica, es necesario encontrar distribuciones de desplazamiento y esfuerzos para una carga mecánica o

térmica dada, así como para problemas de mecánica de fluidos es necesario encontrar presión, temperatura, y distribuciones de densidad en condiciones de estado estacionario.

En la segunda categoría están los llamados *problemas de eigenvalores*. Estos son problemas en estado estacionario donde la solución a menudo requiere de la determinación de frecuencias naturales y modos de vibración de sólidos y fluidos.

Y en la tercer categoría están los problemas que son dependientes del tiempo o *problemas dinámicos y de propagación*. Esta categoría está compuesta de problemas de las primeras dos categorías pero que se les ha agregado la variable de tiempo.

La premisa básica del método de elementos finitos es que la región de solución deberá ser representada o modelada por un arreglo de puntos o subdominios, siendo construida por pequeñas subregiones interconectadas llamadas elementos. Ya que estos elementos pueden ser ensamblados en una manera infinita de formas, éstos pueden ser representados para crear cualquier forma por más compleja que sea. El procedimiento a la solución de un problema por medio de este método consiste en algunos pasos fundamentales que se mencionarán mas adelante.

2.4.1 Procedimiento en el elemento finito

La solución de un problema continuo por medio de elemento finito siempre sigue un proceso ordenado de pasos^[7]. Para simplificar en términos generales como éste sistema se emplea, se resumirán los pasos de la siguiente manera:

1.- *Discretización del medio continuo.*

El primer paso es dividir el medio continuo o región de solución en elementos. Se utiliza una gran variedad de formas de elementos, y éstos pueden ser aplicados en una misma región de solución. De hecho, cuando se analiza una estructura elástica que tiene diferentes tipos de componentes, es necesario utilizar diferentes elementos en la misma solución. Sin embargo, el número y tipos de elementos en un problema dado, son

determinados por el juicio del ingeniero, el analista puede reforzarse en la experiencia de otros como guía.

2.- Selección de las funciones de interpolación.

El siguiente paso es asignar los puntos o nodos a cada elemento y después escoger la función de interpolación para representar la variación de la variable de campo sobre el elemento, de esta manera es posible determinar el valor de la variable de campo en cualquier punto dentro del elemento. La variable de campo puede ser escalar, vectorial o tensorial. Comúnmente, los polinomios son seleccionados como funciones de interpolación para una variable de campo, ya que éstos son fáciles de integrar y diferenciar. El grado de polinomio empleado depende del número de nodos asignado a cada elemento, la naturaleza y el número de incógnitas de cada nodo y de cierta continuidad requerida de cada nodo a lo largo de las fronteras del elemento.

3.- Determinar las ecuaciones elementales.

Una vez que el modelo ha sido establecido, esto es que los elementos tienen sus funciones de interpolación, es necesario determinar las ecuaciones elementales representando las propiedades de cada elemento. Para este paso es necesario utilizar uno de los tres tipos de aproximación mencionados anteriormente.

4.- Ensamblar las ecuaciones elementales para obtener el sistema de ecuaciones.

Para obtener las propiedades de todo el sistema modelado por la red de elementos, es necesario ensamblar las propiedades del elemento. En otras palabras, combinar la matriz de ecuaciones expresando el comportamiento del sistema completo. El sistema de ecuaciones tiene la misma forma que las ecuaciones elementales excepto que este sistema contiene mucho más ecuaciones ya que incluye todos elementos de la malla.

5.- Especificar las condiciones de frontera.

Antes de que el sistema esté listo para su solución, éste debe ser modificado con respecto a las condiciones de frontera del problema. En este caso se imponen valores conocidos a los nodos en las fronteras del modelo. Estas condiciones de frontera se basan en dos clasificaciones que se identifican como condiciones de frontera esenciales y condiciones de frontera naturales.

Las condiciones de frontera esenciales comprenden derivaciones de menor orden. Estas también son referidas como cinemáticas, de desplazamiento o de geometría. Y las condiciones de frontera naturales comprenden derivaciones de un orden mayor y son referidas como condiciones dinámicas, de fuerza o esfuerzos.

Estas dos clasificaciones cubren casi todas las aplicaciones prácticas para la solución de problemas por medio de elementos finitos^[19].

6.- Resolver el sistema de ecuaciones.

El proceso de ensamble genera un sistema de ecuaciones que involucran los valores desconocidos de los nodos del modelo. Si el problema describe un comportamiento en equilibrio o estable, entonces se debe resolver una serie de ecuaciones algebraicas lineales o no lineales. Si el problema es inestable, los nodos desconocidos están en función del tiempo y se deberá resolver el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales o no lineales.

7.- Post-procesamiento.

Muchas veces se utilizan las soluciones del sistema para calcular otros importantes parámetros. En un problema estructural, del sistema de ecuaciones que resultan del ensamble se calculan los desplazamientos de los nodos. De estos desplazamientos se pueden calcular las deformaciones y los esfuerzos.

2.4.2 Método de aproximación directa

La aproximación directa solo se puede utilizar para problemas relativamente simples pero proporciona una visión general del funcionamiento del método de elementos finitos y lleva hacia los conceptos básicos de discretización y ensamble de elementos.

Uno de los sistemas más elementales para examinar este método es un sistema lineal de dos resortes que se muestra en la Figura 2.2. En este sistema se tienen 2 resortes conectados en serie, es decir, en la dirección de la coordenada x , donde un lado se encuentra fijo a la pared mientras que el otro resorte del lado derecho está libre de movimiento. Se supone que los dos resortes están sometidos ya sea a fuerzas de tensión o compresión. Fuerza, desplazamiento y rigidez del resorte son los únicos parámetros de este sistema. Para subdividir este sistema en elementos discretos es fácilmente reconocible.

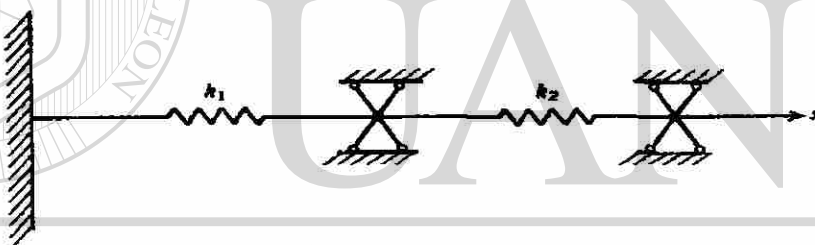


Figura 2.2 Sistema lineal simple de resortes^[7].

Para determinar las propiedades del elemento, en este caso las ecuaciones de fuerza y desplazamiento se tomará como un elemento aislado, mostrado en el diagrama de cuerpo libre de la Figura 2.3. La fuerza y el desplazamiento son definidos en cada nodo, por conveniencia se toma la fuerza y desplazamiento en una dirección positiva. La variable de campo para este ejemplo es el desplazamiento. No es necesaria una función de interpolación para representar la variación de la variable de campo sobre el elemento, ya que se tiene una representación exacta de la variación. La ley de Hooke en su mas simple forma proporciona el significado de la relación del desplazamiento y las fuerzas aplicadas sobre los nodos. De acuerdo a la ley de Hooke, cuando un resorte recibe una carga axial F , este se desvía una cantidad δ , dada por:

$$\delta = \frac{1}{k} F = aF, \quad (2.11)$$

donde k es la rigidez del resorte (constante del resorte), y a es la flexibilidad del resorte. De la ecuación 2.11 se puede interpretar a k como la fuerza requerida para producir una unidad de deflexión y a como la deflexión causada por una unidad de fuerza. Utilizando la ecuación 2.11, se puede escribir la relación fuerza-deflexión para el resorte en términos de una fuerza nodal F_1 y el desplazamiento nodal,

$$F_1 = k\delta_1 - k\delta_2, \quad (2.12)$$

y para las fuerzas de equilibrio requeridas $F_2 = -F_1$, se tiene que

$$F_2 = -k\delta_1 + k\delta_2. \quad (2.13)$$

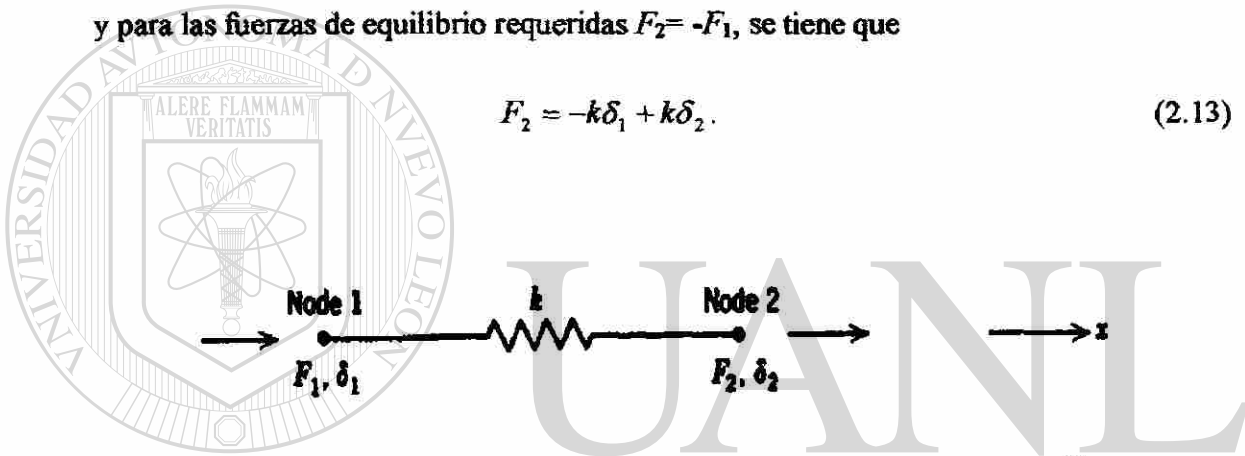


Figura 2.3 Diagrama de cuerpo libre de un sistema lineal simple de resortes ^[7].

Las ecuaciones (2.12) y (2.13) se pueden escribir en forma matricial.

Si se utiliza una matriz para las ecuaciones 2.10 y 2.11 se describe la ecuación expresando las propiedades de fuerza-desplazamiento de un elemento.

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (2.14a)$$

o en forma reducida como:

$$[\mathbf{K}]\{\delta\} = \{F\} \quad (2.14b)$$

Los componentes de $[K]$ es usualmente escrito como k_{ij} para denotar su locación en la i fila y la j columna de $[K]$, la matriz cuadrada $[K]$ es conocida como la matriz de rigidez, $\{\delta\}$ es el vector del desplazamientos nodales y $\{F\}$ es el vector de fuerzas nodales.

2.4.3 Método de aproximación variacional

A menudo los problemas continuos tienen diferentes, pero equivalentes formulaciones, una formulación diferencial y otra variacional. En la formulación diferencial, el problema es integrar una ecuación diferencial sometida a una condición de frontera específica. En la formulación clásica variacional el problema es encontrar la función o funciones que extremizan (maximiza o minimiza) o hacen estacionario un funcional sometido a la misma especificación de condiciones de frontera. Las dos formulaciones son equivalentes ya que las funciones que satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales y sus condiciones de frontera también hacen estacionarios los funcionales. Esta equivalencia muestran que los funcionales se hacen estacionarios cuando una o más de las ecuaciones de Euler¹⁵¹ y sus condiciones de frontera son cumplidas. Estas ecuaciones son las que gobiernan las ecuaciones diferenciales del problema. La formulación clásica variacional de un problema continuo a menudo tiene ventajas sobre la formulación diferencial.

Primero, el funcional, por lo general representa propiedades físicas en el problema, contiene derivadas de un orden menor que el operador diferencial y consecuentemente la solución de aproximación puede ser buscada de una gran gama de funciones. Segundo, el problema debe poseer formulaciones variacionales recíprocas, esto es, que un funcional sea minimizado y otro funcional de diferente forma sea maximizado. En esos casos significa encontrar los valores límites alto y bajo del funcional, y esta capacidad tendrá un valor ingenieril significativo. Tercero, la formulación variacional permite manejar condiciones de frontera muy complicadas. Y cuarto, desde el punto puramente matemático, la formulación variacional es muy útil,

porque el cálculo de variaciones puede ser utilizado para probar la existencia de una solución.

Históricamente, el método variacional está dentro de los medios más antiguos para obtener soluciones para problemas de física e ingeniería. Un método general para obtener soluciones aproximadas a problemas expresados en formas variacionales es el *Método de Ritz o Rayleigh-Ritz*. Este método ha sido el precursor del método del elemento finito.

El método de Ritz se basa en suponer la forma de una solución desconocida en términos de funciones conocidas (funciones de prueba) con parámetros desconocidos ajustables. De las funciones de prueba se selecciona la función que vuelva a un funcional estacionario. El procedimiento consiste en sustituir la función de prueba dentro del funcional y así expresan el funcional en términos de parámetros ajustables los cuales son los desconocidos. El funcional es diferenciado con respecto a cada parámetro y la ecuación resultante es igualada a cero. Si existe n número de parámetros desconocidos, entonces habrá n número de ecuaciones simultáneas a resolver para estos parámetros. Por estos medios, la solución aproximada es tomada de la clasificación de soluciones supuestas.

Este procedimiento no hace más que dar la mejor solución de la clasificación de soluciones supuestas. La exactitud de la solución aproximada depende de la selección de las funciones de prueba (o conocidas). Es por esto que se requiere que las funciones de prueba sobre todo la solución dominante y que éstas satisfagan la mayor parte de las condiciones de frontera. Algunas veces, si se sabe la naturaleza general de la solución deseada, se puede mejorar la aproximación tomando las funciones de prueba que refleje su naturaleza. Generalmente las soluciones de prueba son construidas por polinomios de sucesivos grados de incrementos, pero en ciertos casos otros tipos de funciones ofrecen mejores ventajas ^[14].

2.4.4 Método de residuos ponderados.

Desde que el método de elementos finitos es una técnica para construir funciones de aproximación requeridas en la aplicación de elementos para cualquier método variacional, ha sido necesario estudiar formulaciones de integrales de ponderación y las formulaciones de la forma débil de las ecuaciones diferenciales. En adición a las razones antes mencionadas, las formulaciones débiles también facilitan, en un medio natural, la clasificación de las condiciones de frontera dentro de condiciones naturales y esenciales frontera, el cual juega un esencial rol en la derivación de funciones de aproximación y en la selección de los grados (nodales) de libertad del modelo de elementos finitos.

El método de residuos ponderados es una técnica global para obtener soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales parciales lineales y no lineales, este método sólo ofrece otros medios para formular las ecuaciones del elemento. Este método involucra básicamente dos pasos a seguir. El primer paso es suponer el comportamiento funcional general del campo de la variable dependiente de alguna forma para satisfacer la ecuación diferencial y condiciones de frontera dados. La sustitución de la función de aproximación dentro de la ecuación diferencial y las condiciones de frontera tiene un resultado de algún error llamado *residuo*. Este residuo es requerido para desaparecer en un cierto promedio sobre la solución entera del dominio.

El segundo paso es resolver la ecuación (o ecuaciones) resultante del paso uno y de este modo especializar la forma funcional general a una función particular, la cual se convierte en la solución aproximada buscada.

2.5 FORMULACIONES DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Las formulaciones de método de elementos finitos para un problema dado, dependen primeramente de la naturaleza del problema, hasta cierto punto, en varias opciones numéricas que el científico decide hacer.

Los operadores de integración dinámica son ampliamente caracterizados como implícitos y explícitos. El esquema Explícito obtiene valores para cantidades dinámicas en $t+\Delta t$ basándose completamente en los valores disponibles en el tiempo t . El esquema implícito remueve el límite superior del tamaño del tiempo del paso al resolver para cantidades dinámicas en $t+\Delta t$ basándose no solo en los valores disponibles al tiempo t , sino también en las cantidades en tiempo $t+\Delta t$.

Los primeros intentos para modelar procesos de formado de metales por medio del MEF, fueron basados en formulaciones de fluidos, o en modelos de material rígido-plástico en el que la deformación elástica es despreciable. A pesar del costo adicional y del más complicado tratamiento, la aproximación elastoplástica es cada vez más aplicada para problemas de ingeniería.

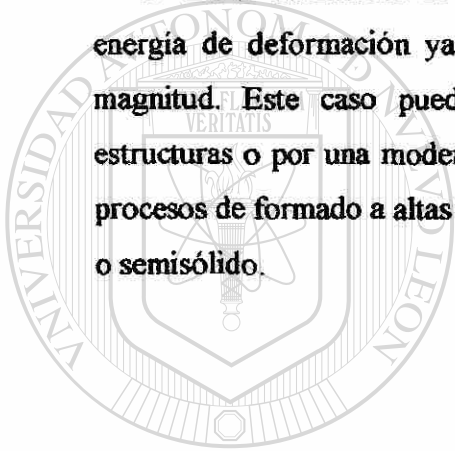
La formulación Euleriana es muy eficiente al tratar problemas de estado estable, mientras que la formulación Lagrangeana es el método más popular para otros casos incluyendo altas deformaciones. Cuando el problema es estacionario en un dominio fijo, se puede utilizar la formulación de Euler en la cual el campo de velocidades definido en el dominio depende solo de las coordenadas del espacio. Este campo de velocidad es discretizado y minimizado en el dominio fijo, en esta formulación los nodos se encuentran fijos en el espacio. En la formulación de Lagrange los nodos de la malla se mueven como si estos fueran puntos del material, esto es, con desplazamientos cinéticos, es decir, que en el punto de vista de Lagrange se observa una partícula del material fluyendo a través del movimiento, en lugar de observar un punto fijo en el espacio y ver el material pasar a través de este punto. El punto de vista de Lagrange es usado en las capacidades de ABAQUS en el modelado mecánico porque generalmente se están tratando materiales dependientes del camino seguido, y esta perspectiva hace fácil el registro y la actualización del estado de un punto del material ya que la malla está adherida a el material.^[8]

Desde un punto de vista físico, el rol que juega la energía cinética es claro. Se pueden distinguir tres tipos de procesos.

1.- En problemas cuasiestáticos la energía cinética es insignificante (esto sería menor o igual al 1%) de la energía total, la mayoría de los procesos caen dentro de esta categoría, como se puede mostrar determinando el orden de magnitud de cada contribución.

2.- En fenómenos de alto grado de deformación, o procesos puramente dinámicos, la energía cinética es mayormente dominante y la ecuación constitutiva del material puede ser completamente despreciada, o considerada como una pequeña perturbación, este es el caso de proceso con un alto impacto energético.

3.- En el intermedio de esto, o en una situación dinámica, la energía cinética y la energía de deformación ya sea reversible o irreversible, tienen un orden similar de magnitud. Este caso puede ser bien representado por una vibración elástica de estructuras o por una moderada velocidad de impactos como pueden ser los choques o procesos de formado a altas velocidades, o en un proceso de vaciado de un metal líquido o semisólido.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



CAPÍTULO 3

LA FRICCIÓN

3.1 INTRODUCCIÓN

La fricción es usualmente clasificada como una rama de la física o de la ingeniería mecánica. Esta se expresa en términos cuantitativos de fuerza, siendo la fuerza empleada por dos cuerpos en contacto tendiendo a un desplazamiento tangencial opuesto entre ellos. Es necesario distinguir entre dos situaciones a saber, una donde la fuerza aplicada es insuficiente para causar movimiento y la otra donde ocurre el deslizamiento.

La fricción es comúnmente representada por el coeficiente de fricción, donde los símbolos más utilizados son μ o f . El coeficiente de fricción es la relación entre la fuerza aplicada F y una carga normal N .

Existen algunas teorías estudiadas algunos años atrás acerca del proceso en que ocurre la fricción^[1], donde se han encontrado materiales y lubricantes más convenientes a causa de la necesidad de mejorar sistemas de deslizamiento. En este capítulo se verán los puntos más importantes sobre el comportamiento de un sistema donde la fricción gobierna sobre los materiales.

3.2 FRICCIÓN ESTÁTICA Y POR DESLIZAMIENTO

Cuando no hay fricción, la resultante de las fuerzas entre las superficies de dos cuerpos que se oprimen entre sí es normal a la superficie; con fricción, la resultante se desvía un cierto ángulo respecto de la normal. Si la fuerza P oprime un cuerpo contra otro, como se muestra en la Figura 3.1, el primero no se moverá siempre que el ángulo α_0 , incluido entre la línea de acción de la fuerza y una normal a las superficies en contacto, no sobrepase cierto valor que depende de la naturaleza de esas superficies. La fuerza resultante R tiene la misma magnitud y línea de acción que la fuerza P . En la Figura 3.1, se ha resuelto R en dos componentes: una fuerza N , normal a las superficies en contacto, y una fuerza F_r paralela a esas superficies en contacto. Con base en la afirmación antes hecha se deduce que:

$$F_r \leq N \tan \alpha_0 \leq N F_0 \quad (3.1)$$

En donde $F_0 = \tan \alpha_0$ (coeficiente de fricción en reposo o de fricción estática) y α_0 es el ángulo de fricción en reposo (o ángulo de reposo).

Si se mantiene constante la fuerza normal N entre las superficies y se incrementa en forma gradual la fuerza tangencial F_r , no habrá movimiento en tanto que $F_r < N F_0$.

Se alcanza un estado de *movimiento inminente* cuando F_r se acerca al valor de $N F_0$. Si se desliza una de las superficies sobre la otra, manteniéndose oprimidas una contra la otra por una fuerza normal N , se debe vencer la fuerza de fricción F que se opone al movimiento, y a este coeficiente de fricción se le llama *coeficiente de fricción por deslizamiento o fricción cinética*.

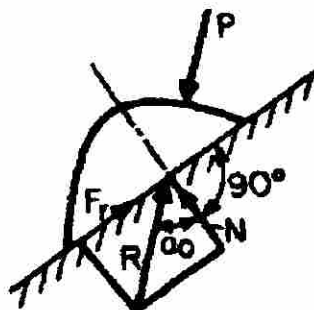


Figura 3.1 Fuerza P oprimiendo a un cuerpo contra otro^[5].

3.2.1 Amortiguamiento negativo

El amortiguamiento negativo se presenta cuando el coeficiente de fricción estático es mayor al coeficiente de fricción por deslizamiento. Como se muestra en la Figura 3.2.

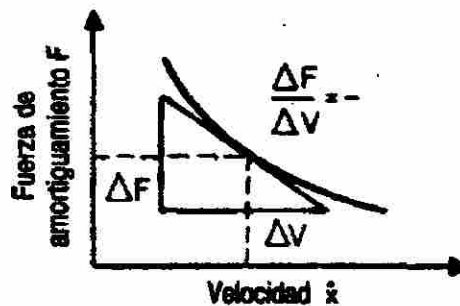


Figura 3.2 Amortiguamiento negativo. El coeficiente de fricción estática es mayor que el coeficiente de fricción por deslizamiento ^[5].

El amortiguamiento negativo hará que el sistema mecánico vibre con su frecuencia natural. Si se cambia la frecuencia excitadora o perturbadora o la frecuencia natural o ambas, el sistema todavía vibrará con su frecuencia natural si existe amortiguamiento negativo; este indicio es el medio más seguro de identificación. A este comportamiento también se le conoce como *vibración de resbalamiento pegajoso*. Ejemplos comunes se encuentran en las cuerdas del violín o el gis sobre la pizarra.

3.2.2 Amortiguamiento positivo

En el amortiguamiento positivo la fuerza de amortiguamiento aumenta al incrementar la velocidad. Esto es típico, en general, del amortiguamiento fluido, las películas comprimidas, los amortiguadores y los cojinetes de película fluida. En la Figura 3.3 se muestra una gráfica del amortiguamiento positivo.

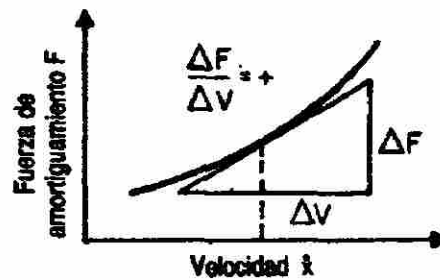


Figura 3.3 Amortiguamiento positivo. La fuerza de amortiguamiento aumenta al aumentar la velocidad^[5].

3.3 LEYES DE LA FRICCIÓN

Las leyes que gobiernan a la fricción de los cuerpos sólidos^[1], son relativamente simples. Estas leyes son usualmente nombradas por Coulumb, quien las formuló alrededor del año 1875, aunque una gran cantidad de este trabajo fue fundamentado por Leonardo da Vinci y Amontons.

Las tres leyes cuantitativas son mencionadas de la siguiente manera:

1.- La fuerza de fricción F es proporcional a la fuerza normal N

$$F = fN. \quad (3.2)$$

Esta relación permite definir el coeficiente de fricción f (o μ). Por otra parte, es conveniente expresar esta ley en términos de una constante angular en reposo, o un ángulo friccional θ definido por:

$$\tan \theta = f. \quad (3.3)$$

Se puede decir que, θ es el ángulo de un plano inclinado en el que cualquier objeto, independientemente de su peso, permanece estacionario, pero, si el ángulo incrementa cualquier cantidad, el objeto se deslizará, como se muestra en la Figura 3.4.

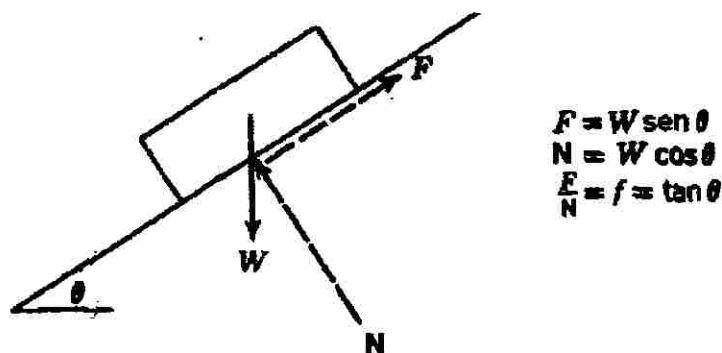


Figura 3.4. Diagrama de equilibrio para un objeto en un plano inclinado^[3].

2.- La fuerza de fricción es independiente del área aparente de contacto, A_a . Siendo así, los objetos con las mismas condiciones y propiedades, grandes o pequeños tienen el mismo coeficiente de fricción.

3.- La fuerza de fricción es independiente de la velocidad de deslizamiento v . Esto implica que la fuerza requerida para iniciar un deslizamiento será la misma fuerza para mantener el deslizamiento a una velocidad específica.

Es importante mencionar que estas leyes proporcionan un marco cuantitativo en el que la fricción es generalmente considerada por ingenieros. Donde es importante mencionar lo cercano que éstas leyes se aproximan a la realidad.

Una excepción de la primera ley, ocurre principalmente con materiales muy duros como el diamante o materiales muy suaves como el teflón. En muchos casos de deslizamiento, estos materiales se evalúan como sigue:

$$F = c \cdot N^x \quad (3.4)$$

donde c es una constante y x es una fracción variable entre $2/3$ a 1 . En casos en que se cumple la primera ley, x toma el valor de 1 .

Otro caso donde la fricción no es proporcional a la carga, implica materiales suaves con una superficie de una capa delgada pero muy dura, en que, a bajas cargas, la superficie permanece íntegra y las propiedades de la fricción predominan.

Excepciones de la segunda ley, donde la fricción es independiente del área aparente de contacto, se encuentran en superficies muy lisas y limpias. Con estas condiciones, la interacción entre las superficies se vuelve muy fuerte y la fuerza de fricción se vuelve independiente de la carga, pero proporcional al área aparente de contacto (que se convierte en el área real de contacto).

Con respecto a la tercera ley, donde la fricción es independiente de la velocidad, es importante hacer notar que la fuerza requerida para iniciar el movimiento de un cuerpo es generalmente mayor que la fuerza que se necesita para mantener el cuerpo en movimiento. Entonces se puede decir que existen dos coeficiente de fricción, el estático para superficies en reposo y el para superficies en movimiento. Normalmente los coeficientes se muestran por separado, pero en este trabajo sólo se estudiará el coeficiente cinético de fricción.

Algunos trabajos han demostrado que el coeficiente de fricción estático es una función del tiempo de contacto (Dokos 1946)^[3], mientras que el coeficiente de fricción cinético es una función de la velocidad dentro de toda la gama de velocidades, como se muestra en las Figuras 3.5 y 3.6.

Existen algunas controversias con respecto a la forma exacta de la curva del logaritmo de la fricción estática y el logaritmo del tiempo de contacto (Kato 1972)^[3]. En la presencia de lubricante, usualmente existen dos pendientes, la pendiente más alta es por un tiempo menor de unión de superficies y está asociada con la presión que tiene el lubricante a causa de las superficies, la menor pendiente es por un tiempo largo de unión y es causada por el crecimiento de un mecanismo de fluencia. Con una superficie seca sólo se encuentra la menor pendiente.

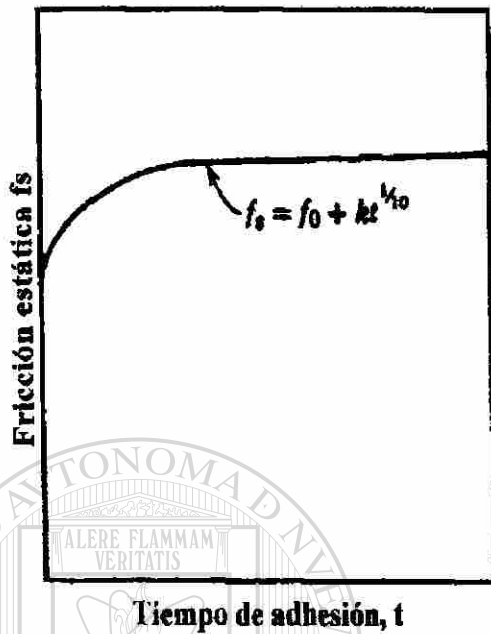


Figura 3.5 Gráfica de un coeficiente de fricción estática en función del tiempo de contacto (Rabinowicz 1957)^[3].

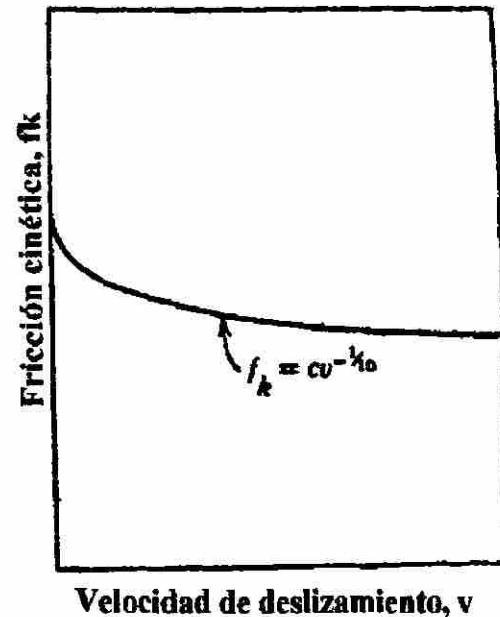


Figura 3.6 Gráfica de un coeficiente de fricción cinético en función de la velocidad de deslizamiento (Barwell 1956)^[3].

3.3.1 Coeficiente de fricción de Coulumb

El coeficiente de fricción μ que fue propuesto por los primeros investigadores de la fricción incluyendo Amontons (1699), Coulomb (1699) y Morin (1833), apareció como una hipótesis de que la fricción era debido al bloqueo entre las asperezas de las superficies de los materiales en contacto, explicando así, que la fuerza de fricción es proporcional a la carga normal siendo independiente del área de contacto. Esta explicación al fenómeno de fricción se le conoce como *la hipótesis de rugosidad*^[3].

Suponiendo que la fricción obedece la ley de Coulumb, se tiene la siguiente ecuación:

$$\tau = \mu p \quad (3.5)$$

El esfuerzo tangencial τ en cualquier punto de la superficie es proporcional a la presión p entre los dos cuerpos y tiene una dirección opuesta a la del desplazamiento relativo de éstos. El coeficiente de fricción μ es considerado como constante para una herramienta y material específico (en condiciones de superficie y temperatura constantes) y se dice que es independiente de la velocidad ^[4].

3.3.2 Factor de fricción

El factor cortante de fricción interfacial (m) es uno de los métodos más aceptables para evaluar cuantitativamente la fricción en la interfase entre la herramienta y la pieza de trabajo ^[2]. Este factor es introducido a partir del análisis de esfuerzos de acuerdo al criterio de cedencia de Von Mises con el cual se obtiene que el máximo esfuerzo cortante que un material pueda resistir está dado por:

$$\tau = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad (3.6)$$

Esto es cuando el factor de fricción es 1, lo cual corresponde a la fricción adhesiva. Si se considera que el factor de fricción es igual a cero, cuando se presente un caso sin fricción, se tiene:

$$\tau = m \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad (3.7)$$

Es por eso que los límites de m son $0 \leq m \leq 1$.

3.3.3 Relación entre μ y m

Aunque el coeficiente de fricción de Coulumb μ y el factor de fricción cortante interfacial m no tienen una aceptación universal, en casos generales, cualquiera de los

dos describen bien el comportamiento de la fricción y uno u otro puede dar mejores resultados para un caso en particular. Por esto existe la necesidad de relacionarlos con el fin de conocer estas diferencias, esto se logra al igualar sus ecuaciones obteniendo la expresión:

$$\mu = \frac{m}{\sqrt{3}} \quad (3.8)$$

3.3.4 Comportamiento de la fricción con la rugosidad

Es importante mencionar el término rugosidad como un factor importante dentro del mecanismo de fricción, sin embargo se puede aplicar una ley en el caso de las superficies en términos de rugosidad, que establece que la fuerza de fricción es independiente de la rugosidad en el deslizamiento de las superficies ^[3].

De hecho, ésta es una simplificación de una regla de una gráfica de la fricción como función de la rugosidad de las superficies, sobre un muy amplio intervalo de rugosidad, mostrándose en la Figura 3.7.

Con una superficie lisa, la fricción es alta a causa de que el área real tiende a crecer excesivamente, mientras que con una superficie rugosa la fricción es alta a causa de la necesidad de empujar una superficie sobre las asperezas de la otra. En un rango intermedio de rugosidad, que normalmente se utiliza en la práctica de la ingeniería, la fricción no varía tanto con respecto a la rugosidad ^[3].

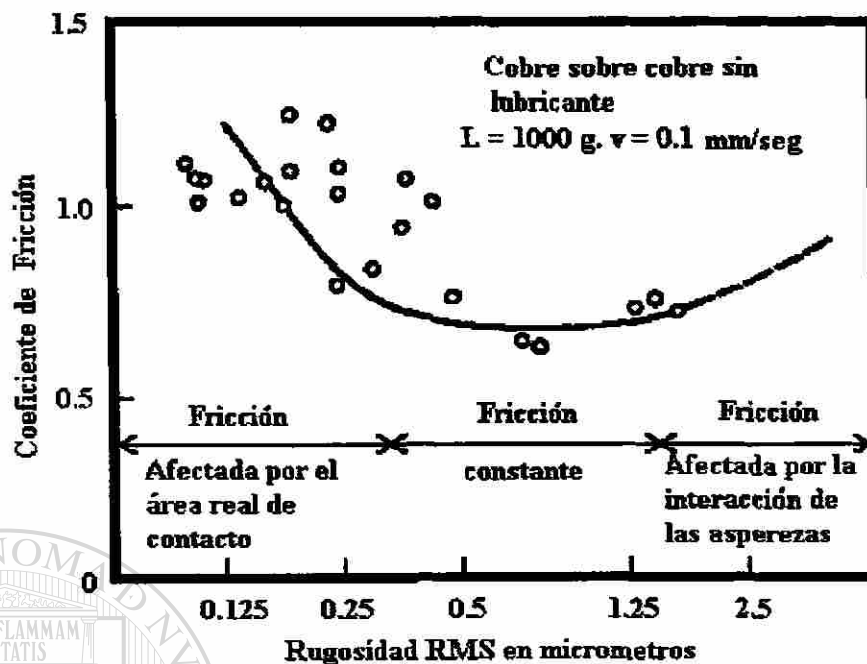


Figura 3.7 Gráfica de fricción contra rugosidad que muestra una región con pendiente negativa a causa del crecimiento del contacto entre superficies y una pendiente positiva por la interacción de las asperezas [3].

3.4 TIPOS DE LUBRICACIÓN

La lubricación se refiere a la modificación de las características relativas de fricción y a la reducción del daño y el desgaste en la superficie de los sólidos al moverse uno en reacción con el otro [5].

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

En un deslizamiento entre dos superficies es muy importante la forma de contacto que hay entre ellas y el tipo de lubricación que existe, ya que las superficies pueden estar secas o lubricadas. En el primer caso, cuando las superficies no cuentan con la presencia de fluidos o películas contaminantes, a la resistencia se le llama fricción en seco. La fricción de las zapatas de freno sobre la llanta de la rueda de un ferrocarril es un ejemplo de este tipo de fricción.

La lubricación existe entre superficies en deslizamiento añadiendo un lubricante gaseoso, líquido o sólido entre las superficies en contacto, para reducir la fricción y el

desgaste y desprender los residuos y el calor generado durante el proceso de deslizamiento. Los diversos tipos de lubricación se mencionan a continuación.

3.4.1 Lubricación límite o grasosa

Este tipo de lubricación existe cuando las superficies en frotamiento están separadas entre sí por una película muy delgada de lubricante. En este caso la lubricación depende de la adhesión del lubricante al material de las superficies que se frotan; las capas del lubricante resbalan una sobre la otra, en lugar de que lo hagan sobre superficies secas.

3.4.2 Lubricación completa

Esto es cuando la lubricación se dispone de modo que las superficies que se frotan quedan separadas por una película de fluido y la carga en las superficies quede por completo soportada por la presión hidrostática o hidrodinámica de la película. En este caso las pérdidas por fricción se deben únicamente a la fricción interna del fluido de la película.

En este tipo de lubricación, existen variantes como la lubricación hidrostática, hidrodinámica y la elastohidrodinámica. Se le llama *lubricación hidrodinámica* cuando un lubricante está presente entre dos superficies en deslizamiento lineal o rotacional y se genera una película gruesa presurizada formada por la velocidad de las superficies para reducir la fricción y el desgaste ^[5]. Cuando la velocidad de las superficies es insuficiente para formar esta película gruesa en la lubricación hidrodinámica, se dice que es *lubricación hidrostática* ^[5].

Cuando la presión del lubricante causa deformaciones elásticas a las superficies del material y se aumenta en una cantidad apreciable la viscosidad del lubricante, se le conoce como *lubricación elastohidrodinámica* ^[5].

3.4.3 Lubricación incompleta o mixta

Esta lubricación sucede si la carga sobre las superficies que se frotan es soportada parcialmente por una película viscosa de fluido y, por otra parte, por zonas de lubricación límite. La fricción es intermedia entre la de lubricación fluida y límite. Los tipos de lubricación explicados, se pueden distinguir en la Figura 3.8.

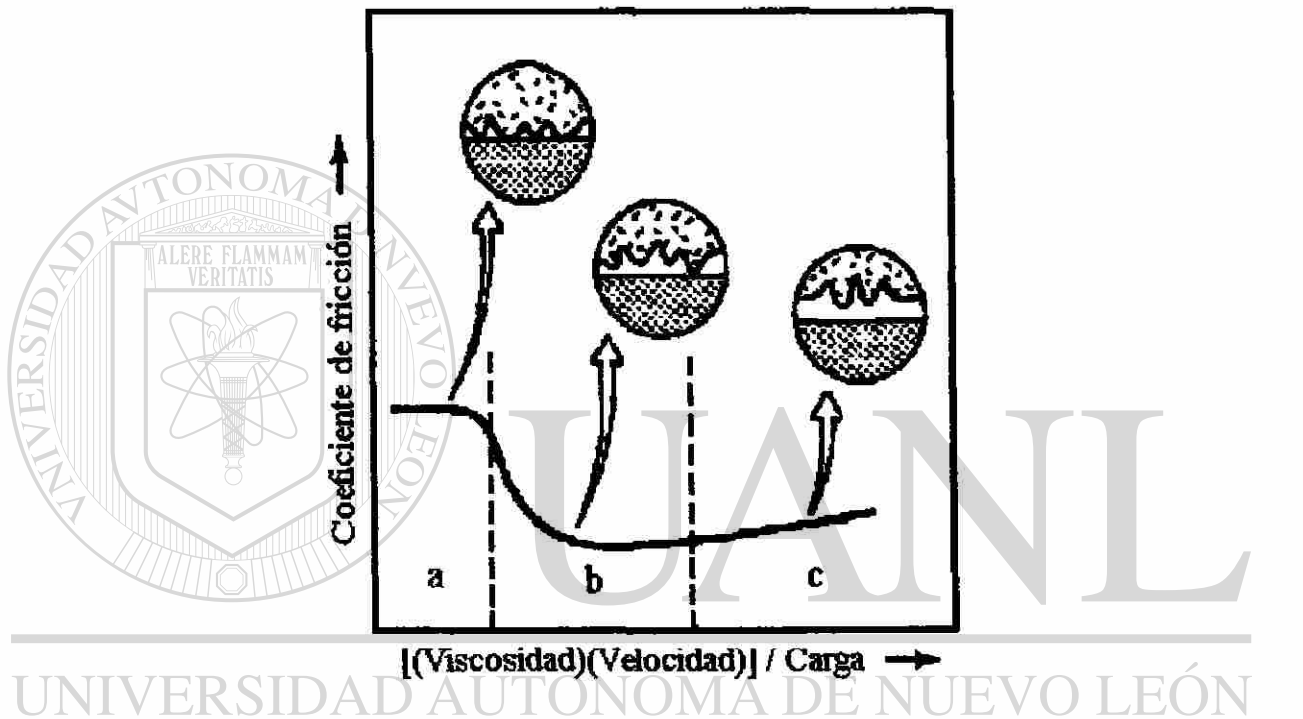


Figura 3.8 Gráfica del coeficiente de fricción μ , contra $[(\text{viscosidad}) \times (\text{velocidad}) / \text{carga}]$ para mostrar los tres tipos de lubricación. Donde: a) lubricación límite, b) lubricación incompleta o mixta y c) lubricación completa ^[1].

3.5 TIPOS DE LUBRICANTES

Los lubricantes se fabrican a fin de que tengan ciertas características específicas, que se pueden definir en términos de propiedades físicas o químicas, o por su comportamiento. Aunque las sustancias de uso más frecuente como lubricantes han sido aceites o grasas, pueden ser adecuados muchos otros materiales de naturaleza muy

diferente. Los sólidos y los fluidos (aire u otros gases y también líquidos) se emplean como lubricante.

3.5.1 Lubricantes líquidos

Aunque hay muchos líquidos, incluso el agua, que se pueden usar como lubricantes, los de uso más frecuente son los que se utilizan en fracciones de petróleo refinado o en fluidos sintéticos. Los lubricantes líquidos de petróleo son los de uso más extenso, debido a su adaptabilidad general a la mayoría de los equipos existentes o por su disponibilidad a un costo moderado, o por ambas razones. Éstos se preparan mediante procesos para refinación a partir de hidrocarburos naturales. Se suele preferir como lubricantes a los petróleos parafínicos y naftéinicos, términos que se refiere a la estructura molecular de los componentes preponderantes ^[3].

3.5.2 Lubricantes sólidos

Los lubricantes sólidos son materiales con propiedades de baja resistencia al corte y reductores de fricción. Los materiales típicos de éstos son grafito, bisulfuro de molibdeno (MoS_2), el politetrafluoretileno (PTFE) y la mica. Pueden utilizarse como polvos en su forma natural, o dispersados en fluidos (aceites, agua) y grasas; o pueden añadirse a aglutinantes como los pigmentos a la pintura y emplearse como lubricantes ligados de película seca.

Todas las superficies maquinadas, aún las que están esmeriladas y pulidas, pueden definirse en términos de la rugosidad de la superficie, o de las dimensiones de los puntos altos microscópicos llamados asperezas. Entre las superficies en frotamiento, se logra el más bajo coeficiente de fricción manteniendo la separación de esas superficies por medio de una película fluida plena (lubricación hidrodinámica). Conforme el espesor de la película del aceite disminuye con cargas más elevadas, a carga de choque, o velocidades de superficie decrecientes, las asperezas en las

superficies opuestas llegan a establecer contacto en lubricación de película mezclada con el aumento resultante de la fricción.

Las formas útiles en las cuales se preparan los lubricantes sólidos incluyen polvos, pastas (compuestos), revestimientos ligados, grasas y dispersiones. El mecanismo de lubricación sólida no depende de una propiedad única del lubricante; es una interdependencia de la superficie de la composición del lubricante sólido, de la geometría de las partículas, de la superficie del metal y de la naturaleza de los procesos que ocurren en o cerca de las superficies de soporte.

Bajo la presión y el calor de contacto, los lubricantes sólidos pueden o no reaccionar con el sustrato del metal, pero interponen por sí mismos una barrera de revestimiento en la cual el esfuerzo de corte puede tener lugar más fácilmente y con menos fricción que si los metales del cojinete tuvieran esfuerzo de corte en contacto puro.

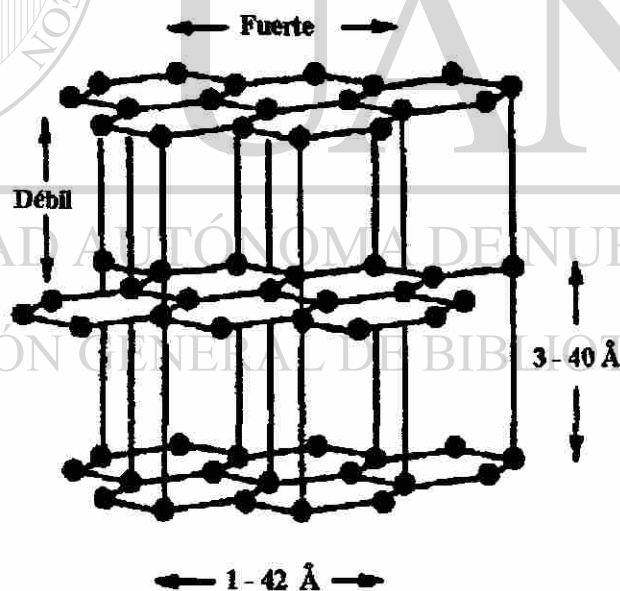


Figura 3.9 Estructura de grafito. Las laminillas individuales consisten en átomos empaquetados de manera compacta, separados por una distancia relativamente larga con respecto a las laminillas adyacentes^[1].

3.5.3 Aceites

Los aceites grasos se obtienen a partir de la extracción de los aceites de muchas fuentes vegetales (semillas de algodón, palmeras, semillas de ricino, etc.), o bien de la grasa de animales domésticos (manteca, sebo) y también del pescado. Estos aceites grasos tienen composiciones y propiedades físicas diferentes que dependen de su fuente, pero su característica común se basa en su estructura química glicérida, en oposición a la estructura de hidrocarburos común a los aceites del petróleo.

Raramente se utilizan en forma pura, ya que se oxidan rápidamente, lo que conduce a la formación de lodo, laca y ácidos potencialmente corrosivos. En ocasiones se emplean como aditivos en aceites del petróleo en diferentes porcentajes de concentraciones, para mejorar su lubricidad.

3.5.4 Grasas

Las grasas lubricantes se forman al dispersar un agente espesador en un lubricante líquido. Pueden utilizarse ingredientes adicionales con el fin de lograr propiedades especiales. Los jabones son los espesadores más comunes. Y también se emplean jabones complejos, pigmentos, arcillas modificadas, productos químicos (poliurea) y polímeros, solos o en combinación.

Los jabones se forman por la reacción de grasas animales o vegetales, o de ácidos grasos con álcalis fuertes como el hidróxido de calcio, sodio o litio. A las grasas pueden añadirse aditivos para producir o aumentar lo pegajoso, la capacidad de carga, la resistencia a la oxidación y la formación de herrumbre, disminuir el desgaste y aminorar la sensibilidad al agua. Estos aditivos por lo regular son sólidos como el grafito, bisulfuro de molibdeno, polvos metálicos o polímeros.

CAPÍTULO 4

MÉTODOS DE MEDICIÓN DE LA FRICCIÓN

4.1 INTRODUCCIÓN

Algunas organizaciones han desarrollado pruebas estándares para la medición de coeficientes de fricción. Estas pruebas varían extensamente en el tipo y propósito de medición. La ASTM (American Society for Testing Materials) cuenta con una serie de aplicaciones de pruebas para un uso o material en particular, mientras que otras son para evaluaciones generales de un material ¹¹¹. Otras organizaciones como la ANSI (American National Standards Institute) también han desarrollado pruebas de fricción, sin embargo existen pruebas que no están estandarizadas, como lo es la prueba de compresio anillos, que se describirá más adelante.

4.2 MÉTODOS BÁSICOS DE MEDICIÓN

Existe un extenso número de precauciones que deben ser observadas durante la medición de la fricción, esto también depende principalmente en el equipo de medición. La consideración que podría ser más importante con respecto a la selección del instrumento de medición depende del sistema de medición de fuerza, es decir, que el

sistema sea el más conveniente para medir la magnitud de la fuerza por más pequeña o grande que sea. Algunos de los sistemas de medición más comunes son ilustrados en la Figura 4.1.

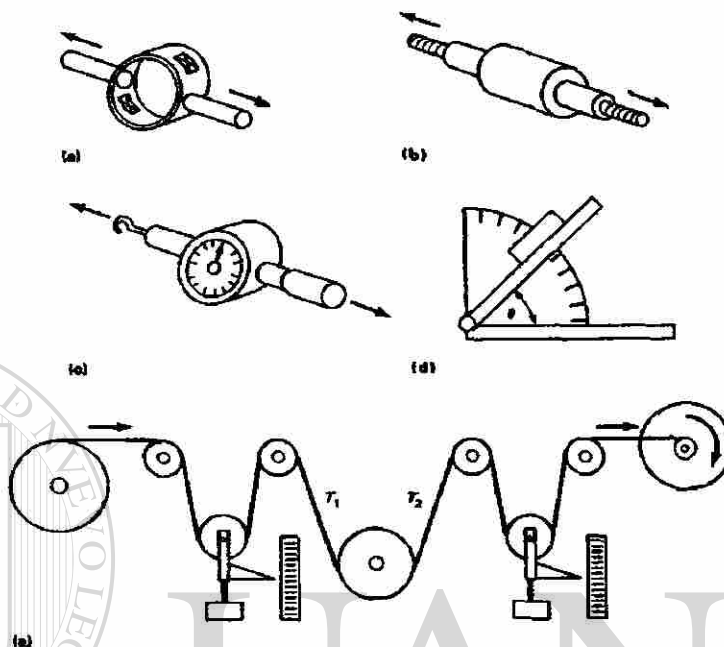


Figura 4.1 Sensores de fuerza de fricción. (a) Anillo de deformación con galga extensométrica. (b) Medidor de deformación con celda de galga. (c) Galga de fuerza. (d) Plano inclinado. (e) Arreglo de medición de tensión ⁽¹⁾.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Si el sensor de fuerza detecta una punta al inicio de la prueba, determinado como F' , esta fuerza es utilizada para calcular el coeficiente de fricción estática. Mientras que la fuerza F es calculada para determinar el coeficiente de fricción cinética, esto se muestra en la Figura 4.2. Una importante consideración en una prueba de fricción es cuando una fuerza pico ($F' - F$) puede ser debida al deslizamiento del sistema o por el resultado del comportamiento viscoelástico en el sistema de medición de fuerza.

Agregando otras curvas de fuerza contra tiempo, la pregunta se presenta cuando se quiere saber que valor de fuerza se utilizará al medir la fricción cinética. Tomando el ejemplo de la Figura 4.3, existen variaciones de fuerza que son normales en casi todos

los sistemas de deslizamiento, la curva debe incrementar o decrementar con respecto al tiempo como se muestra en la Figura 4.3.

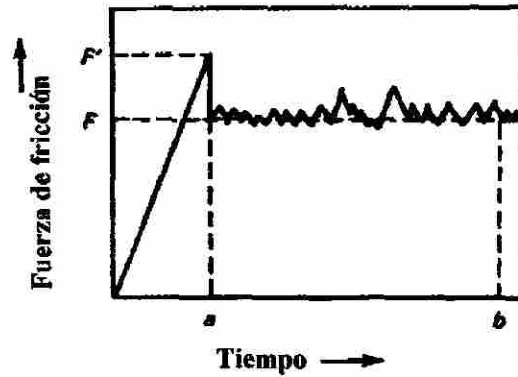


Figura 4.2 Medición de fuerza de fricción que es constante con el tiempo ^[1].

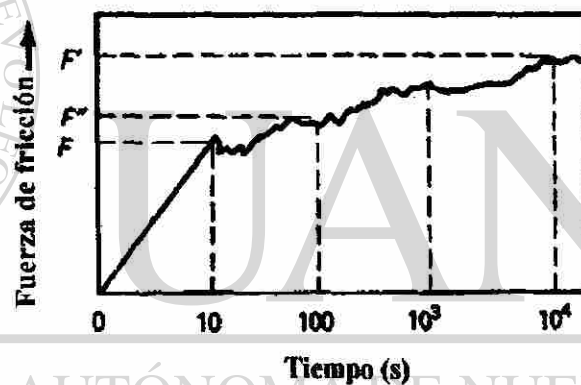


Figura 4.3 Registro de la fuerza de fricción que varía con respecto al tiempo ^[1].

Los laboratorios que utilizan pruebas estandarizadas acostumbran grabar los intervalos del coeficiente de fricción después de varios intervalos de deslizamiento, esto presenta un perfil de comportamiento en una curva de fricción contra tiempo. También se utilizan equipos computacionales para obtener los datos de fricción, arrojando el promedio de la fricción cinética sobre cada incremento en el tiempo.

Cuando existe un comportamiento de deslizamiento adhesivo se encuentra indicado por un movimiento brusco, el cual puede ser grabado por una señal de fuerza

de fricción contra tiempo. Un método para medir el coeficiente de fricción que presenta este comportamiento es calculando el máximo y mínimo coeficiente utilizando F y F' cuando el deslizamiento adhesivo no ha ocurrido aún. Con F'' puede ser calculado el coeficiente de fricción estático, mostrado en la Figura 4.4.

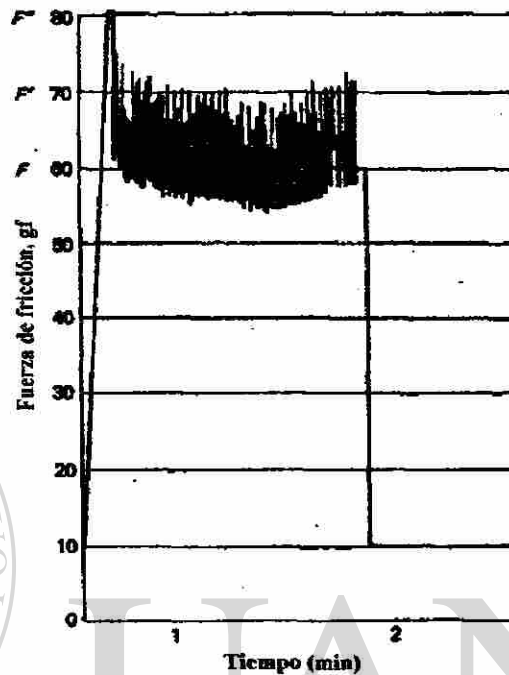


Figura 4.4 Registro de la fuerza de fricción de un sistema que presenta deslizamiento adhesivo ⁽¹⁾.

4.3 MODELACIÓN DE UN SISTEMA DE FRICCIÓN

Esencialmente prevalecen 3 tipos de geometrías para un sistema donde la fricción es concerniente, estos tipos son:

- Superficie plana – superficie plana
- Superficies amoldadas o ajustadas (banda en una polea, baleros de rodillos planos, etc)
- Contacto Hertziano

Estos sistemas son ilustrados en la Figura 4.5. Se puede argumentar que cuando el desgaste ocurre, las superficies se vuelven a ajustar. Esto sucede cuando los sistemas permanecen en un contacto Hertziano, como lo son las ruedas del ferrocarril que se desgastan constantemente en servicio y aún permanecen en la línea en una manera Hertziana por medio de una línea o punto de contacto. La superficie en deslizamiento, deberá ser lo más importante en la modelación de un tribosistema. Si el sistema a estudiar se desgasta y el objetivo es determinar las características de fricción bajo condiciones fijas de desgaste, la fricción deberá medirse en pruebas de desgaste. Si el sistema no cambia con respecto al tiempo, puede ser empleada una prueba de fricción donde no involucre desgaste.

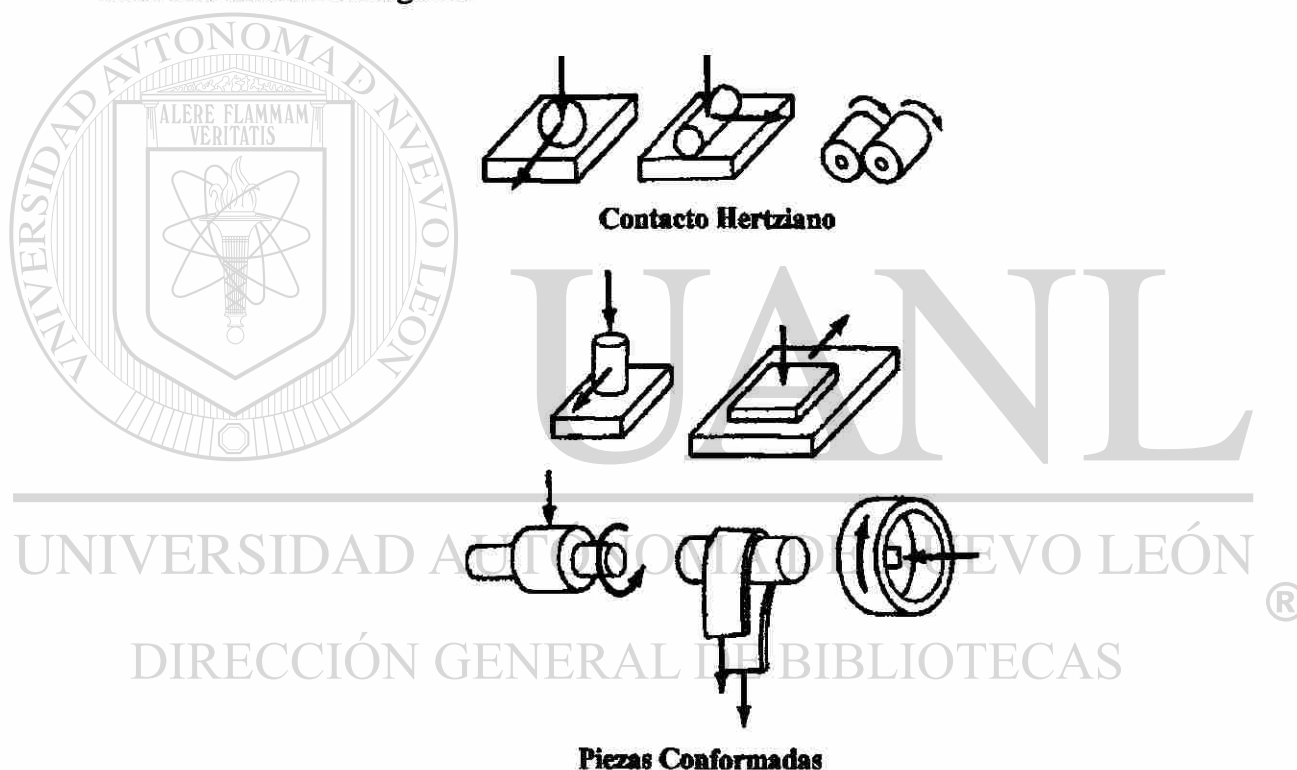


Figura 4.5 Diferentes modelos de pruebas de fricción ^[1].

La Figura 4.6 muestra como el desgaste puede afectar las fuerzas de fricción. La Figura 4.6(a) presenta un sistema donde no existen cambios en el comportamiento de

desgaste, la Figura 4.6 (b) ilustra un tribosistema donde la fuerza de fricción incrementa con el tiempo hasta alcanzar un estado estable. Este tipo de comportamiento ocurre en un sistema que experimenta un desgaste severo. La fricción es baja cuando las dos superficies permanecen en su estado original, cuando estas empiezan a desgastarse, la fricción comienza a incrementar y desde ese punto las superficies desgastadas permanecen iguales. En la Figura 4.6(c) muestra un sistema donde las fuerzas de fricción varían con el proceso de desgaste. Este tipo de comportamiento ocurre cuando los restos o partículas desgastadas permanecen en el sistema. Dependiendo de cómo éstas se separen de la superficie, las partículas desgastadas pueden dar un efecto lubricante o no lubricante en el sistema. La fricción permanecerá constante cuando las superficies permanezcan iguales, cuando se desgasten existirá un cambio de fricción seguido de otro cuando las superficies se vuelvan a cubrir por partículas desgastadas.

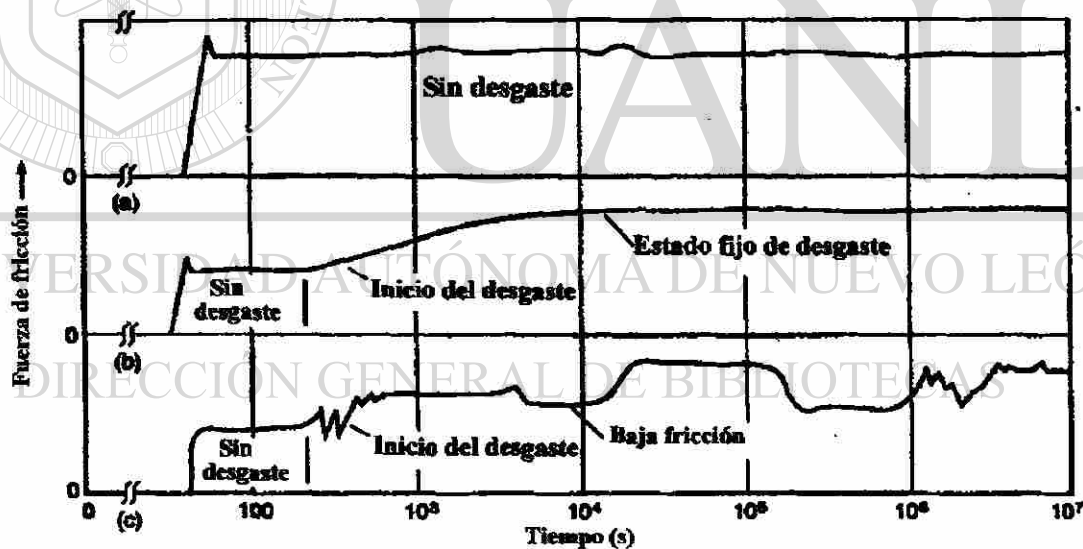


Figura 4.6 Efecto de la fricción por un sistema de desgaste ^[1].

4.4 PARÁMETROS DE PRUEBA

Los parámetros en una prueba de fricción como son carga y velocidad deben ser lo más cercano posible a las condiciones actuales del sistema. Los coeficientes de fricción son relativamente insensibles a velocidades y cargas arriba del punto donde estos parámetros afectan las propiedades de las superficies puestas a prueba.

La velocidad afectará los resultados de la fricción cuando ésta sea suficientemente grande para ablandar las superficies y alterar las propiedades mecánicas del mismo ^[1]. Otro parámetro difícil de alcanzar es la temperatura, en el caso de los polímeros es sencillo contar con este parámetro, pero en el caso de los metales es difícil obtener la temperatura deseada al realizar las pruebas en las mismas condiciones.

4.5 MEDICIÓN DE FRICCIÓN PARA EL FORMADO DE METALES

Cuando una muestra de un material en forma de anillo es comprimida por dos superficies paralelas planas, el diámetro interno se incrementará o se contraerá al reducirse la altura de la muestra, esto dependerá de las condiciones de fricción entre las superficies en contacto. El diámetro interno del anillo se incrementará si la fricción entre las superficies es baja, pero si la fricción es alta el diámetro del anillo se reducirá^[2], esto se puede ver más claramente en la Figura 4.7.

A causa de que el cambio en el diámetro interno en un ensayo de compresión en anillos es sensible a los cambios de fricción entre las superficies, el método de compresión de anillos ha sido utilizado extensamente en análisis para evaluar la fricción en procesos de formado de metales^[9].

Para determinar las condiciones cuantitativas de la fricción, la relación entre el cambio geométrico de la pieza de trabajo y las condiciones de fricción de la herramienta-pieza de trabajo deben de ser establecidas.

Desde que Kunogi^[4] analizó el proceso matemático, los aspectos de la prueba de compresión de anillos han sido utilizados en el pasado. La mayoría de los métodos matemáticos se basan en aproximaciones de análisis de esfuerzos o en análisis de límite superior utilizando campos de variables simples.

Mientras que estas teorías proporcionan información útil, ha sido necesaria la obtención de mayor precisión y soluciones reales para una amplia y valiosa aplicación de la prueba de anillos en la práctica. En la implementación de elemento finito para el análisis del proceso de formado en metales, es muy importante tener una atención particular en las condiciones de frontera del modelo.

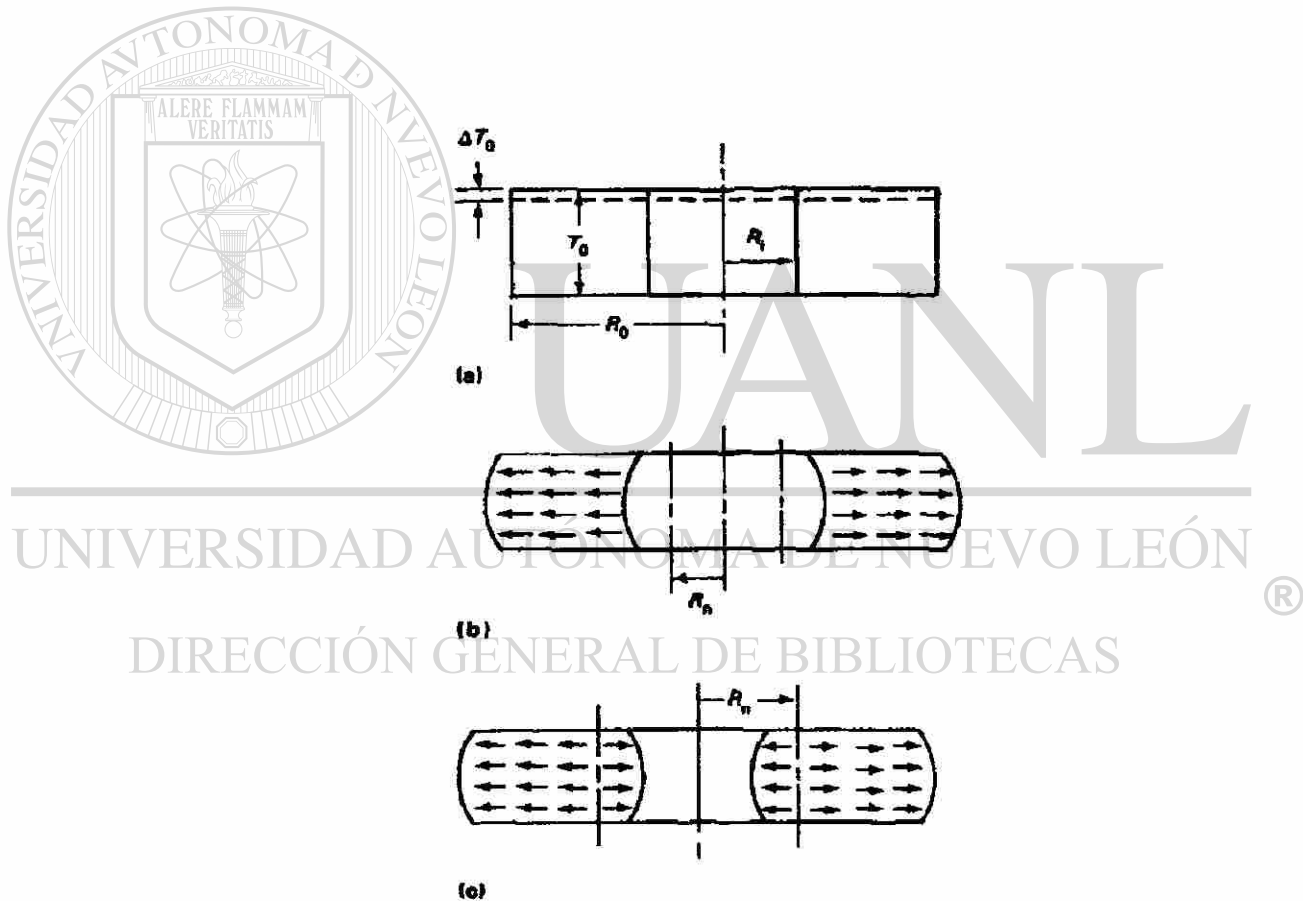


Figura 4.7 Dos modos de deformación en la compresión de anillos. (a) Geometría inicial. (b) Resultado de una fricción baja entre las superficies en contacto. (c) Resultado de una fricción alta ^[1].

Existe la clase de problemas en la que un anillo de compresión, procesos como la laminación y el forjado que tiene un punto neutral o región a lo largo de la superficie en contacto entre la herramienta y el material de trabajo. En este punto la velocidad relativa entre la herramienta y la pieza de trabajo es cero y el esfuerzo friccional usualmente cambia su dirección.

La descripción del patrón de flujo considera un cilindro imaginario de radio $R=R_n$, donde R_n es el radio neutral. En el anillo donde ocurre alta fricción (Figura 4.1c), todos los puntos con radio $R > R_n$ se mueven hacia afuera y sus posiciones radiales $R < R_n$ se mueven hacia adentro. Los puntos donde $R = R_n$ son estacionarios, por lo tanto, ese radio es llamado el *radio neutro*. En el anillo de alta fricción, el radio neutro reside dentro del propio anillo, donde el radio neutro es mayor que el radio interno ($R_n > R_i$). En el caso de baja fricción, el radio neutro es menor que el radio interno. Por lo tanto, todos los puntos en el anillo con baja fricción están en la posición radial de $R > R_n$. El incremento del radio interno es mucho menor que para alta fricción.

Cuando $R_n \leq R_i$, la posición del radio neutro (R_n) puede ser determinada como sigue:

$$\left(\frac{R_n}{R_o}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1 - \left(\frac{R_i}{R_o}\right)^4 x^2}{\sqrt{x(x-1) \left[1 - \left(\frac{R_i}{R_o}\right)^4 x\right]}}, \quad (4.1)$$

donde:

$$x = \left\{ \frac{R_o}{R_i} \exp \left[-m \frac{R_o}{T} \left(1 - \frac{R_i}{R_o} \right) \right] \right\}^2 \quad (4.2)$$

Cuando $R_i \leq R_n \leq R_o$, la posición del radio neutro se encuentra con una alta aproximación por:

$$2m \frac{R_o}{T} \left(1 + \frac{R_i}{R_o} - 2 \frac{R_n}{R_o} \right) + \ln \left(\frac{R_i}{R_o} \right)^2 \frac{\left(\frac{R_i}{R_o} \right)^2 + \sqrt{3 + \left(\frac{R_i}{R_o} \right)^4}}{\left(\frac{R_i}{R_o} \right)^2 + \sqrt{3 \left(\frac{R_i}{R_o} \right)^4 + \left(\frac{R_i}{R_o} \right)^4}} = 0 \quad (4.3)$$

Cuando el anillo se comprime y todos sus parámetros geométricos, incluyendo el valor de R_n , se determinan experimentalmente, es posible calcular el valor del factor m con las ecuaciones (4.1) y (4.2)^[1].

En la Figura 4.8 se muestra un ejemplo de la solución del método de compresión en anillos por medio de elemento finito que ha sido obtenida en términos de cambios geométricos de la muestra, distribuciones de velocidad, distorsiones de la malla, distribuciones de esfuerzos y deformaciones sometido a diferentes condiciones de fricción, en este caso para diferentes materiales^[9].

Estos resultados fueron obtenidos en términos de porcentaje en cambio del diámetro interno y la reducción de la altura. La Figura 4.8 muestra que los cambios geométricos difieren para un mismo valor de m , dependiendo del esfuerzo de cedencia seleccionado k , también se puede observar que los cambios geométricos son afectados por las propiedades del material, como se indica por las curvas calculadas con $m = 1.0$ para cobre y aluminio anodizado.

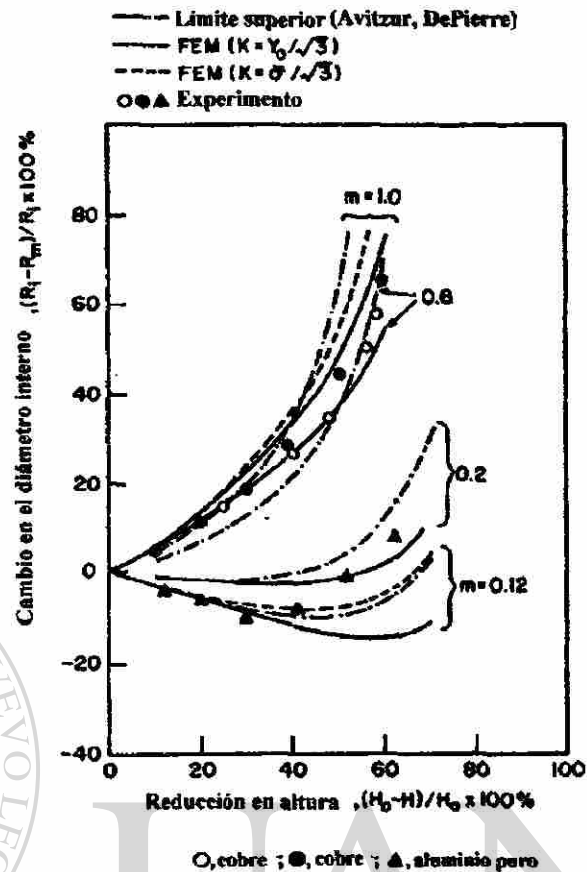


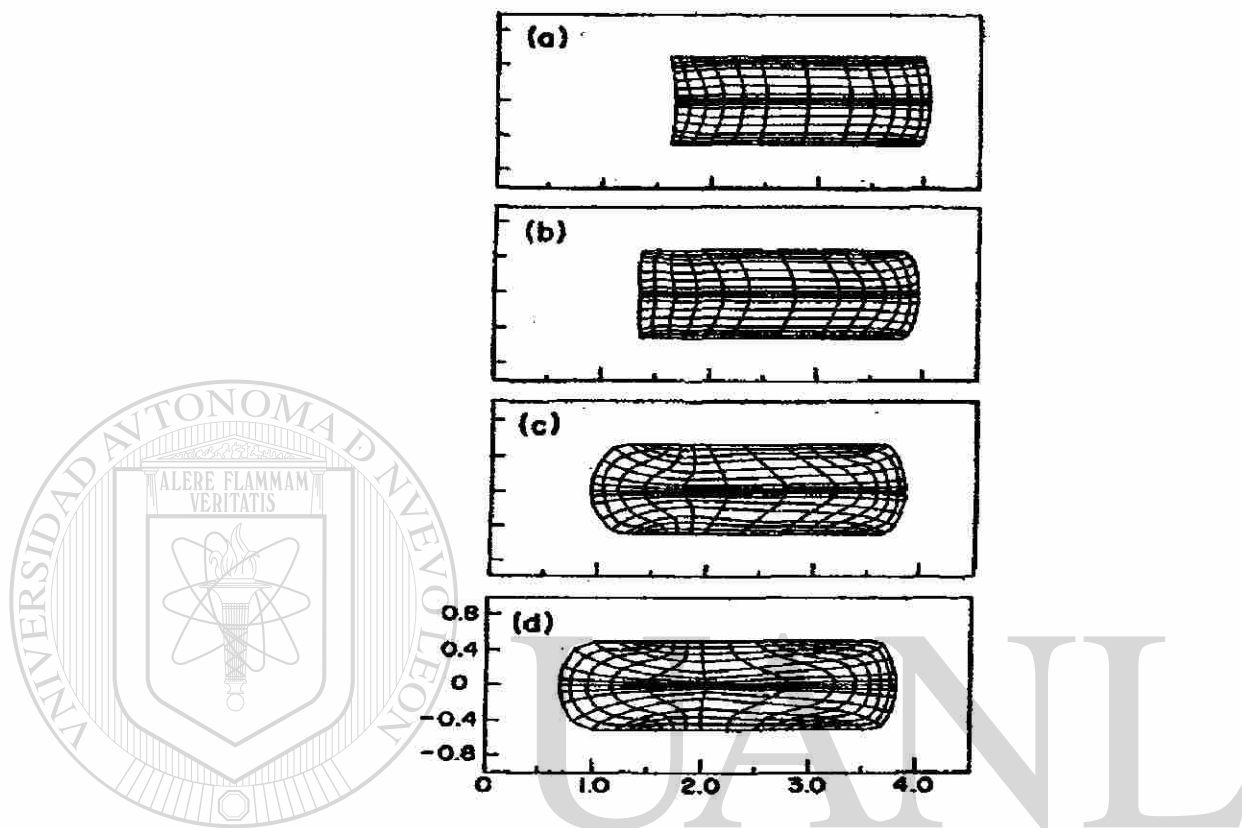
Figura 4.8 Comparación de solución por elemento finito, con la solución de límite superior en compresión de anillos para diferentes materiales^[9].

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

El problema de compresión de anillos por el método elástico-plástico en elemento finito fue analizado por Hartley^[12,13] quien desarrolló el método para introducir la fricción dentro del análisis de elemento finito por medio de la inclusión de una capa de elementos. La dureza de los elementos fue modificada por la función del factor cortante de fricción interfacial y el método fue aplicado para el análisis de compresión de anillos.

El MEF no sólo proporciona un conjunto global de cantidades, como cambios de dimensiones y carga-desplazamiento de la muestra, sino que también revela los detalles de las características de deformación. La Figura 4.9 muestra un ejemplo de una malla

distorsionada al 50% de reducción en altura sobre diferentes valores de fricción en valores de m ^[9].



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Figura 4.9 Representación de una malla distorsionada en una prueba compresión de anillos al 50% de reducción en altura, considerando que m es diferente para cada caso^[9].

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

CAPÍTULO 5

DESARROLLO DEL MODELO

5.1 INTRODUCCIÓN

Dado que la finalidad de este trabajo es determinar las curvas de calibración para mediante pruebas de compresión de anillos. Se empleó el método de elemento finito para la obtención de un mayor número de valores de m . Para este tipo de análisis, se ha utilizado como herramienta de trabajo el paquete computacional ABAQUS versión 6.3.

5.2 METODOLOGÍA

Como se mencionó en el Capítulo 2, existe un procedimiento para la creación del modelo que se quiere analizar por medio de elementos finitos y los pasos se realizaron de la siguiente manera.

5.2.1 Creación del modelo

Algunas ocasiones es necesario utilizar algunos programas de dibujo cuando las partes que se estudiarán son muy complejas, pero en este caso, por la simplicidad del modelo, éste fue creado directamente con el módulo CAE del paquete genérico ABAQUS.

La geometría del anillo fue tomada siguiendo la relación 6:3:2 (diámetro externo, diámetro interno y espesor), quedando como resultado un diámetro externo de 12 mm, un diámetro interno de 6 mm y un espesor de 4 mm. Como se muestra en la Figura 5.1.

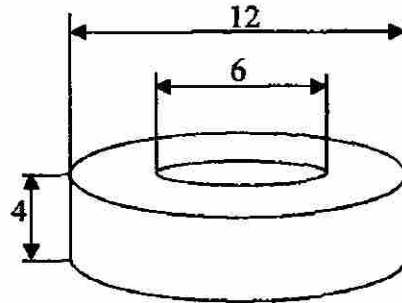


Figura 5.1 Geometría del anillo. Medidas de diámetro externo de 12 mm, diámetro interno de 6 mm y espesor de 4 mm.

Debido a las condiciones de simetría existentes en geometría y en las cargas aplicadas uniformemente sobre el anillo, se creó un modelo tomando la cuarta parte del anillo asignándolo como una pieza sólida deformable, como se muestra en la Figura 5.2.

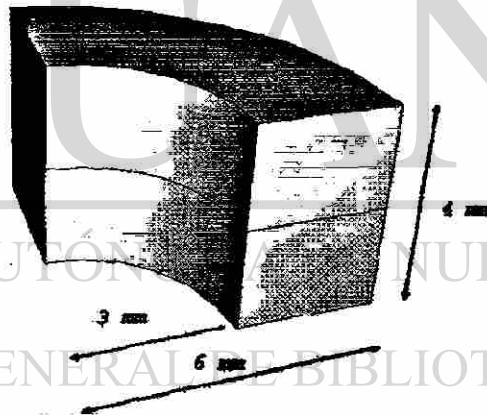


Figura 5.2 Cuarta parte del anillo a analizar teniendo las medidas de radio externo de 6 mm, un radio interno de 3 mm y un espesor de 4 mm.

5.2.2 Asignación de las propiedades del material

Los datos de las propiedades del material asignados a dos materiales llamados A y B fueron los siguientes. Para el módulo de Young, la relación de Poisson y la

densidad, se tomaron de los datos estándares de aceros y se aplicaron a los dos materiales A y B y sus valores fueron 195 GPa , 0.3 y 7800 kg/m³ respectivamente.

La composición química de los materiales A y B se obtuvieron con el analizador LECO (DAP-LQ-G07-04) y espectrometría de emisión óptica (DAP-LQ-G06-09), utilizando la norma ASTM E-30 y su equivalente en normas NMX B-1 se muestran en la Tabla 1.

Para determinar las propiedades plásticas de los materiales se realizaron pruebas de compresión axial de los aceros de bajo carbono, en una máquina servo-hidráulica universal INSTRON 8502 (Figura 5.3). Para obtener las probetas se tomaron algunas barras del acero A y del acero B cortadas en forma de cilindro con dimensiones en diámetro interno de 10 mm y en longitud de 15 mm, estas se cortaron en tres direcciones (x,y,z) para comprobar su comportamiento isotrópico al aplicar el ensayo de compresión y tomar los datos del comportamiento plástico del material. Las probetas fueron puestas en prueba a diferentes velocidades (5, 50 y 500 mm/min), realizando las compresiones en las tres direcciones del material.

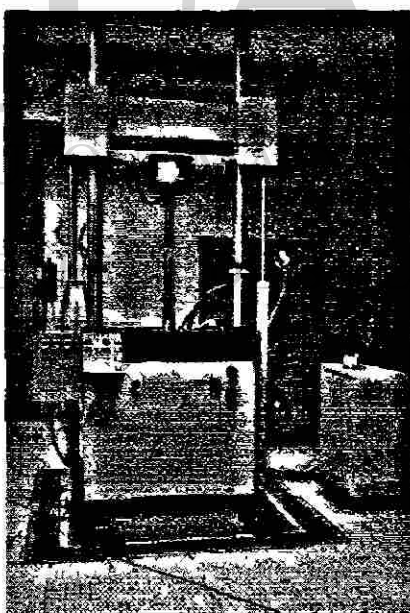


Figura 5.3 Máquina servo-hidráulica universal INSTRON 8502.

acero	%C	%Mn	%P	%S	%Cu	%Ni	%Si	%Cr	%Nb	%Mo	%Al	%Als	%Ti	%V	%B
A	0.057	0.180	0.007	0.007	0.062	0.022	0.018	0.024	0.007	0.014	0.032	0.027	0.0025	0.0	0.0003
B	0.069	0.826	0.008	0.004	0.048	0.017	0.024	0.010	0.025	0.005	0.038	0.030	0.0028	0.0	0.00

Tabla 5.1 Composición química de los aceros A y B.

Se obtuvieron datos de carga-desplazamiento con la máquina INSTRON 8502, por lo que fue necesario transformar los datos en resultados reales utilizando las ecuaciones de conversión que se explican a continuación.

La deformación ingenieril describe el concepto convencional del cambio en longitud con respecto a la unidad de longitud original y se representa de la siguiente manera:

$$e = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{L_f - L_0}{L_0} \quad (5.1)$$

Mientras que la deformación real es la medida en longitud con respecto al cambio instantáneo en longitud, y no de la longitud inicial representada como sigue;

$$\varepsilon = \sum \frac{L_1 - L_0}{L_0} + \frac{L_2 - L_1}{L_1} + \frac{L_3 - L_2}{L_2} + \dots = \int_{L_0}^L \frac{dL}{L} \quad (5.2)$$

simplificando,

$$\varepsilon = \int_{L_0}^L \frac{dL}{L} = \ln \frac{L}{L_0} \quad (5.3)$$

haciendo una relación entre las dos ecuaciones se tiene:

$$e = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{L}{L_0} - 1 \quad (5.4)$$

$$e + 1 = \frac{L}{L_0} \quad (5.5)$$

utilizando la siguiente conversión

$$\varepsilon = \ln \frac{L}{L_0} = \ln(e+1) \quad (5.6)$$

Siguiendo los mismo pasos para realizar la conversión del esfuerzo ingenieril en esfuerzo real se tiene que el esfuerzo ingenieril está determinado por la siguiente ecuación:

$$s = \frac{P}{A_0}, \quad (5.7)$$

donde s es el esfuerzo ingenieril, P es la fuerza aplicada sobre una área A . Mientras que el esfuerzo real está dado por:

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (5.8)$$

El esfuerzo real es determinado partiendo del esfuerzo ingenieril como sigue:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{P}{A_0} \frac{A_0}{A} \quad (5.9)$$

Por el cambio en relación de volumen se tiene:

$$\frac{A_0}{A} = \frac{L}{L_0} = e+1 \quad (5.10)$$

dando como resultado la ecuación;

$$\sigma = \frac{P}{A_0}(e+1) = s(e+1) \quad (5.11)$$

Al hacer la conversión de datos ingenieriles a reales, se obtuvo como resultado gráficas esfuerzo-deformación a diferentes velocidades de deformación mostradas en la Figura 5.4 a la 5.7, los datos numéricos se encuentran en el Anexo I. Con los resultados reales de las curvas esfuerzo-deformación se hizo un promedio de todas las curvas, teniendo como resultado las curvas de fluencia para los materiales A y B con los valores mostrados en las Tablas 5.2 y 5.3. Dentro del programa ABAQUS se asignó para cada material los datos de esfuerzo-deformación mostrados en las tablas antes mencionadas, los datos fueron alimentados para especificar la relación constitutiva que modela las relaciones elasto-plásticas del material.

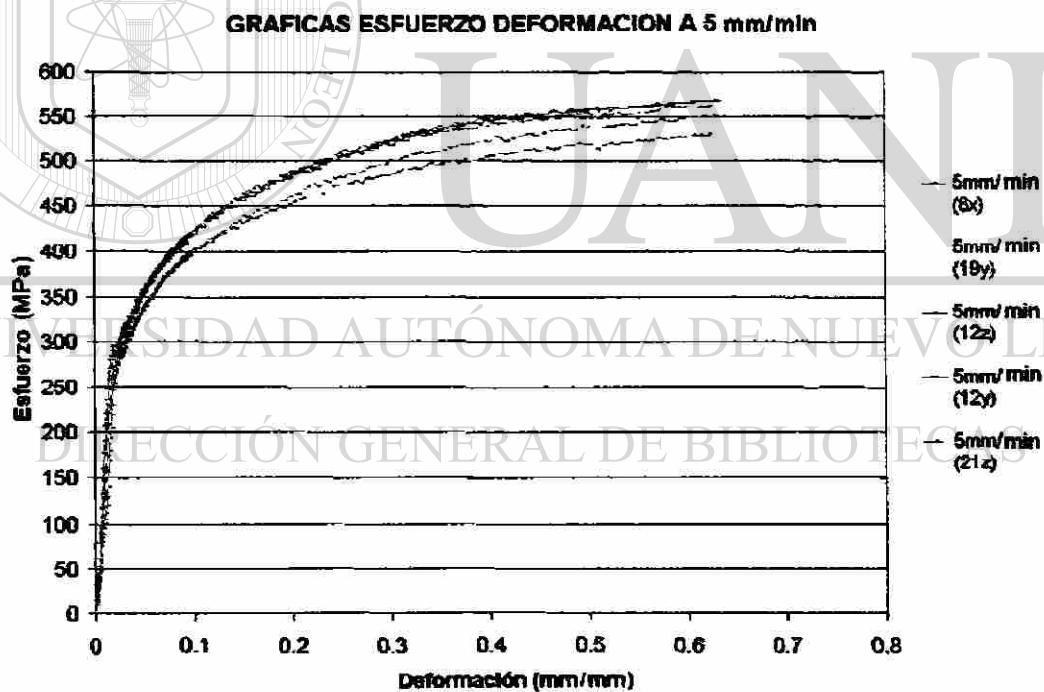


Figura 5.4 Graficas esfuerzo-deformación a 5 mm/min

GRAFICAS ESFUERZO DEFORMACION A 50 mm/min

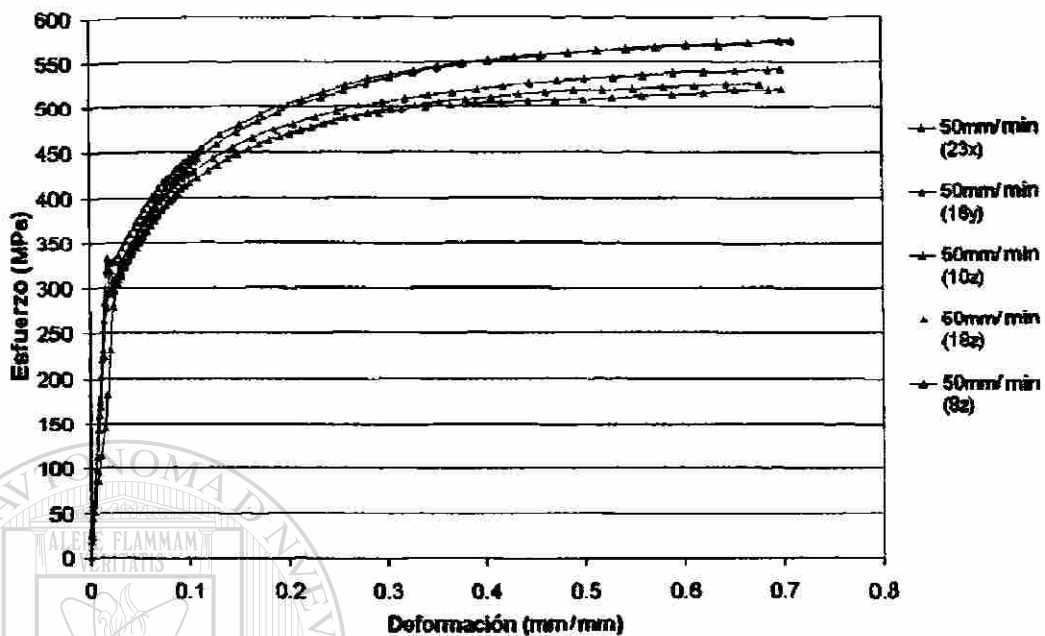


Figura 5.5 Graficas esfuerzo-deformación a 50 mm/min

GRAFICAS ESFUERZO DEFORMACION A 500mm/min

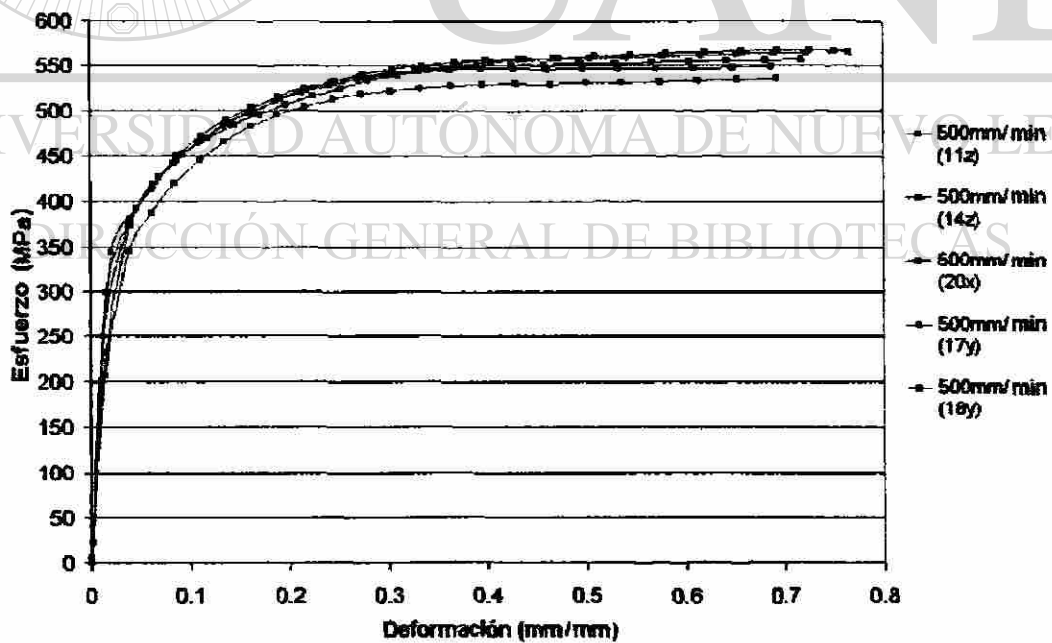


Figura 5.6 Graficas esfuerzo-deformación a 500 mm/min

PRUEBAS DE COMPRESIÓN DE UN ACERO 7061 A 5, 50 y 500mm/min

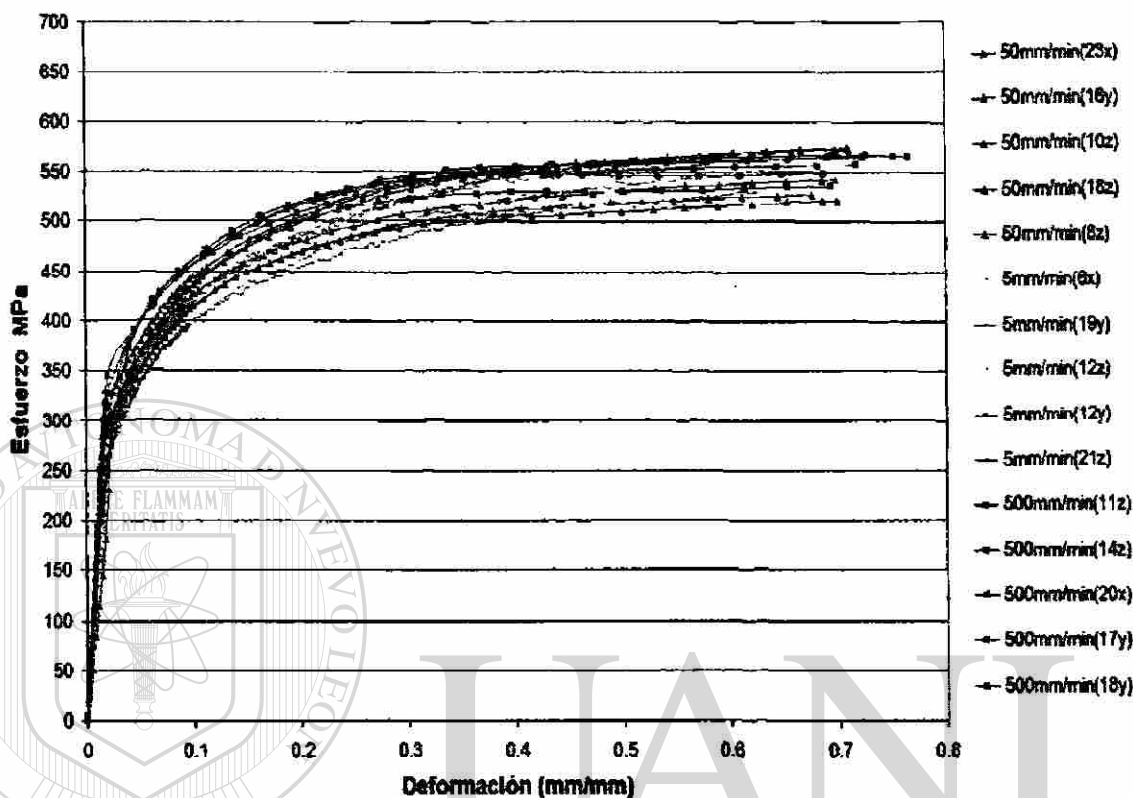


Figura 5.7 Curvas esfuerzo-deformación del acero A a diferentes velocidades de deformación

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

5.2.3 Relación de las propiedades de los elementos

Para crear la relación entre los elementos del sistema al hacer un cálculo total de esfuerzos, se necesita ensamblar las partes que interactúan con la muestra. Para esto se crearon dos superficies en 2D en contacto con el anillo, el contacto inferior representa la base como contacto fijo rígido y el contacto superior rígido representando el movimiento en una dirección negativa para que el anillo se comprima. Esto se puede ver representado en las Figuras 5.8 y 5.9. En este paso también se asigna el valor del coeficiente de fricción, este valor fue tomado con respecto al valor de factor de fricción

m , utilizando la relación m y μ de la ecuación (3.8). Los valores del coeficiente utilizados se muestran en la Tabla 5.4.

Esfuerzo MPa	Deformación (mm/mm)	Esfuerzo MPa	Deformación (mm/mm)
289.38	0.000	401.54	0.000
381.56	0.025	492.10	0.044
420.27	0.049	536.85	0.082
447.34	0.073	558.58	0.103
468.45	0.098	576.29	0.128
485.64	0.124	591.03	0.155
499.49	0.150	594.43	0.169
511.09	0.177	604.59	0.195
520.64	0.204	608.72	0.209
528.40	0.232	610.51	0.225
534.60	0.261	614.51	0.235
539.29	0.290	618.74	0.249
542.93	0.321	620.21	0.263
545.41	0.353	621.85	0.279
547.11	0.385	624.25	0.292
548.12	0.419	625.25	0.321
548.86	0.453	628.60	0.335
549.64	0.489	628.88	0.349
550.39	0.525	630.12	0.363
551.40	0.562	630.14	0.391
552.40	0.600	630.47	0.430
553.29	0.637	630.47	0.498
Tabla 5.2 Curva esfuerzo-deformación para el material A		Tabla 5.3 Curva esfuerzo-deformación para el material B.	

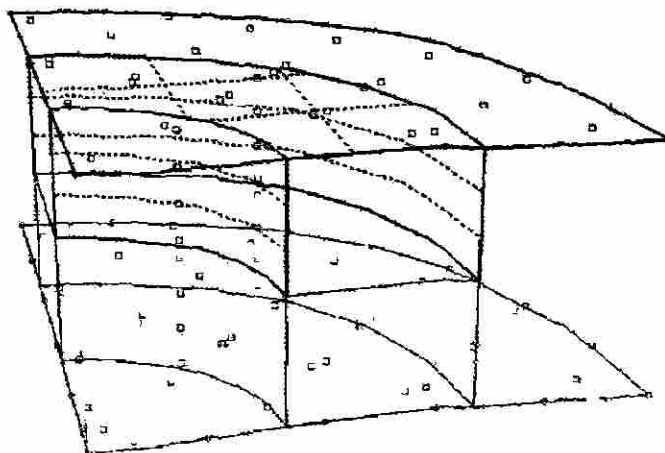


Figura 5.8 Contacto rígido superior representando el movimiento negativo hacia el eje z aplicado en la superficie del anillo.

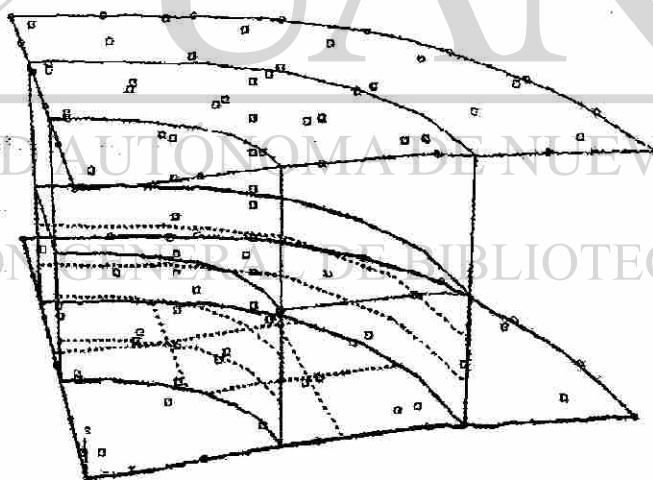


Figura 5.9 Contacto rígido inferior representando la base del anillo sin aplicar movimiento en el eje z.

m	μ	m	μ
0.00	0.000	0.15	0.087
0.01	0.006	0.16	0.092
0.02	0.012	0.17	0.098
0.03	0.017	0.18	0.104
0.04	0.023	0.19	0.110
0.05	0.029	0.25	0.144
0.06	0.035	0.30	0.173
0.07	0.040	0.35	0.202
0.08	0.046	0.40	0.231
0.09	0.052	0.50	0.289
0.10	0.058	0.60	0.346
0.11	0.064	0.70	0.404
0.12	0.069	0.80	0.462
0.13	0.075	0.90	0.520
0.14	0.081	1.00	0.577

Tabla 5.4 Valores del coeficiente de fricción para un valor de m dado.

5.2.4 Especificación de las condiciones de frontera

Para aplicar las condiciones de frontera se especificó en cuatro superficies: las bases superior e inferior del anillo, así como la cara A y B especificando también el diámetro interno y el externo, dando a cada superficie sus especificaciones de movimiento lineal y rotacional en cada uno de sus ejes.

Para analizar las condiciones de frontera se puede ver la Figura 5.10. En la cara A del anillo se restringió el movimiento en su dirección perpendicular, es decir en el eje Y, considerando que existe material de la parte del anillo restante, permitiendo el desplazamiento en el eje Z donde está la fuerza de compresión y en el eje X donde ocurre la formación del barril. En la cara B se consideró el mismo concepto de continuidad de material en su eje perpendicular, restringiendo así el eje X, permitiendo

el movimiento en Z y en Y. Para la base inferior se restringió el movimiento en todas las direcciones especificando el llamado empotramiento, donde la base queda completamente fija y para la cara superior se le asigna un movimiento solamente en el eje Z donde ocurrirá la compresión axial, desplazándose en un valor de $-Z$ hasta llegar a la mitad de su altura inicial. El movimiento rotacional se restringió en el anillo ya que es una prueba de compresión axial. En este paso es donde se asigna el valor de fricción.

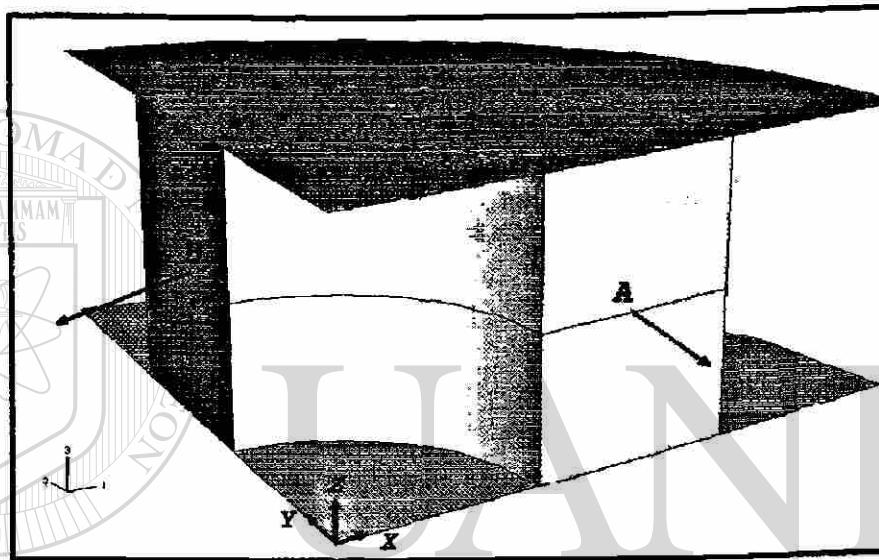


Figura 5.10. Condiciones de frontera para el anillo A) restringida en el eje y, B) restringida en el eje x, la base encastrada y la cara superior con movimiento en $-z$ al 50%.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

5.2.5 Mallado

La parte del anillo fue mallado con elementos en 3D, resultado una cantidad de 11,100 elementos hexaédricos. La base y la parte superior fueron mallados con elementos en 2D, resultando un total de 308 elementos cuadriláteros por cada una de las superficies. Esto se muestra en la Figura 5.11.

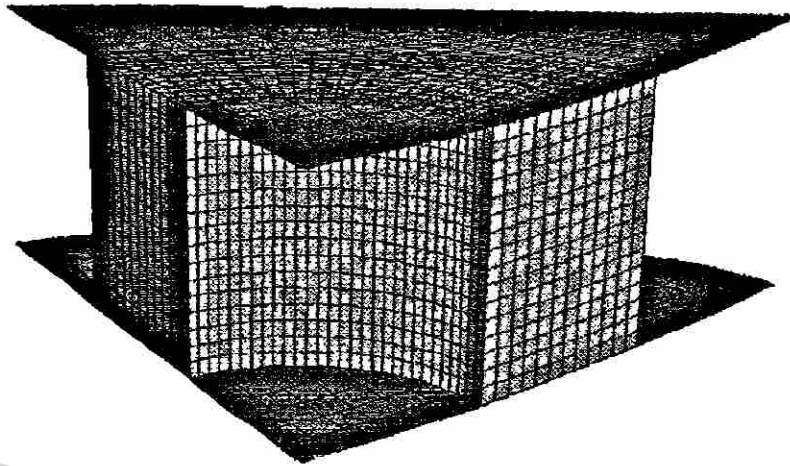


Figura 5.11 Malla hexaédrica del anillo con un total de 11,100 elementos. Mallas cuadriláteras de las superficies con un total de 308 elementos c/u.

5.2.6 Solución del problema

Una vez que se definieron las relaciones constitutivas del sistema, se asigna una tarea al programa especificando si se requiere calcular el modelo como un cálculo explícito o implícito, en este caso se especifica como un problema implícito ya que para resolver este problema este esquema se basa en los valores disponibles del tiempo t y en las cantidades del tiempo $t+\Delta t$, como se explica en el Capítulo 2.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

CAPÍTULO 6

ANÁLISIS Y RESULTADOS

6.1 INTRODUCCIÓN

En este Capítulo se mostrarán las curvas de calibración que se obtuvieron por medio de la relación del cambio en altura y diámetro que muestra cada anillo al ser comprimido en un 50% de su altura original con diferentes factores de fricción cortante interfacial (m), como ya se explicó en el capítulo anterior. También se mostrarán las diferentes opciones de análisis que el paquete ABAQUS proporciona al hacer simulaciones de un problema específico dado.

6.2 ANÁLISIS VISUAL

Después de haber especificado al programa el trabajo a realizar, el paquete resuelve el sistema de ecuaciones especificadas para la simulación del ensayo de compresión y, al mostrar los resultados, ABAQUS puede desplegar una representación visual del comportamiento del material durante todo el proceso de la simulación. En este caso, en el proceso de compresión del anillo, se puede observar desde el 0% hasta un 50% de deformación. Esto se presenta en la Figura 6.1 que muestra la distribución de esfuerzos de Von Mises y la Figura 6.2 que muestra la distribución de deformación de tres anillos durante el ensayo de compresión a diferentes porcentajes de deformación (0%, 10%, 20%, 30%, 40% y 50%) cuando tienen un valor de factor de fricción de $m=0.1$, $m=0.25$ y $m=1$.

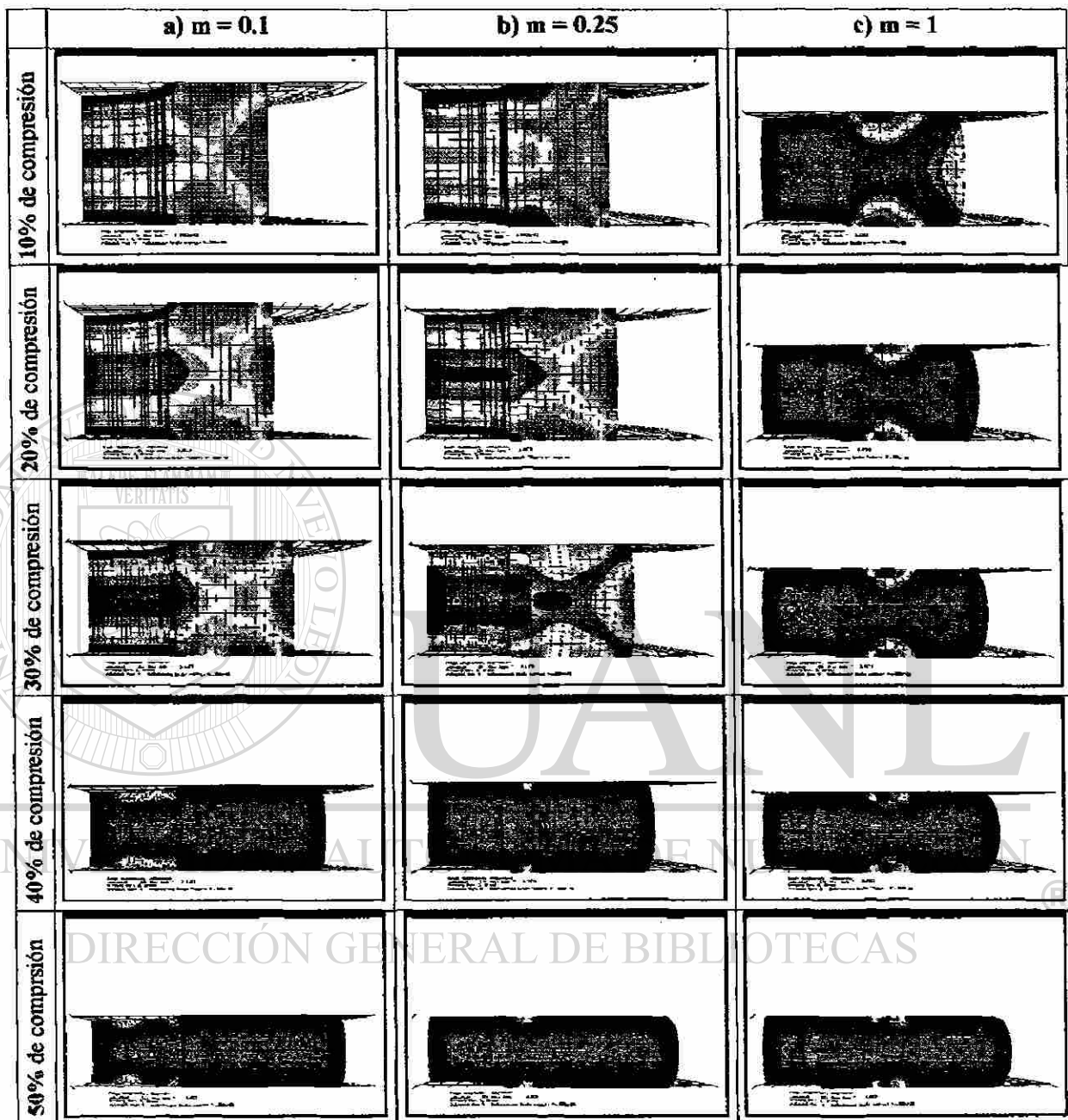


Figura 6.1 Representación de esfuerzos de los anillos en ensayos de compresión a diferentes porcentajes de deformación (0%, 10%, 20%, 30%, 40% y 50%) para un valor de factor de fricción de $m=0.1$, $m=0.25$, y $m=1$.

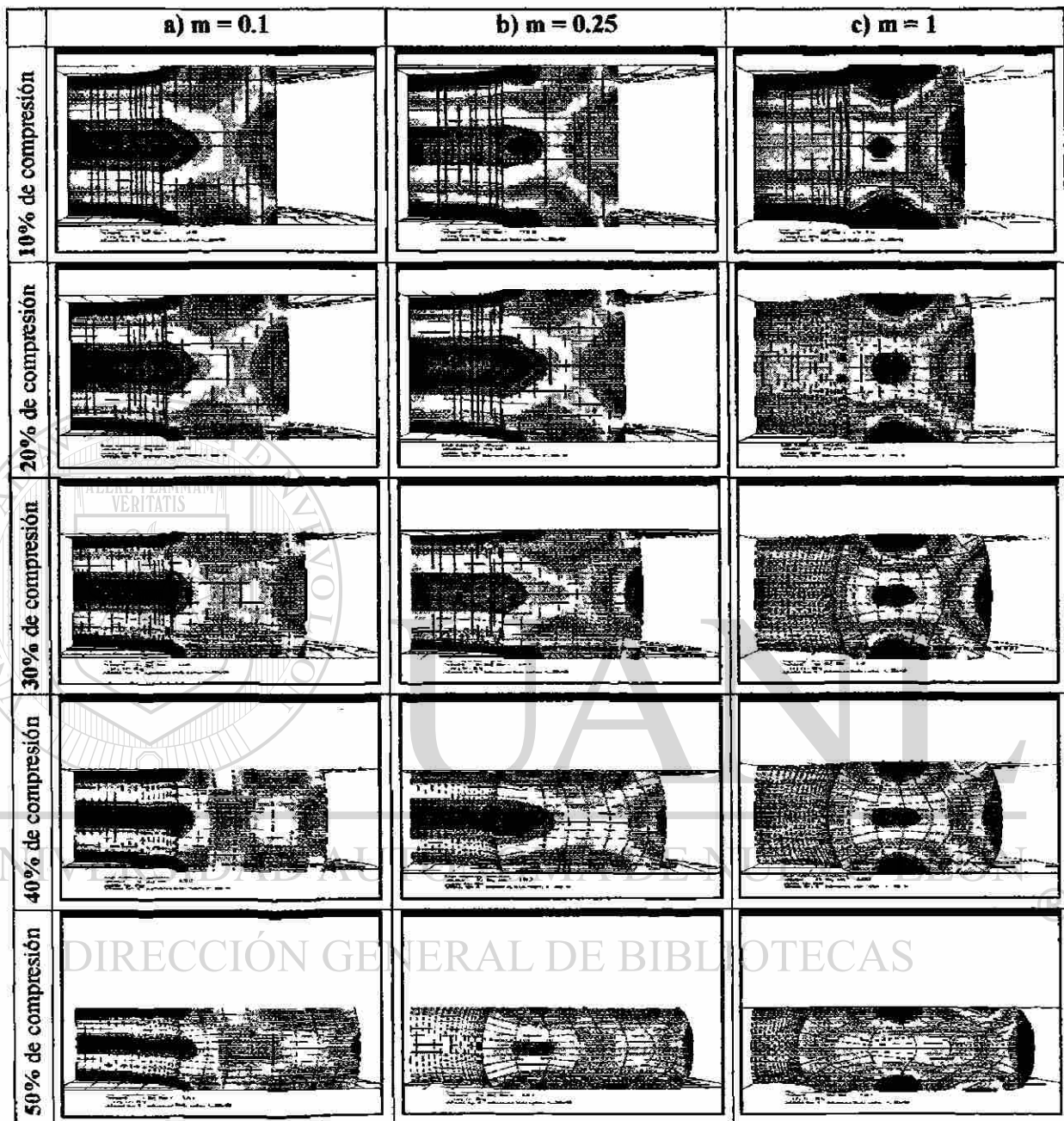


Figura 6.2 Representación de deformaciones de los anillos en ensayos de compresión a diferentes porcentajes de deformación (0%, 10%, 20%, 30%, 40% y 50%) para un valor de factor de fricción de $m=0.1$, $m=0.25$, y $m=1$.

Haciendo una inspección visual del comportamiento del anillo a diferentes factores de fricción m , se puede observar claramente la variación del comportamiento del diámetro interno del anillo a causa del cambio en el coeficiente de fricción o factor de fricción m , mostrando que cuando se tiene una fricción baja el diámetro interno aumenta, pero cuando la fricción es alta el diámetro interno tiende a disminuir.

Al observar los resultados del análisis de distribución de esfuerzos del anillo en la Figura 6.1, el esfuerzo máximo representado en color rojo se concentra en forma de X, al igual que la deformación mostrada en la Figura 6.2. Esto es debido a que el desplazamiento relativo del material es menor en las zonas de contacto a causa de la adhesión entre las superficies en contacto.

También se puede visualizar la posición del radio neutro, ya que se localiza en las zonas de la superficie de contacto con menor esfuerzo en la Figura 6.1 y menor deformación en la Figura 6.2, representado con color azul.

6.3 OBTENCIÓN DE LAS CURVAS DE CALIBRACIÓN

El objetivo principal de este trabajo es encontrar las curvas de calibración a distintos factores de fricción y para esto se prosiguió de la siguiente manera.

Al obtener los resultados de cada anillo, se registró el cambio en radio interno " R_i " y el cambio en altura " H ", como se muestra en la Figura 6.3.

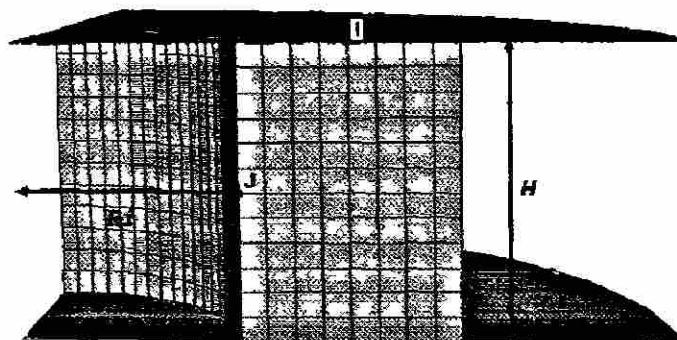


Figura 6.3 Variables de medición R_i y H .

Para la creación de las curvas de calibración se tomó como referencia el nodo J en la medición del desplazamiento del radio interno, y el nodo I para la altura, como se muestra en la Figura 6.3.

Los datos que se obtuvieron de la simulación de elemento finito se muestran en el Anexo II y III, estos datos representan el cambio en desplazamiento del nodo J y del nodo I durante la compresión del anillo. Para calcular los porcentajes del cambio en diámetro interno y el cambio en reducción de espesor, se prosiguió de la siguiente manera:

El porcentaje del cambio en diámetro interno se calcula por medio de la siguiente expresión:

$$\% \Delta D = \frac{D_f - D_i}{D_i} \times 100, \quad (6.1)$$

Donde $\% \Delta D$ es el cambio en porcentaje del diámetro interno, D_f es el diámetro final y D_i es el diámetro inicial. A causa de que el modelo numérico se representó en función de radios, se tiene que:

$$\% \Delta D = \frac{2R_f - 2R_i}{2R_i} \times 100, \quad (6.2)$$

simplificando se tiene;

$$\% \Delta D = \frac{R_f - R_i}{R_i} \times 100, \quad (6.3)$$

sustituyendo el valor del radio inicial, se puede decir que;

$$\% \Delta D = \frac{\Delta R}{0.003} \times 100. \quad (6.4)$$

De la misma manera se calcula el porcentaje del cambio en reducción de espesor H:

$$\% \Delta H = \frac{H_f - H_i}{H_i} \times 100, \quad (6.5)$$

Donde $\% \Delta H$ es el porcentaje de cambio en longitud, H_i es la longitud inicial y H_f la longitud final, sustituyendo el valor de la longitud inicial se tiene:

$$\% \Delta H = \frac{\Delta H}{0.004} \times 100. \quad (6.6)$$

Para correlacionar los porcentajes en cambio de diámetro interno con los porcentajes de cambio en reducción de espesor durante la compresión. El porcentaje de cambio en H hasta un 50% de compresión es graficado en el eje x , y el porcentaje de cambio en el diámetro interno durante la compresión es graficado en el eje y .

Las curvas de calibración para el material A, se muestran en la Figura 6.4, y para el material B en la Figura 6.5. En los Anexos IV y V se tabulan los valores de las curvas de calibración para estos materiales.

La Figura 6.6 compara las curvas que resultaron de los dos materiales. En ella se puede ver que el comportamiento del anillo al ser comprimido es similar en ambos casos.

Curvas de calibración de fricción del material A geometría 6:3:2

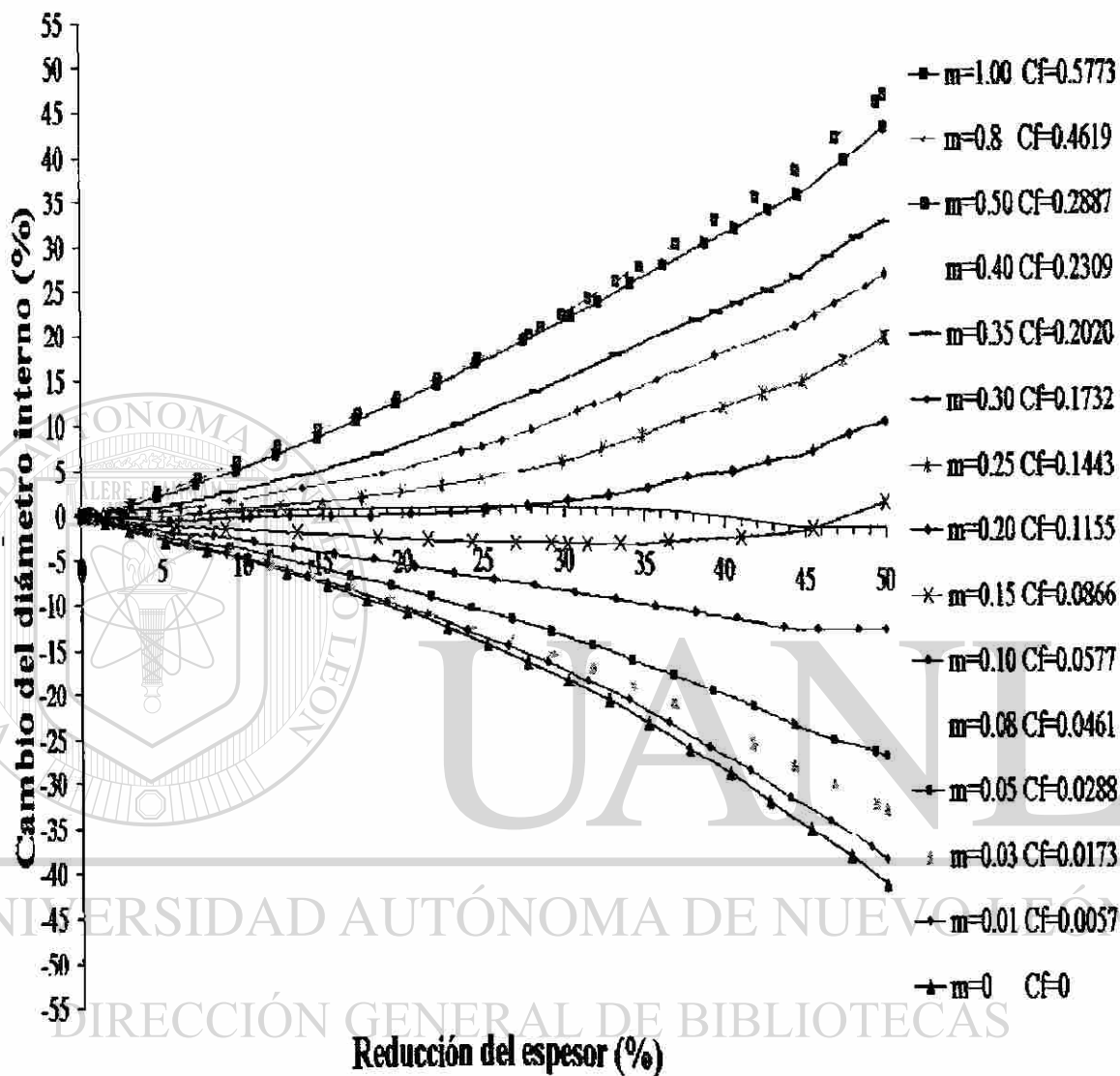


Figura 6.4 Curvas de calibración para el material A

Curvas de calibración de fricción del material B geometría 6:3:2

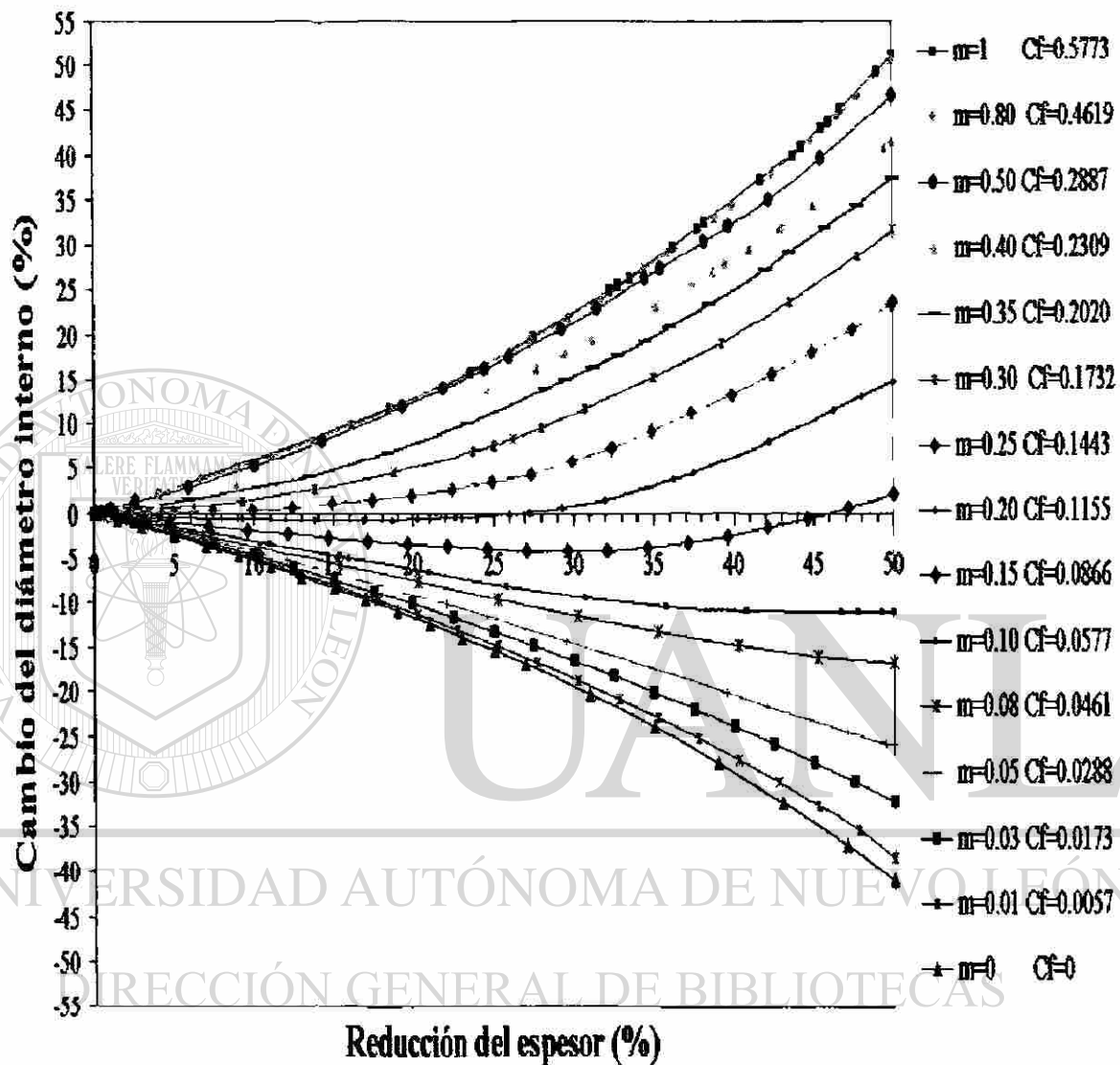


Figura 6.5 Curvas de calibración para el material B.

Curvas de calibración de fricción del material A y B geometría 6:3:2

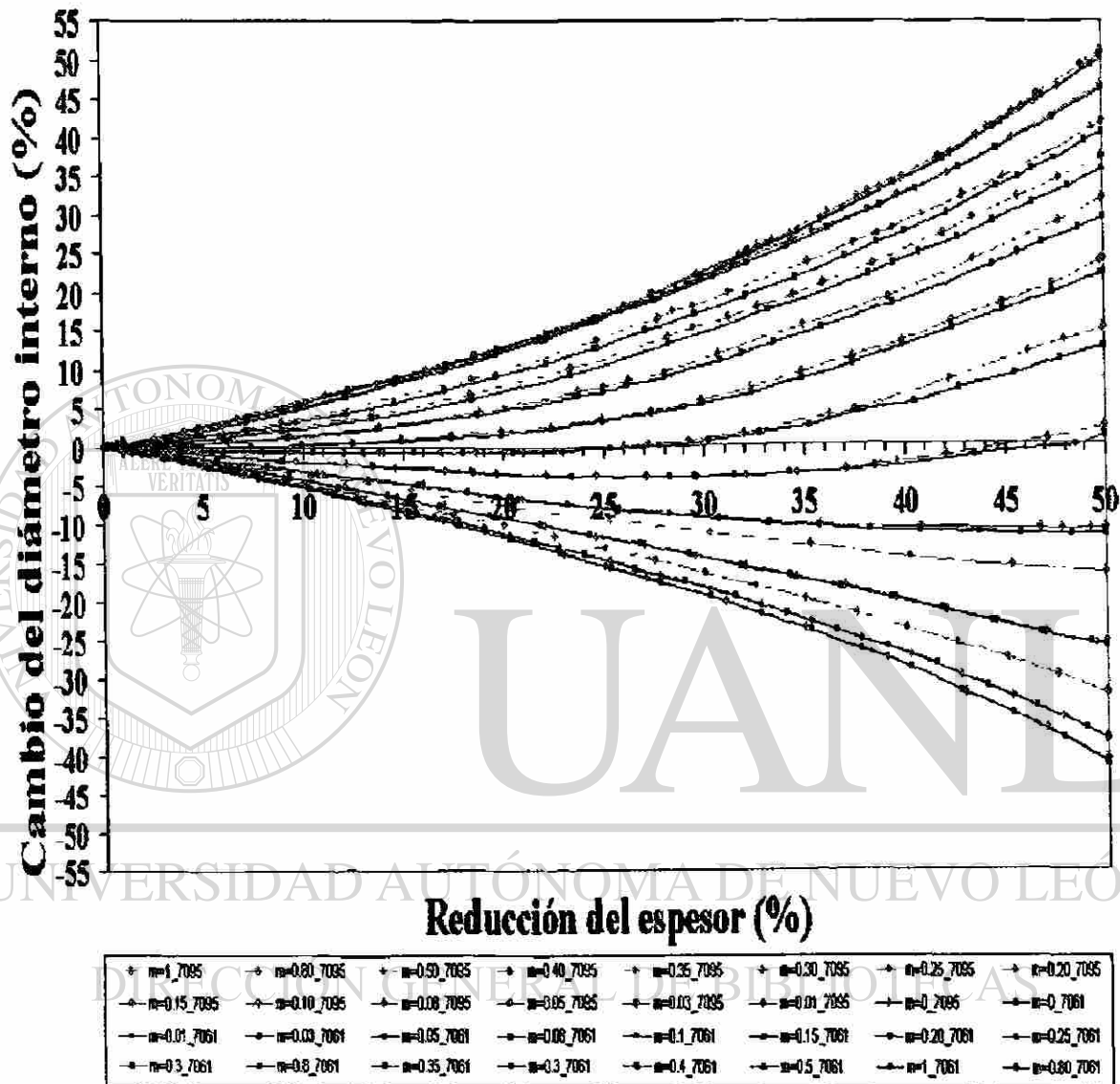


Figura 6.6 Curvas de calibración de los materiales A y B mismo código que en las Figuras 6.4 y 6.5

6.4 ANALISIS NODAL

Como trabajo adicional dentro del pos-procesamiento de la solución de este problema por elementos finitos, se seleccionaron algunos nodos para analizar los máximos esfuerzos en ciertas zonas del anillo, como se va a explicar a continuación.

Como ya se ha visto la concentración de energía en forma de esfuerzos (Figura 6.1) y de deformaciones (Figura 6.2), varía en función del valor del coeficiente m . La distribución de deformación en algunos nodos localizados en las posiciones indicadas como *eje 1* vertical, y *eje 2* horizontal, que se muestra en la Figura 6.7, se estudian de la siguiente manera.

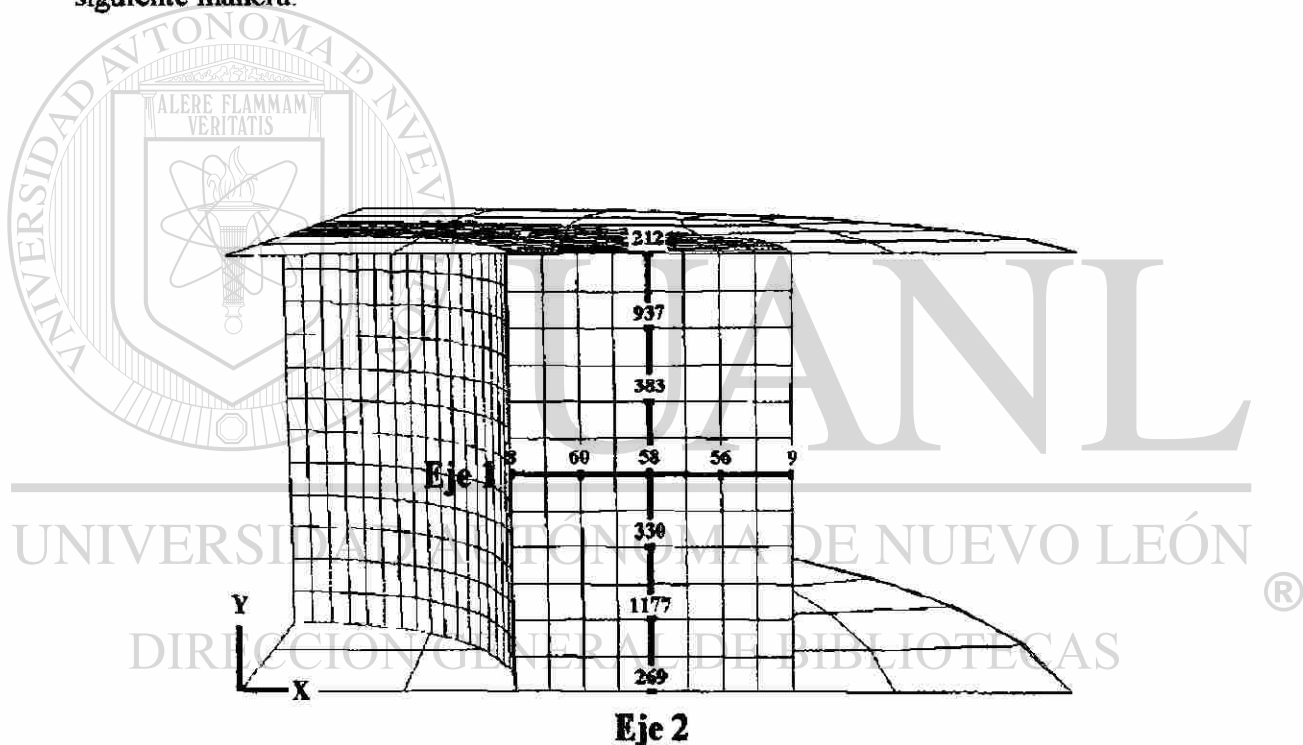


Figura 6.7 Anillo con dos ejes, para seleccionar los nodos numerados para el análisis de deformación.

Los valores de deformación del anillo a diferentes porcentajes de compresión (10%, 20%, 30%, 40% y 50%) se tomaron usando como referencia los nodos 8,60,58,56 y 9 para el eje 1, y los nodos 212,937,383,58,330,1177 y 269 para el

eje 2, como se representa en la Figura 6.7. La numeración de los nodos se tomó de los valores asignados que el programa ABAQUS despliega al seleccionarlos.

Como resultado de este análisis, se graficaron curvas de deformación-desplazamiento de los ejes 1 y 2, en direcciones de x y y . Para observar los cambios en deformación a diferentes valores de m , se graficaron los valores de $m=0.1$, $m=0.25$ y $m=1$

En las Figuras 6.8 a la 6.10 se muestran las deformaciones del eje 1 en dirección x , en las Figuras 6.11 a la 6.13 se muestran las deformaciones del eje 1 en dirección y , en las Figuras 6.14 a la 6.16 se muestran las deformaciones del eje 2 en dirección x , y en las Figuras 6.17 a la 6.19 se muestran las deformaciones del eje 1 en dirección x , todas estas gráficas se analizaron cuando: $m=0.1$, $m=0.25$ y $m=1$

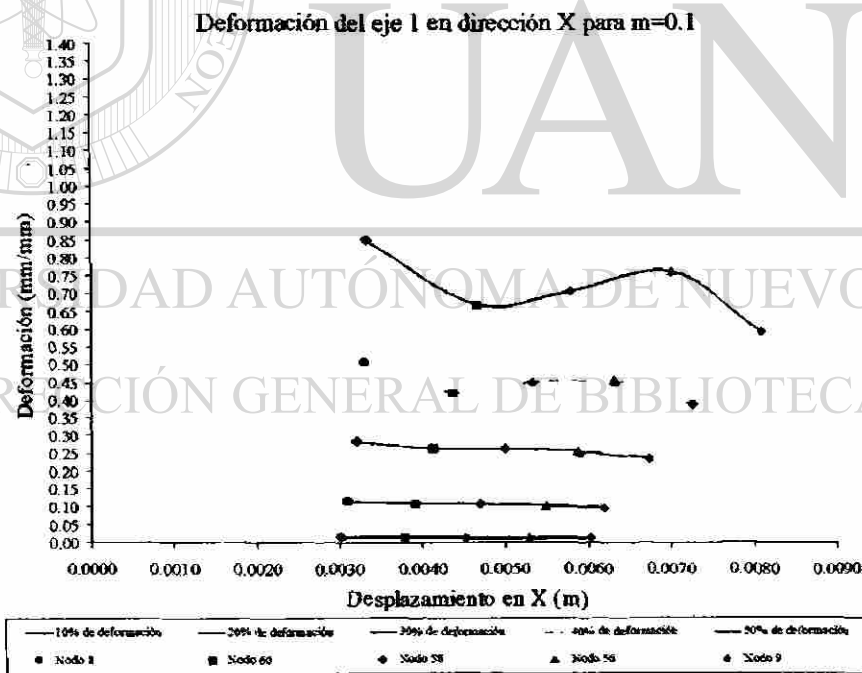


Figura 6.8 Deformación en función del desplazamiento de los nodos del eje 1 en dirección X a diferentes porcentajes de reducción en espesor cuando $m = 0.1$

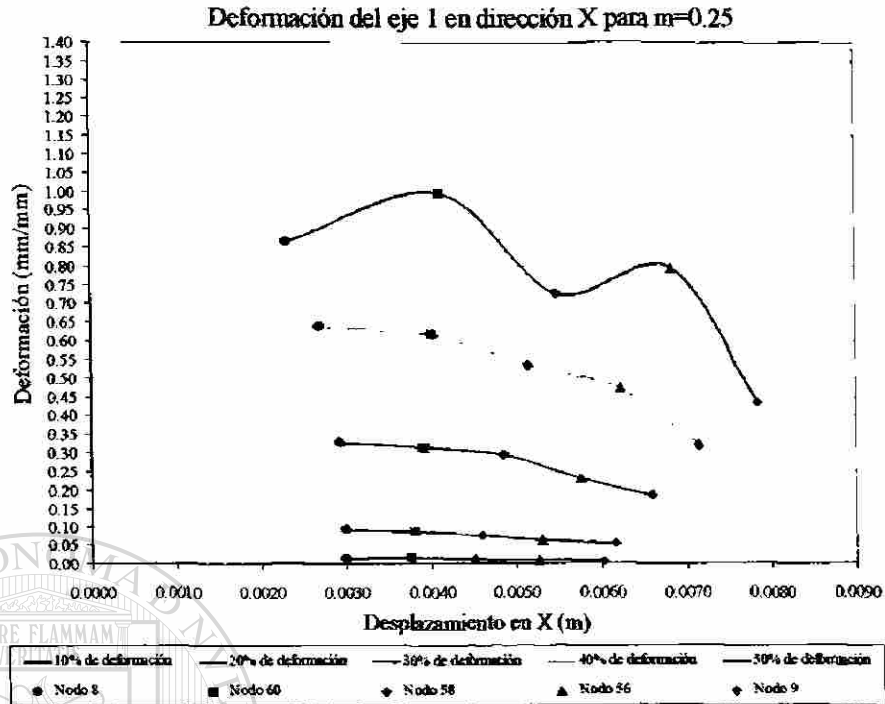


Figura 6.9 Deformación del eje 1 en dirección X para $m=0.25$

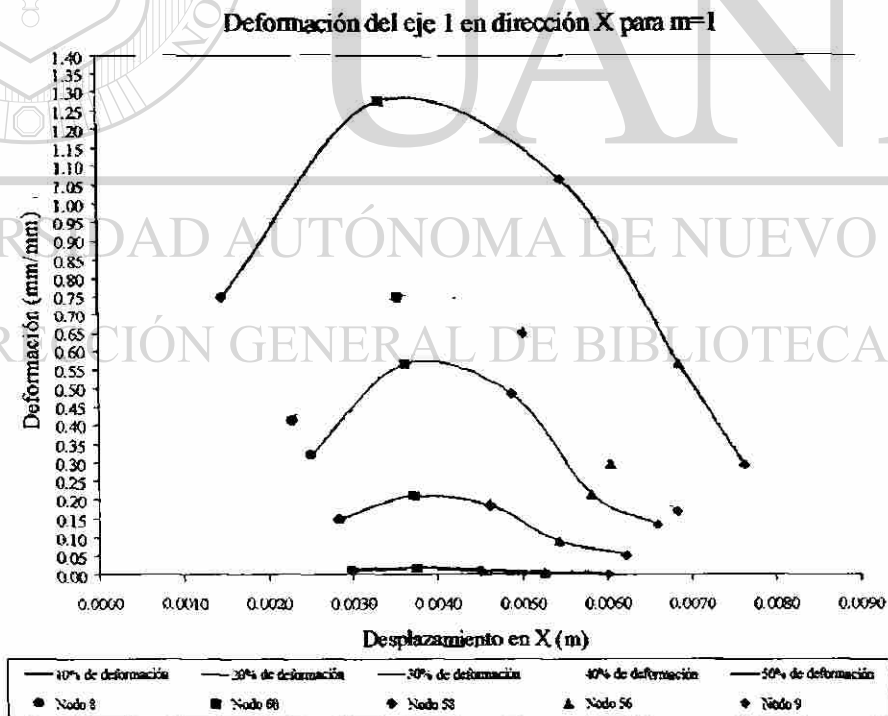


Figura 6.10 Deformación del eje 1 en dirección X para $m=1$

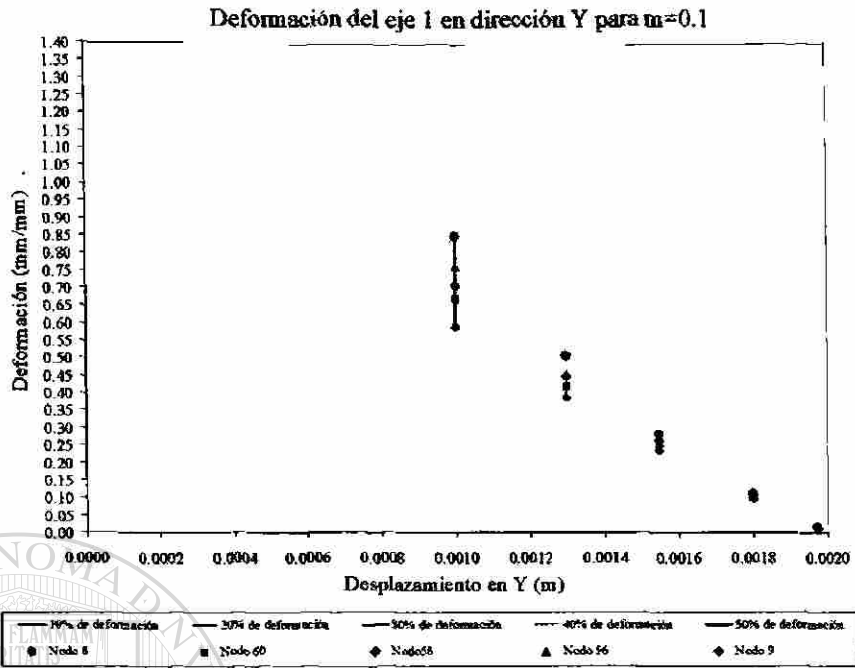


Figura 6.11 Deformación del eje 1 en dirección Y para $m= 0.1$

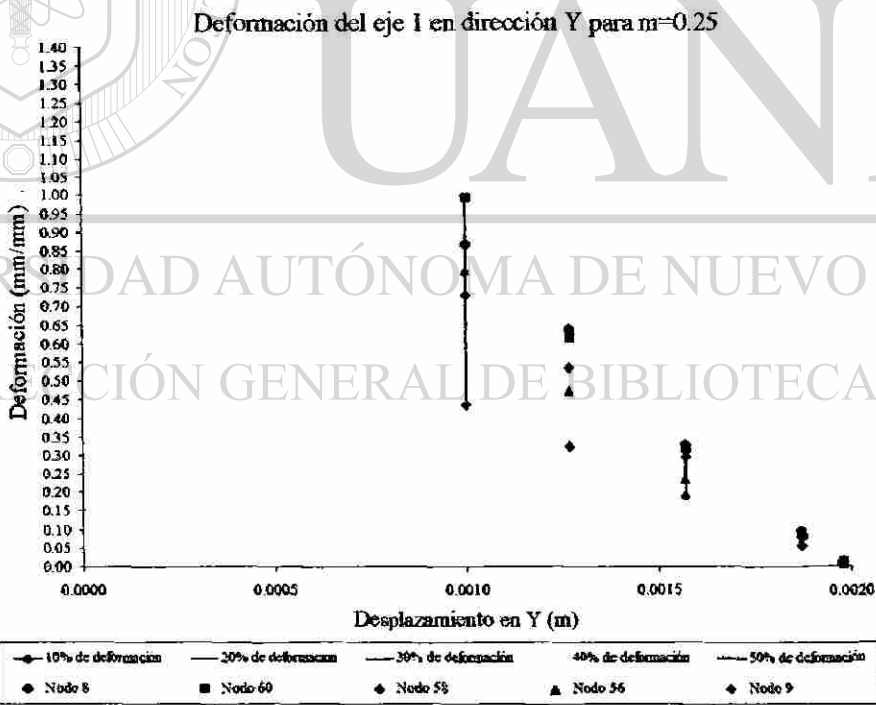


Figura 6.12 Deformación del eje 1 en dirección Y para $m= 0.25$

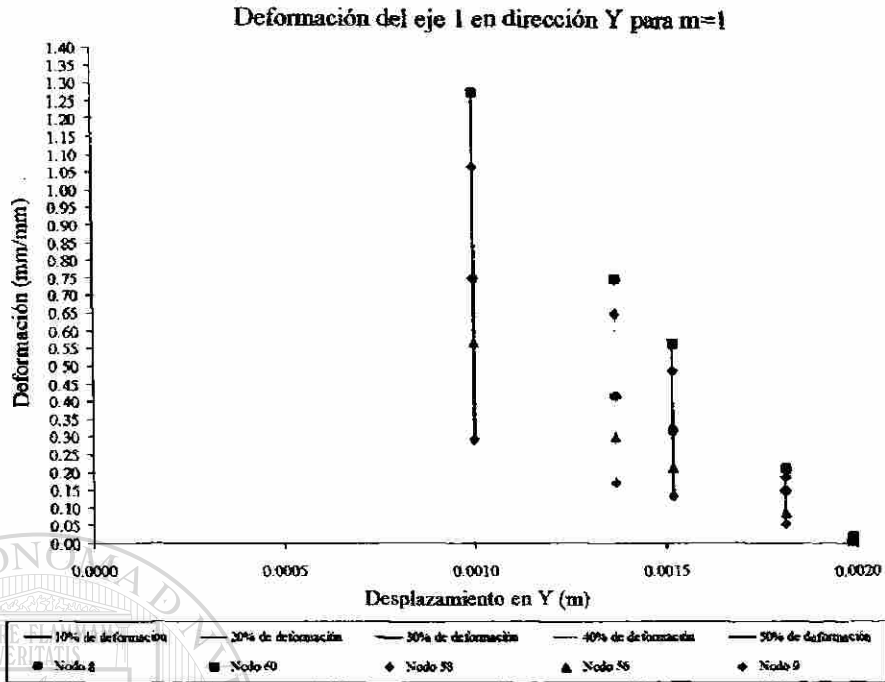


Figura 6.13 Deformación del eje 1 en dirección Y para m= 1

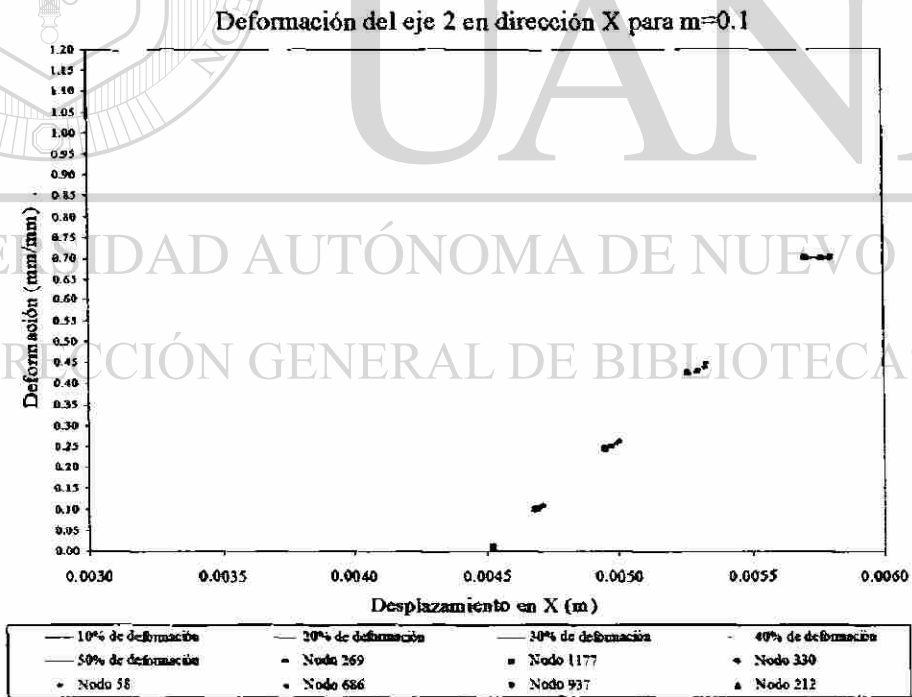


Figura 6.14 Deformación del eje 2 en dirección X para m= 0.1

Deformación del eje 2 en dirección X para $m=0.25$

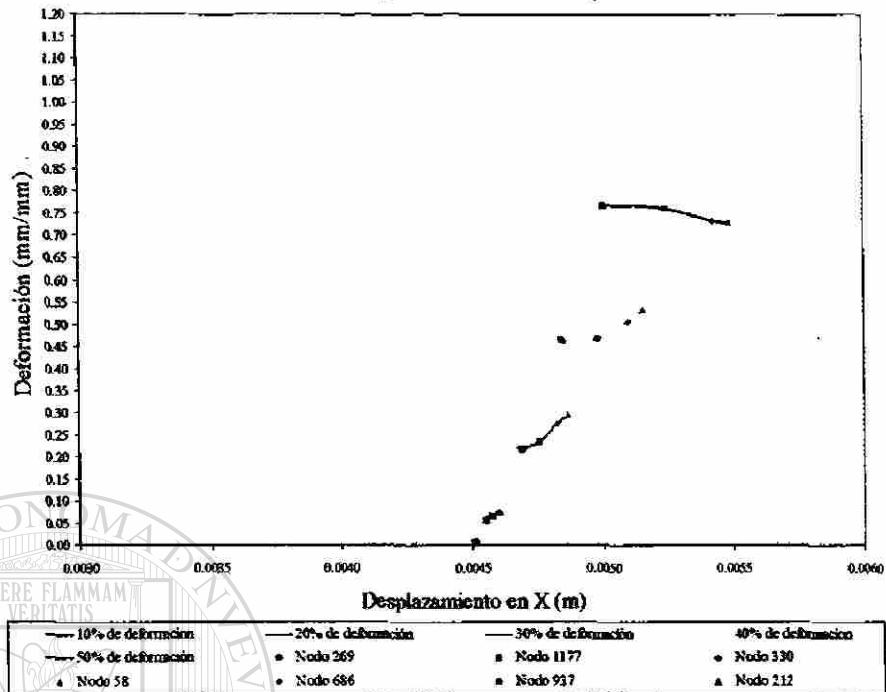


Figura 6.15 Deformación del eje 2 en dirección X para $m= 0.25$

Deformación del eje 2 en dirección X para $m=1$

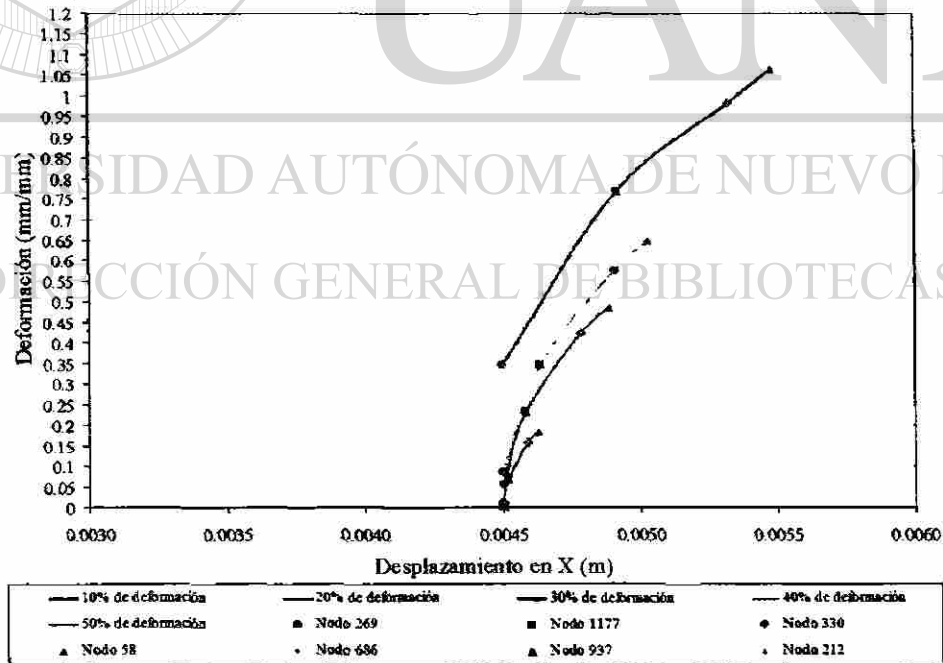
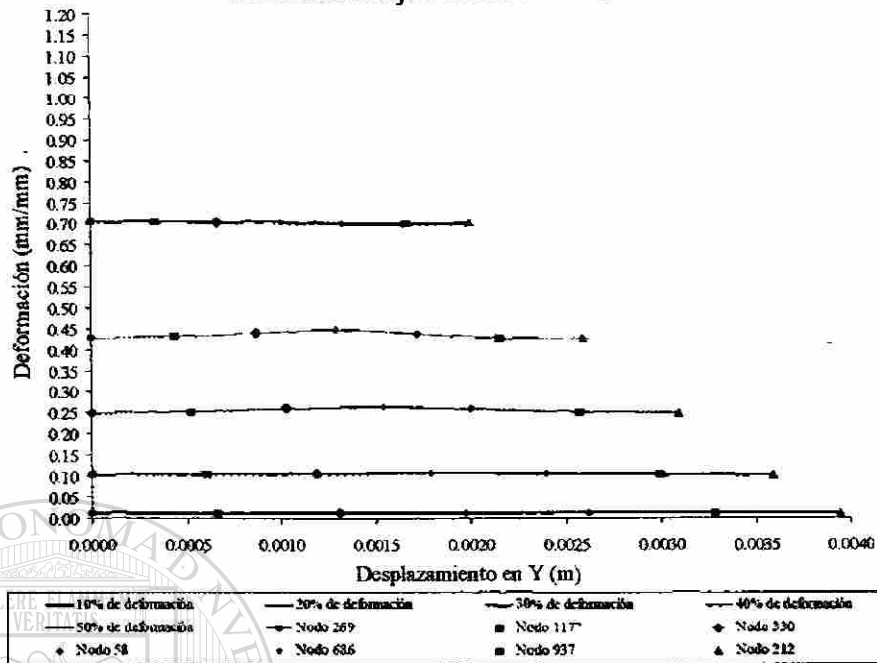
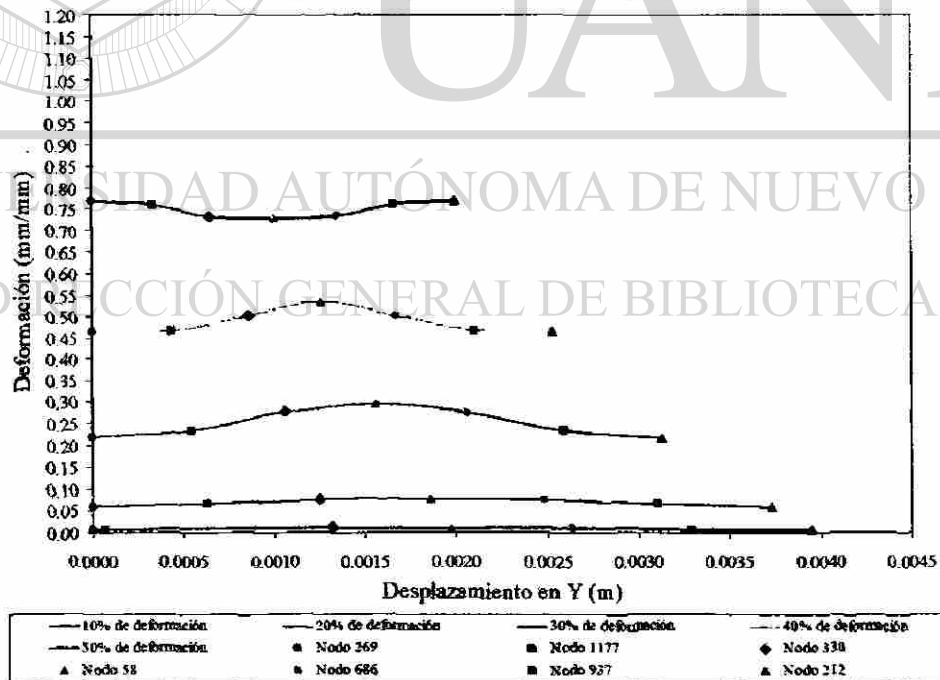


Figura 6.16 Deformación del eje 2 en dirección X para $m=1$

Deformación del eje 2 en dirección Y para $m=0.1$ Figura 6.17 Deformación del eje 2 en dirección Y para $m=0.1$ Deformación del eje 2 en dirección Y para $m=0.25$ Figura 6.18 Deformación del eje 2 en dirección Y para $m=0.25$

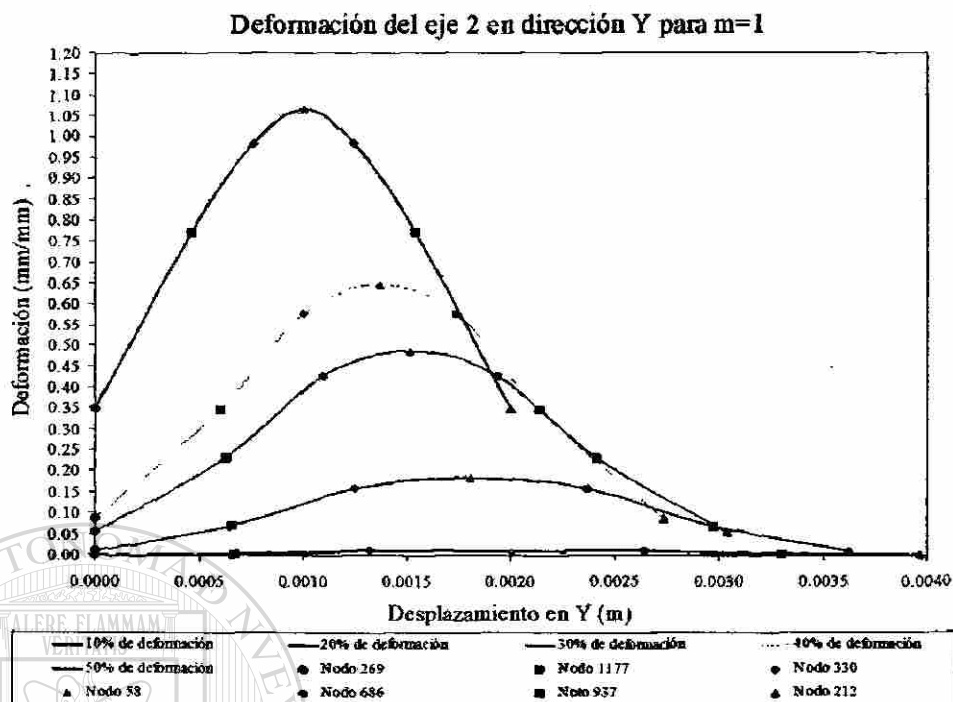


Figura 6.19 Deformación del eje 2 en dirección Y para m=1

6.5 OBTENCIÓN DEL RADIO NEUTRO

Como ya se ha mencionado en el Capítulo 4, es posible calcular la posición del radio neutro, al analizar visualmente el anillo comprimido a un 50% de su estado inicial, es posible observar la posición aproximada del radio neutro dependiendo de su factor de fricción. Para comprobar que la posición del radio neutro mostrada por el programa ABAQUS es aproximada, se ha calculado matemáticamente la posición de éste por las formulas (4.1), (4.2) y (4.3) de la siguiente manera.

Para un valor de $m=0.1$, es decir, cuando $R_n \leq R_i$, la posición del radio neutro (R_n) se determinó con la siguiente formula

$$\left(\frac{R_n}{R_o}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1 - \left(\frac{R_i}{R_o}\right)^4 x^2}{\sqrt{x(x-1) \left[1 - \left(\frac{R_i}{R_o}\right)^4 x\right]}}, \quad (6.1)$$

donde;

$$x = \left\{ \frac{R_o}{R_i} \exp \left[-m \frac{R_o}{H} \left(1 - \frac{R_i}{R_o} \right) \right] \right\}^2. \quad (6.2)$$

R_o = Radio externo

R_i = Radio interno

R_n = Radio neutro

H = Altura

Los valores de R_i , R y H , fueron tomados del Anexo VI, que muestra los datos de desplazamiento de los nodos en dirección de x y y . Para $m=0.1$ a diferentes porcentajes de compresión se muestran los valores en la Tabla 6.1

Deformación (%)	R_i (m)	R (m)	H (m)
10%	0.00301	0.00603	0.00394
20%	0.00309	0.00620	0.00359
30%	0.00321	0.00673	0.00309
40%	0.00331	0.00726	0.00259
50%	0.00334	0.00809	0.002

Tabla 6.1 Valores de R_i , R y H a diferentes porcentajes de compresión para $m=0.1$

Sustituyendo los valores de la Tabla 6.1 en las ecuaciones (6.1) y (6.2), se tiene como resultado la Tabla 6.2

Deformación (%)	X	R_n (mm)
10%	3.9522	0.566
20%	3.9567	0.617
30%	4.2966	0.726
40%	4.6662	0.855
50%	5.5946	1.05

Tabla 6.2 Posición del radio neutro " R_n " a diferentes porcentajes de compresión para $m=0.1$

Para representar la posición del radio neutro en el anillo visualmente, se muestran las figuras 6.20 y 6.21 del anillo comprimido a un 30% y 50% de deformación cuando $m=0.1$.

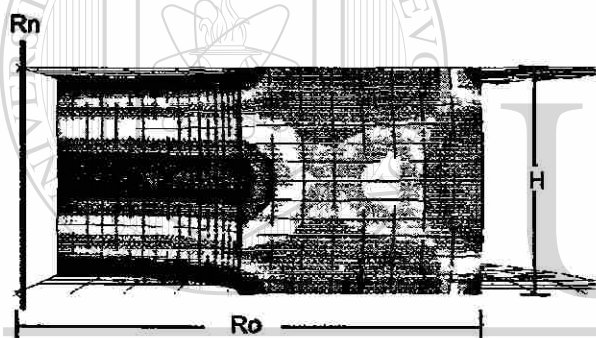


Figura 6.20 Posición del radio neutro a un 30% de compresión para $m=0.1$

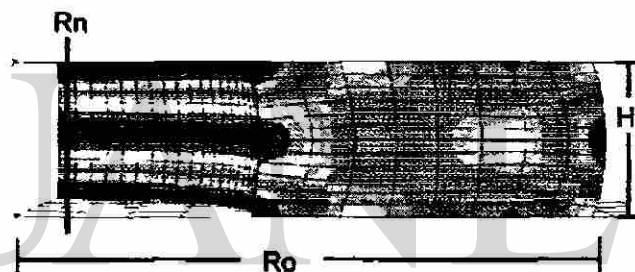


Figura 6.21 Posición del radio neutro a un 50% de compresión para $m=0.1$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Para un valor de $m=0.25$ es decir, cuando $R_i \leq R_n \leq R_o$, la posición del radio neutro se calculó con la ecuación:

$$2m \frac{R_o}{T} \left(1 + \frac{R_i}{R_o} - 2 \frac{R_n}{R_o} \right) + \ln \left(\frac{R_i}{R_o} \right)^2 \frac{\left(\frac{R_n}{R_o} \right)^2 + \sqrt{3 + \left(\frac{R_n}{R_o} \right)^4}}{\left(\frac{R_n}{R_o} \right)^2 + \sqrt{3 \left(\frac{R_i}{R_o} \right)^4 + \left(\frac{R_n}{R_o} \right)^4}} = 0 \quad (6.3)$$

Los valores de R_i , R y H , para $m=0.25$ a diferentes porcentajes de compresión se muestran en la Tabla 6.3.

Deformación (%)	R_i (m)	R (m)	H (m)
10%	0.00299	0.00602	0.00395
20%	0.00299	0.00616	0.00373
30%	0.00292	0.00659	0.00313
40%	0.00269	0.00714	0.00253
50%	0.00231	0.00783	0.002

Tabla 6.3 Valores de R_i , R y H a diferentes porcentajes de compresión para $m=0.25$

Sustituyendo los valores de la Tabla 6.3 en la ecuación 6.3, se tiene como resultado la Tabla 6.4

Deformación (%)	R_n (m)
10%	2.941
20%	3.011
30%	3.175
40%	3.266
50%	3.283

Tabla 6.4 Posición del radio neutro " R_n " a diferentes porcentajes de compresión para $m=0.25$

Para representar la posición del radio neutro en el anillo para $m=0.25$, se muestran las figuras 6.22 y 6.23.

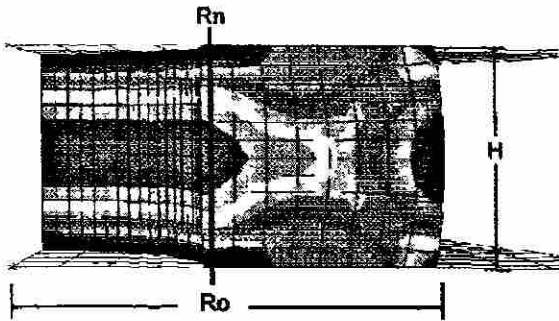


Figura 6.22 Posición del radio neutro a un 30% de compresión para $m=0.25$

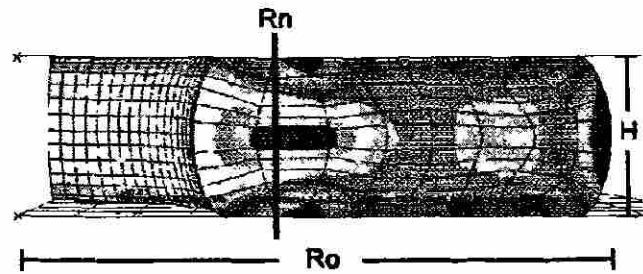


Figura 6.23 Posición del radio neutro a un 50% de compresión para $m=0.25$

Los valores de R_i , R y H , para $m=1$ a diferentes porcentajes de compresión se muestran en la tabla 6.5

Deformación (%)	R_i (m)	R (m)	H (m)
10%	0.00299	0.00601	0.00397
20%	0.00283	0.00622	0.00362
30%	0.00251	0.00661	0.00304
40%	0.00229	0.00684	0.00274
50%	0.00146	0.00763	0.002

Tabla 6.5 Valores de R_i , R y H a diferentes porcentajes de compresión para $m=1$

Sustituyendo los valores de la Tabla 6.5 en la ecuación 6.3, se tiene como resultado la Tabla 6.6

Deformación (%)	R_n (mm)
10%	3.88
20%	3.876
30%	3.85
40%	3.827
50%	3.620

Tabla 6.6 Posición del radio neutro " R_n " a diferentes porcentajes de compresión para $m=1$

Representando la posición del radio neutro en el anillo para $m=1$, se muestran las figuras 6.24 y 6.25.

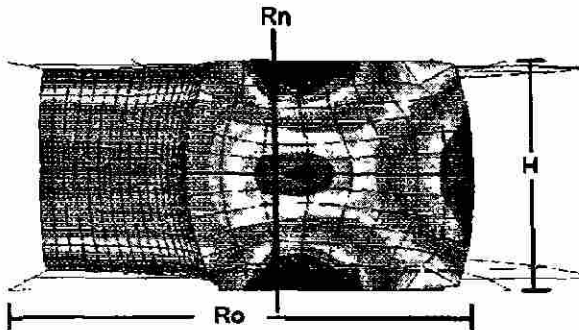


Figura 6.24 Posición del radio neutro a un 30% de compresión para $m=1$

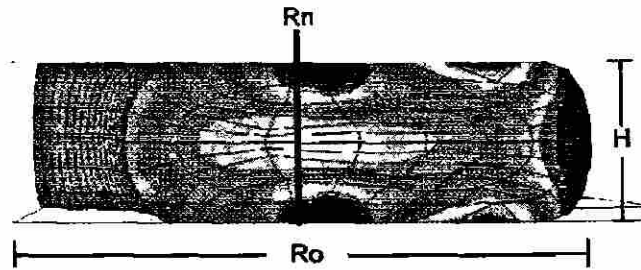


Figura 6.25 Posición del radio neutro a un 50% de compresión para $m=1$

Para analizar la variación del movimiento del radio neutro cuando m cambia, se desplegó una gráfica del porcentaje de compresión contra la posición del radio neutro que se mostró anteriormente en las figuras de los anillos sobre el eje x , y resultó de la manera que se muestra en la figura 6.20.

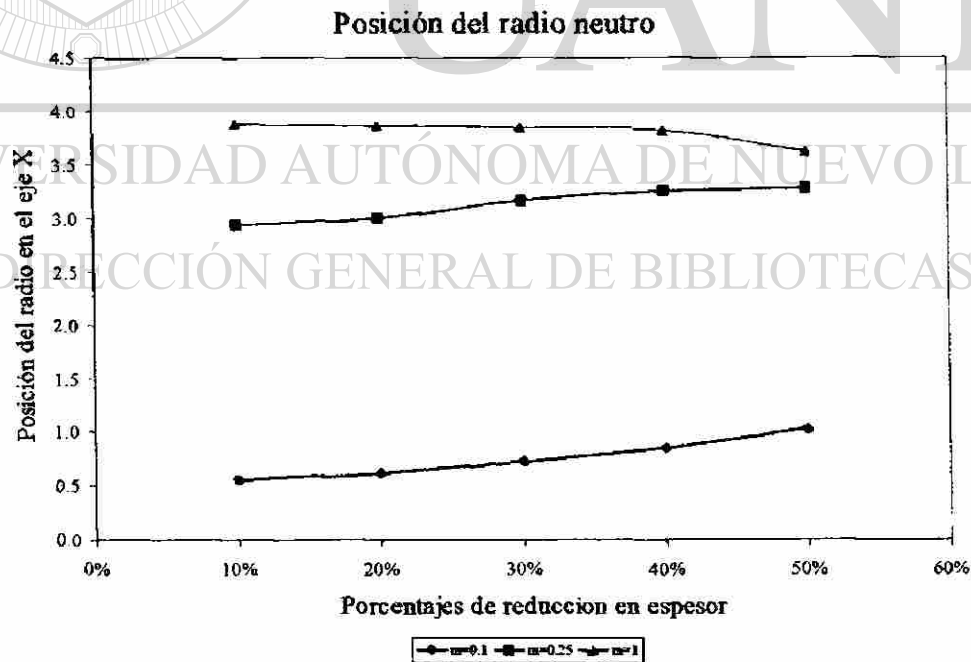


Figura 6.20 Cambio del radio neutro a diferentes porcentajes de compresión, cuando $m=0.1$, $m=0.25$ y $m=1$.

CAPITULO 7

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

7.1 CONCLUSIONES

El método de elementos finitos es una herramienta muy útil al hacer el análisis de los cambios en dimensiones de un anillo al comprimirse, facilitando el análisis detallado del comportamiento del anillo conforme se va comprimiendo a distintos factores de fricción, es por esto que se pudieron determinar las curvas de calibración por medio de este método.

La prueba de compresión de anillos se basa en los cambios de geometría del anillo en compresión, por la simetría que éste presenta, se ha podido simplificar el análisis tomando sólo una cuarta parte de la geometría del anillo, reduciendo el tiempo de cálculo y la complejidad del problema.

El material se consideró isotrópico al hacer el análisis de elemento finito en la simulación, ya que las pruebas mecánicas sobre los materiales analizados fueron realizadas en sus distintas direcciones obteniéndose las mismas propiedades mecánicas, debido a que el material se obtuvo de molinos de laminación en caliente presenta poca anisotropía.

El comportamiento de la fricción durante la compresión de un anillo no depende de las propiedades de los materiales que se analizaron, sino de las condiciones de lubricación. Ya que las curvas de calibración obtenidas fueron las mismas aún y cuando los materiales que se simularon tenían distintas propiedades mecánicas.

La posición del radio neutro varía durante la compresión del anillo dependiendo del valor de factor de fricción dado. Cuando el factor de fricción es alto el radio neutro es mayor que el radio interno y cuando el factor de fricción es pequeño el radio neutro es menor que el radio interno.

7.2 RECOMENDACIONES

Realizar análisis de los anillos a diferentes geometrías en donde se pueda encontrar una relación de dimensiones de diámetros y espesor, en la que se pueda estudiar mejor los valores de factor de fricción desde 0.5 a 1.

También se pueden hacer las pruebas por medio de elemento finito donde la compresión sea mayor para dar mayor información en los datos de las curvas de calibración, tomando en cuenta que se analizó un material dúctil donde no ocurre la fractura durante la compresión del anillo.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

BIBLIOGRAFIA

- [1] P. Crook y H.N. Fermer, ASM Handbook Vol 18: Friction, Lubrication and Wear Technology, ASM, EUA 1992, pp 1-162.
- [2] H. Sofuoglu., H. Gedikli., J. Rasty, Determination of Friction Coefficient by Employing the Ring Compression Test, Journal of Engineering Materials and Technology, EUA, Vol. 123, Julio 2001, pp 338-348.
- [3] E. Rabinowicz, Friction and Wear of Materials, Wiley Interscience, 2^{da} Edición, Nueva York, 1995, pp 1-120, 239-265.
- [4] B. Avitzur, Metal Forming: Processes and Analisis, Mc Graw Hill, Nueva York, 1968, pp 77-150, 436-491.
- [5] E. A. Avallone, T. Baumeister III, Manual Marks, Mc Graw Hill, 9^a Edición, EUA, 1995, pp 3-26.
-
- [6] G. E. Dieter, Mechanical Metalurgy, Mc Graw Hill, 2^{da} Edición, Nueva York, 1976, pp 12-99, 503-615.
- [7] K. H. Huebner, E. A. Thornton, Ted G. Byrom, The Finite Element Method for Engineers, Wiley Interscience, 3^{era} Edición, pp 1-80.
- [8] R. H. Wagoner, J.-L. Chenot, Metal Forming Analysis, Cambridge University Press, RU, 2001, pp 107-112
- [9] Kobayashi Oh Altan, Metal Forming and Finite Element Method, Oxford University Press, EUA, 1989, pp 75-90.

- [10] J.N. Reddy An Introduction to the Finite Element Method, Mc Graw Hill, 2^a Edición, EUA, 1993, pp 3-16.
- [11] K-J Bathe, Finite Element Procedures, Prentice Hall, 1996, EUA, pp 110-120
- [12] C. C Chen, S. I Oh, S.Kobayashi, "Ductile Fracture in axisymmetric Extrusion and Drawing – Parte 1, Deformation Mechanics of Extrusion and Drawing" 1979, ASME, J. Engr. Ind.,USA, Vol 101, pp 23.
- [13] Schreura , P.J.G., Veldpaus, F.E., Brekelmans, An Arbitrary-Eulerian-Lagrangian Finite Element Model for the Simulation of Geometrical Non-Linear Hyper-Elastic and Elasto-Plastic Deformation Processes, in "Numerical Method in Industrial Forming Process" 1982, J.F.T. Pittman, Pineridge Press, Swansea, RU, pp 491.
- [14] F.B. Hildebrand, Methods of Applied Mathematics, Prentice Hall, Englewood Cliffs, USA, 1965, pp 63-87.
- [15] Herbert Goldstein, Classical Mechanics, Addison-Wesley Publishing Company, 5^a Edición, Massachusetts, EUA, 1950.
- [16] Tomás N. Martínez Pérez, Tesis, El Método del Elemento Finito Aplicado en la Solución de Problemas de Mecánica de Materiales en una Dimensión, FIME-UANL, San Nicolás de los Garza, N.L. 1998. pp 1-30.
- [17] ABAQUS Theory Manual Versión 6.2, distribuido por Hibbitt, Karlsson & Sopesen, Inc. EUA, 1997.
- [18] E. Domínguez Gámez, Tesis, Obtención del coeficiente de fricción mediante pruebas mecánicas, FIME-UANL, San Nicolás de los Garza, N.L. 2003.
- [19] D. Burnett, Finite element analysis, Addison Wesley, Massachusetts, EUA, 1988. pp 3-127.

ANEXO I

PRUEBAS DE COMPRESION DE ANILLOS A 5 MM/MIN

Tabla I.1 Datos de los resultados de las pruebas de compresión a 5 mm/min.

Curvas esfuerzo contra deformación de las pruebas de compresión a 5mm/min									
Probeta 6x		Probeta 19y		Probeta 12z		Probeta 12y		Probeta 21z	
ϵ (mm/mm)	σ (MPa)	ϵ (mm/mm)	σ (MPa)	ϵ (mm/mm)	σ (MPa)	ϵ (mm/mm)	σ (MPa)	ϵ (mm/mm)	σ (MPa)
0.000	0.00	0.000	0.00	0.000	0.00	0.000	0.00	0.000	0.00
0.005	56.73	0.004	56.18	0.004	59.13	0.004	61.21	0.004	59.59
0.009	118.72	0.009	100.41	0.008	148.29	0.009	146.24	0.009	144.33
0.015	226.28	0.015	179.63	0.015	262.77	0.015	258.28	0.015	261.83
0.031	293.85	0.031	307.02	0.031	298.72	0.031	314.16	0.031	320.37
0.040	318.10	0.041	332.91	0.040	317.39	0.041	334.66	0.040	335.24
0.061	355.06	0.062	378.99	0.061	358.27	0.062	374.66	0.061	373.42
0.077	375.01	0.077	397.96	0.076	377.52	0.077	392.20	0.076	394.84
0.097	395.16	0.101	424.65	0.096	396.39	0.097	418.57	0.096	421.06
0.123	419.53	0.128	448.57	0.122	415.81	0.124	440.64	0.122	437.80
0.146	433.84	0.150	464.13	0.145	426.20	0.147	456.39	0.145	457.70
0.155	438.58	0.160	469.00	0.154	434.47	0.156	460.78	0.154	462.04
0.198	460.08	0.203	486.69	0.196	452.94	0.199	481.20	0.197	480.34
0.207	464.07	0.213	492.67	0.206	457.68	0.209	488.76	0.206	486.85
0.227	471.66	0.233	502.82	0.225	461.16	0.229	497.72	0.226	491.94
0.237	476.21	0.243	506.82	0.236	467.68	0.239	500.60	0.236	500.25
0.247	481.54	0.253	512.63	0.246	472.65	0.249	505.19	0.246	501.91
0.268	487.25	0.274	517.21	0.266	478.05	0.270	510.33	0.266	511.57
0.289	496.23	0.295	522.02	0.287	481.11	0.291	519.85	0.287	515.30
0.300	501.39	0.306	526.03	0.297	483.42	0.301	522.47	0.298	518.62
0.343	509.76	0.350	539.50	0.342	497.86	0.345	532.27	0.341	529.31
0.378	519.03	0.385	543.11	0.375	504.09	0.380	542.51	0.375	537.30
0.413	524.52	0.421	549.90	0.410	506.90	0.416	548.48	0.410	541.25
0.462	533.39	0.470	554.22	0.459	514.69	0.465	555.19	0.459	548.30
0.527	539.86	0.536	559.37	0.523	519.99	0.531	560.09	0.523	551.86
0.611	549.00	0.622	566.84	0.607	529.37	0.616	568.35	0.607	559.80
0.626	549.00	0.632	567.79	0.622	528.61	0.630	569.11	0.621	561.16

PRUEBAS DE COMPRESION DE ANILLOS A 50 MM/MIN

Tabla L2 Datos de los resultados de las pruebas de compresión a 50 mm/min.

Curvas esfuerzo contra deformación de las pruebas de compresión a 50mm/min									
Probeta 23x		Probeta 16y		Probeta 10z		Probeta 18z		Probeta 8z	
ϵ (mm/mm)	σ (MPa)	ϵ (mm/mm)	σ (MPa)	ϵ (mm/mm)	σ (MPa)	ϵ (mm/mm)	σ (MPa)	ϵ (mm/mm)	σ (MPa)
0.000	0.00	0.000	0.00	0.000	0.00	0.000	0.00	0.000	0.00
0.004	63.46	0.004	52.36	0.006	99.02	0.004	60.57	0.008	142.37
0.007	113.20	0.008	84.04	0.009	158.90	0.007	114.22	0.011	202.68
0.011	168.15	0.011	114.60	0.012	222.94	0.010	174.31	0.014	263.99
0.017	278.83	0.018	181.50	0.019	331.61	0.016	283.42	0.022	327.42
0.021	318.98	0.021	231.15	0.023	300.62	0.021	293.24	0.025	328.53
0.029	309.12	0.028	313.77	0.030	319.18	0.028	305.47	0.032	343.33
0.032	317.83	0.031	327.93	0.034	330.09	0.032	313.63	0.036	351.62
0.036	324.85	0.036	327.41	0.037	337.78	0.036	322.01	0.040	360.00
0.044	341.46	0.043	348.02	0.045	352.70	0.043	336.38	0.051	380.65
0.055	360.66	0.055	373.78	0.056	373.09	0.051	349.82	0.059	394.43
0.066	379.01	0.066	393.88	0.067	389.27	0.062	368.97	0.074	414.88
0.070	383.20	0.070	399.63	0.071	394.76	0.066	374.06	0.078	420.08
0.078	392.31	0.078	411.22	0.078	403.54	0.070	379.99	0.081	424.25
0.085	401.14	0.085	419.61	0.086	412.77	0.078	390.90	0.093	436.37
0.097	413.29	0.097	432.21	0.098	423.58	0.089	402.79	0.109	450.60
0.101	415.39	0.101	435.85	0.101	427.11	0.109	421.72	0.113	454.44
0.161	453.87	0.129	459.74	0.145	456.00	0.150	448.60	0.152	480.93
0.203	470.03	0.170	484.28	0.186	474.83	0.192	466.72	0.194	501.33
0.247	484.24	0.213	503.71	0.228	489.32	0.236	481.53	0.237	518.01
0.270	489.02	0.235	511.57	0.250	495.38	0.259	488.08	0.259	525.03
0.317	496.89	0.280	527.08	0.296	506.39	0.306	498.31	0.329	541.39
0.391	505.13	0.352	543.96	0.368	517.18	0.355	506.38	0.379	549.46
0.444	506.96	0.403	551.51	0.419	524.05	0.407	511.82	0.430	555.54
0.559	514.06	0.513	562.46	0.530	533.50	0.461	516.66	0.485	560.01
0.589	515.23	0.543	563.75	0.560	535.55	0.490	518.81	0.514	562.63
0.653	518.86	0.603	567.48	0.621	539.20	0.549	521.38	0.573	566.68
0.700	521.55	0.666	570.81	0.685	542.11	0.612	524.53	0.634	570.15
0.700	521.55	0.699	571.91	0.698	543.11	0.677	527.16	0.697	573.15

PRUEBAS DE COMPRESION DE ANILLOS A 500 MM/MIN

Tabla L3 Datos de los resultados de las pruebas de compresión a 500 mm/min.

Curvas esfuerzo contra deformación de las pruebas de compresión a 500mm/min									
Probeta 20x		Probeta 17y		Probeta 18y		Probeta 14z		Probeta 11z	
ϵ (mm/mm)	σ (MPa)	ϵ (mm/mm)	σ (MPa)	ϵ (mm/mm)	σ (MPa)	ϵ (mm/mm)	σ (MPa)	ϵ (mm/mm)	σ (MPa)
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.002	23.053	0.016	231.475	0.015	207.307	0.013	250.166	0.000	5.048
0.021	344.289	0.041	373.489	0.040	345.285	0.038	372.560	0.016	299.401
0.046	391.623	0.064	416.289	0.062	387.035	0.061	413.220	0.040	380.643
0.070	427.777	0.088	445.504	0.086	421.034	0.085	441.908	0.063	419.952
0.094	451.573	0.113	467.287	0.111	446.193	0.109	465.080	0.087	449.351
0.119	469.076	0.138	485.900	0.136	465.906	0.135	483.134	0.112	471.943
0.145	484.303	0.164	500.895	0.162	482.247	0.160	497.641	0.137	490.112
0.171	496.803	0.192	513.612	0.189	495.817	0.187	510.923	0.163	504.196
0.197	507.474	0.219	524.152	0.216	505.315	0.214	520.631	0.190	515.823
0.225	517.435	0.247	533.274	0.245	513.646	0.242	528.852	0.216	525.693
0.253	526.194	0.276	540.867	0.274	518.777	0.270	536.012	0.244	532.676
0.282	534.156	0.306	546.433	0.303	522.670	0.299	540.619	0.273	538.167
0.311	540.683	0.337	550.523	0.334	526.338	0.330	544.438	0.302	541.989
0.342	546.118	0.368	553.777	0.365	527.860	0.361	547.185	0.332	544.720
0.374	550.245	0.401	555.392	0.397	529.498	0.392	549.101	0.363	546.274
0.406	553.729	0.435	556.491	0.431	530.167	0.426	550.331	0.395	547.074
0.440	556.341	0.469	557.489	0.465	530.288	0.460	550.773	0.428	546.890
0.474	558.093	0.505	558.054	0.501	531.058	0.495	551.950	0.463	547.073
0.509	560.052	0.542	558.941	0.537	531.393	0.531	552.635	0.498	546.626
0.546	561.613	0.578	560.270	0.575	532.353	0.567	553.515	0.534	546.646
0.583	563.327	0.617	561.574	0.614	533.567	0.606	554.517	0.571	546.672
0.621	564.765	0.654	562.557	0.654	534.486	0.643	555.178	0.610	546.903
0.658	565.982	0.690	563.908	0.694	536.072	0.681	556.054	0.648	547.479

ANEXO II

RESULTADOS DEL MATERIAL A POR MEF

Datos arrojados por el análisis de elemento finito mostrando cambio en desplazamiento de los nodos J y I representados como ΔR y ΔH .

Tabla II.1 Datos del material A de ΔR y ΔH para $m=0$, $m=0.01$ y $m=0.03$.

m=0 CF=0		m=0.01 CF=0.0057		m=0.03 CF=0.0173	
ΔR	ΔH	ΔR	ΔH	ΔR	ΔH
0	0	0	0	0	0
2.17E-05	-6.00E-05	2.83E-05	-8.00E-05	4.01E-05	-1.20E-04
4.48E-05	-1.20E-04	5.84E-05	-1.60E-04	6.12E-05	-1.60E-04
8.08E-05	-2.10E-04	9.74E-05	-2.60E-04	9.37E-05	-2.70E-04
1.22E-04	-3.10E-04	1.38E-04	-3.60E-04	1.31E-04	-3.70E-04
1.65E-04	-4.10E-04	1.80E-04	-4.60E-04	1.70E-04	-4.70E-04
2.10E-04	-5.10E-04	2.24E-04	-5.60E-04	2.09E-04	-5.70E-04
2.57E-04	-6.10E-04	2.69E-04	-6.60E-04	2.51E-04	-6.70E-04
3.06E-04	-7.10E-04	3.17E-04	-7.60E-04	2.94E-04	-7.70E-04
3.57E-04	-8.10E-04	3.67E-04	-8.60E-04	3.38E-04	-8.70E-04
4.11E-04	-9.10E-04	4.19E-04	-9.60E-04	3.84E-04	-9.70E-04
4.67E-04	-1.01E-03	4.74E-04	-1.06E-03	4.32E-04	-1.07E-03
5.27E-04	-1.11E-03	5.31E-04	-1.16E-03	4.82E-04	-1.17E-03
5.90E-04	-1.21E-03	5.91E-04	-1.26E-03	5.33E-04	-1.27E-03
6.56E-04	-1.31E-03	6.54E-04	-1.36E-03	5.87E-04	-1.37E-03
7.26E-04	-1.41E-03	7.21E-04	-1.46E-03	6.42E-04	-1.47E-03
8.00E-04	-1.51E-03	7.91E-04	-1.56E-03	7.00E-04	-1.57E-03
8.78E-04	-1.61E-03	8.65E-04	-1.66E-03	7.59E-04	-1.67E-03
9.62E-04	-1.71E-03	9.43E-04	-1.76E-03	8.21E-04	-1.77E-03
1.05E-03	-1.81E-03	1.02E-03	-1.86E-03	8.85E-04	-1.87E-03
1.14E-03	-1.91E-03	1.11E-03	-1.96E-03	9.51E-04	-1.97E-03
1.24E-03	-2.00E-03	1.15E-03	-2.00E-03	9.72E-04	-2.00E-03

Tabla II.2 Datos del material A de ΔR y ΔH para $m=0.05$, $m=0.08$ y $m=0.1$.

$m=0.05$ $Cf=0.028$		$m=0.08$ $Cf=0.0461$		$m=0.08$ $Cf=0.0461$	
ΔR	ΔH	ΔR	ΔH	ΔR	ΔH
0	0	0	0	0	0
1.78E-05	-6.00E-05	7.09E-06	-3.00E-05	1.53E-05	-6.75E-05
3.68E-05	-1.20E-04	1.73E-05	-6.75E-05	2.36E-05	-1.01E-04
5.62E-05	-1.80E-04	4.05E-05	-1.52E-04	3.59E-05	-1.52E-04
8.59E-05	-2.70E-04	6.16E-05	-2.28E-04	5.44E-05	-2.28E-04
1.20E-04	-3.70E-04	8.98E-05	-3.28E-04	7.89E-05	-3.28E-04
1.54E-04	-4.70E-04	1.18E-04	-4.28E-04	1.04E-04	-4.28E-04
1.90E-04	-5.70E-04	1.47E-04	-5.28E-04	1.28E-04	-5.28E-04
2.27E-04	-6.70E-04	1.77E-04	-6.28E-04	1.53E-04	-6.28E-04
2.65E-04	-7.70E-04	2.06E-04	-7.28E-04	1.77E-04	-7.28E-04
3.03E-04	-8.70E-04	2.36E-04	-8.28E-04	2.01E-04	-8.28E-04
3.43E-04	-9.70E-04	2.66E-04	-9.28E-04	2.25E-04	-9.28E-04
3.84E-04	-1.07E-03	2.96E-04	-1.03E-03	2.48E-04	-1.03E-03
4.26E-04	-1.17E-03	3.26E-04	-1.13E-03	2.70E-04	-1.13E-03
4.68E-04	-1.27E-03	3.55E-04	-1.23E-03	2.90E-04	-1.23E-03
5.12E-04	-1.37E-03	3.84E-04	-1.33E-03	3.08E-04	-1.33E-03
5.56E-04	-1.47E-03	4.11E-04	-1.43E-03	3.24E-04	-1.43E-03
6.00E-04	-1.57E-03	4.36E-04	-1.53E-03	3.36E-04	-1.53E-03
6.45E-04	-1.67E-03	4.59E-04	-1.63E-03	3.45E-04	-1.63E-03
6.90E-04	-1.77E-03	4.80E-04	-1.73E-03	3.52E-04	-1.75E-03
7.34E-04	-1.87E-03	4.98E-04	-1.83E-03	3.56E-04	-1.83E-03
7.78E-04	-1.97E-03	5.12E-04	-1.93E-03	3.57E-04	-1.93E-03
7.92E-04	-2.00E-03	5.21E-04	-2.00E-03	3.55E-04	-2.00E-03

Tabla II.3 Datos del material A de ΔR y ΔH para $m=0.15$, $m=0.2$ y $m=0.25$.

$m=0.15$ $Cf=0.0886$		$m=0.20$ $Cf=0.1155$		$m=0.25$ $Cf=0.1443$	
ΔR	ΔH	ΔR	ΔH	ΔR	ΔH
0.00E+00	0	0	0.00E+00	0	0
4.32E-07	3.12E-06	8.12E-08	1.25E-05	-9.74E-07	-2.44E-05
5.21E-07	6.25E-06	2.89E-06	4.84E-05	-2.25E-07	-6.45E-05
8.44E-07	1.09E-05	7.12E-06	1.01E-04	-1.67E-06	-2.00E-04
1.89E-06	1.79E-05	1.44E-05	2.19E-04	-4.67E-06	-2.96E-04
3.59E-06	2.85E-05	1.92E-05	3.19E-04	-9.70E-06	-3.96E-04
6.20E-06	4.43E-05	2.28E-05	4.19E-04	-1.69E-05	-4.96E-04
1.02E-05	6.80E-05	2.15E-05	5.19E-04	-2.64E-05	-5.96E-04
1.59E-05	1.04E-04	2.61E-05	6.19E-04	-3.84E-05	-6.96E-04
2.45E-05	1.57E-04	2.56E-05	7.19E-04	-5.32E-05	-7.96E-04
3.68E-05	2.37E-04	2.31E-05	8.19E-04	-7.13E-05	-8.96E-04
5.44E-05	3.57E-04	1.81E-05	9.19E-04	-9.35E-05	-9.96E-04
7.78E-05	5.37E-04	1.02E-05	1.01E-03	-1.21E-04	-1.10E-03
9.91E-05	7.37E-04	1.48E-06	1.11E-03	-1.56E-04	-1.20E-03
1.15E-04	9.37E-04	1.82E-05	1.21E-03	-1.99E-04	-1.30E-03
1.24E-04	1.13E-03	4.15E-05	1.31E-03	-2.51E-04	-1.40E-03
1.26E-04	1.18E-03	7.28E-05	1.41E-03	-3.11E-04	-1.50E-03
1.25E-04	1.26E-03	1.21E-04	1.51E-03	-3.75E-04	-1.60E-03
1.19E-04	1.37E-03	1.59E-04	1.62E-03	-4.41E-04	-1.70E-03
9.70E-05	1.54E-03	2.11E-04	1.71E-03	-5.10E-04	-1.80E-03
5.04E-05	1.74E-03	2.66E-04	1.82E-03	-5.81E-04	-1.90E-03
9.32E-06	1.94E-03	3.22E-04	1.91E-03	-6.57E-04	-2.00E-03
-2.74E-05	2.00E-03	3.71E-04	2.00E-03	-6.60E-04	-2.00E-03

Tabla II.4 Datos del material A de ΔR y ΔH para $m=0.3$, $m=0.35$ y $m=0.4$.

$m=0.3$ Cf=0.1732		$m=0.35$ Cf=0.2020		$m=0.4$ Cf=0.2308	
ΔR	ΔH	ΔR	ΔH	ΔR	ΔH
0	0	0	0	0	0
1.81E-07	-6.25E-06	1.11E-07	6.25E-06	-6.63E-05	-2.85E-04
-4.23E-06	-5.37E-05	3.17E-06	1.79E-05	-9.73E-05	-3.85E-04
-8.18E-06	-1.13E-04	5.00E-06	2.85E-05	-1.33E-04	-4.85E-04
-1.28E-05	-1.66E-04	6.79E-06	4.43E-05	-1.73E-04	-5.85E-04
-2.11E-05	-2.47E-04	8.73E-06	6.80E-05	-2.18E-04	-6.85E-04
-3.69E-05	-3.67E-04	1.37E-05	1.03E-04	-2.67E-04	-7.85E-04
-6.98E-05	-5.47E-04	2.27E-05	1.57E-04	-3.21E-04	-8.85E-04
-1.20E-04	-7.47E-04	3.70E-05	2.37E-04	-3.79E-04	-9.85E-04
-1.88E-04	-9.47E-04	6.29E-05	3.57E-04	-4.40E-04	-1.08E-03
-2.07E-04	-9.97E-04	1.13E-04	5.37E-04	-5.05E-04	-1.18E-03
-2.28E-04	-1.05E-03	1.86E-04	7.37E-04	-5.74E-04	-1.28E-03
-2.63E-04	-1.12E-03	2.78E-04	9.37E-04	-6.46E-04	-1.38E-03
-3.24E-04	-1.23E-03	3.89E-04	1.13E-03	-7.23E-04	-1.48E-03
-3.49E-04	-1.28E-03	5.17E-04	1.33E-03	-7.75E-04	-1.55E-03
-3.87E-04	-1.34E-03	6.58E-04	1.53E-03	-8.23E-04	-1.60E-03
-4.49E-04	-1.43E-03	6.96E-04	1.58E-03	-8.99E-04	-1.69E-03
-5.45E-04	-1.58E-03	7.35E-04	1.63E-03	-9.93E-04	-1.79E-03
-6.93E-04	-1.78E-03	7.99E-04	1.71E-03	-1.04E-03	-1.83E-03
-7.33E-04	-1.83E-03	8.66E-04	1.78E-03	-1.07E-03	-1.86E-03
-7.74E-04	-1.88E-03	9.35E-04	1.86E-03	-1.11E-03	-1.90E-03
-8.37E-04	-1.95E-03	1.00E-03	1.93E-03	-1.18E-03	-1.97E-03
-8.78E-04	-2.00E-03	1.06E-03	2.00E-03	-1.21E-03	-2.00E-03

Tabla II.5 Datos del material A de ΔR y ΔH para $m=0.5$, $m=0.8$ y $m=1$.

$m=0.5$ Cf=0.2887		$m=0.8$ Cf=0.4619		$m=1$ Cf=0.5773	
ΔR	ΔH	ΔR	ΔH	ΔR	ΔH
0	0	0	0	0	0
-1.52E-07	-3.75E-06	-1.18E-04	-2.88E-04	-7.51E-05	-1.92E-04
-3.68E-05	-1.24E-04	-1.65E-04	-3.88E-04	-1.18E-04	-2.88E-04
-5.94E-05	-1.88E-04	-2.14E-04	-4.88E-04	-1.65E-04	-3.88E-04
-9.70E-05	-2.85E-04	-2.65E-04	-5.88E-04	-2.14E-04	-4.88E-04
-1.40E-04	-3.85E-04	-3.19E-04	-6.88E-04	-2.65E-04	-5.88E-04
-1.88E-04	-4.85E-04	-3.76E-04	-7.88E-04	-3.19E-04	-6.88E-04
-2.40E-04	-5.85E-04	-4.35E-04	-8.88E-04	-3.76E-04	-7.88E-04
-2.96E-04	-6.85E-04	-4.96E-04	-9.88E-04	-4.35E-04	-8.88E-04
-3.55E-04	-7.85E-04	-5.83E-04	-1.12E-03	-4.96E-04	-9.88E-04
-4.16E-04	-8.85E-04	-6.06E-04	-1.15E-03	-5.83E-04	-1.12E-03
-4.81E-04	-9.85E-04	-6.52E-04	-1.20E-03	-6.06E-04	-1.15E-03
-5.62E-04	-1.10E-03	-7.09E-04	-1.26E-03	-6.52E-04	-1.20E-03
-6.47E-04	-1.22E-03	-7.33E-04	-1.29E-03	-7.09E-04	-1.26E-03
-7.00E-04	-1.29E-03	-7.70E-04	-1.33E-03	-7.70E-04	-1.33E-03
-7.65E-04	-1.37E-03	-8.25E-04	-1.39E-03	-8.25E-04	-1.39E-03
-8.35E-04	-1.45E-03	-9.08E-04	-1.48E-03	-9.08E-04	-1.48E-03
-9.24E-04	-1.55E-03	-1.01E-03	-1.58E-03	-1.01E-03	-1.58E-03
-9.88E-04	-1.63E-03	-1.11E-03	-1.68E-03	-1.11E-03	-1.68E-03
-1.08E-03	-1.71E-03	-1.23E-03	-1.78E-03	-1.23E-03	-1.78E-03
-1.15E-03	-1.79E-03	-1.35E-03	-1.88E-03	-1.35E-03	-1.88E-03
-1.27E-03	-1.90E-03	-1.48E-03	-1.98E-03	-1.48E-03	-1.98E-03
-1.39E-03	-2.00E-03	-1.50E-03	-2.00E-03	-1.50E-03	-2.00E-03

ANEXO III

RESULTADOS DEL MATERIAL B POR MEF

Datos arrojados por el análisis de elemento finito mostrando cambio en desplazamiento de los nodos J y I representados como ΔR y ΔH .

Tabla III.1 Datos del material B de ΔR y ΔH para $m=0$, $m=0.01$ y $m=0.03$.

m=0 Cf=0		m=0.01 Cf=0.0057		m=0.03 Cf=0.0173	
ΔR	ΔH	ΔR	ΔH	ΔR	ΔH
0	0	0	0	0	0
2.14E-05	-6.00E-05	4.30E-05	-1.20E-04	3.28E-05	-1.00E-04
4.45E-05	-1.20E-04	7.75E-05	-2.10E-04	6.80E-05	-2.00E-04
7.63E-05	-2.00E-04	1.17E-04	-3.10E-04	1.04E-04	-3.00E-04
1.09E-04	-2.80E-04	1.58E-04	-4.10E-04	1.42E-04	-4.00E-04
1.43E-04	-3.60E-04	2.01E-04	-5.10E-04	1.81E-04	-5.00E-04
1.78E-04	-4.40E-04	2.46E-04	-6.10E-04	2.21E-04	-6.00E-04
2.14E-04	-5.20E-04	2.93E-04	-7.10E-04	2.63E-04	-7.00E-04
2.51E-04	-6.00E-04	3.42E-04	-8.10E-04	3.06E-04	-8.00E-04
2.90E-04	-6.80E-04	3.93E-04	-9.10E-04	3.51E-04	-9.00E-04
3.31E-04	-7.60E-04	4.46E-04	-1.01E-03	3.97E-04	-1.00E-03
3.73E-04	-8.40E-04	5.02E-04	-1.11E-03	4.46E-04	-1.10E-03
4.16E-04	-9.20E-04	5.60E-04	-1.21E-03	4.96E-04	-1.20E-03
4.61E-04	-1.00E-03	6.22E-04	-1.31E-03	5.48E-04	-1.30E-03
5.08E-04	-1.08E-03	6.87E-04	-1.41E-03	6.02E-04	-1.40E-03
6.09E-04	-1.24E-03	7.55E-04	-1.51E-03	6.58E-04	-1.50E-03
7.18E-04	-1.40E-03	8.27E-04	-1.61E-03	7.16E-04	-1.60E-03
8.36E-04	-1.56E-03	9.03E-04	-1.71E-03	7.76E-04	-1.70E-03
9.70E-04	-1.72E-03	9.84E-04	-1.81E-03	8.38E-04	-1.80E-03
1.11E-03	-1.88E-03	1.06E-03	-1.91E-03	9.03E-04	-1.90E-03
1.23E-03	-2.00E-03	1.15E-03	-2.00E-03	9.69E-04	-2.00E-03

Tabla III.2 Datos del material B de ΔR y ΔH para $m=0.05$, $m=.0.08$ y $m=0.1$.

m=0.06 Cf=0.028		m=0.08 Cf=0.0461		m=0.1 Cf=0.0577	
ΔR	ΔH	ΔR	ΔH	ΔR	ΔH
0	0	0	0	0	0
1.11E-05	-3.99E-05	2.03E-06	-1.25E-05	4.60E-06	-2.50E-05
3.48E-05	-1.15E-04	4.04E-06	-2.00E-05	7.58E-06	-3.75E-05
8.96E-05	-2.82E-04	5.37E-06	-2.50E-05	1.05E-05	-4.99E-05
1.58E-04	-4.82E-04	1.04E-05	-4.37E-05	1.51E-05	-6.87E-05
2.30E-04	-6.82E-04	1.48E-05	-6.00E-05	2.19E-05	-9.68E-05
2.68E-04	-7.82E-04	1.80E-05	-7.18E-05	3.22E-05	-1.39E-04
3.07E-04	-8.82E-04	3.53E-05	-1.35E-04	4.76E-05	-2.02E-04
3.47E-04	-9.82E-04	2.95E-05	-1.14E-04	7.09E-05	-2.97E-04
3.88E-04	-1.08E-03	4.70E-05	-1.77E-04	1.05E-04	-4.39E-04
4.29E-04	-1.18E-03	7.35E-05	-2.72E-04	1.53E-04	-6.39E-04
4.72E-04	-1.28E-03	1.13E-04	-4.14E-04	2.00E-04	-8.39E-04
5.15E-04	-1.38E-03	1.70E-04	-6.14E-04	2.45E-04	-1.03E-03
5.59E-04	-1.48E-03	2.29E-04	-8.14E-04	2.85E-04	-1.23E-03
6.04E-04	-1.58E-03	2.88E-04	-1.01E-03	3.15E-04	-1.43E-03
6.48E-04	-1.68E-03	3.45E-04	-1.21E-03	3.30E-04	-1.63E-03
6.92E-04	-1.78E-03	3.99E-04	-1.41E-03	3.37E-04	-1.87E-03
7.36E-04	-1.88E-03	4.44E-04	-1.61E-03	3.36E-04	-1.91E-03
7.80E-04	-1.98E-03	4.78E-04	-1.81E-03	3.35E-04	-1.97E-03
7.78E-04	-2.00E-03	5.01E-04	-2.00E-03	3.35E-04	-2.00E-03

Tabla III.3 Datos del material B de ΔR y ΔH para $m=0.15$, $m=.0.2$ y $m=0.25$.

m=0.15 Cf=0.0866		m=0.20 Cf=0.1155		m=0.25 Cf=0.1443	
ΔR	ΔH	ΔR	ΔH	ΔR	ΔH
0	0	0	0	0	0
6.90E-06	-5.32E-05	3.04E-07	-3.12E-06	-3.09E-06	-9.29E-05
1.15E-05	-8.17E-05	-2.37E-07	-1.09E-05	-2.97E-06	-1.36E-04
1.83E-05	-1.24E-04	1.86E-07	-2.50E-05	-4.13E-06	-2.00E-04
2.84E-05	-1.88E-04	1.25E-06	-4.25E-05	-6.47E-06	-2.96E-04
4.30E-05	-2.65E-04	4.11E-06	-8.21E-05	-1.17E-05	-3.96E-04
5.74E-05	-3.85E-04	1.03E-05	-1.71E-04	-2.00E-05	-4.96E-04
7.08E-05	-4.85E-04	2.02E-05	-3.71E-04	-3.11E-05	-5.96E-04
8.28E-05	-5.85E-04	2.25E-05	-5.51E-04	-4.42E-05	-6.96E-04
9.38E-05	-6.85E-04	2.18E-05	-6.76E-04	-6.04E-05	-7.96E-04
1.04E-04	-7.85E-04	2.06E-05	-7.46E-04	-7.98E-05	-8.96E-04
1.12E-04	-8.85E-04	1.86E-05	-8.10E-04	-1.03E-04	-9.96E-04
1.19E-04	-9.85E-04	1.36E-05	-9.05E-04	-1.32E-04	-1.10E-03
1.24E-04	-1.08E-03	1.48E-06	-1.04E-03	-1.69E-04	-1.20E-03
1.26E-04	-1.18E-03	-4.77E-06	-1.09E-03	-2.17E-04	-1.30E-03
1.24E-04	-1.28E-03	-1.67E-05	-1.17E-03	-2.74E-04	-1.40E-03
1.15E-04	-1.38E-03	-4.27E-05	-1.28E-03	-3.35E-04	-1.50E-03
1.00E-04	-1.48E-03	-1.09E-04	-1.45E-03	-4.00E-04	-1.60E-03
7.88E-05	-1.58E-03	-1.33E-04	-1.50E-03	-4.68E-04	-1.70E-03
5.10E-05	-1.68E-03	-2.41E-04	-1.69E-03	-5.40E-04	-1.80E-03
1.91E-05	-1.78E-03	-3.48E-04	-1.85E-03	-6.19E-04	-1.90E-03
-1.60E-05	-1.88E-03	-3.94E-04	-1.92E-03	-7.06E-04	-2.00E-03
-6.54E-05	-2.00E-03	-4.43E-04	-2.00E-03	-7.10E-04	-2.00E-03

Tabla III.4 Datos del material B de ΔR y ΔH para $m=0.3$, $m=.0.35$ y $m=0.4$.

m=0.03 Cf=0.0173		m=0.35 Cf=0.2020		m=0.4 Cf=0.2308	
ΔR	ΔH	ΔR	ΔH	ΔR	ΔH
0	0	0	0	0	0
3.28E-05	-1.00E-04	6.44E-08	-6.25E-06	1.83E-08	-6.25E-06
6.80E-05	-2.00E-04	-3.52E-06	-1.79E-05	-7.98E-06	-2.85E-05
1.04E-04	-3.00E-04	-1.03E-05	-4.43E-05	-1.19E-05	-6.80E-05
1.42E-04	-4.00E-04	-1.93E-05	-1.03E-04	-3.84E-05	-1.57E-04
1.81E-04	-5.00E-04	-4.14E-05	-2.37E-04	-9.45E-05	-3.57E-04
2.21E-04	-6.00E-04	-1.23E-04	-5.37E-04	-2.66E-04	-7.37E-04
2.63E-04	-7.00E-04	-2.03E-04	-7.34E-04	-4.11E-04	-9.87E-04
3.06E-04	-8.00E-04	-3.02E-04	-9.37E-04	-4.90E-04	-1.11E-03
3.51E-04	-9.00E-04	-4.17E-04	-1.13E-03	-5.15E-04	-1.14E-03
3.97E-04	-1.00E-03	-4.48E-04	-1.18E-03	-5.39E-04	-1.18E-03
4.46E-04	-1.10E-03	-4.92E-04	-1.25E-03	-5.88E-04	-1.25E-03
4.96E-04	-1.20E-03	-5.30E-04	-1.31E-03	-7.06E-04	-1.41E-03
5.48E-04	-1.30E-03	-5.78E-04	-1.38E-03	-7.76E-04	-1.50E-03
6.02E-04	-1.40E-03	-6.24E-04	-1.44E-03	-8.16E-04	-1.55E-03
6.58E-04	-1.50E-03	-6.98E-04	-1.54E-03	-8.40E-04	-1.58E-03
7.16E-04	-1.60E-03	-8.16E-04	-1.68E-03	-8.93E-04	-1.64E-03
7.76E-04	-1.70E-03	-8.74E-04	-1.74E-03	-9.63E-04	-1.72E-03
8.38E-04	-1.80E-03	-9.57E-04	-1.83E-03	-1.04E-03	-1.80E-03
9.03E-04	-1.90E-03	-1.03E-03	-1.91E-03	-1.23E-03	-1.98E-03
9.69E-04	-2.00E-03	-1.12E-03	-2.00E-03	-1.25E-03	-2.00E-03

Tabla III.5 Datos del material B de ΔR y ΔH para $m=0.5$, $m=.0.8$ y $m=1$.

m=0.5 Cf=0.2887		m=0.8 Cf=0.4619		m=1 Cf=0.6773	
ΔR	ΔH	ΔR	ΔH	ΔR	ΔH
0	0	0	0	0	0
-5.10E-08	-6.25E-06	-6.40E-05	-1.61E-04	-2.09E-07	-6.25E-06
-4.00E-06	-1.79E-05	-1.10E-04	-2.67E-04	-1.06E-05	-3.16E-05
-1.48E-05	-4.43E-05	-1.53E-04	-3.61E-04	-6.43E-05	-1.60E-04
-3.65E-05	-1.03E-04	-1.94E-04	-4.45E-04	-3.51E-04	-7.40E-04
-8.37E-05	-2.37E-04	-2.44E-04	-5.45E-04	-4.73E-04	-9.43E-04
-1.56E-04	-4.02E-04	-2.97E-04	-6.45E-04	-5.93E-04	-1.10E-03
-2.43E-04	-5.71E-04	-3.52E-04	-7.45E-04	-7.52E-04	-1.29E-03
-3.56E-04	-7.73E-04	-5.46E-04	-1.05E-03	-7.67E-04	-1.31E-03
-4.17E-04	-8.76E-04	-5.84E-04	-1.10E-03	-7.87E-04	-1.34E-03
-4.83E-04	-9.81E-04	-6.58E-04	-1.19E-03	-8.97E-04	-1.45E-03
-5.24E-04	-1.04E-03	-7.27E-04	-1.27E-03	-9.59E-04	-1.51E-03
-6.20E-04	-1.17E-03	-8.12E-04	-1.37E-03	-9.77E-04	-1.53E-03
-6.91E-04	-1.26E-03	-8.71E-04	-1.44E-03	-1.12E-03	-1.67E-03
-7.87E-04	-1.38E-03	-9.88E-04	-1.56E-03	-1.20E-03	-1.75E-03
-8.21E-04	-1.42E-03	-1.03E-03	-1.60E-03	-1.23E-03	-1.77E-03
-9.11E-04	-1.53E-03	-1.14E-03	-1.70E-03	-1.29E-03	-1.82E-03
-9.64E-04	-1.59E-03	-1.25E-03	-1.80E-03	-1.31E-03	-1.84E-03
-1.05E-03	-1.69E-03	-1.33E-03	-1.87E-03	-1.36E-03	-1.87E-03
-1.19E-03	-1.82E-03	-1.40E-03	-1.91E-03	-1.48E-03	-1.96E-03
-1.40E-03	-2.00E-03	-1.52E-03	-2.00E-03	-1.53E-03	-2.00E-03

ANEXO IV

RESULTADOS DE %D (DIAMETRO) Y %H (ALTURA) DEL MATERIAL A PARA CADA VEOR DE M.

Datos de los resultados de la simulación del material A donde muestran el porcentaje de cambios en deformación de diámetro (%D) y altura (%H) para cada valor de factor de fricción m dado.

Tabla IV.1 Datos del material A del porcentaje de cambios en deformación de diámetro (%D) y altura (%H) para $m=0$, $m=0.01$ y $m=0.03$.

$m=0$ ($\mu=0$)		$m=0.01$ ($\mu=0.0057$)		$m=0.03$ ($\mu=0.0173$)	
%D	%H	%D	%H	%D	%H
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-0.72	1.50	-0.94	2.00	-1.34	3.00
-1.49	3.00	-1.95	4.00	-2.04	4.50
-2.69	5.25	-3.25	6.50	-3.12	6.75
-4.07	7.75	-4.60	9.00	-4.37	9.25
-5.50	10.25	-6.00	11.50	-5.65	11.75
-7.00	12.75	-7.47	14.00	-6.98	14.25
-8.57	15.25	-8.97	16.50	-8.36	16.75
-10.20	17.75	-10.57	19.00	-9.79	19.25
-11.90	20.25	-12.23	21.50	-11.27	21.75
-13.70	22.75	-13.97	24.00	-12.81	24.25
-15.57	25.25	-15.80	26.50	-14.40	26.75
-17.57	27.75	-17.70	29.00	-16.06	29.25
-19.67	30.25	-19.70	31.50	-17.78	31.75
-21.87	32.75	-21.80	34.00	-19.56	34.25
-24.20	35.25	-24.03	36.50	-21.41	36.75
-26.67	37.75	-26.37	39.00	-23.33	39.25
-29.27	40.25	-28.83	41.50	-25.31	41.75
-32.07	42.75	-31.43	44.00	-27.37	44.25
-35.00	45.25	-34.00	46.50	-29.51	46.75
-38.00	47.75	-37.00	49.00	-31.72	49.25
-41.33	50.00	-38.33	50.00	-32.40	50.00

Tabla IV.2 Datos del material A del porcentaje de cambios en deformación de diámetro (%D) y altura (%H) para $m=0.05$, $m=0.08$ y $m=0.1$.

$m=0.05$ ($\mu=0.0287$)		$m=0.08$ ($\mu=0.0461$)		$m=0.1$ ($\mu=0.0577$)	
%D	%H	%D	%H	%D	%H
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-0.59	1.50	-0.24	0.75	-0.51	1.69
-1.23	3.00	-0.58	1.69	-0.79	2.53
-1.87	4.50	-1.35	3.80	-1.20	3.80
-2.86	6.75	-2.05	5.70	-1.81	5.70
-3.99	9.25	-2.99	8.20	-2.63	8.20
-5.15	11.75	-3.95	10.70	-3.45	10.70
-6.34	14.25	-4.91	13.20	-4.27	13.20
-7.56	16.75	-5.89	15.70	-5.09	15.70
-8.82	19.25	-6.88	18.20	-5.90	18.20
-10.11	21.75	-7.88	20.70	-6.71	20.70
-11.43	24.25	-8.88	23.20	-7.49	23.20
-12.79	26.75	-9.88	25.70	-8.26	25.70
-14.18	29.25	-10.87	28.20	-8.99	28.20
-15.61	31.75	-11.85	30.70	-9.67	30.70
-17.05	34.25	-12.79	33.20	-10.28	33.20
-18.52	36.75	-13.69	35.70	-10.80	35.70
-20.00	39.25	-14.53	38.20	-11.21	38.20
-21.49	41.75	-15.31	40.70	-11.51	40.70
-22.99	44.25	-15.99	43.20	-11.74	43.66
-24.48	46.75	-16.59	45.70	-11.85	45.77
-25.95	49.25	-17.07	48.20	-11.89	48.27
-26.39	50.00	-17.36	50.00	-11.83	50.00

Tabla IV.3 Datos del material A del porcentaje de cambios en deformación de diámetro (%D) y altura (%H) para $m=0.15$, $m=0.2$ y $m=0.25$.

$m=0.15$ ($\mu=0.0866$)		$m=0.20$ ($\mu=0.1155$)		$m=0.25$ ($\mu=0.1443$)	
%D	%H	%D	%H	%D	%H
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-0.01	0.08	0.00	0.31	0.03	0.61
-0.02	0.16	-0.10	1.21	0.01	1.61
-0.03	0.27	-0.24	2.53	0.06	4.99
-0.06	0.45	-0.48	5.48	0.16	7.40
-0.12	0.71	-0.64	7.98	0.32	9.90
-0.21	1.11	-0.76	10.48	0.56	12.40
-0.34	1.70	-0.72	12.98	0.88	14.90
-0.53	2.59	-0.87	15.48	1.28	17.40
-0.82	3.93	-0.85	17.98	1.77	19.90
-1.23	5.93	-0.77	20.48	2.38	22.40
-1.81	8.93	-0.60	22.98	3.12	24.90
-2.59	13.43	-0.34	25.25	4.04	27.40
-3.30	18.43	-0.05	27.75	5.19	29.90
-3.83	23.43	0.61	30.25	6.63	32.40
-4.13	28.25	1.38	32.75	8.38	34.90
-4.20	29.50	2.43	35.25	10.38	37.40
-4.17	31.50	4.03	37.75	12.49	39.90
-3.97	34.25	5.30	40.50	14.71	42.40
-3.23	38.50	7.03	42.75	17.01	44.90
-1.68	43.50	8.87	45.50	19.37	47.40
-0.31	48.50	10.73	47.75	21.88	49.90
-0.91	50.00	12.37	50.00	21.99	50.00

Tabla IV.4 Datos del material A del porcentaje de cambios en deformación de diámetro (%D) y altura (%H) para $m=0.3$, $m=0.35$ y $m=0.4$.

$m=0.3$ ($\mu=0.1732$)		$m=0.35$ ($\mu=0.2020$)		$m=0.4$ ($\mu=0.2309$)	
%D	%H	%D	%H	%D	%H
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-0.01	0.16	0.00	0.16	2.21	7.11
0.14	1.34	0.11	0.45	3.24	9.61
0.27	2.83	0.17	0.71	4.42	12.11
0.43	4.16	0.23	1.11	5.75	14.61
0.70	6.16	0.29	1.70	7.25	17.11
1.23	9.17	0.46	2.58	8.91	19.61
2.33	13.67	0.76	3.93	10.70	22.11
4.00	18.67	1.23	5.93	12.63	24.61
6.27	23.67	2.10	8.93	14.67	27.11
6.91	24.92	3.77	13.43	16.83	29.61
7.61	26.17	6.20	18.43	19.12	32.11
8.77	28.05	9.27	23.43	21.52	34.61
10.80	30.86	12.97	28.25	24.11	37.11
11.62	31.91	17.23	33.25	25.84	38.68
12.91	33.50	21.93	38.25	27.44	40.08
14.95	35.87	23.20	39.50	29.95	42.19
18.15	39.43	24.50	40.75	33.11	44.69
23.09	44.43	26.63	42.75	34.57	45.79
24.45	45.68	28.87	44.50	35.57	46.49
25.81	46.93	31.17	46.50	37.02	47.54
27.89	48.80	33.33	48.25	39.18	49.13
29.26	50.00	35.33	50.00	40.41	50.00

Tabla IV.5 Datos del material A del porcentaje de cambios en deformación de diámetro (%D) y altura (%H) para $m=0.5$, $m=0.8$ y $m=1$.

$m=0.5$ ($\mu=0.2887$)		$m=0.8$ ($\mu=0.4619$)		$m=1$ ($\mu=0.5773$)	
%D	%H	%D	%H	%D	%H
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.01	0.09	3.93	7.21	2.50	4.81
1.23	3.11	5.50	9.71	3.93	7.21
1.98	4.71	7.14	12.21	5.50	9.71
3.23	7.11	8.85	14.71	7.14	12.21
4.68	9.61	10.64	17.21	8.85	14.71
6.27	12.11	12.52	19.71	10.64	17.21
8.01	14.61	14.49	22.21	12.52	19.71
9.87	17.11	16.55	24.71	14.49	22.21
11.82	19.61	19.44	27.95	16.55	24.71
13.87	22.11	20.21	28.65	19.44	27.95
16.03	24.61	21.72	29.97	20.21	28.65
18.73	27.58	23.64	31.60	21.72	29.97
21.57	30.53	24.45	32.27	23.64	31.60
23.33	32.20	25.66	33.27	25.66	33.27
25.51	34.20	27.49	34.77	27.49	34.77
27.82	36.27	30.28	37.03	30.28	37.03
30.80	38.86	33.59	39.53	33.59	39.53
32.94	40.64	37.09	42.03	37.09	42.03
35.85	42.84	41.08	44.53	41.08	44.53
38.30	44.67	45.13	47.03	45.13	47.03
42.41	47.53	49.21	49.53	49.21	49.53
46.18	50.00	50.01	50.00	50.01	50.00

ANEXO V

RESULTADOS DE %D (DIAMETRO) Y %H (ALTURA) DEL MATERIAL B PARA CADA VEOR DE M.

Datos de los resultados de la simulación del material B donde muestran el porcentaje de cambios en deformación de diámetro (%D) y altura (%H) para cada valor de factor de fricción m dado.

Tabla V.1 Datos del material B del porcentaje de cambios en deformación de diámetro (%D) y altura (%H) para $m=0$, $m=0.01$ y $m=0.03$.

m=0 ($\mu=0$)		m=0.01 ($\mu=0.0057$)		m=0.03 ($\mu=0.0173$)	
%D	%H	%D	%H	%D	%H
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-0.71	1.50	1.43	3.00	-1.09	2.50
1.48	3.00	2.58	5.25	-2.27	5.00
2.54	5.00	3.90	7.75	-3.48	7.50
3.63	7.00	5.27	10.25	-4.73	10.00
4.77	9.00	6.70	12.75	-6.03	12.50
5.93	11.00	8.20	15.25	-7.37	15.00
7.13	13.00	9.77	17.75	-8.77	17.50
8.37	15.00	11.40	20.25	-10.20	20.00
9.67	17.00	13.10	22.75	-11.70	22.50
11.03	19.00	14.87	25.25	-13.23	25.00
12.43	21.00	16.73	27.75	-14.87	27.50
13.87	23.00	18.67	30.25	-16.53	30.00
15.37	25.00	20.73	32.75	-18.27	32.50
16.93	27.00	22.90	35.25	-20.07	35.00
20.30	31.00	25.17	37.75	-21.93	37.50
23.93	35.00	27.57	40.25	-23.87	40.00
27.93	39.00	30.10	42.75	-25.87	42.50
32.33	43.00	32.80	45.25	-27.93	45.00
37.00	47.00	35.33	47.75	-30.10	47.50

Tabla V.2 Datos del material B del porcentaje de cambios en deformación de diámetro (%D) y altura (%H) para $m=0.05$, $m=0.08$ y $m=0.1$

$m=0.05$ ($\mu=0.0288$)		$m=0.08$ ($\mu=0.0461$)		$m=0.1$ ($\mu=0.0577$)	
%D	%H	%D	%H	%D	%H
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-0.37	1.00	-0.07	0.31	-0.15	0.63
-1.16	2.88	-0.13	0.50	-0.25	0.94
-2.99	7.05	-0.18	0.63	-0.35	1.25
-5.27	12.05	-0.35	1.09	-0.50	1.72
-7.67	17.05	-0.49	1.50	-0.73	2.42
-8.93	19.55	-0.60	1.80	-1.07	3.48
-10.23	22.05	-1.18	3.38	-1.59	5.05
-11.57	24.55	-0.98	2.85	-2.36	7.43
-12.93	27.00	-1.57	4.43	-3.50	10.98
-14.30	29.50	-2.45	6.80	-5.10	15.98
-15.73	32.00	-3.77	10.35	-6.67	20.98
-17.17	34.50	-5.67	15.35	-8.17	25.75
-18.63	37.00	-7.63	20.35	-9.50	30.75
-20.13	39.50	-9.60	25.25	-10.50	35.75
-21.60	42.00	-11.50	30.25	-11.00	40.75
-23.07	44.50	-13.30	35.25	-11.23	46.75
-24.53	47.00	-14.80	40.25	-11.20	47.75
-26.00	49.50	-15.93	45.25	-11.17	49.25
-25.93	50.00	-16.70	50.00	-11.17	50.00

Tabla V.3 Datos del material B del porcentaje de cambios en deformación de diámetro (%D) y altura (%H) para $m=0.15$, $m=0.2$ y $m=0.25$

$m=0.15$ ($\mu=0.0866$)		$m=0.2$ ($\mu=0.1155$)		$m=0.25$ ($\mu=0.1443$)	
%D	%H	%D	%H	%D	%H
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-0.23	1.33	-0.01	0.08	0.10	2.32
-0.38	2.04	0.01	0.27	0.10	3.39
-0.61	3.11	-0.01	0.63	0.14	4.99
-0.95	4.71	-0.04	1.06	0.22	7.40
-1.43	7.11	-0.14	2.05	0.39	9.90
-1.91	9.61	-0.34	4.28	0.67	12.40
-2.36	12.11	-0.67	9.28	1.04	14.90
-2.76	14.61	-0.75	13.78	1.47	17.40
-3.13	17.11	-0.73	16.90	2.01	19.90
-3.46	19.61	-0.69	18.65	2.66	22.40
-3.74	22.11	-0.62	20.25	3.44	24.90
-3.97	24.61	-0.45	22.63	4.41	27.40
-4.13	27.11	-0.05	26.00	5.65	29.90
-4.20	29.61	0.16	27.25	7.22	32.40
-4.12	32.11	0.56	29.25	9.12	34.90
-3.84	34.61	1.42	32.00	11.18	37.40
-3.35	37.11	3.63	36.25	13.33	39.90
-2.63	39.61	4.43	37.50	15.59	42.40
-1.70	42.11	8.03	42.25	18.00	44.90
-0.64	44.61	11.60	46.25	20.63	47.40
0.53	47.11	13.13	48.00	23.53	49.90
2.18	50.00	14.77	50.00	23.66	50.00

Tabla V.4 Datos del material B del porcentaje de cambios en deformación de diámetro (%D) y altura (%H) para $m=0.3$, $m=0.35$ y $m=0.4$.

$m=0.3$ ($\mu=0.1732$)		$m=0.35$ ($\mu=0.2020$)		$m=0.4$ ($\mu=0.2309$)	
%D	%H	%D	%H	%D	%H
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.16	0.00	0.16	0.00	0.16
0.41	2.93	0.12	0.45	0.27	0.71
0.55	4.28	0.34	1.11	0.40	1.70
0.83	6.28	0.64	2.58	1.28	3.93
1.36	9.28	1.38	5.93	3.15	8.93
2.61	13.78	4.10	13.43	8.87	18.43
4.47	18.78	6.77	18.35	13.70	24.68
6.90	23.78	10.07	23.43	16.33	27.75
7.57	25.00	13.90	28.25	17.17	28.50
8.30	26.25	14.93	29.50	17.97	29.50
9.53	28.00	16.40	31.25	19.60	31.25
11.63	30.75	17.67	32.75	23.53	35.25
15.23	35.00	19.27	34.50	25.87	37.50
19.10	39.25	20.80	36.00	27.20	38.75
23.70	43.50	23.27	38.50	28.00	39.50
28.87	47.75	27.20	42.00	29.77	41.00
29.53	48.25	29.13	43.50	32.10	43.00
30.23	48.75	31.90	45.75	34.67	45.00
31.30	49.50	34.33	47.75	41.00	49.50
31.67	50.00	37.33	50.00	41.67	50.00

Tabla V.5 Datos del material B del porcentaje de cambios en deformación de diámetro (%D) y altura (%H) para $m=0.5$, $m=0.8$ y $m=1$.

$m=0.5$ ($\mu=0.2887$)		$m=0.8$ ($\mu=0.4619$)		$m=1$ ($\mu=0.5773$)	
%D	%H	%D	%H	%D	%H
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.16	2.13	4.03	0.01	0.16
0.13	0.45	3.66	6.68	0.35	0.79
0.49	1.11	5.11	9.03	2.14	4.00
1.22	2.58	6.47	11.14	11.70	18.50
2.79	5.93	8.15	13.64	15.77	23.58
5.20	10.05	9.90	16.14	19.77	27.50
8.10	14.28	11.74	18.64	25.07	32.25
11.87	19.33	18.21	26.14	25.57	32.75
13.90	21.90	19.48	27.39	26.23	33.50
16.10	24.53	21.94	29.73	29.90	36.25
17.47	26.00	24.24	31.84	31.97	37.75
20.67	29.25	27.05	34.37	32.57	38.25
23.03	31.50	29.02	35.95	37.33	41.75
26.23	34.50	32.93	38.92	40.00	43.75
27.37	35.50	34.32	39.97	41.00	44.25
30.37	38.25	37.88	42.48	43.00	45.50
32.13	39.75	41.62	44.96	43.67	46.00
35.00	42.25	44.43	46.63	45.33	46.75
39.67	45.50	46.55	47.82	49.33	49.00
46.67	50.00	50.52	50.00	51.00	50.00

ANEXO VI

DATOS DEL ANALISIS NODAL

Datos de la deformación en función del desplazamiento de los nodos del eje 1 y 2 en dirección x y y a diferentes porcentajes de reducción de espesor cuando $m=0.1$.

Tabla VI.1 Deformación contra desplazamiento en el eje 1 en dirección X cuando $m=0.1$										
Nodos	Desplazamiento en x					Deformación (mm/mm)				
	Porcentajes de reducción en espesor					Porcentajes de reducción en espesor				
	10%	20%	30%	40%	50%	10%	20%	30%	40%	50%
8	0.0030	0.0031	0.0032	0.0033	0.0033	0.0139	0.1162	0.2843	0.5096	0.8496
60	0.0038	0.0039	0.0041	0.0044	0.0047	0.0136	0.1120	0.2655	0.4229	0.6698
58	0.0045	0.0047	0.0050	0.0053	0.0058	0.0127	0.1085	0.2648	0.4492	0.7062
56	0.0053	0.0055	0.0059	0.0063	0.0070	0.0118	0.1042	0.2578	0.4542	0.7614
9	0.0060	0.0062	0.0067	0.0073	0.0081	0.0113	0.0986	0.2363	0.3869	0.5898

Tabla VI.2 Deformación contra desplazamiento en el eje 1 en dirección Y cuando $m=0.1$										
Nodos	Desplazamiento en y					Deformación (mm/mm)				
	Porcentajes de reducción en espesor					Porcentajes de reducción en espesor				
	10%	20%	30%	40%	50%	10%	20%	30%	40%	50%
8	0.0020	0.0018	0.0015	0.0013	0.0010	0.0139	0.1162	0.2843	0.5096	0.8496
60	0.0020	0.0018	0.0015	0.0013	0.0010	0.0136	0.1120	0.2655	0.4229	0.6698
58	0.0020	0.0018	0.0015	0.0013	0.0010	0.0127	0.1085	0.2648	0.4492	0.7062
56	0.0020	0.0018	0.0015	0.0013	0.0010	0.0118	0.1042	0.2578	0.4542	0.7614
9	0.0020	0.0018	0.0015	0.0013	0.0010	0.0113	0.0986	0.2363	0.3869	0.5898

Tabla VI.3 Deformación contra desplazamiento en el eje 2 en dirección X cuando $m=0.1$										
Nodos	Desplazamiento en x					Deformación (mm/mm)				
	Porcentajes de reducción en espesor					Porcentajes de reducción en espesor				
	10%	20%	30%	40%	50%	10%	20%	30%	40%	50%
269	0.0045	0.0047	0.0049	0.0053	0.0057	0.0115	0.1012	0.2478	0.4284	0.7044
1177	0.0045	0.0047	0.0050	0.0053	0.0058	0.0119	0.1038	0.2529	0.4310	0.7020
330	0.0045	0.0047	0.0050	0.0053	0.0058	0.0126	0.1075	0.2617	0.4423	0.7029
58	0.0045	0.0047	0.0050	0.0053	0.0058	0.0127	0.1085	0.2648	0.4498	0.7062
686	0.0045	0.0047	0.0050	0.0053	0.0058	0.0126	0.1075	0.2617	0.4423	0.7029
937	0.0045	0.0047	0.0050	0.0053	0.0058	0.0119	0.1038	0.2529	0.4310	0.7020
212	0.0045	0.0047	0.0049	0.0053	0.0057	0.0115	0.1012	0.2478	0.4284	0.7043

Tabla VI.4 Deformación contra desplazamiento en el eje 2 en dirección Y cuando $m=0.1$										
Nodos	Desplazamiento en y					Deformación (mm/mm)				
	Porcentajes de reducción en espesor					Porcentajes de reducción en espesor				
	10%	20%	30%	40%	50%	10%	20%	30%	40%	50%
269	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0115	0.1012	0.2478	0.4284	0.7044
1177	0.0007	0.0006	0.0005	0.0004	0.0003	0.0119	0.1038	0.2529	0.4310	0.7020
330	0.0013	0.0012	0.0010	0.0009	0.0007	0.0126	0.1075	0.2617	0.4423	0.7029
58	0.0020	0.0018	0.0015	0.0013	0.0010	0.0127	0.1085	0.2648	0.4498	0.7062
686	0.0026	0.0024	0.0020	0.0017	0.0013	0.0126	0.1075	0.2617	0.4423	0.7029
937	0.0033	0.0030	0.0026	0.0022	0.0017	0.0119	0.1038	0.2529	0.4310	0.7020
212	0.0039	0.0036	0.0031	0.0026	0.0020	0.0115	0.1012	0.2478	0.4284	0.7043

Datos de la deformación en función del desplazamiento de los nodos del eje 1 y 2 en dirección x y y a diferentes porcentajes de reducción de espesor cuando $m=0.25$.

Tabla VI.5 Deformación contra desplazamiento en el eje 1 en dirección X cuando $m=0.25$										
Nodos	Desplazamiento en x					Deformación (mm/mm)				
	Porcentajes de reducción en espesor					Porcentajes de reducción en espesor				
	10%	20%	30%	40%	50%	10%	20%	30%	40%	50%
8	0.00299	0.00299	0.00292	0.00269	0.00231	0.01375	0.09352	0.32790	0.63740	0.86550
60	0.00375	0.00380	0.00391	0.00401	0.00411	0.01441	0.08912	0.31620	0.61550	0.99430
58	0.00451	0.00460	0.00486	0.00515	0.00548	0.00995	0.07651	0.29610	0.53260	0.72749
56	0.00526	0.00530	0.00575	0.00623	0.00683	0.00684	0.06249	0.23210	0.47110	0.79468
9	0.00602	0.00616	0.00659	0.00714	0.00783	0.00572	0.05378	0.18500	0.32120	0.43700

Tabla VI.6 Deformación contra desplazamiento en el eje 1 en dirección Y cuando $m=0.25$										
Nodos	Desplazamiento en y					Deformación (mm/mm)				
	Porcentajes de reducción en espesor					Porcentajes de reducción en espesor				
	10%	20%	30%	40%	50%	10%	20%	30%	40%	50%
8	0.00198	0.00187	0.00157	0.00127	0.00100	0.01375	0.09352	0.32790	0.63740	0.86550
60	0.00198	0.00187	0.00157	0.00127	0.00100	0.01441	0.08912	0.31620	0.61550	0.99430
58	0.00198	0.00187	0.00157	0.00127	0.00100	0.00995	0.07651	0.29610	0.53260	0.72749
56	0.00198	0.00187	0.00157	0.00127	0.00100	0.00684	0.06249	0.23210	0.47110	0.79468
9	0.00198	0.00187	0.00157	0.00127	0.00100	0.00572	0.05378	0.18500	0.32120	0.43700

Tabla VL7 Deformación contra desplazamiento en el eje 2 en dirección X cuando $m=0.25$										
Nodos	Desplazamiento en x					Deformación (mm/mm)				
	Porcentajes de reducción en espesor					Porcentajes de reducción en espesor				
	10%	20%	30%	40%	50%	10%	20%	30%	40%	50%
269	0.00451	0.00455	0.00469	0.00485	0.00500	0.00590	0.05886	0.21860	0.46540	0.76810
1177	0.00451	0.00457	0.00476	0.00498	0.00524	0.00759	0.06535	0.23420	0.46750	0.75910
330	0.00451	0.00459	0.00483	0.00510	0.00542	0.01017	0.07451	0.27630	0.50310	0.73220
58	0.00452	0.00460	0.00487	0.00516	0.00548	0.00995	0.07651	0.29610	0.53260	0.72740
686	0.00451	0.00459	0.00483	0.00510	0.00542	0.01300	0.07451	0.27630	0.50310	0.73220
937	0.00451	0.00457	0.00476	0.00498	0.00524	0.00759	0.06535	0.23420	0.46750	0.75910
212	0.00451	0.00455	0.00469	0.00485	0.00500	0.00590	0.05886	0.21860	0.46540	0.76810

Tabla VL8 Deformación contra desplazamiento en el eje 2 en dirección Y cuando $m=0.25$										
Nodos	Desplazamiento en y					Deformación (mm/mm)				
	Porcentajes de reducción en espesor					Porcentajes de reducción en espesor				
	10%	20%	30%	40%	50%	10%	20%	30%	40%	50%
269	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00590	0.05886	0.21860	0.46540	0.76810
1177	0.00007	0.00063	0.00054	0.00043	0.00033	0.00759	0.06535	0.23420	0.46750	0.75910
330	0.00132	0.00125	0.00106	0.00086	0.00065	0.01017	0.07451	0.27630	0.50310	0.73220
58	0.00197	0.00186	0.00156	0.00126	0.00100	0.00995	0.07651	0.29610	0.53260	0.72740
686	0.00263	0.00248	0.00206	0.00167	0.00135	0.01300	0.07451	0.27630	0.50310	0.73220
937	0.00329	0.00310	0.00259	0.00210	0.00166	0.00759	0.06535	0.23420	0.46750	0.75910
212	0.00395	0.00373	0.00313	0.00253	0.00200	0.00590	0.05886	0.21860	0.46540	0.76810

Datos de la deformación en función del desplazamiento de los nodos del eje 1 y 2 en dirección x y y a diferentes porcentajes de reducción de espesor cuando $m=1$.

Tabla VL9 Deformación contra desplazamiento en el eje 1 en dirección X cuando $m=1$										
Nodos	Desplazamiento en x					Deformación (mm/mm)				
	Porcentajes de reducción en espesor					Porcentajes de reducción en espesor				
	10%	20%	30%	40%	50%	10%	20%	30%	40%	50%
8	0.00299	0.00283	0.00251	0.00229	0.00146	0.01099	0.14780	0.31937	0.41222	0.74845
60	0.00375	0.00372	0.00363	0.00354	0.00334	0.01687	0.21177	0.56679	0.74939	1.27620
58	0.00451	0.00463	0.00489	0.00503	0.00548	0.00984	0.18560	0.48667	0.64818	1.06500
56	0.00526	0.00544	0.00582	0.00605	0.00686	0.00460	0.08793	0.21444	0.29766	0.56685
9	0.00601	0.00622	0.00661	0.00684	0.00763	0.00268	0.05343	0.13173	0.16833	0.29105

Tabla VI.10 Deformación contra desplazamiento en el eje 1 en dirección Y cuando $m=1$										
Nodos	Desplazamiento en y					Deformación (mm/mm)				
	Porcentajes de reducción en espesor					Porcentajes de reducción en espesor				
	10%	20%	30%	40%	50%	10%	20%	30%	40%	50%
8	0.00198	0.00181	0.00152	0.00137	0.00100	0.01099	0.14780	0.31937	0.41222	0.74845
60	0.00198	0.00181	0.00152	0.00137	0.00100	0.01687	0.21177	0.56679	0.74939	1.27620
58	0.00198	0.00181	0.00152	0.00137	0.00100	0.00984	0.18560	0.48667	0.64818	1.06500
56	0.00198	0.00181	0.00152	0.00137	0.00100	0.00460	0.08793	0.21444	0.29766	0.56685
9	0.00198	0.00181	0.00152	0.00137	0.00100	0.00268	0.05343	0.13173	0.16833	0.29105

Tabla VI.11 Deformación contra desplazamiento en el eje 2 en dirección X cuando $m=1$										
Nodos	Desplazamiento en x					Deformación (mm/mm)				
	Porcentajes de reducción en espesor					Porcentajes de reducción en espesor				
	10%	20%	30%	40%	50%	10%	20%	30%	40%	50%
269	0.00450	0.00450	0.00450	0.00450	0.00450	0.00000	0.01022	0.05651	0.08715	0.34772
1177	0.00450	0.00452	0.00458	0.00464	0.00492	0.00285	0.06889	0.23330	0.34651	0.77131
330	0.00451	0.00459	0.00479	0.00491	0.00532	0.01043	0.15840	0.42619	0.57731	0.98253
58	0.00451	0.00463	0.00489	0.00503	0.00548	0.00984	0.18560	0.48667	0.64818	1.06529
686	0.00451	0.00459	0.00479	0.00491	0.00532	0.01043	0.15840	0.42619	0.57500	0.98253
937	0.00450	0.00452	0.00458	0.00464	0.00492	0.00285	0.06889	0.23330	0.34651	0.77131
212	0.00450	0.00450	0.00450	0.00450	0.00450	0.00000	0.01022	0.05651	0.08715	0.34772

Tabla VI.12 Deformación contra desplazamiento en el eje 2 en dirección Y cuando $m=1$										
Nodos	Desplazamiento en y					Deformación (mm/mm)				
	Porcentajes de reducción en espesor					Porcentajes de reducción en espesor				
	10%	20%	30%	40%	50%	10%	20%	30%	40%	50%
269	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.01022	0.05651	0.08715	0.34772
1177	0.00067	0.00065	0.00063	0.00060	0.00046	0.00285	0.06889	0.23330	0.34651	0.77131
330	0.00133	0.00125	0.00110	0.00100	0.00076	0.01043	0.15840	0.42619	0.57731	0.98253
58	0.00200	0.00181	0.00152	0.00137	0.00100	0.00984	0.18560	0.48667	0.64818	1.06529
686	0.00264	0.00237	0.00194	0.00174	0.00124	0.01043	0.15840	0.42619	0.57500	0.98253
937	0.00330	0.00297	0.00241	0.00214	0.00154	0.00285	0.06889	0.23330	0.34651	0.77131
212	0.00397	0.00362	0.00304	0.00274	0.00200	0.00000	0.01022	0.05651	0.08715	0.34772

LISTADO DE FIGURAS

Figura 2.1 Aproximación de la circunferencia de un círculo mediante elementos línea. a) Círculo de radio R . b) Malla uniforme y no uniforme utilizadas para representar la circunferencia del círculo. c) Elemento típico.	7
Figura 2.2 Sistema lineal simple de resortes ^[7]	13
Figura 2.3 Diagrama de cuerpo libre de un sistema lineal simple de resortes ^[7]	14
Figura 3.1 Fuerza P oprimiendo a un cuerpo contra otro ^[5]	21
Figura 3.2 Amortiguamiento negativo. El coeficiente de fricción estática es mayor que el coeficiente de fricción por deslizamiento ^[5]	22
<hr/>	
Figura 3.3 Amortiguamiento positivo. La fuerza de amortiguamiento aumenta al aumentar la velocidad ^[5]	23
Figura 3.4. Diagrama de equilibrio para un objeto en un plano inclinado ^[3]	24
Figura 3.5 Gráfica de un coeficiente de fricción estática en función del tiempo de contacto (Rabinowicz 1957) ^[3]	26
Figura 3.6 Gráfica de un coeficiente de fricción cinético en función de la velocidad de deslizamiento (Barwell 1956) ^[3]	26
Figura 3.7 Gráfica de fricción contra rugosidad que muestra una región con pendiente negativa a causa del crecimiento del contacto entre	

superficies y una pendiente positiva por la interacción de las asperezas ^[3] 29

Figura 3.8 Gráfica del coeficiente de fricción μ , contra [(viscosidad) x (velocidad)/ carga] para mostrar los tres tipos de lubricación. Donde: a) lubricación límite, b) lubricación incompleta o mixta y c) lubricación completa ^[1] 31

Figura 3.9 Estructura de grafito. Las laminillas individuales consisten en átomos empaquetados de manera compacta, separados por una distancia relativamente larga con respecto a las laminillas adyacentes ^[1] 33

Figura 4.1 Sensores de fuerza de fricción. (a) Anillo de deformación con galga extensométrica. (b) Medidor de deformación con celda de galga. (c) Galga de fuerza. (d) Plano inclinado. (e) Arreglo de medición de tensión ^[1] 36

Figura 4.2 Medición de fuerza de fricción que es constante con el tiempo ^[1] 37

Figura 4.3 Registro de la fuerza de fricción que varía con respecto al tiempo ^[1] 37

Figura 4.4 Registro de la fuerza de fricción de un sistema que presenta deslizamiento adhesivo ^[1] 38

Figura 4.5 Diferentes modelos de pruebas de fricción ^[1] 39

Figura 4.6 Efecto de la fricción por un sistema de desgaste ^[1] 40

Figura 4.7 Dos modos de deformación en la compresión de anillos. (a) Geometría inicial. (b) Resultado de una fricción baja entre las superficies en contacto. (c) Resultado de una fricción alta ^[1] 42

Figura 4.8 Comparación de solución por elemento finito, con la solución de límite superior en compresión de anillos para diferentes materiales ^[9]	45
Figura 4.9 Representación de una malla distorsionada en una prueba compresión de anillos al 50% de reducción en altura, considerando que m es diferente para cada caso ^[9]	46
Figura 5.1 Geometría del anillo. Medidas de diámetro externo de 12 mm, diámetro interno de 6 mm y espesor de 4 mm.	48
Figura 5.2 Cuarta parte del anillo a analizar teniendo las medidas de radio externo de 6 mm, un radio interno de 3 mm y un espesor de 4 mm.	48
Figura 5.3 Máquina servo-hidráulica universal INSTRON 8502.	49
Figura 5.4 Gráficas esfuerzo-deformación a 5 mm/min	52
Figura 5.5 Gráficas esfuerzo-deformación a 50 mm/min	53
Figura 5.6 Gráficas esfuerzo-deformación a 500 mm/min	53
Figura 5.7 Curvas esfuerzo-deformación del acero A a diferentes velocidades de deformación.....	54
Figura 5.8 Contacto rígido superior representando el movimiento negativo hacia el eje z aplicado en la superficie del anillo.	56
Figura 5.9 Contacto rígido inferior representando la base del anillo sin aplicar movimiento en el eje z	56
Figura 5.10. Condiciones de frontera para el anillo A) restringida en el eje y , B) restringida en el eje x , la base encastrada y la cara superior con movimiento en $-z$ al 50%.	58

Figura 5.11 Malla hexaédrica del anillo con un total de 11,100 elementos.
Mallas cuadriláteras de las superficies con un total de 308
elementos c/u..... 59

Figura 6.1 Representación de esfuerzos de los anillos en ensayos de
compresión a diferentes porcentajes de deformación
(0%,10%,20%,30%,40% y 50%) para un valor de factor de
fricción de $m=0.1$, $m=0.25$, y $m=1$ 61

Figura 6.2 Representación de deformaciones de los anillos en ensayos de
compresión a diferentes porcentajes de deformación
(0%,10%,20%,30%,40% y 50%) para un valor de factor de
fricción de $m=0.1$, $m=0.25$, y $m=1$ 62

Figura 6.3 Variables de medición R_i y H 63

Figura 6.4 Curvas de calibración para el material A 66

Figura 6.5 Curvas de calibración para el material B 67

Figura 6.6 Curvas de calibración de los materiales A y B mismo código
que en las Figuras 6.4 y 6.5..... 68

Figura 6.7 Anillo con dos ejes, para seleccionar los nodos numerados para
el análisis de deformación..... 69

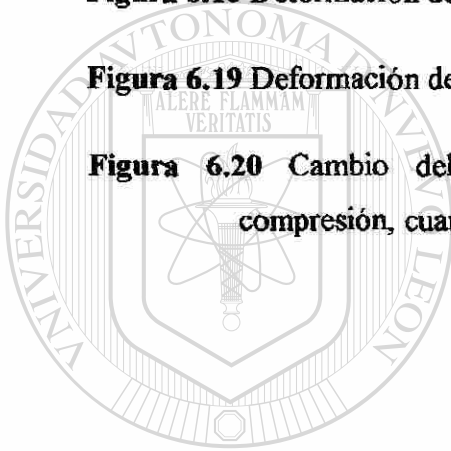
Figura 6.8 Deformación en función del desplazamiento de los nodos del eje
1 en dirección X a diferentes porcentajes de reducción en espesor
cuando $m = 0.1$ 70

Figura 6.9 Deformación del eje 1 en dirección X para $m= 0.25$ 71

Figura 6.10 Deformación del eje 1 en dirección X para $m= 1$ 71

Figura 6.11 Deformación del eje 1 en dirección Y para $m= 0.1$ 72

Figura 6.12 Deformación del eje 1 en dirección Y para $m= 0.25$	72
Figura 6.13 Deformación del eje 1 en dirección Y para $m= 1$	73
Figura 6.14 Deformación del eje 2 en dirección X para $m= 0.1$	73
Figura 6.15 Deformación del eje 2 en dirección X para $m= 0.25$	74
Figura 6.16 Deformación del eje 2 en dirección X para $m=1$	74
Figura 6.17 Deformación del eje 2 en dirección Y para $m= 0.1$	75
Figura 6.18 Deformación del eje 2 en dirección Y para $m= 0.25$	75
Figura 6.19 Deformación del eje 2 en dirección Y para $m=1$	76
Figura 6.20 Cambio del radio neutro a diferentes porcentajes de compresión, cuando $m=0.1$, $m=0.25$ y $m=1$	81



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



LISTADO DE TABLAS

Tabla 5.1 Composición química de los aceros A y B.....	50
Tabla 5.2 Curva esfuerzo-deformación para el material A.....	55
Tabla 5.3 Curva esfuerzo-deformación para el material B.....	55
Tabla 5.4 Valores del coeficiente de fricción para un valor de m dado.....	57
Tabla 6.1 Valores de R_i , R y H a diferentes porcentajes de compresión para $m=0.1$	77
Tabla 6.2 Posición del radio neutro " R_n " a diferentes porcentajes de compresión para $m=0.1$	78
Tabla 6.3 Valores de R_i , R y H a diferentes porcentajes de compresión para $m=0.25$	79
Tabla 6.4 Posición del radio neutro " R_n " a diferentes porcentajes de compresión para $m=0.25$	79
Tabla 6.5 Valores de R_i , R y H a diferentes porcentajes de compresión para $m=1$	80
Tabla 6.6 Posición del radio neutro " R_n " a diferentes porcentajes de compresión para $m=1$	80
Tabla I.1 Datos de los resultados de las pruebas de compresión a 5 mm/min.....	86
Tabla I.2 Datos de los resultados de las pruebas de compresión a 50 mm/min.....	87

Tabla I.3 Datos de los resultados de las pruebas de compresión a 500 mm/min.....	88
Tabla II.1 Datos del material A de ΔR y ΔH para $m=0$, $m=.0.01$ y $m=0.03$	89
Tabla II.2 Datos del material A de ΔR y ΔH para $m=0.05$, $m=.0.08$ y $m=0.1$	90
Tabla II.3 Datos del material A de ΔR y ΔH para $m=0.15$, $m=.0.2$ y $m=0.25$	90
Tabla II.4 Datos del material A de ΔR y ΔH para $m=0.3$, $m=.0.35$ y $m=0.4$	91
Tabla II.5 Datos del material A de ΔR y ΔH para $m=0.5$, $m=.0.8$ y $m=1$	91
Tabla III.1 Datos del material B de ΔR y ΔH para $m=0$, $m=.0.01$ y $m=0.03$	92
Tabla III.2 Datos del material B de ΔR y ΔH para $m=0.05$, $m=.0.08$ y $m=0.1$	93
Tabla III.3 Datos del material B de ΔR y ΔH para $m=0.15$, $m=.0.2$ y $m=0.25$	93
Tabla III.4 Datos del material B de ΔR y ΔH para $m=0.3$, $m=.0.35$ y $m=0.4$	94
Tabla III.5 Datos del material B de ΔR y ΔH para $m=0.5$, $m=.0.8$ y $m=1$	94
Tabla IV.1 Datos del material A del porcentaje de cambios en deformación de diámetro (%D) y altura (%H) para $m=0$, $m=.0.01$ y $m=0.03$	95
Tabla IV.2 Datos del material A del porcentaje de cambios en deformación de diámetro (%D) y altura (%H) para $m=0.05$, $m=.0.08$ y $m=0.1$	96
Tabla IV.3 Datos del material A del porcentaje de cambios en deformación de diámetro (%D) y altura (%H) para $m=0.15$, $m=.0.2$ y $m=0.25$	96

Tabla IV.4 Datos del material A del porcentaje de cambios en deformación de diámetro (%D) y altura (%H) para $m=0.3$, $m=.0.35$ y $m=0.4$ 97

Tabla IV.5 Datos del material A del porcentaje de cambios en deformación de diámetro (%D) y altura (%H) para $m=0.5$, $m=.0.8$ y $m=1$ 97

Tabla V.1 Datos del material B del porcentaje de cambios en deformación de diámetro (%D) y altura (%H) para $m=0$, $m=.0.01$ y $m=0.03$ 98

Tabla V.2 Datos del material B del porcentaje de cambios en deformación de diámetro (%D) y altura (%H) para $m=0.05$, $m=.0.08$ y $m=0.1$ 99

Tabla V.3 Datos del material B del porcentaje de cambios en deformación de diámetro (%D) y altura (%H) para $m=0.15$, $m=.0.2$ y $m=0.25$ 99

Tabla V.4 Datos del material B del porcentaje de cambios en deformación de diámetro (%D) y altura (%H) para $m=0.3$, $m=.0.35$ y $m=0.4$ 100

Tabla V.5 Datos del material B del porcentaje de cambios en deformación de diámetro (%D) y altura (%H) para $m=0.5$, $m=.0.8$ y $m=1$ 100

Tabla VI.1 Deformación contra desplazamiento en el eje 1 en dirección X cuando $m= 0.1$ 101

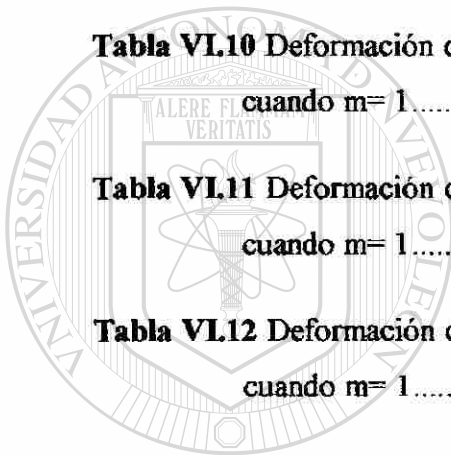
Tabla VI.2 Deformación contra desplazamiento en el eje 1 en dirección Y cuando $m= 0.1$ 101

Tabla VI.3 Deformación contra desplazamiento en el eje 2 en dirección X cuando $m= 0.1$ 101

Tabla VI.4 Deformación contra desplazamiento en el eje 2 en dirección Y cuando $m= 0.1$ 102

Tabla VI.5 Deformación contra desplazamiento en el eje 1 en dirección X cuando $m= 0.25$ 102

Tabla VI.6 Deformación contra desplazamiento en el eje 1 en dirección Y cuando $m= 0.25$	102
Tabla VI.7 Deformación contra desplazamiento en el eje 2 en dirección X cuando $m= 0.25$	103
Tabla VI.8 Deformación contra desplazamiento en el eje 2 en dirección Y cuando $m= 0.25$	103
Tabla VI.9 Deformación contra desplazamiento en el eje 1 en dirección X cuando $m= 1$	103
Tabla VI.10 Deformación contra desplazamiento en el eje 1 en dirección Y cuando $m= 1$	104
Tabla VI.11 Deformación contra desplazamiento en el eje 2 en dirección X cuando $m= 1$	104
Tabla VI.12 Deformación contra desplazamiento en el eje 2 en dirección Y cuando $m= 1$	104



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



